



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA ¹⁴³
DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

DISEÑO DE LA TOBERA PARA UN COHETE SONDA
DE COMBUSTIBLE HIBRIDO.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA

AREA: MECANICA

P R E S E N T A :

CARLOS ANDRES RODRIGUEZ WALLINIUS



DIRECTOR DE TESIS:

M. I ESTEBAN BARRIOS BONILLA

México, D.F.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1994



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Para mis padres

que me dedicaron

un poco de su esfuerzo diario

Por todo el cariño
y toda la esperanza

para tí. Lénica

y para el pueblo

que me dio a mí

y a muchos más

la oportunidad

de estudiar y aprender

Agradecimientos

Quiero agradecer al Programa Universitario de Investigación y Desarrollo Espacial (PUIDE), en especial al director del programa Dr. Gianfranco Bisiacchi, el apoyo y la ayuda prestada para la elaboración de esta tesis, sin los cuales difícilmente se hubiera realizado. También quiero agradecer a mis compañeros de trabajo la ayuda y los consejos que me dieron y que me fueron de mucha importancia para terminar la tesis.

Indice	1
Simbología	3
Capítulo 1 Introducción	
Objetivo	6
Antecedentes	6
Uso de cohetes sonda	7
Partes de un cohete sonda	8
Tipos de motores	10
Función de la tobera	17
Tipos de tobera	17
Capítulo 2 Fundamentos teóricos	
Introducción	23
Flujo compresible	25
Velocidad del sonido	28
Relaciones del número de Mach en el estado de remanso	30
Efectos de los cambios de área	32
Relaciones isoentrópicas en la garganta	34
Relación de áreas	35
Empuje	37
Flujo másico en la tobera	39
Velocidad de salida	40
Impulso total y específico	42

Velocidad característica	43
Coefficiente de empuje	44
Capítulo 3. Química del cohete.	
Consideraciones para la combustión	47
Introducción	48
Temperatura de flama adiabática	50
Flujo másico de los gases de combustión	52
Capítulo 4. Cálculos y diseño de la tobera	
Limitación del problema	56
El cohete sonda	57
Reacción de combustión	60
Ecuación de movimiento	64
Toberas propuestas. Parámetros y dimensiones.	66
Dimensiones finales de la tobera	71
Capítulo 5. Conclusiones	77
Anexos	79
Bibliografía	88

Simbología

a	Constante de temperaturas
A	Area
c	Velocidad del sonido
c'	Velocidad específica
C _e	Coefficiente de empuje
C _p	Calor específico a presión constante
C _v	Calor específico a volumen constante
D	Arrastre
E	Empuje
F	Fuerza
fm	Fracción masa
g	Gravedad
g ₀	Gravedad al nivel del mar
Go	Velocidad de masa del oxidante
h	Entalpía
I _e	Impulso específico
I _t	Impulso total
k	Índice adiabático
m	Masa
ṁ	Flujo másico
M	Masa molecular
Ma	Número de Mach
n	Exponente de presión
N	Número de moles
P	Presión
Q	Calor
r	Rapidez de combustión
rm	Relación de masas
R	Constante particular del gas
R _t	Radio de la tierra
R _u	Constante universal de los gases
S	Entropía

t	Tiempo
T	Temperatura
v	Velocidad
V	Volumen
W	Peso
W	Trabajo
y	Fracción mol
ρ	Densidad
v	Volumen específico

Subíndices

c	Combustible o combustión
cv	Convergente
d	Divergente
f	Final
fvi	Final del vuelo impulsado
g	Garganta
gc	Gases de combustión
m	Mezcla
o	Estado de remanso
p	Puerto
q	Quemado
s	Salida

capítulo 1

introducción

Objetivo

Desarrollar la geometría de una tobera para un cohete sonda de aplicaciones científicas que se usará para el estudio de las capas superiores de la atmósfera a una altura de 100 km sobre el nivel medio del mar.

Antecedentes

El proyecto de cohería a cargo del Programa Universitario de Investigación y Desarrollo Espacial (PUIDE) de la UNAM se ha trazado como uno de sus objetivos desarrollar un cohete sonda de aplicaciones científicas para el estudio de las capas superiores de la atmósfera.

Una de las dificultades a las que nos hemos enfrentado para cumplir nuestros objetivos es el resago que se tiene en nuestro país en materia de cohería, lo que nos obliga a desarrollar, o en su defecto adaptar, las tecnologías o dispositivos de cada una de las partes que forman al cohete.

Una de las partes del cohete que tiene mucha importancia es la tobera, ya que ésta produce el empuje que va a mover al cohete. Además de que la geometría de la tobera nos define los parámetros indispensables para la operación del cohete. Esto nos obliga a desarrollar los elementos teóricos para poder obtener la geometría de la tobera que logre el mejor funcionamiento, optimizando el peso y combustible del cohete.

Otro aspecto el cual es importante resaltar es que la tecnología del propelente híbrido que se usa para darle impulso al cohete sonda se ha desarrollado recientemente en E.U. y que conocerla y adaptarla nos permite aminorar, en parte, el rezago que tenemos en las tecnologías espaciales en general y en cohetaría en particular.

Uso de los cohetes sonda.

Los cohetes sonda se crean a partir de la necesidad de investigar la región de la atmósfera terrestre donde no son accesibles los globos aerostáticos ni los satélites artificiales.

Los globos aerostáticos se usan para el estudio de las partes bajas de la atmósfera (tropósfera y estratósfera). Estos aparatos tienen el inconveniente de no poder remontar más allá de los 43 km de altura sobre la superficie terrestre, en donde la densidad del aire es tan baja que no puede sostener a los globos.

En la investigación de las regiones altas de la atmósfera se utilizan satélites artificiales cuyas órbitas más bajas se encuentran a no menos de 200 km de altura.

En la zona comprendida entre los 43 y 200 km. de altura se encuentran las capas superiores de la mesósfera y las capas inferiores de la ionósfera y de la tropósfera. Para estudiar esta región se requiere utilizar los cohetes sonda.

Un fenómeno que hace también necesario utilizar a los cohetes sonda es que la ionósfera actúa como barrera para una parte

importante de las radiofrecuencias, lo que limita la investigación desde la superficie terrestre a la ionósfera por medio de ondas de radio.

En la zona en la que actúan los cohetes sonda se realizan investigaciones para conocer las propiedades físicas y químicas de esta parte de la atmósfera y explicar la gran variedad de los fenómenos que ahí se producen. Estos fenómenos van desde los eléctricos y magnéticos, los vientos a grandes alturas hasta las emisiones ópticas de la termósfera; así como el estudio de los rayos ultravioleta, de los micrometeoritos, el proceso de ionización de los compuestos de la ionósfera, etc.

Partes de un cohete sonda

El cohete sonda guarda mucho parecido a los demás tipos de cohetes utilizados en otras aplicaciones, como por ejemplo los vehículos portadores de satélites o los misiles. Todos estos proyectiles cuentan, en forma esquemática, con las siguientes partes:

- Cuerpo.
- Sistema de propulsión.
- Sistema de estabilización.
- Carga útil.

El cuerpo del cohete es la estructura cilíndrica que contiene a los demás elementos que forman al proyectil. En su interior están alojados el sistema de propulsión y la carga útil, y en el exterior, generalmente, el sistema de estabilización. La parte superior del cuerpo del cohete termina en una punta o "nariz" lo que permite reducir el arrastre producido por el aire.

Un cohete puede estar formado por uno o más cuerpos, a lo que también se le conoce como etapas.

El sistema de propulsión consiste en un motor que proporciona el empuje que se requiere para acelerar al cohete. El empuje se produce por la reacción de combustión de propelentes químicos y que al reaccionar liberan una gran cantidad de gases a altas presiones y temperaturas que salen a través de una tobera a gran velocidad, lo que le da la propulsión al cohete.

El sistema de estabilización sirve para mantener una trayectoria o para conducir al cohete. Generalmente se utilizan aletas estabilizadoras en el exterior del cuerpo, aunque también existen mecanismos de toberas móviles que le dan la estabilidad y la dirección deseada al proyectil.

La carga útil es el espacio en el cohete donde están los dispositivos e instrumentos que se requieren para la misión del proyectil. En un cohete sonda la carga útil sería el instrumental para los experimentos atmosféricos, los sistemas de transmisión y recepción de datos, paracaídas, etc.

Tipos de motores.

Como se mencionó antes, el sistema de propulsión es el que da el empuje al cohete mediante la reacción de combustión de los propelentes químicos. Es el estado físico en el que se encuentran los propelentes lo que define a los distintos tipos de motores de propulsión. Estos se clasifican en líquidos, sólidos e híbridos.

Motor de propelente líquido.

En este tipo de motor el propelente se encuentra en estado líquido dentro de recipientes a presión. Existen dos sistemas de propelentes líquidos: El monopropelente y el bipropelente.

Los monopropelentes líquidos contienen en una sola sustancia el oxidante y el combustible que son los elementos necesarios para su combustión, en este caso el propelente es conservado en un solo depósito (fig. 1). Los bipropelentes están formados por un oxidante y un combustible en estado líquido, contenidos cada uno en tanques separados (fig. 2). Estos componentes son mezclados en la cámara de combustión. En la cámara de combustión se presentan los procesos de atomización, mezclado, ignición y combustión del propelente líquido.

La combustión produce gases que salen a través de la tobera a velocidades supersónicas.

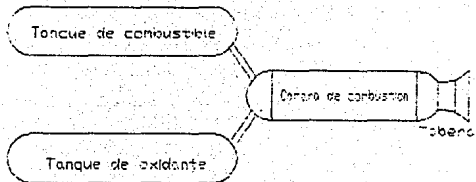


FIG.2

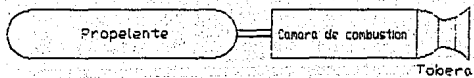


FIG.1

Algunos ejemplos de propelentes líquidos son oxígeno líquido, peróxido de hidrógeno, ácido nítrico, tetróxido de nitrógeno todos estos como oxidante. Los combustibles usados son hidrógeno líquido, hidrazina, etc.

Motor de propelente sólido.

El funcionamiento de un motor de propelente sólido es más sencillo que su similar líquido puesto que el propelente sólido forma parte de la cámara donde se realiza la combustión, lo que evita los sistemas de presurización, almacenamiento y alimentación que se tienen en los motores de propelente líquido.

Los componentes esenciales de un motor de propelente sólido son el grano del propelente, el ignitor, el inhibidor y la tobera (fig.3)

El propelente sólido que está contenido en el motor se le conoce como grano y éste contiene los elementos químicos que se requieren para la reacción de combustión.

El ignitor es el que inicia la combustión del propelente mediante el encendido de un material combustible por una resistencia eléctrica.

El inhibidor es una capa de material no combustible que se aplica en la superficie externa del propelente en los lugares donde se requiere proteger al motor.

Los gases de la combustión salen por la tobera dando empuje al cohete.

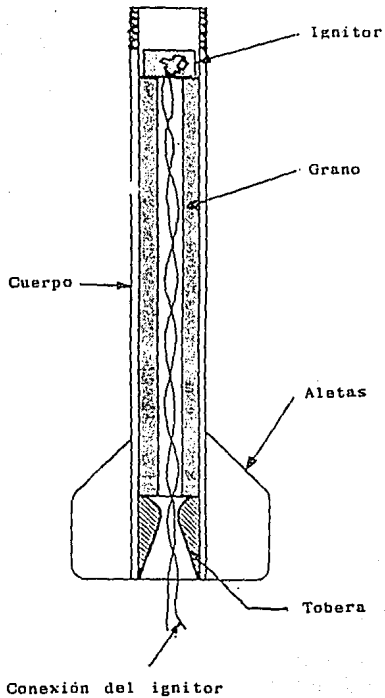


Figura 3

Los propelentes usados en este tipo de motores pueden ser de doble base, que usualmente contienen nitrocelulosa y los propelentes compuestos, que contienen cristales oxidantes y un plástico de blindaje.

