

01170

7
2ej

Sobre precompensación adaptable: Técnicas
frecuenciales

José Job Flores Godoy

Mayo 1994

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedico este trabajo:

A la memoria de José Job Flores Corona.

A mi madre y hermanas.

A la Dra. Cristina Verde y Dr. Gerardo Espinosa.

A amigos.

A la División de Estudios de Posgrado Facultad de Ingeniería.

Agradezco especialmente al Dr. Yu Tang por su paciencia y dirección, sin la cual no hubiera sido posible la realización de esta tesis.

Indice

1	Introducción	1
2	Formulación del problema y suposiciones generales	4
2.1	Suposiciones generales	4
2.2	Formulación del problema	5
2.3	Control de precompensación y rechazo a perturbaciones	7
2.3.1	Control de precompensación	7
2.3.2	Control de rechazo a perturbaciones	8
2.4	Estructura general de adaptación	8
3	Precompensación y rechazo a perturbaciones por bandas de frecuencia	11
3.1	Antecedentes	12
3.1.1	Sobre filtros digitales	12
3.1.2	Filtro de Lagrange	13
3.1.3	Aproximación de funciones de transferencia estables en una banda angosta de frecuencia utilizando funciones de transferencia de primer orden	16
3.1.4	Condición de excitación persistente	17
3.2	Diseño del precompensador $F(q)$ basado en modelos paramétricos	17

3.2.1	Diseño del precompensador no adaptable	18
3.2.2	Diseño del precompensador adaptable	18
3.3	Diseño del precompensador $F(q)$ basado en la compensación de la respuesta en frecuencia	20
3.3.1	Diseño del precompensador no adaptable	20
3.3.2	Diseño del precompensador adaptable	22
3.4	Diseño del control adaptable de rechazo a perturbaciones	24
4	Precompensación y rechazo a perturbaciones para señales de referencia periódicas	27
4.1	Diseño de la señal de precompensación $u_f(\cdot)$	27
4.1.1	Diseño de la señal de precompensación $u_f(\cdot)$ no adaptable	28
4.1.2	Diseño de la señal de precompensación $u_f(\cdot)$ adaptable	29
4.2	Control adaptable de rechazo a perturbaciones	33
5	Simulaciones y experimentos	36
5.1	Comparación entre los diferentes métodos de diseño	36
5.2	Simulaciones AFC	39
5.2.1	Sistema lineal de fase no mínima	39
5.2.2	Robot rígido	42
5.3	Experimentos	48
5.3.1	Descripción del proceso térmico de laboratorio	48
5.3.2	Descripción de la implementación del sistema de control	49
5.3.3	Especificaciones de diseño	49
5.3.4	Resultados	50

Indice

iv

6 Conclusiones

55

Bibliografía

57

Índice de figuras

2.1	Estructura del sistema de control.	5
2.2	Estructura del sistema de control de precompensación adaptable.	10
2.3	Estructura del identificador.	10
3.1	Estructura del precompensador $F(q)$	12
5.1	Estructura del sistema de control.	37
5.2	Índice de desempeño para el sistema con/sin precompensación adaptable cuando la señal de referencia es una onda cuadrada.	38
5.3	Índice de desempeño entre un sistema con/sin precompensación para una planta de fase no-mínima y una señal de referencia cuadrada.	41
5.4	Robot rígido de dos grados de libertad.	42
5.5	Error de seguimiento para la articulación 1. Gráfica superior, (1) PD+AFC, (2) PD+AFC+Cont. rechazo pert. DC y primera armónica, (3) PD+AFC+Cont. rechazo pert. DC, primera y tercera armónica. Gráfica inferior, PD.	44
5.6	Error de seguimiento para la articulación 2. Gráfica superior, (1) PD+AFC, (2) PD+AFC+Cont. rechazo pert. DC y primera armónica, (3) PD+AFC+Cont. rechazo pert. DC, primera y tercera armónica. Gráfica inferior, PD.	45
5.7	Posición real y deseada de la articulación 1.	46
5.8	Posición real y deseada de la articulación 2.	47

Indice de figuras

vi

5.9	Proceso térmico de laboratorio.	48
5.10	Indices de desempeño para el sistema completo.	51
5.11	Precompensador <i>Modred</i>	52
5.12	Precompensador <i>FSF</i>	53
5.13	Precompensador <i>AFC</i>	54

Capítulo 1

Introducción

La motivación de la existencia del control es debida a que los sistemas físicos en sus gran mayoría no se comportan como el usuario desea, por lo que es necesario encontrar una secuencia de entrada tal que la salida satisfaga los requerimientos que el usuario necesita o desea. Para lograr este objetivo es necesario tener una representación matemática de los sistemas físicos. Un problema que se presenta es que los modelos matemáticos no son perfectos por lo que se tienen incertidumbres en las representaciones matemáticas (dinámicas desconocidas o despreciadas, variación en los parámetros, perturbaciones externas, etc.).

Con el fin de lograr que los sistemas físicos (plantas) se comporten como el usuario desea o necesita (restricciones) aún cuando se presenten incertidumbres en el modelo matemático, se propone diseñar un dispositivo (controlador) que calcule en línea la entrada adecuada para satisfacer las restricciones deseadas. Una estructura generalmente utilizada para lograr este objetivo consiste en generar la señal de entrada adecuada para la planta a partir de la diferencia entre la salida de la planta y una señal que genera el usuario (referencia). Esta estructura se le conoce con el nombre de sistema realimentado.

Existen diferentes metodología para el diseño de controladores que utilizan la estructura de realimentación, entre ellas se pueden mencionar a las técnicas conocidas como robustas, donde se diseña un controlador de realimentación fijo de modo que se satisfagan las restricciones de diseño aún cuando se presenten incertidumbres. Por otro lado existen otras técnicas conocidas como adaptables, donde el diseño da como resultado un controlador de realimentación variante con el tiempo, de modo que se ajustan los parámetros del controlador conforme se presenten cambios o incertidumbres en la planta de forma que se sigan satisfaciendo las restricciones de diseño.

Para el diseño de controladores adaptables es necesario suponer una estructura al modelo

matemático de la planta y otra para el controlador, el procedimiento de diseño utiliza el principio de equivalencia cierta, y se calcula el valor de los parámetros del controlador a partir de la estructura y el valor de los parámetros de la planta. Esta es una restricción importante ya que si por alguna razón la estructura del modelo matemático de la planta no coincide con la estructura verdadera de su comportamiento, el sistema de control no tendrá el comportamiento deseado. Por otra parte, se deben hacer suposiciones en cuanto a la clase de plantas que son susceptibles de ser controladas utilizando técnicas adaptables, entre las que se pueden mencionar.

1. Es necesario conocer el signo de la ganancia de alta frecuencia.
2. Todos los ceros de la planta deben de ser estables.
3. Se debe conocer el orden relativo de la planta.
4. Es necesario conocer una cota superior sobre el orden de la planta.

Las últimas tres suposiciones son resultado del tipo de estructura que se supone a la planta y la forma de representación utilizada [Narendra 91].

Como objetivo de este trabajo se propone una estructura diferente para el controlador con el fin de tratar de relajar las suposiciones antes mencionadas. Como primer paso se propone una estructura para el controlador que consta de dos partes, la primera parte consiste en un controlador de realimentación que garantiza la estabilidad robusta del sistema en lazo cerrado; y como segunda parte se propone diseñar un control de precompensación y un control de rechazo a perturbaciones que tienen como finalidad mejorar el comportamiento del sistema en estado estable. Esta estructura se conoce como de dos grados de libertad [Åström & Wittenmark 90, Slotin & Li 91]. El segundo paso consiste en utilizar la representación de la respuesta en frecuencia de la planta para el diseño de los controladores, esta representación tiene como característica que para una frecuencia en particular sólo se necesitan dos parámetros para conocer el comportamiento completo de la planta sin importar cuán complicada sea está. La motivación para utilizar la representación anterior, radica en el hecho de que únicamente es necesario compensar el comportamiento de la planta en las frecuencias donde trabaje el sistema de control. Esta idea fue utilizada en [Tang 92] para diseñar un controlador de realimentación adaptable, donde se propone el esquema básico que se utiliza en la tesis. Se presenta además un caso especial cuando la señal de referencia es periódica, si bien el resultado es motivado por las ideas anteriores, el planteamiento del problema difiere en cuanto a la forma en que se presenta, la idea consiste en utilizar el enfoque usado en análisis de señales. Este enfoque tiene como ventaja el hecho de que se sintetizan señales directamente y no hay necesidad de proponer un sistema con una estructura determinada. Como resultado de utilizar este enfoque se tiene que el método de diseño se puede utilizar en

plantas con cero inestables. Si bien analizar este caso puede ser considerado como particular, existen sistemas de control que su objetivo es el repetir una tarea como es el caso que se presenta en robótica con el nombre de control repetitivo [Hara, et. al. 88, Tsai, et. al 88]. Este algoritmo también puede considerarse como un caso particular de controladores de aprendizaje como los propuestos por [Arimoto 85, DeLuca, et. al. 92].

La clase de plantas consideradas en este trabajo son las discretas, invariantes con el tiempo, de una entrada y una salida que pueden ser estabilizadas por un controlador de realimentación. Con respecto a las perturbaciones se consideran perturbaciones estables o marginalmente estables que puedan ser modeladas por sistemas ARMA (Autoregressive Moving Average) excitados por ruido blanco con media cero y magnitud espectral unitaria.

La presentación del trabajo es la siguiente: En el capítulo 2 se presentan las suposiciones generales, la formulación del problema así como la estructura de control a utilizar y la estructura del control adaptable a implementar. En el capítulo 3 se presentan dos técnicas de diseño para el control de precompensación adaptable basados en la compensación de respuesta en frecuencia. En el capítulo 4 se presenta el método de diseño cuando la señal de referencia es periódica. En el capítulo 5 se presentan simulaciones y experimentos para ejemplificar las mejoras en el comportamiento de un sistema de control. Finalmente en el capítulo 6 se presenta las conclusiones y trabajos a futuro.

Capítulo 2

Formulación del problema y suposiciones generales

A continuación se presentan las suposiciones generales sobre la clase de plantas a controlar, así como la estructura del sistema de control a utilizar. Una vez hecho esto se presenta la formulación del problema y la estrategia de control a seguir.

2.1 Suposiciones generales

- S1. Se considera la clase de modelos discretos, invariantes con el tiempo de una entrada y una salida que pueden ser estabilizadas por un controlador de retroalimentación.
- S2. Se supone conocido el controlador de realimentación fijo que garantice estabilidad robusta para el sistema.
- S3. Se consideran perturbaciones externas modeladas por un sistema ARMA (Autoregressive Moving Average) estable o a lo más marginalmente estable, es decir, con polos de magnitud unitaria; excitado por ruido blanco con media cero y magnitud espectral unitaria.
- S4. La estructura del sistema de control consiste en un controlador de realimentación fijo, una red de precompensación y una señal de control de rechazo a perturbaciones como la que se muestra en la figura 2.1.
donde

- $r(\cdot)$ señal de referencia deseada.

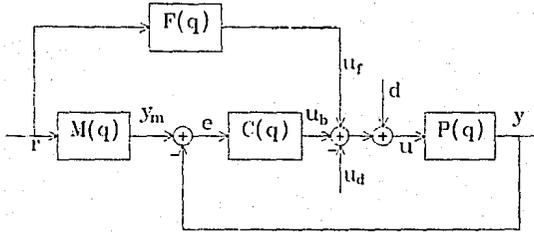


Figura 2.1: Estructura del sistema de control.

- $M(q)$ función de transferencia que proporciona el comportamiento deseado del sistema en lazo cerrado.
- $F(q)$ función de transferencia del control de precompensación.
- $C(q)$ función de transferencia del controlador de realimentación fijo que satisface la suposición **S2**.
- $d(\cdot)$ perturbación a la entrada del sistema que satisface la suposición **S3**.
- $u_d(\cdot)$ señal de control de rechazo a perturbaciones.
- $P(q)$ función de transferencia de la planta que satisface la suposición **S1**.

2.2 Formulación del problema

Considérese un sistema discreto lineal e invariante con el tiempo de una entrada y una salida descrito por:

$$y(lT) = P(q)[u(lT) + d(lT)] \quad \forall l \in \mathbb{Z}_+, T \in \mathbb{R}_+ \quad (2.1)$$

con

- T periodo de muestreo.
- $u(\cdot)$ entrada del proceso.
- $y(\cdot)$ salida del proceso.
- $d(\cdot)$ perturbaciones a la entrada del proceso que satisfacen la suposición **S3**.

- $P(q)$ función de transferencia del proceso que satisface la suposición **S1**.
- q operador corrimiento.

El objetivo de diseño consiste en que la salida de la planta siga una señal de referencia $y_m(\cdot)$, generada como la salida de un modelo deseado $M(q)$, tal que el error de seguimiento

$$e(lT) \triangleq y_m(lT) - y(lT) \quad (2.2)$$

converja asintóticamente a cero

$$\lim_{l \rightarrow \infty} e(lT) \rightarrow 0 \quad (2.3)$$

manteniendo todas las señales internas acotadas a pesar de la existencia de perturbaciones y desconocimiento paramétrico en la planta, utilizando la estructura del sistema de control que se muestra en la figura 2.1.

Metodología de diseño

De la figura 2.1, la ley de control está dada por

$$u(lT) = u_b(lT) + u_f(lT) - u_d(lT) \quad (2.4)$$

$$u_b(lT) = C(q)e(lT) \quad (2.5)$$

$$u_f(lT) = F(q)r(lT) \quad (2.6)$$

- $C(q)$ controlador de retroalimentación que satisface la suposición **S2**.
- $F(q)$ controlador de precompensación diseñado para mejorar el desempeño de seguimiento.
- $u_d(\cdot)$ señal de control de rechazo a perturbaciones.

Bajo estas suposiciones, la formulación del problema de diseño es la siguiente

- D1.** Diseñar un control de precompensación $F(q)$ adaptable, tal que mejore el desempeño en estado estable.
- D2.** Diseñar una señal de rechazo a perturbaciones $u_d(\cdot)$ adaptable que elimine las perturbaciones externas.
- D3.** Todas las señales internas deben ser acotadas.

