UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

EQUIVALENCIA DE MORITA Y ALGORITMOS DE REDUCCION EN TEORIA DE REPRESENTACIONES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

MAESTRA EN CIENCIAS

(MATEMATICAS)

P R E S E N T A

RITA ESTHER ZUAZUA VEGA

DIRECTOR DE TESIS: DR. RAYMUNDO BAUTISTA RAMOS.

INDICE

AGRADECIMIENTOS

Deseo darle las gracias al CONACYT, IMATE y a la UNAM en general, por todo el apoyo recibido durante los últimos tres años y medio, para poder haber realizado uno de mis sueños, que hoy se hace realidad con la terminación de éste trabajo.

La parte de agradecimientos institucionales es muy sencilla, pero hablar de agradecimientos humanos, me resulta casi imposible, no me creo capaz de mencionar a todos aquellas personas que de una u otra forma colaboraron (con o sin intención) para que éste dia llegase. Por ello, quiero darles las gracias a todos y cada uno, sin necesidad de mencionar nombres, estoy segura que cada uno de vosotros (compañeros, amigos, maestros, etc) sabreis leeros escondidos entre estas lineas.

Sin embargo, de entre todos, hubo algunas columnas en mi camino a las que no puedo dejar de nombrar, perdónenme los demás y sea lo que Gauss quiera.

-Tio Pancho: Gracias = gracias, para qué decir más?. Tu sabes porque.

-Angel Carrillo: angel = protector, gracias por cuidarnos tanto.

-Laura Hidalgo : latex = paciencia, gracias por tu paciencia.

-Sevín Recillas: creer = confiar, gracias por creer en mi.

-Leonardo Salmerón: tachadura = tiempo = interés, gracias por tu tiempo.

Adolfo, gracias por no abandonarme al cumplir mi mayoría de edad (algunos padres piensan que ahí terminan sus obligaciones), por esas charlas que disi-

paron mis dudas y aligeraron mi carga cuando ésta me resultaba demasiado pesada, por poder seguir diciendo con gran orgullo que aún eres mi maestro.

Y por último, gracias Raymundo por toda tu paciencia, por todo lo que me has enseñado (que si tratara de escribirlo en una tesis, rompería cualquier record), por haberme permitido además de aprender del gran matemático, conocer al ser humano.

INTRODUCCION

Hablar de teoría de representaciones de álgebras, es hablar del estudio de la categoría de A-módulos izquierdos $\mathcal{A} = modA$, donde A es una k-álgebra. A fín de estudiar la categoría $\mathcal{A}$ (o alguna de sus subcategorías plenas), deseamos encontrar una nueva categoría $\mathcal{B}$ que resulte -en algún sentido- más "sencilla" de estudiar, pero que nos proporcione la información necesaria y suficiente para entender nuestra categoría inicial.

Un primer éxito en ese camino, nos lo da la equivalencia de Morita. Dada una k-álgebra A podemos construir su k-álgebra básica Morita equivalente B, y una equivalencia de categorías:

$$ModA \underset{S}{\overset{T}{\rightleftarrows}} ModB$$

es decir , $S \circ T \cong I_{ModA}$ y $T \circ S \cong I_{ModB}$.

Con este tratamiento el anillo B es más "sencillo" que el anillo A, en el sentido de que dado $M \in ModA$, se tiene que $dim_k S(M) \leq dim_k M$, logrando en esta forma disminuir la dimensión.

La intención de éste trabajo, es la de estudiar con detalle los principales aspectos de los llamados algoritmos de reducción de A.V Roiter-M.Kleiner y Yu.A.Drozd, tratándolos de ver como una generalización de la equivalencia de Morita.

Siguiendo a [BCS], consideremos $(T, S) : ModA \rightarrow ModB$ un par de funtores adjuntos, en general, no tienen porque ser una equivalencia, sin embargo, se tiene la llamada categoría de Kleisli $ModB_{(T,S)}$ asociada a (T, S), tal que, existe un funtor $F : (ModB)_{(T,S)} \rightarrow ModA$, por lo tanto ,ya sea $ModA$ o una subcategoría apropiada se puede estudiar en términos de una álgebra B en cierto sentido más sencilla.
Los algoritmos de reducción se hacen a través de un morfismo adecuado de álgebras $\varphi : A \rightarrow B$ y el par de funtores adjuntos $(T, S) : ModA \rightarrow ModB$ definidos como $T(M) = B \otimes_A M$ y $S(N) =_A N$. Entonces, la categoría de

Kleisli de $ModB$ se puede interpretar como la categoría de representaciones de cierta coálgebra W, $R(W)$, en éste caso dada por el dual con respecto a B del álgebra $End_A({}_AB)$.
Sin embargo, el álgebra B no siempre resulta básica y entonces es necesario considerar una equivalencia de Morita.
Con el fin de poder considerar situaciones más generales, se parte de una coálgebra V sobre A y $\varphi : A \to B$ un morfismo de álgebras. Veremos que ${}^BV^B = B \otimes_A V \otimes_A B$ tiene estructura de coálgebra sobre B, y existe un funtor fiel y pleno $E : R({}^BV^B) \to R(V)$. Si además, eBe es Morita equivalente a B, con e un idempotente de B, e^BV^Be es una coálgebra sobre eBe y y $R(e^BV^Be) \cong R({}^BV^B)$.
Los algoritmos de reducción están asociados a un morfismo φ específico. Estudiaremos en detalle estos algoritmos usando el isomorfismo $e^BV^Be \cong Hom_{eBe}(End_A({}_ABe), eBe)$.

El trabajo se encuentra divido en tres capítulos.
En el primer capítulo, , estudiamos y definimos lo que es un par de funtores adjuntos, la categoría de Kleisli asociada y su relación con la equivalencia de Morita. Se definen las coálgebras sobre una álgebra y su categoría de representaciones. Veremos también lo que es un cotriple, y su relación con los objetos algebraicos anteriormente definidos. Como resultado principal de esta primera parte, veremos que dada una coálgebra sobre A, y B la Morita equivalente, la categoría de Kleisli asociada a $ModB$ es igual a la categoría de representaciones de la coálgebra ${}^BV^B$ sobre B.

En el segundo capítulo, empezamos estudiando las álgebras tensoriales, continuamos con álgebras libremente generada y módulos libremente generados. En la última sección de esta segunda parte, mostramos los algoritmos de reducción para ejemplos particulares de álgebras de carcaj. Después damos la definición de la explosión de una gráfica , la cual nos permite dar una generalización de los algoritmos en una forma muy sencilla y elemental.

En el último capítulo, vemos lo que es la derivada y la diferencial. Esta última parte , tiene como finalidad principal describir el núcleo de la counidad de la coálgebra inducida. Finalizamos dando las fórmulas generales para calcular la diferencial.

CAPITULO I

1 Funtores Adjuntos y Equivalencias

Si $\mathcal{A}$ es una categoría, y X, Y son objetos de $\mathcal{A}$, a menudo denotaremos por $\mathcal{A}(X,Y)$ al conjunto de morfismos $Hom_{\mathcal{A}}(X,Y)$ de X a Y en $\mathcal{A}$.

Definición 1.1: Sea k un campo. Una categoría $\mathcal{A}$ se dice una k-categoría si para cada par de objetos X, Y de $\mathcal{A}$ se tiene que $Hom_{\mathcal{A}}(X,Y)$ es un k-espacio vectorial y la composición de morfismos es bilineal, es decir, si $f, f' \in \mathcal{A}(X,Y)$, $g, g' \in \mathcal{A}(Y,Z)$ y λ, $\mu \in k$ entonces, $[\lambda(g'+g)\circ(\mu f'+f)](x) = \lambda g'f(x) + \lambda\mu g'f'(x) + gf(x) + \mu gf'(x) \in \mathcal{A}(X,Z)$.
Dadas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos k-categorías, un funtor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ es un k-funtor si cada restricción $F : Hom_{\mathcal{A}}(X,Y) \rightarrow Hom_{\mathcal{B}}(FX,FY)$ es una transformación lineal para $X, Y \in \mathrm{Obj}\mathcal{A}$.

Definición 1.2: Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos k-categorías, $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, $S : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ dos k-funtores. Diremos que el funtor T es adjunto izquierdo del funtor S si existe un isomorfismo natural k-lineal:

$$\Gamma_{A,B} : Hom_{\mathcal{A}}(A, SB) \longrightarrow Hom_{\mathcal{B}}(TA, B)$$

donde $A \in Obj\mathcal{A}$, y $B \in Obj\mathcal{B}$. En adelante, las categorías son k-categorías y los funtores son k-funtores , a menos que se establezca de otra forma, además, denotaremos como $(T,S) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ al par de funtores adjuntos $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ y $S : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$.

Proposición 1.3: Sea $(T,S) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un par de funtores adjuntos y $\Gamma_{A,B} : Hom_{\mathcal{A}}(A,SB) \longrightarrow Hom_{\mathcal{B}}(TA,B)$ el isomorfismo de adjunción. Definamos para cada objeto $A \in \mathcal{A}$ un morfismo $\alpha_A : A \rightarrow STA$ como $\alpha_A = \Gamma^{-1}_{A,TA}(I_{TA})$. Definamos también, para cada objeto $B \in \mathcal{B}$, $\beta_B : TSB \rightarrow B$ como $\beta_B = \Gamma_{SB,B}(I_{SB})$.
Entonces:
1) $\alpha : I_{\mathcal{A}} \rightarrow ST$ es una transformación natural.

2) $\beta : TS \to I_{\mathcal{B}}$ es una transformación natural.
3) Los siguientes diagramas son comutativos:

$$
\begin{tikzcd}
TX \arrow[r, "T\alpha_X"] \arrow[dr, equal] & TSTX \arrow[d, "\beta_{TX}"] \\
 & TX
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
SY \arrow[r, "\alpha_{SY}"] \arrow[dr, equal] & STSY \arrow[d, "S\beta_Y"] \\
 & SY
\end{tikzcd}
$$

donde $X \in \mathcal{A}$ y $Y \in \mathcal{B}$.

Demostración:
1) Sea $a : X_1 \longrightarrow X$, un morfismo en $\mathcal{A}(X_1, X)$ queremos ver que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\alpha_{X_1}"'] & X \arrow[d, "\alpha_X"] \\
STX_1 \arrow[r, "STa"] & STX
\end{tikzcd}
$$

Por la naturalidad de Γ tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(X, STX) \arrow[r, "\Gamma_{X,TX}"] \arrow[d, "{\mathcal{A}(a, I_{STX})}"'] & \mathcal{B}(TX, TX) \arrow[d, "{\mathcal{B}(Ta, I_{TX})}"] \\
\mathcal{A}(X_1, STX) \arrow[r, "\Gamma_{X_1,TX}"] & \mathcal{B}(TX_1, TX) \\
\mathcal{A}(X_1, STX_1) \arrow[r, "\Gamma_{X_1,TX_1}"] \arrow[u, "{\mathcal{A}(I_{X_1}, STa)}"] & \mathcal{B}(TX_1, TX_1) \arrow[u, "{\mathcal{B}(I_{TX_1}, Ta)}"']
\end{tikzcd}
$$

Tenemos entonces, de la parte superior del diagrama,
$\mathcal{B}(Ta, I_{TX})\Gamma_{X,TX}(\alpha_X) = \Gamma_{X_1,TX}\mathcal{A}(a, I_{STX})(\alpha_X)$, equivalentemente
$\mathcal{B}(Ta, I_{TX})(I_{TX}) = \Gamma_{X_1,TX}(\alpha_X a)$
Por lo tanto, $Ta = \Gamma_{X_1,TX}(\alpha_X a)$
Ahora, teniendo en mente que $\alpha_{X_1} : X_1 \longrightarrow STX_1$, se tiene:
$\mathcal{B}(I_{TX_1}, Ta)\Gamma_{X_1,TX_1}(\alpha_{X_1}) = \Gamma_{X_1,TX}\mathcal{A}(I_{X_1}, STa)(\alpha_{X_1})$
$\mathcal{B}(I_{TX_1}, Ta)(I_{TX_1}) = \Gamma_{X_1,TX}(STa\alpha_{X_1})$
Por lo tanto, $Ta = \Gamma_{X_1,TX}(STa\alpha_{X_1})$
Con lo que se demuestra que: $\alpha_X a = STa\alpha_{X_1}$

2) Sea $b : Y \longrightarrow Y_1$, un morfismo en $\mathcal{B}(Y, Y_1)$, queremos ver que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
TSY \arrow[r, "TSb"] \arrow[d, "\beta_Y"'] & TSY_1 \arrow[d, "\beta_{Y_1}"] \\
Y \arrow[r, "b"] & Y_1
\end{tikzcd}$$

Por la naturalidad de Γ tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(SY, SY_1) \arrow[d, "{\mathcal{A}(Sb, I_{SY_1})}"'] & \mathcal{B}(TSY, Y_1) \arrow[l, "\Gamma^{-1}_{SY_1,Y_1}"'] \arrow[d, "{\mathcal{B}(TSb, I_{Y_1})}"] \\
\mathcal{A}(SY_1, SY_1) & \mathcal{B}(TSY, Y_1) \arrow[l, "\Gamma^{-1}_{SY,Y_1}"'] \\
\mathcal{A}(SY_1, SY) \arrow[u, "{\mathcal{A}(I_{SY_1}, Sb)}"] & \mathcal{B}(TSY, Y) \arrow[l, "\Gamma^{-1}_{SY,Y}"'] \arrow[u, "{\mathcal{B}(I_{TSY}, b)}"']
\end{tikzcd}$$

Tenemos entonces:
$\mathcal{A}(Sb, I_{SY_1})\Gamma^{-1}_{SY_1,Y_1}(\beta_{Y_1}) = \Gamma^{-1}_{SY,Y_1}\mathcal{B}(TSb, I_{Y_1})(\beta_{Y_1})$
Por lo tanto, $Sb = \Gamma^{-1}_{SY,Y_1}(\beta_{Y_1}TSb)$
Ahora, recordando que $\beta_Y : TSY \longrightarrow Y$, se tiene:
$\mathcal{A}(I_{SY}, Sb)\Gamma^{-1}_{SY,Y}(\beta_Y) = \Gamma^{-1}_{SY,Y_1}\mathcal{B}(I_{TSY}, b)(\beta_Y)$
Por lo tanto, $Sb = \Gamma^{-1}_{SY,Y_1}(b\beta_Y)$
Con lo que se ha demostrado que: $\beta_{Y_1}TSb = b\beta_Y$

3) Sea $a : X_1 \to X_2 \in \mathcal{A}(X_1, X_2)$, $b : Y_2 \to Y_1 \in \mathcal{B}(Y_2, Y_1)$
Por la naturalidad de $\Gamma_{X,Y}$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(X_2, SY_2) \arrow[r, "\Gamma_{X_2,Y_2}"] \arrow[d, "\mathcal{A}(a,Sb)"'] & \mathcal{B}(TX_2, Y_2) \arrow[d, "\mathcal{B}(Ta,b)"] \\
\mathcal{A}(X_1, SY_1) \arrow[r, "\Gamma_{X_1,Y_1}"] & \mathcal{B}(TX_1, Y_1)
\end{tikzcd}$$

Si $c \in \mathcal{A}(X_2, SY_2)$ entonces, $\mathcal{B}(Ta, b) \circ \Gamma_{X_2,Y_2}(c) = \Gamma_{X_1,Y_1} \circ \mathcal{A}(a, Sb)(c)$
Resolviendo para cada lado de la igualdad tenemos:
1) $\mathcal{B}(Ta, b) \circ \Gamma_{X_2,Y_2}(c) = b\Gamma_{X_2,Y_2}(c)Ta$, y 2) $\Gamma_{X_1,Y_1} \circ \mathcal{A}(a, Sb)(c) = \Gamma_{X_1,Y_1}(Sb)(ca)$

a) P.d. $\beta_{TX} \circ T\alpha_X = I_{TX}$
Sustituyendo en 1) y 2): $a = \alpha_X$; $b = I_{TX}$; $c = I_{STX}$; $X_1 = X_2 = STX$; $Y_1 = Y_2 = TX$, obtenemos que:

$$b\Gamma_{X_2,Y_2}(c)Ta = \beta_{TX} \circ T\alpha_X$$

$$\Gamma_{X_1,Y_1}(Sb)(ca) = I_{TX}$$

b) P.d. $S\beta_Y \circ \alpha_{SY} = I_{SY}$
Nuevamente sustituyendo en 1) y 2): $a = \alpha_{SY}$; $b = I_Y$; $c = I_{STSY}$;$X_2 = STSY$; $X_1 = SY$;$Y_1 = Y_2 = TSY$, obtenemos que:

$$b\Gamma_{X_2,Y_2}(c)Ta = I_{TSY}\Gamma_{STSY,TSY}(I_{STSY})T\alpha_{SY} = \beta_{TSY} \circ \alpha_{TSY} = I_{SY}$$

$$\Gamma_{X_1,Y_1}(Sb)(ca) = \beta_{STSY}(\alpha_{SY}) = S\beta_Y \circ \alpha_{SY}$$

Proposición 1.4: El funtor $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es una equivalencia si y sólo si T es fiel, pleno y denso.

Demostración:
Sea $S : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que $S \circ T \cong I_{\mathcal{A}}$ y $T \circ S \cong I_{\mathcal{B}}$.
a) Por ser $T \circ S \cong I_{\mathcal{B}}$ se tiene que para toda $B \in \mathcal{B}$ $T(SB) \cong B$, sea $A = SB$, entonces $B \cong T(A)$, por lo tanto T es denso.
b) Sean $f_1, f_2 : X_1 \to X_2$, y consideremos el isomorfismo $\varphi : TS \to I_A$, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
STX_1 \arrow[r, "STf_1"] \arrow[d, "\varphi_{X_1}"'] & STX_2 \arrow[d, "\varphi_{X_2}"] \\
X_1 \arrow[r, "f_1"] & X_2
\end{tikzcd}$$

Entonces $f_1 = \varphi_{X_2} STf_1 \varphi_{X_1}^{-1}$, equivalentemente, $f_2 = \varphi_{X_2} STf_2 \varphi_{X_1}^{-1}$, pero entonces, $STf_1 = \varphi_{X_2}^{-1} f_1 \varphi_{X_1}$, $STf_2 = \varphi_{X_2}^{-1} f_2 \varphi_{X_1}$
Supongamos que $STf_1 = STf_2$, entonces, $\varphi_{X_2}^{-1} f_1 \varphi_{X_1} = \varphi_{X_2}^{-1} f_2 \varphi_{X_1}$, implica que $f_1 = f_2$, por lo tanto T es fiel.
Observemos que si T es fiel, implica que T es monomorfismo. Supongamos que $Tf_1 = 0$ entonces $STf_1 = 0$ y como $f_1 = \varphi_{X_2} TSf_1 \varphi_{X_1}^{-1}$, concluimos que $f_1 = 0$.
Procediendo en forma similar, y considerando el isomorfismo $TS \cong I_{\mathcal{B}}$ se tiene que S es monomorfismo.
c) Sea $g : TX_1 \to TX_2$ y definamos $h : X_1 \to X_2$ como $h = \varphi_{X_2} Sg \varphi_{X_1}^{-1}$, se

tiene entonces el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
STX_1 \arrow[r, "\varphi_{X_1}"] \arrow[d, shift right=2, "Sg"'] \arrow[d, shift left=2, "STh"] & X_1 \arrow[d, "h"] \\
STX_2 \arrow[r, "\varphi_{X_2}"] & X_2
\end{tikzcd}$$

por lo que $Sg = \varphi_{X_2}^{-1} h \varphi_{X_1} = STh$ y como S es un funtor fiel, se concluye que $g = Th$, por lo tanto T es pleno.
Observemos que T pleno, implica que T es epimorfismo.