Motor de propelente híbrido.

En el motor de propelente híbrido combina las características de los dos propelentes anteriores: uno de los constituyentes del propelente híbrido está almacenado en estado líquido y otro en estado sólido; comúnmente se usa el oxidante en fase líquida y el combustible en fase sólida.

Un motor de propelente híbrido está formado por las siguientes partes:

- a) Un tanque de oxidante líquido a alta presión y a baja temperatura.
- b) Un sistema de presurización que permite mantener al tanque del oxidante a una presión determinada.
- c) Un sistema de alimentación que incluye un inyector que atomiza al oxidante y una válvula para controlar el flujo de oxidante.
- ch) Un combustible en forma de cilindro hueco a través del cual pasa el oxidante, con los cuales se produce la combustión.
- d) Finalmente la tobera, donde salen los gases de combustión.

El cohete sonda en el que se basa el presente trabajo, funciona con un propelente híbrido. El uso de este propelente nos reporta algunas ventajas respecto a los otros dos tipos de motor:

- La parte combustible es muy segura, ya que tiene pocas posibilidades de explosión durante su fabricación, almacenaje u operación.
- Está formado por sistemas de alimentación y presurización mucho más sencillos que en los motores de propelente líquido y por lo tanto resultan más económicos.
- Tienen mayor impulso específico respecto a los propelentes sólidos.
- Tienen la flexibilidad de apagar rápidamente la combustión y volverla a reiniciar.

En la figura 4 se muestra el cohete sonda que se pretendió diseñar, en él se pueden observar partes que se han descrito anteriormente.

Los propelentes híbridos más usados están formados por oxidantes como oxígeno líquido, óxidos de fluor, IRFNA, peróxido de hidrógeno, etc. y como combustible sólido el más utilizado es el HTPB aunque también se usan el CTPB y el PBAA¹

¹ Las siglas usadas corresponden a HTPB: hidroxil terminated polybutadiene, CTPB: carboxy terminated polybutadiene, PBAA: polybutadiene acrylic acid polymer, IRFNA: inhibited red fuming nitric acid.

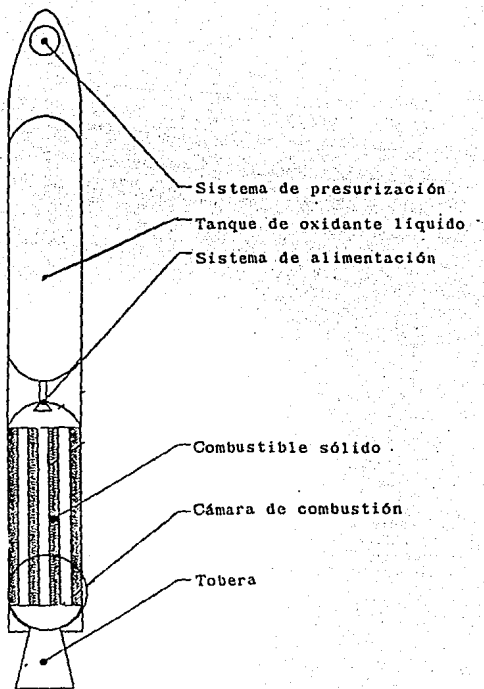


Figura 4

Función de la tobera.

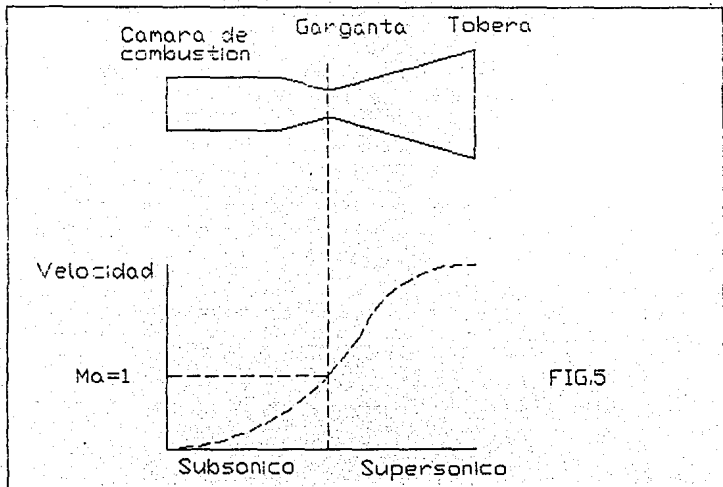
Como habíamos descrito anteriormente, los gases producto de la combustión del propelente son acelerados en la tobera hasta tener velocidades supersónicas a la salida. Son estos gases a altas velocidades los que producen el empuje que da el movimiento al cohete.

La tobera usada en el motor del cohete sonda es la llamada tobera De Laval que consiste en una sección convergente, otra divergente y una parte que une a estas dos secciones llamada garganta.

En la figura 5 podemos observar que la parte inicial de la tobera convergente tiene contacto con la cámara de combustión y es por ahí donde ingresan los gases producto de la reacción de combustión y que se aceleran a velocidades subsónicas. Después el fluido pasa por la garganta, que es la parte más angosta de la tobera y en donde se tiene un flujo transónico. En la parte divergente se tiene la aceleración final de los gases de combustión y que salen a una velocidad supersónica.

Tipos de tobera

Existen cuatro formas o geometrías de toberas que se definen generalmente en la parte divergente:



Tobera cónica.

Este tipo de tobera es de las más usadas debido a la simpleza de su diseño y a la facilidad de su fabricación.

La pared recta de la sección divergente forma un semiángulo que generalmente fluctúa entre los 12 y 18° (figura-6a).

Tobera de campana.

La tobera de forma de campana tiene un ángulo de expansión grande ($30-60^\circ$) inmediatamente después de la garganta y este ángulo disminuye gradualmente hasta tener un ángulo de salida de unos 2 a 6° .

La tobera de campana tiene relativamente más eficiencia que la tobera cónica debido a:

- 1) Las pérdidas globales son menores ya que las ondas de choque de expansión producidas por el aumento súbito en el ángulo después de la garganta, se anulan con ondas de choque de compresión que resultan de la disminución de la curva de contorno de la tobera.
- 2) Las pérdidas por el ángulo de divergencia son menores.

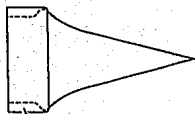
Pero la desventaja de este tipo de tobera es la dificultad que presenta para la fabricación de su contorno (figura 6b).



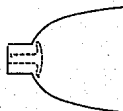
a) Cónica



b) Campana



c) de tapón



ch) Expansión-deflexión

Figura 6

Tobera de tapón.

Esta tobera tiene la sección de la garganta en forma anular y un cuerpo central. Los gases salen de la garganta y se expanden en dirección axial. La expansión del flujo de los gases de combustión está limitada por la presión ambiente local por un lado y el contorno del cuerpo central por el otro (figura 6c).

Tienen la ventaja de que son sustancialmente más cortas que las toberas conicas y de campana

Tobera de expansión y deflexión.

Muy parecida en su funcionamiento a la tobera de tapón. También esta tiene un cuerpo central después de su garganta anular (figura 6d).

Las dos anteriores toberas tienen el inconveniente que son más complejas en su construcción y es más difícil de enfriar que las dos primeras toberas.

capítulo 2

fundamentos teóricos

Introducción.

Para realizar el diseño de la tobera del cohete sonda se harán consideraciones y suposiciones tanto para la tobera como para el fluido de trabajo, de manera que obtengamos los parámetros de una tobera "ideal". Como se verá adelante, la tobera "ideal" resulta una buena aproximación al funcionamiento de la tobera "real".

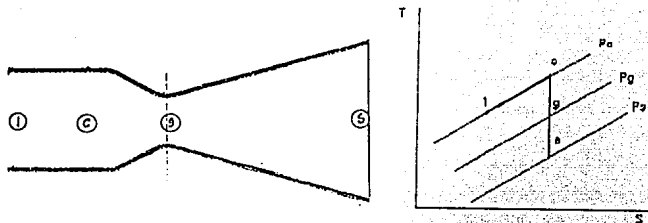
Los gases que son producto de la reacción química de la combustión son nuestro fluido de trabajo. Estos gases se comportan como un fluido compresible y se considera que obedecen las leyes de un gas ideal.

El flujo de los gases es de régimen permanente y su expansión es uniforme. Los efectos de transición al inicio y al final de la combustión del propelente son de pequeña duración, por lo que son despreciables.

Se supondrá que el fluido sigue un proceso isoentrópico ya que no se considera la transferencia de calor en las paredes de la tobera y que no existe fricción entre ellas y el fluido. Además los efectos de capa límite son despreciables y no hay ondas de choque en el flujo.

Todo lo anterior lleva a que la velocidad, presión, temperatura y densidad sean uniformes en cada sección transversal de la tobera. También se tiene la consideración de que en la cámara de combustión se alcanza el equilibrio térmico y químico de los gases de combustión a una presión constante y que su composición química no cambia en la tobera.

Con las anteriores suposiciones el proceso en el motor del cohete seguirá en un diagrama T-s:



Las consideraciones que adoptamos permiten obtener ecuaciones relativamente simples que rigen el comportamiento del fluido en la tobera. No obstante debemos recalcar que en un tobera "real" se tienen algunas pérdidas, las más importantes serían:

- 1) Las pérdidas por transferencia de calor, que son menores de 2%
- 2) Las fluctuaciones en el flujo de los gases y de la presión de operación en la cámara de combustión reducen en un 5% el valor estimado.
- 3) Existen reacciones químicas en la tobera, lo que altera las propiedades de los gases de combustión y la temperatura, esto ocasiona pérdidas no mayores al 0.5%
- 4) La capa límite reduce la velocidad de salida entre un 0.5 a 1.5%
- 5) Las pérdidas por fricción en las paredes de la tobera son difíciles de determinar pero generalmente son muy pequeñas.

¹ Las pérdidas señaladas se encontraron en Sutton, Rocket propulsion elements, p. 72-73. Hill, Mechanics and thermodynamics of propulsion, p. 407-409. Bragg, Rocket engines, p. 91, 108.

Los efectos combinados de estas pérdidas en el funcionamiento de un cohete resultan pequeñas, por lo que pueden ser despreciadas. De cualquier manera, al realizar las pruebas experimentales al motor se le pueden hacer algunos ajustes para su óptimo funcionamiento.

Flujo compresible.

Para que un flujo pueda ser considerado compresible debe de tener variaciones apreciables en su densidad al variar la presión en algún punto del campo del fluido. Otra forma de considerar compresible a un fluido es cuando el flujo tiene velocidades mayores a 0.3 Mach. Los gases producto de la combustión en el cohete cumplen las propiedades anteriores, por lo que los consideraremos como un flujo compresible.

La relación de los cambios entre presión, densidad y también de temperatura están definidos mediante una ecuación de estado, que para un gas ideal es:

$$P = \rho RT \quad (2.1) \quad \text{donde} \quad R = \frac{Ru}{M}$$

Aunque en realidad ningún gas se comporta exactamente como un gas ideal, la diferencia es relativamente pequeña para la mayoría de los gases, y esta diferencia es aún más pequeña si el fluido está sobrecalentado, como en el caso de los gases de combustión.