2.3 Control de precompensación y rechazo a perturbaciones

A continuación se analiza el caso en que todas las funciones de transferencia son conocidas.

2.3.1 Control de precompensación

Considere el sistema de control de la figura 2.1. La salida del sistema en lazo cerrado es

$$y(tT) = \left[\frac{P(q)C(q) + P(q)F(q)M^{-1}(q)}{1 + P(q)C(q)} \right] y_m(tT) + \frac{P(q)}{1 + P(q)C(q)} [d(tT) - u_d(tT)] \quad (2.7)$$

Debido a que $C(q)$ cumple con la suposición **S2**, mientras el precompensador $F(q)$ sea estable, la estabilidad del sistema en lazo cerrado se preserva.

Con objeto de satisfacer las condiciones de diseño **D1** y **D3**, si se escoge a $F(q)$ tal que

$$P(e^{j\omega T})F(e^{j\omega T}) = M(e^{j\omega T}) \quad \forall \omega \in \left[0, \frac{\pi}{T}\right) \quad (2.8)$$

sustituyendo (2.8) en (2.7), se puede obtener que el error de seguimiento $e(\cdot)$ es

$$e(e^{j\omega T}) = -P_d(e^{j\omega T}) [d(e^{j\omega T}) - u_d(e^{j\omega T})] \quad (2.9)$$

con

$$P_d(e^{j\omega T}) \triangleq \frac{P(e^{j\omega T})}{1 + P(e^{j\omega T})C(e^{j\omega T})} \quad (2.10)$$

y acotado por

$$\|e(e^{j\omega T})\|_\infty \leq \|P_d(e^{j\omega T})\|_\infty \|d(e^{j\omega T}) - u_d(e^{j\omega T})\|_\infty \quad (2.11)$$

Observación 2.3.1 La condición (2.8) impone una restricción importante en la clase de plantas susceptibles a controlar, ya que implica que la función de transferencia de la planta tenga todos sus ceros estables, es decir, que la planta sea de fase mínima.

2.3.2 Control de rechazo a perturbaciones

Con respecto al control de rechazo a perturbaciones, si es conocida la naturaleza de la perturbación, es decir, se satisface la condición S3, entonces se puede diseñar el control de rechazo de perturbaciones tal que

$$u_d(tT) = d(tT) \quad (2.12)$$

Si se cumple las condiciones (2.12) y (2.8), entonces el error de seguimiento convergerá a cero asintóticamente.

2.4 Estructura general de adaptación

El propósito final del trabajo consiste en diseñar un control de precompensación adaptable y un control de rechazo a perturbaciones que utilicen la información de la respuesta en frecuencia de una planta.

Para lograr que el precompensador sea más eficiente, se propone utilizar un control adaptable de tipo indirecto, donde primero se identifiquen los parámetros de interés de la planta, y una vez hecho esto se procede a diseñar el controlador de precompensación. Este esquema tiene como ventaja que se puede seleccionar el algoritmo de identificación de forma independiente del algoritmo de diseño del controlador, lo que permite una mayor flexibilidad en la selección del algoritmo de identificación y el algoritmo de diseño del controlador de acuerdo a las necesidades y condiciones que se deben satisfacer. Ahora bien, es necesario que las señales utilizadas en el algoritmo de identificación satisfagan la condición de excitación persistente para garantizar que el valor de los parámetros estimados converja a su valor verdadero, si bien es cierto que esta condición es un requisito severo, la estructura de los identificadores presentados proporcionan una alternativa que suaviza esta restricción. El esquema de adaptación se puede ver en la figura 2.2 (con I. D. el identificador de los parámetros de la planta $P(\cdot)$).

En particular, en este trabajo la estructura del identificador es como la que se muestra en la figura 2.3, donde $H_i(q)$ son filtros paso banda que tiene como objetivo, separar las señales de entrada del identificador de modo que se pueda estimar el comportamiento de la planta en cada una de las bandas de frecuencia dependiendo de la naturaleza de las señales. Esta estructura tiene la posibilidad de identificar una parte de la planta según el tipo de señal que se tenga a la entrada del identificador. Esta característica es ventajosa ya que solo se identifican los parámetros de la planta en la banda de frecuencia donde se presente la condición de excitación persistente.

Con respecto al control adaptable de rechazo a perturbaciones lo que se propone es identificar la naturaleza de las perturbaciones y tratar de anular sus efectos. En el transcurso del trabajo el esquema de control de rechazo a perturbaciones es muy similar al esquema que se presenta en el caso de sistemas de control adaptable a un modelo de referencia [Sastry & Bodson 89].

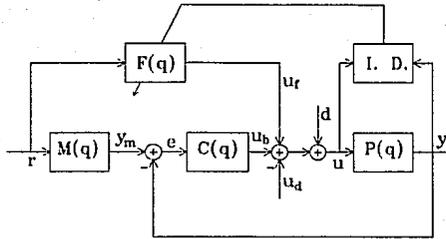


Figura 2.2: Estructura del sistema de control de precompensación adaptable.

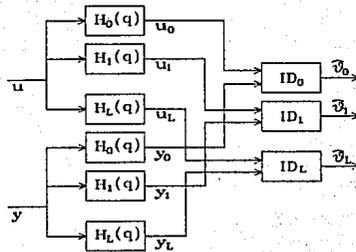


Figura 2.3: Estructura del identificador.

Capítulo 3

Precompensación y rechazo a perturbaciones por bandas de frecuencia

A continuación se presentan dos procedimientos para diseñar el precompensador $F(q)$ adaptable y un control de rechazo a perturbaciones, la estructura del sistema de control se puede ver en la figura 2.2.

La estrategia de diseño para $F(q)$ consiste en separar la respuesta en frecuencia del sistema en un conjunto de bandas utilizando un banco de filtros paso-banda $H_k(q)$ (ver figura 3.1).

Esta estructura tiene como ventajas la posibilidad de compensar únicamente en las bandas de frecuencia donde vaya a trabajar la planta debida a las características frecuenciales de la señal de entrada y como consecuencia de esto, solamente se adaptan los parámetros asociados a dichas bandas de frecuencia, con la certeza de que se satisface la condición de excitación persistente, que garantiza la convergencia de los parámetros estimados a sus valores verdaderos en forma exponencial [Anderson et. al. 86, Sastry & Bodson 89].

Para el primero de los procedimientos de diseño de $F(q)$, se representa el comportamiento de la planta en cada una de las bandas de frecuencia con un modelo estable de orden reducido. Los modelos de orden reducido de cada banda se diseñan de modo que su respuesta en frecuencia sea lo mas parecida posible a la respuesta en frecuencia de la planta en dicha banda. Esto se logra si la banda de frecuencias en la cual se aproxima el comportamiento de la planta es estrecha. Una vez que se tiene los modelos de orden reducido para la planta, utilizando esta información se diseña el precompensador $F_k(q)$ asociado a dicha banda [Tang, et. al. 93].

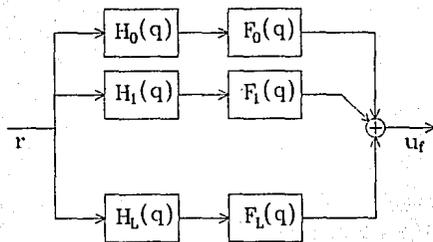


Figura 3.1: Estructura del precompensador $F(q)$.

El segundo procedimiento para diseñar $F(q)$ consiste en encontrar un controlador que compense la respuesta en frecuencia de la planta en un conjunto finito de puntos de frecuencia. El precompensador $F(q)$ se sintetiza al interpolar el conjunto de puntos donde se quiere compensar la planta. La estructura del precompensador $F(q)$ se puede ver en la figura 3.1. En particular se presenta el caso en que el algoritmo de interpolación está dado por un filtro de Lagrange [Tang 92, Tang & Ortega 93]. Este esquema tiene la ventaja de utilizar una representación no paramétrica de la planta para el diseño del precompensador con la cual se tiene una mayor flexibilidad para poder satisfacer la condición de excitación persistente. Por otra parte, muy en particular para la representación no paramétrica de la respuesta en frecuencia, sin importar la complejidad de la planta, para cada punto de frecuencia solo son necesarios dos parámetros para conocer el comportamiento completo de la planta.

3.1 Antecedentes

Para la exposición de las siguientes secciones son necesarios algunos antecedentes de análisis de señales que se presentan a continuación.

3.1.1 Sobre filtros digitales

Los filtros digitales generalmente son clasificados de acuerdo a su comportamiento con respecto a la respuesta impulso [Kuc 88]. Es claro que los filtros digitales pueden ser vistos como funciones de transferencia estables. Partiendo de esta condición, se dividen los filtros digitales de la siguiente forma, sea $h(k)$ la respuesta a impulso de un filtro $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, entonces,

IIR. Se dice que un filtro digital es **IIR** o de respuesta a impulso infinita, si para una entrada impulso unitaria, su salida tiene duración infinita, es decir

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h(k) \rightarrow 0 \quad (3.1)$$

Generalmente se conoce a estos filtros como recursivos, ya que la salida en un instante depende de la entrada y sus retardos así como de los retardos de la salida.

FIR. Se dice que un filtro digital es **FIR** o de respuesta a impulso finita, si para un entrada impulso unitaria a un filtro, su salida tiene duración finita, es decir

$$h(k) = 0 \quad \text{para } k > K_n \quad (3.2)$$

con $K_n < \infty$. Generalmente se conoce a este tipo de filtros como filtros no recursivos, ya que la salida no depende de la entrada y sus retardos así como de retardos de la salida misma.

3.1.2 Filtro de Lagrange

El filtro de Lagrange es un filtro FIR que es implementado utilizando una estructura recursiva [Bitmead & Anderson 81]. La estructura de este filtro esta basado en el hecho de que un filtro FIR con respuesta a impulso de duración N , puede ser descrito por N puntos equiespaciados sobre el círculo unitario, es decir, para una k dada,

$$H_k(q) = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}ki} q^{-i} \right) = \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} q^{-1}} \quad (3.3)$$

Observación 3.1.1 La forma recursiva del filtro de Lagrange tiene un polo en $e^{j\frac{2\pi}{N}k}$ que cancela con un cero. El filtro solo dejara pasar señales de frecuencia cercanas a la frecuencia del polo donde se presenta la cancelación.

Observación 3.1.2 Debido a la cancelación de polos y ceros, para evitar problemas de estabilidad, se suele sustituir q por $\frac{q}{\mu}$ con μ marginalmente menor a la unidad.

Observación 3.1.3 Mientras mayor sea el número de puntos con los que se calcula el filtro de Lagrange, el filtro será más selectivo.

Proposición 1. Para que un filtro de Lagrange tenga una respuesta en frecuencia con un valor deseado y además pueda ser representado por funciones de transferencia con coeficientes reales, lo único que se necesita es asociar los pares de filtros elementales complejos conjugados (3.3).

Prueba: Para una k dada diferente de cero, el filtro elemental asociado y su ganancia compleja es de la forma

$$\frac{1}{N} (A_k + jB_k) \frac{1 - z^{-N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} q^{-1}} \quad (3.4)$$

donde A_k y B_k representan la parte real e imaginaria deseada del filtro en la frecuencia $e^{j\frac{2\pi}{N}k}$. El filtro elemental $N - k$ tiene como frecuencia central $e^{-j\frac{2\pi}{N}k}$ y la característica real de la respuesta a impulso implica que la ganancia compleja conjugada debe ser $A_k - jB_k$. Agrupando el par complejo conjugado se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} (A_k + jB_k) \frac{1 - z^{-N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} q^{-1}} + \frac{1}{N} (A_k - jB_k) \frac{1 - z^{-N}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}k} q^{-1}} &= \\ &= \frac{1}{N} \frac{(1 - z^{-N})(C_k + D_k q^{-1})}{1 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right) q^{-1} + q^{-2}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde

$$\begin{aligned} C_k &= 2A_k \\ D_k &= -2A_k \cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right) - 2B_k \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{N}k\right) \end{aligned}$$

Cuando $k = 0$, el filtro elemental con ganancia deseada es

$$A_0 \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} \quad (3.6)$$

por lo que es claro que la ganancia deseada esta en términos de una cantidad real A_0 .

◇◇◇

Utilizando estas características del filtro de Lagrange, se puede pensar que con la superposición de filtros para diferentes valores de k se puede ver como un problema de interpolación, donde si se dan un conjunto de puntos de la respuesta en frecuencia de un sistema, se puede encontrar una función de transferencia que pase por este conjunto de puntos.

Proposición 2. Sea $G(q)$ una función de transferencia estable, se puede aproximar por un modelo de interpolación $G_I(q)$, en un conjunto Ω_k definido como

$$\Omega_k \triangleq \left\{ \omega_k \mid \omega_k = \frac{2\pi}{NT}k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \right\} \quad (3.7)$$

con $N \triangleq 2L + 1$, T el período de muestreo y L el número de bandas de frecuencia deseadas, entonces se define como el modelo de interpolación a

$$G_I(q) = \sum_{k=0}^L (a_k + b_k q^{-1}) H_k(q) \quad (3.8)$$

donde

$$H_k(q) = \begin{cases} \frac{1}{N} \frac{1 - \mu^N q^{-N}}{1 - \mu q^{-1}}, & k = 0 \\ \frac{1}{N} \frac{1 - \mu^N q^{-N}}{1 - 2\mu \cos(\omega_k T) q^{-1} + \mu^2 q^{-2}}, & k = 1, 2, \dots, L \end{cases} \quad (3.9)$$

con μ marginalmente menor a la unidad para garantizar la estabilidad del filtro, y los coeficientes a_k y b_k de (3.8) se calculan como

$$\begin{aligned} a_0 &= G(1), \quad b_0 = 0 \\ \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 \cos(\omega_k T) & -2 \operatorname{sen}(\omega_k T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{Re} \left\{ G(e^{j\omega_k T}) \right\} \\ \operatorname{Im} \left\{ G(e^{j\omega_k T}) \right\} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.10)$$

con $k = 1, 2, \dots, L$.

