29
2ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Escuela Nacional de Estudios Profesionales ACATLAN

LOS PROCESOS ESTOCASTICOS DE POISSON APLICADOS A LA PROYECCION Y CONTROL DE SINIESTROS DEL SEGURO DE ENFERMEDAD

T E S I S

Que para obtener el Título de

A C T U A R I O

p r e s e n t a

PEDRO SOLIS MOYA

ASESOR DE TESIS: M. EN C. JAVIER GONZALEZ ROSAS

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Acatlán Edo. de México 1994

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLAN"
DIVISION DE MATEMATICAS E INGENIERIA
PROGRAMA DE ACTUARIA Y M.A.C.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

SR. PEDRO SOLIS MOYA
Alumno de la carrera de Actuaría
Presente.

De acuerdo a su solicitud presentada con fecha 24 de noviembre de 1993, me complace notificarle que esta Jefatura tuvo a bien asignarle el siguiente tema de tesis: "LOS PROCESOS ESTOCASTICOS DE POISSON APLICADOS A LA PROYECCION Y CONTROL DE SINIESTROS DEL SEGURO DE ENFERMEDAD", el cual se desarrollará como sigue:

Introducción.
I.- Enfoques actuales del seguro de enfermedad en el alumno.
II.- Introducción a los procesos estocásticos.
III.- Procesos estocásticos de Poisson.
IV.- Proyección y control de siniestros del seguro de enfermedad.
Conclusiones.
Bibliografía.

Asimismo fue designado como Asesor de Tesis el Mtro. Javier González Rosas, profesor de esta Escuela.

Ruego a usted tomar nota que en cumplimiento de lo especificado en la Ley de Profesiones, deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito básico para sustentar examen profesional, así como de la disposición de la Coordinación de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis el título del trabajo realizado. Esta comunicación deberá imprimirse en el interior de la tesis.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Acatlán, Edo. de Méx., a 3 de marzo de 1994.

ACT. LAURA MA. RIVERA BECERRA
Jefe del Programa de Actuaría y M.A.C.

LOS PROCESOS ESTOCASTICOS DE POISSON APLICADOS A LA PROYECCION Y CONTROL DE SINIESTROS DEL SEGURO DE ENFERMEDAD

A LA MEMORIA DE MI MADRE
QUIEN ME ENSEÑO A NUNCA DARME POR VENCIDO

AGRADECIMIENTOS

A mis sinodales por su paciencia en la revisión del presente trabajo.

M. en C. EDUARDO GODOY ESCOTO
ING. BEATRIZ CLAVEL DIAZ
ACT. Ma. DEL CARMEN GONZALEZ VIDEGARAY
M. en C. JAVIER GONZALEZ ROSAS
ACT. MIGUEL A. MACIAS ROBLES

AGRADECIMIENTOS

AL PROFESOR JAVIER GONZALEZ ROSAS:

CUYA INFLUENCIA FUE FUNDAMENTAL PARA DESPERTAR MI INTERES POR LOS PROCESOS ESTOCASTICOS.

AGRADECIMIENTOS

AL PROFESOR LUIS RAUL MARIN TORRES:

CUYO APOYO FUE INVALUABLE EN MOMENTOS CRITICOS EN MI VIDA ACADEMICA

"IRE A CUALQUIER PARTE, SIEMPRE QUE SEA HACIA ADELANTE"

J. STANLEY
GEOGRAFO Y EXPLORADOR INGLES

INDICE

INTRODUCCION **i**

capitulo I **ENFOQUES ACTUALES DEL SEGURO DE ENFERMEDAD EN EL MUNDO** **1**

1.1 Evolución del seguro de enfermedad 2

1.2 Evolución del riesgo de enfermedad y de su costo 8

1.3 Problemas y consecuencias para los aseguradores privados 13

1.4 Política general 17

capitulo II **INTRODUCCION A LOS PROCESOS ESTOCASTICOS** **20**

2.1 Definición de un Proceso Estocástico 21

2.2 Clasificación de un Proceso Estocástico 25

2.3 Procesos estocásticos estacionarios 28

2.4 Función generatriz de probabilidades 31 capitulo III **PROCESOS ESTOCASTICOS DE POISSON** **34**

3.1 Definiciones 35

3.2 Propiedades básicas de los Procesos de Poisson 36

3.3 Procesos de Poisson generalizados 40

capitulo IV **PROYECCION Y CONTROL DE SINIESTROS DEL SEGURO DE ENFERMEDAD** **45**

4.1 Análisis de la base de datos de siniestros de una compañía del mercado asegurador mexicano 46

4.2 Validación del fenómeno de la siniestralidad como un proceso estocástico de Poisson 50

4.3 Proyección del número de siniestros 55

4.4 Resultados 63

ANEXOS 64

CONCLUSIONES **75**

BIBLIOGRAFIA **81**

INTRODUCCION

INTRODUCCION

En la actualidad el número de solicitudes del Seguro de Enfermedad que diariamente levantan los agentes de seguros, nos demuestra el alto índice de aceptación que en las personas tiene este tipo de coberturas.

Es comprensible tal actitud de aceptación, teniendo en cuenta el crecimiento industrial, demográfico y poblacional que en México se ha dado. Asimismo, no debemos olvidar el sentido de tranquilidad económica que proporciona un seguro de enfermedad. Estas circunstancias explican la magnitud de la cartera actual en el mercado mundial.

Además, la amplitud de los gastos que cubre la póliza, la minimización de los gastos no amparados, así como la diversidad de coberturas opcionales a contratar sin límites, genera una influencia determinante para que el seguro de enfermedad hoy, sea un seguro muy solicitado.

Desafortunadamente, y aunque parezca una contradicción, el seguro de enfermedad en el mundo entero, está pasando por un serie de problemas que lo han llevado a una situación de crisis.

Son muchas y muy complejas las situaciones implicadas, para tener una adecuada visión de éstas, el presente trabajo muestra en el capítulo I una recopilación breve de lo que es y de lo que ha sido el seguro de enfermedad en el mundo y también del difícil momento que actualmente enfrenta.

Es claro, sin embargo, que existe un fenómeno que siempre estará presente y que por lo tanto nunca perderá vigencia ni importancia y que además es, ha sido y será determinante en el futuro del seguro de enfermedad, este fenómeno es el de la siniestralidad.

Actualmente, dicho fenómeno llama importantemente la atención de las directivas de las compañías de seguros. Se busca la manera no sólo de disminuirla sino también de anticiparse a ésta, ya que es muy importante para los ajustes y modificaciones oportunas y adecuadas de las tarifas, condiciones generales, períodos de espera, políticas de selección, etc.

En este sentido, el objetivo principal del presente trabajo es el proponer una herramienta probabilística que permita la proyección confiable de los siniestros del seguro de enfermedad.

Dicha herramienta se encuentra en la teoría de los Procesos Estocásticos y representa una alternativa para aquellos casos en los que no se puede aplicar el modelo tradicionalmente usado de "Análisis de Regresión".

Esta teoría tiene una amplia aplicación en el ramo de los seguros en general, y no sólo en cuanto al estudio del fenómeno de la siniestralidad, sino todo aquello que implique algún fenómeno aleatorio relacionado con el tiempo.

En el capítulo II se expone de manera breve la teoría de los Procesos Estocásticos en general y en el capítulo III la de los Procesos de Poisson en particular, siendo esta última la teoría utilizada en el capítulo IV, donde se ejemplifica la manera de aplicarla mediante el estudio y proyección del fenómeno de siniestralidad de la enfermedad denominada "**OTROS TRASTORNOS ORGANOGENITALES FEMENINOS**".

Se espera que este trabajo sea sólo el principio de una aplicación más amplia de los Procesos Estocásticos en el estudio de los fenómenos derivados de la actividad aseguradora en general.

MARZO DE 1994

CAPITULO I

ENFOQUES ACTUALES DEL SEGURO DE ENFERMEDAD EN EL MUNDO

1.1
EVOLUCION DEL SEGURO DE ENFERMEDAD

Es evidente que el seguro de enfermedad estatal y privado, no sólo a nivel nacional, sino también a nivel mundial, está luchando contra serias dificultades, cuya trascendencia es tanto económica como política. Lo anterior se refleja en las siguientes citas[1]:

- "El Seguro Social estará en quiebra en 1995" publicaron con grandes titulares los principales periódicos alemanes en 1989.

- En España, se empieza a hablar de una privatización, por lo menos parcial, del Seguro Social.

- En Chile, en 1982 después de haber privatizado la parte de vejez e invalidez del Seguro Social, se ha autorizado (para no decir estimulado) la creación de instituciones privadas, como alternativas al Seguro Social Estatal de Enfermedad.

- En Suiza, se recogieron en 1990 las firmas de dos iniciativas populares constitucionales, para reestructurar y hacer obligatorio el Seguro de Enfermedad.

- En Australia, el gobierno prohibió en febrero de 1989, toda clase de seguro privado que cubra honorarios médicos.

- Mientras tanto, si por un lado se ven surgir en muchos países nuevas compañías que se lanzan al ramo de enfermedad, se observa también, tanto en EE.UU. como en el continente Europeo, como muchos de los aseguradores tradicionales del ramo se vuelven más susceptibles y a veces se retiran por lo menos de una parte de estos negocios.

[1] Tomadas de la revista "BUSSINES INSURANCE" #7 año 1992. pag. 59 - 61 artículo "HEALTH INSURANCE GOVERNMENT ON CRISIS".

• También los reaseguradores modifican su política; en los Estados Unidos, varios de los grandes reaseguradores "tradicionales", se están volviendo muy susceptibles y a veces abandonan cierto tipo de coberturas, ciertos sindicatos entre los más especilizados de Lloyd's, reducen sustancialmente sus responsabilidades, mientras que los grandes reaseguradores profesionales del continente europeo siguen muy cautelosos y renuentes a abrirse a las nuevas posibilidades que se les ofrecen.

Ahora bien, ¿cómo y por qué se llegó a esta situación? y, dada la indiscutible necesidad que una cobertura adecuada del riesgo de enfermedad representa para la mayoría de la población, ¿cuáles vías de salida se entrevén ?.

1.1.1
EVOLUCION DE LAS COBERTURAS

A continuación se menciona una recopilación de las etapas históricas del seguro de enfermedad más importantes:

• En la antigua China, era ampliamente difundida la costumbre, según la cual se pagaba al médico en los períodos de buena salud; tan pronto como la persona se enfermaba recibía el tratamiento adecuado y sus contribuciones terminaban automáticamente. Es sin duda una de la primeras formas del "Seguro de Enfermedad".

• En el medioevo y hasta comienzos del siglo pasado, corporaciones y otras instituciones de tipo mutualistas, fueron creadas para ayudar a las familias de los enfermos y atenuar las consecuencias financieras de la enfermedad. En 1883 se promulgó en Alemania, una ley que obligaba a todos los obreros a tener un seguro de enfermedad. Esta ley no fue sólo el origen del Seguro Social, sino que tuvo también un impacto considerable sobre el seguro privado. En 1885 apareció en Inglaterra, la primera cobertura de enfermedad otorgada por el seguro privado: una indemnización diaria en caso de enfermedad o de invalidez.

• Hacia 1910 apareció la primera cobertura de gastos de tratamiento; se limitaba a los casos de hospitalización, se otorgaba sólo durante períodos relativamente cortos y su monto era prefijado (50 ó 100% del monto de la indemnización diaria).

- En los años 30 comenzaron a difundirse las primeras coberturas con reembolso parcial o total de los gastos de tratamiento realmente incurridos; en un primer tiempo, sólo se reembolsaron los gastos de hospital (cuarto y comida), en un segundo tiempo se añadieron los gastos de intervenciones quirúrgicas y, progresivamente, los demás gastos de hospitalización.

- Paralelamente surgen en los Estados Unidos, "Planes de Atención Médica" creados por parte de asociaciones de hospitales o de médicos (en particular los de Blue Cross and Blue Shield).

- Los aseguradores privados siguen escépticos frente a la venta del Seguro de Enfermedad en grupos; sin embargo, en 1934 aparece (Equitable Life de EE.UU.) el primer seguro complementario en grupo para cubrir los gastos de hospital (cuarto y comida), en 1939 para gastos de intervenciones quirúrgicas y en 1943 para honorarios médicos en el interior del hospital.