Aparte de la ecuación de estado para un gas ideal existen otras tres ecuaciones que rigen el comportamiento del flujo compresible.

Estas ecuaciones son:

a) Ecuación de continuidad o conservación de masa.

En su forma diferencial se expresa para un flujo compresible

$$\frac{dp}{dt} + \nabla \rho v = 0 \quad (2.2a)$$

La forma integrodiferencial

$$\int_V \frac{dp}{dt} dV + \int_S \rho v(n) dS = 0 \quad (2.2b)$$

b) Ecuación de cantidad de movimiento

En su forma diferencial para un flujo compresible, sin considerar esfuerzos viscosos ni fuerzas de cuerpo².

$$\rho \left[\frac{dv}{dt} + v \nabla v \right] = -\nabla P \quad (2.3a)$$

del modo integrodiferencial

$$\sum \bar{F} = \frac{d}{dt} \int_{Vc} \rho \bar{v} dV + \int_{Sc} \rho \bar{v} (\bar{v} \bar{n}) dA \quad (2.3b)$$

c) Ecuación de conservación de la energía

$$Q + W = \dot{m}_2 \left(h_2 + \frac{v_2^2}{2} + z_2 g \right) - \dot{m}_1 \left(h_1 + \frac{v_1^2}{2} + z_1 g \right) \quad (2.3b)$$

² Se desprecian los esfuerzos viscosos ya que tenemos un flujo turbulento, es decir un número de Reynolds grande.

Para una sustancia simple compresible, la conservación de energía la podemos escribir:

$$Tds = dh - vdp \quad (2.4b)$$

$$Tds = du + PdV \quad (2.4c)$$

Relaciones de los calores específicos en un gas ideal.

En la termodinámica el calor específico a volumen constante se define como:

$$C_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v$$

La energía interna para un gas ideal

$$du = C_v dT \quad (2.5)$$

El calor específico a presión constante

$$C_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p$$

La entalpía para un gas ideal

$$dh = C_p dT \quad (2.6)$$

De la definición de entalpía

$$dh = du + \frac{dp}{\rho} \quad (2.7)$$

Sustituyendo (2.1), (2.5) y (2.6) en (2.7) tenemos

$$C_p - C_v = R \quad (2.8)$$

Si el índice adiabático k está definido

$$k = \frac{C_p}{C_v} \quad (2.9)$$

Sustituyendo (2.9) en (2.8) tendremos

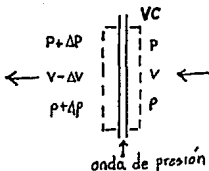
$$C_p = \frac{kR}{k-1} \quad (2-10a)$$

$$C_v = \frac{R}{k-1} \quad (2-10b)$$

Velocidad del sonido

La velocidad a la que viajan las ondas sonoras en un fluido es un parámetro muy importante en un flujo compresible y se define como la velocidad de propagación de una onda de presión de intensidad infinitesimal en un medio respecto a un marco de referencia fijo. La velocidad del sonido se representa con una letra c .

Usando la ecuación de continuidad (2.2a) y considerando régimen permanente y unidireccional, con el volumen de control que se muestra:



$$\frac{dp}{dt} + \nabla p v = 0$$

$$\rho dv + v dp = 0 \quad \text{si } v = c$$

$$\rho dv + c dp = 0 \quad (2.11)$$

Con la ecuación de cantidad de movimiento (2.3a)

$$\rho v dv = -dP \quad \text{si } v = c$$

$$\rho c dv = -dP$$

Sustituyendo en (2.11) tenemos:

$$c^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} \quad (2.12)$$

La velocidad de propagación del sonido esta relacionada con los cambios de presión y densidad de la onda.

Como las ondas de sonido producen cambios infinitesimales de presión y densidad se puede considerar como un proceso reversible, además que la transferencia de calor es despreciable, es decir adiabática. Tendremos un proceso isoentrópico.

Con las ecuaciones (2.4b y c) en un flujo isoentrópico:

$$du = -P dv$$

$$dh = v dP$$

Sustituyendo en (2.5) y (2.6) respectivamente e igualando.

$$\frac{dp}{\rho} + k \frac{dv}{v} = 0$$

Integrando y resolviendo

$$P \rho^k = cte$$

Derivando P y sustituyendo en (2.12)

$$c^2 = \frac{kP}{\rho}$$

Con la ecuación de gas ideal (2.1) finalmente obtenemos la velocidad del sonido a las condiciones locales.

$$c = \sqrt{kRT} \quad (2.13)$$

Número de Mach.

El número de Mach³ es un parámetro adimensional que relaciona la velocidad del flujo con la velocidad local del sonido:

$$Ma = \frac{V}{c} \quad (2.14)$$

Cuando un flujo tiene $Ma < 1$ se le considera un flujo subsónico. Para $Ma = 1$ se llama flujo transónico y para flujos con $Ma > 1$ se conoce como supersónico.

Relaciones del número de Mach en el estado de remanso.

Para describir el estado de un flujo compresible es muy útil tener un estado de referencia. Este estado que llamaremos de remanso está caracterizado porque tiene una velocidad cero.

³ Propuesto en 1870 por el científico austriaco Ernest Mach.

Las propiedades en el estado de remanso son las que tiene el flujo al reducir su velocidad desde sus condiciones locales hasta la velocidad cero en un proceso isoentrópico, es decir, sin rozamiento y sin transferencia de calor. Para conocer las propiedades de remanso se necesita además de la velocidad, otras dos propiedades termodinámicas intensivas e independientes.

De la ecuación de continuidad (2.2b) para régimen constante y unidireccional:

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 \quad (2.15)$$

De igual manera para la ecuación de movimiento.

$$-v dv = \frac{dP}{\rho}$$

$$-\frac{dv^2}{2} = \frac{dP}{\rho}$$

$$\text{si } \rho = \left(\frac{P}{c\theta}\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$-\int \frac{dv^2}{2} = c\theta \frac{1}{k} \int_P^{-\frac{1}{k}} dP$$

$$\frac{v^2}{2} = c\theta \frac{1}{k} \frac{k}{k-1} P^{\frac{k-1}{k}} \left[\left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]$$

Sustituyendo la cte, despejando las presiones y en términos del número de mach, obtendremos:

$$\frac{P_0}{P} = \left[1 + \frac{k-1}{2} Ma^2 \right]^{\frac{k}{k-1}} \quad (2.16a)$$

Con las relaciones para un gas ideal

$$\frac{T_0}{T} = \left[1 + \frac{k-1}{2} Ma^2\right] \quad (2.16b)$$

$$\frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{k-1}{2} Ma^2\right]^{\frac{1}{k-1}} \quad (2.16c)$$

Lo importante de las ecuaciones anteriores es que conociendo el número de Mach local que tiene un fluido compresible se puede conocer la relación entre las propiedades de remanso y las propiedades locales de ese punto.

Efectos de los cambios de área de la tobera en un fluido compresible.

Para conocer los efectos que produce una tobera convergente-divergente en la velocidad de un fluido compresible tomamos la ecuación de continuidad (2.15), la derivamos respecto a x , y agrupamos:

$$\frac{dA}{A dx} + \frac{dv}{v dx} + \frac{dp}{p dx} = 0 \quad (2.17)$$

La ecuación de conservación de movimiento la sustituimos en (2.12) y acomodamos:

$$\frac{dp}{p dx} = -\frac{v dv}{c^2 dx}$$

Sustituyendo en (2.17) y despejando

$$\frac{dv}{v} = \frac{dA}{A} \frac{1}{Ma^2 - 1} \quad (2.18)$$

Las consecuencias de esta ecuación para la parte convergente de la tobera de Laval son:

Si se tiene un flujo subsónico, es decir, $Ma < 1$ y con la reducción en el área ($dA < 0$) produce un aumento en la velocidad del fluido. Para un flujo supersónico ($Ma > 1$) se tiene disminución en la velocidad.

El mismo análisis se usa para la parte divergente de la tobera D'laVal.

Para un aumento en el área ($dA > 0$) y teniendo un flujo subsónico ($Ma > 1$) resultaría una reducción en la velocidad del fluido. En cambio, para un flujo supersónico la velocidad del fluido aumenta.

Como se había mencionado, en la tobera D'laVal tendremos un flujo subsónico en la parte convergente y un flujo supersónico en la parte divergente de la tobera, lo que permite que la velocidad del flujo que recorre la tobera alcance valores supersónicos. Es importante recalcar que en la garganta de la tobera debe existir un flujo transónico ($Ma = 1$) que permita mantener el aumento de la velocidad en la parte divergente de la tobera.

Relaciones isoentrópicas en la garganta.

Si se toma como referencia la garganta de la tobera podemos realizar algunas modificaciones en nuestras ecuaciones ya que en la garganta tenemos $Ma=1$.

Para la ecuación (2.16a) en la garganta:

$$\frac{P_0}{P_g} = \left[1 + \frac{k-1}{2} \right]^{\frac{k}{k-1}}$$

Al dividir la anterior ecuación entre (2.16a) tendremos

$$\frac{P}{P_g} = \left[\frac{k+1}{2+(k+1)Ma^2} \right]^{\frac{k}{k-1}} \quad (2.19a)$$

De igual manera para las demás variables isoentrópicas.

$$\frac{T}{T_g} = \left[\frac{k+1}{2+(k-1)Ma^2} \right] \quad (2.19b)$$

$$\frac{\rho}{\rho_g} = \left[\frac{k+1}{2+(k-1)Ma^2} \right]^{\frac{1}{k-1}} \quad (2.19c)$$

Las anteriores ecuaciones nos permiten referir los parámetros P, T, ρ respecto a la garganta de la tobera.

Relación de áreas.

Una de las variables más usadas en el diseño de una tobera es la relación de áreas respecto a la garganta, ya que nos permite definir el perfil de la tobera conforme al número de Mach. Para obtener esta relación utilizamos la ecuación de continuidad:

$$\rho v A = \rho_g v_g A_g$$

$$\frac{A}{A_g} = \frac{\rho_g \sqrt{kRT_g}}{\rho Ma \sqrt{kRT}}$$

$$\frac{A}{A_g} = \frac{1}{Ma} \frac{\rho_g}{\rho} \left(\frac{T_g}{T} \right)^{\frac{1}{2}}$$

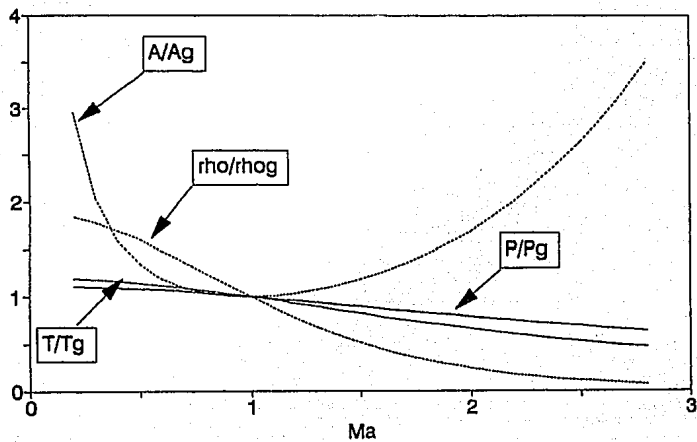
Como es un proceso isoentrópico, la presión total y la temperatura total son iguales a lo largo de la tobera, entonces usamos las relaciones isoentrópicas para la garganta.

$$\frac{A}{A_g} = \frac{1}{Ma} \left[\frac{2 + (k-1)Ma^2}{k+1} \right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad (2.20)$$

En la figura 7 se observa la variación de P, T, ρ y A respecto a las condiciones de la garganta, al variar el número de Mach.