Queremos ver ahora, que si $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un funtor fiel, pleno y denso, entonces, existe un funtor $S : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tal que $S \circ T \cong I_{\mathcal{A}}$ y $T \circ S \cong I_{\mathcal{B}}$.
Sea $N \in \mathcal{B}$, por ser T denso, existe $M_N \in \mathcal{A}$ y un isomorfismo φ_N, tal que $\varphi_N : N \to T(M_N)$. El objeto M_N,y el isomorfismo φ_N no son únicos, sin embargo, fijemos M_N y φ_N, y definamos $S(N) = M_N$.
Sea $f \in \mathcal{B}(N_1, N_2)$, se tiene entonces el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
N_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_{N_1}"'] & N_2 \arrow[d, "\varphi_{N_2}"] \\
T(M_{N_1}) \arrow[r, "\varphi_{N_2} f \varphi_{N_1}^{-1}"] & T(M_{N_2})
\end{tikzcd}$$

Por ser T pleno, existe $h_f : M_{N_1} \to M_{N_2}$ tal que $T(h_f) = \varphi_{N_1}^{-1} f \varphi_{N_2}$, definamos $Sf = h_f$.
Veamos entonces, que S es un funtor:
a) $\varphi_N I_N \varphi_N^{-1} = I_{T_{M_N}} = T(I_{M_N}) = T(I_{SN})$, pero por la definición de Sf, tenemos, $S(I_N) = I_{SN}$.
b) Sea $f : N_1 \to N_2$ y $g : N_2 \to N_3$, queremos demostrar que $(Sg)(Sf) =$

$S(gf)$. Para ello, consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
N_1 \arrow[r, "\varphi_{N_1}"] \arrow[d, "f"'] & T(M_{N_1}) \arrow[d, "\varphi_{N_2} f\varphi_{N_1}^{-1}"] \\
N_2 \arrow[r, "\varphi_{N_2}"] \arrow[d, "g"'] & T(M_{N_2}) \arrow[d, "\varphi_{N_3} g\varphi_{N_2}^{-1}"] \\
N_3 \arrow[r, "\varphi_{N_3}"] & T(M_{N_3})
\end{tikzcd}$$

Entonces, $T(h_g)T(h_f) = \varphi_{N_3} g\varphi_{N_2}^{-1}\varphi_{N_2} f\varphi_{N_1}^{-1} = \varphi_{N_3} gf\varphi_{N_1}^{-1} = T(h_g h_f)$, por otro lado, $T(h_{gf}) = \varphi_{N_3} gf\varphi_{N_1}^{-1}$. Por lo tanto, $T(Sg)T(Sf) = T((Sg)(Sf)) = T(S(gf))$ y como T es un funtor fiel, se concluye que $(Sg)(Sf) = S(gf)$.
c) Veamos ahora que $ST \cong I_A$.
Sea $\varphi_{T(M)} : T(M) \to T(M_{T(M)})$, por ser T fiel, existe un isomorfismo $\psi_M : M \to M_{T(M)} = ST(M)$, queremos ver que ψ_M es una transformación natural.
Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
TM_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi_{TM_1}"'] & TM_2 \arrow[d, "\varphi_{TM_2}"] \\
T(M_{TM_1}) \arrow[r, "\varphi_{TM_2} Tg\varphi_{TM_1}^{-1}"] & T(M_{TM_2})
\end{tikzcd}$$

Pero, esto implica la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi_{M_1}"'] & M_2 \arrow[d, "\psi_{M_2}"] \\ M_{TM_1} = STM_1 \arrow[r, "\psi_{M_2} f \psi_{M_1}^{-1}"] & M_{TM_2} = STM_2 \end{tikzcd}$$

Se tiene por lo tanto, $T(\psi_{M_2})T(f)T(\psi_{M_1})^{-1} = T(\psi_{M_2} f \psi_{M_1}^{-1}) = TSTf$, por lo tanto $\psi_{M_2} f \psi_{M_1}^{-1} = STf$

d) Finalmente, veamos que $TS \cong I_{\mathcal{B}}$.

Considerando que $S(N) = M_N$ y $\varphi_N : N \to T(M_N) = TS(M)$, para ver que φ_N es una transformación natural, consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} N_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_{N_1}"'] & N_2 \arrow[d, "\varphi_{N_2}"] \\ T(M_{N_1}) = TSN_1 \arrow[r, "\varphi_{N_2} f \varphi_{N_1}^{-1}"] & T(M_{N_2}) = TSN_2 \end{tikzcd}$$

Y como $S(f) = h_f$, tenemos que $T(h_f) = TSf$, por lo tanto φ_N es natural.

Corolario 1.5:
Si $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es una equivalencia, entonces, $a : X_1 \longrightarrow X_2$ es isomorfismo si y sólo si $Ta : TX_1 \longrightarrow TX_2$ es isomorfismo.

Demostración:
Supongamos que a es un isomorfismo, entonces existe a^{-1} tal que $a^{-1}a = I_{X_1}$ y $aa^{-1} = I_{X_2}$, pero entonces tenemos que $T(a^{-1}a) = T(a^{-1})T(a) = T(I_{X_1}) = I_{TX_1}$ y, $T(aa^{-1}) = T(a)T(a^{-1}) = T(I_{X_2}) = I_{TX_2}$, por lo tanto T(a) es un

isomorfismo.
Por otro lado, si Ta es isomorfismo, entonces existe $T_1 : TX_2 \longrightarrow ST_1$ tal que $T_1 Ta = I_{TX_1}$ y $TaT_1 = I_{TX_2}$ por ser T sobre, se tiene que $T_1 = Ta_1$ donde $a_1 : X_2 \longrightarrow X_1$, entonces, $T(a_1 a) = T_1 T(a) = I_{TX_1} = T(I_{X_1}$ y $T(aa_1) = TaT_1 = I_{TX_2} = TI_{X_2}$ Por lo tanto,$a_1 a = I_{X_1}$, $aa_1 = I_{X_2}$, es decir a es un isomorfismo.

Podemos por lo tanto afirmar que todo funtor fiel, pleno y denso refleja isomorfismos.

Proposición 1.6: El par de funtores $(T, S) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es una equivalencia si y sólo si son adjuntos y existe un isomorfismo de adjunción $\Gamma_{X,Y} : \mathcal{A}(X, SY) \longrightarrow \mathcal{B}(TX, Y)$, cuyas transformaciones naturales asociadas $\alpha : I_{\mathcal{A}} \rightarrow ST$ y $\beta : TS \rightarrow I_{\mathcal{B}}$ son isomorfismos.

Demostración:
Si la pareja (T, S) es una equivalencia, entonces se tiene el siguiente isomorfismo natural $\varphi_Y : TSY \rightarrow Y$, $\quad Y \in \mathcal{B}$.
Si $f \in \mathcal{A}(X, SY)$, defínase $\Gamma_{X,Y}(f) = \varphi_Y Tf$.
Sea $g : X' \longrightarrow X$, para ver que el isomorfismo Γ es natural, es necesario ver la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(X, SY) \arrow[r, "\Gamma_{X,Y}"] \arrow[d, "\mathcal{A}(g, I_{SY})"'] & \mathcal{B}(TX, Y) \arrow[d, "\mathcal{B}(Tg, I_Y)"] \\
\mathcal{A}(X', SY) \arrow[r, "\Gamma_{X',Y}"] & \mathcal{B}(TX', Y)
\end{tikzcd}$$

Pero de la definición del isomorfismo de adjunción Γ, tenemos:

$$\mathcal{B}(Tg, I_Y)\Gamma_{X,Y}(f) = \varphi_Y T(f)T(g) = \varphi_Y T(fg)$$

$$\Gamma_{X',Y}\mathcal{A}(g, I_{SY})(f) = \Gamma_{X',Y}(fg) = \varphi_Y T(fg)$$

Ahora, $\alpha_X \equiv \Gamma^{-1}(I_{TX}) \in \mathcal{A}(X, STX)$. Por lo tanto, $T(\alpha_X) = \varphi_{TX}^{-1}$ es un isomorfismo y por el corolario anterior, se tiene que α_X es un isomorfismo.

Similarmente, el morfismo $\beta : TS \rightarrow I_B$ es un isomorfismo.

Ahora, si los morfismos α y β son isomorfismos, es inmediato que el par de funtores adjuntos (T, S) es una equivalencia.

2 Equivalencia de Categorías de Módulos

Definición 2.1: Sean A y B dos k-álgebras. Diremos que A y B son Morita equivalentes, si existe un par de funtores $T : ModA \to ModB$ y $S : ModB \to ModA$ tal que $S \circ T \cong I_{ModA}$ y $T \circ S \cong I_{ModB}$
Los funtores T y S preservan sumas y son exactos, por lo tanto:
$T(M) \cong P \otimes_A M$ donde ${}_BP_A$ es proyectivo como A-módulo.
$S(N) \cong Q \otimes_B N$ donde ${}_AQ_B$ es proyectivo como B-módulo.
Observemos entoces que $T({}_AA) \cong P \otimes_A {}_AA \cong P$, por lo que P también es proyectivo como B-módulo. Similarmente, $S({}_BB) \cong Q \otimes_B {}_BB \cong Q$, con lo que Q resulta también ser un A-módulo proyectivo.

Proposición 2.2: Si A y B son dos k-álgebras Morita equivalentes, entonces existen ismorfismos $f : P \otimes_A Q \to B$ y $g : Q \otimes_B P \to A$ tales que se satisfacen las siguientes propiedades:
1)$qf(p \otimes q_1) = g(q \otimes p)q_1$
2)$pg(q \otimes p_1) = f(p \otimes q)p_1$

Demostración:
Como A y B son Morita equivalentes, tenemos que existen isomorfismos naturales $\alpha_M : M \to Q \otimes_B (P \otimes_A M)$ y $\beta_N : P \otimes_A (Q \otimes_B N) \to N$
Consideremos la siguiente cadena de isomorfismos:

$$P \otimes_A Q \xrightarrow{\rho} (P \otimes_A Q) \otimes_B {}_BB \xrightarrow{\sigma} P \otimes_A (Q \otimes_B B) \xrightarrow{\beta_B} {}_BB$$

Definamos el isomorfismo:

$$f = \beta_B \sigma \rho : P \otimes_A Q \longrightarrow B$$

el cual actua en un elemento $p \otimes q \in P \otimes_A Q$ de la siguiente forma:

$$f(p \otimes q) = \beta_B(p \otimes (q \otimes 1_B))$$

Similarmente, tenemos la siguiente cadena de isomorfismos:

$$Q \otimes_B P \xrightarrow{\rho'} (Q \otimes_B P) \otimes_A {}_AA \xrightarrow{\sigma'} Q \otimes_B (P \otimes_A A) \xrightarrow{\alpha_A^{-1}} {}_AA$$

Definamos el isomorfismo:

$$g = \alpha_A^{-1}\sigma'\rho' : Q \otimes_B P \longrightarrow A$$

el cual actua en un elemento $q \otimes p \in Q \otimes_B P$ de la siguiente forma:

$$g(q \otimes p) = \alpha_A^{-1}(q \otimes (p \otimes 1_A))$$

Consideremos ahora los siguientes isomorfismos naturales:
$\varphi : TS \longrightarrow P \otimes_A Q \otimes_B$ y $\psi : I_{modB} \longrightarrow B \otimes_B$, y el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
TS \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\beta"'] & P \otimes_A Q \otimes_B - \arrow[d, "f \otimes_B -"] \\
I_{modB} \arrow[r, "\psi"] & B \otimes_B -
\end{tikzcd}$$

Se tiene entonces $f \otimes_B - = \psi\beta\varphi^{-1} : P \otimes_A Q \otimes_B - \longrightarrow B \otimes_B -$

Tenemos también los siguientes isomorfismos naturales: $\varphi' : ST \longrightarrow Q \otimes_B P \otimes_A$ y $\psi' : I_{modA} \longrightarrow A \otimes_A -$, y el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
ST \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "\alpha^{-1}"'] & Q \otimes_B P \otimes_A - \arrow[d, "g \otimes_A -"] \\
I_{modA} \arrow[r, "\psi'"] & A \otimes_A -
\end{tikzcd}$$

Se tiene entonces $g \otimes_A - = \psi'\alpha^{-1}\varphi'^{-1} : Q \otimes_B P \otimes_A - \longrightarrow A \otimes_A -$
Ahora, recordemos que $S\beta_B\alpha_{SB} = 1_{SB}$, entonces $S\beta_B = 1_{SB}\alpha_S^{-1}B$, es decir,

tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Q \otimes_B (P \otimes_A (Q \otimes_B B)) \arrow[r, "S\beta_B"] \arrow[d, "\alpha_{SB}^{-1}"'] & Q \otimes_B B \arrow[dl, equal] \\
Q \otimes_B B &
\end{tikzcd}$$

Sea $q \otimes (p \otimes (q_1 \otimes 1_B)) \in Q \otimes_B (P \otimes_A (Q \otimes_B B))$, entonces:

$$S\beta_B(q \otimes (p \otimes (q_1 \otimes 1_B))) = \alpha_S^{-1} B(q \otimes (p \otimes (q_1 \otimes 1_B)))$$

$$q \otimes \beta_B(p \otimes (q_1 \otimes 1_B)) = (g \otimes 1_A)((q \otimes p) \otimes_A (q_1 \otimes 1_B))$$

$$q \otimes f(p \otimes q_1) = g(q \otimes p)q_1 \otimes 1_B$$

$$qf(p \otimes q_1) = g(q \otimes p)q_1$$

La justificación a la igualdad anterior, puede verse en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Q \otimes_B B \arrow[ddd, equal] & Q \otimes_B (P \otimes_A (Q \otimes_B B)) \arrow[l, "\alpha_{SB}^{-1}"'] \arrow[d, "\cong"] \\
& (Q \otimes_B P) \otimes_A (Q \otimes_B B) \arrow[d, "g \otimes_A I_B"] \\
& A \otimes_A (Q \otimes_B B) \arrow[d, "\cong"] \\
& Q \otimes_B B \arrow[from=1-1, equal]
\end{tikzcd}$$

Similarmente, teniamos que $\beta_{TA} T\alpha_A = 1_{TA}$, entonces, $\beta_{TA} = 1_{TA} T\alpha_A^{-1}$, es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
P \otimes_A (Q \otimes_B (P \otimes_A A)) \arrow[r, "T\alpha_A^{-1}"] \arrow[d, "\beta_{TA}"'] & P \otimes_A A \arrow[dl, equal] \\
P \otimes_A A &
\end{tikzcd}$$

Sea $p \otimes (q \otimes (p_1 \otimes 1_A)) \in P \otimes_A (Q \otimes_B (P \otimes_A A))$, entonces:

$$T\alpha_A^{-1}(p \otimes (q \otimes (p_1 \otimes 1_A))) = \beta_{TA}(p \otimes (q \otimes (p_1 \otimes 1_A)))$$

$$p \otimes g(q \otimes p_1) \otimes 1_A = f(p \otimes q)p_1 \otimes 1_A$$

$$p \otimes g(q \otimes p_1) = f(p \otimes q)p_1$$

Notación 2.3:
$f(p_i \otimes q_i) = p_i q_i$, $g(q_i \otimes p_i) = q_i p_i$

Definición 2.4: Decimos que un módulo P es generador como A-módulo, si P es un A-mod proyectivo y existe un epimorfismo $\varphi : P^n \to A$

Proposición 2.5: Supongamos que tenemos un par de morfismos $f : P \otimes_A Q \to B$ y $g : Q \otimes_B P \to A$ tales que se satisfacen las propiedades 1) y 2) de la proposición anterior, entonces:
a) Si f es un epimorfismo, entonces f es isomorfismo.
b) Si g es un epimorfismo, entonces g es isomorfismo.
c) Los módulos P y Q son generadores como A-mod y como B-mod.
d) Los módulos P y Q son proyectivos finitamente generados como A- módulos y como B-módulos.

Demostración:

a) Si f es epimorfismo, entonces existen $p_i \in P$ y $q_i \in Q$ tal que $\sum p_iq_i = 1_B$. Supongamos que $\sum p_j \otimes q_j \in Ker f$, entonces:

$$\begin{aligned}
\sum p_j \otimes q_j &= \sum(p_j \otimes q_j) \sum p_iq_i \\
&= \sum p_j(q_jp_i) \otimes q_i \\
&= \sum(p_jq_j)p_i \otimes q_i \\
&= \sum(p_jq_j) \sum p_i \otimes q_i = 0
\end{aligned}$$

b) Si g es epimorfismo, entonces existen $q_i \in Q$ y $p_i \in P$ tal que $\sum q_ip_i = 1_A$. De aquí la demostración se sigue igual que en a).

c) Consideramos la siguiente familia de B-morfismos. $h_i : P \to B$ dado por $h_i(p) = pq_i = f(p \otimes q_i)$
Por propiedades de la suma directa, se tiene entonces un morfismo $h : P^n \to B$ dado por $h(p'_1, p'_2, ..., p'_r) = \sum h_i(p'_i) = \sum p'_iq_i$, por lo tanto en el caso de que $p'_i = p_i$ se tiene que $h(p_1, p_2, ..., p_r) = \sum h_i(p_i) = \sum p_iq_i = 1_B$, con lo que se demuestra que P es generador como B-mod.
Similarmente, si consideramos la familia de B-morfismos: $h_i : Q \to B$ dados por $h_i(q) = p_iq = f(p_i \otimes q)$, se tiene que $h(q_1, q_2, ..., q_r) = \sum h_i(q_i) = \sum p_iq_i$ es epimorfismo, por lo que Q resulta también generador como B-mod.
Para ver que tanto P como Q resultan generadores como A-mod, consideremos ahora la familia de A-morfismos: $h_i : Q \to A$ dados por $h_i(q) = qp_i = g(q \otimes p_1)$ y $h'_i : P \to A$ dados por $h'_i(p) = q_ip = g(q_1 \otimes p)$.

d) Sea $h : A^n \to P$ actuando en un elemento de la forma $h(\sum a_i) = \sum p_ia_i$ y $e : P \to A^n$ dada por $e(p) = \sum q_ip$, por lo tanto, $he(p) = h(\sum q_ip) = \sum p_i(q_ip) = \sum(p_iq_i)p = p$, con lo que se tiene que P es sumando directo de A como módulo derecho, por lo tanto P es un A-módulo proyectivo finitamenete generado.
Similarmente, sea $h : A^n \to Q$ actuando en un elemento de la forma $h(\sum a_i) = \sum a_iq_i$ y $e : Q \to A^n$ dada por $e(q) = \sum qp_i$, por lo tanto,$he(q) = h(\sum qp_i) = \sum q(p_iq_i) = \sum(qp_i)q_i = q$, con lo que se tiene que Q es un A-módulo proyectivo finitamenete generado.

De la misma manera se puede ver que P y Q son B-módulos proyectivos finitamente generados.

Proposición 2.6: El isomorfismos g induce un isomorfismo de bimódulos $h : Q \to Hom_A(P, A)$ y $h' : P \to Hom_A(Q, A)$.

Demostración:
Sea $h : Q \longrightarrow Hom_A(P, A)$ dada por $h(q)(p) = qp$
a) Supongamos que $h(q) = 0$, entonces $q = q\sum p_i q_i = \sum(qp_i)q_i = 0$, por lo tanto h es monomorfismo.
b)Sea $s : P \to A$, entonces

$$s(p) = s\sum(p_i q_i)p = s\sum p_i(q_i p) = \sum s(p_i)q_i p = h(\sum s(p_i)q_i)(p)$$

por lo tanto, $s = h(\sum s(p_i)q_i)$, es decir, h es epimorfismo.

Similarmente, si definimos $h' : P \to Hom_A(Q, P)$ dado por $h'(p)(q) = qp$, se tiene que h' es isomorfismo.

Observación 2.7: El isomorfismo f nos induce un isomorfismo de bimódulos $h : Q \to Hom_B(P, B)$ y $h' : P \to Hom_B(Q, B)$ dados por $h(q)(p) = pq = h'(p)(q)$

Proposición 2.8: Sea P un A-módulo derecho finitamente generado, generador proyectvo para mod (A^{op}). Sea $B = End_A(P_A)$, B es una k-álgebra de dimensión finita, P es un $B - A$-bimódulo. Entonces A y B son Morita equivalentes, la equivalencia está dada por: $T = P\otimes_A$, $S = Q\otimes_B$ donde $Q = Hom_A(P_A, A_A)$.

Demostración: Como P es generador proyectivo se tiene un epimorfismo:

$$P_A^n \xrightarrow{\eta} A_A \longrightarrow 0$$

y como A_A es proyectivo, η se divide, existe entonces un monomorfismo que se divide:

$$0 \longrightarrow A_A \xrightarrow{\sigma} P_A^n$$

Tomando $Hom_A(-, A_A)$ se tiene el epimorfismo

$$Hom_A(P_A, A_A)^n = Q^n \longrightarrow Hom_A(A_A, A_A) \cong_A A$$

por lo tanto, Q es un generador proyectivo para mod-A.