- En 1949 viene lanzada, (por la Liberty Mutual Insurance Company de EE.UU.) la primera póliza de gastos médicos mayores complementaria, a los planes básicos ofrecidos por Blue Cross and Blue Shields.

- Sólo al comienzo de los años 50 empieza a desarrollarse en los Estados Unidos, el seguro de gastos médicos mayores en grupo.

- En épocas más recientes, aparecen nuevas ampliaciones de cobertura, respectivamente se dejan caer exclusiones que anteriormente eran categóricas. Se pasa así a cubrir en forma progresiva, total o parcialmente los gastos de maternidad, los tratamientos psiquiátricos, los gastos de farmacia, las curas (baños termales, fisioterapia) y, por último, los gastos de tratamiento dental, y a ofrecer una indemnización diaria por enfermedad.

El atractivo cada vez mayor de la cobertura por un lado, la creciente preocupación entre el público por los costos de salud, por el otro; llevaron, sobre todo en países donde el seguro social deja un amplio margen al seguro privado, a un desarrollo enorme en volumen, del Seguro de Enfermedad. En EE.UU. en 1940, el número de asegurados bajo pólizas individuales para gastos de hospital, era apenas poco más de un millón, en 1970 ya eran más de 3 millones. En el mismo país, se calcula que recientemente alrededor de 150 millones de personas, tienen alguna cobertura de enfermedad de grupo.

1.1.2
LA COBERTURA DE UN NUMERO CADA VEZ MAYOR DE RIESGOS, HIZO MAS ATRACTIVO EL SEGURO

Originalmente, por ejemplo, el seguro de gastos médicos mayores se vendía sobrepuesto a un "plan básico", dejando entre el monto máximo garantizado por este último y el mínimo a partir del cual intervenía la cobertura adicional, un margen ("corredor"o deducible) que quedaba a cargo del asegurado. Progresivamente, este margen disminuyó hasta desaparecer en los planes "completos".

Al mismo tiempo, se tomaron también medidas para reducir el impacto del coaseguro sobre el asegurado; aparecieron pólizas sin coaseguro para ciertas eventualidades (por ejemplo hospitalización), con coaseguro "normal" para enfermedades que, anteriormente, por la dificultad de comprobarlas objetivamente (por ejemplo enfermedades nerviosas) requerían un porcentaje más elevado, se fijaron topes al monto al cual se aplicaba el coaseguro, etc.

En general, esta nueva liberalidad fue presentada como consecuencia del sentido social de los aseguradores de enfermedad; obviamente, abría también la puerta a toda una serie de abusos, que poco tenían que ver con la solidaridad entre asegurados.

Desde su aparición hasta los años 60, las coberturas del seguro de enfermedad tenían algunos límites bastante estrictos, tanto con respecto al monto máximo, como a su duración. Obviamente, estas situaciones creaban cierto malestar entre los asegurados que necesitaban de tratamientos muy costosos o eran víctimas de enfermedades muy largas. Se empezaron por consiguiente, a ampliar esos límites en lugar de establecer máximos por cada tipo de prestación, se fijaron topes por enfermedad, o por año calendario; con el tiempo se extendieron todavía más los beneficios, fijando sólo un máximo por vida de la póliza y, por último, hasta aparecieron pólizas con cobertura ilimitada.

Es evidente que también estas ampliaciones fomentaban el atractivo de las coberturas, pero pueden ser también causas de abuso y, en ocasiones, crear un serio desequilibrio en los resutados del asegurador.

1.1.3
EVOLUCION DE LOS CONCEPTOS BASICOS

Originalmente el seguro privado de enfermedad se limitaba a compensar parcialmente la pérdida de ingresos, cuando fuera causada por alguna enfermedad de duración prolongada (indemnización diaria después de un período de carencia) y cubrir gastos importantes, de tipo "catastrófico", que no podían caber en el presupuesto normal (hospitalizaciones, intervenciones quirúrgicas).

Progresivamente, se pasó a cubrir también gastos de salud, que podrían ya ser considerados casi "normales" (tratamientos ambulatorios, medicinas), que en la realidad tendrían que caber en el presupuesto del asegurado.

En ciertos casos (como por ejemplo algunas compañías inglesas), casi parecía que el seguro privado, quería hacer la competencia al seguro social estatal, alterando así sus características básicas.

También la definición de enfermedad no siempre ha mantenido su rigidez original. Todavía al comienzo de los años 60, dicha definición era: **"Todo desarreglo evidente, comprobado por un médico, en el funcionamiento de un órgano o parte del cuerpo, que se produce independientemente de la voluntad del asegurado y procede de alteraciones patológicas comprobables"**. En general, para poder hablar de un "estado de enfermedad", se requerían estrictamente las siguientes condiciones:

- Alteraciones de la salud, por disturbios en una u otra función; comprobación objetiva (y no sólo subjetiva), es decir detectabilidad por auscultación, análisis, radioscopía, etc.

- Independencia del desgaste progresivo y normal del cuerpo o de la mente por envejecimiento (necesidad de la presencia de un factor patológico claramente identificable);

- Independencia de la voluntad del asegurado (exclusión de autolesión, automutilación, etc.).

Con el tiempo aparecieron ciertas concesiones: enfermedades psíquicas y nerviosas, leves dolores no objetivamente comprobables en ciertas partes del esqueleto, consecuencias del abuso del alcohol o drogas, ya no quedaron excluidas tan terminantemente; a veces se empezó a dar al término de "enfermedad", una interpretación en el sentido de "pérdida de capacidad de trabajo", abriendo la puerta a reclamos debido solamente a senilidad.

Sin embargo, no es sólo en esta dirección que intervino una modificación de conceptos; la Organización Mundial de la Salud (O.M.S.) define:

"Buena salud es un estado de completo bienestar físico, mental y social y no sólo la ausencia de malestar o enfermedad".

La O.M.S. introduce por consiguiente, una dimensión socio-cultural del concepto de salud; cada persona que, por cualquier razón considere no gozar de un bienestar social completo, estaría por consiguiente, enferma.

Surge así una tendencia, no sólo por parte del seguro social, sino también de ciertos médicos, a ser más generosos frente al paciente y a otorgar certificados de complacencia, sobre todo para pequeñas enfermedades o cuando se acerca el momento de la recuperación.

1.2
EVOLUCION DEL RIESGO DE ENFERMEDAD Y DE SU COSTO

En el Seguro de Enfermedad el riesgo puede dividirse en tres elementos:

- Frecuencia de los siniestros (y su duración en los seguros de indemnización diaria).
- Monto de los gastos de tratamiento máximo y promedio esperado por siniestro.
- Evolución del costo de salud en general.

Entre muchos de los factores que influyen en la frecuencia de los siniestros se pueden mencionar:

- La edad.
- El sexo.
- El medio ambiente en el cual vive y actua el asegurado.
- Su profesión y ocupación.
- Su educación.
- Sus ingresos.
- El atractivo de la cobertura.
- El monto asegurado (y la duración de las prestaciones para las indemnizaciones diarias).
- Las restricciones de la póliza (período de espera, deducible, coaseguro).
- El Seguro Social, etc.

Con respecto al costo promedio de los siniestros tienen particular importancia los factores siguientes:

- El atractivo de la cobertura.
- El monto asegurado.
- Las restricciones de la póliza (sobre todo el deducible y coaseguro).
- El costo de salud local (en relación con el promedio nacional).
- La causa de la enfermedad.
- El Seguro Social.

Finalmente, sobre la evolución del costo de salud inciden particularmente:

- La inflación (y en términos más generales, la política económica del gobierno).
- El desarrollo tecnológico de la medicina.
- La mayor oferta de servicios y la mayor utilización de los mismos.

Estas listas no son exahustivas, únicamente representan los elementos que puedan causar las mayores desviaciones. Muchos de estos factores han tenido en las últimas décadas, una evolución importante. Al respecto se citan algunos ejemplos:

- Sobre todo en los países industrializados, la edad promedio de la población está aumentando.
- Es también un problema de ciertas carteras de seguros de enfermedad, los planes garantizados a largo plazo, ya que estos crean hoy serios problemas a las compañías que los tienen.
- El porcentaje de las mujeres que trabajan ha aumentado considerablemente, y por consiguiente, su adhesión al seguro de grupo.

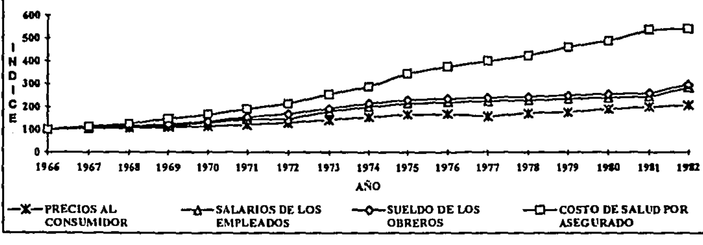
- El Seguro Privado de enfermedad sigue siendo relativamente caro y, por lo tanto, accesible sólo a ciertas categorías sociales. Sin embargo, existen en ocasiones compañías que, para ampliar su mercado, se dirigen también a clases más bajas y que tendrían entonces que considerar, para efectos de la frecuencia de siniestros, el ambiente socio-económico y cultural distinto en el cual se mueven los asegurados.

- Que los montos asegurados suban es una consecuencia normal del aumento del costo de salud.

Sin embargo, se observan cada vez más casos en los cuales el monto asegurado está muy por encima de lo que a primera vista parecería razonable. Esto implica la necesidad de un control más profundizado, por parte del asegurador, de la existencia de un interés asegurable real, para no abrir las puertas a todo tipo de especulación.

Por otro lado, la causa que mayor influencia tiene sobre el seguro de enfermedad, por lo menos en la gran mayoría de los países industrializados (y en algunos en vías de), es el rápido aumento del costo de salud que se está produciendo desde hace unos años. En las gráficas I, II y III se puede comparar el índice del costo de salud por asegurado, con el de los precios al consumidor en Suiza, Estados Unidos y México respectivamente.

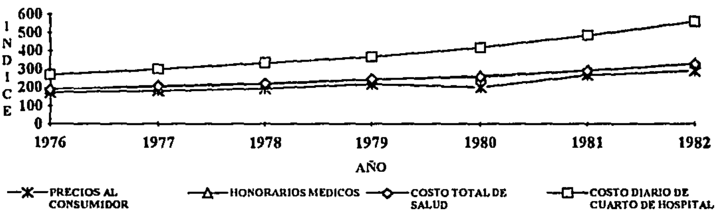
GRAFICA I
EVOLUCION DEL COSTO DE SALUD EN SUIZA



Entre los factores que no dependen directamente del sistema de salud, uno muy importante es sin duda el envejecimiento de la población.

Si la mortalidad está bajando progresivamente, ésto se debe en buena parte a los adelantos de la medicina. Gracias a mejores y mayores atenciones médicas, la población vive más tiempo y, por consiguiente, está también expuesta al riesgo de ulteriores enfermedades. La incidencia sobre el costo de salud (y sobre el Seguro de Enfermedad), es por lo tanto mayor. En lo que se refiere a la calidad de los servicios, la amplia información acerca de las nuevas técnicas y adelantos de la medicina, ha aumentado la conciencia en el público de las posibilidades que hoy se presentan. Es obvio, que en caso de enfermedad de la persona misma o de algún pariente cercano, todos se preocupan de conseguir el mejor tratamiento posible (aún si no es necesariamente el más económico), y si además no hay que pagar del propio bolsillo, sino que se puede acudir a algún seguro (estatal o privado).

GRAFICA II
EVOLUCION DEL COSTO DE SALUD EN LOS EE.UU.

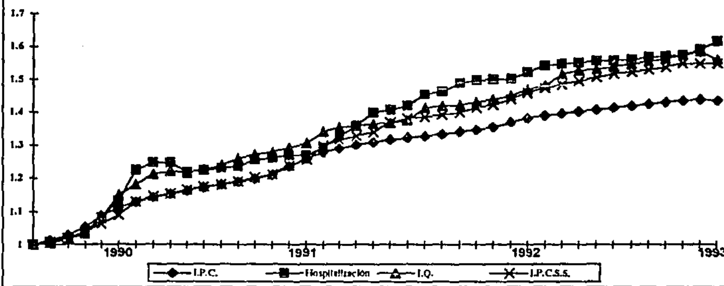


Otros factores que es conveniente observar sobre todo en la selección de los riesgos son:

- La evolución del estilo de vida (tabaco, alcohol, drogas) y el ritmo acelerado de la vida moderna, que sin duda es la causa del aumento considerable de malestares psíquicos.
- La aparición de nuevas enfermedades (AIDS/SIDA).
- **Finalmente, la propia existencia del Seguro de Enfermedad, al ofrecer a los pacientes la posibilidad de someterse a todo tipo de tratamientos, asumiendo ellos mismos directamente sólo una parte mínima del costo, quita un freno importante a la explosión de costos.**

Entre los factores que si dependen, directamente, del sistema de salud y que inciden en el aumento de los costos, los dos de mayor importancia son el desarrollo de la tecnología médica y el aumento del número de médicos.