Para poner la relación de áreas respecto a la relación de presiones, despejamos Ma de la ecuación (2.16a) y la sustituimos en (2.20):

Figura 7



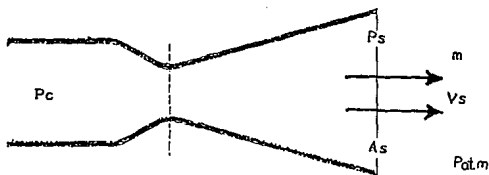
$$\frac{A}{A_v} = \frac{\sqrt{\frac{k-1}{2} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}}}{\left(\frac{P}{P_c}\right)^{\frac{1}{k}} \left[1 - \left(\frac{P}{P_c}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.21)$$

Donde P_c es la presión de la cámara de combustión y que consideramos como la de remanso.

Empuje.

El empuje que impulsa a un cohete es la fuerza de reacción producida por la salida de gases a altas velocidades y por las fuerzas de presión estática que actúan en el interior y exterior del área transversal en la salida de la tobera.

En la tobera tenemos:



Considerando un flujo estable en la salida de la tobera en la ecuación de cantidad de movimiento:

$$\sum F = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho v_x dV + A_s (P_s - P_{atm})$$

$$F = \dot{m} v_s + A_s (P_s - P_{atm}) \quad (2.22)$$

La anterior ecuación está formada por dos componentes:

- a) El momento de empuje.
- b) El empuje debido a la presión.

Si logramos que la presión de salida iguale a la presión atmosférica local, entonces la ecuación (2.22) se simplifica, quedando solo la componente de momento de empuje:

$$F = \dot{m} v_s \quad (2.23)$$

El estado cuando $P_s = P_{atm}$ se le conoce como condición de máxima expansión.

Para los cálculos de la tobera de nuestro cohete sonda vamos a considerar la condición de máxima expansión, ya que el empuje debido a la presión es pequeño y generalmente esta por debajo del 10 % del momento de empuje.

* Bragg, Op. Cit., p. 16.

Flujo másico en la tobera

Para calcular el flujo de gases de combustión que atraviesa la tobera lo haremos con las condiciones de la garganta y, debido a que tenemos un flujo permanente, los resultados en la garganta serán iguales en toda la tobera.

El flujo másico en la garganta:

$$\dot{m}_g = \rho_g A_g v_g$$

$$\dot{m}_g = \rho_g A_g M_g \sqrt{kRT_g}$$

Para las condiciones de remanso

$$\dot{m}_g = \rho_o \left[\frac{2}{k+1} \right]^{\frac{1}{k-1}} A_g \sqrt{kRT_o} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Sustituyendo ρ de (2.1)

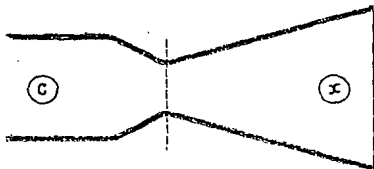
$$\dot{m} = \frac{P_o A_g}{\sqrt{RT_o}} \sqrt{k \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}}$$

Como las condiciones de remanso son las de la cámara de combustión en el motor del cohete.

$$\dot{m} = \frac{P_c A_g}{\sqrt{RT_c}} \sqrt{k \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}} \quad (2.24)$$

Velocidad de salida.

Para conocer la velocidad en un punto x de la tobera considerando la ecuación de conservación de energía entre dos puntos.



$$h_c - h_x = \frac{v_x^2 - v_c^2}{2}$$

Como en la cámara de combustión la velocidad es nula.

$$v_x = \sqrt{2(h_c - h_x)}$$

$$v_x = \sqrt{2C_p(T_c - T_x)}$$

$$v_x = \sqrt{2 \frac{kR}{k-1} (T_c - T_x)}$$

Sustituyendo T_x de la ecuación (2.16)

$$v_x = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} RT_c \left(1 - \left(\frac{P_x}{P_c}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right)}$$

Ecuación de velocidad del flujo a la salida de la tobera.

$$V_e = \sqrt{\frac{2k}{k-1} RT_c \left[1 - \left(\frac{P_e}{P_c} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]} \quad (2.25)$$

Para obtener el empuje en términos isoentrópicos sustituimos las ecuaciones (2.24) y (2.25) en la ecuación de empuje, lo que nos da:

$$E = P_c A_e \sqrt{\frac{2k^2}{k-1} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \left[1 - \left(\frac{P_e}{P_c} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] + (P_e - P_{atm})} \quad (2.26)$$

Para la condición de óptima expansión.

$$E = P_c A_e \sqrt{\frac{2k^2}{k-1} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \left[1 - \left(\frac{P_e}{P_c} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]} \quad (2.27)$$

Como podemos observar, estas ecuaciones quedan en términos de la geometría de la tobera (áreas) y de las presiones, que pueden ser medidos.

Impulso total y específico.

El funcionamiento de un cohete está limitado por la cantidad de propelente que pueda llevar. por lo que el empuje por sí solo no es una variable que nos aporte mucha información para poder equiparar el comportamiento del propelente de un cohete con otros. En cambio, si tenemos una variable que nos involucra el empuje del cohete, el tiempo de quemado y el peso del propelente podremos conocer y comparar a diferentes motores.

El impulso total (I_t) es la fuerza de empuje del cohete E integrada sobre el tiempo de quemado del propelente.

$$I_t = \int_0^t E dt$$

Si consideramos un empuje constante y flujo permanente.

$$I_t = Et_q$$

El impulso específico es el impulso total por unidad de peso de propelente.

$$I_s = \frac{I_t}{W} \quad (2.28)$$

De esta ecuación podemos obtener otras combinaciones:

$$I_s = \frac{Et}{W} \quad (2.28a)$$

$$I_s = \frac{E}{\dot{W}} \quad (2.28b)$$

$$I_s = \frac{E}{\dot{m}g_0} \quad (2.28c)$$

Velocidad característica.

Esta es otra variable que se aplica para comparar el funcionamiento de diferentes diseños de motores de cohetes y mide la efectividad con la que la reacción química se realiza en la cámara de combustión.

La velocidad característica esta representada por c^* y se define por:

$$c^* = \frac{P_c A_c}{\dot{m}} \quad (2.29)$$

Si sustituimos \dot{m} de la ecuación (2.24)

$$c^* = \sqrt{\frac{1}{k} \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} RT_c} \quad (2.29a)$$

En esta ecuación observamos que la velocidad característica depende principalmente de las propiedades del propelente, las cuales determinan la temperatura de cámara y el peso molecular de los gases de combustión.

Coefficiente de empuje.

Quando se realizan experimentos en un banco de pruebas es relativamente fácil medir el empuje, la presión en la cámara de combustión y el área de la garganta en la tobera. Estos parámetros los podemos relacionar por medio de un coeficiente que llamaremos coeficiente de empuje.

$$C_E = \frac{E}{P_c A_g} \quad (2.30)$$

El coeficiente de empuje determina la relación de empuje debido a la expansión de los gases de combustión en la tobera en función con el empuje que produce la presión de cámara sobre la garganta de la tobera.

Podemos relacionar el coeficiente de empuje con la velocidad característica despejándola de la ecuación (2.29)

$$C_E = \frac{E}{\dot{m} c^*} \quad (2.30a)$$

Los valores típicos del coeficiente de empuje pueden variar de 0.8 hasta 1.9.

En tabla 1 podemos observar los parámetros de algunos tipos de combustibles.

En la tabla 1 podemos comparar los rangos en que varían los parámetros de diseño en distintos cohetes³.

³ Hill. Op. Cit., p. 361.

Tabla 1

Tabla comparativa de rangos de funcionamiento.

Parámetros	rango normal	rango alto
To (K)	2000-3000	3000-5000
c' (ft/s)	4000-5500	5000-8000
C _r	1.3-1.5	1.5-1.6
I _s (s)	200-270	270-400
M _{rs}	20-25	8-20
k	1.15-1.25	1.15-1.20

capítulo 3

química del cohete

Consideraciones para la combustión.

Algunos de los datos como temperatura de combustión, índice adiabático, masa molecular, etc. que se necesitan en las ecuaciones que se desarrollaron anteriormente, tienen dificultades para obtenerse por métodos experimentales o se requiere una aproximación antes de probar un primer diseño. Esto nos lleva a recurrir a un análisis químico para encontrar una primera aproximación de esos datos. Conociendo la composición química del propelente y la reacción de combustión que se lleva a cabo, tendremos los elementos para calcular algunos de los parámetros que necesitamos.

Para facilitar el cálculo de estos parámetros recordaremos algunas suposiciones que anteriormente se habían señalado y que tendremos en el proceso de combustión:

- El proceso en la cámara de combustión sucede a presión constante.
- La totalidad de la reacción de combustión se produce en la cámara, y en la tobera solo tendremos gases de combustión.
- Los gases de combustión se aproximan a un gas ideal.
- Proceso adiabático

Introducción.

En el proceso de combustión del propelente hay dos aspectos que resaltan: La reacción de combustión y los gases que resultan de la transformación química en la combustión.

Reacción de combustión.

El proceso básico de combustión consiste en la reacción química de un combustible y un oxidante, que da lugar a una liberación de energía en forma de calor.

Los reactivos originales tienen una transformación química produciéndose diferentes compuestos, que en nuestro caso serán una mezcla de gases calientes:



Los gases de combustión

Los gases producto de la reacción de combustión son una mezcla de compuestos químicos, sus propiedades dependen de la composición de los elementos que forman la mezcla. Para conocer las propiedades de los gases nos remitiremos a la teoría de mezclas de gases ideales sin reacción.

Gases de combustión como mezcla de gases.

Usando el análisis gravimétrico que se basa en la masa de los componentes de la mezcla. Se define la masa de mezcla como:

$$m_m = \sum_{i=1}^n m_i \quad (3.1a)$$

La fracción masa para cada compuesto de la mezcla se define:

$$f_{m_i} = \frac{m_i}{m_m} \quad (3.1b)$$

Para el análisis molar, el número de moles de la mezcla se define:

$$N_m = \sum_{i=1}^n N_i \quad (3.1c)$$

La fracción molar para cada compuesto es:

$$y_i = \frac{N_i}{N_m} \quad (3.1d)$$

La masa molar para un componente:

$$M_i = \frac{m_i}{N_i} \quad (3.1e)$$

La masa molar de la mezcla se obtiene:

$$M_m = \frac{m_m}{N_m} \quad (3.1f) \text{ o bien}$$

$$M_m = \sum_{i=1}^n y_i M_i$$

la relación entre la fracción masa y mol esta dada:

$$fm_i = y_i \frac{M_i}{M_m} \quad (3.1g)$$

Para calcular el calor específico usamos la ley de Gibbs-Dalton

$$C_p, v_m = \sum_{i=1}^n fm_i C_p, v_i \quad (3.2)$$

Temperatura de flama adiabática.

Partiendo del supuesto que la reacción química es un proceso adiabático, el total del calor producido en la reacción se utiliza para elevar la temperatura hasta un máximo que se denomina temperatura de flama adiabática, que será la temperatura que tendremos en nuestra combustión ideal.