Consideremos las siguientes aplicaciones:

$$g : Q \otimes_B P = Hom_A(P_A, A_A) \otimes_B P \longrightarrow A \quad g(q \otimes P) = q(p)$$

$$f : P \otimes_A Q = P \otimes_A Hom_A(P_A, A_A) \longrightarrow B \quad f(p \otimes q) = pq \in Hom(P_A, P_A) = B$$

dado por $(pq)(p) = p(q(p))$. Se tiene entonces,

$$(pq)p_1 = f(p \otimes q)p_1 = pg(q \otimes p_1) = p(qp_1)$$

$$(qp)q_1 = g(q \otimes p)q_1 = qf(p \otimes q_1) = q(pq_1)$$

$$q(pq_1)(p') = q(pq_1(p')) = q(p)q_1(p') = (qp)q_1(p')$$

Por lo tanto se satisfacen las condiciones 1) y 2) del teorema anterior. Ahora, como P es un módulo proyectivo finitamente generado, tenemos que existen, $\pi : A_A \oplus \cdots \oplus A_A \longrightarrow P$ y $\sigma : P \longrightarrow A_A \oplus \cdots \oplus A_A$ tales que $\pi\sigma = 1_P$, entonces:
$\sigma(p) = \sum q_1 p$ con $q_i \in Hom_A(P_A, A_A) = Q, \pi(\sum a_i) = \sum p_i a_i$ entonces, $p = \pi(\sum q_i p) = \sum p_i q_i p$ y como P es un B-mod fiel, $\sum p_i q_i = 1_B$, por lo que f es epimorfismo, por lo tanto, es isomorfismo. Similarmente, como Q es un generador, se tiene que g es un isomorfismo. En consecuencia, si tomamos $TM = P \otimes_A M$, $SN = Q \otimes_B N$, tenemos:

$$STM = Q \otimes_B (P \otimes_A M) = (Q \otimes_B P) \otimes_A M = A \otimes_A M \cong M$$

$$TSN = P \otimes_A (Q \otimes_B N) = (P \otimes_A Q) \otimes_B N = B \otimes_B N \cong N$$

por lo tanto, el par de funtores (T, S) es una equivalencia.

Proposición 2.9: Si e y f son idempotentes, $Ae \cong Af \iff \exists x \in eAf,\ y \in fAe$ tales que $e = xy,\ f = yx$.

Demostración:
Supongamos que existe un isomorfismo $h : Ae \to Af$ dado por $h(e) = af$ y $h^{-1}(f) = be$, entonces se tiene:

$$h^{-1}h(e) = h^{-1}(af) = abe = e$$

$$hh^{-1}(f) = h(be) = baf = f$$

Además tenemos que $h(e) = h(ee) = eh(e) = eaf = af$, y $h^{-1}(f) = h^{-1}(ff) = fh^{-1}(f) = fbe = be$, por lo tanto, $e = abe = afbe = eaffbe$ y $f = baf = beaf = fbeeaf$, con lo que podemos tomar $x = eaf$ y $y = fbe$ y por lo tanto, $e = xy$, $f = yx$.
El otro sentido de la implicación es inmediato.

Lema 2.10: Si $Ae \cong Af$ entonces $eA \cong fA$.

Demostración: Sea $h : eA \longrightarrow fA$ definido por $h(e\alpha) = y\alpha$ y $h' : fA \longrightarrow eA$ dado por $h'(f\beta) = x\beta$ donde x, y satisfacen la proposición anterior. Entonces tenemos:

$$h'h(e\alpha) = h'(y\alpha) = h'(f(be\alpha)) = xbe\alpha = eaffbe\alpha = xy\alpha = e\alpha$$

$$hh'(f\beta) = h(x\beta) = h(e(af\beta)) = yaf\beta = fbeeaf\beta = yx\beta = f\beta$$

Observación 2.11: Similarmente, tenemos que $eA \cong fA$ si y sólo si existen $x \in eAf$ y $y \in fAe$ tales que $e = xy$ y $f = yx$. Además, si $eA \cong fA$ entonces $Ae \cong Af$, por lo que podemos dar la siguiente proposición.

Proposición 2.12: $Ae \cong Af \Longleftrightarrow eA \cong fA$

Teorema 2.13: Sea A una k-álgebra.
a) Existe una k-álgebra básica B tal que $modA \cong modB$.
b) Si A y B son k-álgebras básicas y $modA \cong modB$ entonces $A \cong B$.

Demostración:
a) Sea ${}_AA = Ae_1 \oplus Ae_2 \oplus ... \oplus Ae_n$ su descomposición en proyectivos inescindibles.
Sean $e_{i_1}, ..., e_{i_l}$ idempotentes tales que:
a) $Ae_{i_j} \ncong Ae_{i_k}$ si $j \neq k \quad 1 \leq j,\ k \leq l$
b) Para toda $j \in \{1, ..., n\} \quad Ae_j \cong Ae_{i_t}$ para alguna $i_t \quad 1 \leq t \leq l$
Sea $e = e_{i_1} + ... + e_{i_l}$ y definamos $P = eA$
Por la proposición 2.12 tenemos que para toda $j \in \{1, ..., n\}$ existe $i_s \quad 1 \leq s \leq l$ tal que $e_jA \cong e_{i_s}A$, esto nos induce un epimorfismo:

$$(eA)^n \longrightarrow A_A$$

por lo que P es un generador en modA^{op}
Ahora, sea $End_A(eA) \cong eAe = B$, entonces

$$_BB = eAe_{i_1} \oplus \cdots \oplus eAe_{i_l}$$

Y $Hom_B(eAe_{i_t}, eAe_{i_s}) \cong e_{i_t}Ae_{i_s} \cong Hom_A(Ae_{i_t}, Ae_{i_s})$
Por lo tanto, $eAe_{i_t} \ncong eAe_{i_s}$ si $s \neq t$, podemos concluir entonces que B es básica.
Ahora, aplicando la proposición 2.8 para $P = eA$ y $B = End_AP$, tenemos una equivalencia dada por:

$$S = Q\otimes_B = Hom_A(P_A, A)\otimes_B = Ae\otimes_B$$

$$T = P\otimes_A = eA\otimes_A$$

b) Tomemos el isomorfismo $T : modA \longrightarrow modB$ y $_AA = P_1 \oplus ... \oplus P_r$ su descomposición en proyectivos inescindibles con $P_i \ncong P_j$ para $i \neq j$.
Entonces, $P = T(_AA) = T(P_1)\oplus...\oplus T(P_r)$ es B-proyectivo y $T(P_i) \ncong T(P_j)$ si $i \neq j$.
Tenemos que para cada $i \in \{1, ..., r\}$, $T(P_i)$ es B-proyectivo inescindible, por lo que los $T(P_i)$ son un sistema de representantes de las clases de isomorfía de los B-módulos proyectivos, como B es básica, esto implica que si $_BB = Q_1 \oplus ... \oplus Q_r$, para toda i, existe j tal que $Q_i \cong T(P_j)$.
Por lo tanto:
$B^{op} \cong End_B(_BB) \cong End_B(T(P_1)\oplus...\oplus T(P_r)) \cong End_B(T(_AA)) \cong End_A(_AA) \cong A^{op}$
De donde se concluye que $A \cong B$.

3. Funtores Adjuntos y Cotriples

Definición 3.1: La terna $C = (F, \delta, \epsilon)$ es un cotriple sobre la categoría $\mathcal{A}$, si F es un endofuntor, es decir, $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$; $\delta : F \longrightarrow F^2$ y $\epsilon : F \longrightarrow I_{\mathcal{A}}$ son transformaciones naturales, tales que los siguientes diagramas son conmutativos:

$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] \arrow[dr, equal] & F^2 \arrow[d, "F\epsilon"] \\
F^2 \arrow[r, "\epsilon F"'] & F
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & F^2 \arrow[d, "F\delta"] \\
F^2 \arrow[r, "\delta F"'] & F^3
\end{tikzcd}
$$

Afirmación 3.2: Dado un par de funtores adjuntos $(T, S) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, se tiene un cotriple $C_{(T,S)} = (TS, T\alpha S, \beta)$ sobre $\mathcal{B}$.

Demostración:
a) Por la proposición 1.3, tenemos que $TS_\beta \circ T\alpha S = T(S_\beta \circ \alpha_S) = I_{TS}$, y $\beta_{TS} \circ T\alpha S = I_{TS}$, por lo tanto el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
TS \arrow[r, "T\alpha S"] \arrow[d, "T\alpha S"'] & TSTS \arrow[d, "TS\beta"] \\
TSTS \arrow[r, "\beta TS"'] & TS
\end{tikzcd}
$$

b) Queremos ver que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} TS \arrow[r, "T\alpha S"] \arrow[d, "T\alpha S"'] & TSTS \arrow[d, "TS \circ T\alpha S"] \\ TSTS \arrow[r, "T\alpha S \circ TS"'] & TSTSTS \end{tikzcd}$$

Pero por la naturalidad de α, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\alpha_X"'] & X_1 \arrow[d, "\alpha_{X_1}"] \\ STX \arrow[r, "STa"'] & STX_1 \end{tikzcd}$$

Si tomamos $X_1 = STX$, se tiene el siguiente diagrama también conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "\alpha_X"'] & STX \arrow[d, "\alpha_{STX}"] \\ STX \arrow[r, "ST\alpha_X"'] & STSTX \end{tikzcd}$$

El cual a su vez implica la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\alpha_S"] \arrow[d, "\alpha_S"'] & STS \arrow[d, "ST\alpha_S"] \\ STS \arrow[r, "\alpha_S TS"'] & STSTS \end{tikzcd}$$

Y por ser T un funtor, se tiene nuestro diagrama inicial a demostrar.

Definición 3.3: Sean $C = (F, \delta, \epsilon)$ y $D = (F', \delta', \epsilon')$ dos cotriples sobre $\mathcal{A}$. Diremos que una transformación natural $\varphi : C \to D$ es un morfismo de cotriples si los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\epsilon"'] & F' \arrow[d, "\epsilon'"] \\ I_{\mathcal{A}} \arrow[r] & I_{\mathcal{A}} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\delta"'] & F' \arrow[d, "\delta'"] \\ F^2 \arrow[r, "\rho(\varphi)"'] & F'^2 \end{tikzcd}$$

donde $\rho(\varphi) \equiv \varphi F' \circ F\varphi = F'\varphi \circ \varphi F$.
Observemos que realmente $\varphi F' \circ F\varphi = F'\varphi \circ \varphi F$.
Si $X \in \mathcal{A}$, entonces $\varphi_X : FX \to F'X$ por lo tanto $\varphi_{FX} : FFX \to F'FX$ y $\varphi_{F'X} : FF'X \to F'F'X$.
Sea $a : FX \to Y$, por la naturalidad de φ se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} FFX \arrow[r, "Fa"] \arrow[d, "\varphi_{FX}"'] & FY \arrow[d, "\varphi_Y"] \\ F'FX \arrow[r, "F'a"'] & F'Y \end{tikzcd}$$

Tomando $Y = F'X$ y $a = \varphi_X$, tenemos:

$$\varphi_Y \circ Fa = \varphi_{F'X} \circ F\varphi_X = \varphi F' \circ F\varphi$$

$$F'_a \circ \varphi_{FX} = F'_{\varphi X} \circ \varphi_{FX} = F'\varphi \circ \varphi F$$

Definición 3.4: Sea $C = (F, \delta, \epsilon)$ un cotriple sobre $\mathcal{A}$. La categoría de

Kleisli $\mathcal{A}_C$ de $\mathcal{A}$ se define como:
a) $Obj\mathcal{A}_C = Obj\mathcal{A}$, b) $\mathcal{A}_C(X,Y) = \mathcal{A}(FX,Y)$
Si $\lambda \in \mathcal{A}_C(X,Y)$ y $\mu \in \mathcal{A}_C(Y,Z)$, la composición $\mu\lambda$ en $\mathcal{A}_C$ se define como:

$$\mu\lambda : FX \xrightarrow{\delta_X} F^2X \xrightarrow{F\lambda} FY \xrightarrow{\mu} Z$$

es decir, $\mu\lambda = \mu \circ F\lambda \circ \delta_X$
Además, el morfismo identidad I_X en $\mathcal{A}_C$ está dado por ϵ_X.

Afirmación 3.5: Si $\varphi : C \to D$ es un morfismo de cotriples sobre $\mathcal{A}$, entonces se tiene un funtor $\varphi^* : \mathcal{A}_D \to \mathcal{A}_C$.

Demostración: Sea $C = (F, \delta, \epsilon)$ y $D = (F', \delta', \epsilon')$.
Si $X \in Obj\mathcal{A}_D$, se define $\varphi^*(X) = X$ y para λ un morfismo en $\mathcal{A}_D(X,Y)$, se define $\varphi^*(\lambda) = \lambda \circ \varphi_X$.
a) $\varphi^*(I_X) = \varphi^*(\epsilon'_X) = \epsilon'_X\varphi_X = \epsilon_X = (I_X)_{\mathcal{A}_C} = I_{\varphi^*(X)}$.
b) Sea $\lambda \in \mathcal{A}_D(X,Y)$ y $\mu \in \mathcal{A}_D(Y,Z)$, entonces, $\mu\lambda = \mu F'(\lambda)\delta'_X$.
Queremos demostrar que:

$$\varphi^*(\mu)\varphi^*(\lambda) = (\mu\varphi_Y)(\lambda\varphi_X) = (\mu F'(\lambda)\delta'_X)\varphi_X = \varphi^*(\mu\lambda)$$

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
FFX \arrow[r, "\varphi_{FX}"] \arrow[d, "F\varphi_X"'] & F'FX \arrow[d, "F'\varphi_X"] \\
FF'X \arrow[r, "\varphi_{F'X}"] \arrow[d, "F\lambda"'] & F'F'X \arrow[d, "F'\lambda"] \\
FY \arrow[r, "\varphi_Y"] & F'Y
\end{tikzcd}$$

El diagrama superior es conmutativo porque $\rho(\varphi) \equiv \varphi F' \circ F\varphi = F'\varphi \circ \varphi F$.

El diagrama inferior es conmutativo por la naturalidad de φ .
Como φ es un morfismo de cotriples, tenemos que $\delta'_X\varphi_X = \rho(\varphi)\delta_X = \varphi_{F'X}F\varphi_X\delta_X$.
Por lo tanto:
$(\mu F'(\lambda)\delta'_X)\varphi_X = \mu F'(\lambda)\varphi_{F'X}F\varphi_X\delta_X = \mu\varphi_Y F(\lambda\varphi_X)\delta_X = (\mu\varphi_Y)(\lambda\varphi_X)$

Nota 3.6: Dada una categoria $\mathcal{A}$, $\Pi = (I_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{A}} \to I^2_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{A}} \to I_{\mathcal{A}})$ es un cotriple sobre $\mathcal{A}$.

Afirmación 3.7: Si $C = (F, \delta, \epsilon)$ es un cotriple sobre $\mathcal{A}$, entonces $\epsilon : C \to \Pi$ es un morfismo de cotriples.

Demostración:
Debemos demostrar que los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "\epsilon"'] & I_{\mathcal{A}} \arrow[d, "\epsilon'"] \\ I_{\mathcal{A}} \arrow[r] & I_{\mathcal{A}} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "\delta"'] & I_{\mathcal{A}} \arrow[d, "\delta'"] \\ F^2 \arrow[r, "\rho(\epsilon)"'] & I^2_{\mathcal{A}} \end{tikzcd}$$

donde hemos denotado a $\Pi = (F', \delta', \epsilon')$
Por ser C un cotriple, se tiene $I_{\mathcal{A}} = \epsilon F \circ \delta = F\epsilon \circ \delta$, entonces, $\rho(\epsilon) \circ \delta = \epsilon \circ F\epsilon \circ \delta = \epsilon$, con lo que se tiene: $\rho(\epsilon) = \epsilon \circ F\epsilon = \epsilon \circ \epsilon F$.

Por la afirmación 3.5 existe un funtor $S_0 : \mathcal{A}_\Pi = \mathcal{A} \to \mathcal{A}_C$, dado por $S_0(X) = X$ y $S_0(\lambda) = \lambda\epsilon_X$ si $\lambda \in \mathcal{A}(X, Y)$.

Proposición 3.8: El funtor S_0 tiene un adjunto izquierdo T_0 dado por $T_0(X) = F(X)$ y $T_0(\lambda) = F(\lambda)\delta_X$ para $\lambda \in \mathcal{A}_C(X, Y)$.

Demostración:
a) $T_0(I_X) = T_0(\epsilon_X) = F(\epsilon_X)\delta_X = I_{FX} = I_{T_0(X)}$.
b) Sea $\lambda \in \mathcal{A}_C(X, Y)$ y $\mu \in \mathcal{A}_C(Y, Z)$, entonces, $\mu\lambda = \mu F(\lambda)\delta_X$.

Queremos demostrar que:

$T_0(\mu)T_0(\lambda) = F(\mu)\delta_Y \circ F(\lambda)\delta_X = F(\mu F(\lambda)\delta_X)\delta_X = F\mu \circ F(F(\lambda)\delta_X)\delta_X = T_0(\mu\lambda)$

. Pero por ser δ una transformación natural, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} FFX \arrow[r, "F\lambda"] \arrow[d, "F\delta_X"'] & FY \arrow[d, "\delta_Y"] \\ F(F^2X) \arrow[r, "F(F\lambda)"'] & F(FY) \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $F(F\lambda \circ \delta_X) = \delta_Y F(\lambda)$, de donde se sigue que $T_0(\mu\lambda) = F\mu \circ F(F(\lambda)\delta_X)\delta_X = F\mu \circ \delta_Y F(\lambda)\delta_X = T_0(\mu)T_0(\lambda)$.
Para ver que el funtor T_0 es adjunto izquierdo del funtor S_0 nos hace falta ver que existe un isomorfismo natural:

$$\Gamma_{X,Y} : \mathcal{A}_C(X, T_0Y) \longrightarrow \mathcal{A}(S_0X, Y)$$

pero esto es inmediato por la definición de T_0 y S_0.