GRAFICA III
EVOLUCION DEL COSTO DE SALUD EN MEXICO



Por un lado, se desarrollan constantemente nuevos aparatos e instrumentos, por el otro lado, aparecen nuevos medicamentos o preparados muy caros, o nuevas formas de tratamiento (por ejemplo, los trasplantes de órganos). Las inversiones necesarias son muy elevadas y los períodos de amortización de los equipos son cada vez más cortos en vista del constante desarrollo de nuevas generaciones de aparatos y productos. Además, el personal paramédico tiene que ser altamente calificado.

1.3
PROBLEMAS Y CONSECUENCIAS PARA LOS ASEGURADORES PRIVADOS

PROBLEMA GENERAL. Hasta el comienzo de los años 60, el Seguro de Enfermedad había dejado en general un margen razonable de beneficios a las compañías. La explosión del costo de salud en los años 70, aumentada por los beneficios, tomó desprevenidos a muchos aseguradores. Lo mismo ocurrió por otra parte, probablemente a consecuencia de la mayor facilidad de conseguir financiamiento por parte del estado y de cierta mayor lentitud burocrática en registrar la situación, al Seguro Social.

Los problemas que el Seguro de Enfermedad privado tiene que resolver, involucran todos los aspectos de su actividad: los productos, las coberturas, la organización interna (análisis y control) y el reaseguro.

1.3.1
LAS COBERTURAS

La evolución del riesgo de enfermedad y de su costo es tal, que a veces no hay incremento de tarifas que permita sostener el aumento de siniestros. Por consiguiente, se presenta el problema de modificar también la cobertura, limitando ciertos beneficios, con el fin de poder mantener una prima accesible a los clientes actuales o potenciales.

Es evidente, que hoy en día, ya no es posible vender pólizas de Seguro de Enfermedad a largo plazo con prima garantizada. Hasta ofrecer pólizas con renovación garantizada, pero con la posibilidad de modificar la tarifa resulta problemático; en efecto, podría ser también necesario cambiar una u otra de las limitaciones (Coaseguro, Deducible, Exclusiones, etc.).

Pero no son sólo las garantías de renovación las que causan problemas; el desarrollo de la tecnología médica, nuevas leyes o fallos judiciales, nuevas enfermedades, etc., hacen obsoletas ciertas condiciones previstas por el clausulado o hacen necesaria la inclusión de otras. Las condiciones generales y particulares de las pólizas, tienen que estar constantemente bajo control, para poderlas adaptar fácilmente a la nuevas circunstancias.

1.3.2
LAS TARIFAS

El constante y fuerte incremento del costo de las prestaciones, obliga, a las compañías a subir con mucha frecuencia sus tarifas. Sin embargo, esto no siempre resulta muy fácil: hay muchos paises, como Alemania, en los cuales, la autoridad de vigilancia obliga a los aseguradores, a someter anualmente un análisis detallado del costo de las prestaciones y a aumentar, en el plazo de 3 meses, **sus primas de riesgo tan pronto como los siniestros reales han superado los esperados en un 10%.**

A diferencia de la mayoría de los demás ramos, el mercado es muy sensible a cambios en las primas del seguro de enfermedad (como el de automóviles); cada aumento conlleva comentarios y protestas en los medios de información. Es evidente que las autoridades, para estos casos, son mucho más cautelosas en autorizar incrementos de tarifa. Y cuando por fin se ha conseguido, ya las nuevas primas arriesgan de ser insuficientes.

Los atrasos en adaptar las tarifas tienen a menudo la consecuencia de obligar a recuperar de una vez el ajuste correspondiente a varios años, lo que a su vez implica incrementos sustanciales. Esta medida puede hasta resultar contraproducente. En efecto, si bien es cierto que aumentos moderados de la tarifa pueden mejorar la cartera, al desalentar de cierta manera los riesgos malos de suscribir o renovar sus coberturas, incrementos sustanciales, sobre todo en relación con el promedio del mercado, pueden llevar al efecto de que sólo los riesgos con "predisposición a la enfermedad", queden asegurados o acepten asegurarse; los demás prefieren prescindir de un seguro que les parece caro.

Como observó W. Mahr. (refiriéndose al seguro en general): "Existe aparentemente, un nivel a partir del cual un aumento de la prima conlleva el riesgo de quedar con una tasa de siniestralidad todavía más alta". Es lo que ya ocurrió en los últimos años en ciertos seguros de enfermedad de grupo en EE.UU.

Existe todavia un tercer aspecto que considerar. Normalmente, al calcular la tarifa para pólizas que preven montos máximos, se parte de la idea que sólo una parte de los siniestros alcanzarán ese tope. Sin embargo, por efecto del aumento del costo de salud, se observa en la práctica que después de poco tiempo, ya todos los siniestros tienen que ser indemnizados por el monto máximo. Por consiguiente, las bases técnicas resultarán insuficientes.

1.3.3
EL REASEGURO

Originalmente, siendo los montos involucrados relativamente modestos y los resultados estables, la mayoría de las compañías consideraban que no necesitaban reaseguro, o sólo en casos muy excepcionales (grupos muy grandes). Otras compañías, temiendo los efectos de fluctuaciones en un ramo con primas relativamente elevadas (sobre todo en comparación con las primas del riesgo de vida), prefirieron buscar respaldo.

Al evolucionar la situación, los reaseguradores se vieron enfrentados con los mismos problemas que sus cedentes, pero agudizados por el hecho de que, contrariamente a los aseguradores directos no podían aprovechar o podían hacerlo sólo en medida mucho menor ciertas ventajas de liquidez y, sobre todo, los beneficios de inversión que el negocio deja. Además la cedente tiene muchas veces otros negocios del mismo cliente (por ejemplo, seguros de vida), que le da cierta compensación, pero que no son cedidos al reasegurador en la misma proporción (o no son cedidos del todo).

Al mismo tiempo, a consecuencia de los adelantos de la medicina acompañados por la explosión del costo de salud, el riesgo de siniestros potenciales muy elevados en cuanto a costo, se ha hecho más frecuente: montos máximos muy altos que, anteriormente, el asegurador otorgaba con cierta facilidad, convencido de que en la práctica no llegarían a presentarse nunca, se han transformado en posibilidades reales; por otra parte, también los clientes piden coberturas máximas cada vez más elevadas.

En EE.UU., topes de un millón de dólares que hasta hace poco parecían ficticios, ya les parecen insuficientes a ciertos clientes en el seguro de grupo.

Es un hecho que siniestros de $200,000 dólares o más son hoy en día frecuentes; (los niños prematuros, los hemofílicos, las víctimas de fuertes quemaduras, los trasplantes de órganos etc) y, por consiguiente, a las compañías que ofrecen coberturas con límites amplios se les presenta cada vez más el problema de encontrar un reaseguro que las proteja contra siniestros de esta importancia. Por otra parte, desde el punto de vista del reasegurador, surge inmediatamente la necesidad de tener datos estadísticos confiables, que reflejen la situación local, para determinar las bases técnicas de una cotización con base a una experiencia propia.

1.3.4
CONSECUENCIAS

Las consecuencias inmediatas de los problemas creados por la evolución del riesgo de enfermedad y de su costo, han sido cuantiosas pérdidas por parte de muchos aseguradores privados (y de sus reaseguradores).

Varios de los aseguradores "tradicionales" del ramo, en particular entre las compañías medianas y pequeñas, han decidido si no paralizar, por lo menos frenar sustancialmente la venta el Seguro de Enfermedad en general, o de ciertos planes. Otros han decidido restringir considerablemente sus coberturas. A nivel mundial, por el momento prácticamente nadie se ha lanzado con agresividad a los nuevos mercados abiertos por la actitud más restrictiva, o eventualmente la reducción de prestaciones del seguro social.

También los reaseguradores se han vuelto más exigentes, sobre todo en el mercado norteamericano, que a nivel mundial genera la gran mayoría del negocio ofrecido en reaseguro. Algunos reaseguradores norteamericanos casi han abandonado el negocio, o por lo menos ciertas líneas de él; en Londres, pérdidas cuantiosas han suscitado alarmas y varios sindicatos de la Lloyd's de Londres están reduciendo fuertemente sus compromisos; las colocaciones alternativas buscadas en el continente europeo, siguen sin encontrar entusiasmo entre los grandes reaseguradores profesionales.

En estas circunstancias, las compañías más dinámicas están buscando nuevos enfoques, para por un lado, poder responder a las exigencias del público y, al mismo tiempo, eliminar las causas de los problemas actuales. La solución no es fácil, debiéndose encontrar un justo equilibrio entre las necesidades de los clientes, prestaciones aseguradas y gastos adicionales creados por las exigencias de un análisis y control eficiente del negocio.

1.4
POLITICA GENERAL

Tradicionalmente, los aseguradores han mantenido una política fundamentalmente "defensiva" ante los aumentos de tarifa de los proveedores de los servicios de salud, los cuales tienen, como se mencionó antes, sólo un efecto moderado sobre el público en general y esto, a su vez, genera solamente reacciones moderadas. La carga de los aumentos recae sobre todo en la industria del seguro, cuya reacción tardía solía limitarse a un aumento de primas y a algún cambio en la pólizas, los cuales sin embargo, casi nunca han sido suficientes para poner bajo control la situación. Al contrario, las protestas populares muchas veces terminaban dirigiéndose contra los propios aseguradores y no contra los proveedores de los servicios de salud.

La actitud "nuestra tarea es pagar siniestros, no indicar a la industria de los servicios de salud como hacer su negocio", fortaleció naturalmente esta última, y hoy será muy dificil modificar unas relaciones de fuerza que quedaron sentadas hace años.

Otro aspecto al cual el mercado asegurador trata de dar mayor importancia en varios países, es la sensibilización de la Autoridad de Vigilancia sobre los problemas del Seguro de Enfermedad privado. Se trata en particular de convencer al organismo competente para que permita una mayor flexibilidad en las condiciones de la póliza y acelere las autorizaciones para ajustes de tarifa y clausulados. La evolución en el sistema de salud es mucho más rápida que, por ejemplo, en la mortalidad o en la probabilidad de incendio; por consiguiente, es indispensable que los aseguradores puedan reaccionar de inmediato e introducir a la mayor brevedad posible los ajustes que sean necesarios.

Se ha observado también, que el otorgar la cobertura durante estadías en el extranjero, ha llevado a especulaciones de diversos tipos (asegurados que han pretendido hacer un viaje de vacaciones o de negocios mientras que en realidad iban a someterse a un tratamiento médico, facturas emitidas en lugares lejanos por hospitales y/o médicos inexistentes, etc.). A estos problemas, se añade la fuerte fluctuación de las paridades monetarias: primas calculadas en moneda nacional a menudo no alcanzaban ni de lejos a cubrir los siniestros ocurridos en el extranjero. Por consiguiente, surge la tendencia de limitar el alcance territorial de la cobertura.

1.4.1
COBERTURAS

Un nuevo enfoque, es el de favorecer a los asegurados que demuestren ser sensibles a los aspectos económicos del tratamiento. Con este fin, están apareciendo productos que incluyen claúsulas de este tipo:

- Salvo en casos de emergencia, el asegurado pide la autorización de un médico designado por la compañía antes de internarse en un hospital.

- Antes de decidir someterse a una intervención quirúrgica, el asegurado pide la opinión de otro especialista ("second opinion"); a veces este segundo especialista tiene que ser escogido entre los que están incluidos en un listado preparado por la compañía, otras veces es de libre elección.

- El asegurado acepta tratarse sólo por médicos e internarse sólo en hospitales incluidos en un listado preparado por la compañía (plan hospitalario de gastos médicos).

Pólizas vendidas con estas cláusulas dan derecho a una rebaja de primas.