Usando la primera ley de la termodinámica en flujo estable para mezclas reactivas:

$$Q + W = \sum_{gc} (N_i \Delta h_{Ti}) - \sum_{resc} (N_i \Delta h_{Ti})$$

Como es un proceso isoentrópico

$$\sum_{\text{react}} N_i \Delta h_{T,i} = \sum_{\text{GC}} N_i \Delta h_{T,i}$$

Donde

$$\Delta h_T = \Delta h_f^\circ + h_{T_0} - h_{298} = \Delta h_f^\circ + h_p - h_{298}$$

h_f = Entalpía de formación¹

h_{298} = Entalpía del compuesto a 298 K

h_{T_0} = Entalpía a la temperatura de flama
adiabática del compuesto.

h_p = Entalpía de cada compuesto del
propelente a la temperatura de
reacción.

$$\sum_{\text{react}} N_i (\Delta h_f^\circ + h_p - h_{298})_i = \sum_{\text{GC}} N_i (\Delta h_f^\circ + h_{T_0} - h_{298})_i \quad (3.4)$$

De esta ecuación se conocen la temperatura y compuestos químicos del propelente o reactivos, también se sabe, por la reacción de combustión completa, los componentes de los gases de combustión, por lo que la única incógnita será h_{T_0} para cada compuesto de los gases de combustión a la temperatura de flama adiabática o de combustión.

Para llegar a la solución de la ecuación se necesita un metodo

¹ La entalpía de formación se define como la entalpía requerida para formar un compuesto químico a partir de sus elementos estables que se encuentran a 1 atm de presión y a 298 K.

iterativo, suponiendo un primer valor de T_c que nos permite hallar los valores de entalpía para cada compuesto y comparar con la entalpía debido a los reactivos.

El valor estimado de la temperatura de combustión es algo conservador, este valor suele ser varios cientos de grados mayor que el valor medido. Esto se debe a que las pérdidas de calor no pueden eliminarse completamente, la combustión no es completa y además se forman sustancias a partir de los gases de combustión por las altas temperaturas, estas reacciones son endotérmicas y consumen algo de la energía liberada de la reacción total.

Aún así, el valor calculado de la temperatura de combustión es útil como una estimación cuando se carecen de datos sobre el combustible.

Flujo másico de los gases de combustión.

Como habíamos mencionado anteriormente, en un cohete híbrido se tienen por separado el combustible y el oxidante, que al reaccionar producen los gases de combustión. Teniendo en cuenta esto, para conocer el flujo másico de los gases de combustión:

$$\dot{m}_{gc} = \dot{m}_c + \dot{m}_o \quad (3.5)$$

El flujo de oxidante y el de combustible están vinculados por la reacción de mezclado (rm) que se define:

$$rm = \frac{\dot{m}_o}{\dot{m}_c} \quad (3.6)$$

o bien, podemos escribir a la relación de mezclado como:

$$r_m = \frac{N_c M_o}{N_o M_c} \quad (3.6a)$$

El flujo másico del combustible híbrido se calcula como:

$$m_c = \rho_c A_q r \quad (3.7)$$

donde ρ_c = densidad del combustible

A_q = superficie de quemado

r = rapidez de combustión

La rapidez de combustión (r) indica la velocidad con la que avanza la combustión en dirección paralela a la superficie de quemado y se expresa en cm/s o in/s.

El valor de la rapidez de combustión se determina experimentalmente y depende del propelente usado y las condiciones en la cámara de combustión. Estas condiciones van desde el flujo másico del oxidante, temperatura de combustión, presión de cámara etc. Pero en general un combustible híbrido se aproxima a la función:

$$r = a G_o^n \quad (3.8)$$

donde a = constante de temperaturas.

G_o = velocidad de masa del oxidante

n = exponente de presión

G_o depende de las condiciones del motor y se define como:

$$G_o = \frac{\dot{m}_o}{A_p} \quad (3.9)$$

donde A_p es le área de los puertos donde el oxígeno atraviesa al combustible.

Para el combustible HTPB² que se usa en el cohete sonda:

$$r_{HTPB} = 0.104 G_o^{0.681} \quad (3.10)$$

Estas constantes están definidas para el sistema inglés por lo que G_o debe estar en lb/in² y r quedará en in/s

De las ecuaciones (3.5) y (3.6) tenemos

$$\dot{m}_g = \dot{m}_c (1 + rm)$$

Con (3.7), (3.8) y (3.9)

$$\begin{aligned} \dot{m}_c &= \rho_c A_c B \left(\frac{\dot{m}_c r m}{A_p} \right)^n \\ \dot{m}_c &= \left[\rho_c r m^n \frac{A_c}{A_p^n} \right]^{\frac{1}{1-n}} \quad (3.11) \end{aligned}$$

y el flujo másico de los gases de combustión:

$$\dot{m}_{gc} = \left[\rho_c r m^n \frac{A_c}{A_p^n} \right]^{\frac{1}{1-n}} (1 + rm) \quad (3.12)$$

² Datos obtenidos en un motor de prueba con 2 in. de diámetro. Thiokol corporation, 1989. Sutton. p. 512.

capítulo 4

Cálculos y diseño de la tobera

Limitación del problema.

Después de hacer una revisión de los elementos teóricos que se necesitan para el diseño de la geometría de la tobera, vamos a remarcar los alcances y objetivos que debe cumplir el cohete sonda y que nos servirán para limitar nuestro problema.

- a) El cohete sonda debe alcanzar una altura de 100 km sobre el nivel medio del mar, que es donde se encuentran las capas bajas de la ionósfera, particularmente la capa D.
- b) También debe llevar una carga útil de 4 kg, consistente en instrumentos de medición y equipo de comunicación.
- c) La presión en la cámara de combustión será, por necesidades de diseño, 500 psi.
- ch) La relación entre la masa del propelente y la masa vacía del cohete¹ debe ser igual a 2.
- d) Se considera que el cohete sigue una trayectoria completamente vertical.

Para diseñar la geometría de la tobera vamos a darle mayor importancia a la parte divergente que a la parte convergente, ya que esta última sección de la tobera tiene un gradiente de presión bastante favorable, que con un contorno "suave" nos da un buen flujo subsónico y logra producir en la garganta un flujo transónico.

¹ Masa vacía es la masa del cohete sin contar la masa del propelente. La relación de masas igual a 2 está propuesta en PUIDE, Desarrollo del programa de cohetaría, p. 5

En cambio, para obtener la geometría de la sección divergente necesitamos adaptarnos a una serie de variables que afectan al diseño de la tobera.

El cohete sonda.

En la figura 8 se muestran las partes que constituyen al cohete sonda. La masa vacía del cohete, que incluye a la carga útil, es la mitad del peso del propelente. Las dimensiones finales del cohete se harán en base a las dimensiones del combustible requerido para cumplir los objetivos de diseño.

El combustible de HTPB tiene una forma cilíndrica y es atravesado por tres "puertos", también cilíndricos, donde pasa el flujo de oxígeno cuando se realiza la combustión; son las paredes interiores del puerto las que se conocen como área o superficie de quemado. La área de los puertos es la suma de las áreas transversales de cada puerto. (ver figura 9).

La densidad del combustible es de 810 kg/m^3 .

El volumen de combustible lo encontraremos con:

$$V_c = V_{\text{Dax}} - V_p$$

El tiempo de quemado o combustión:

$$t_q = \frac{V_c}{A_q r}$$

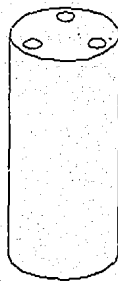
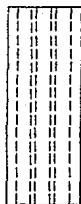


Figura 8

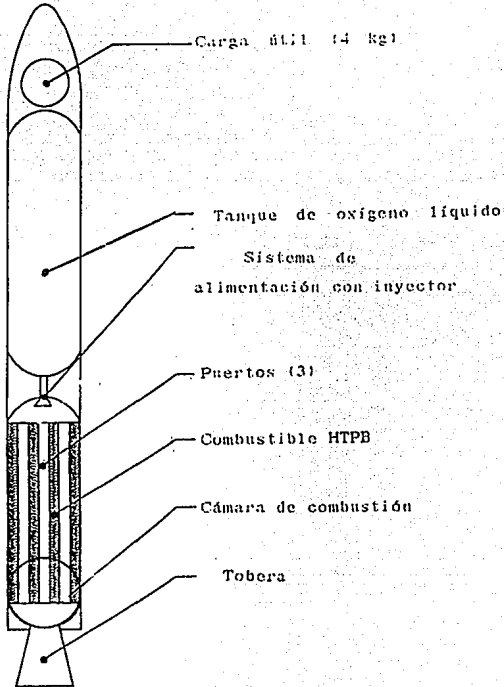


Figura 9

Reacción de combustión.

El combustible esta formado por una resina base que es llamada HTPB a la que se añade un aglutinante, el HDI.

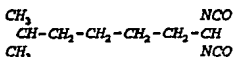
El HTPB son las siglas en inglés de Hidroxil-Terminated Polybutadiane (Polibutadiano de terminación hidroxilo¹) y su fórmula química es:



En su forma simplificada



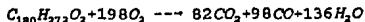
El HDI son las siglas del Hexanodimetil-Disocianato que tiene la función de aglutinar y darle solidez al combustible. La fórmula para el 1,6 HDI es:



En su forma simplificada

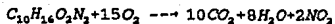


La reacción de combustión para cada mol de HTPB:

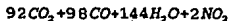


¹ Kuo, Fundamentals of solid propellants combustion, p. 20

Y para el HDI



La composición final de los gases de combustión queda:



Para calcular la masa molecular de los gases retomamos la fórmula (3.1f)

$$M_{gr} = 28.2 \text{ kg/kgmol}$$

La constante particular de la mezcla de los gases de combustión se obtiene de la ecuación (2.1)

$$R = 294.79 \text{ J/kgK}$$

La relación de mezcla para la reacción de combustión, usando la ecuación (3.6a)

$$r_m = 2.56$$

Temperatura de combustión.

Con el método para calcular la temperatura de flama adiabática y la reacción de combustión, podemos tener una aproximación a la temperatura de combustión.

	HTPB ³	HDI	CO ₂	CO	H ₂ O	NO ₂	O ₂
M (kg/kgmol)	2464	196	44	28	18	46	32
h _r ^o kcal/kgmol	-1066912	-987345	-94054	-26417	-57798	8060	0

Para Tc=4750 K

$$1 (-1066912) + 1 (-987345) \text{ (kcal)} = 92 (-94054 + 62933) + \\ 98 (-26417 + 38103) + 144 (-57798 + 54296) + 2 (8060 + 58721) \text{ (kcal)} \\ -2,054,257 = -2,088,722$$

La temperatura obtenida resulta mayor a la que encontramos en la bibliografía. Como vimos en el capítulo 3 la temperatura de flama adiabática es mayor a la temperatura real a la que sucede la combustión. Para la temperatura en la que nos basaremos será la que se incluye en la tabla 2 que proporciona thiokol corporation, pionero en el trabajo con combustibles híbridos.

Para $r_m=2.56$ tendremos una temperatura de combustión:

Tc=4256.02 K

³ Las entalpías de formación del HTPB y HDI fueron consultadas en Cohen. Role of binders in solid propellant combustion. p. 216

Tabla 2

Temperatura, velocidad característica e índice adiabático para
oxígeno líquido/ HTPB

rm	Tc(K)	c* (ft/s)	k
1.0	3280.8	4825	1.308
1.2	3728.18	5180	1.282
1.4	4166.87	5543	1.239
1.6	4411.02	5767	1.201
1.8	4505.79	5882	1.171
2.0	4498.25	5912	1.152
2.2	4431.93	5885	1.143
2.4	4337.11	5831	1.138
2.6	4235.75	5768	1.135
2.8	4135.51	5703	1.133
3.0	4040.61	5639	1.132

Igualmente la tabla nos proporciona los valores de velocidad característica e índice adiabático, que para la relación de masa que obtuvimos serán:

$$c^* = 5780.6$$

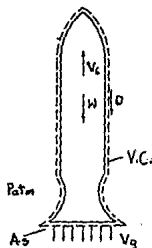
$$k = 1.1356$$

Ecuación del movimiento.