Proposición 3.9: Sea $(T, S) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un par de funtores adjuntos y $C = (TS, T\alpha S, \beta)$ el cotriple inducido sobre $\mathcal{B}$, entonces, existe un funtor fiel y pleno $E : \mathcal{B}_C \to \mathcal{A}$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}_C \arrow[rr, "E"] \arrow[dr, shift right, "T_0"'] & & \mathcal{A} \arrow[dl, shift left, "T"] \\ & \mathcal{B} \arrow[ul, shift right, "S_0"'] \arrow[ur, shift left, "S"] & \end{tikzcd}$$

Demostración:

Sea $E(X) = S(X)$ y $E(\lambda) = \Gamma^{-1}_{SX,Y}(\lambda)$ donde Γ es el isomorfismo de adjunción de los funtores T y S, y $\lambda \in \mathcal{B}_C(X,Y)$.
a) $E(I_X) = E(\epsilon_X) = \Gamma^{-1}_{SX,X}(\epsilon_X) = I_{SX} = I_{E(X)}$.
b) Queremos demostrar que $E(\mu)E(\lambda) = \Gamma^{-1}_{SY,Z}(\mu)\Gamma^{-1}_{SX,Y}(\lambda) = \Gamma^{-1}_{SX,Z}(\mu\lambda) = E(\mu\lambda)$, donde $\lambda \in \mathcal{B}_C(X,Y)$ y $\mu \in \mathcal{B}_C(Y,Z)$.
Observemos primero, que si el isomorfismo de adjunción Γ es natural, también $\Phi = \Gamma^{-1}$ es natural.
Sea $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ con $X, X' \in \mathcal{A}$ y $Y, Y' \in \mathcal{B}$, tenemos entonces los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(X,SY) \arrow[r, "\Gamma_{X,Y}"] \arrow[d, "\mathcal{A}(f,I_{SY})"'] & \mathcal{B}(TX,Y) \arrow[d, "\mathcal{B}(Tf,I_Y)"] \\
\mathcal{A}(X',SY) \arrow[r, "\Gamma_{X',Y}"] & \mathcal{B}(TX',Y)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(X,SY) \arrow[r, "\Gamma_{X,Y}"] \arrow[d, "\mathcal{A}(I_X,Sg)"'] & \mathcal{B}(TX,Y) \arrow[d, "\mathcal{B}(I_{TX},g)"] \\
\mathcal{A}(X,SY') \arrow[r, "\Gamma_{X,Y'}"] & \mathcal{B}(TX,Y')
\end{tikzcd}$$

Entonces:
$T(f^*)\Gamma_{X,Y} = \Gamma_{X',Y}(f^*)$, implica $\Phi_{X',Y}T(f^*) = (f^*)\Phi_{X,Y}$.
$T(g^*)\Gamma_{X,Y} = \Gamma_{X,Y'}(g^*)$, implica $\Phi_{X,Y'}T(g^*) = (g^*)\Phi_{X,Y}$
por lo tanto, Φ es natural.
Por la naturalidad de Φ tenemos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(TSY,Z) \arrow[r, "\Phi_{SY,Z}"] \arrow[d, "T(\Phi_{SX,Y}(\lambda))"'] & \mathcal{A}(SY,SZ) \arrow[d, "\Phi_{SX,Y}(\lambda))"] \\
\mathcal{B}(TSX,Z) \arrow[r, "\Phi_{SX,Z}"] & \mathcal{A}(SX,SZ)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(TSX,TSX) \arrow[r, "\Phi_{SY,TSX}"] \arrow[d, "\lambda^*"'] & \mathcal{A}(SX,STSX) \arrow[d, "(T\lambda)^*"] \\
\mathcal{B}(TSX,Y) \arrow[r, "\Phi_{SX,Y}"] & \mathcal{A}(SX,SY)
\end{tikzcd}$$

Entonces, $\Phi_{SY,Z}(\mu) \circ \Phi_{SX,Y}(\lambda) = \Phi(\mu T\Phi_{SX,Y}(\lambda))$. Ahora,

$$
\begin{aligned}
\Phi_{SX,Z}(\mu\lambda) &= \Phi_{SX,Z}(\mu F(\lambda)\delta_X) \\
&= \Phi_{SX,Z}(\mu F(\lambda)T\alpha_{SX}) \\
&= \Phi_{SX,Z}(\mu F(\lambda)T\Phi_{SX,TSX}(I_{TSX})
\end{aligned}
$$

De nuestro diagrama derecho tenemos:
$\Phi_{SX,Y}(\lambda) = (S\lambda)\Phi_{SX,TSX}(I_{TSX})$, entonces,

$$
\begin{aligned}
T\Phi_{SX,Y}(\lambda) &= T((S\lambda)\Phi_{SX,TSX}(I_{TSX})) \\
&= TS\lambda \circ T\Phi_{SX,TSX}(I_{TSX}) \\
&= F\lambda \circ T\Phi_{SX,TSX}(I_{TSX})
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\Phi_{SY,Z}(\mu) \circ \Phi_{SX,Y}(\lambda) &= \Phi_{SX,Z}(\mu T\Phi_{SX,Y}(\lambda) \\
&= \Phi_{SX,Z}(\mu F(\lambda)T\Phi_{SX,TSX}(I_{TSX}) \\
&= \Phi_{SX,Z}(\mu F(\lambda)T\alpha_{SX}) \\
&= \Phi_{SX,Z}(\mu F(\lambda)\delta_X) \\
&= \Phi_{SX,Z}(\mu\lambda)
\end{aligned}
$$

De la definición de E se sigue que es fiel y pleno.

Proposición 3.10: Dados dos pares de funtores adjuntos $(T, S) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $(T', S') : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, se tiene un nuevo par de funtores adjuntos $(T'T, SS') : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$.

Demostración:
Queremos ver que existe un isomorfismo natural :

$$\Psi_{X,Z} : \mathcal{A}(X, SS'Z) \longrightarrow \mathcal{C}(T'TX, Z)$$

Sea Γ el isomorfismo de adjunción para el par de funtores (T, S) y Γ' el isomorfismo de adjunción para el par de funtores (T', S'), entonces defínase:

$$\Psi_{X,Z} = \Gamma'_{TX,Z} \circ \Gamma_{X,S'Z}$$

Definición 3.11: Diremos que una terna $V = (V, \mu, \upsilon)$ es una coálgebra sobre la k-álgebra A si:
a) V es un $A - A$ bimódulo.

b) $\mu : V \longrightarrow V \otimes_A V$, llamada la comultiplicación de la coálgebra es coasociativa, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\mu"'] & V \otimes_A V \arrow[d, "(I_V \otimes_A \mu)"] \\
V \otimes_A V \arrow[r, "(\mu \otimes_A I_V)"] & V \otimes_A V \otimes_A V
\end{tikzcd}$$

c) $v : V \longrightarrow A$, llamada la counidad de la coálgebra, hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & V \otimes_A V \arrow[dl, "(v \otimes_A I_V)"'] \arrow[dr, "(I_V \otimes_A v)"] & \\
A \otimes_A V & V \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r, "\cong"] \arrow[u, "\mu"'] & V \otimes_A V
\end{tikzcd}$$

Observación 3.12: La coasociatividad de V, en términos de elementos, se ve de la siguiente manera:
Si $v \in V$ y denotamos como $\mu(v) = \sum v_1^i \otimes v_2^i$, $\mu(v_1^i) = \sum v_{11}^{ij} \otimes v_{12}^{ij}$, y $\mu(v_2^i) = \sum v_{21}^{ik} \otimes v_{22}^{ik}$, entonces se tiene:

$$\begin{aligned}
(I \otimes \mu)\mu(v) &= (I \otimes \mu)(\sum v_1^i \otimes v_2^i) \\
&= \sum v_1^i \otimes v_{21}^{ik} \otimes v_{22}^{ik} \\
&= \sum v_{11}^{ij} \otimes v_{12}^{ij} \otimes v_2^i \\
&= (\mu \otimes I)\mu(v)
\end{aligned}$$

Consideraremos en adelante, coálgebras con la propiedad de que V_A y ${}_AV$ sean $A-$módulos proyectivos finitamente generados, y la counidad v, sea un epimorfismo.

Definición 3.13: Sea $V = (V, \mu, v)$ una coálgebra sobre A. La categoría de representaciones de V, $R(V)$ se define como:
a) $Obj\,R(A) = Obj\ ModA$, b) $R(V)(M, N) = V \otimes_A M \to N$.
Si $\lambda \in R(V)(M, N)$ y $\mu \in R(V)(N, L)$, la composición $\mu\lambda$ en $R(V)(M, L)$ se define como:

$$\mu\lambda : V \otimes_A M \xrightarrow{\mu \otimes_A I_M} V \otimes_A V \otimes_A M \xrightarrow{I_V \otimes_A \lambda} V \otimes_A N \xrightarrow{\mu} L$$

es decir, $\mu\lambda = \mu \circ (I_V \otimes_A \lambda) \circ (\mu \otimes_A I_M$
Además, el morfismo identidad $I_M : V \otimes_A M \to M$ en $R(V)$ está dado por la composición: $V \otimes_A M \xrightarrow{v \otimes_A I_M} A \otimes_A M \longrightarrow M$.

Afirmación 3.14: Sea $V = (V, \mu, v)$, una coálgebra sobre A, entonces, V induce un cotriple $C = (F, \delta, \epsilon)$ sobre $modA$.

Demostración:
Sean:

$$F = V \otimes_A - : ModA \longrightarrow ModA$$
$$\delta : V \otimes_A - \longrightarrow V \otimes_A V \otimes_A -$$
$$\epsilon : V \otimes_A - \longrightarrow A \otimes_A -$$

Tal que, si $v \in V$, y $m \in ModA$, entonces:
$\delta(v \otimes m) = \mu(v) \otimes m$ y $\epsilon(v \otimes m) = v(v) \otimes m$.
Se quieren ver las siguientes igualdades:
a)$F\epsilon \circ \delta = \epsilon F \circ \delta = I_{modA}$, y b) $F\delta \circ \delta = \delta F \circ \delta$
Pero de las propiedades de la counidad v y por la coasociatividad de la comultiplicación μ, tenemos que se satisfacen a) y b).

Observación 3.15: Sea $V = (V, \mu, v)$, una coálgebra sobre A, y $C = (F, \delta, \epsilon)$ el cotriple inducido sobre $ModA$ por V, entonces la categoría de Kleisli de $(ModA)_C$ de $ModA$ es igual a la categoría de representaciones de V.

Daremos a continuación, una construcción que nos permitirá enlazar las diferentes definiciones y resultado que hemos dado a lo largo de este primer capítulo.

a) Sea $V = (V, \mu, v)$ una coálgebra sobre A, y $C = (F, \delta, \epsilon)$ el correspondiente cotriple inducido sobre $modA$.

b) Por la afirmación 3.7 y la proposición 3.8, tenemos que exite un par de funtores adjuntos $(T_0, S_0) : (modA)_C \to modA$.
c) Sea $B = eAe$ el álgebra básica Morita equivalente a A, donde $e = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ es la descomposición de la unidad en idempotentes primitivos ortogonales de A, por la proposición 1.6 existe un par de funtores adjuntos $(T, S) : modA \to modB$.
d) Por la proposición 3.10, existe también un par de funtores adjuntos $(TT_0, S_0S) : (modA)_C \to modB$.
e) Este nuevo par de funtores adjuntos, nos induce un cotriple C' sobre $modB$, y nuevamente podemos contruir un par de funtores adjuntos $(T_1, S_1) : (modB)_{C'} \to modB$.
f) Por la proposición 3.9 tenemos un funtor fiel y pleno $E : (modB)_{C'} \to (modA)_C$.

Es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(modA)_C \arrow[r, shift right, "T_0"'] & modA \arrow[l, shift right, "S_0"'] \arrow[d, shift right, "T"'] \\
(modB)_C \arrow[u, "E"] \arrow[r, shift right, "T_1"'] & modB \arrow[l, shift right, "S_1"'] \arrow[u, shift right, "S"']
\end{tikzcd}$$

Teorema 3.16: El cotriple $C' = (F', \delta', \epsilon')$ es el inducido por la coálgebra eVe sobre B, es decir:

$$F' = eVe \otimes_B - : modB \longrightarrow modB$$

$$\delta' : eVe \otimes_B - \longrightarrow eVe \otimes_B eVe \otimes_B -$$

$$\epsilon' : eVe \otimes_A - \longrightarrow B \otimes_A -$$

Demostración:
Recordemos que por el teorema 2.13 a), si A es una k-álgebra, tal que ${}_AA = Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_n$, entonces existe una k-álgebra básica Morita equivalente $B = eAe$, donde $e = e_1 + \cdots e_l$ con $l \leq n$, y un par de funtores adjuntos $(T, S) : modA \to modB$, dados por:

$T = eA\otimes_A$ y $S = Ae\otimes_B$, los cuales son una equivalencia. Además, existen isomorfismos $f : eA \otimes_A Ae \to B$ y $g : Ae \otimes_B eA \to A$. Observemos como actuan los isomorfismos f y g en un elemento.
$f(ea \otimes_A be) = eabe$, donde $a, b \in A$, por lo tanto $1_A = e = f(e \otimes_A e)$.
Por otro lado, $1_A = e_1 + \cdots + e_n$, supongamos $1_A = e_1 + \cdots + e_l + e'_1 + \cdots + e'_r$ donde $e'_i \cong e_j$ para alguna $1 \leq j \leq l$. Por la proposición 2.9, existen $x_i \in e'_i A e_i$, y $y_i \in e_i A e'_i$ tales que $x_i y_i = e'_i$ y $y_i x_i = e_i$, pero entonces, $x_i \in e'_i A e_i \in Ae_i \in Ae$, y $y_i \in e_i A e'_i \in e_i A \in eA$, por lo tanto $g(x_i \otimes_B y_i) = e'_i$, donde $1 \leq i \leq r$, de donde se tiene :
$1_A = g(e \otimes_B e + x_1 \otimes_B y_1 \oplus \cdots \oplus x_r \otimes_B y_r)$
Por ser A y B álgebras Morita equivalentes, tenemos que $ST \cong I_A$ y $TS \cong I_B$, entonces $ST(ae \otimes eb \otimes m) = aebm$, y $(ST(M))^{-1}(m) = (e \otimes e \otimes \sum x_i \otimes y_i) \otimes m$. Similarmente, $TS(ea \otimes be \otimes n) = eabn$ y $(TS(N))^{-1}(n) = (e \otimes e) \otimes n$, donde $M \in modA$ y $N \in modB$.
Dado que tenemos el par de funtores adjuntos $(TT_0, S_0S) : (modA)_C \to modB$; se induce el cotriple:

$$C' = (F = TT_0S_0S : modB \to modB, \delta : TT_0S_0S \to (TT_0S_0S)^2, \epsilon : TT_0S_0S \to I_{modB})$$

.

Sea $N \in modB$, entonces $F(N) = eA \otimes_A V \otimes_A Ae \otimes_B N = eVe \otimes_B N$.
Ahora sea $f \in A(M_1, M_2)$, entonces se tiene $T(f) : eA \otimes M_1 \to eA \otimes M_2$, pero existen isomorfismos $eA \otimes_A M_1 \cong eM_1$ y $eA \otimes_A M_2 \cong eM_2$, por lo tanto, $S(f)^* : eM_1 \to eM_2$, actua en un elemento de la forma $S(f)^*(em_1) = ef(m_1) = f(em_1)$, de donde se concluye que $S(f) = f \mid S(M_1)$.
Deseamos ahora ver como actua δ', por definición $\delta'_X = TT_0\alpha'_{S_0SX}$ para $X \in modB$, y $\alpha' : I_{(modA)_C} \longrightarrow S_0STT_0$ .Veamos primero como se comporta $T_0\alpha'_{S_0SX}$.
Recordemos, que si $\lambda \in A_C(X, Y)$, entonces, $T_0(\lambda) = F(\lambda)\delta_X$.
Ahora, $\alpha'_{S_0SX} \in (modA)_C(S_0SX, S_0STT_0S_0SX)$, por lo tanto, $T_0\alpha'_{S_0SX}$, está dada por la siguiente composición:

$$F(S_0SX) \overset{\delta_{S_0SX}}{\longrightarrow} F^2(S_0SX) \overset{F'(\alpha_{S_0SX}}{\longrightarrow} F(S_0STT_0S_0SX)$$

Sustituyendo, $F = V\otimes_A$; $S_0S = Ae\otimes_B$; y $TT_0 = eA \otimes_A V\otimes_A$, se tiene la siguiente composición:

$$V\otimes_A Ae\otimes_B X \longrightarrow V\otimes_A V\otimes_A Ae\otimes_B X \longrightarrow V\otimes_A Ae\otimes_B eA\otimes_A V\otimes_A Ae\otimes_B X \cong Ve\otimes_B eVe\otimes_B X$$

Sea $v\otimes_A ae\otimes_B x \in V\otimes_A Ae\otimes_B X$, y recordemos que tenemos un isomorfismo $g^{-1} : A \to Ae\otimes_B eA$, tal que $g^{-1}(1_A) = e\otimes_B e + \sum x_i \otimes_B y_i$, entonces:

$$v\otimes_A ae\otimes_B x \longrightarrow (\sum v_1^j \otimes_A v_2^j)\otimes_A ae\otimes_B x$$

$$\longrightarrow (\sum v_1^j \otimes_A (e\otimes_B e + \sum x_i \otimes_B y_i)v_2^j \otimes_A ae\otimes_B x$$

$$\longrightarrow \sum v_1^j \otimes_A e\otimes_B ev_2^j \otimes_A ae\otimes_B x + \sum v_1^j \otimes_A x_i \otimes_B y_i v_2^j \otimes_A ae\otimes_B x$$

$$\longrightarrow \sum v_1^j e\otimes_B ev_2^j ae\otimes_B x + \sum v_1^j x_i \otimes_B y_i v_2^j ae\otimes_B x$$

donde $\mu(v) = \sum v_1^j \otimes_A v_2^j$.

Como $V\otimes_A Ae\otimes_B X \cong Ve\otimes_B X$, tenemos:

$$T(T_0\alpha'_{S_0SX}) = T_0\alpha'_{S_0SX}\,|_{T(FS_0SX)}$$

Si $v \in eVe$, se tiene:

$$\delta(v\otimes_A x) = \sum v_1^j e\otimes_B ev_2^j \otimes_B x + \sum v_1^j x_i \otimes_B y_i v_2^j \otimes_B x$$

donde, $v_1^j \in eV$, y $v_2^j \in Ve$.

Por lo tanto:

$$\delta' : eVe \longrightarrow eVe\otimes_B eVe$$
$$\delta'(v) = v_1^j e\otimes_B ev_2^j + \sum v_1^j x_i \otimes_B y_i v_2^j$$

Finalmente, $\epsilon'_X : TT_0S_0SX \longrightarrow X$, por lo tanto:

$$\epsilon'_X : eA\otimes_A V\otimes_A Ae\otimes_B X \longrightarrow eVe\otimes X \cong X$$

De donde concluimos, $\epsilon' : eVe \longrightarrow I_{modB}$.

Proposición 3.17: Sea $V = (V, \mu, v)$, una coálgebra sobre A. Supongamos que existe un morfismo de álgebras $\varphi : A \to B$. El $B-B$-bimódulo ${}^BV^B = B \otimes_A V \otimes_A B$, tiene estructura de coálgebra sobre B.

Demostración:
a) Definamos ${}^Bv^B : B \otimes_A V \otimes_A B \to B$, dada por:

$$^Bv^B(b_1 \otimes v \otimes b_2) = b_1\varphi(v(v))b_2$$

.
b) Definamos ${}^B\mu^B : B \otimes_A V \otimes_A B \to (B \otimes_A V \otimes_A B) \otimes_B (B \otimes_A V \otimes_A B)$, dado por:
Si $v \in V$ y denotamos como $\mu(v) = \sum v_1^i \otimes v_2^i$,

$$^B\mu^B(b_1 \otimes v \otimes b_2) = \sum (b_1 \otimes v_1^i \otimes 1_B) \otimes_B (1_B \otimes v_2^i \otimes 1_B)$$

. Utilizando las propiedades de μ, y v como comultiplicación y counidad de V, respectivamente, se comprueba que:
1) $(I_{^BV^B} \otimes_B^B \mu^B)^B\mu^B = (^B\mu^B \otimes_B I_{^BV^B})^B\mu^B$.
2) $(I_{^BV^B} \otimes_B^B v^B)^B\mu^B = (^Bv^B \otimes_B I_{^BV^B})^B\mu^B$.

Definición 3.18: ${}^BV^B$ es llamada la coálgebra inducida de V.

Observación 3.19: Sea $V = (V, \mu, v)$ una coálgebra sobre A. Supongamos que tenemos un morfismo de álgebras $\varphi : A \to B$, entonces existe un par de funtores adjuntos $(T, S) : ModA \to ModB$, tales que $T(M) = B \otimes_A M$, para $M \in ModA$; $S(N) =_A N$, para $N \in ModB$.

Demostración:
En general, dado $M \in ModA$, $N \in ModB$ y $\varphi : A \to B$, existe un isomorfimos $\psi : Hom_A(M,_A N) \to Hom_B(B \otimes_A M, N)$ tal que si $h : M \to_A N$, entonces $\psi(h)(b \otimes m) = bh(m)$.
Pero entonces, tenemos:

$$Hom_A(M,_A N) = Hom_A(M, S(N)) \cong Hom_B(T(M), N) = Hom_B(B \otimes_A M, N)$$

Por lo tanto, el par de funtores $(T, S) : ModA \to ModB$ son adjuntos.

Si ahora repetimos la construcción dada como antecedente para el teorema 3.17, pero en el inciso c), en lugar de considerar la equivalencia de Morita, tomamos el par de funtores adjuntos de la observación 3.19, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.20: El cotriple $C' = (F', \delta', \epsilon')$ es el inducido por la coálgebra inducida de V sobre B, es decir:

$$F' = {}^B V^B \otimes_B - : ModB \longrightarrow ModB$$
$$\delta' : {}^B V^B \otimes_B - \longrightarrow {}^B V^B \otimes_B^B V^B \otimes_B -$$
$$\epsilon' : {}^B V^B \otimes_A - \longrightarrow B \otimes_A -$$

Demostración: Es igual a la del teorema 3.17, es decir, hay que perseguir cada uno de los morfismos dados por las diferentes parejas de funtores adjuntos.