Otras medidas que se están tomando, tienen la finalidad de aumentar la participación del asegurado en el costo de los siniestros. La primera entre ellas es obviamente aumentar la importancia del coaseguro, ya sea para todas las coberturas de la póliza o bien para algunas coberturas importantes o adicionales.

Con respecto al deducible, se observa cada vez más la tendencia en vincular de alguna manera al aumento del costo de salud (o por lo menos a la inflación). Se trata de un deducible "indexado", que aumenta con cada movimiento en la inflación. Esta medida parece particularmente necesaria, no sólo o no tanto para reducir el costo del siniestro para el asegurador, sino sobre todo para reducir el gasto de gestión de siniestros; en efecto, con un deducible constante la evolución del costo de salud implica un aumento considerable del número de reclamos, por montos siempre menos importantes en términos reales, que llegan a la compañía.

1.4.2
ORGANIZACION INTERNA

Desde el punto de vista de organización interna, hay dos tendencias que sobresalen prácticamente en todas las compañías: el potenciamiento y la mayor especialización del personal encargado en el manejo de siniestros, y la creación de bases estadísticas que permitan un control eficiente del negocio y de su evolución.

Aunque en EE.UU. y Europa ya han surgido empresas especializadas en el control de los siniestros y que ofrecen sus servicios a los asegurados, en general en la América Latina, este fenómeno no se ha dado aún, por lo que queda la especialización, dentro de las compañías aseguradoras, del personal asignado a este efecto.

La creación de bases estadísticas confiables es sin duda facilitada hoy día por las computadoras; lo más importante es tener ideas muy claras en el momento de estructurar los programas y preveer una base de datos amplia.

Toda la información que no se haya dado de alta de inmediato, corre el riesgo de ser perdida irremediablemente .

CAPITULO II

INTRODUCCION A LOS PROCESOS ESTOCASTICOS

2.1
DEFINICION DE PROCESO ESTOCASTICO

Desde el siglo pasado ha habido un marcado cambio en el enfoque de los requerimientos científicos. Desde entonces se ha venido aceptando que en muchas situaciones los modelos probabilísticos describen mejor la realidad que los modelos determinísticos. Las observaciones tomadas en diferentes puntos del tiempo más que las tomadas en un período de tiempo fijo, empezaron a llamar la atención de los probabilistas. Muchos de los fenómenos que ocurren en diversas ciencias puras y aplicadas, son estudiados actualmente no solamente como un fenómeno aleatorio, sino además como un fenómeno aleatorio que cambia en el tiempo, en el espacio o en ambos. La teoría probabilística que surgió por las necesidades anteriores dió origen al concepto de Proceso Estocástico o Aleatorio, el cual definido desde el punto de vista común, simplemente es una familia de variables aleatorias que son funciones del tiempo. Definido formalmente es:

DEFINICION : Sea T un subconjunto de números reales, Ω un espacio muestral, **F** una σ-álgebra, **P** una medida de probabilidad y $(\Omega,F,P)_{t\in T}$ un espacio probabilístico, a las variables aleatorias indexadas con elementos de T.

$$X_t(w):\Omega \rightarrow E$$
$$w \in \Omega, t \in T \text{ y } E \subseteq R$$

se le conoce como un Proceso Estocástico.

Si T es un subconjunto continuo, al proceso se le denota como:

$$\{X(t); t \in T\}$$

Si T es discreto con elementos mayores o iguales que cero, se denota como:

$$\{X_t; t \geq 0\}$$

Obsérvese que si t_0 es fija, entonces se tiene solamente una variable aleatoria que es función de $w \in \Omega_{t_0}$ la cual es parte del espacio probabilístico $(\Omega_{t_0}, F_{t_0}, P_{t_0})$.

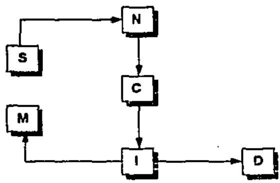
Ejemplo 2.1.- Sean X_t los recursos de una compañía de seguros en un tiempo t. Entonces X_t se incrementará con una rapidez aleatoria fluctuante pero estable a medida que entran las primas, sin embargo está sujeta a caídas súbitas cuando se presenten las reclamaciones.

Ejemplo 2.2.- Durante un proceso epidemial un sólo individuo infectado transmite una enfermedad mortal a toda una comunidad. Supóngase que durante un período, las personas infectadas no presentan síntomas y no son infecciosas. Después se convierten en portadoras y son infecciosas, pero aún no presentan los síntomas. Después de un período los portadores presentan los síntomas de la enfermedad y son aislados. Estas personas se curan y se vuelven inmunes, o bien, se mueren.

Sea M la clase de los miembros inmunes que hay en la comunidad; S, la clase de los propensos, es decir, la gente que corre el riesgo; N, los incubadores no infecciosos de la enfermedad; C, los portadores; I, los portadores que han sido aislados, y D, los fallecidos. Inicialmente, todos los miembros de la comunidad están en M o en S, excepto la única persona infectada que está en N o en C. Las posibles transiciones entre las clases sólo se efectúan de acuerdo con las flechas de la figura 2.1

Las variables aleatorias que interesan en este caso son los números en cada una de las clases en cada instante t. El progreso de la enfermedad dependerá del grado de inmunidad, la magnitud del contacto entre los portadores y los propensos, la rapidez con la que se detecten los portadores y la posibilidad de que se esté efectuando una cura. Los epidemiólogos usan la teoría de los Procesos Estocásticos para buscar las formas de influir en la rapidez de transición entre las clases.

FIGURA 2.1.



Ejemplo 2.3: Considérese el lanzamiento de un dado. Supóngase que X_n es el resultado del n-ésimo lanzamiento $n \geq 1$. Entonces $\{ X_n, n \geq 1 \}$ es una familia de variables aleatorias tal que para valores distintos de n se tiene la misma variable aleatoria X_n. En este caso:

$$(\Omega, F, P)_1 = (\Omega, F, P)_2 \qquad \text{y}$$

$$(\Omega, F, P)_n = (\Omega, F, P)_{n+s} \qquad n \text{ y } s \in T$$

donde:

el espacio muestral $\Omega = \{1,2,3,...,6\}$

la sigma álgebra $F = P(\Omega)$, conjunto potencia de Ω

la medida de probabilidad $P(A) = \dfrac{\# A}{\# \Omega}$ y $X_n(w) = w \quad \forall \ w \in \Omega$ y $n \in N$.

$\# \Omega$ y $\# A$ es la cardinalidad de Ω y A respectivamente.

EJEMPLO 2.4.- Consideremos nuevamente el lanzamiento de un dado, y supongamos ahora que X_n es el número de cuatros ocurridos en los primeros n lanzamientos, en este caso para valores distintos de n se tienen diferentes variables binomiales X_n; el conjunto $\{X_n ; n \geq 1\}$ es un proceso estocástico.

Observemos cómo es $(\Omega, F, P)_n$.

$$\Omega_1 = \{0,1\} \quad F_1 = P(\Omega_1) \text{ (conjunto potencia de } \Omega_1\text{)} \quad P_1(A) = \frac{\# A}{\# \Omega_1}, \; A \in P(\Omega_1)$$

$$\Omega_2 = \{0,1,2\} \quad F_2 = P(\Omega_2) \text{ (conjunto potencia de } \Omega_2\text{)} \quad P_2(A) = \frac{\# A}{\# \Omega_2}, \; A \in P(\Omega_2)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\Omega_n = \{0,..,n\} \quad F_n = P(\Omega_n) \text{ (conjunto potencia de } \Omega_n\text{)} \quad P_n(A) = \frac{\# A}{\# \Omega_n}, \; A \in P(\Omega_n)$$

$$X_n(w) = w \quad \forall \quad w \in \Omega \quad y \quad n \geq 1$$

Ejemplo 2.5: Considere un evento aleatorio que ocurre en el tiempo, como podría ser el número de pacientes que ingresan en un hospital al tiempo t. Si **X(t)** es la variable aleatoria que representa el número de pacientes que han ingresado en el intervalo **(0, t)**. El número de pacientes en un intervalo fijo es una variable aleatoria y la familia $\{X(t);\ x \in T\}$ constituye un proceso estocástico.

2.2
CLASIFICACION DE UN PROCESO ESTOCASTICO.

Sea $\{Xn, n \geq 1\}$ ó $\{X(t); x \in T\}$ es un proceso estocástico. Al conjunto en el cual se encuentran los valores posibles de cada **Xn** o **X(t)** se le conoce como el Espacio de Estados del proceso, el cual puede ser discreto o continuo.

Ejemplo 2.6: Si X_n es el número total de cuatros obtenidos en los n primeros lanzamientos de un dado, el conjunto de valores posibles de X_n es el conjunto finito de enteros no negativos $\{0,1,...,n\}$.
Aquí el Espacio de Estados es discreto. Obsérvese que el proceso puede ser representado como $X_n = Y_1+...+Y_n$, donde Y_i es una variable aleatoria que puede tomar valores de uno ó cero de acuerdo a si el i-ésimo lanzamiento resultó 4 o no, respectivamente.

Ejemplo 2.7: Consideremos a $X_n= Z_1+...+Z_n$, donde Z_i es una variable aleatoria continua que toma valores en el intervalo $[0,\infty)$, en este caso, el conjunto de valores posibles de X_n es también el intervalo $[0,\infty)$, por lo que el Espacio de Estados del proceso es continuo.

En los dos últimos ejemplos se supone que el parámetro n de X_n está restringido a los enteros no negativos $n=0,1,2,...$ Es decir, se considera el estado del sistema en distintos puntos discretos del tiempo solamente. La palabra tiempo se usa en un sentido muy general y puede denotar cualquier tipo de variable. En este caso el tiempo n denota el n-ésimo lanzamiento.

Por otro lado, también se puede visualizar a una familia de variables aleatorias $\{X_t, t \in T\}$ o $\{X(t); t \geq 1\}$ como un sistema o proceso cuyos estados están caracterizados en cada instante de un intervalo infinito ó finito. Es decir, el sistema está definido en un rango continuo de tiempo y se dice entonces que se tiene una familia de variables aleatorias en tiempo continuo o en Espacio Parametral continuo. Un proceso estocástico en tiempo continuo también puede tener espacio de estados continuo o discreto.

Ejemplo 2.8- Supóngase que **X(t)** representa el número de pacientes que ingresan en un hospital el intervalo de tiempo **(0, t)**. Aquí el Espacio de Estados es discreto, pero **X(t)** está definida en un rango continuo del tiempo. Si ahora **X(t)** representa la temperatura máxima en una ciudad determinada en el intervalo **(0, t)**, entonces es claro que el conjunto de valores posibles de **X(t)** es continuo. En este caso se tiene un proceso en tiempo continuo con espacio de estados continuo.

Ejemplo 2.9.- ¿ Cuál es el espacio parametral y el espacio de estados del proceso estocástico que mide la profundidad del mar en la posición X en el instante **t** ?.

La profundidad del mar se mide desde la cresta de la ola hacia abajo hasta el lecho del océano. Como las olas se propagan en todas direcciones, la profundidad en cualquier punto fijo **X** variará con el tiempo , haciendo caso omiso de todas la variaciones a gran escala como las mareas puede medirse la profundiad en cualquier instante **t**, y en cualquier posición **x**, de modo que el espacio parametral T es el conjunto de todas las **t** = **(t, X)** para las cuales $-\infty < \mathbf{t} < \infty$ y $\mathbf{X} \in \rho$ donde ρ es el conjunto de las referencias geográficas para todo el mar. Aquí **t** no es solamente el tiempo, sino una combinación de las coordenadas del tiempo y del espacio. El espacio de estados S es el conjunto de todos los valores que puede tomar la profundidad, de modo que **S=[0, ∞)** donde la profundidad es 0 cuando queda expuesto el lecho del océano y no existe límite para la altura que pueden alcanzar las olas, aunque es claro que no se formará una ola de altura infinita.

Por lo tanto, un proceso estocástico se puede clasificar de las siguientes cuatro maneras:

- En tiempo discreto con Espacio de Estados Discreto.
- En tiempo discreto con Espacio de Estados Continuo.
- En tiempo continuo con Espacio de Estado Continuo.
- En tiempo continuo con Espacio de Estados Discreto.