Prueba: Utilizando superposición y la proposición 1.



Características del modelo de interpolación: La función de transferencia obtenida con la interpolación, $G_I(\cdot)$, tiene las siguientes características [Parker & Bitmead 87]:

- La respuesta en frecuencia de $G_I(\cdot)$ tiene la misma respuesta en frecuencia que $G(\cdot)$ en los puntos de muestreo, es decir

$$G_I(e^{j\omega T}) = G(e^{j\omega T}), \quad \forall \omega \in \Omega_k \quad (3.11)$$

- El error de aproximación esta acotado por

$$\|G_I(e^{j\omega T}) - G(e^{j\omega T})\|_{\infty} \leq R\rho^N \quad (3.12)$$

donde $0 < R < \infty$ y $0 < \rho < 1$.

Observación 3.1.4 Si bien esta proposición se presenta para el caso en que se aproxima una función de transferencia estable en lazo abierto, este procedimiento puede ser utilizado para aproximar funciones de transferencia inestables con funciones de transferencia estables tales que tengan en común el valor de la respuesta en frecuencia en un conjunto de puntos cuando dicha función de transferencia se encuentra en lazo cerrado con un controlador estabilizante.

3.1.3 Aproximación de funciones de transferencia estables en una banda angosta de frecuencia utilizando funciones de transferencia de primer orden

Intuitivamente, si se tiene una función de transferencia estable $G(q)$, se puede aproximar su comportamiento frecuencial en una banda angosta de frecuencias utilizando una función de transferencia de primer orden con retardo de modo [Tang, et. al. 93]

$$G_k(e^{j\omega T}) = G(e^{j\omega T})H_k(e^{j\omega T}) \quad \text{para } \omega \in [\omega_k - \bar{\omega}_k, \omega_k + \bar{\omega}_k] \quad (3.13)$$

donde

- $G_k(\cdot)$ función de transferencia de primer orden.
- $H_k(\cdot)$ filtro paso banda con frecuencia central ω_k y ancho de banda $2\bar{\omega}_k$.

La aproximación está acotada como

$$\|G_k(e^{j\omega T}) - G(e^{j\omega T})H_k(e^{j\omega T})\| \leq \epsilon \quad (3.14)$$

donde ϵ dependerá de la selectividad del filtro y de la suavidad de la respuesta en frecuencia de $G(\cdot)$ en el ancho de banda del filtro.

Para este caso se puede seleccionar la función de transferencia de primer orden de dos tipos diferentes, dependiendo de la característica de la respuesta impulso, el primer tipo consiste en una función de transferencia de primer orden **FIR**, del tipo

$$b_0(1 - b_1 q^{-1})q^{-m}, \quad b_0 > 0 \quad (3.15)$$

y el segundo tipo consiste en una función de transferencia de primer orden **IIR** del tipo

$$\frac{bq^{-m}}{1 - aq^{-1}}, \quad b > 0 \quad (3.16)$$

donde los parámetros de la función de transferencia de primer orden escogida deben ser tales que la respuesta en frecuencia coincida con la respuesta en frecuencia de la función de transferencia $G(\cdot)$.

Intuitivamente se sugiere utilizar funciones de transferencia **FIR** y con tantos retardos como tenga la función de transferencia $G(\cdot)$.

3.1.4 Condición de excitación persistente

Definición: Sea $\phi(iT)$ un vector de funciones discretas con $T > 0$ y $i \in \mathbb{Z}_+$, se dice que $\phi(\cdot)$ es de excitación persistente si existen constantes $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$ y $S \in \mathbb{Z}_+$ tales que para cada entero j se cumpla que ([Anderson et. al. 86])

$$\alpha_2 I > \sum_{i=j}^{j+S} \phi(iT)\phi(iT)^T > \alpha_1 I \quad (3.17)$$

3.2 Diseño del precompensador $F(q)$ basado en modelos paramétricos

Se presenta el primer método de diseño para el precompensador $F(q)$ basado en separar en bandas de frecuencia la representación de la planta y aproximar dicho comportamiento por una función de transferencia de primer orden.

La condición dada en (2.8) para el diseño de $F(q)$ puede re-escribirse para el caso en el que se utilicen funciones de transferencia de primer orden para aproximar el comportamiento de una función de transferencia estable en un ancho de banda angosto como

$$P_k(e^{j\omega T})F_k(e^{j\omega T}) = M_k(e^{j\omega T}) \quad \forall \omega \in \Omega_k \quad (3.18)$$

con

$$\Omega_k \in [\omega_k - \bar{\omega}_k, \omega_k + \bar{\omega}_k], \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, L \quad (3.19)$$

donde

- L es el número de bandas de frecuencia centradas en ω_k y ancho de banda $2\bar{\omega}_k$.
- $P_k(\cdot)$, $F_k(\cdot)$ y $M_k(\cdot)$ son las representaciones de la planta, precompensador y modelo por funciones de transferencia de orden reducido en la banda k , respectivamente.

Se presenta el procedimiento de diseño del precompensador $F(q)$ utilizando funciones de transferencia de primer orden **FIR**, para representar el comportamiento de la planta en una banda de frecuencias estrecha y un banco de filtros de Lagrange.

3.2.1 Diseño del precompensador no adaptable

Utilizando funciones de transferencia de primer orden **FIR**, se puede aproximar el comportamiento de la planta y el modelo para una banda k como

$$F_k(q) = \frac{b_k q^{-1}}{1 - a_k q^{-1}} \quad (3.20)$$

$$M_k(q) = \frac{b_k^* q^{-1}}{1 - a_k^* q^{-1}} \quad (3.21)$$

Utilizando la condición de diseño de (3.18), se calcula el precompensador para la banda k

$$F_k(q) = \frac{b_k^*}{b_k} \left(\frac{1 - a_k q^{-1}}{1 - a_k^* q^{-1}} \right) \quad (3.22)$$

la señal del precompensador se sintetiza como

$$u_f(tT) = \sum_{k=0}^L F_k(q) r_k(tT) \quad (3.23)$$

donde $r_k(tT)$ es la señal de referencia después de pasar por el filtro de la banda k , $H_k(q)$.

Observación 3.2.1 Para garantizar que las funciones de transferencias que forman a los precompensadores $F_k(\cdot)$ sean causales, es necesario que el retardo puro del modelo $M(\cdot)$ sea mayor o igual al retardo puro de la planta [Åström & Wittenmark 90].

Observación 3.2.2 Las plantas generalmente tienen un comportamiento de filtro paso-bajas, por lo que se sugiere que se escojan las bandas de frecuencia separadas de forma logarítmica, y el ancho de banda $\bar{\omega}_k$ tal que los filtros no se traslapen para evitar distorsión.

3.2.2 Diseño del precompensador adaptable

Debido a la incertidumbre del modelo de la planta, a las posibles variaciones de los parámetros con el tiempo, se sugiere implementar el precompensador utilizando un esquema adaptable.

En particular la estructura usada fue de tipo indirecto. La señal $u_f(tT)$ se sintetiza usando (3.23). La estructura de precompensador adaptable se puede ver en la Figura 2.2

Se puede parametrizar la dinámica aproximada de la planta en cada banda como

$$y_k(tT) = \phi_k^T(tT - T)\theta_k + d_k(tT) \quad k = 0, 1, \dots, L \quad (3.24)$$

$$\phi_k(tT) = \begin{bmatrix} y_k(tT) & u_k(tT) \end{bmatrix}^T \quad (3.25)$$

$$\theta_k = \begin{bmatrix} a_k & b_k \end{bmatrix}^T \quad (3.26)$$

con

- $\phi_k(tT)$ regresor de la banda k .
- θ_k vector de parámetros de la banda k .
- $d_k(tT)$ perturbaciones debido a ruido externo, errores en la aproximación, respuesta transitoria, etc.

Defínanse a los valores estimados de θ_k como

$$\hat{\theta}_k \triangleq \begin{bmatrix} \hat{a}_k & \hat{b}_k \end{bmatrix}^T \quad (3.27)$$

y sea la ley de adaptación del tipo gradiente normalizado $\forall k = 0, 1, \dots, L$, entonces

$$\hat{\theta}_k(tT) = \hat{\theta}_k(tT - T) + \gamma_k(tT) \frac{\phi_k(tT - T)\epsilon_k(tT)}{1 + \phi_k^T(tT - T)\phi_k(tT - T)} \quad (3.28)$$

$$\epsilon_k(tT) \triangleq y(tT) - \phi_k^T(tT - T)\hat{\theta}_k(tT - T) \quad (3.29)$$

$$\gamma_k(tT) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{1}{T_k} \sum_{\tau=t-T_k}^{t+T_k} \phi_k^T(\tau T)\phi_k(\tau T) \leq \kappa_k I \\ \bar{\gamma}_k & \text{de otro modo} \end{cases} \quad (3.30)$$

donde

- $\epsilon_k(tT)$ error de estimación para la banda k .
- $\gamma_k(tT)$ ganancia de adaptación para la banda k , con $\bar{\gamma}_k \in (0, 2)$, $T_k > 0$ y $\kappa_k > 0$ que es una variable de diseño que se escoge en función de la magnitud del ruido que se presente en cada banda.

Con la condición (3.30) se logra que solo se adapten los parámetros de la banda en la que tenga un regresor de excitación persistente, lo que garantiza

$$\hat{\theta}_k(tT) \rightarrow \theta_k + \epsilon_0 \quad (3.31)$$

es decir, los parámetros estimados $\hat{\theta}_k(\cdot)$ convergen a una vecindad ϵ_0 de sus valores verdaderos de forma exponencial, donde ϵ_0 es una vecindad del origen, cuyo tamaño depende de la cota de las perturbaciones [Anderson et. al. 86; Sastry & Bodson 89].

Observación 3.2.3 *La estabilidad del sistema de control se garantiza ya que la única restricción a cumplir es que la señal resultante del precompensador $F(\cdot)$ sea acotada, y esta señal es acotada debido a que los parámetros estimados para cada banda son acotados, ya que sólo se adaptan los parámetros de las bandas donde se cumpla la condición de excitación persistente.*

3.3 Diseño del precompensador $F(q)$ basado en la compensación de la respuesta en frecuencia

El método de diseño para el precompensador se basa en la idea de compensar la respuesta en frecuencia de la planta en un conjunto de puntos de frecuencia y la implementación del precompensador usando un banco de filtros de Lagrange.

La diferencia fundamental con respecto al método de diseño anterior consiste en que al sólo compensar la planta en un conjunto de puntos de frecuencia, no es necesaria una representación paramétrica de la misma. Esta representación no paramétrica tiene la ventaja de que sin importar cuán compleja sea la planta para cada punto de frecuencia, sólo basta con dos parámetros para tener una representación completa.

3.3.1 Diseño del precompensador no adaptable

A continuación se presenta el segundo método de diseño para el precompensador $F(q)$. En este caso se compensa la respuesta en frecuencia de la planta en un conjunto finito de puntos dados por Ω_k definido ahora por (3.7). Una vez que se tiene los valores de compensación de la planta en el conjunto de puntos Ω_k se utiliza un filtro de Lagrange para obtener una función de transferencia de interpolación con la que se sintetiza la señal $u_f(tT)$.

Para el conjunto Ω_k la planta y el modelo pueden ser representados por números complejos

$$P(e^{j\omega_k T}) = P_k e^{j\alpha_k} \quad (3.32)$$

$$M(e^{j\omega_k T}) = M_k e^{j\beta_k} \quad (3.33)$$

donde

- P_k y M_k son la magnitud de la respuesta en frecuencia de la planta y el modelo, respectivamente.
- α_k y β_k son la fase de la respuesta en frecuencia de la planta y el modelo, respectivamente.

Ahora la condición de diseño dada en (3.18) debe satisfacer el conjunto Ω_k .

Observación 3.3.1 Una condición necesaria a satisfacer es que la planta $P(q)$ no tenga singularidades en $e^{j\omega_k T}$ para todo $\omega_k \in \Omega_k$, esto es para evitar hacer divisiones entre cero.

Si la condición anterior se satisface, el precompensador para cada uno de los k puntos del conjunto Ω_k se obtiene como

$$F(e^{j\omega_k T}) \triangleq F_k e^{j\gamma_k} \quad (3.34)$$

$$F_k = \frac{M_k}{P_k} \quad (3.35)$$

$$\gamma_k = \beta_k - \alpha_k \quad (3.36)$$

Por último el precompensador de interpolación se obtiene utilizando (3.8) con los parámetros calculados con (3.10) y $\text{Re}\{F(\cdot)\}$, $\text{Im}\{F(\cdot)\}$.

La señal del precompensador es sintetizada por

$$u_f(tT) = \sum_{k=0}^L (c_k + d_k q^{-1}) r_k(tT) \quad (3.37)$$

$$r_k(tT) = H_k(q) r(tT) \quad (3.38)$$

con c_k y d_k dados por (3.10) y $H_k(q)$ dado por (3.9).

Observación 3.3.2 En realidad lo que se está haciendo es producir un controlador aproximado al interpolar los puntos de frecuencia,

$$F_I(e^{j\omega T}) = F(e^{j\omega T}) \quad \forall \omega \in \Omega_k \quad (3.39)$$

$$F_I(q) = \sum_{k=0}^L (c_k + d_k q^{-1}) H_k(q) \quad (3.40)$$

3.3.2 Diseño del precompensador adaptable

El esquema adaptable consiste en identificar los puntos de la respuesta en frecuencia del conjunto Ω_k y con esta información calcular los parámetros del precompensador. Esquemáticamente la estructura del controlador se puede ver en la figura 2.2.