Para conocer la altura a la cual llegará el cohete sonda para una tobera propuesta, necesitamos de una ecuación de movimiento. Esta ecuación esta formada por dos etapas:

- Etapa impulsada, que es producida por el empuje de los gases de combustión, desde que es encendido el propelente hasta que se acaba.
- Etapa inercial. Después de terminada la combustión el cohete cegará una trayectoria de tiro vertical.

Para desarrollar las ecuaciones en la parte impulsada tomamos como volumen de control al cohete sonda



$$\sum F - \frac{d(mv)}{dt} \Big|_{\text{movil}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_C} \rho v dV + \int_{S_C} \rho v dA$$

$$\sum F = -D - W + (P_s - P_{atm}) A_s - m_c \frac{dv_c}{dt} - m_c v_c = m_g (v_g - v_c)$$

$$m_c \frac{dv_c}{dt} = E - D - W$$

$$\frac{dv_c}{dt} = a_c = \frac{1}{m_c} [E - \frac{1}{2} C_D \rho_{aire} v_c^2 - m_c g_s]$$

Usando el método de Runge Kutta para la solución de ecuaciones diferenciales.

$$t_i = t_{i-1} + \Delta t$$

$$v_i = v_{i-1} + a_{\text{prom}} \Delta t$$

$$h_i = h_{i-1} + v_{i-1} \Delta t + \frac{1}{2} a_{\text{prom}}^* \Delta t^2$$

$$a_{\text{prom}} = \frac{(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)}{6}$$

$$a_{\text{prom}}^* = \frac{(K_1 + K_2 + K_3)}{3}$$

$$K_1 = a(t_{i-1}, v_{i-1})$$

$$K_2 = a(t_{i-1} + \frac{1}{2} \Delta t, v_{i-1} + \frac{1}{2} K_1 \Delta t)$$

$$K_3 = a(t_{i-1} + \frac{1}{2} \Delta t, v_{i-1} + \frac{1}{2} K_2 \Delta t)$$

$$K_4 = a(t_{i-1} + \Delta t, v_{i-1} + K_3 \Delta t)$$

$$m_c(t) = m_T - m_p \frac{t_i}{t_q}$$

Para desarrollar la ecuación, de la etapa inercial se considera que el cohete sigue una trayectoria de tiro vertical.

$$a = v \frac{dv}{dx}$$

Donde la aceleración debido a la fuerza de la gravedad disminuye con la altura.

$$g = g_0 \left(\frac{R_t}{R_t + h} \right)^2$$

$$-g_0 \left(\frac{R_t}{R_t + h} \right)^2 dh = v dv$$

$$-\int_{h_{fv1}}^{h_{fv2}} g_0 \left(\frac{R_t}{R_t + h} \right)^2 dh = \int_{v_{fv1}}^{v_{fv2}} v dv$$

$$h_t = \frac{2g_0 R_t^3 + 2g_0 R_t^2 h_{fv1}}{2g_0 R_t^2 - v_{fv1}^2 R_t - v_{fv1}^2 h_{fv1}} - R_t$$

Las ecuaciones anteriormente desarrolladas son realizadas por el programa mostrado en el anexo 1⁴

Toberas propuestas. Parámetros y dimensiones.

Uno de los parámetros más importantes para el diseño de la geometría de la tobera es el área de la garganta, pues con ésta se definen la relación de áreas, el tamaño y dimensiones de la tobera.

⁴ Para calcular el arraste se usa un $C_p = .73$ que es el valor promedio para diferentes tipos de cohetes. Nelson, Mathematical analysis of a model rocket trajectory. Part 1: Powered phase. p. 157

Para conocer el área de la garganta, despejamos A_g de la ecuación (2.29) para el sistema inglés y sustituyendo m_{gr} de (3.12).

$$A_g = \frac{c^*}{g_c P_c} [a p_c r m^a \frac{A_g}{A_p^n}]^{\frac{1}{1-n}} (1+rm) \quad (3.13)$$

El procedimiento que utilizaremos para calcular el área de la garganta en la tobera es el siguiente:

Con las ecuaciones que se desarrollaron en el capítulo 2, se encuentran el empuje y otros parámetros de la tobera para la presión de combustión de diseño, la relación de mezcla y las limitaciones del cohete que fueron dadas. Aquí lo que podemos variar es la longitud del combustible y el diámetro del cuerpo del cohete y, por lo tanto, su volumen.

Con el empuje, tiempo de combustión, masa del propelente y el diámetro considerado para el cuerpo del cohete se usan las ecuaciones de movimiento para conocer la altura alcanzada para el volumen de combustible propuesto. Tendremos un proceso iterativo hasta alcanzar la altura que requerimos. Ver figura 10.

Parámetros de toberas propuestas

Para realizar las distintas propuestas comenzaremos con un diámetro exterior del combustible y obtenemos la longitud del combustible y el diámetro de los puertos para tener la cantidad de combustible necesaria para llegar a los 100 km de altura. Este

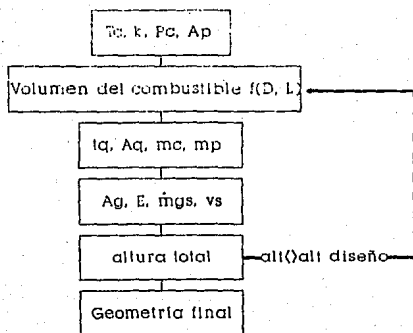


Figura 10

procedimiento se hará para cuatro diámetros exteriores de combustibles, siguiendo el proceso descrito en la sección anterior. Los resultados se muestran en la tabla 3.

Como podemos observar, las diferentes propuestas tienen la misma velocidad de salida de los gases, el impulso específico, la relación de áreas y coeficiente de empuje. Esto se debe a que estos parámetros dependen de las propiedades del combustible y la presión de trabajo y en todas las propuestas son las mismas.

De las cuatro propuestas de parámetros de las toberas tenemos que seleccionar la que mejor se adapte a los siguientes lineamientos y prioridades:

- a) Menor velocidad para el vuelo impulsado, ya que se trata de disminuir las pérdidas debido al arrastre.
- b) Mayor altura alcanzada en la etapa impulsada. Esto permite aprovechar en la etapa inercial la disminución de las pérdidas debido al arrastre y a la fuerza de gravedad.
- c) Menor cantidad de combustible para el mayor tiempo de quemado, es decir, el menor flujo másico de gases de combustión.

Para escoger la propuesta utilizaremos el método de matrices de decisiones con la relación h_{fv1}/V_{fv1} y el flujo másico, cada variable tendrá un valor de decisión de 60 y 40 respectivamente.

Tabla 3

Propuestas de toberas con sus parámetros

Parámetros	Propuesta 1	Propuesta 2	Propuesta 3	Propuesta 4
D (pulg)	6	7	8	9
d (pulg)	2	2	2.5	3
L (pulg)	44	48	57	65
A_p (pulg ²)	9.425	9.425	14.726	21.206
A_g (pulg ²)	829.38	904.78	1343	1838
A_g (m ²)	.00092	.001	.002	.002
dg (cm)	3.431	3.932	4.535	5.024
v_s (m/s)	2687	2687	2687	2687
\dot{m}_{gs} (kg/s)	1.808	2.375	3.16	3.878
E (N)	4859	6383	8492	10420
I_B (s)	273.95	273.95	273.95	273.95
r ("/s)	.046	.056	.05	.045
m_s (kg)	39.192	65.913	95.725	130.27
t_q (s)	21.658	27.729	30.269	33.563
M_{As}	2.78	2.78	2.78	2.78
A_s/A_g	5.915	5.915	5.915	5.915
C_r	1.525	1.525	1.525	1.525
v_{rvt} (m/s)	1272.73	1241.48	1246.66	1223.82
h_{rvt} (km)	16.409	20.383	22.173	24.129
h_r (km)	100.753	100.667	103.18	102.29
d_s (cm)	8.344	9.563	11.03	12.21

	h/v (60)		\dot{m}_{gr} (40)		Total
Propuesta 1	.653	39.18	1	40	79.18
Propuesta 2	.832	49.92	.761	30.44	80.36
Propuesta 3	.901	54.06	.572	22.88	76.94
Propuesta 4	1	60	.465	18.64	78.64

La propuesta que mejor se adapta a los requerimientos del cohete sonda es la número 2.

Dimensiones finales de la tobera.

Habiendo escogido la tobera con los parámetros más adecuados a nuestras necesidades, vamos a definir el tipo de tobera que más nos conviene, y así obtener su geometría.

Como vimos en el capítulo 1 existen 4 tipos principales de toberas: cónica, de campana, de tapón y de expansión-deflexión.

Las dos últimas toberas las vamos a desechar por que su aplicación principal es a presiones atmosféricas muy bajas o nulas. En cambio las dos primeras son las que generalmente se usan para los cohetes sonda.

Entre la tobera cónica y la tobera de campana escogeremos a la cónica principalmente por su facilidad de fabricación, ya que la tobera que proponemos es una primera aproximación y se necesita conocer y dominar la tecnología de fabricación de esta parte del cohete. Además, como veremos a continuación, las pérdidas en este tipo de toberas son pequeñas.

Pérdidas por el semiángulo de divergencia.

Existe una pérdida para la tobera cónica que no se contempló en el capítulo 2 y que tiene que ver con la geometría de la tobera. Esta pérdida se conoce como pérdida por el semiángulo de divergencia.

Esta pérdida se produce ya que los gases de combustión no salen paralelos hacia la atmósfera, sino que tienen una pequeña inclinación debido al ángulo de salida de la tobera.

$$P_d = \left(1 - \frac{1 + \cos \alpha}{2}\right) \times 100\% \quad (4.1)$$

Tobera cónica.

El semiángulo de divergencia estándar para las toberas cónicas es de 15° .

³ Seifert, Space technology, p. 14 y 26. Se pueden encontrar semiángulos de divergencia entre los 12° y 18° . Hill, Op. Cit., p. 397 y 405. Sutton, Op. Cit., p. 69.

Usando la ecuación 4.1 para un semiángulo de divergencia de 15° tendremos una pérdida por divergencia de 1.7%.

La dimensión faltante para la parte divergente es la longitud entre la garganta y el área de salida, para lo cual usamos los conceptos básicos de geometría:

$$L_d = \frac{d_s - d_g}{2 \tan 15^\circ}$$

Para los parámetros de nuestra tobera:

$$L_d = 10.507 \text{ cm.}$$

Como se comentó al inicio de este capítulo, la parte convergente no representa mayor problema ya que en esta sección de la tobera existe un gradiente de presión favorable para desarrollar un flujo subsónico hasta tener en la garganta un Mach igual a 1.

Generalmente el ángulo de esta parte de la tobera varía de los 30° a los 60° . Nosotros escogeremos un ángulo de 45° .

La longitud de la parte convergente se obtiene en forma análoga a la longitud de la parte divergente pero con la diferencia de que la longitud va del inicio de la tobera, es decir del área interior del cuerpo del cohete hasta la garganta:

$$L_{cv} = \frac{d_c - d_g}{2 \tan 45^\circ}$$

$$L_{cv} = 6.935 \text{ cm.}$$

⁶ Hill, Op. Cit., p. 410

Las dimensiones finales de la tobera seleccionada se muestran en la figura 11.

Para un tratamiento más detallado de los cálculos éstos se presentan desglosados en el apéndice 2.