Cabe resaltar nuevamente que el **tiempo** en los procesos estocásticos no debe tomarse en el sentido absoluto de este concepto fisico. El concepto de tiempo en los Procesos Estocásticos puede representar cualquier tipo de variable.

La teoría de los procesos estocásticos está dirigida al estudio de las clasificaciones mencionadas anteriormente. Estas clasificaciones cubren una amplia gama de fenómenos que suceden en la vida real y cuya teoría nos permite dar respuesta a un gran número de interrogantes relacionadas con estos fenómenos.

2.3
PROCESOS ESTOCASTICOS ESTACIONARIOS

Sean $t_0, h \in T$ entonces si la función de distribución de las variables aleatorias X_{t0} y X_{t0+h} es la misma $\forall\, t_0, h$, es decir si:

$$F_{X_{t0}}(\lambda) = F_{X_{t0+h}}(\lambda),\ \lambda \in R$$

Se dice que el proceso es estacionario de orden 1.

Ahora consideremos a t_0, t_1, $h \in T$, si la función de distribución conjunta de los vectores aleatorios $[X_{t_0}, X_{t_1}]$ y $[X_{t_0+h}, X_{t_1+h}]$ es la misma $\forall\, t_0, t_1, h$ o sea que si:

$$F_{[Xt_0, Xt_1]}(\lambda_1, \lambda_2) = F_{[Xt0+h, Xt1+h]}(\lambda_1, \lambda_2) \quad \lambda_1, \lambda_2 \in R$$

Se dice que el proceso es estacionario de orden 2. La extensión al orden n es inmediata.

DEFINICION 2.3.1: Sea $\{X(t);\ t \in T\}$ un proceso estocástico. Si para arbitrarios $t_1,...,t_n$, $h \in T$, la distribución conjunta de los vectores aleatorios $[X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}]$ y $[X_{t_1+h}, \ldots, X_{t_n+h}]$ es la misma, es decir que si:

$$F_{[Xt_1,...,Xtn]}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = F_{[Xt_0+h,...,Xt_n+h]}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in R.$$

Se dice que el proceso es estacionario de orden n.

La estacionariedad de un proceso implica que la estructura probabilística de dicho proceso es invariante bajo traslaciones en el eje del tiempo. Muchos procesos encontrados en la práctica exhiben tal característica. Si la media del proceso $\{X(t); t \in T\}$ existe, entonces $E\{X(t)\}$ debe ser igual a $E\{X(t+h)\}$ $\forall$ **h**, de manera que la esperanza debe ser una constante **m** independiente de **t**. Sin perdida de generalidad se puede suponer que **m** es cero. Más aún, si la función de covarianza existe, denotada como **C(s, t)** ó $C_{s,t}$, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} C_{s,t,} &= \mathrm{cov}\{X(t), X(s)\} \\ &= E\{X(t)X(s)\} \\ &= E\{X(t+h)X(s+h)\} \\ &= E\{X(t-s)X(0)\} \end{aligned}$$

esto muestra que $C_{s,t}$ es una función de la diferencia t-s.

Muchas de las cuestiones importantes relacionadas con un proceso estocástico, se pueden contestar de manera adecuada, basándose solamente en el conocimiento de los dos primeros momentos del proceso. Esto da origen a otra noción de estacionariedad que requiere la existencia y estacionariedad de los momentos de primero y segundo orden.

DEFINICION 2.3.2: Un proceso estocástico $\{X(t);t \in T\}$ con el primero y segundo momento finitos, se dice que es débilmente estacionario si su media $E\{X(t)\}$ es independiente de **t** y su función de covarianza $C_{s,t}=E\{X(t)X(s)\}$ depende solamente de la diferencia **t-s**, $\forall$ **t**,s.
Un proceso que no es estacionario en cualquier sentido, se dice que es evolutivo.

Ejemplo 2.10. Sean X_n, $n \geq 1$ variables aleatorias no correlacionadas con media 0 y varianza 1. Entonces:

$$\begin{aligned} C_{n,m} &= \mathrm{cov}(X_{n,m}) \\ &= E(X_n X_m) \\ &= 0 \quad \text{si } m \geq n \\ &= 1 \quad \text{si } m = n \end{aligned}$$

por lo que $\{Xn;n \geq 1\}$ es débilmente estacionario ya que depende de la diferencia m - n.

Ejemplo 2.11. Considere el proceso $\{X(t); t \in T\}$ con:

$$P\{X(t)=n\}=\frac{e^{-at}(at)^n}{n!} \quad 0 < a, \quad n = 0,1,\ldots\ldots$$

Entonces, como la media y la varianza de una distribución de Poisson es igual al parámetro que identifica la distribución se tiene que:

$$E\{X(t)=n\} = at \text{ ; y}$$
$$Var\{X(t)\} = at$$

son funciones de t. Es decir el proceso es evolutivo porque la distribución del proceso depende de t.

Ejemplo 2.12 . Considere el siguiente proceso:

$$X(t)= A_1 + A_{2t}$$

donde A_1, A_2 son variables aleatorias independientes con $E(A_i)=a_i$ y $Var(A_i)=\sigma_i^2$, $i = 1,2$.

$$m(t) = E\{X(t)\}$$
$$= a_1 + a_2 t$$

$$E\{X(t)X(s)\}=E\{(A_1+A_2t)(A_1+A_2s)\}$$
$$= E(A_1^2) + (s+t)E(A_1 A_2) + tsE(A_2^2)$$
$$=\sigma_1^2 + a_1^2 + (s+t)\, a_1 a_2 + ts(\sigma_2^2 + a_2^2)$$

así:

$$E\{X(t)^2\}=\sigma_1^2 + a_1^2 + 2ta_1a_2 + t^2(\sigma_2^2 + a_2^2)$$
$$Var(X(t))=\sigma_1^2 + t^2\sigma_2^2 \qquad y$$
$$C(s,t)=\sigma_1^2 + st\,\sigma_2^2$$

El proceso es evolutivo ya que también depende de t.

2.4
FUNCION GENERATRIZ DE PROBABILIDADES

Definición 4.1. Supóngase que X es una variable aleatoria que asume valores no negativos 0,1,2,..., y que $P\{X = k\} = P_k$, $k = 0,1,2,...$ y $\sum p_k = 1$, con la sucesión de números reales p_1, p_2, ... y usando una variable S podemos definir a:

$$P(s)=p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + ...$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$$

Como esta serie converge en el intervalo $-1 \leq s \leq 1$, a **P(s)** se le conoce como la Función Generatriz de Probabilidades (f.g.p.) de la variable aleatoria X. Obsérvese que **P(1)=1** y que la primera y segunda derivada de **P(s)** están dadas por :

$$p'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k s^{k-1} \quad -1 < s < 1$$

$$p''(s) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) p_k s^{k-2} \quad -1 < s < 1$$

Por lo tanto la esperanza de X está dada por:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = p'(1)$$

$$Var(X) = p''(1) + p'(1) - [p'(1)]^2$$

Obsérvese por otro lado que $P(S) = E(S^X)$, y, que por lo tanto, es un caso especial de la función característica $E(e^{itx})$, haciendo $e^{it}=s$. De esta manera se pueden extender a la f.g.p. los resultados de la función característica. En particular el de la unicidad de la función característica o de la función generatriz de probabilidades.

Ejemplo 2.13. Distribución Poisson. Sea X una variable aleatoria Poisson con función de probabilidad:

$$P_k = \{X=k\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \qquad k = 0,1,\ldots$$

la función generatriz de probabilidades está dada por:

$$P(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} s^k$$
$$= e^{\lambda(s-1)}$$

Como $\qquad p'(s) = \lambda e^{\lambda(s-1)} \quad$ y $\quad p''(s) = \lambda^2 e^{\lambda(s-1)}$

entonces:

$$E(X) = \lambda \quad \text{y}$$
$$Var(X) = \lambda$$

Ejemplo 14. Sea X una variable aleatoria con f.g.p. P(s). La función generadora de probabilidades de la variable aleatoria Y=mx+n con m,n enteros y m≠0 está dada por:

$$\begin{aligned} P_y(s) &= E(s^y) \\ &= E(s^{mx+n}) \\ &= E(s^{mx}\, s^n) \\ &= s^n E(s^{mx}) \\ &= s^n P_x(s^m) \end{aligned}$$

Hasta ahora se ha finado el interés en el problema de encontrar P(s) para un conjunto de p_k's, sin embargo, existen muchas situaciones donde el problema que se presenta es al revés; determinar p_k dada una f.g.p. P(s). Se puede demostrar que:

$$p_k = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k P(s)}{ds^k}\right]_{s=n}$$

Los siguientes resultados se enuncian sin demostración.

Teorema 2.1. La f.g.p. de la suma de 2 variables aleatorias independientes X y Y es el producto de la f.g.p. de X y Y.

Teorema 2.2 La suma $S_n = X_n + \ldots + X_n$ de **n** variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, donde X_i tiene una f.g.p. **P(s)**, tiene una f.g.p. $\{P(s)\}^n$.

Ejemplo: Sea X_1, X_2 dos variables aleatorias independientes con distribución de Poisson y parámetros (medias) λ_1, λ_2 respectivamente. Para encontrar la distribución de la suma $Z=X_1+\ldots+X_2$:

La f.g.p. de X_i es $e^{\lambda_i(s-1)}$, $\quad$ i=1,2

Entonces la f.g.p. de Z es:

$$\prod_{i=1}^{2} e^{\lambda_i(s-1)}$$

Pero esta es la f.g.p. de una distribución de Poisson con parámetro $\lambda_1 + \lambda_2$, por lo que se concluye entonces que la suma de dos variables aleatorias Poisson independientes es una variable aleatoria Poisson.

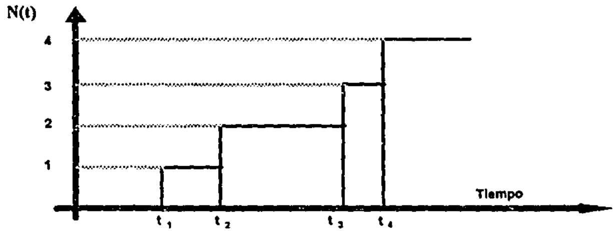
De manera más general, si X_i, i = 1, 2, 3, ... , n son n variables Poisson con parámetro λ_i, entonces la suma $S=X_1+X_2+,\ldots,+X_n$ es una variable Poisson con parámetro $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

CAPITULO III

PROCESOS ESTOCASTICOS DE POISSON

3.1.
DEFINICIONES

Los procesos de Poisson, se producen en aquellas situaciones donde el investigador está interesado, en el número total de ocurrencias de cierto evento de interés hasta el tiempo $t \geq 0$. Para fijar ideas, consideremos un evento **E** tal como el ingreso de pacientes a un hospital, la llegada de clientes a algún servicio o bien la ocurrencia de accidentes en un determinado lugar. Ahora, consideremos a **N(t)**, como el número de ocurrencias del evento **E** en un cierto intervalo de tiempo de duración **t**. Por ejemplo, si el evento **E** ocurre en los tiempos $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ entonces N(t) salta de 0 a 1 en t_1 de 1 a 2 en t_2 etc. Esto se puede representar gráficamente de la siguiente manera:



Los valores de **N(t)** dados, son valores observados de la variable aleatoria N(t) en un intervalo de duración **(0,t)**. La función es escalonada y con saltos de longitud 1.

Consideremos ahora a **P{N(t)=n}**. Es obvio que esta probabilidad es una función del tiempo y que los posibles valores de **n** son **{0,1,2,...}** para todo **t**, de tal manera que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P\{N(t) = n\} = 1$$

es decir, **P{N(t)=n}** representa la distribución de probabilidad de la variable aleatoria **N(t)** para cada valor de **t**. La familia **{N(t), t≥0}** de variables aleatorias es un proceso estocástico en tiempo continuo y espacio de estados discreto. Algunos autores llaman también al proceso **N(t)** como un proceso de conteo.

3.2. PROPIEDADES BASICAS DE LOS PROCESOS DE POISSON

Postulados de los Procesos de Poisson.

En seguida se establecen ciertas condiciones bajo las cuales N(t), sigue una distribución de Poisson con media λt. En el caso de muchos fenómenos empíricos, estas condiciones son aproximadamente ciertas y el correspondiente proceso estocástico $\{N(t)\}$ sigue una ley de distribución de Poisson.