Considere a la representación de la planta en la banda k

$$P_k(q) = (a_k + b_k q^{-1}) H_k(q) \quad (3.41)$$

se puede parametrizar cada una de las bandas como

$$y_k(t) = \phi_k^T(tT) \theta_k + d_k(tT) \quad (3.42)$$

$$\phi_k(tT) = \begin{bmatrix} u_k(tT) & u_k(tT - T) \end{bmatrix}^T \quad (3.43)$$

$$\theta_k = \begin{bmatrix} -a_k & b_k \end{bmatrix}^T \quad (3.44)$$

$$u_k(tT) = H_k(q)u(tT) \quad (3.45)$$

con

- $k = 0, 1, \dots, L$ el número de bandas en que se quiere dividir el intervalo $[0, \frac{\pi}{T})$.
- $\phi_k(tT)$ regresor de la banda k .
- θ_k vector de parámetros de la banda k .
- $d_k(tT)$ perturbaciones debidas a ruido externo, errores en la aproximación, comportamiento transitorio del sistema, etc.

Sea $\hat{\theta}_k$ el vector de parámetros estimados de θ_k .

$$\hat{\theta}_k(tT) = \begin{bmatrix} \hat{a}_k(tT) & \hat{b}_k(tT) \end{bmatrix}^T \quad (3.46)$$

Utilizando un algoritmo de gradiente normalizado, la ley de adaptación es

$$\hat{\theta}_k(tT + T) = \hat{\theta}_k + \gamma_k(tT) \frac{\phi_k(tT)\epsilon_k(tT)}{1 + \phi_k^T(tT)\phi_k(tT)}, \quad k = 0, 1, \dots, L \quad (3.47)$$

$$\epsilon_k(tT) \triangleq H_k(q)y(tT) - \phi_k^T(tT)\hat{\theta}_k(tT) \quad (3.48)$$

con

- $\epsilon_k(tT)$ error de estimación.
- $\gamma_k(tT)$ ganancia de adaptación definida por (3.30).

En este caso también se monitorea la condición de excitación persistente con lo que se logra adaptar únicamente a los parámetros de las bandas donde se tengan señales con suficiente información lo que garantiza que los parámetros estimados convergerán a una vecindad de su valor verdadero y esta vecindad depende de la magnitud de las perturbaciones que se presenten [Anderson et. al. 86, Sastry & Bodson 89].

La estabilidad del sistema de control se garantiza utilizando argumentos similares a los usados para el primer método de diseño, es decir, debido a la estructura del sistema de control, todas las señales del sistema de control sin precompensación son acotadas, por lo tanto al añadirse el precompensador sólo hay que pedir que la señal $u_f(tT)$ sea acotada para que todo siga siendo acotado. La señal $u_f(tT)$ es acotada si y solo si los parámetros de todos los precompensadores $F_k(\cdot)$ son acotados y a su vez los parámetros son acotados debido a que solo se adaptan cuando se tiene señales de excitación persistente.

Para la implementación de este controlador, se propone utilizar un filtro de Lagrange normalizado dado como

$$H'_k(q) = \begin{cases} \frac{1 - \mu^N q^{-N}}{N - 1 - \mu q^{-1}}, & k = 0 \\ \frac{2(1 - \mu^N q^{-N})(1 - \mu \cos(\omega_k T) q^{-1})}{N - 1 - 2\mu \cos(\omega_k T) q^{-1} + \mu^2 q^{-2}}, & k = 1, 2, \dots, L \end{cases} \quad (3.49)$$

con el cual se generaran $y_k(tT)$ y $u_k(tT)$ que son las señales necesarias para la identificación de la respuesta en frecuencia. Se sugiere este procedimiento ya que de esta forma se tiene un mapa suave entre los parámetros de los filtros y la respuesta en frecuencia estimada, condición que no se presenta para frecuencias cercanas a cero si la respuesta en frecuencia estimada es obtenida utilizando el mapa inverso dado por (3.10).

Para sintetizar la señal de precompensación se utiliza el siguiente algoritmo:

Utilizando un algoritmo de gradiente normalizado, la ley de adaptación es

$$\hat{\theta}_k(tT + T) = \hat{\theta}_k + \gamma_k(tT) \frac{\phi_k(tT) \epsilon_k(tT)}{1 + \phi_k^T(tT) \phi_k(tT)}, \quad k = 0, 1, \dots, L \quad (3.47)$$

$$\epsilon_k(tT) \triangleq H_k(q)y(tT) - \phi_k^T(tT)\hat{\theta}_k(tT) \quad (3.48)$$

con

- $\epsilon_k(tT)$ error de estimación.
- $\gamma_k(tT)$ ganancia de adaptación definida por (3.30).

En este caso también se monitorea la condición de excitación persistente con lo que se logra adaptar únicamente a los parámetros de las bandas donde se tengan señales con suficiente información lo que garantiza que los parámetros estimados convergerán a una vecindad de su valor verdadero y esta vecindad depende de la magnitud de las perturbaciones que se presenten [Anderson et. al. 86, Sastry & Bodson 89].

La estabilidad del sistema de control se garantiza utilizando argumentos similares a los usados para el primer método de diseño, es decir, debido a la estructura del sistema de control, todas las señales del sistema de control sin precompensación son acotadas, por lo tanto al añadirse el precompensador sólo hay que pedir que la señal $u_f(tT)$ sea acotada para que todo siga siendo acotado. La señal $u_f(tT)$ es acotada si y solo si los parámetros de todos los precompensadores $F_k(\cdot)$ son acotados y a su vez los parámetros son acotados debido a que solo se adaptan cuando se tiene señales de excitación persistente.

Para la implementación de este controlador, se propone utilizar un filtro de Lagrange normalizado dado como

$$H'_k(q) = \begin{cases} \frac{1}{N} \frac{1 - \mu^N q^{-N}}{1 - \mu q^{-1}}, & k = 0 \\ \frac{2}{N} \frac{(1 - \mu^N q^{-N})(1 - \mu \cos(\omega_k T) q^{-1})}{1 - 2\mu \cos(\omega_k T) q^{-1} + \mu^2 q^{-2}}, & k = 1, 2, \dots, L \end{cases} \quad (3.49)$$

con el cual se generaran $y_k(tT)$ y $u_k(tT)$ que son las señales necesarias para la identificación de la respuesta en frecuencia. Se sugiere este procedimiento ya que de esta forma se tiene un mapa suave entre los parámetros de los filtros y la respuesta en frecuencia estimada, condición que no se presenta para frecuencias cercanas a cero si la respuesta en frecuencia estimada es obtenida utilizando el mapa inverso dado por (3.10).

Para sintetizar la señal de precompensación se utiliza el siguiente algoritmo:

1. Con los valores estimados $\hat{a}_k(tT)$ y $\hat{b}_k(tT)$ se calcula la respuesta en frecuencia de la planta para cada banda.

$$P(1) = \hat{a}_0(tT), \quad b_0 = 0$$

$$\begin{bmatrix} \text{Re} \left\{ P \left(e^{j\omega_k T} \right) \right\} \\ \text{Im} \left\{ P \left(e^{j\omega_k T} \right) \right\} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\omega_k T) \\ 0 & -\text{sen}(\omega_k T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_k(tT) \\ \hat{b}_k(tT) \end{bmatrix} \quad k = 1, 2, \dots, L \quad (3.50)$$

2. Para cada banda k se calcula la ganancia compleja de precompensación con (3.34).
3. El precompensador se obtiene utilizando las ecuaciones (3.8, 3.10).
4. La señal de precompensación se sintetiza utilizando (3.37, 3.38).

Observación 3.3.3 Cuando el número N de puntos donde se compensa a la planta es finito, al encontrarse el controlador de interpolación, no se obtiene exactamente la función de transferencia de la planta. Por esta razón se intuye que esta metodología puede ser aplicada a sistemas de fase no mínima ya que no se estaría invirtiendo la verdadera planta, sino sólo una aproximación. Además, debido a la estructura del sistema de control, las señales internas están acotadas y se puede obtener la respuesta en frecuencia de la planta si esta es inestable.

3.4 Diseño del control adaptable de rechazo a perturbaciones

A continuación se propone un control adaptable de rechazo de perturbaciones basado en la idea de compensar por bandas de frecuencia. El objetivo es compensar las perturbaciones que se presenten en cada una de las bandas de frecuencia en las que está trabajando el precompensador.

Para su construcción se aproxima la perturbación $d(\cdot)$ por modelos MA (Moving Average) en cada una de las bandas donde esta trabajando el precompensador.

Para frecuencias en Ω_k , de (2.9) se tiene que el error de seguimiento es

$$e(tT) = -P_d(q) [d'(tT) - u_d(tT)] + d_d(tT) \quad (3.51)$$

con

- $P_d(q)$ definida en (2.10).

- $d'(tT)$ es la aproximación de las perturbaciones por el modelo MA propuesto.
- $u_d(tT)$ señal de cancelación de las perturbaciones.
- $d_d(tT)$ debida a la dinámica transitoria de la planta, los efectos de adaptación, perturbaciones externas, error de aproximación del modelo MA, etc.

Para cada una de las k bandas, la perturbación $d'(tT)$ puede parametrizarse como

$$d'_k(tT) = \phi_k^T(tT)\theta_k \quad (3.52)$$

donde

- $\phi_k(tT)$ regresor de la banda k , que en nuestro caso es un ruido blanco de media cero y densidad espectral unitaria
- θ_k parámetros del modelo MA de la perturbación en la banda k

Sea $\hat{\theta}_k(tT)$ el estimado de θ_k al tiempo tT , y la señal de cancelación adaptable dada por

$$u_k^d(tT) = \phi_k^T(tT)\hat{\theta}_k(tT) \quad (3.53)$$

$$\hat{\theta}_k(tT + T) = \hat{\theta}_k(tT) - g_k \frac{\phi_k(tT)e(tT)}{1 + \phi_k^T(tT)\phi_k(tT)} \quad (3.54)$$

Sustituyendo la ley de control (2.4) en (2.1), el error de seguimiento en lazo cerrado es

$$e(tT) = P_d(q)\phi_d^T(tT)\hat{\theta}_k(tT) - d_d(tT) \quad (3.55)$$

$$\tilde{\theta}_k(tT) \triangleq \hat{\theta}_k(tT) - \theta_k \quad (3.56)$$

Observación 3.4.1 Esta forma de estimar a la señal $d'(\cdot)$ tiene una estructura similar al caso de control adaptable a un modelo de referencia. Se sabe que si la dinámica que relaciona $\hat{\theta}(\cdot) \rightarrow e(\cdot)$ es estrictamente positiva real, se garantiza que $\hat{\theta}(\cdot)$ converge a una vecindad del origen que depende de la cota de las perturbaciones $d_d(\cdot)$.

Con respecto a la estabilidad del sistema, de modo similar que en [Riedle & Kokotović 85] se puede mostrar que si la mayoría de la energía se encuentra en el rango donde $\text{Re}[P_d(e^{j\omega T})] > 0$, se puede encontrar $g_k \in (0, g_k^*)$ suficientemente pequeño de modo que $\tilde{\theta}(tT)$ será acotado y convergerá a una vecindad de cero.

Observación 3.4.2 *Una restricción importante para poder utilizar este esquema es que se debe satisfacer la condición del párrafo anterior, ya que de otro modo el sistema se vuelve inestable. Por lo tanto solamente se puede compensar la contribución de la parte frecuencial de las perturbaciones que cumpla con esta restricción.*

El control adaptable de rechazo a perturbaciones se puede sintetizar usando

$$u_d(tT) = \sum_{k=0}^L u_k^d(tT) \quad (3.57)$$

Observación 3.4.3 *La estabilidad del sistema de control cuando se tiene trabajando ambos algoritmos de adaptación se garantiza ya que la contribución de cada uno de estos algoritmos puede ser vista como una perturbación para el otro, y si se satisfacen las condiciones de estabilidad para cada uno de los casos, estas perturbaciones son acotadas.*

Capítulo 4

Precompensación y rechazo a perturbaciones para señales de referencia periódicas

En algunas aplicaciones se presentan características sobre la señal de referencia, en particular se tiene un caso importante cuando la señal de referencia es periódica [Hu & Tomizuka 93], [Kempf et. al. 93]. Esta naturaleza permite rediseñar el precompensador aprovechando la información extra que se proporciona con las señales periódicas.

El problema se plantea en términos de señales y no de sistemas con lo que se facilita el análisis y permite utilizar este procedimiento para sistemas de fase no mínima.

Con lo que respecta al diseño del control de rechazo a perturbaciones, se analiza el caso en que las perturbaciones tiene las mismas armónicas que la señal de referencia. Este tipo de perturbaciones se presentan cuando se quiere controlar plantas no lineales que pueden ser modeladas como sistemas lineales con un término que agrupa todas las contribuciones no lineales del proceso original, como ejemplo se puede mencionar el control de robots con trayectorias periódicas

4.1 Diseño de la señal de precompensación $u_f(\cdot)$

Considere el sistema descrito por (2.1), sea la señal de referencia $r(tT)$ una señal discreta con $t \in \mathbb{Z}_+$, periodo T_0 y periodo de muestreo T tal que $T_0 = NT$, donde $N \in \mathbb{N}$ y es par.

La representación de Fourier de la señal es:

$$r(tT) = C_0 + \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} 2 |C_n| \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{T_0} n tT + \rho_n \right) \quad (4.1)$$

donde

$$C_n = \frac{1}{N} \sum_{\tau=0}^{N-1} r(\tau T) e^{-j \frac{2\pi}{N} n \tau} \quad (4.2)$$

$$\rho_n = \angle C_n \quad (4.3)$$

La mayoría de los sistemas físicos presentan comportamientos de filtros paso-bajas, por lo que con fines prácticos para mejorar el desempeño en estado estable del sistema de control, es suficiente que la condición dada en (2.8) se satisfaga para el conjunto de puntos de frecuencia

$$\Omega_r \triangleq \left\{ \omega_k \mid \omega_k = \frac{2\pi}{T_0} k, \quad k = 0, 1, \dots, J-1 \right\} \quad (4.4)$$

donde J es tal que $(J-1)\omega_0$ sea aproximadamente igual al ancho de banda en lazo cerrado del sistema.