CAPITULO II

1 Algebras Tensoriales

Definición 1.1: Sean A y B dos k-álgebras. Diremos que B es una A-álgebra si existe un morfismo de álgebras $\varphi : A \to B$.
En este caso, B es a través del morfismo φ un $A-A$-bimódulo.

Definición 1.2: Sea A una k-álgebra y V un $A-A$-bimódulo. El álgebra tensorial de A, es una nueva álgebra, denotada por:

$$T_A(V) = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n \oplus \cdots$$

donde:
$A_0 = A$, $A_1 = V$, $A_n = V \otimes_A V \otimes_A V \otimes \cdots \otimes_A V$, si $n > 1$.
Si $a = v_1 \otimes_A v_2 \otimes_A \cdots \otimes_A v_n \in A_n$ y $b = w_1 \otimes_A w_2 \otimes_A \cdots \otimes_A w_m \in A_m$, el producto $ab = v_1 \otimes_A v_2 \otimes_A \cdots \otimes_A v_n \otimes_A w_1 \otimes_A w_2 \otimes_A \cdots \otimes_A w_m \in A_{m+n}$.

Propiedad Universal del Algebra Tensorial 1.3: Sea B una A-álgebra y V un $A-A$-bimódulo, entonces, para todo morfismo de $A-A$-bimódulos $\varphi_V : V \to B$ existe un único morfismo de álgebras $\psi : T_A(V) \to B$ tal que los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "i_V"] \arrow[d, "\varphi_V"'] & T_A(V) \arrow[dl, "\psi"] \\ B & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_A"] \arrow[d, "\varphi_A"'] & T_A(V) \arrow[dl, "\psi"] \\ B & \end{tikzcd}$$

Demostración:

Por la propiedad universal de la suma directa, para ver la existencia y unicidad del morfismo ψ, es suficiente dar una colección de morfismos $\psi_i : A_i \to B$, para cada $i = 0, 1, 2, \cdots$.
Sean $\psi_0 = \varphi_A : A \to B$, $\psi_1 = \varphi_V : V \to B$, y $\psi_n : A_n \to B$ dado por

$$\psi_n(v_1 \otimes_A v_2 \otimes_A \cdots \otimes_A v_n) = \varphi_V(v_1)\varphi_V(v_2)\cdots\varphi_V(v_n), \quad n > 1$$

Claramente $\psi = (\psi_0, \psi_1, \cdots, \psi_n, \cdots)$ es un morfismo de álgebras, i.e., si $a_i \in A_i$ y $a_j \in A_j$, entonces, $\psi(a_i a_j) = \psi(a_i)\psi(a_2)$.

Proposición 1.4: Sea B' una A'-álgebra, V un $A' - A'$-bimódulo y $W = B' \otimes_{A'} V \otimes_{A'} B'$, entonces, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "i_{A'}"] \arrow[d, "\varphi_{A'}"'] & A = T_{A'}(V) \arrow[d, "\varphi_A"] \\
B' \arrow[r, "i_{B'}"] & B = T_{B'}(W)
\end{tikzcd}$$

Demostración:
La primera observación que podemos hacer es que $W = B' \otimes_{A'} V \otimes_{A'} B'$ es un $B' - B'$-bimódulo y un $A' - A'$ -bimódulo.
Sea $\varphi_V : V \to B$ dado por $\varphi_V(v) = 1_B \otimes_{A'} v \otimes_{A'} 1_B$, veamos que φ_v es un morfismo de $A' - A'$-bimódulos.
Si $a \in A'$, denotemos $av = \varphi'(a)v$.
$\varphi_V(av) = 1_B \otimes_{A'} av \otimes_{A'} 1_B = 1_B a \otimes_{A'} v \otimes_{A'} 1_B = 1_B\varphi'(a) \otimes_{A'} v \otimes_{A'} 1_B = \varphi'(a)(1_B \otimes_{A'} v \otimes_{A'} 1_B) = a\varphi_V(v)$
Similarmente, $\varphi_V(va) = \varphi_V(v)a$.
Ahora, la composición $A' \overset{\varphi_{A'}}{\to} B' \overset{i_{B'}}{\to} B$, le da a B una estructura de A'-álgebra, por lo tanto por la propiedad universal del álgebra tensorial, existe un único morfismo de álgebras $\varphi_A : A \to B$ tal que $i_{B'}\varphi_{A'} = \varphi_A i_{A'}$.

Proposición 1.5: Sea L una k-álgebra, $t : B' \to L$ y $s : A \to L$ morfismos de álgebras tales que $t\varphi_{A'} = s i_{A'}$, entonces existe un único morfismo de álgebras

$\phi : B \to L$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[rr, "i_{A'}"] \arrow[dd, "\varphi_{A'}"'] & & A = T_{A'}(V) \arrow[dl, "s"'] \arrow[dd, "\varphi_A"] \\
& L & \\
B' \arrow[ur, "t"] \arrow[rr, "i_{B'}"'] & & B = T_{B'}(W) \arrow[ul, "\phi"]
\end{tikzcd}$$

Demostración:
A través de s, L es una A-álgebra, y también resulta una B'-álgebra por medio de t.
Queremos dar un morfismo de $B' - B'$-bimódulos $s_W : W \to L$. Sea $S_V : V \to L$, la restricción de s en V. Veamos que S_V es un morfismo de $A - A$-bimódulos.
$s_V(av) = s_V(i_{A'}(a)v) = s_V(i_{\prime}(a)s_V(v) = t\varphi_{A'}(a)s_V(v) = as_V(v)$.
Similarmente, $s_V(va) = s_V(v)a$.
Definamos entonces $s_W : W \to L$ dado por $s_W(b_1 \otimes_{A'} v \otimes_{A'} b_2) = b_1 s_V(v) b_2$.
Aplicando la propiedad universal del álgebra tensorial tenemos que existe un único morfismo de álgebras $\phi : B \to L$ tal que $\phi i_{B'} = t$. Nos hace falta ver que $\phi\varphi_A = s$.
Sea $a \in A'$, $\phi\varphi_A(i_{A'}(a)) = \phi i_{B'}\varphi_{A'}(a) = t\varphi_{A'}(a) = si_{A'}(a)$, de donde se tiene que $\phi\varphi_A = s$.

Lema 1.6: Sea $B = T_{B'}(W)$ donde W es el $B' - B'$-bimódulo $W = \coprod Be_{b(i)} \otimes_k e_{a(i)}B$, con $e = e_1 + e_2 + \cdots + e_n = 1_{eBe} = 1_{eB'e}$,y $0 = ee_{a(i)}$ y $0 = e_{b(i)}e$ para toda $i \in T = \{1, 2, \cdots, n\}$. Con eBe denotamos el álgebra Morita equivalente a B. Existe un isomorfismo de $eBe - eBe$-bimódulos:

$$h_n : eWe \otimes_{eBe} eWe \otimes_{eBe} \cdots \otimes_{eBe} eWe \longrightarrow eW \otimes BW \otimes_B \cdots \otimes_B W \otimes_B We$$

Demostración:
$eW \otimes_B W \otimes_B W \otimes_B \cdots \otimes_B We$
$\cong \coprod (eBe_{b(i_1)} \otimes_k e_{a(i_1)}B \otimes_B Be_{b(i_2)} \otimes_k e_{a(i_2)}B \otimes_B \cdots \otimes_B Be_{b(i_n)} \otimes_k e_{a(i_n)}Be)$
$\cong \coprod (eBe_{b(i_1)} \otimes_k e_{a(i_1)}Be_{b(i_2)} \otimes_k e_{a(i_2)}Be_{b(i_3)} \otimes_k \cdots \otimes_k e_{a(i_n)}Be)$

$\cong \coprod (eBe_{b(i_1)} \otimes_k e_{a(i_1)}Be \otimes_{eBe} eBe_{b(i_2)} \otimes_k e_{a(i_2)}Be \otimes_{eBe} \cdots \otimes_{eBe} eBe_{b(i_n)} \otimes_k e_{a(i_n)}Be)$
$\cong eWe \otimes_{eBe} eWe \otimes_{eBe} \cdots \otimes_{eBe} eWe.$
Tomemos un elemento $ew_1e \otimes_{eBe} ew_2e \otimes_{eBe} ew_3e \in eWe \otimes_{eBe} eWe \otimes_{eBe} eWe$.
Vamos a calcular explícitamente quien es $h_3 : eWe \otimes_{eBe} eWe \otimes_{eBe} eWe \longrightarrow eW \otimes BW \otimes_B We$.
$ew_1e \otimes_{eBe} ew_2e \otimes_{eBe} ew_3e$
$\cong eb_1e_{b(i_1)} \otimes_k e_{a(i_1)}b_2e \otimes_{eBe} eb_3e_{b(i_2)} \otimes_k e_{a(i_2)}b_4e \otimes_{eBe} eb_5e_{b(i_3)} \otimes_k e_{a(i_3)}b_6e$
$\cong eb_1e_{b(i_1)} \otimes_k e_{a(i_1)}b_2eb_3e_{b(i_2)} \otimes_k e_{a(i_2)}b_4eb_5e_{b(i_3)} \otimes_k e_{a(i_3)}b_6e$
$\cong eb_1e_{b(i_1)} \otimes_k e_{a(i_1)}b_2e \otimes_B eb_3e_{b(i_2)} \otimes_k e_{a(i_2)}b_4e \otimes_B eb_5e_{b(i_3)} \otimes_k e_{a(i_3)}b_6e$
$\cong ew_1e \otimes_B ew_2e \otimes_B ew_3e$
Se tiene entonces que el isomorfismo,

$$h_n : eWe \otimes_{eBe} eWe \otimes_{eBe} \cdots \otimes_{eBe} eWe \longrightarrow eW \otimes BW \otimes_B \cdots \otimes_B W \otimes_B We$$

en un elemto actúa de la forma:

$$h_n(ew_1e \otimes_{eBe} ew_2e \otimes_{eBe} \cdots \otimes_{eBe} ew_ne) = ew_1e \otimes_B ew_2e \otimes_B \cdots \otimes_B ew_ne$$

.

Claramente h_n es un isomorfismo de $eBe - eBe$-bimódulos.

Proposición 1.7: Sea B una k-álgebra, W el $B-B$-bimódulo $W = \coprod Be_{b(i)} \otimes_k e_{a(i)}B$, y eBe el álgebra Morita equivalente a B. Entonces, existe un isomorfismo de álgebras $\psi : T_{eBe}(eWe) \longrightarrow eT_B(W)e$.

Demostración:
Sea $i_B : B \rightarrow T_B(W)$, este morfismo nos permite darle a $eT_B(W)e$ una estructura de eBe-álgebra de la forma $\varphi_{eBe} : eBe \rightarrow eT_B(W)e$, tal que $\varphi_{eBe}(ebe) = ei_B(b)e$. Por otro lado, tenemos que eWe es claramente un $eBe - eBe$-bimódulo.
Si tomamos $\varphi_{eWe} : eWe \rightarrow eT_B(W)e$, por la propiedad universal del álgebra tensorial, tenemos que existe un único morfismo de álgebras $\psi : T_{eBe}(eWe) \rightarrow$

$eT_B(W)e$, tal que los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
eBe \arrow[r, "i_{eBe}"] \arrow[d, "\varphi_{eBe}"'] & T_{eBe}(eWe) \arrow[dl, "\psi"] \\
eT_B(W)e &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
eWe \arrow[r, "i_{eWe}"] \arrow[d, "\varphi_{eWe}"'] & T_{eBe}(eWe) \arrow[dl, "\psi"] \\
eT_B(W)e &
\end{tikzcd}$$

Para ver que ψ es un isomorfismo, denotemos por $W_0, W_1, W_2, \cdots, W_n, \cdots$ a los sumandos directos del álgebra tensorial $T_{eBe}(eWe)$ y por $B_0, B_1, B_2, \cdots, B_n, \cdots$ a los sumandos directos del álgebra $eT_B(W)e$ y recordemos que ψ está dado por una colección de morfismos $\psi_i : W_i \to B_i$, tales que: $\psi_0 = i_{eBe} : eBe \to eBe$, $\psi_1 = i_{eWe} : eWe \to eWe$ y $\psi_n = h_n : eWe \otimes_{eBe} eWe \otimes_{eBe} \cdots \otimes_{eBe} \longrightarrow eW \otimes_B W \otimes_B \cdots \otimes_B W \otimes_B We$, para $n > 1$ y donde h_n es el isomorfismo dado en el lema anterior. De donde se concluye que ψ es realmente un isomorfismo de álgebras.

2 Algebras libremente generadas

En ésta parte de nuestro trabajo, T denotará un conjunto de índices finito, $T = \{1,2,3,\cdots,n\}$.

Definición 2.1: Sea A una k-álgebra y elementos $a_s \in e_{b(s)}Ae_{a(s)}$, $s \in T$, $a_s \in A$. Diremos que A está libremente generada sobre la k-álgebra $A' \subset A$, por las a_s, si para toda B, k-álgebra, $A' \subset B$ y elementos $b_s \in e_{b(s)}Be_{a(s)}$, existe un único morfismo de álgebras $\varphi : A \to B$ tal que $\varphi \mid A' = 1_{A'}$ y $\varphi(a_s) = b_s$ para cada $s \in T$.

Proposición 2.2: Sean A_1 y A_2 dos k-álgebras libremente generadas sobre A por elementos $a_{1i} \in A_1$ y $a_{2i} \in A_2$, respectivamente. Entonces existe un isomorfismo $\varphi : A_1 \to A_2$ tal que $\varphi(a_{1i}) = a_{2i}$.

Demostración:
A_1 es una A-álgebra finitamente generada por las a_{1i}, entonces para toda B álgebra tal que $A \subset B$ y elementos $b_s \in e_{b(s)}Be_{a(s)}$ existe un único morfismo $\varphi_1 : A_1 \to B$ tal que $\varphi_1 \mid A = I_A$ y $\varphi_1(a_{1i}) = b_i$.
En particular, si tomamos $B = A_2$, tenemos que $\varphi_1(a_{1i}) = a_{2i}$.
Similarmente, como A_2 es una A-álgebra finitamente generada tenemos que existe $\varphi_2 : A_2 \to A_1$ tal que $\varphi_2(a_{2i}) = a_{1i}$.
Por lo que, $\varphi_2\varphi_1 = I_{A_1}$ y $\varphi_1\varphi_2 = I_{A_2}$.

Proposición 2.3: Sea A libremente generada sobre A' por elementos $a_i \in e_{b(i)}Ae_{a(i)}$, $i = 1,2,\cdots,n$ y denotemos por $A_j = A'(a_1,a_2,\cdots,a_j)$, para $0 < j < n$. Entonces:
a) A_j está libremente generada sobre A' por los elementos $a_1,a_2,\cdots,a_j$.
b) A está libremente generada sobre A_j por los elementos $a_{j+1},a_{j+2},\cdots,a_n$.

Demostración:
a) Sea B una k-álgebra tal que $A' \subset B$. Por estar A libremente generada sobre A', existe $\varphi : A \to B$ y elementos $b_s \in B$, $b_s \in e_{b(s)}Be_{a(s)}$, tal que $\varphi(a_s) = b_s$, para toda s.
Para toda $s > j$, tomemos $b_{j+1} = b_{j+2} = \cdots = b_n = 0$ y definamos $\varphi_j : A_j \to$

B dada por $\varphi_j = \varphi \mid A_j$. Claramente $\varphi_j \mid A' = I_{A'}$, y $\varphi_j(a_s) = b_s$ para toda $0 < s < j+1$. La unicidad de φ_j es inmediata.
b) Sea B tal que $A_j \subset B$ y elementos $b_l \in e_{b(l)}Be_{a(l)}$ para $l = j+1, j+2, \cdots, n$. Entonces $a_i \in e_{b(i)}A_je_{a(i)} \in e_{b(i)}Be_{a(i)}$, si $i < j+1$. Definamos $\varphi : A \to B$ dada por $\varphi(a_i) = a_i$ si $i < j+1$, y $\varphi(a_i) = b_i$ si $i > j$. Es inmediata la unicidad de φ y se sigue que $\varphi \mid A_j = I_{A_j}$, $\varphi(a_i) = b_i$ si $i = j+1, j+2, \cdots, n$.

Proposición 2.4: Sea $A = kQ$, $1_A = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ y $\alpha(i) : a(i) \to b(i)$ las flechas de Q. Si $A_1 = k(1\ 2\ \cdots\ n)$ y $a_s = e_{b(s)}\alpha_s e_{a(s)}$, entonces A está libremente generada sobre A_1 por las a_s.

Demostración:
Sea B una k-álgebra tal que $A_1 \subset B$ y elementos $b_s \in e_{b(s)}Be_{a(s)}$. Definamos $\varphi : A \to B$ tal que $\varphi(e_i) = e_i$ y $\varphi(a_i) = b_i$.
Si $\gamma = \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_l$ es un camino arbitrario en A, entonces $\varphi(\gamma) = \varphi(\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_l) = \varphi(\gamma_1)\varphi(\gamma_2)\cdots\varphi(\gamma_l)$.
Con lo que φ, resulta ser una transformación lineal. Para ver que es un homomorfismo de álgebras, es necesario ver que para todo a_i y a_j generadores de A, se satisface que $\varphi(a_ia_j) = \varphi(a_i)\varphi(a_j)$.
Veremos solamente como ejemplo el caso en que $a_i = e_i = a_j$, entonces, $\varphi(a_ia_j) = \varphi(e_i^2) = e_i = \varphi(e_i)\varphi(e_i)$.
La unicidad de φ se sigue de la definición.

Observación 2.5: Supongamos que $A = kQ$, $A_1 = k(1\ 2\ \cdots\ n)$ y $V = \coprod A_1e_{b(s)} \otimes_{A_1} e_{a(s)}A_1 = \{$ caminos de dimensión 1 en $Q\}$; $V \otimes_{A_1} V = \{$ caminos de dimensión 2 en $Q\}$, etc. Si $B = T_{A_1}(V)$, es inmediato que B está libremente generada sobre A_1 por elementos $b_i \in e_{b(i)}A_1e_{a(i)}$. Entonces por la proposición 2.1, se tiene $A \cong B = T_{A_1}(V)$.

Definición 2.6: Un $A-A$-bimódulo V se dice libremente generado por elementos $v_1, v_2, \cdots, v_n$, donde $v_i \in e_{b(i)}Ve_{a(i)}$, si para cualquier $A-A$-bimódulo W y elementos $w_i \in e_{b(i)}We_{a(i)}$, existe un único morfismo de $A-A$-bimódulos $\varphi : V \longrightarrow W$, tal que $\varphi(v_i) = w_i$.

Proposición 2.7: Sea V libremente generado por los elementos $v_1, v_2, \cdots, v_n$, W, $A-A$-bimódulo generado por elementos $w_1, w_2, \cdots, w_n$ y $\varphi : W \to V$ tal que $\varphi(w_i) = v_i$ para toda i. Entonces, W está libremente generado por los elmentos $w_1, w_2, \cdots, w_n$.

Demostración:
Como V es libremente generado, existe $\psi : V \to W$, tal que $\psi(v_i) = w_i$, por lo tanto, $\varphi\psi = I_V$ y $\psi\varphi = I_W$. Por lo que $V \cong W$, como V es libre, se concluye que W es libre.

Proposición 2.8: Sea V un $A-A$-bimódulo libremente generado por elementos $v_1, v_2, \cdots, v_n$, donde $v_i = e_{b(i)} \otimes_k e_{a(i)}$, entonces ${}^BV^B = B \otimes_A V \otimes_A B$, está libremente generado por los elementos $1_B \otimes_A v_i \otimes_A 1_B$.

Demostración:
$V = \coprod Av_iA$, entonces,
${}^BV^B = \sum B \otimes_A Av_iA \otimes_A B = \sum B \otimes_A Ae_{b(i)} \otimes_A e_{a(i)}A \otimes_A B = \sum Be_{b(i)} \otimes_k e_{a(i)}B$.
Por lo tanto, podemos definir $\varphi : {}^BV^B \to V$ tal que $\varphi(1_B \otimes_A v_i \otimes_A 1_B) = v_i = e_{b(i)} \otimes_k e_{a(i)}$.