I.- Independencia: N(t) (Número de ocurrencias del evento **E** en el intervalo **(0,t)**) es independiente del número de ocurrencias del evento **E** en un intervalo anterior al intervalo **(0,t)**. Es decir, futuros cambios en **N(t)** son independientes de cambios en el pasado. Este postulado se cumple estrictamente para Procesos de Poisson simples. Para Procesos de Poisson agrupados es fundamental la experiencia del investigador para demostrar la independencia.

II.- Homogeneidad en el tiempo: $P_n(t)=P\{N(t)=n\}$ depende sólo de la longitud **t** del intervalo y es independiente de donde esté situado este intervalo, $P_n(t)=P\{N(t)=n\}$ da la probabilidad del número de ocurrencias de **E** en el intervalo (t_1, t_1+t) (el cual es de longitud **t** para toda t_1).

III.- Regularidad: En un intervalo de longitud infinitesimal **h**, la probabilidad de exactamente una ocurrencia es $\lambda h + o(h)$ y de más de una ocurrencia es $o(h)$ la cual es usada como un símbolo para denotar una función de **h** que tiende a cero más rapidamente que **h** esto es:

$$\text{si } h \to 0, \quad \text{entonces } \frac{o(h)}{h} = 0$$

en otras palabras, si el intervalo entre **t** y **t+h** es de corta duración **h**, entonces:

$$p_1(h) = \lambda h + o(h)$$
$$p_k(h) = o(h), \qquad k \geq 2$$

donde:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(h) = 1$$

de lo anterior se sigue que:

$$p_0(h) = 1 - \lambda h + o(h)$$

Recordemos que una variable aleatoria $X:\Omega \to \{0,1,2,3,...\}$ se llama de Poisson con mediaλ, si la distribución de probabilidad de **X** está dada por:

$$P\{x = m\} = e^{-\lambda} \lambda / m! \quad m = 0,1,2,...$$

DEFINICION 3.2.3. Un proceso $\{X(t), t \geq 0\}$ se dice que es un proceso de Poisson con media **λ>0** si:

1) **X(0) = 0.**
2) **X(t) es un proceso con incrementos independientes.**
3) **El número de eventos en cualquier intervalo de longitud t, se distribuye Poisson con media λt, esto es, ∀ s, t ≥ 0:**

$$P\{X(t+s) - X(s)\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad k = 0,1,2,...$$

EJEMPLO 3.1.1. Supóngase que los clientes llegan a un banco de acuerdo a un proceso de Poisson con una media de λ clientes por minuto. Entonces el número de clientes **N(t)** que llegan en un intervalo de duración de **t** minutos sigue una distribución Poisson con media λt. Si λ es igual a 3 , entonces en un intervalo de 2 minutos, calcúlese la probabilidad de que el número de clientes que llegue sea:

a) Exactamente 4

$$P\{N(t+2)-N(t)=4\}=e^{-\lambda 2}\frac{\lambda 2^4}{4!}=e^{-6}\frac{6^4}{4!}=0.133$$

b) Mayor que 4

$$P\{N(t+2)-N(t)\geq 5\}=\sum_{k=5}^{\infty}e^{-6}\frac{6^k}{k!}=0.714$$

c) Menor que 4

$$P\{N(t+2)-N(t)\leq 3\}=\sum_{k=0}^{3}e^{-6}\frac{6^k}{k!}=0.152$$

TEOREMA 3.1.1. PARA UN PROCESO DE POISSON N(T), SI $t\to\infty$, ENTONCES:

$$P\left\{\left|\frac{N(t)}{t}-\lambda\right|\geq\varepsilon\right\}\to 0$$

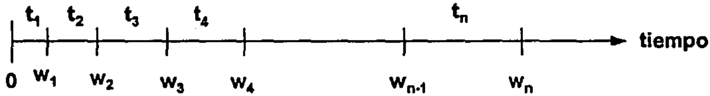
DONDE $\varepsilon>0$ ES UN NÚMERO ARBITRARIO PREASIGNADO.

EL TEOREMA ANTERIOR, NOS INDICA QUE SI t ES "MÁS O MENOS" GRANDE, ENTONCES UN ESTIMADOR DEL PARÁMETRO λ SERÍA EL NÚMERO DE EVENTOS QUE HAN OCURRIDO HASTA EL TIEMPO t, DIVIDIDO ENTRE EL TIEMPO t.

Es decir, si hasta t=3 años, se han observado 25 eventos entonces

$\hat{\lambda}=\dfrac{25}{3*365}$ **suponiendo que se mide en días.**

Considérese ahora el siguiente diagrama.



Aquí w_1, w_2,...representan los tiempos en que ocurrió, por primera, por segunda,...,por n-ésima vez el evento de interés **E**, respectivamente, y t_n denota el tiempo transcurrido entre la (**n- 1**) y n-ésima ocurrencia del evento E. En general a w_n se le conoce como el n-ésimo tiempo de ocurrencia o el tiempo de espera de la n-ésima ocurrencia del evento E. Mientras que a t_n se le conoce como el n-ésimo tiempo de inter-arribo. En seguida, se enuncian sin demostración algunos resultados importantes con respecto a las variables t_n y W_n.

TEOREMA 3.1.2. Sea $\{N(t), t \geq 0\}$ un proceso de Poisson, con parámetro λ y sea $\{t_n, t \geq 0\}$ una correspondiente sucesión de tiempos de inter-arribo sucesivos. Entonces las variables aleatorias t_n son independientes e idénticamente distribuidas obedeciendo a una ley de distribución Exponencial con media $1/\lambda$.

TEOREMA 3.1.3[1]. Sea $\{W_n, n \geq 1\}$ una sucesión de tiempos de ocurrencia sucesivos asociados con un proceso de Poisson $\{X(t), t \geq 0\}$. Entonces la función $f_{W_n}(t)$ de densidad de probabilidad del n-ésimo tiempo de ocurrencia $W_n, n \geq 1$ es la densidad Γ **(Gamma)** es decir:

$$f_{W_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

El teorema 3.1.2 se puede utilizar para predecir cuanto tiempo transcurrirá para que ocurra el evento E despues de la n-ésima ocurrencia, mientras que con el teorema 3.1.3 se puede predecir cuando ocurrirá.

1 PARA CONSULTAR LA DEMOSTRACION VER: J. MEDHI, "STOCHASTICS PROCESSES", PAG. 108

3.3. PROCESOS DE POISSON GENERALIZADOS

Existen varias direcciones en las que los procesos de Poisson se pueden generalizar.

3.3.1. Procesos de Poisson en dimensiones mayores.

Consideremos el caso en dos dimensiones, y sea $N(\Delta a)$ el número de ocurrencias del evento de interés en un elemento de área Δa, de manera que si Δa es pequeña y

$$P\{N(\Delta a) = 1\} = \lambda \Delta a + o(\Delta a)$$
$$P\{N(\Delta a) = k\} = o(\Delta a) \qquad k \geq 2.$$

Así, si el número de ocurrencias en áreas que no se traslapan son mutuamente independientes, el número de ocurrencias en un área de tamaño "a" será un proceso de Poisson con media λa. Aquí en lugar de una t-unidimensional, consideremos una "a" bidimensional. De manera similar se puede describir un proceso de Poisson en dimensiones de orden $k \geq 3$.

3.3.2. Procesos de Poisson Agrupados.

Hasta este momento se ha considerado que sólamente puede ocurrir un evento de interés en un instante. Ahora supongamos la posibilidad de que más de un evento puede ocurrir simultáneamente en un instante t_0 determinado, es decir, que en este caso se tiene un grupo de ocurrencias del evento de interés en un punto dado. Para esto se supone que:

1) El número $N(t)$ de grupos en los puntos en los cuales ocurren, constituyen un proceso de Poisson con media λ

2) Cada grupo tiene un número aleatorio de ocurrencias, esto es, si x_i denota el número de ocurrencias en el i-ésimo grupo, entonces x_i es una variable aleatoria.

Los números de ocurrencia en los diferentes grupos son mutuamente independientes y siguen la misma distribución de probabilidad. Es decir:

$$P\{x_i = k\} = P_k, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Como la variable aleatoria X_i es discreta, entonces se puede definir su función generatriz de probabilidades como:

$$P_{X_i}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k^k$$

TEOREMA 3.3.2.1. Si **M(t)** representa el número de ocurrencias en un intervalo de longitud **t** bajo las condiciones **(1)** y **(2)** anteriores, entonces la f.g.p. de **M(t)** esta dada por:

$$G_{m(t)}(s) = e^{\lambda t(p(s)-1)}$$

donde **p(s)** es la f.g.p. de la variable **Xi**.

Este tipo de procesos se producen por ejemplo, en la llegada de grupos de gentes a servicios como bancos, hoteles, hospitales etc. En realidad una gran variedad de problemas prácticos se pueden reducir a procesos de Poisson agrupados. Este tipo de procesos también son conocidos como procesos de Poisson Compuestos.

Ejemplo 3.3. Supóngase que las reclamaciones contra una compañía de seguros ocurre de acuerdo a un proceso de Poisson con media **λt** y que las reclamaciones individuales x_i son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con ley de distribución **$\{P_k\}$**, entonces **M(t)** representa el total de reclamaciones hasta el tiempo **t**. Si **A** representa la reserva inicial y **c** la tasa de crecimiento de la reserva en ausencia de reclamaciones, entonces el total de la reserva en el tiempo **t** es **A + ct + M(t)**, de tal manera que reservas negativas implican ruina de la compañía.

COROLARIO 3.3.2.1. Se tiene que si **M(t)** es un proceso de Poisson compuesto o agrupado entonces:

$$E(M(t)) = \lambda t E(x_i)$$
$$Var(M(t)) = \lambda t E(x_i^2).$$

Este resultado indica que la distribución de un proceso de Poisson agrupado es:

$$P\{X(t+s) - X(s)\} = e^{-\lambda t E(x_i)} \frac{[\lambda t E(x_i)]^k}{k!} \quad K = 0, 1, 2, \ldots$$

Ejemplo 3.4 . Una persona es suscriptora en una revista, el número de suscriptores sigue un proceso de Poisson con media 6 por día, los suscriptores pueden hacerlo por 1 o 2 años de manera independiente con probabilidades respectivas $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{3}$.

El número de suscriptores enlistados por la persona en un tiempo t - días es un proceso de Poisson con media **6t** : el número $N_1(t)$ de enlistados para un año de suscripción es un proceso de Poisson con media $6\frac{1}{3}t = 2t$

Si la persona recibe una comisión a por un año de suscripción y una comisión **b** por 2 años, entonces el total de comisión ganado en un periodo t está dado por:

$$X(t) = aN_1(t) + bN_2(t).$$

tenemos:

$$\begin{aligned} E\{X(t)\} &= aE\{N_1(t)\} + bE\{N_2(t)\} y \\ &= 4at + 2bt \end{aligned}$$
$$VarX(t) = 4a^2 + 2b^2 t.$$

el proceso $X(t) = aN_1(t) + bN_2(t)$ es una combinación de 2 procesos de Posisson independientes. El proceso puede también ser expresado como el proceso compuesto:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

donde X_i, el monto de comisión recibida de una suscripción es una variable aleatoria tal que $\Pr\{X_i = a\} = \frac{2}{3}$ y $\Pr\{X_i = b\} = \frac{1}{3}$

Ejemplo 3.5. Los clientes llegan a una tienda en grupos consistentes de 1 ó 2 individuos con igual probabilidad.