Figura 11
Tobera

178.0000

95.6000

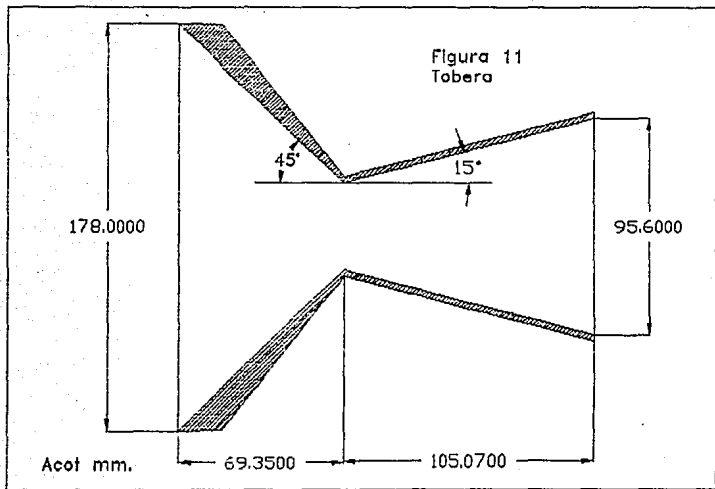
45°

15°

Acof mm.

69.3500

105.0700



capítulo 5

conclusiones

A lo largo de este trabajo hemos obtenido, en una primera fase, las ecuaciones teóricas y parámetros de funcionamiento para la tobera de Laval, usando elementos de la termodinámica, la mecánica de fluidos y estequiometría de la combustión.

Después, en base a las limitaciones impuestas por los objetivos y alcances del cohete sonda que se pretende desarrollar, definimos la propuesta de la geometría para una tobera del tipo cónica.

Hasta aquí se cumplen los alcances del presente trabajo, pero todo esto es un primer paso para el diseño completo de un cohete sonda. Seguirá la fabricación de un prototipo de tobera, las pruebas del combustible, la construcción de la cámara de combustión y del tanque de oxígeno líquido, examinar el comportamiento del prototipo de tobera en un banco de pruebas, búsqueda de materiales adecuados para la estructura del cohete, etc.

Con todo esto queremos decir que, aunque el objetivo de esta tesis era el diseño de tobera, continúa un proceso en el desarrollo del cohete sonda que requerirá ajustes, adaptaciones y mejoras conforme se vaya avanzando en el proyecto de cohetaría.

Este trabajo trata, en parte, de establecer bases y lineamientos a los que se pueden recurrir para el diseño de toberas y a los que se pueden volver para realizar nuevas modificaciones conforme se vayan presentando inconvenientes o limitaciones.

Esperamos que sirva este pequeño esfuerzo, que en conjunto con otros más que se están realizando, afiancen el proyecto de investigación y desarrollo de tecnología en el área espacial que se quiere establecer en nuestra universidad.

anexos

Anexo 1

Programa para calcular la altura máxima
a la que llega un cohete

```

1 CLS
2 G=9.8:RM=3:VN=0:HN=0:TN=0:VA=0:HA=0:TA=0:DT=.05
3 RT=6366000!
8 PRINT "dame el diametro (pulg)"
9 INPUT DI
10 PRINT "dame el empuje "
11 INPUT E
12 PRINT "dame la masa del propelente"
13 INPUT MF
14 PRINT "dame el tiempo de quemado"
15 INPUT TQ
16 C1=1.3/B*.71*(DI*.0254)^2
20 REM ETAPA IMPULSADA
50 PS=TQ/DT
100 PRINT "t","Vc","Alt"
150 REM METODO RUNGE KUTTA
1000 FOR I=1 TO PS+1
1002 PRINT TN,VN,HN
1006 TA=TN:VA=VN:HA=HN
1010 TM=TA:VM=VA
1011 GOSUB 2000
1012 K1=A
1014 TM=TA+DT/2:VM=VA+K1*DT/2
1016 GOSUB 2000
1018 K2=A
1020 VM=VA+K2*DT/2:TM=TA+DT/2
1022 K3=A
1024 TM=TA+DT:VM=VA+K3*DT
1026 GOSUB 2000
1028 K4=A
1050 APRO=(K1+2*K2+2*K3+K4)/6
1060 APRP=(K1+K2+K3)/3
1100 TN=TA+DT
1110 VN=VA+APRO*DT
1120 HN=HA+VA*DT+(APRP*DT^2)/2
1200 NEXT I
1250 REM ETAPA INERCIAL
1300 HT=((2*G*RT^3)+(2*G*HN*RT^2))/((2*G*RT^2)-(RT*VN^2)-(HN*VN^2))-RT
1310 PRINT "ALTURA TOTAL ";HT
1400 PRINT "otra vez:"
1500 INPUT R#
1520 IF R#="S" THEN 1
1525 END
2000 REM PARA ACELERACION
2010 M=1.5*MF-MP*TM/TQ
2020 A=(E-M*G-C1*VM^2)/M
2050 RETURN

```

anexo 2

Cálculos de los parámetros de cada
una de las propuestas

D := 6 pulg

d := 2 pulg

fc3 := 1.6387064 · 10⁻⁵
np := 3 L := 44 pulg
fc1 := 0.00064516

$$A_p := \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot np$$

$$A_q := \pi \cdot d \cdot L \cdot np$$

A_p = 9.425 pulg²

A_q = 829.38

a := .104 n := .681 ρ := .0292 lb/pulg³
Pc := 500 psi rm := 2.56 c := 5780.6 ft/s
gc := 32.174 ft/s² k := 1.1356
Tc := 4256.02 K

$$A_g := c \cdot fc1 \cdot \frac{rm + 1}{gc \cdot Pc} \left[a \cdot \rho \cdot A_q \cdot \left[\frac{rm}{A_p} \right]^n \right]^{\frac{1}{1-n}}$$

$$A_g = 9.244 \cdot 10^{-m2}$$

$$d_g := 100 \sqrt{\frac{4}{\pi} A_g}$$

d_g = 3.431 cm

P_s := 14.7 psi

R := 294.79 J/kg K

$$v_s := \sqrt{\left[2 \cdot k \cdot R \cdot \frac{T_c}{k-1} \right] \left[1 - \left[\frac{P_s}{P_c} \right]^{\frac{k-1}{k}} \right]}$$

$$v_s = 2.687 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

fc2 := 6892.85 g := 9.81 m/s²

fc4 := 2.2

$$f_m := f_c 2 \cdot P_c \cdot \frac{A_g}{\sqrt{R \cdot T_c}} \cdot \sqrt{k \cdot \left[\frac{2}{k+1} \right]^{\frac{k+1}{k-1}}}$$

$$f_m = 1.808 \quad \text{kg/s}$$

$$E := v_s \cdot f_m$$

$$E = 4.859 \cdot 10^3 \quad \text{N}$$

$$I_s = 273.95 \quad \text{s}$$

$$I_s := \frac{v_s}{g}$$

$$V_t := \left[D \cdot \frac{2 \pi}{4} \cdot L - A_p \cdot L \right] \cdot f_c 3$$

$$V_t = 0.014 \quad \text{m}^3$$

$$r := a \cdot \left[r_m \cdot \frac{f_m}{A_p} \cdot \left[\frac{f_c 4}{1 + r_m} \right] \right]^n$$

$$r = 0.046 \quad \text{pulg/s}$$

$$m_c := V_t \cdot \rho \cdot 27740$$

$$m_c = 11.009 \quad \text{kg}$$

$$m_t := m_c \cdot (1 + r_m)$$

$$m_t = 39.192 \quad \text{kg}$$

$$t_q := \frac{V_t}{r \cdot f_c 3 \cdot A_q}$$

$$t_q = 21.658 \quad \text{s}$$

$$M_s := \frac{2}{k-1} \cdot \left[\frac{P_c}{P_s} \right]^{\frac{k-1}{k}} - 1$$

$$M_s = 2.779 \quad \text{Ma}$$

$$A_s A_g := \frac{1}{M_s} \left[\frac{2 + (k-1) \cdot M_s^2}{k+1} \right]^{\frac{k+1}{2(k-2)}}$$

$$A_s A_g = 5.915$$

$$C_E := \frac{E}{P_c \cdot A_g \cdot 6893}$$

$$C_E = 1.525$$

D := 7 pulg
 d := 2 pulg
 fc3 := 1.6387064 · 10⁻⁵
 np := 3 L := 48 pulg
 fc1 := 0.00064516

$$A_p := \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot n_p$$

$$A_q := \pi \cdot d \cdot L \cdot n_p$$

$$A_p = 9.425 \text{ pulg}^2$$

$$A_q = 904.779$$

a := .104 pulg
 n := .681
 ρ := .0292 lb/pulg³
 Pc := 500 psi
 gc := 32.174 ft/s²
 rm := 2.56
 c := 5780.6 ft/s
 k := 1.1356
 Tc := 4256.02 K

$$A_g := c \cdot f_{c1} \cdot \frac{r_m + 1}{g_c \cdot P_c} \left[a \cdot \rho \cdot A_q \left[\frac{r_m}{A_p} \right]^n \right]^{\frac{1}{1-n}}$$

$$A_g = 0.001 \text{ m}^2$$

$$d_g := 100 \cdot \sqrt{\frac{4}{\pi} \cdot A_g}$$

$$d_g = 3.932 \text{ cm}$$

$$P_s := 14.7 \text{ psi}$$

$$R := 294.79 \text{ J/kg K}$$

$$v_s := \sqrt{\left[\frac{2 \cdot k \cdot R \cdot T_c}{k-1} \right] \cdot \left[1 - \left[\frac{P_s}{P_c} \right]^{\frac{k-1}{k}} \right]}$$

$$v_s = 2.687 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

$$f_{c2} := 6892.85$$

$$: := 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$f_{c4} := 2.2$$

$$f_m := f_c \cdot 2 \cdot P_c \cdot \frac{A_g}{\sqrt{R} \cdot T_c} \cdot \sqrt{\frac{2}{k+1} \left[\frac{2}{k+1} \right]^{k-1}}$$

$$f_m = 2.375 \text{ kg/s}$$

$$E := v_s \cdot f_m$$

$$E = 6.383 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$I_s = 273.95 \text{ s}$$

$$I_s := \frac{v_s}{g}$$

$$V_t := \left[D \cdot \frac{2 \pi}{4} \cdot L - A_p \cdot L \right] \cdot f_c \cdot 3$$

$$V_t = 0.023 \text{ m}^3$$

$$r := a \cdot \left[r_m \cdot \frac{f_m}{A_p} \cdot \left[\frac{f_c \cdot 4}{1 + r_m} \right] \right]^n$$

$$r = 0.056 \text{ pulg/s}$$

$$m_c := V_t \cdot \rho \cdot 27740$$

$$m_t := m_c \cdot (1 + r_m)$$

$$m_c = 18.515 \text{ kg}$$

$$m_t = 65.913 \text{ kg}$$

$$t_q := \frac{V_t}{r \cdot f_c \cdot 3 \cdot A_q}$$

$$t_q = 27.729 \text{ s}$$

$$M_s := \left[\frac{2}{k-1} \cdot \left[\frac{P_c}{P_s} \right]^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$M_s = 2.779 \text{ Ma}$$

$$A_{sAg} := \frac{1}{M_s} \cdot \left[\frac{2 + (k-1) \cdot M_s^2}{k+1} \right]^{\frac{k+1}{2 \cdot k-2}}$$

$$A_{sAg} = 5.915$$

$$CE := \frac{E}{P_c \cdot A_g \cdot 6895}$$

$$CE = 1.525$$

$D := 8 \text{ pulg}$ -5
 $d := 2.5 \text{ pulg}$ $fc3 := 1.6387064 \cdot 10^{-5}$
 $np := 3$ $L := 57 \text{ pulg}$
 $fc1 := 0.00064516$