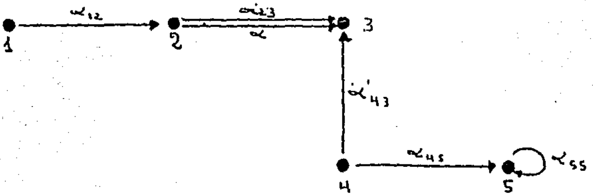
Proposición 2.9: Sea V libremente generado por $v_1, v_2, \cdots, v_n$, W , tal que existe un epimorfismo $\varphi : W \to V$ y $\psi : V \to W$ tal que $\varphi\psi = 1_V$, entonces, $W = \psi(V) \oplus Ker\varphi$.

3 Ejemplos.

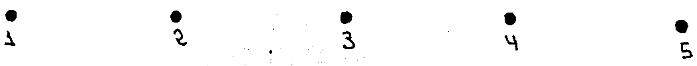
Hemos visto que dadas dos álgebras A' y B', y un homomorfismo de álgebras $\varphi : A' \to B'$, podemos encontrar un homomorfismo $\psi : T_{A'}(V) \to T_{B'}(B' \otimes_{A'} V \otimes_{A'} B')$, donde V es un A'-bimódulo. A continuación daremos dos algoritmos que nos permitirán hacer dicha construcción, para el caso en que $A = T_{A'}(V) = kQ$, y B' dependerá de A' y de una flecha α del carcaj Q que escogeremos arbitrariamente. El primero de los algoritmos se aplica para el caso en que α no es un ciclo, y el segundo de los algoritmos se utilizará cuando α sea un ciclo. Como en general el álgebra tensorial B no es básica, calcularemos explícitamente su álgebra Morita equivalente eBe.
Daremos la definición de la explosión de una gráfica, lo cual nos permitirá hacer una generalización de los algoritmos I y II: dada el álgebra de carcaj A, podremos mostrar directamente cual es el carcaj asociado al álgebra básica eBe a la que hacemos mención en todo el desarrollo de ésta sección.

Algortimo I

Sea $A = kQ$, donde Q es el siguiente carcaj:



Denotemos $1_A = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5$. Tenemos entonces que $A = kQ = T_{A'}(V)$, donde A' es igual a:



$$
\begin{aligned}
V &= A'f_2 \otimes_k f_1 A' \oplus A'f_3 \otimes_k f_2 A' \oplus A'f_3 \otimes_k f_2 A' \oplus \\
&\quad A'f_3 \otimes_k f_4 A' \oplus A'f_5 \otimes_k f_4 A' \oplus A'f_5 \otimes_k f_5 A'
\end{aligned}
$$

Por la proposición (2.3) también $A = T_{A'_\alpha}(W)$, donde $A'_\alpha =$

$$
\begin{tikzcd}
\underset{1}{\bullet} & \underset{2}{\bullet} \arrow[r, "\alpha"] & \underset{3}{\bullet} & \underset{4}{\bullet} & \underset{5}{\bullet}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
W &= A'_\alpha f_2 \otimes_k f_1 A'_\alpha \oplus A'_\alpha f_3 \otimes_k f_2 A'_\alpha \oplus A'_\alpha f_3 \otimes_k f_4 A'_\alpha \oplus \\
&\quad A'_\alpha f_5 \otimes_k f_4 A'_\alpha \oplus A'_\alpha f_5 \otimes_k f_5 A'_\alpha
\end{aligned}
$$

Sea B' el álgebra generada por el siguiente carcaj:

$$
\begin{tikzcd}
\underset{1}{\bullet} & \underset{2}{\bullet} & \underset{2'}{\bullet} \arrow[r, shift left, "x"] & \underset{3'}{\bullet} \arrow[l, shift left, "y"] & \underset{3}{\bullet} & \underset{4}{\bullet} & \underset{5}{\bullet}
\end{tikzcd}
$$

Afirmación 3.1: Sea $1_{B'} = e_1 + e_2 + e_{2'} + e_{3'} + e_3 + e_4 + e_5$, tal que $yx = e_{2'}$, $xy = e_{3'}$. El siguiente morfismo es un homomorfismo de álgebras.
$\varphi : A'_\alpha \longrightarrow B'$ tal que :

$$
\begin{aligned}
\varphi(f_i) &= e_i, \quad si \;\; i = 1, 4, 5 \\
\varphi(f_2) &= e_2 + e_{2'} \\
\varphi(f_3) &= e_3 + e_{3'} \\
\varphi(\alpha) &= x
\end{aligned}
$$

P.D. φ es un homomorfismo de álgebras.

$\varphi(f_i f_j) = 0 = \varphi(f_i)\varphi(f_j)$, si $i = j$
$\varphi(f_i f_i) = \varphi(f_i) = \varphi(f_i)\varphi(f_i)$ si $i = 1, 4, 5$
$\varphi(f_i f_i) = \varphi(f_i) = e_i + e_{i'} = \varphi(f_i)\varphi(f_i)$, si $i = 2, 3$
$\varphi(\alpha f_i) = 0$, si $i = 2$
$\varphi(\alpha f_2) = \varphi(\alpha) = x = \varphi(\alpha)\varphi(f_2)$

$\varphi(f_i\alpha) = 0$, si $i = 3$
$\varphi(f_3\alpha) = \varphi(\alpha) = x = \varphi(f_3)\varphi(\alpha)$

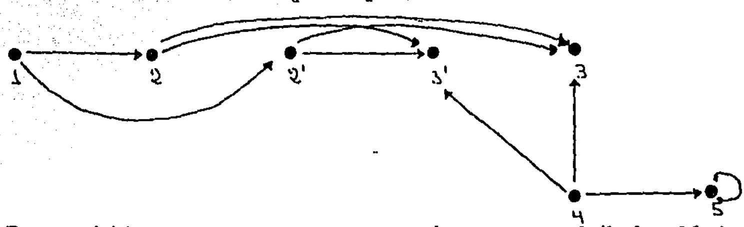
Calculemos ahora $B' \otimes_{A'_\alpha} W \otimes_{A'_\alpha} B'$

$$\begin{aligned} B' \otimes_{A'_\alpha} W \otimes_{A'_\alpha} B' = \; & B' \otimes_{A'_\alpha} A'_\alpha f_2 \otimes_k f_1 A'_\alpha \otimes_{A'_\alpha} B' \oplus \\ & B' \otimes_{A'_\alpha} A'_\alpha f_3 \otimes_k f_2 A'_\alpha \otimes_{A'_\alpha} B' \oplus \\ & B' \otimes_{A'_\alpha} A'_\alpha f_3 \otimes_k f_4 A'_\alpha \otimes_{A'_\alpha} B' \oplus \\ & B' \otimes_{A'_\alpha} A'_\alpha f_5 \otimes_k f_4 A'_\alpha \otimes_{A'_\alpha} B' \oplus \\ & B' \otimes_{A'_\alpha} A'_\alpha f_5 \otimes_k f_5 A'_\alpha \otimes_{A'_\alpha} B' \end{aligned}$$

Observemos que,
$b \otimes_{A'_\alpha} af_i = b.af_i \otimes_{A'_\alpha} 1_{A'_\alpha} = b\varphi(af_i) \otimes_{A'_\alpha} 1_{A'_\alpha}$, donde $b \in B'$, $a \in A'_\alpha$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} B' \otimes_{A'_\alpha} W \otimes_{A'_\alpha} B' = \; & B'e_2 \otimes_k e_1 B' \oplus B'e_{2'} \otimes_k e_1 B' \oplus B'e_3 \otimes_k e_2 B' \oplus \\ & B'e_3 \otimes_k e_{2'} B' \oplus B'e_{3'} \otimes_k e_2 B' \oplus B'e_{3'} \otimes_k e_{2'} B' \oplus \\ & B'e_3 \otimes_k e_4 B' \oplus B'e_{3'} \otimes_k e_4 B' \oplus B'e_5 \otimes_k e_4 B' \oplus \\ & B'e_5 \otimes_k e_5 B' \end{aligned}$$

Por lo tanto , $B = T_{B'}(B' \otimes_{A'_\alpha} W \otimes_{A'_\alpha} B') =$



B no es básica porque $e_{2'} \cong e_{3'}$, pero podemos tomar el álgebra Morita equivalente de B, dada por eBe, donde $e = e_1 + e_2 + e_{2'} + e_3 + e_4 + e_5$, y recordando que

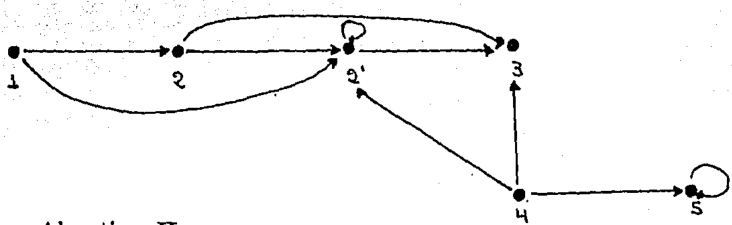
$$eBe = eT_{B'}(B' \otimes_{A'_\alpha} W \otimes_{A'_\alpha} B')e = T_{eB'e}(eB' \otimes_{A'_\alpha} W \otimes_{A'_\alpha} B'e)$$

Tenemos que $eB'e$ es igual a:

Si calculamos $eB' \otimes_{A'_\alpha} W \otimes_{A'_\alpha} B'e$, se tiene:

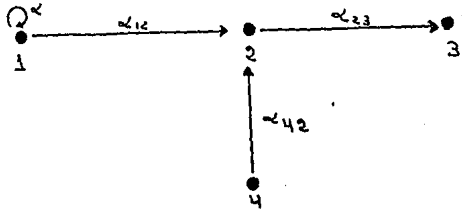
$$\begin{aligned} eB' \otimes_{A'_\alpha} W \otimes_{A'_\alpha} B'e \;=\; & (eB'e)e_2 \otimes_k e_1(eB'e) \oplus (eB'e)e_{2'} \otimes_k e_1(eB'e) \oplus \\ & (eB'e)e_3 \otimes_k e_2(eB'e) \oplus (eB'e)e_3 \otimes_k e_{2'}(eB'e) \oplus \\ & (eB'e)e_{2'} \otimes_k e_2(eB'e) \oplus (eB'e)e_{2'} \otimes_k e_{2'}(eB'e) \oplus \\ & (eB'e)e_3 \otimes_k e_4(eB'e) \oplus (eB'e)e_{2'} \otimes_k e_4(eB'e) \oplus \\ & (eB'e)e_5 \otimes_k e_4(eB'e) \oplus (eB'e)e_5 \otimes_k e_5(eB'e) \end{aligned}$$

Por lo tanto, eBe es igual a:



Algortimo II

Sea $A = kQ$, donde Q es igual a:



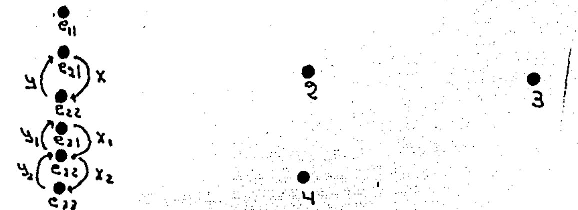
Tenemos entonces que $A = kQ = T_{A'}(V)$, donde A' es igual a:

$$V = A'f_1 \otimes_k f_1 A' \oplus A'f_2 \otimes_k f_1 A' \oplus A'f_3 \otimes_k f_2 A' \oplus A'f_2 \otimes_k f_4 A'$$

Pero también tenemos que $A = T_{A'_\alpha}(W)$, donde $A'_\alpha =$

$$W = A'_\alpha f_2 \otimes_k f_1 A'_\alpha \oplus A'_\alpha f_3 \otimes_k f_2 A'_\alpha \oplus A'_\alpha f_2 \otimes_k f_4 A'_\alpha$$

Sea B' el álgebra asociada al siguiente carcaj, con las relaciones $yx = e_{21}$, $y_1 x_1 = e_{31}$ y $y_2 x_2 = e_{32}$.



Afirmación 3.2: Si $\lambda \in k$. El siguiente morfismo es un homomorfismo de álgebras. $\varphi : A'_\alpha \longrightarrow B'$. Tal que :
$\varphi(f_i) = e_i$, si $i = 2, 3, 4$
$\varphi(f_1) = e_{11} + e_{21} + e_{22} + e_{31} + e_{32} + e_{33}$
$\varphi(\alpha) = \lambda\varphi(f_1) + x + x_1 + x_2 + x_3$

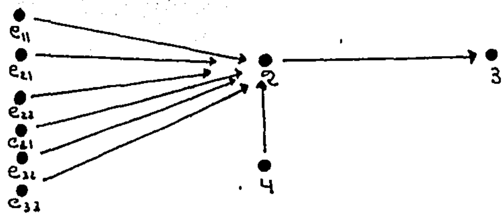
P.D. φ es un homomorfismo de álgebras.

$\varphi(f_i f_j) = 0 = \varphi(f_i)\varphi(f_j)$, si $i = j$
$\varphi(f_i f_i) = \varphi(f_i) = \varphi(f_i)\varphi(f_i)$ si $i = 2, 3, 4$
$\varphi(f_1 f_1) = \varphi(f_1) = e_{11} + e_{21} + e_{22} + e_{31} + e_{32} + e_{33} = \varphi(f_1)\varphi(f_1)$
$\varphi(\alpha f_i) = 0$, si $i = 1$
$\varphi(\alpha f_1) = \varphi(\alpha) = \lambda\varphi(f_1) + x + x_1 + x_2 + x_3 = \varphi(\alpha)\varphi(f_1)$
$\varphi(f_1 \alpha) = \varphi(\alpha) = \lambda\varphi(f_1) + x + x_1 + x_2 + x_3 = \varphi(f_1)\varphi(\alpha)$

Calculemos ahora $B' \otimes_{A'_\alpha} W \otimes_{A'_\alpha} B'$.

$$\begin{aligned} B' \otimes_{A'_\alpha} W \otimes_{A'_\alpha} B' &= B' \otimes_{A'_\alpha} A'_\alpha f_2 \otimes_k f_1 A'_\alpha \otimes_{A'_\alpha} B' \oplus \\ &\quad B' \otimes_{A'_\alpha} A'_\alpha f_3 \otimes_k f_2 A'_\alpha \otimes_{A'_\alpha} B' \oplus \\ &\quad B' \otimes_{A'_\alpha} A'_\alpha f_2 \otimes_k f_4 A'_\alpha \otimes_{A'_\alpha} B' \\ &= B' e_2 \otimes_k e_{11} B' \oplus B' e_2 \otimes_k e_{21} B' \oplus \\ &\quad B' e_2 \otimes_k e_{22} B' \oplus B' e_2 \otimes_k e_{31} B' \oplus \\ &\quad B' e_2 \otimes_k e_{32} B' \oplus B' e_2 \otimes_k e_{33} B' \oplus \\ &\quad B' e_3 \otimes_k e_2 B' \oplus B' e_2 \otimes_k e_4 B' \end{aligned}$$

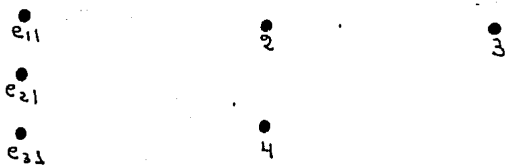
Tomemos $B = T_{B'}(B' \otimes_{A'_\alpha} W \otimes_{A'_\alpha} B') =$



Nuevamente, B no es básica porque $e_{21} \cong e_{22}$ y $e_{31} \cong e_{32} \cong e_{33}$, pero tomando el álgebra Morita equivalente de B, dada por eBe, donde $e = e_1 + e_{11} + e_{21} + e_{31} + e_2 + e_3 + e_4$, y recordando que

$$eBe = eT_{B'}(B' \otimes_{A'_\alpha} W \otimes_{A'_\alpha} B')e = T_{eB'e}(eB' \otimes_{A'_\alpha} W \otimes_{A'_\alpha} B'e)$$

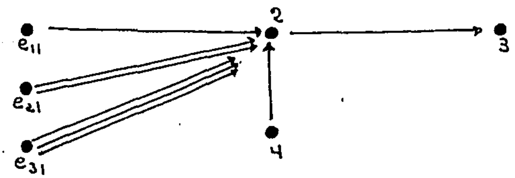
Tenemos que $eB'e$ es igual a:



Calculando $eB' \otimes_{A'_\alpha} W \otimes_{A'_\alpha} B'e$, se tiene:

$$\begin{aligned} eB' \otimes_{A'_\alpha} W \otimes_{A'_\alpha} B'e \;=\; & (eB'e)e_2 \otimes_k e_{11}(eB'e) \oplus (eB'e)e_2 \otimes_k e_{21}(eB'e) \oplus \\ & (eB'e)e_2 \otimes_k e_{21}(eB'e) \oplus (eB'e)e_2 \otimes_k e_{31}(eB'e) \oplus \\ & (eB'e)e_2 \otimes_k e_{31}(eB'e) \oplus (eB'e)e_2 \otimes_k e_{31}(eB'e) \oplus \\ & (eB'e)e_3 \otimes_k e_2(eB'e) \oplus (eB'e)e_2 \otimes_k e_4(eB'e) \end{aligned}$$

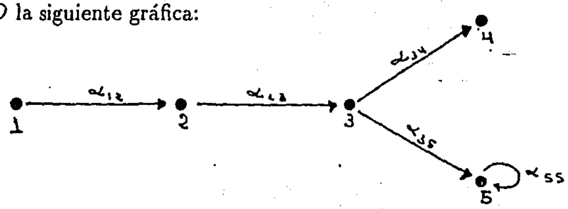
Por lo tanto, eBe es igual a:



A continuación damos la generalización de los algoritmos I y II, que nos permite dada $A = kQ$ encontrar el álgebra básica eBe dada en la construcción anterior.

Definición 3.3: Sea D una gráfica con vértices $\{1, 2, \cdots, n\}$ y flechas $\{\alpha_{ij} : i \to j\}$. Una explosión de D es una nueva gráfica que denotaremos por D_E, que construiremos a través de una relación $E : D \to D_E$, tal que,
a) Si i es un vértice de D, entonces $E(i)$ es una colección de vértices en D_E, $E(i) = (y_{i1}^{\mu_1}, \cdots y_{im}^{\mu_m})$, donde μ_m = multiplicidad de y_{im}.
b) Si i y j son vértices de D, $E(i) = (y_{i1}^{\mu_1}, \cdots y_{im}^{\mu_m})$, $E(j) = (y_{j1}^{\nu_1}, \cdots y_{jk}^{\nu_k})$, y $\alpha_{ij} : i \to j \in D$, entonces $E(\alpha_{ij})$, es una familia de flechas $\{\beta_{ip,jq}^{\lambda_l} : y_{ip} \to y_{jq}\}$, con multiplicidad $\lambda_l = \mu_p \nu_q$, donde $p = \{1, 2, \cdots, m\}$ y $q = \{1, 2, \cdots, k\}$.

Ejemplo 3.4:
Sea D la siguiente gráfica:



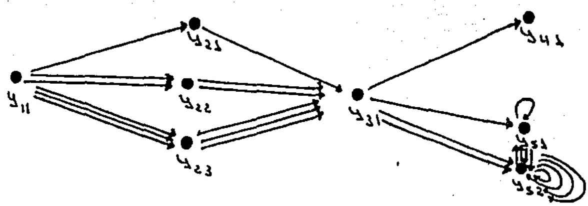
Y tomemos la siguiente explosión $E : D \to D_E$:

$$E(i) = y_{i1}, \quad si \quad i = 1, 3, 4$$
$$E(2) = (y_{21}, y_{22}^2, y_{23}^3)$$
$$E(5) = (y_{51}, y_{52}^2), \quad entonces:$$

$E(\alpha_{12}) = \{\beta_{11,21} : y_{11} \to y_{21}, \beta_{11,22}^2 : y_{11} \to y_{22}, \beta_{11,23}^3 : y_{11} \to y_{23}\}$
$E(\alpha_{23}) = \{\beta_{21,31} : y_{21} \to y_{31}, \beta_{22,31}^2 : y_{22} \to y_{31}, \beta_{23,31}^3 : y_{23} \to y_{31}\}$
$E(\alpha_{34}) = \{\beta_{31,41} : y_{31} \to y_{41}\}$
$E(\alpha_{35}) = \{\beta_{31,51} : y_{31} \to y_{51}, \beta_{31,52}^2 : y_{31} \to y_{52}\}$

$E(\alpha_{55}) = \{\beta_{51,51} : y_{51} \to y_{51}, \beta^2_{51,52} : y_{51} \to y_{52}, \beta^2_{52,51} : y_{52} \to y_{51}, \beta^4_{52,52} : y_{52} \to y_{52}\}$

Por lo tanto, $D_E =$



Generalización del algoritmo I

Sea $A = kQ$ con vértices $\{1, 2, \cdots, n\}$ y flechas $\{\alpha_{ij} : i \to j\}$. Si fijamos α_{ij}, para $i = j$, entonces $eBe = kQ'$ está dado por la siguiente explosión $E : Q \longrightarrow Q'$,

$E(k) = y_{k1}$ para $k = i, j$,
$E(i) = (y_{i1}, z^2)$,
$E(j) = (z^2, y_{j1})$.