La llegada de los grupos es de acuerdo con un proceso de Poisson con media λ. Entonces:

$$P_k = P\{X_i = k\} = \frac{1}{2}, \quad K = 1, 2.$$
$$= 0 \quad \text{en cualquier otro caso.}$$

Si $n(t)$ es el total de clientes que llegan al tiempo t, entonces la f.g.p. de M(t) es:

$$G(s) = e^{\lambda t[\frac{1}{2}(s+s^2)-1]}$$

$$G'(s) = e^{\lambda t[\frac{1}{2}(1+2s)-1]}$$

3.3.3. Procesos de Poisson dependientes del tiempo.

En este caso se supone que λ no es constante y que depende determinísticamente del tiempo y se denota como $\lambda(t)$. En este caso se tiene que:

$$P\{N(h) = k\} = \lambda(t)h + o(h) \qquad , k = 1$$
$$= o(h) \qquad k \geq 2$$

y que no es otra cosa que la generalización de las probabilidades del proceso de Poisson, en el caso de λ constante. Estos procesos también son conocidos como procesos de Poisson no homogéneos, un teorema importante con respecto a estos procesos es el siguiente:

TEOREMA 3.3.3.1. La f.g.p. de un proceso no homogéneo **N(t)** esta dado por:

$$Q(s,t) = e^{m(t)(s-1)}$$

donde:

$$m(t) = \int_0^t \lambda(x)dx$$

COROLARIO 3.3.3.1. En un proceso no homogéneo, la probabilidad de no ocurrencia en un intervalo **(0,t)** es :

$$P(t) = Q(s,t) \Big|_{s=0}$$

$$e^{-m(t)} = e^{\int_0^t \lambda(x)dx}$$

y la probabilidad de exactamente **k** ocurrencias en un intervalo **(0,t)** está dada por:

$$P_k(t) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial s^k}Q(s,t) \Big|_{s=0}$$

$$= \frac{1}{k!}\left[m(t)^k e^{-m(t)}\right]$$

3.3.4. VARIACION ALEATORIA DE λ

Si además de no ser homogénea, se piensa que existe la influencia de factores aleatorios en el desarrollo del proceso, entonces alguna variación aleatoria se introduce en el parámetro λ del proceso **N(t)**

Si λ es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad $f(\lambda)$, $0 \le \lambda < \infty$ entonces la probabilidad de **n** ocurrencias en un intervalo de longitud **t**, está dada por:

$$P_n(t) = P\{N(t) = n\}$$

$$= \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} f(\lambda)\, d\lambda$$

Si λ varía de manera aleatoria con respecto al tiempo, es decir $\lambda = \lambda(t)$ es un proceso estocástico también. Un caso especial de interés se introduce cuando $\lambda(t)$ es un proceso estacionario. Estos tipos de procesos se conocen como procesos de Poisson Doblemente Estocásticos.

CAPITULO IV

PROYECCION Y CONTROL DE SINIESTROS DEL SEGURO DE ENFERMEDAD

4.1
ANALISIS DE LA BASE DE DATOS DE SINIESTROS DE UNA COMPAÑIA DEL MERCADO ASEGURADOR EN MEXICO

De acuerdo al capítulo I, los fuertes incrementos en las tarifas, provocan una reacción negativa en el mercado del Seguro de Enfermedad. Entre los factores causantes de esta inestabilidad, uno que en particular tiene una importancia fundamental, es el fenómeno de la siniestralidad, esto no sólo por el volumen de los montos reclamados, sino también por el número de las reclamaciones. Por lo tanto, un factor importante para lograr una estabilidad en las tarifas, es el adecuado control de los siniestros.

Esto no debe significar únicamente la vigilancia de que todos los siniestros que se paguen entren, efectivamente, dentro de las coberturas de la póliza o efectuar modificaciones en las condiciones generales para cubrir lo que en verdad sea un riesgo y no un evento cuya ocurrencia se preste a la especulación (como por ejemplo los embarazos), o cambios en los esquemas de los planes de manera que permitan negociaciones en las tarifas de los catálogos de intervenciones quirúrgicas con las sociedades médicas de los hospitales, como sucede con los planes hospitalarios, que a partir del año de 1992 se han venido a poner de moda en el mercado asegurador.

No obstante que las medidas anteriores son muy importantes, existe otra no menos importante que repercute de manera directa y es en la que se centra toda la atención para el desarrollo de este trabajo: **Anticiparse a los sucesos antes que estos ocurran mediante proyecciones a futuro a corto plazo.**

Esto puede lograrse aprovechando la información y la experiencia obtenidas en base a la observación de las tendencias de la siniestralidad en periodos anteriores proyectando la siniestralidad a un periodo corto inmediato de tiempo y con base en esta información efectuar ajustes en las tarifas antes de que los siniestros ocurran y repetir esta operación de manera constante para periodos de tiempo relativamente cortos, logrando así una retroalimentación, la cual permitirá verificar la exactitud de las inferencias y actualizar la información a partir de la cual se infiere.

Para lograr una vigilancia de la siniestralidad de una manera eficaz, tener argumentos contundentes y suficientes para un cambio de condiciones y/o coberturas, y lograr un análisis estadístico-técnico confiable, es necesario contar con una base de datos adecuada y actualizada.

La estructura propuesta, así como una descripción más detallada de la base de datos mencionada, se expone en el **ANEXO IVa.**

Por otro lado, para tener información que permita entre otras cosas anticiparse a la siniestralidad en diversos aspectos además de evaluar la eficacia de las medidas adoptadas para la disminución y/o control de ésta, es de importancia vital contar primero con una técnica probabilista y después con una estadística, que permita obtener y analizar esa información de manera confiable.

La información a la que se refiere el párrafo anterior, será la contenida en la base de datos propuesta, en cuanto a la técnica que permita la proyección y, por lo tanto, la anticipación a los sucesos, se desarrolla a continuación aprovechando la teoría expuesta en los capítulos II y III de este trabajo.

Con el fin de ilustrar las aplicación de los Procesos Estocásticos de Poisson (PEP), utilizaremos en un caso práctico la información de la base de datos de la cartera de siniestros de una compañía del mercado asegurador nacional a la cual denominaremos " **COMPAÑIA X**[1] **"**. Dicha información corresponde al período comprendido entre el 1o. de enero de 1991 y el 31 de octubre de 1991.

[1]La información utilizada es real. No se da el nombre de la aseguradora, por razones obvias.

4.1.1.
ANALISIS DE LA SINIESTRALIDAD DEL SEGURO DE ENFERMEDAD DE LA COMPAÑIA X

La frecuencia de reclamos por enfermedad, para el período anteriormente mencionado, se puede analizar en el siguiente cuadro.

CUADRO DE ANALISIS DE ENFERMEDADES SIGNIFICATIVAS								
CLAVE	NOMBRE	CASOS	%	RECLAMADO	%	SINIESTRO PROMEDIO POR ENF.	DESVIACION DEL SINIESTRO PROMEDIO GENERAL	% DESVIACION
16	ACCIDENTES.	2,155	34.58%	2,128,889,604	8.87%	987,884	(2,863,198)	0.00%
20	CESÁREA S/L DE SUMA ASEGURADA.	697	11.18%	4,336,919,974	18.07%	6,222,267	2,371,185	61.57%
32	TRATAMIENTOS DENTALES.	129	2.07%	253,538,072	1.06%	1,965,411	(1,885,670)	0.00%
34	ANGINAS ESTREPTOCOCICAS Y ESCARLATINA.	59	0.95%	215,360,637	0.90%	3,650,180	(200,901)	0.00%
38	ACCIDENTES CAP Y CAE.	592	9.50%	3,887,248,158	16.20%	6,566,298	2,715,216	70.51%
470	DESVIACION DEL TABIQUE NASAL.	73	1.17%	515,630,792	2.15%	7,063,436	3,212,354	83.41%
535	GASTRITIS Y DEUDONITIS.	84	1.35%	112,273,692	0.47%	1,336,592	(2,514,490)	0.00%
540	APENDICITIS AGUDA.	102	1.64%	712,679,728	2.97%	6,987,056	3,135,975	81.43%
629	OTROS TRASTORNOS ORGANOGENITALES FEMENINOS.	152	2.44%	1,065,513,461	4.44%	7,009,957	3,158,875	82.03%
650	PARTO EN CONDICIONES COMPLETAMENTE NORMALES.	72	1.16%	177,006,156	0.74%	2,458,419	(1,392,663)	0.00%
	OTRAS	2,117	33.97%	10,594,880,028	44.15%	5,004,667	1,153,585	29.95%
	TOTALES	6,232	100.00%	23,999,940,302	100.00%	3,851,082		

cuadro 4.1

En el cuadro 4.1 se pueden observar 10 de las 1000 enfermedades consideradas, según el catálogo de la oficina informadora de impedimentos (O.I.I.). En este 1%, se concentra el 66.04% del total del número de siniestros y el 55.87% del monto reclamado, lo cual significa que controlando el 1% de todas las enfermedades cubiertas, se controlaría más del 55% de toda la siniestralidad, tanto en monto reclamado como en número de siniestros.

Es oportuno señalar que controlar no significa evitar, sino tener conocimiento de los eventos o siniestros por ocurrir y planear acerca de las posibles repercusiones de estas enfermedades y tomar las medidas necesarias para que su impacto sea lo menos negativo posible para la compañía aseguradora.

Es claro que para el control de cada una de las enfermedades significativas del cuadro 4.1, las medidas a tomar en cada caso son diferentes y que involucran, inclusive, algunas modificaciones a las condiciones generales de las pólizas del Seguro de Enfermedad, esto sin embargo, va más alla de los alcances pretendidos en este trabajo.

En párrafos anteriores, hablamos de la importancia de una técnica estadística o probabilística que permita, entre otras cosas, proyectar el número de ocurrencias y tiempo entre cada ocurrencia (s) de un evento o siniestro en general y de una enfermedad en particular.

Para ilustrar la técnica probabilística denominada **PROCESOS ESTOCASTICOS DE POISSON** cuya teoría se presentó en los capítulos II y III, se eligió la enfermedad con clave de la O.I.I. 629 y denominada "**OTROS TRASTORNOS ORGANOGENITALES FEMENINOS**".

El **ANEXO IVb.**, presenta un análisis más detallado de la siniestralidad de esta enfermedad, y el **ANEXO IVc.** una justificación más formal del por qué se eligió ésta para ejemplificar la aplicación de los procesos estocásticos de Poisson.

4.2 VALIDACION DEL FENOMENO DE LA SINIESTRALIDAD COMO UN PROCESO ESTOCASTICO DE POISSON

Mostraremos a continuación que el fenómeno empírico de siniestralidad de la enfermedad "Otros trastornos órganogenitales femeninos" se puede modelar de acuerdo a un proceso estocástico de Poisson.

De acuerdo con los Postulados de los Procesos Estocásticos de Poisson, expuestos en el capítulo III y que a continuación reproducimos literalmente:

I) Independencia: N(t) (número de ocurrencias del evento E en el intervalo **(0,t)**) es independiente del número de ocurrencias del evento E en un intervalo anterior al intervalo **(0,t)**. Futuros cambios en N(t) son independientes de cambios en el pasado.

> ***El proceso analizado no es un proceso de Poisson simple, por tanto, para este caso en particular, se puede argumentar independencia observando, que por el tipo de fenómeno estudiado, las ocurrencias de éste en un período determinado de tiempo, nada tienen que ver con las ocurrencias en cualquier otro período, esto es, no es un grupo cerrado ni es una enfermedad contagiosa que pudiera sentar precedente en la incidencia de casos.***

II) Homogeneidad: $\mathbf{P_n(t)}$ depende solamente de la longitud t del intervalo y es independiente de donde está situado el intervalo.
$\mathbf{P_n(t)}$ da la probabilidad del número de ocurrencias de E en el intervalo (t_1, t_1+t) (el cual es de longitud t) para cada t_1.

> ***Observando las fechas de ocurrencia en la frecuencia de la siniestralidad de la enfermedad que nos ocupa, se puede constatar que tomando intervalos de longitud y ubicación aletoria, Pn(t) depende solamente del tamaño del intervalo, a continuación ejemplificamos:***

PERIODO	COBERTURA	LONGITUD	CASOS	$P_n(t)$
1	01-ENE, AL 10-ENERO	10 DIAS	6	0.600000000
2	15-ENE, AL 30-ENERO	15 DIAS	12	0.800000000
3	01- MAR, AL 30-MAR	30 DIAS	16	0.533333333
4	25-ABR, AL 25-MAY	31 DIAS	21	0.677419355
5	15-JUN, AL 25-JUL	40 DIAS	30	0.750000000
6	01- ENE, 31 OCT	304 DIAS	152	0.500000000

CUADRO 4.2

En el cuadro 4.2., podemos observar que tanto el número de ocurrencias, así como el valor de $P_n(t)$, para intervalos aletoriamente ubicados dentro del período de observación, y de longitud variable, sólo dependen del tamaño de dichos intervalos. Más aún, en el cuadro 4.4 (página 53) podemos observar que para un incremento fijo dentro del período de observación, el valor de $P_n(t)$ se mantiene constante, como lo muestra la gráfica 4.1.