4.1.1 Diseño de la señal de precompensación $u_f(\cdot)$ no adaptable

Sea la respuesta en frecuencia en el conjunto de puntos Ω_r de la planta y el modelo dados como

$$P(e^{j\omega_k T}) = P_k e^{j\alpha_k} \quad (4.5)$$

$$M(e^{j\omega_k T}) = M_k e^{j\beta_k} \quad (4.6)$$

entonces se puede calcular la respuesta en frecuencia del precompensador para los k puntos como

$$F(e^{j\omega_k T}) = F_k e^{j\gamma_k} \quad (4.7)$$

$$F_k = \frac{M_k}{P_k} \quad (4.8)$$

$$\gamma_k = \beta_k - \alpha_k \quad (4.9)$$

Es necesario que la planta no tenga ceros en el círculo unitario a las frecuencias de las armónicas de la señal de referencia para garantizar que $P_k \neq 0$. La señal de precompensación

$u_f(tT)$ se obtiene como

$$u_f(tT) = F_0 C_0 + \sum_{n=1}^{J-1} 2 |F_0| |C_n| \sin \left(\frac{2\pi}{N} n t T + \rho_n + \gamma_k \right) \quad (4.10)$$

Observación 4.1.1 Debe notarse de (2.8) y (4.4) que el precompensador solo compensa a la planta en el conjunto Ω_r de armónicas de la señal de referencia, y que la señal de precompensación es directamente sintetizada basándose en el conocimiento de la respuesta en frecuencia de la planta en los puntos Ω_r . Como consecuencia, no se está invirtiendo la planta como sucede en la precompensación paramétrica, esta condición relaja la suposición de la necesidad de una planta de fase no mínima. Además al ser todas las señales internas acotadas, se puede calcular la respuesta en frecuencia de plantas inestables.

Cuando la planta es desconocida o lentamente variante con el tiempo, la respuesta en frecuencia de la planta, en el conjunto de puntos Ω_r , necesaria para el cálculo del precompensador (4.10), puede ser estimada en línea.

4.1.2 Diseño de la señal de precompensación $u_f(\cdot)$ adaptable

Por simplicidad se presenta primero el caso en que la señal de referencia es una señal senoidal, la extensión para el caso de un número arbitrario de armónicas es inmediata [Flores & Tang 92].

Señal de referencia senoidal

Como el sistema es estable en lazo cerrado, para una señal de referencia $r(tT) = \sin(\omega_k tT)$ la entrada y salida de la planta son del tipo

$$u(tT) = a_k \sin(\omega_k tT + \delta_k) + d_u(tT) \quad (4.11)$$

$$y(tT) = b_k \sin(\omega_k tT + \zeta_k) + d_y(tT) \quad (4.12)$$

- $d_u(tT)$ perturbación a la entrada de la planta debida a la respuesta transitoria, las perturbaciones $d(tT)$, etc.
- $d_y(tT)$ perturbación a la salida de la planta debida a la respuesta transitoria, las perturbaciones $d(tT)$, etc.

Se puede parametrizar a la entrada y salida como

$$u(tT) = \phi_k^T(tT)\theta_k + d_u(tT) \quad (4.13)$$

$$y(tT) = \phi_k^T(tT)\eta_k + d_y(tT) \quad (4.14)$$

con

$$\phi_k(tT) \triangleq \begin{bmatrix} \text{sen}(\omega_k tT) & \cos(\omega_k tT) \end{bmatrix}^T \quad (4.15)$$

$$\theta_k = \begin{bmatrix} \theta_{k1} & \theta_{k2} \end{bmatrix}^T \triangleq \begin{bmatrix} a_k \cos(\delta_k) & a_k \text{sen}(\delta_k) \end{bmatrix}^T \quad (4.16)$$

$$\eta_k = \begin{bmatrix} \eta_{k1} & \eta_{k2} \end{bmatrix}^T \triangleq \begin{bmatrix} b_k \cos(\zeta_k) & b_k \text{sen}(\zeta_k) \end{bmatrix}^T \quad (4.17)$$

donde

- ϕ_k regresor de la armónica k .
- θ_k vector de parámetros de la señal de entrada.
- η_k vector de parámetros de la señal de salida.

Se definen a los vectores

$$\hat{\theta}_k(tT) = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{k1}(tT) & \hat{\theta}_{k2}(tT) \end{bmatrix}^T \quad (4.18)$$

$$\hat{\eta}_k(tT) = \begin{bmatrix} \hat{\eta}_{k1}(tT) & \hat{\eta}_{k2}(tT) \end{bmatrix}^T \quad (4.19)$$

como los estimados de θ_k y η_k al instante tT respectivamente, y se utiliza una ley de adaptación del tipo gradiente normalizado

$$\hat{\theta}_k(tT) = \hat{\theta}_k(tT-T) - g \frac{\phi_k^T(tT-T)\epsilon(tT-T)}{1 + \phi_k^T(tT-T)\phi_k(tT-T)} \quad (4.20)$$

$$\epsilon(tT-T) \triangleq \phi_k^T(tT-T)\hat{\theta}_k(tT-T) - u(tT-T) \quad (4.21)$$

$$\hat{\eta}_k(tT) = \hat{\eta}_k(tT-T) - g \frac{\phi_k^T(tT-T)\xi(tT-T)}{1 + \phi_k^T(tT-T)\phi_k(tT-T)} \quad (4.22)$$

$$\xi(tT-T) \triangleq \phi_k^T(tT-T)\hat{\eta}_k(tT-T) - y(tT-T) \quad (4.23)$$

con

- $\epsilon_k(tT)$ error de identificación de la armónica k de la entrada.
- $\xi_k(tT)$ error de identificación de la armónica k de la salida.

- g ganancia de adaptación que es un parámetro de diseño que pertenece al intervalo $(0, 2)$.

Debido a la estructura del regresor, este cumple con la condición de excitación persistente por lo que se tiene convergencia exponencial de los parámetros estimados a los parámetros verdaderos a una vecindad de sus valores verdaderos y la vecindad depende de la magnitud de las perturbaciones [Anderson et. al. 86, Sastry & Bodson 89].

Observación 4.1.2: Como se muestra a continuación, el regresor $\phi(\cdot)$ satisface la condición de excitación persistente

$$\alpha_2 I > \sum_{t=j}^{j+S} \phi(tT)\phi^T(tT) > \alpha_1 I, \quad \alpha_2 > \alpha_1 > 0, \quad S > 0 \quad (4.24)$$

para este caso en particular,

$$\sum_{t=j}^{j+S} \begin{bmatrix} \text{sen}^2(\omega_k tT) & \text{sen}(\omega_k tT) \cos(\omega_k tT) \\ \text{sen}(\omega_k tT) \cos(\omega_k tT) & \cos^2(\omega_k tT) \end{bmatrix} > \alpha I \quad (4.25)$$

esta condición se cumple, ya que por la desigualdad de Schwartz

$$\sum_{t=j}^{j+S} \text{sen}^2(\omega_k tT) \sum_{t=j}^{j+S} \cos^2(\omega_k tT) \geq \left(\sum_{t=j}^{j+S} \text{sen}(\omega_k tT) \cos(\omega_k tT) \right)^2 \quad (4.26)$$

y las funciones seno y coseno son acotadas.

Debido a que se satisface la condición de excitación persistente, todos los parámetros son acotados por lo que la señal $u_f(tT)$ es acotada y esto garantiza que todas las señales del sistema de control son acotadas.

Finalmente, la respuesta en frecuencia estimada de la planta en la armónica k , se puede calcular con

$$\hat{P}_k(tT) = \begin{cases} \frac{\hat{b}_k(tT)}{\hat{a}_k(tT)} & \text{si } \hat{a}_k(tT) \geq \psi_k \\ \psi_k & \text{si } \hat{a}_k(tT) < \psi_k \end{cases} \quad (4.27)$$

$$\hat{\alpha}_k(tT) = \hat{\zeta}_k(tT) - \hat{\delta}_k(tT) \quad (4.28)$$

con

$$\hat{a}_k(tT) = \sqrt{\hat{\theta}_{k1}^2(tT) + \hat{\theta}_{k2}^2(tT)} \quad (4.29)$$

$$\hat{b}_k(tT) = \sqrt{\hat{\eta}_{k1}^2(tT) + \hat{\eta}_{k2}^2(tT)} \quad (4.30)$$

$$\hat{\delta}_k(tT) = \tan^{-1} \left(\frac{\hat{\theta}_{k2}(tT)}{\hat{\theta}_{k1}(tT)} \right) \quad (4.31)$$

$$\hat{\zeta}_k(tT) = \tan^{-1} \left(\frac{\hat{\eta}_{k2}(tT)}{\hat{\eta}_{k1}(tT)} \right) \quad (4.32)$$

$$(4.33)$$

donde ψ_k es una cota del mínimo valor que se espera que tenga la señal de salida para la armónica k .

Observación 4.1.3 La modificación hecha a (4.27) tiene como finalidad evitar la división entre cero que se puede presentar durante el transitorio en el que se adaptan los parámetros.

Observación 4.1.4 Se puede utilizar un algoritmo de mínimos cuadrados si se quiere aumentar la velocidad de convergencia de los parámetros en vez de (4.20) y (4.22) [Sastry & Bodson 89].

Señal de referencia periódica cualquiera

Para el caso en que la señal de referencia $r(tT)$ es una señal periódica cualquiera, se puede expresar la entrada y salida de la planta como

$$u(tT) = a_0 + \sum_{k=1}^{J-1} a_k \text{sen}(\omega_k tT + \delta_k) + d_u(tT) \quad (4.34)$$

$$y(tT) = b_0 + \sum_{k=1}^{J-1} b_k \text{sen}(\omega_k tT + \zeta_k) + d_y(tT) \quad (4.35)$$

donde

- $d_u(tT)$ perturbación a la entrada de la planta debida a la respuesta transitoria, las perturbaciones $d(tT)$, etc.
- $d_y(tT)$ perturbación a la salida de la planta debida a la respuesta transitoria, las perturbaciones $d(tT)$, etc.

Se pueden parametrizar la entrada y la salida de la planta como

$$u(tT) = \Phi^T \Theta + d_u(tT) \quad (4.36)$$

$$y(tT) = \Phi^T H + d_y(tT) \quad (4.37)$$

donde

$$\Phi(tT) \triangleq [1 \ \phi_1^T(tT) \ \cdots \ \phi_{J-1}^T(tT)]^T \quad (4.38)$$

$$\Theta \triangleq [a_0 \ \theta_1^T \ \cdots \ \theta_{J-1}^T]^T \quad (4.39)$$

$$H \triangleq [b_0 \ \eta_1^T \ \cdots \ \eta_{J-1}^T]^T \quad (4.40)$$

con

- $\phi_k(tT)$ para $k = 1, 2, \dots, J-1$ definido en (4.15)
- θ_k para $k = 1, 2, \dots, J-1$ definido en (4.16)
- η_k para $k = 1, 2, \dots, J-1$ definido en (4.15)

Como el regresor $\Phi(tT)$ en (4.38) tiene tantas líneas espectrales como parámetros a estimar en Θ y H , se garantiza que los parámetros estimados convergen de forma exponencial a una vecindad de sus valores verdaderos y la vecindad depende de la magnitud de la perturbación si se utilizan algoritmos de tipo gradiente o mínimos cuadrados [Boyd & Sastry 86] y como consecuencia se garantiza la estabilidad del sistema ya que la señal $u_f(\cdot)$ será acotada.

4.2 Control adaptable de rechazo a perturbaciones

Se presenta la forma de diseñar un control adaptable de rechazo a perturbaciones que tienen las mismas armónicas que la señal de referencia. Como se comenta en [Bodson, et. al. 92], el algoritmo de adaptación tiene la propiedad de atenuar armónicas de mayor frecuencia que la frecuencia para la cual es diseñado el control. Se analiza el caso cuando se quiere cancelar la componente de DC de la perturbación y la armónica fundamental de la misma. Si es necesario cancelar más armónicas por alguna razón, se puede añadir la armónica correspondiente

Para frecuencias que pertenecen a Ω_r , de (2.7) y (2.8) se obtiene el error de seguimiento (3.51). Considere a $d'(tT)$ de la forma

$$d'(tT) = d_{off} + d_0 \text{sen}(\omega_0 tT + \lambda_0) \quad (4.41)$$

Parametrizando (4.41) como

$$d'(tT) = \Phi_d^T(tT)\theta_d \quad (4.42)$$

$$\Phi_d \triangleq \left[1 \quad \phi_1^T(tT) \right]^T \quad (4.43)$$

$$\theta_d \triangleq \left[1 \quad d_0 \cos(\lambda_0) \quad d_0 \sin(\lambda_0) \right]^T \quad (4.44)$$

donde

- $\phi_1(tT)$ el regresor definido en (4.15) con $k = 1$

Sea $\hat{\theta}_d(tT)$ el vector de parámetros estimados de θ_d al tiempo tT , entonces la señal de control adaptable de rechazo a perturbaciones se puede calcular con

$$u_d(tT) = \Phi_d^T(tT - T)\hat{\theta}_d(tT - T) \quad (4.45)$$

$$\hat{\theta}_d(tT) = \hat{\theta}_d(tT - T) - g_d \frac{\Phi_d(tT - T)e(tT)}{1 + \Phi_d^T(tT - T)\Phi_d(tT - T)} \quad (4.46)$$

con

- g_d la ganancia de adaptación que es un parámetro de diseño que debe pertenecer al intervalo $(0, g^*)$
- $e(tT)$ es el error de seguimiento definido en (2.2)

Sustituyendo la señal de control de (2.4) en (2.1), se obtiene la dinámica del error de seguimiento en lazo cerrado (3.56) como

$$\tilde{\theta}_d(tT) \equiv \tilde{\theta}_d(tT - T) - g_d \frac{P_d(q)\Phi_d(tT - T)\Phi_d^T(tT - T)\tilde{\theta}_d(tT - T)}{1 + \Phi_d^T(tT - T)\Phi_d(tT - T)} \quad (4.47)$$

$$\tilde{\theta}_d(tT) = \tilde{\theta}_d(tT) - \theta_d(tT) \quad (4.48)$$

donde

- $\tilde{\theta}_d(tT)$ error entre los parámetros estimados y los parámetros verdaderos.