Generalización del algoritmo II

Si $A = kQ$ con vértices $\{1, 2, \cdots, n\}$ y flechas $\{\alpha_{ij} : i \to j\}$. Si fijamos α_{ii} y $n \in N$, entonces $eBe = kQ'$ está dada por la siguiente explosión $E : Q \longrightarrow Q'$,

$E(k) = y_{k1}$ para $k = i$,
$E(i) = (y_{i1}, y^2_{i2}, y^3_{i3}, \cdots, y^n_{in})$.

CAPITULO III

1 Derivaciones y diferenciales

Definición 1.1: Sea B una k-álgebra, V un $B-B$-bimódulo. Una transformación lineal $\rho : B \to V$ es una derivación si para toda $b_1, b_2 \in B$ se satisface:

$$\rho(b_1 b_2) = \rho(b_1)b_2 + b_1\rho(b_2)$$

Observación: $\rho(1_B) = 0$.
$\rho(1) = \rho(1.1) = \rho(1)1 + 1\rho(1) = \rho(1) + \rho(1)$

Proposición 1.2: Sea $\varphi : A \to B$ un morfismo de álgebras. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:
a) ρ es una transformación de $A-A$-bimódulos.
b) $\rho(\varphi(a)) = 0$ para toda $a \in A$.
Demostración:
$a) \Rightarrow b)$ Si $\rho(a_1 b a_2) = \varphi(a_1)\rho(b)\varphi(a_2)$, entonces $\rho(\varphi(a)) = \rho(\varphi(a)1) = \varphi(a)\rho(1) = 0$
$b) \Rightarrow a)$ Tenemos, $\rho(\varphi(a)b) = \rho(\varphi(a))b + \varphi(a)\rho b = \varphi(a)\rho(b)$.
Similarmente, $\rho(b\varphi(a)) = \rho(b)\varphi(a)$.

Definición 1.3: $\rho : B \to V$ es una A-derivación si existe $\varphi : A \to B$ morfismo de álgebras que satisface una de las condiciones equivalentes de la proposición anterior.

Ejemplo 1.4: Sea $\varphi : A \to B$ un morfismo de álgebras, K el $B-B$-bimódulo $K = Ker(B \otimes_A B \to B)$, entonces $\rho : B \to K$ dado por $\rho(b) = b \otimes_A 1 - 1 \otimes_A b$ es una A-derivación.

a)

$$\begin{aligned}
\rho(a_1 b a_2) &= a_1 b a_2 \otimes_A 1 - 1 \otimes_A a_1 b a_2 \\
&= \varphi(a_1) b \varphi(a_2) \otimes_A 1 - 1 \otimes_A \varphi(a_1) b \varphi(a_2) \\
&= \varphi(a_1)(b \otimes_A 1 - 1 \otimes_A b)\varphi(a_2) = a_1 \rho(b) a_2
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\rho(b_1)b_2 + b_1\rho(b_2) &= (b_1 \otimes_A 1 - 1 \otimes_A b_1)b_2 + b_1(b_2 \otimes_A 1 - 1 \otimes_A b_2) \\
&= b_1 \otimes_A b_2 - 1 \otimes_A b_1 b_2 + b_1 b_2 \otimes_A 1 - b_1 \otimes_A b_2 \\
&= b_1 b_2 \otimes_A 1 - 1 \otimes_A b_1 b_2 = \rho(b_1 b_2)
\end{aligned}$$

Definición 1.5: Una derivación $\rho : B \to B'$ es universal si para toda derivación $\rho' : B \to V$, existe una única transformación de $B - B$-bimódulos $\lambda : B' \to V$, tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho'"'] & B' \arrow[dl, "\lambda"] \\
{}_B V_B &
\end{tikzcd}$$

Proposición 1.6: La A-derivación $\rho : B \to K$, dada por $\rho(b) = b \otimes 1 - 1 \otimes b$ es universal.

Demostración:

Queremos ver que para toda derivación $\delta : B \to V$, existe una única transformación de $B - B$-bimódulos $\delta_1 : K \to V$, tal que $\delta_1 \rho = \delta$.

Sea $\delta_1 : B \times B \to V$ tal que $\delta_1(b_1, b_2) = \delta(b_1)b_2$. Veamos que δ_1 es bilineal y balanceada.

Sean $\alpha, \beta \in k$, $a \in A$.

a)

$$\begin{aligned}
\delta_1(\alpha b_1 + \beta b_2, b) &= \delta(\alpha b_1 + \beta b_2)b = \delta(\alpha b_1)b + \delta(\beta b_2)b \\
&= \alpha\delta(b_1)b + \beta\delta(b_2)b \\
&= \alpha\delta_1(b_1, b) + \beta\delta_1(b_2, b)
\end{aligned}$$

Similarmente, $\delta_1(b, \alpha b_1 + \beta b_2) = \alpha\delta_1(b, b_1) + \beta\delta_1(b, b_2)$

b)$\delta_1(b_1 a, b_2) = \delta(b_1 a)b_2 = \delta(b_1)ab_2 = \delta_1(b-1, ab_2)$
Por lo tanto, podemos definir $\delta_1 : K \to V$, tal que $\delta_1(b_1 \otimes_A b_2) = \delta(b_1)b_2$
c)$\delta_1\rho(b) = \delta_1(b \otimes 1 - 1 \otimes b) = \delta(b)1 - \delta(1)b = \delta(b1) = \delta(b)$.
d)Supongamos que existe $\delta_2 : K \to B$ tal que $\delta_2\rho = \delta$.

$$\begin{aligned}
\delta_2(\textstyle\sum b_i \otimes b_j) &= \delta_2(\textstyle\sum b_i \otimes b_j - (\sum 1 \otimes b_i \otimes b_j)) \\
&= \delta_2(\textstyle\sum (b_i \otimes b_j - 1 \otimes b_i b_j)) = \delta_2(\sum (b_i \otimes 1 - 1 \otimes b_i)b_j) \\
&= \delta_2(\textstyle\sum \rho(b_i)b_j) = \sum(\delta_2\rho(b_i)b_j) \\
&= \textstyle\sum \delta(b_i)b_j = \delta_1(\sum b_i \otimes b_j)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, δ_1 es única.
e)Finalmente, veamos que δ_1 es una transformación de $B-B$-bimódulos.
$\delta_1((\sum b_i \otimes b_j)b) = \delta_1(\sum b_i \otimes b_j b) = \sum \delta(b_i)b_j b = \delta_1(\sum b_i \otimes b_j b)$

$$\begin{aligned}
\delta_1(b(\textstyle\sum b_i \otimes b_j)) &= \delta_1(\textstyle\sum bb_i \otimes b_j) = \sum \delta(bb_i)b_j \\
&= \textstyle\sum(\delta(b)(b_i) + b\delta(b_i))b_j = \sum(\delta(b)b_i)b_j + (b\delta(b_i))b_j \\
&= \delta(b)\textstyle\sum b_i b_j + b\delta_1(b_i \otimes b_j) = b\delta_1(\sum b_i \otimes b_j)
\end{aligned}$$

Derivaciones sobre álgebras tensoriales.

Sea $A = T_{A'}(V)$, W un $A-A$-bimódulo.
Teorema 1.7: Dada una derivación $\rho_0 : A' \to W$ y una transformación lineal $\rho_1 : V \to W$, tal que para toda $a \in A'$ se satisfacen las siguientes condiciones:

$$\rho_1(av) = \rho_0(a)v + a\rho_1(v)$$

$$\rho_1(va) = \rho_1(v)a + v\rho_0(av)$$

Existe una única derivación $\rho : A \to W$, tal que $\rho \mid A' = \rho_0$ y $\rho \mid V = \rho_1$.

Demostración:
Queremos dar una derivación $\rho : A = A' \oplus V \oplus V \otimes_A V \oplus .... \longrightarrow W$.
Tomemos $\rho \mid A' = \rho_0$ y $\rho \mid V = \rho_1$.
Sea $\rho_2 : V \times V \to W$ tal que $\rho_2(v_1, v_2) = v_1\rho_1(v_2) + \rho_1(v_1)v_2$ Veamos que ρ_2 es bilineal y balanceada.

Sean $\alpha, \beta \in k, b \in B$.
a)

$$\begin{aligned}\rho_2(\alpha v_1 + \beta v_2, v) &= (\alpha v_1 + \beta v_2)\rho_1(v) + \rho_1(\alpha v_1 + \beta v_2)v \\ &= \alpha v_1\rho_1(v) + \beta v_2\rho_1(v) + \alpha\rho_1(v_1)v + \beta\rho_1(v_2)v \\ &= \alpha\rho_2(v_1, v) + \beta\rho_2(v_2, v)\end{aligned}$$

Similarmente, $\rho_2(v, \alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha\rho_2(v, v_1) + \beta\rho_2(v, v_2)$
b)

$$\begin{aligned}\rho_2(v_1 b, v_2) &= v_1 b\rho_1(v_2) + \rho_1(v_1 b)v_2 \\ &= v_1 b\rho_1(v_2) + \rho_1(v_1)bv_2 + v_1\rho_0(b)v_2 \\ &= v_1(\rho(bv_2)) + \rho_1(v_1)bv_2 \\ &= \rho_2(v_1, bv_2)\end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos definir $\rho_2 : V \otimes_A V \to W$, tal que $\rho_2(v_1 \otimes_A v_2) = v_1\rho_1(v_2) + \rho_1(v_1)v_2$
Por inducción, definamos $\rho_n : V \otimes_A V \otimes_A V \otimes_A \cdots \otimes_A V$, tal que:

$$\rho_n(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_1\rho_{n-1}(v_2 \otimes v_3 \otimes \cdots \otimes v_n) + \rho_1(v_1)(v_2 v_3 \cdots v_n)$$

Sea $v_1' \in V \otimes V \otimes \cdots \otimes V$, n veces, y $v_2 \in V \otimes V \otimes \cdots \otimes V$, m veces.

$$\begin{aligned}\rho(v_1'v_2) &= \rho(vv_1v_2) = v\rho(v_1v_2) + \rho(v)(v_1v_2) \\ &= v\rho(v_1)v_2 + vv_1\rho(v_2) + \rho(v)(v_1v_2) = vv_1\rho(v_2) + (v\rho(v_1) + \rho(v)v_1)v_2 \\ &= v_1'\rho(v_2) + \rho(v_1')v_2\end{aligned}$$

donde $vv_1 = v_1'$.

Teorema 1.8: Si $\rho : A \to W$ y es una derivación, ρ define un a derivación $\rho_0 : A' \to W$, y una transformación de bimódulos $\rho_1 : V \to W$, tal que para toda $a \in A'$ se satisfacen las siguientes condiciones:

$$\rho_1(av) = \rho_0(a)v + a\rho_1(v)$$

$$\rho_1(va) = \rho_1(v)a + v\rho_0(av)$$

Proposición 1.9: Sea A un álgebra libremente generada sobre A' por elementos $a_1, a_2, \cdots, a_n$, tales que $a_i = e_{b(i)} \otimes_k e_{a(i)}$. Sea $K = Ker(A \otimes_{A'} A \to A)$.

Entonces, K es un $A-A$-bimódulo libremente generado por los elementos de la forma $a_i \otimes_{A'} 1 - 1 \otimes_{A'} a_i$.

Demostración:
Queremos dar una derivación $\rho : A \to A \otimes_{A'} V \otimes_{A'} A$. Por 1.7, es suficiente con dar una derivación $\rho_0 : A' \to A \otimes_{A'} V \otimes_{A'} A$, y una transformación $\rho_1 : V \to A \otimes_{A'} V \otimes_{A'} A$, tal que satisfaga las condiciones que se requieren.
Definamos, $\rho_0 = cero$ y $\rho_1(v) = 1_A \otimes_{A'} v \otimes_{A'} 1_A$. Es inmediato que se satisfacen las condiciones necesarias; además, $\rho \mid A' = 0$, por lo tanto, ρ es una A'-derivación.
Si ahora consideramos la derivación universal $\rho_A : A \to K$, tenemos que existe una tranformación de $A-A$-bimódulos $\varphi : K \to A \otimes_{A'} V \otimes_{A'} A$, tal que $\varphi(a_i \otimes 1 - 1 \otimes a_i) = 1 \otimes a_i \otimes 1$. Por la proposición 2.8, del capítulo II, si logramos ver que K está generado por los elementos $a_i \otimes 1 - 1 \otimes a_i$, tendremos que K está libremente generado por estos elementos.
K está libremente generado como $A-A$ bimódulo por elementos de la forma $b \otimes 1 - 1 \otimes b$, donde $b \in A$. Si $x \in K$, entonces,
$x = \sum b_i \otimes c_i - \sum 1 \otimes b_i c_i = \sum (b_i \otimes 1 - 1 \otimes b_i) c_i$ Ahora, $b = a_1 a_2 \cdots a_n$, supongamos que $n = 2$, se tiene por lo tanto:

$$\begin{aligned} b \otimes 1 - 1 \otimes b &= \rho_A(a_1 a_2) = a_1 a_2 \otimes 1 - 1 \otimes a_1 a_2 \\ &= a_1(a_2 \otimes 1 - 1 \otimes a_2) - a_1 \otimes a_2 - 1 \otimes a_1 a_2 \\ &= a_1(a_2 \otimes 1 - 1 \otimes a_2) + (a_1 \otimes 1 - 1 \otimes a_1) a_2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, K está libremente generado.

Sea $A = T_{A'}(V)$, $B = T_{B'}(W)$, donde $W = B' \otimes_{A'} V \otimes_{A'} B'$. Denotemos por $J = Ker(B \otimes_A B \to B)$ y $J' = Ker(B' \otimes_{A'} B' \to B')$.

Proposición 1.10: Existe un isomorfismo $\psi : J \to^B J'^B = B \otimes_{B'} J' \otimes_{B'} B$.

Demostración:
Queremos dar una derivación $\rho : B \to B \otimes_{B'} J' \otimes_{B'} B$. Nuevamente, es suficiente con dar una derivación $\rho_0 : B' \to B \otimes_{B'} J' \otimes_{B'} B$, y una transformación $\rho_1 : W \to B \otimes_{B'} J' \otimes_{B'} B$, tal que satisfaga las condiciones que se requieren.
Definamos, $\rho_0(b) = 1_B \otimes \rho_{B'} \otimes 1_B$, donde $\rho_{B'} : B' \to J'$ es universal. Y,
$\rho_1(b_1 \otimes v \otimes b_2) = 1_B \otimes \rho_0(b_1) \otimes (1_B \otimes v \otimes b_2) + (b_1 \otimes v \otimes 1_B) \otimes \rho_0(b_2) \otimes 1_B$

Ahora, $\rho \mid A' = 0$, por lo tanto, ρ es una A'-derivación.
Queremos ahora mostrar, que $\rho : B \longrightarrow B \otimes_{B'} J' \otimes_{B'} B$ es universal, es decir, que para toda derivación $\delta : B \longrightarrow_B V B_V$, existe una transformación única de bimódulos $s : {}^B J'^B \longrightarrow_B V_B$, tal que $s\rho = \delta$. Pero, δ nos define una derivación $\delta_0 : B' \longrightarrow V$, tal que existe una única transformación de bimódulos $s_1 : J' \longrightarrow V$ tal que $s_1 \rho_{B'} = \delta_0$. Por lo tanto definamos $s(b_1 \otimes v \otimes b_2) = b_1 \otimes s_1(v) \otimes b_2$. Así definida es fácil ver que efectivamente $s\rho = \delta$.
Finalmente, combinando la universalidad de $\rho : B \longrightarrow B \otimes_{B'} J' \otimes_{B'} B$, con la derivación universal $\rho_B : B \longrightarrow J$, se tiene que $J \cong^B J'^B$.

Proposición 1.11: Sea

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de $A-A$-bimódulos. Supongamos que la siguiente sucesión de $A - A'$-bimódulos se esciende:

$$0 \longrightarrow X_{A'} \longrightarrow Y_{A'} \longrightarrow A_{A'} \longrightarrow 0$$

Entonces:
a) La sucesión $0 \longrightarrow^B X^B \longrightarrow^B Y^B \longrightarrow B \otimes_A B \longrightarrow 0$, donde ${}^B X^B = B \otimes_A X \otimes_A B$, es exacta.
b)Si J' es libre como $B' - B'$-bimódulo, el núcleo de la composición ${}^B Y^B \rightarrow B \otimes_A B \rightarrow B$, es isomorfo a ${}^B X^B \oplus^B J'^B$.

Demostración:
a) Consideremos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

y apliquémosle los siguientes funtores, los cuales nos darán los respectivos renglones del siguiente diagrama conmutativo.
1) $B \otimes_A -; - \otimes_A K^B$.
2) $B \otimes_A -; - \otimes_{A'} A^B$.
3) $B \otimes_A -; - \otimes_A B$.

Por otro lado, tenemos la siguiente sucesión exacta por definición:

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow A \otimes_{A'} A \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

Aapliquémosle los siguientes funtores, los cuales nos darán las respectivas columnas del siguiente diagrama conmutativo.
1) ${}^{B}X \otimes_{A} -; - \otimes_{A} B.$
2) ${}^{B}Y \otimes_{A} -; - \otimes_{A} B.$
3) $B \otimes_{A} -; - \otimes_{A} B.$
Tenemos entonces el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & {}^{B}Y \otimes_{A} K^{B} \arrow[r] \arrow[d] & {}^{B}K \otimes_{A} K^{B} \arrow[r] \arrow[d] & {}^{B}K^{B} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & {}^{B}X \otimes_{A'} A^{B} \arrow[r] \arrow[d] & {}^{B}Y \otimes_{A'} A^{B} \arrow[r] \arrow[d] & {}^{B}A \otimes_{A'} A^{B} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & {}^{B}X^{B} \arrow[r] & {}^{B}Y^{B} \arrow[r] & B \otimes_{A} B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

El segundo renglón es exacto por hipótesis, y utilizando, que se tiene un isomorfismo entre ${}^BK^B \cong L = Ker(B \otimes_{B'} B \to B)$, se tiene que la exactitud de la tercera columna. Por último, aplicando el lema de la serpiente se tiene la exactitud de la sucesión:

$$0 \longrightarrow {}^B X^B \longrightarrow {}^B Y^B \longrightarrow B \otimes_A B \longrightarrow 0$$

b) Para demostrar b), llámese $\alpha : {}^B Y^B \to B \otimes_A B$ y utilícese el inciso a).

La diferencial.

Sea V una coálgebra sobre $A = T_{A'}(W)$, si denotamos por $V_\epsilon = Ker(\epsilon : V \to A)$, tenemos la siguiente sucesión exacta:
$0 \longrightarrow V_\epsilon \longrightarrow V \longrightarrow A \longrightarrow 0$
Supongamos que existe un morfimos de A-módulos izquierdos $\omega : A \to V$, tal que $\epsilon\omega = 1_A$.
Observación 1.12: Si $a \in A$, $\omega(a) = \omega(a1) = a\omega(1)$.
En general, $a\omega(1) = \omega(1)a$. Sin embargo, $\epsilon(a\omega(1) - \omega(1)a) = a\epsilon\omega(1) - \epsilon\omega(1)a = 0$.