$$A_p := \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot np$$

$$A_q := \pi \cdot d \cdot L \cdot np$$

$$A_p = 14.726 \text{ pulg}^2$$

$a := 1.343 \cdot 10^{-3} \text{ pulg}^2$
 $\rho := .0292 \text{ lb/pulg}^3$
 $P_c := 500 \text{ psi}$ $rm := 2.56$ $c := 5780.6 \text{ ft/s}$
 $gc := 32.174 \text{ ft/s}^2$ $k := 1.1356$ $T_c := 4256.02 \text{ K}$

$$gc \cdot P_c \left[1 - \frac{1}{\left[\frac{r_m}{A_p} \right]^n} \right]^{1-n}$$

$$A_g = 0.002 \text{ m}^2$$

$$d_g := 100 \sqrt{\frac{4}{\pi} A_g}$$

$$d_g = 4.535 \text{ cm}$$

$$P_s := 14.7 \text{ psi}$$

$$R := 294.79 \text{ J/kg K}$$

$$v_s := \sqrt{\left[2 \cdot k \cdot R \cdot \frac{T_c}{k-1} \right] \cdot \left[1 - \left[\frac{P_s}{P_c} \right]^{\frac{k-1}{k}} \right]}$$

$$v_s = 2.687 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

$$fc2 := 6892.85 \quad g := 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$fc4 := 2.2$$

$$f_m := fc2 \cdot Pc \cdot \frac{Ag}{\sqrt{R \cdot Tc}} \cdot k \cdot \left[\frac{2}{k+1} \right]^{\frac{k-1}{k}}$$

$$f_m = 3.16 \quad \text{kg/s}$$

$$E := v_s \cdot f_m$$

$$E = 8.492 \cdot 10^3 \quad \text{N}$$

$$I_s = 273.95 \quad \text{s}$$

$$I_s := \frac{v_s}{g}$$

$$V_t := \left[\frac{2 \pi}{4} \cdot L - A_p \cdot L \right] \cdot fc3$$

$$V_t = 0.033 \quad \text{m}^3$$

$$r := a \cdot \left[r_m \cdot \frac{f_m}{A_p} \cdot \left[\frac{fc4}{1 + r_m} \right]^n \right]$$

$$r = 0.05 \quad \text{pulg/s}$$

$$m_c := V_t \cdot \rho = 27740$$

$$m_c = 26.889 \quad \text{kg}$$

$$m_t := m_c \cdot (1 + r_m)$$

$$m_t = 95.725 \quad \text{kg}$$

$$t_q := \frac{V_t}{r \cdot fc3 \cdot A_q}$$

$$t_q = 30.269 \quad \text{s}$$

$$M_s := \frac{2}{k-1} \cdot \left[\frac{Pc}{Ps} \right]^{\frac{k-1}{k}} - 1$$

$$M_s = 2.779 \quad \text{Ma}$$

$$A_s A_g := \frac{1}{M_s} \cdot \left[\frac{2 + (k-1) \cdot M_s^2}{k+1} \right]^{\frac{k+1}{2(k-2)}}$$

$$A_s A_g = 5.915$$

$$CE := \frac{E}{Pc \cdot Ag \cdot 6893}$$

$$CE = 1.525$$

$D := 9 \text{ pulg}$
 $d := 3 \text{ pulg}$
 $fc3 := 1.6387064 \cdot 10^{-5}$
 $np := 3$
 $L := 65 \text{ pulg}$
 $fc1 := 0.00064516$

$$A_p := \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot np$$

$$A_q := \pi \cdot d \cdot L \cdot np$$

$$A_p = 21.206 \text{ pulg}^2$$

$$A_q = 1.838 \cdot 10^3 \text{ pulg}^2$$

$a := .104 \text{ n} := .681 \text{ } \rho := .0292 \text{ lb/pulg}^3$
 $P_c := 500 \text{ psi} \text{ } r_m := 2.56 \text{ } c := 5780.6 \text{ ft/s}$
 $g_c := 32.174 \text{ ft/s}^2 \text{ } k := 1.1356$
 $T_c := 4256.02 \text{ K}$

$$H_g := c \cdot fc1 \cdot \frac{r_m + 1}{g_c \cdot P_c} \left[a \cdot \rho \cdot A_q \left[\frac{r_m}{A_p} \right]^n \right]^{\frac{1}{1-n}}$$

$$A_g = 0.002 \text{ m}^2$$

$$d_g := 100 \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot A_g}{\pi}}$$

$$d_g = 5.024 \text{ cm}$$

$$P_s := 14.7 \text{ psi}$$

$$R := 294.79 \text{ J/kg K}$$

$$v_s := \sqrt{\left[2 \cdot k \cdot R \cdot \frac{T_c}{k-1} \right] \cdot \left[1 - \left[\frac{P_s}{P_c} \right]^{\frac{k-1}{k}} \right]}$$

$$v_s = 2.687 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

$$fc2 := 6692.85 \quad g := 9.81 \quad \text{m/s}^2$$

$$fc4 := 2.2$$

$$fm := fc2 \cdot Pc \cdot \frac{Ag}{\sqrt{R \cdot Tc}} \cdot k \cdot \left[\frac{2}{k+1} \right]^{k-1}$$

$$fm = 3.878 \quad \text{kg/s}$$

$$E := vs \cdot fm$$

$$E = 1.042 \cdot 10^4 \quad \text{N} \quad Is := \frac{vs}{g}$$

$$Is = 273.95 \quad \text{s}$$

$$Vt := \left[D \cdot \frac{2 \cdot \pi}{4} \cdot L - Ap \cdot L \right] \cdot fc3 \quad Vt = 0.045 \quad \text{m}^3$$

$$r := a \cdot \left[r_m \cdot \frac{fm}{Ap} \left[\frac{fc4}{1 + r_m} \right] \right]^n \quad r = 0.045 \quad \text{pulg/s}$$

$$mc := Vt \cdot \rho = 27740$$

$$mc = 36.592 \quad \text{kg}$$

$$mt := mc \cdot (1 + r_m)$$

$$mt = 130.268 \quad \text{kg}$$

$$tq := \frac{Vt}{r \cdot fc3 \cdot Aq}$$

$$tq = 33.563 \quad \text{s}$$

$$Ms := \left[\frac{2}{k-1} \cdot \left[\frac{Pc}{Ps} \right]^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$Ms = 2.779 \quad \text{Ma}$$

$$AsAg := \frac{1}{Ms} \cdot \left[\frac{2 + (k-1) \cdot Ms^2}{k+1} \right]^{\frac{k+1}{2 \cdot k-2}}$$

$$AsAg = 5.915$$

$$CE := \frac{E}{Pc \cdot Ag \cdot 6890}$$

$$CE = 1.525$$

Bibliografía consultada.

- Bizony, M.T. et. al. The space encyclopaedia. A guide to astronomy and space research. 4a. ed. E.U.A., E. P. Dutton, 1958. 287 p.
- Bragg, S. L. Rocket engines. Inglaterra, George Newnes, 1962. 158p.
- Braun, Warnher Von y Frederick I. Ordway III. El resplandor de los cohetes en la historia del hombre. Desde el "fuego griego" hasta los vuelos interplanetarios. Trad. Plerel Mazia. Argentina. Edisar, 1979. 154 p.
- Cohen, N.S., R.W. Fleming y R.C. Derr. Role of binders in solid propellant combustion. AIAA Journal. Febrero 1974, Vol. 12 no. 2. p 212-218.
- Cover, Eugene E. Thrust and drag: its prediction and verification. E.U.A., AIAA, 1985. 349 p. (Progress in astronautics and aeronautics no. 98).
- Emanuel, George. Gasdynamics. Theory and application. E.U.A., AIAA, 1986. 451p.
- Evans F. T. y H. D. Howard. Perspectivas del espacio. Trad. Juan Mario Castellanos. México, Grijalbo, 1969. 247 p.
- Fortescue, Peter W. y John P. Stark. Spacecraft systems engineering. Inglaterra, John Wiley and Song, 1992. 424 p.
- Fox, Robert W. y Alan T. McDonald. Introducción a la mecánica de fluidos. Trad. Jaime Cervantes de Gortari. 2a. ed. México, Interamericana, 1986. 750 p.
- Gall, Ruth et. al. Las actividades espaciales en México: Una revisión crítica. México, SEP, CONACYT, FCE, 1987. 219 p. (La ciencia desde México no. 20).
- Granet, Irving. Termodinámica. 3a. ed. Mexico, Prentice-Hall, 1988. 752 p.
- Herrick, John W. Rocket encyclopedia ilustrated. E.U.A., Aero Publishers, 1959. 607 p.
- Hill, Philip G. y Carl R. Peterson. Mechanics and Thermodynamics of propulsion. 3a. ed. E.U.A., Addison Wesley, 1970. 563 p.

- Jansen y Kleizkine. Preliminary desing for a 3kN hybrid propellant engine. ESA Journal. Volumen 12 número 4. 1988. Holanda. p. 421-440.
- Kuo, Kenneth K. y Martin Sommerfield. Fundamentals of solid propellants combustion. 3a. ed. E.U.A., AIAA. 1984. 892 p. (Progress in astronautics and aeronautics no. 90).
- Kit, Boris y Douglas S. Evered. Rocket Propellant Handbook. E.U.A., The Macmillan company, 1960. 354 p.
- Memoria del simposio. Evaluación y perspectivas de la era espacial en México. Mayo 19-22/1986. México. INEGI, SEP, CONACYT, UNAM, 1987. 313 p.
- Merrill, Grayson. Principles of guided missile design. E.U.A., D. Van Nostrand, 1958. 600 p.
- Nelson, Robert A. y Mark E. Wilson. Matemathical analysis of a model rocket trajectory. Part 1: Powered phase. The physics teacher, Marzo 1976. p. 150-161.
- PUIDE. Desarrollo del programa de coheteria. Concepción de la dirección. Documento para crítica y análisis. Febrero 1994. 8 p.
- Rees, M. H. Physics and chemistry of the upper atmosphere. Inglaterra, Cambridge University, 1989. 289 p.
- Roberson, John A. y Clayton T. Crowe. Mecánica de fluidos. Trad. Carlos Ordoñez García. 2a. ed. México, Interamericana, 1985. 680 p.
- Sabersky, Rolf H. et al. Fluid flow. A first course in fluid mechanics. 3a. ed. Singapur. Maxwell Macmillan, 1984. 537 p.
- Seifert, Howard S. Space Technology. E.U.A., John Wiley and Song, 1959. 33 cap.
- Seifert, Howard S. y Kenneth Brown. Ballistic missile and space vehicle systems. E.U.A., John Wiley and Sons, 1961. 526 p.
- Sutton, George P. Rocket Propulsion elements. An introduccion to the engineering of rockets. 6a. ed. E.U.A., John Wiley and Sons, 1992. 636 p.
- Van Wylen, Gordon J. y Richard E. Sonntag. Fundamentos de termodinámica. Trad. Xavier Cortes Obregon. Mexico, Limusa, 1988. 734 p.

Wark, Kenneth jr. Termodinámica. 5a. ed. Trad. Jose Luis Torres Vazquez. México, McGraw-Hill, 1990. 1223 p.

Williamson, Mark. Dictionary of space technology. Inglaterra, Adam Hilger, 1990. 401 p.

White, Frank M. Mecánica de fluidos. Trad. Manuel Rodriguez Fernandez. México, McGraw-Hill, 1988. 757 p.