Observación 4.2.1 Como en el caso anterior para el diseño de la señal de rechazo a perturbaciones, la estructura de adaptación para esta señal coincide con la forma del control adaptable a un modelo de referencia, donde es necesario que la dinámica que relaciona $\hat{\theta}(\cdot) \rightarrow e(\cdot)$ sea estrictamente positiva real para que se garantice la estabilidad de los parámetros estimados.

De modo similar que en [Riedle & Kokotović 85], para el caso discreto, se puede mostrar que si la armónica fundamental ω_0 se encuentra en el rango donde $\text{Re} [P_d(e^{j\omega T})] > 0$ y g es suficientemente pequeño, entonces $\hat{\theta}_d(tT)$ será acotado y convergerá a una vecindad de los valores verdaderos. Por lo tanto, las componentes principales de la perturbación serán asintóticamente canceladas.

Observación 4.2.2 *La estabilidad del sistema de control cuando se tiene trabajando ambos algoritmos de adaptación se garantiza ya que la contribución de cada uno de estos algoritmos puede ser vista como una perturbación para el otro, y si se satisfacen las condiciones de estabilidad para cada uno de los casos, estas perturbaciones son acotadas.*

Capítulo 5

Simulaciones y experimentos

A continuación se presentan las simulaciones realizadas para cada uno de los procedimientos de diseño de los precompensadores, en las que se puede ver la mejora en el desempeño del sistema de control. Se hace especialmente énfasis en el hecho de que al incorporar más información en el proceso de diseño se obtienen mejores resultados.

5.1 Comparación entre los diferentes métodos de diseño

Para comparar los desempeños obtenidos con los diferentes métodos de diseño se utilizó como índice de desempeño a

$$I = \sum_{t=0}^{t_f} |e(tT)|^2 \quad (5.1)$$

donde $e(tT)$ es el error de seguimiento.

Los datos utilizados para las simulaciones fueron los siguientes,

- Planta

$$P(q) = \frac{0.1967}{q^2 - 0.6065q}$$

- Controlador fijo

$$C(q) = \frac{0.3q + 0.1}{q - 1}$$

- Modelo

$$M(q) = \frac{0.2}{q^3 - 0.8q^2 + 0.4q}$$

- Señal de referencia: Onda cuadrada de amplitud 0.5, offset 2.5 y 30 muestras por período.
- La estructura del sistema de control fue igual todos los casos y solo cambiaron la identificación de parámetros y el diseño del precompensador. El esquema se puede ver en la Figura 5.1.

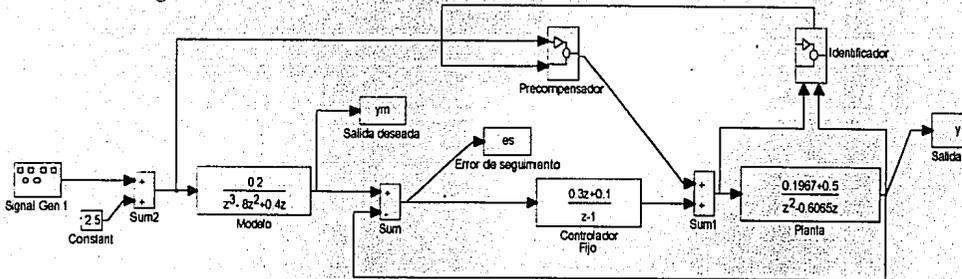


Figura 5.1: Estructura del sistema de control.

- Para el caso de diseño del precompensador utilizando representaciones paramétrica (*Modred*), se usaron 3 bandas de frecuencia y las funciones de transferencia de orden reducido para cada banda fueron del tipo IIR con un retardos puros de la forma

$$P_k(q) = \frac{b_k q^{-2}}{1 - a_k q^{-1}}$$

- Para el caso de diseño del precompensador utilizando un banco de filtros de Lagrange para interpolar un conjunto de puntos de frecuencia (*FSF*), también se usaron 3 bandas de frecuencia.
- Para el método de diseño cuando se tienen señales de referencia periódicas (*AFC*), del capítulo 4 se utilizaron las primeras 5 armónicas diferentes de cero y una componente de DC para sintetizar la señal de control.

En la Figura 5.2 se pueden ver los índices de desempeño del sistema de control para los diferentes precompensadores adaptables.

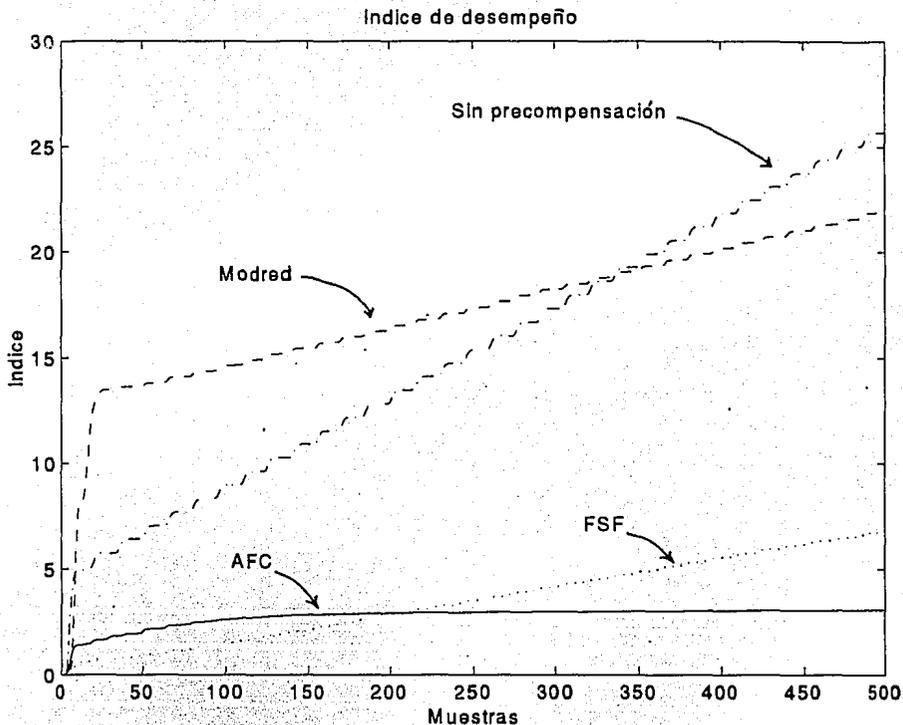


Figura 5.2: Índice de desempeño para el sistema con/sin precompensación adaptable cuando la señal de referencia es una onda cuadrada.

Modred El sistema con el precompensador diseñado utilizando modelos de orden reducido en bandas de frecuencia angostas.

FSF. El sistema con el precompensador diseñado utilizando el filtro de Lagrange.

AFC. El sistema con el precompensador diseñado utilizando la serie de Fourier de la señal periódica de referencia.

En particular, se puede observar que el mejor desempeño lo presenta el precompensador diseñado en particular para una señal de referencia periódica (AFC) debido a que se aprovecha la información extra sobre el tipo de señal usada.

5.2 Simulaciones AFC

A continuación se presentan los resultados de dos simulaciones con la finalidad de ilustrar la mejoría en el desempeño cuando se tiene una señal de referencia periódica. El primer ejemplo utiliza una planta lineal de fase no mínima, y el segundo un robot rígido donde algunos de sus parámetros varían con el tiempo.

5.2.1 Sistema lineal de fase no mínima

Esta simulación ilustra la efectividad de la estrategia de control para el caso en que se tiene una planta de fase no mínima.

Con el fin de comparar el desempeño obtenido para el método de diseño se utilizó como índice de desempeño a (5.1)

Los datos utilizados para la simulación fueron,

- Planta

$$P(q) = \frac{0.1967q + 0.5}{q^2 - 0.6065q}$$

- Controlador fijo

$$C(q) = \frac{0.3q + 0.1}{q - 1}$$

- Modelo

$$M(q) = \frac{0.2}{q^3 - 0.8q^2 + 0.1q}$$

- Señal de referencia: Onda cuadrada de amplitud 0.5, offset de 2.5 y frecuencia de $2.5 \frac{rad}{s}$
- Se compensaron las primeras 5 armónicas diferentes de cero y la componente de DC para sintetizar la señal de precompensación.

En la Figura 5.3 se tiene la comparación de los índices de desempeño para el caso en que se utiliza la precompensación y el caso donde no se utiliza la precompensación. Se puede observar que el desempeño para el caso con precompensación es mejor y no se presentan problemas de estabilidad debidas a la característica de fase no mínima del sistema.

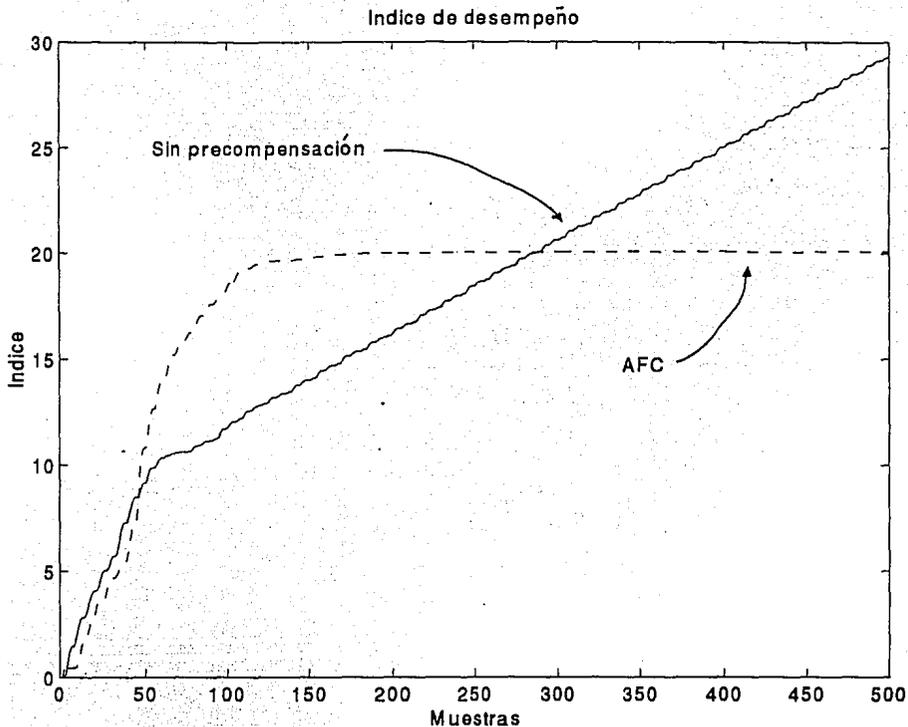


Figura 5.3: Índice de desempeño entre un sistema con/sin precompensación para una planta de fase no-mínima y una señal de referencia cuadrada.

5.2.2 Robot rígido

Se presentan dos simulaciones para mostrar las mejoras en el desempeño en estado estable cuando se incluyen tanto el precompensador adaptable así como el control adaptable de rechazo a perturbaciones. Para estas simulaciones se utilizó la versión continua del diseño del precompensador AFC y del controlador adaptable de rechazo a perturbaciones [Flores & Tang 92].

Señal senoidal y parámetros invariantes con el tiempo

Se considera un manipulador rígido de dos grados de libertad que utiliza motores de corriente directa como actuadores con relaciones de engranes para cada articulación $r_1 = 0.3$ y $r_2 = 0.5$ (ver figura 5.4).

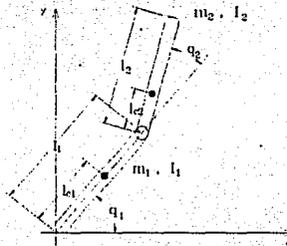


Figura 5.4: Robot rígido de dos grados de libertad.

Se utilizó como modelo deseado $M(p)$ con $p = \frac{d}{dt}$, una función de transferencia de primer orden con constante de tiempo de 0.1 y ganancia estática unitaria. La señal de referencia fue una onda senoidal de frecuencia y magnitud unitaria, esto con el fin de mostrar de forma clara la mejora en el desempeño en estado estable una vez que se añade el precompensador y el control de rechazo a perturbaciones. Los parámetros del robot se pueden ver en la tabla 5.1

Como controlador de retroalimentación se utilizó un PD ya que con él se puede estabilizar el sistema en lazo cerrado [Arimoto & Miyazaki 86].

Articulación 1	Articulación 2	Unidades
$m = 1$	$m = 1$	kg
$I = 0.12$	$I = 0.12$	$kg\ m^2$
$l = 1$	$l = 2$	m
$l_c = 0.5$	$l_c = 0.5$	m
$J_m = 1$	$J_m = 2$	$kg\ m^2$
$B_m = 20$	$B_m = 20$	$kg\ m^2\ s^{-1}$
$K_b = 0.01$	$K_b = 0.01$	$V\ rad^{-1}$
$K_m = 10$	$K_m = 10$	$N\ m\ A^{-1}$
$R = 1$	$R = 1$	Ω

Tabla 5.1: Valores de los parámetros del robot.

En la figura 5.5 y en la figura 5.6 se presenta el error de seguimiento para los diferentes tipos de acciones de control que se utilizaron en cada una de las articulaciones. En la gráfica superior de las figuras 5.5 y 5.6 se puede ver el error de seguimiento (1) con PD + AFC, (2) con PD + AFC + control adaptable de rechazo a perturbaciones para la primera armónica y la componente de DC, (3) con PD + AFC + control de rechazo a perturbaciones para la primera, tercera armónica y la componente de DC. En la gráfica inferior de las figuras 5.5 y 5.6 se puede ver el error de seguimiento cuando únicamente se utiliza el control PD.