Definición 1.13: La diferencial de A con respecto a ω es el morfismo $\delta^0_\omega : A \to V_\epsilon$, dado por $\delta^0_\omega(a) = a\omega(1) - \omega(1)a$

Nota 1.14:δ^0_ω es una derivación.

$$\begin{aligned}\delta^0_\omega(a_1)a_2 + a_1\delta^0_\omega(a_2) &= a_1\omega(1)a_2 - \omega(1)a_1a_2 + a_1a_2\omega(1) - a_1\omega(1)a_2 \\ &= a_1a_2\omega(1) - \omega(1)a_1a_2 = \delta^0_\omega(a_1a_2)\end{aligned}$$

Lema 1.15: Sea $A_0 \subset A$ una subálgebra. $\delta^0_\omega(A_0) = 0$ si y sólo si ω es un $A - A_0$ morfismo.
Demostración:
a) Sea $a_0 \in A_0$ y $a \in A$. Si $\delta^0_\omega(A_0) = 0$, entonces, $a_0\omega(1) = \omega(1)a_0$.
$\omega(aa_0) = aa_0\omega(1) = a\omega(1)a_0 = \omega(a)a_0$.
b)$\omega(1a_0) = w(1)a_0 = \omega(a_01) = a_0\omega(1)$, por lo tanto, $\delta^0_\omega(A_0) = 0$.

Condición estrella 1.16: Diremos que ω satisface la condición estrella, si $\delta^0_\omega(e_i) = 0$, para toda $i = 1, 2, \cdots, n$, donde $1_A = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$.

Nota 1.17: Si ω satisface la condición estrella, entonces, $\omega(e_i) = e_i\omega(1)e_i$.

2 Algunos isomorfismo importantes

Sea B una k-álgebra y V un $B-B$-bimódulo.

Observación 2.1: a)$Hom_B(V, B_B)$, tiene estructura de B-módulo derecho e izquierdo.

Si $b \in B$, $v \in V$ $h \in Hom_B(V, B_B)$. Las acciones de B-módulo están dadas respectivamente por:
$h.b(v) = h(bv)$ y $b.h(v) = bh(v)$.

b)$Hom_B(V,_B B)$, tiene estructura de B-módulo derecho e izquierdo.

Si $b \in B$, $v \in V$ $h \in Hom_B(V,_B B)$. Las acciones de B-módulo están dadas respectivamente por:
$h.b(v) = h(v)b$ y $b.h(v) = h(vb)$.

c) Si V es un $C-B$-bimódulo y W es un $D-B$-bimódulo, entonces $Hom_B(V, W)$ tiene estructura de $D-C$-bimódulo.

Sea $d \in D$, $c \in C$, $v \in V$ y $H \in Hom_B(V, W)$. Las acciones de $D-C$-bimódulo están dadas respectivamente por:
$d.h(v) = dh(v)$ y $h.c(v) = h(cv)$.

Lema 2.2: Existe un isomorfismo de $eBe-B$-bimódulos

$$\varphi : eHom_B(V_B, B_B) \longrightarrow Hom_B(V_B, eB_B)$$

tal que $eh = \pi_1\varphi(eh)$.

Demostración:
Sea e un idempotente de B, entonces $V_B = eV_B \oplus (1-e)V_B$ y $B_B = eB_B \oplus (1-e)B_B$. Denotemos por $\pi_1 : eB_B \to B_B$ tal que $\pi_1(eb) = b$.
Por definición, $Im(eh) \subset eB_B$,tenemos $\pi_1\varphi(eh) = eh$.
Supongamos que $\varphi(eh) = 0$, entonces $eh = \pi_1\varphi(ef) = 0$, por lo tanto φ es monomorfismo.

Veamos ahora que φ es suprayectivo. Sea $h \in Hom_B(V_B, eB_B)$, definamos $g: V_B \to B_B$, tal que $g = \pi_1 h$, entonces , $eg(x) = e\pi_1 h(x) = \pi_1 h(x) = g$, de donde, $eg = g = \pi_1 h$, por lo tanto $h = \varphi(eg)$.
Observemos que $(eh)(v) = \varphi(eh)(v)$, para toda $v \in V$. Veamos que φ es un morfismo de eBe-módulo izquierdo.
$ebe\varphi(eh)(v) = ((ebe)(eh))(v) = \varphi(ebeeh)(v)$
Similarmente se ve que φ es morfismo de B-módulo derecho.

Lema 2.3: Existe un isomorfismo de eBe-bimódulos

$$\varphi_1 : eHom_B(V_B, B_B)e \longrightarrow Hom_B(eV_B, eB_B)$$

Demostración:
Sea $\varphi_1(ehe) = \varphi(eh) \mid eV_B$.
Observemos que $ehe(x) = eh(ex) = \pi_1\varphi(eh)(ex)$, entonces si $\varphi(eh)(ex) = 0$, se tiene que $ehe(x) = 0$, por lo tanto φ_1 es monomorfismo.
Si ahora tomamos $h : eV_B \to eB_B$ y $\pi_1 : V_B \to eV_B$, definamos $g = h\pi_1$, entonces, $g(v) = h(ev)$, de donde $g \mid eV(ev) = h(eev) = h(ev)$, por lo tanto $g \mid eV = h$. Esto implica que $g = \varphi(ef)$, y $h = \varphi(ef) \mid eV = \varphi_1(ef)$, por lo tanto φ_1 es suprayectiva.

Observación 2.4: Existe un $A - A$- morfismo $\lambda; B^{op} \to Hom_A({}_AB, {}_AB)$.

Sea $\lambda(b)(x) = xb$ y las siguientes estructuras de $B - B$ módulo , si $h :\in Hom_A({}_AB, {}_AB)$ y $b \in B$, entonces, $hb = \lambda(b)h$ y $bh = h\lambda(b)$.

Lema 2.5: Existen isomorfismos de $B - eBe$-bimódulos

$$\rho : Hom_A({}_AB, {}_AB)e \longrightarrow Hom_A({}_AB, {}_ABe)$$

$$\rho_1 : eHom_A({}_AB, {}_AB)e \longrightarrow Hom_A({}_ABe, {}_ABe)$$

tales que, $he = \pi_1\rho(he)$, y $\rho_1(ehe) = \rho(he) \mid Be$.

Teorema de Morita 2.6: La restricción

$$Hom_B(eHom_A({}_AB, {}_AB), eB_B) \longrightarrow Hom_{eBe}(eHom_A({}_AB, {}_AB)e, eBe)$$

es un isomorfismo de eBe-bimódulos.

Proposición 2.7: Supongamos que $B \otimes_A B$ es un B-módulo izquierdo proyectivo finitamente generado. Entonces existe un isomorfismo de $B-B$ bimódulos,

$$\eta : B \otimes_A B \longrightarrow Hom_B(Hom_A({}_AB, {}_AB), B_B)$$

tal que $\eta(b_1 \otimes b_2)(h) = b_1 h(b_2)$.

Demostración:
$B \otimes_A B \cong (B \otimes_A B)^{**} = Hom_B(HomB(B \otimes_A B, {}_BB), B_B)$, pero recordemos que teniamos un isomorfismo, $Hom_B(B \otimes_A B, {}_BB) \longrightarrow Hom_A({}_AB, {}_AB)$, el cual nos va a inducir un ismomorfismo:
$Hom_B(Hom_B(B \otimes_A B, {}_BB), B_B) \longrightarrow Hom_B(Hom_A({}_AB, {}_AB), B_B)$.

Proposición 2.8: Existe un isomorfismo de $B - B$ bimódulos,

$$\eta_1 : eB \otimes_A Be \longrightarrow Hom_{eBe}(Hom_A({}_ABe, {}_ABe), eBe)$$

Demostración:
Utilizando los isomorfismo dados en los lemas 2, 3, 4 y el isomorfismo de Morita, tenemos la siguiente cadena de isomorfismo:

$$\begin{aligned} \eta_1 = \eta \mid eBe : eB \otimes_A Be &\longrightarrow eHom_(eHom_A({}_AB, {}_AB), B_B)e \\ &\longrightarrow Hom_B(eHoM_A({}_AB, {}_AB), eB_B) \\ &\longrightarrow Hom_{eBe}(eHom_A({}_AB, {}_AB)e, eBe) \\ &\longrightarrow Hom_{eBe}(Hom_A(Be, Be), eBe) \end{aligned}$$

Tal que $\eta_1(eb_1 \otimes b_2e)(h) = eb_1 h(b_2e)$.

Observación 2.9: Recordemos que teniamos un isomorfismo $\varphi :^B J'^B \rightarrow B$, si $\sum b_i \otimes b_j \in J'$, el isomorfismo está dado por :

$$\varphi(b_1 \otimes (\sum b_i \otimes b_j) \otimes b_2) = \sum (b_1 b_i \otimes b_j b_2)$$

Proposición 2.10:$J' \cong B'e \otimes_{eBe} eJ'e \otimes_{eBe} eB'$, como B'-bimódulo.

Por la equivalencia de Morita tenemos:
$Be \otimes_{eBe} eM \cong M \cong B \otimes_B M \cong Be \otimes_{eBe} eB \otimes_{eBe} M$.

Por lo tanto, $J' \cong J'e \otimes_{eBe} eB$, sustituyendo $J'e \cong Be \otimes_{eBe} eJ'e$, se obtiene el resultado deseado.

Una consecuencia de este resultado es la siguiente proposicón:

Proposición 2.11:a) Si $eJ'e$ está libremente generado como $eB'e$-bimódulo por elementos $x_i \in e_{b(i)}J'e_{a(i)}$ tales que $e_{a(i)}e = e_{a(i)}$, y $ee_{b(i)} = e_{b(i)}$. Entonces, J' está libremente generado como B'-bimódulo por los x_i.
b)Si J' está libremente generado como B'-bimódulo por elementos $x_i \in e_{b(i)}J'e_{a(i)}$ .Entonces, ${}^{B}J'^{B}$ está libremente generado como B-bimódulo por los elementos $1 \otimes x_i \otimes 1$.
c)Si J es B-bimódulo libre generado por elementos $x_i \in e_{b(i)}Je_{a(i)}$ tales que $e_{a(i)}, e_{b(i)} \in e$, entonces eJe es eBe-bimódulo libre generado por los mismos elementos x_i.

3 Fórmula General de la diferencial.

Sea $V = (V, \mu, v)$ una coálgebra sobre A, supongamos que existe $\omega : A \to V$, tal que nos define una diferencial $\delta_\omega^0 : A \to Kerv$. Supongamos que existe un morfismo de álgebras $\varphi : A \to B$. Sea ${}^BV^B$, la correspondiente coálgebra inducida, entonces recordemos por la proposición 3.20 del capítulo I, existe un funtor fiel y pleno $E : R(V) \to R({}^BV^B)$. La finalidad de esta última parte de nuestro trabajo , es la de describir el núcleo de la coálgebra inducida despues de aplicar la equivalencia de Mortita , en términos de una nueva diferencial $\delta_{\omega_1}^1 : eBe \to Kere^Bv^Be$, donde $w_1 : eBe \to e^BV^Be$.

Sea $A = T_{A'}(W)$, $B = T_{B'}({}^{B'}W^{B'}$, con nuestra notación usual. Sea $\varphi' : A' \to B'$ morfismo de álgebras y consideremos la coálgebra trivial sobre A', es decir, $V = A'$, $\mu(a) = 1_{A'} \otimes_k a = a \otimes_k 1_{A'}$. En esta situación, la coálgebra inducida es ${}^{B'}V^{B'} = B' \otimes_{A'} A' \otimes_{A'} B' \cong B' \otimes_{A'} B'$, de donde tenemos, que la counidad de la coálgebra inducida ${}^{B'}v^{B'} \to B'$ es la multiplicacion .
Recordemos que tenemos un isomorfismo:

$$\psi e^{B'}V^{B'}e = eB' \otimes_{A'} B'e \cong Hom_{eB'e}(End_A(B'e), eB'e))$$

Calcularemos, para los algoritmos I y II, descritos en la sección 3 del capítulo 2, quien es $e^{B'}V^{B'}e$, lo cual nos permitirá conocer los generadores de $eJ'e$, una vez esto, daremos la fórmula general para calcular la diferencial $\delta_{\omega_1}^1 : B \to Kere^Bv^Be$, que nos dirá quienes es el $Kere^Bv^Be$, que es nuestra meta final.

Algoritmo I.

Consideremos A', B' y φ', dados en el algoritmo I. Si $e = e_1 + e_{1'} + e_2 + \cdots + e_n$, $B'e$ visto como A'-módulo, tiene una base dada por los siguientes elementos: $B'e = \{e_1, e_{1'}, x, e_2, \cdots, e_n\}$, a los cuales denotaremos por $v_1 = e_1$,$v_2 = e_{1'}$,etc., con ésta base, es fácil comprobar, que entonces $End_A(B'e)$, están dados por la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 & \beta_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Ahora, similarmente, puede verse que eB' visto como A'-módulo, tiene una base dada por los siguientes elementos: $eB' = \{e_1, e_{1'}, y, e_2, \cdots, e_n\}$, a los cuales denotaremos por $w_1 = e_1; w_2 = e_{1'}$,etc. Diremos que la base de eB' es dual a la base de $B'e$, en el sentido, de que si tomamos el producto de cualquier par $v_i w_j$, el resultado siempre es un idempotente.
Recordemos que si $Z \in End_A(B'e)$, entonces por definición el isomorfismo $\psi(v_i \otimes w_j)(z) = v_i Z(v_j)$, pero esta operación es simplemente la inclusión sobre w_j, seguida de la transformación Z y de la proyección sobre v_i. Realizando los correspondientes cálculos, puede verse que a excepción de los productos tensoriales diagonales que son diferentes de cero por definición, los únicos productos que se salvan son los de los elementos $e_1 \otimes_{A'} e_{1'}$ y $e_2 \otimes_{A'} y$, los cuales son por definición los generadores de $eJ'e$.

Definiremos ahora $w_1(e_1) = e_i \otimes \omega(e_1) \otimes e_i$ y, para $\alpha \in e_{b(i)} A e_{a(i)}$,

$$\delta^1_{\omega_1}(\alpha) = \omega_1(1)\alpha - \alpha\omega_1(1) = \omega_1(e_{b(i)})\alpha - alpha\omega_1(e_{a(i)})$$

Tratar de calcular la diferencial , directamente con esta fórmula, aunque consiste en simples cálculos, puede ser muy tardado, ya que es necesario calcularla para cada elemento idempotente de eBe ,y además es necesario considerar cada uno de las posibilidades de $\alpha \in A$. Por ello daremos una fórmula mas general, que además tiene la ventaja de que depende únicamente de la base y su respectiva base dual de $B'e$ y eB' dadas, y se puede utilizar tanto para el algoritmo I como para el algoritmo II. Por ello, antes, de dar esta fórmula, haremos una construcción similar a la anterior, pero para el algoritmo II, diremos en este caso quien es una base de eB' y su respectiva base dual de $B'e$.

Algoritmo II.

Consideremos A', B' y φ', dados en el algoritmo II. Si $e = e_{11}+e_{21}+e_{31}+e_2+\cdots+e_n$, $B'e$ visto como A'-módulo, tiene una base dada por los siguientes elementos:

$$eB' = \{e_{11}, x, e_{21}, x_2x_1, x_1, e_{31}, e_2, \cdots, e_n\}$$

, a los cuales denotaremos por $v_1 = e_{11}$,$v_2 = x$,etc., con ésta base, es fácil comprobar, que entonces $End_A(B'e)$, están dados por la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 & 0 & c \\ d & e & f & 0 & g & h \\ 0 & 0 & e & 0 & 0 & i \\ j & k & l & m & n & o \\ 0 & 0 & k & 0 & m & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

Ahora, similarmente, puede verse que $B'e$ visto como A'-módulo, tiene una base dada por los siguientes elementos:

$$eB' = \{e_{11}, y, e_{21}, y_2y_1, y_1, e_{31}, e_2, \cdots, e_n\}$$

a los cuales denotaremos por $w_1 = e_1$,$w_2 = y$,etc.
Nuevamente, si $Z \in End_A(B'e)$, entonces por definición el isomorfismo $\psi(v_i \otimes w_j)(Z) = v_i Z(v_j)$, pero esta operación es simplemente la inclusión sobre w_j, seguida de la transformación Z y de la proyección sobre v_i. Realizando los correspondientes cálculos, podemos obtener los generadores de $eJ'e$, los cuales no son otra cosa más que los elementos distintos de cero , fuera de la diagonal de la transformación $\psi(v_i \otimes w_j)(Z)$, variando sobre todos los productos posibles entre los v_i y los w_j.

Fórmula General.

Sea $\alpha : 1 \to 2 \in A$, en el caso del algoritmo II,$\alpha : 1 \to 1$.
Consideraremos tres casos: Caso 1) Sea $a : t \to 1$.
Nos interesa calcular la diferencial , para los elementos de la forma $w_j\varphi\prime(a)$, en este caso consideremos que $\varphi(a) = \sum v_i w_i \varphi(a)$, entonces:

$\delta^1_{\omega_1}(a) = \omega_1(e_1)a - a\omega_1(e_t)$, pero entonces:

$$\begin{aligned}
\varphi(f_1)\otimes\delta^1_{\omega_1}(a)\otimes e_t &= \varphi(f_1)\otimes\omega_1(f_1)a\otimes e_t - \varphi(f_1)\otimes a\omega(f_t)\otimes e_t \\
&= w_i\otimes\omega_1(f_1)a\otimes e_t - w_i\otimes a\omega_1(f_t)\otimes e_t \\
&= w_i\otimes\omega_1(f_1)\otimes\varphi(a) - w_i\varphi(a)(e_t\otimes\omega_1(f_t)\otimes e_t) \\
&= w_i\otimes\omega_1(f_1)\otimes\sum v_iw_i\varphi(a) - w_i\varphi(a)(e_t\otimes\omega_1(f_t)\otimes e_t) \\
&= w_iv_i\otimes\omega_1(e_1)\otimes w_i\varphi(a) + \textstyle\sum_{s=i} v_sw_s\varphi(a) - w_i\varphi(a)(e_t\otimes\omega_1(f_t)\otimes e_t)
\end{aligned}$$

De donde se tiene:

$$\delta^1_{\omega_1}(w_i\varphi(a) = \sum(e_i\otimes\omega_1(f_i)\otimes e_i(w_i\delta^0_\omega(a)) - w_i\varphi(a)(e_t\otimes\omega_1(f_t)\otimes e_t)$$

Caso 2) Sea $a : 1 \longrightarrow t$.
Nos interesa calcular la diferencial , para los elementos de la forma $\varphi(a)v_i$, en este caso consideremos que $\varphi(a) = \sum\varphi(a)v_iw_i$, entonces:

$$\delta^1_{\omega_1}(\varphi(a)v_i) = (e_t\otimes\delta^0_\omega(a)\otimes v_i + \sum_{s=i}(\varphi(a) - v_sw_s\otimes\omega_1(f_i)\otimes v_i)$$

Caso 3) Sea $a : 1 \rightarrow 1$.
Nos interesa calcular la diferencial , para los elementos de la forma $w_i\varphi(a)v_i$, en este caso consideremos que $\varphi(a) = \sum v_sw_s\varphi(a)v_iw_i$, entonces:

$$\delta^1_{\omega_1}(w_j\varphi(a)v_i) = \sum_{u=i} w_j\varphi(a)v_u(w_u\otimes\omega(e_1)\otimes v_i) - \sum_{s=j}(w_s\otimes\omega(e_1)\otimes v_s)w_s\varphi(a)v_i + w_j\otimes\delta(a)\otimes v_i$$

.

Con lo cual hemos resuelto todos los casos posibles, para ambos algoritmos simultáneamente.

BIBLIOGRAFIA

[BCS] R. Bautista, L.Colavita, L. Salmerón . On adjoint functors in representation theory, representations of algebras.
Lecture Notes in Mathematics 903. Springer, Berlin. (1981)9-25

[CB] W.W. Crawley-Boevey. On tame Algebras and Bocses.
Proc. London Math. Soc. (3)56 (1988)451-483

[D] Y.A. Drozd. Tame and Wild Problems.
1cm Amer. Mathe, Soc. Transl. (2)Vel. 128. 1986.31-55

[M] Montano Bermudez Gustavo. Caracterización e Bocses de dimensión finita de tipo manso.
1cm Tesis de Maestría. Universidad Nacional Autónoma de México.

[R-K] A.V. Roiter, M.M.Kleiner. Representations of Diffeential Graded Categories. Matrix Problems.
Math. Institute of the Academy os Sciences, USSR.1977.5-71