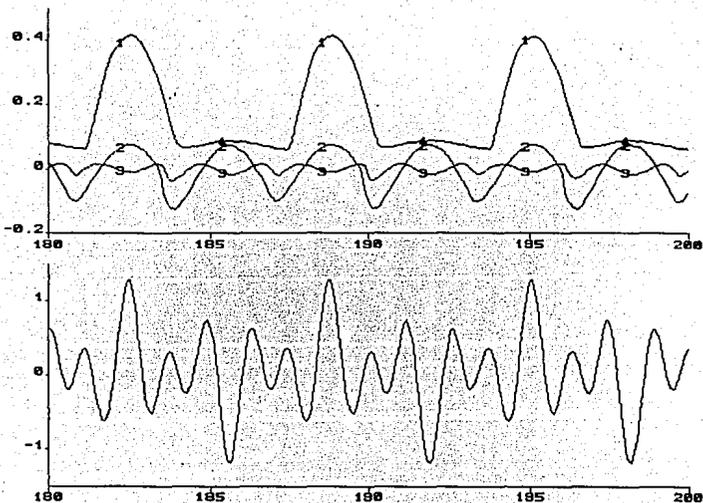


Figura 5.5: Error de seguimiento para la articulación 1: Gráfica superior, (1) PD+AFC, (2) PD+AFC+Cont. rechazo pert. DC y primera armónica, (3) PD+AFC+Cont. rechazo pert. DC, primera y tercera armónica. Gráfica inferior, PD.

Como se puede ver en las figuras 5.5 y 5.6 el error de seguimiento mejora considerablemente al añadir el controlador AFC y el control de rechazo a perturbaciones debido a que la dinámica del robot se puede ver como una perturbación al par que proporcionan los motores de corriente directa [Spong & Vidyasagar 89].

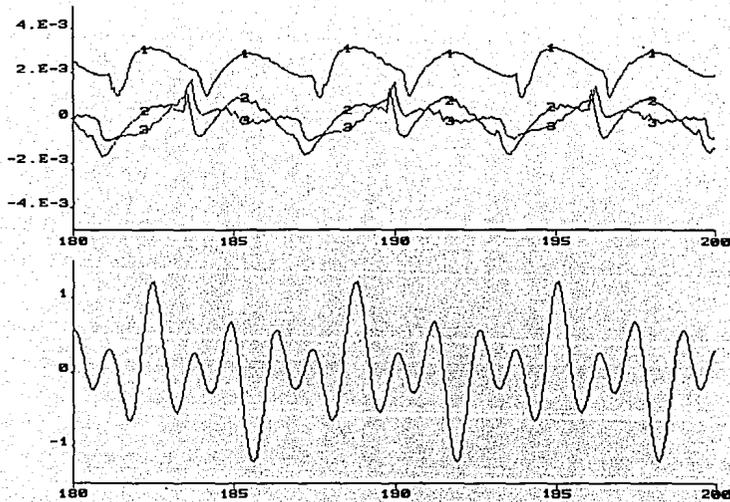


Figura 5.6: Error de seguimiento para la articulación 2. Gráfica superior, (1) PD+AFC, (2) PD+AFC+Cont. rechazo pert. DC y primera armónica, (3) PD+AFC+Cont. rechazo pert. DC, primera y tercera armónica. Gráfica inferior, PD.

Señal cuadrada y parámetros variantes con el tiempo

En esta simulación, la señal de referencia fue una onda cuadrada con periodo de 6.28s. El comportamiento deseado fue el de un modelo de primer orden con constante de tiempo 0.1 y ganancia unitaria.

Se utilizó un robot rígido de dos grados de libertad con motores de corriente directa como actuadores con relaciones de engranes para cada articulación $r_1 = r_2 = 0.1$ (ver figura 5.4).

Los parámetros del robot se presentan en la tabla 5.1.

Como controlador de retroalimentación se utilizó un PD ya que con él se puede estabilizar el sistema en lazo cerrado [Arimoto & Miyazaki 86].

Las perturbaciones externas fue un ruido blanco con media cero y varianza 0.1.

La masa del segundo eslabón estuvo variando entre 0.5 kg y 1 kg , el momento de inercia del segundo eslabón entre 0.06 kgm^2 y 0.12 kgm^2 así como la distancia del centro de gravedad de 0.5 m a 0.7 m cada 3.11 segundos con el fin de emular una tarea de tomar un objeto y dejarlo en otro lugar.

El AFC compensó las primeras 7 armónicas diferentes de cero de la señal de referencia y el control adaptable de rechazo a perturbaciones una componente de DC y las 2 primeras armónicas diferentes de cero. Los resultados se pueden ver en las figuras 5.7 y 5.8.

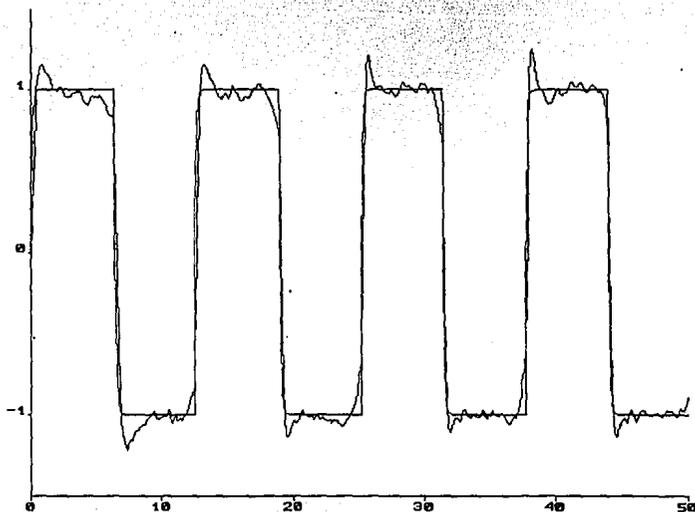


Figura 5.7: Posición real y deseada de la articulación 1.

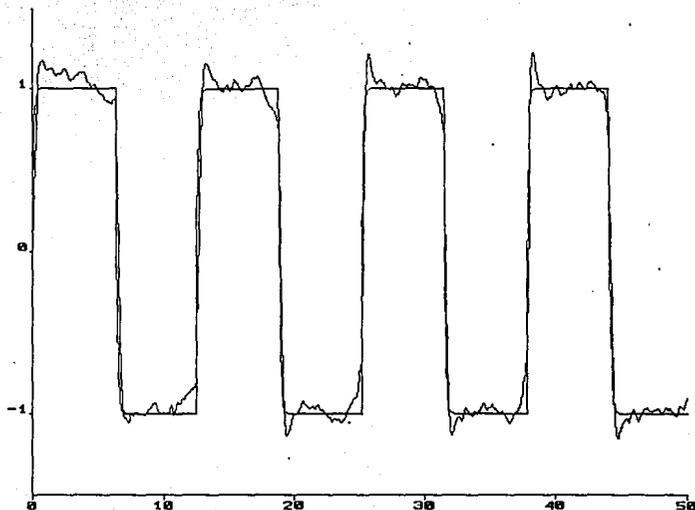


Figura 5.8: Posición real y deseada de la articulación 2.

Como se puede ver en las figuras 5.7 y 5.8 el comportamiento en las articulaciones no se deteriora demasiado con todo y que se tiene un cambio del 100% en la masa y el momento de inercia en el eslabón 2. Esto es debido al control AFC y de rechazo a perturbaciones.

5.3 Experimentos

A continuación se presentan los resultados de los experimentos realizados en un proceso térmico de laboratorio utilizando los diferentes procedimientos para el diseño de precompensadores.

5.3.1 Descripción del proceso térmico de laboratorio

El equipo que se usó para el experimento fue un proceso térmico modelo PT326 fabricado por Feedback Instruments LTD. [PT326], tiene las siguientes características: un retardo en el sistema, comportamientos no lineales en algunos rangos y una respuesta lenta.

En este equipo se hace circular un flujo de aire constante a temperatura ambiente a través de una rejilla que se calienta y por un tubo de plástico. El proceso consiste en calentar el aire que fluye por el tubo a una temperatura deseada.

El flujo de aire constante se obtiene con un ventilador y una garganta que puede variar su abertura que se opera de forma manual, con lo que se puede variar la dinámica de la planta. Como actuador se tiene a un tiristor que se encarga de la etapa de potencia y como sensor se utiliza un termistor que proporciona una señal de voltaje como salida. El termistor puede ser colocado a 3 diferentes distancias de la rejilla, con lo que de nuevo se puede modificar la dinámica de la planta. Una representación esquemática del proceso se puede ver en la Figura 5.9.

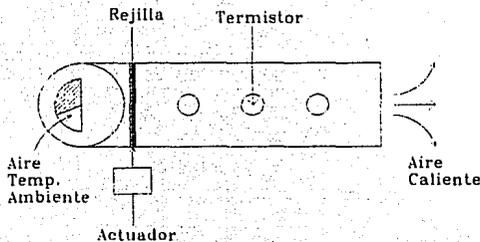


Figura 5.9: Proceso térmico de laboratorio.

5.3.2 Descripción de la implementación del sistema de control

Para la implementación se utilizó una computadora PC186 y una tarjeta de conversión analógica/digital; digital/analógica PCL-S12PG [PCLS12PG]. El algoritmo de control fue programado en QuickBASIC versión 4.0.

5.3.3 Especificaciones de diseño

Con el fin de comparar el desempeño obtenido para los diferentes métodos de diseño, se utilizaron los siguientes datos en los tres experimentos.

- Modelo deseado

$$M(q) = \frac{0.2}{q^2 + 0.6q}$$

- Controlador fijo. en este caso se seleccionó un controlador de retroalimentación que permitiera hacer evidente la mejoría en el desempeño al utilizarse los precompensador.

$$C(q) = \frac{q + 0.1}{q + 0.3}$$

- La señal de referencia fue una onda cuadrada de periodo de 20 segundos y variaciones de 4 a 8 volts.
- El periodo de muestreo fue de 0.1 segundos y la duración del experimento fue de 100 segundos.
- Como índice de desempeño se utilizó a

$$I = \sum_{t=0}^{11} |e(tT)|^2$$

con $e(tT)$ el error de seguimiento.

- Para los diseños de los precompensador usando modelos de orden reducido por banda (*Modred*) y de precompensación por bandas (*FSP*), se compensó la componente de DC y las dos primeras bandas de frecuencia a $\frac{2\pi}{NT}$ y a $\frac{4\pi}{NT}$ donde $N=11$ y T el período de muestreo.
- Para el diseño del precompensador utilizando la información extra de una señal periódica (*AFC*) se compensó la componente de DC y las primeras 5 armónicas diferentes de cero.
- Para ninguno de los casos se utilizó la precompensación adaptable de perturbaciones.

5.3.4 Resultados

A continuación se presentan los resultados obtenidos en los experimentos realizados en el proceso térmico.

En la Figura 5.10 se pueden ver los índices de desempeño para los diferentes precompensadores. El desempeño del sistema con el precompensador *AFC* una vez que los parámetros han alcanzado convergido es mejor que el de los otros procedimientos. Este comportamiento es bastante bueno aún cuando el sistema ha sido compensado en unas cuantas armónicas. El peor desempeño lo presenta el sistema con el precompensador *Modred*. El índice de desempeño del sistema de control sin ningún tipo de precompensación es mucho peor que los demás como se puede ver en la figura 5.10

En las figuras 5.11, 5.12, 5.13 se presenta el comportamiento de los parámetros, la señal de control, el error de seguimiento y una comparación de la salida deseada y de la salida obtenida para cada uno de los procedimientos de diseño.

UNIVERSIDAD DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA
CARRERA DE INGENIERÍA EN SISTEMAS DE CONTROL

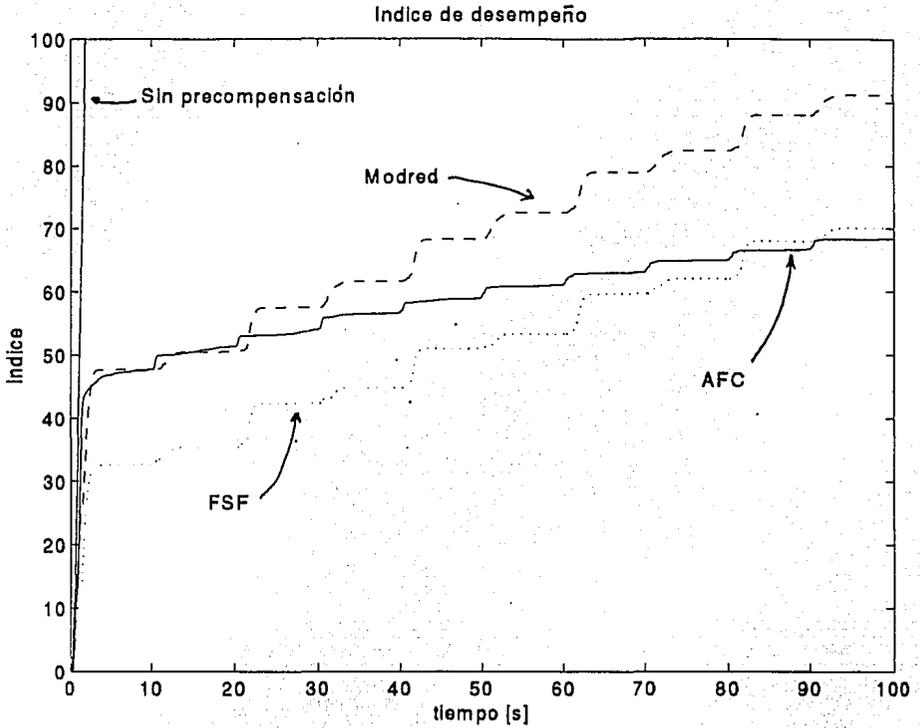


Figura 5.10: Índices de desempeño para el sistema completo.

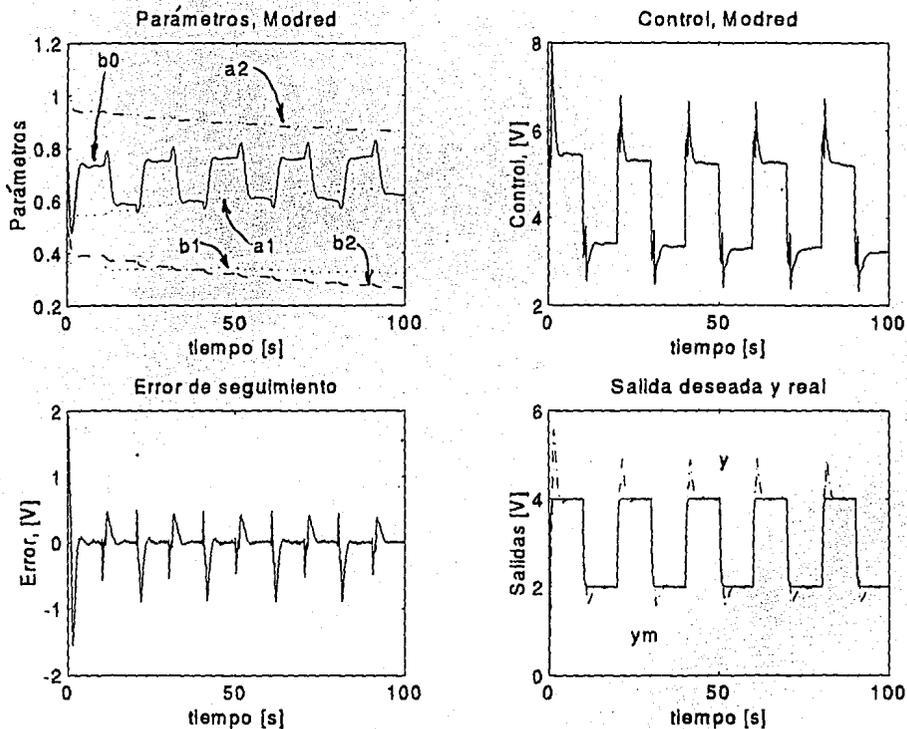


Figura 5.11: Precompensador *Modred*.

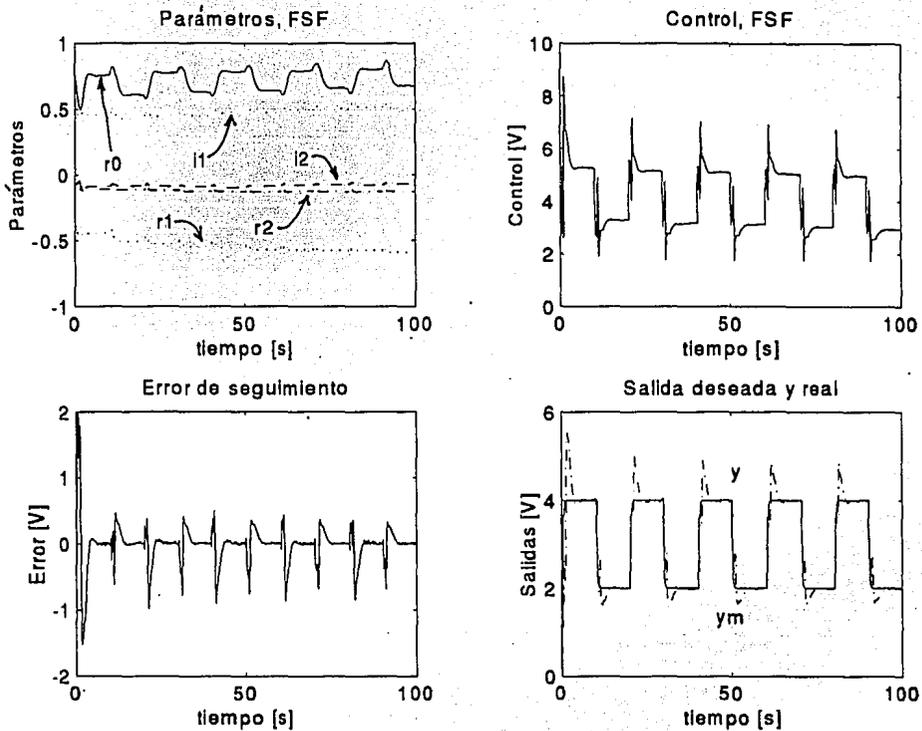


Figura 5.12: Precompensador FSF.

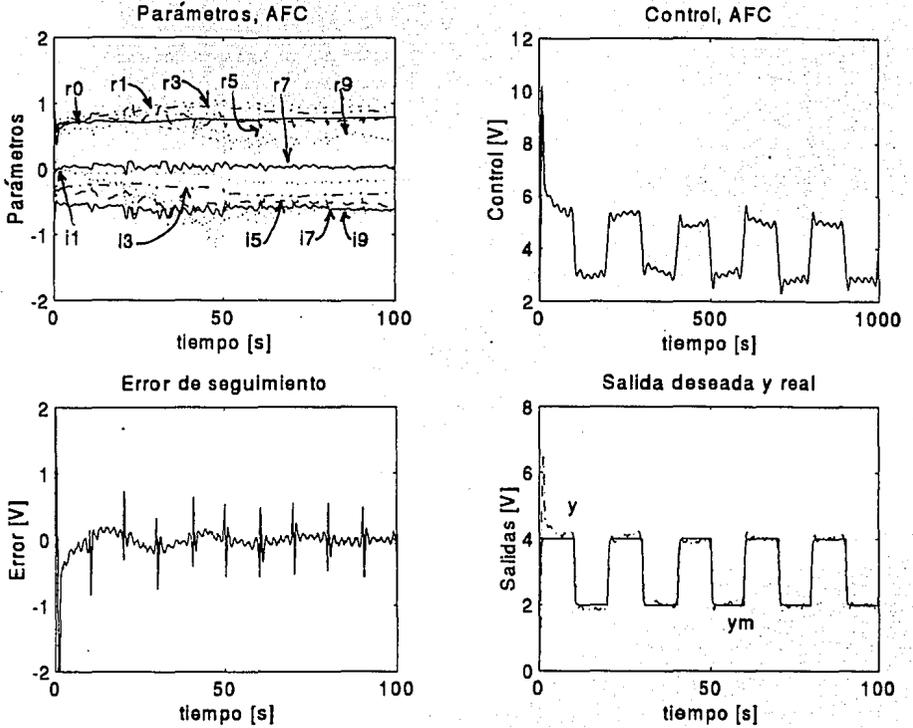


Figura 5.13: Precompensador AFC.

Capítulo 6

Conclusiones

Se han presentado tres métodos para diseñar precompensadores adaptables con el fin de mejorar el desempeño en estado estable de sistema de control. La ventaja de estos compensadores es que se pueden añadir a sistemas ya existentes, lo que representa un atractivo para el interesado al no tener que modificar sustancialmente su sistema.

Una ventaja importante de estos procedimientos de diseño es el hecho de que sólo es necesario compensar el comportamiento del sistema en las bandas de frecuencia donde se trabaje debido a la naturaleza de las señales que se involucren, esta consideración ofrece la posibilidad de identificar únicamente una parte de la planta con lo que la condición de excitación persistente se satisface de forma más sencilla.

Para los métodos de diseño *Modred* y *FSF*, intuitivamente se sugiere que estos procedimientos pueden ser utilizados en plantas inestables y de fase no mínima aunque no se tiene una prueba formal de esta conjetura, por lo que queda como problema abierto para futuras investigaciones.

Otro punto importante que queda como problema abierto es la selección del banco de filtros para los métodos de diseño *Modred* y *FSF* ya que no se tiene un resultado claro acerca de como debe ser escogido dicho banco de filtros y su contribución en el estado transitorio del sistema.

Con respecto al método *AFC* que al incluir la información extra sobre la naturaleza de la señal de referencia, así como el procedimiento de sintetizar una señal y no un sistema, dan como resultado una metodología novedosa que permite trabajar con sistemas de fase no mínima.

Con lo que respecta al procedimiento de diseño *AFC* al incorporar la información extra sobre la naturaleza de la señal de referencia y al hecho de que identifican señales y no sistemas, en este caso se tiene la certeza de que este procedimiento puede ser utilizado con plantas inestables y de fase no mínima.

Una restricción importante en la clase de perturbaciones que son consideradas (acotadas) por lo que queda como problema abierto el caso en que se tengan perturbaciones inestables.

Una desventaja que se tiene es que los resultados son asintóticos, es decir, no se puede decir gran cosa sobre las características del comportamiento transitorio del sistema de control.

Con respecto a la ley de adaptación, es necesario hacer notar que se necesita un mejor algoritmo que incorpore de forma más clara la contribución de las perturbaciones externas ya que los resultados obtenidos hasta este momento son muy conservativos.

La importancia de este trabajo es proponer algunos métodos alternativos para controladores adaptables que traten de simplificar y relajar los problemas que se presentan con las estructuras clásicas de control adaptable.

Bibliografía

- [Anderson et. al. 86] Anderson, B. D. O., Bitmead, R. R., Johnson, C. R., Kokotović, P. V., Kosut, R. L., Mareels, I. M. Y., Praly, L. & Riedle, B. D., **Stability of Adaptive Systems: Passivity and Averaging Analysis**, The MIT Press 1986.
- [Arimoto 85] Arimoto, S., *Learning control for dynamical systems -- a survey*, 24th IEEE Conference on Decision and Control, Florida, USA, 1985.
- [Arimoto & Miyazaki 86] Arimoto, S., Miyazaki, F., *Stability and robustness of PD feedback control with gravity compensation for robot manipulators*, Robotics: Theory and Practice, Vol. 3, 1986.
- [Åström & Wittenmark 90] Åström, K. J., Wittenmark, B., **Computer Controlled Systems: Theory and Design**, Prentice-Hall 1990.
- [Bitmead & Anderson 81] Bitmead, R. R., Anderson, B. D. O., *Adaptive frequency sampling filters*, IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, Vol. 29, No. 3, 1981.
- [Bodson, et. al. 92] Bodson, M., Sacks, A., Khosla, P., *Harmonics Generation in Adaptive Feedforward Cancellation Schemes*, 31st IEEE Conference on Decision and Control, Tucson, USA, 1992.
- [Boyd & Sastry 86] Boyd, S., Sastry, S., *Necessary and sufficient conditions for parameter convergence in adaptive control*, Automatica, Vol. 22 pp. 629-639, 1986.
- [DeLuca, et. al. 92] DeLuca, A., Paesano, G., Ulivi, G., *A frequency-domain approach to learning control: implementation for robot manipulators*, IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 39 pp. 1-10, 1992.

- [Flores & Tang 92] Flores, J. J., Tang, Y., *Precompensación adaptable de la respuesta en frecuencia en estado estacionario*, XI Congreso Nacional de Control Automático, Queretaro, México, 1992.
- [Flores, et. al. 93] Flores, J. J., Tang, Y., Osorio, A., *Adaptive Feedforward Control and Disturbance Cancellation*, 32nd IEEE Conference on Decision and Control, San Antonio, USA, 1993.
- [Hara, et. al. 88] Hara, S., Yamamoto, Y., Omata, T., Nakano, M., *Repetitive control system: a new type servo systems for periodic exogenous signals*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 7, pp. 659-668, 1988.
- [Hu & Tomizuka 93] Hu, J., Tomizuka, M., *Adaptive Asymptotic Tracking of Repetitive Signals—A Frequency Domain Approach*, IEEE Tran. Automat. Control, Vol. 38, pp. 1572-1579.
- [Kempf et. al. 93] Kempf, C., Messner, W., Tomizuka, M., Horowitz, R., *Comparison of Four Discrete-Time Repetitive Control Algorithms*, IEEE Control Systems Magazine, Vol. 13, No. 6, 1993.
- [Kuc 88] Kuc, R., *Introduction to digital signal processing*, McGraw-Hill 1988.
- [Narendra 91] Narendra, K., S., *The maturing of adaptive control*, Foundations of adaptive control pp. 3-36 editado por P. V. Kokotović, Springer-Verlag 1991.
- [Narendra, et. al. 91] *Advances in adaptive control*, editado por, Narendra, K. S., Ortega, R., Dorato, P., IEEE Press 1991.
- [Parker & Bitmead 87] it Approximation of stable and unstable systems via frequency response interpolation, IFAC World Congress, Munich, Alemania, 1987.
- [PCL812PG] Advantech Co., Ltd., *PCL-812PG Enhanced Multilab Card User's Manual*, Advantech Co., Ltd. 1990.
- [PT326] Feedback Instruments LTD., *Process Trainer PT326*, Instructional Manual D326, Feedback Instruments LTD.
- [Riedle & Kokotović 85] Riedle, B., Kokotović, P., *A stability-instability boundary for disturbance-free slow adaptation with unmodelled dynamics*, IEEE Tran. Automat. Contr., Vol. 30, pp. 1027-1030, 1985.

- [Sastry & Bodson 89] Sastry, S., Bodson, M., **Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness**, Prentice-Hall 1989.
- [Slotin & Li 91] Slotine, J. J., Li, **Nonlinear systems analysis**, Prentice-Hall 1991.
- [Spong & Vidyasagar 89] Spong, M., Vidyasagar, M. **Robot Dynamics and Control**, John Wiley & Sons, 1989.
- [Tang 92] Tang, Y., **A frequency domain approach to robust adaptive control**, Informe técnico, serie amarilla, Departamento de Ingeniería Eléctrica, CINVESTAV-IPN, marzo 1992.
- [Tang & Ortega 93] Tang, Y., Ortega, R. *Adaptive tuning to frequency response specifications*, Automatica, Vol. 29 No. 6, 1993.
- [Tang, et. al. 93] Tang, Y., Camacho, E. F., Flores, J. J., *Frequency domain adaptive control: Band-wise compensation*, presentado en IFAC World Congress 1993, Sydney, Australia.
- [Tang & Flores 93a] Tang, Y., Flores, J. J. *Adaptive feedforward control and disturbance cancellation for robot manipulators: A frequency domain approach*, sometido a IEEE Trans. Robotics and Automation
- [Tang & Flores 93b] Tang, Y., Flores, J. J. *A frequency domain adaptive feedforward control for a robot manipulator*, presentado en The First Chinese World Congress on Intelligent Control and Intelligent Automation (CWC ICIA'93), Beijing, China, 1993.
- [Tsai, et. al 88] Tsai, M. C., Anwar, G., Tomizuca, M., *Discrete time repetitive control for robot manipulators*, 27th IEEE Conference on Decision and Control, USA, 1988.
- [Widrow & Stearns 85] Widrow, B., Stearns, S. D., **Adaptive Signal Processing**, Prentice-Hall, 1985.