II) Regularidad: En un intervalo de longitud infinitesimal h, la probabilidad de exactamente una ocurrencia es de $\lambda h + o(h)$ y que más de una ocurrencia es *o(h), o(h)* es usada como un símbolo para denotar una función de h, la cual tiende a 0 más rápidamente que h.
esto es:

$$h \to 0, \frac{o(h)}{h} = 0$$

donde:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(h) = 1.$$

de esto se sigue que:

$$p_{o(h)} = 1 - \lambda + o(h)$$

En un intervalo pequeño de tamaño h, la probabilidad de una ocurrencia es de λh *(el número de siniestros esperado) + o(h) (una probabilidad más pequeña que* λh *y que tiende a cero más rápido que ésta entre más pequeño sea el intervalo h) y más de una ocurrencia es o(h).*

Es decir en un intervalo pequeño, es más probable que ocurra un evento a que ocurra más de uno.

En nuestro ejemplo práctico, no se cuenta con intervalos de tiempo menores a un día, sin embargo esta propiedad puede ser justificada de la siguiente manera:

Refiriéndonos al Anexo IVb., cuando ocurre el evento, es más probable que ocurra un sólo caso a que ocurran más de uno, como se observa en el siguiente cuadro:

Número de ocurrencias más probable.									
x=1		x=2		x=3		x=4		x>4	
casos	p(x=1)	casos	p(x=2)	casos	p(x=3)	casos	p(x=4)	casos	p(x>4)
63	0.62	30	0.29	7	0.07	2	0.02	0	0

cuadro 4.3

donde:

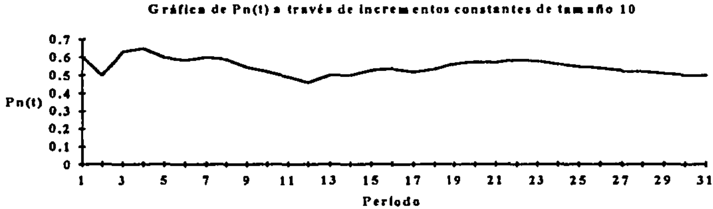
Casos:→ Es el número de casos en los cuales el suceso fue de tamaño x.

p(x=i):→ La probabilidad de que el número de eventos sea i (Suponiendo que la probabilidad de ocurrencia sea un evento cierto.)

Como se puede observar en el cuadro 4.3, la probabilidad del número de ocurrencias del evento es mayor para x=1 y menor mientras el tamaño crece. Para los fenómenos en los que se pudiera contar con un registro de suceso por intervalos más pequeños (horas, minutos, etc.) la forma ideal de demostrar esta propiedad, sería tomar intervalos de tiempo menores a la unidad que se elija.

PERIODO	COBERTURA	LONGITUD	CASOS	$P_R(t)$
1	DEL 01 AL 10 DE ENERO	10	6	0.600
2	DEL 11 AL 20 DE ENERO	10	4	0.500
3	DEL 21 AL 30 DE ENERO	10	9	0.633
4	DEL 31 DE ENE. AL 09 DE FEB.	10	7	0.650
5	DEL 10 AL 19 DE FEBRERO	10	4	0.600
6	DEL 20 DE FEB AL 01 DE MAR	10	5	0.583
7	DEL 02 AL 11 DE MARZO	10	7	0.600
8	DEL 12 AL 21 DE MARZO	10	5	0.588
9	DEL 22 DE MAR AL 31 DE MARZO	10	2	0.544
10	DEL 01 AL 09 DE ABRIL	10	3	0.520
11	DEL 10 AL 19 DE ABRIL	10	2	0.491
12	DEL 20 AL 29 DE ABRIL	10	1	0.458
13	DEL 30 DE ABR AL 9 DE MAY	10	10	0.500
14	DEL 10 AL 19 DE MAYO	10	5	0.500
15	DEL 20 AL 29 DE MAYO	10	9	0.527
16	DEL 30 DE MAY 8 DE JUN	10	7	0.538
17	DEL 09 AL 18 DE JUNIO	10	2	0.518
10	DEL 19 AL 28 DE JUNIO	10	8	0.533
10	DEL 29 DE JUN AL 8 DE JUL	10	11	0.563
20	DEL 09 AL 18 DE JULIO	10	8	0.575
21	DEL 19 AL 28 DE JULIO	10	5	0.571
22	DEL 29 DE JUL AL 8 DE AGO	10	9	0.586
23	DEL 9 AL 18 DE AGOSTO	10	4	0.578
24	DEL 19 AL 28 DE AGOSTO	10	2	0.563
25	DEL 29 AGO AL 7 DE SEP	10	2	0.548
26	DEL 08 AL 17 DE SEPTIEMBRE	10	3	0.538
27	DEL 18 AL 27 DE SEPTIEMBRE	10	2	0.526
28	DEL 28 SEP AL 07 DE OCT	10	4	0.521
29	DEL 08 AL 17 DE OCTUBRE	10	2	0.510
30	DEL 18 AL 27 DE OCTUBRE	10	2	0.500
31	DEL 28 AL 31 DE OCTUBRE	4	2	0.500

cuadro 4.4.



Gráfica 4.1

Por lo anterior se puede concluir, que no existe suficiente evidencia en los datos del evento de interés, para argumentar que los postulados del Proceso de Poisson no se cumplen.

4.3
PROYECCION DEL NUMERO DE SINIESTROS

4.3.1
OTROS TRASTORNOS ORGANOGENITALES FEMENINOS VISTO COMO UN PROCESO DE POISSON.

Empezaremos por definir el evento de interés. Sea E el evento definido como:

E = {Otros trastornos órganogenitales femeninos}

Y diremos que E ocurre cuando se dan las siguientes condiciones:

❶➢ El trastorno se diagnostica médicamente y
❷➢ Esto produce una reclamación a la compañía aseguradora **X**.

Con esta observación queda claro que los resultados aquí obtenidos serán únicamente válidos para aquella población que se compone por la cartera de la compañía X relacionada con el evento E. Para poder extenderlos a otra población es necesario investigar si las diferencias entre las poblaciones no afectan la ocurrencia del evento. Los datos acerca de las ocurrencias del evento E están disponibles por día, esto implica que la unidad de medida del tiempo es el día.

Al analizar los datos disponibles de la compañía aseguradora se observó que la ocurrencia del evento E es en grupos, es decir, que en los tiempos de ocurrencia ocurre más de un evento E.

Ahora bien, suponiendo que el proceso $\{N(t); t > 0\}$ es un proceso de Poisson agrupado, entonces, según el corolario 3.3.2.1 el número de ocurrencias del evento E en cualquier intervalo de longitud t, se distribuye Poisson con media $\lambda t \mu \ \forall \ t \geq 0$. Es decir que:

$$P\{N(t+s)-N(s)\} = e^{-\lambda t\mu}\frac{(\lambda t\mu)^k}{k!}, \quad k = 0,1,2,\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.2.1)$$

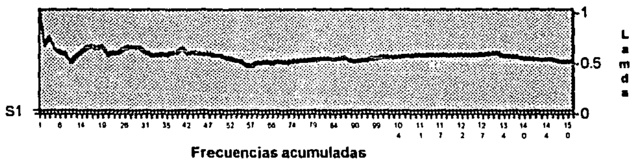
donde: λ es el parámetro del proceso.
t es la longitud del intervalo.
μ es la media del número de eventos en los tiempos de ocurrencia.
k es el número de ocurrencias del evento E en el intervalo de tiempo t.

Para tener completamente especificado el proceso, sólo falta determinar si el parámero λ es constante o depende del tiempo. Para esto, se tomaron aletoriamente diferentes números de días en el intervalo [0,354] y utilizando el resultado del teorema 3.2 se estimaron diferentes valores de λ (cuadro 4.4) se puede observar que el parámetro λ es constante a través del tiempo.

PERIODO	t	N(t)	λ
01 Ene. a 25 Ene.	25	16	0.64000000
01 Ene. a 30 Mar.	90	49	0.54444444
10 May. a 06 Jul.	27	18	0.66666667
07 Feb. a 30 Abr.	82	35	0.42682927
30 Ags a 02 Oct.	33	11	0.33333333
13 Mar. a 29 Jun.	108	53	0.49074074
13 Abr. a 29 Jun.	77	43	0.55844156
13 Mar. a 13 Abr.	31	10	0.32258065
13 Mar. a 13 Sep.	197	96	0.48730964

Cuadro 4.5

Gráfica del parámetro λ a través del tiempo.



FUENTE: CUADRO 4.5

Gráfica 4.2

En la figura se observa que a medida que el tiempo crece el valor de λ es constante. Esto implica que el proceso de Poisson es agrupado pero homogéneo, y, por lo tanto, la ecuación (4.2.1.) no se modifica.

4.3.2.
ESTIMACION DE PARAMETROS

En la ecuación (4.2.1) existen dos parámetros que es necesario estimar λ y μ.

Para estimar λ utilizamos nuevamente el resultado del teorema 3.2. Así se obtuvo lo siguiente:

$$\lambda' = \frac{N(t)}{t}$$

$$= \frac{152}{304}$$

$$= 0.5$$

La estimación de μ se hizo con base en lo siguiente:

$$\mu' = \frac{\sum x_i}{n}$$
$$= 1.5$$

donde:

x_i es el grupo de ocurrencias en el tiempo de ocurrencia i.
n es el número de tiempos de ocurrencia.

ESTIMACION DE N(T)

La estimación del número de eventos E que ocurrirán en diferentes períodos a futuro es de interés para la dirección de la compañía X, ya que le permitirá tomar mejores decisiones acerca de la optimización de recursos.

Antes de estimar el valor de N(t) calcularemos el tiempo de ocurrencia entre cada uno de los grupos de eventos E. Para esto nos apoyaremos en el teorema 3.2.1. según el cual:

El tiempo de inter-arribo tiene la siguiente distribución:

$$f(t_n) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda} t_n} \qquad t_n \geq 0, \quad \frac{1}{\lambda} = 2$$
$$= 0, \qquad \text{otro valor.}$$

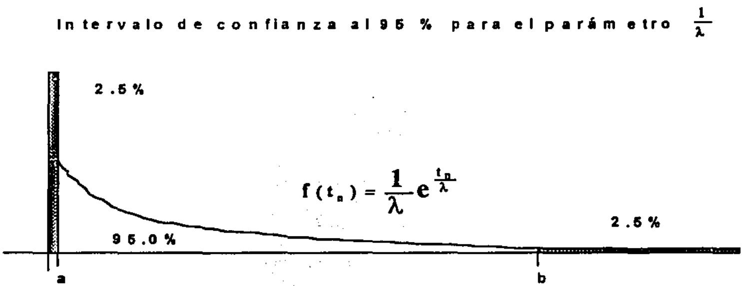
Para calcular el número de días que transcurren entre un siniestro y otro de la enfermedad en cuestión, creamos intervalos de confianza[2] al 95% de la siguiente manera:

$$P(a \leq t_n \leq b) = 0.95$$

es decir

$$P(a \leq t_n \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}t_n} dt_n \text{..........(4.2.2)}$$

La gráfica 4.2, representa el área bajo la curva que representa los intervalos de confianza mencionados:



Gráfica 4.3

[2]Para mayor información acerca de los intervalos de confianza, consultar:
INTRODUCCION A LA TEORIA DE LA ESTADISTICA: MOOD/GRAYBILL.
COLECCION AGUILAR (CIENCIA Y TECNICA), 1983.
CAPITULO 11.

de la ecuación 4.2.2, se deriva lo siguiente:

$$\mathbf{P(a \geq t_n) = \int_0^a \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{t_n}{\lambda}} dt_n = 0.025}$$

$$\mathbf{= -\int_0^a -\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{t_n}{\lambda}} dt_n = -e^{-\frac{t_n}{\lambda}}]_0^a = 0.025}$$

$$\mathbf{= -e^{-\frac{a}{\lambda}} + 1 = 0.025}$$

$$\mathbf{= e^{-\frac{a}{\lambda}} = 0.975}$$

$$\mathbf{\frac{a}{\lambda} = \ln(0.975)}$$

$$\mathbf{-\frac{a}{\lambda} = -0.0253}$$

$$\mathbf{a = -0.0253 * (-2)}$$

$$\mathbf{a = 0.0506}$$

$$\mathbf{P(b \leq t_n) = \int_b^\infty \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{t_n}{\lambda}} dt_n = 0.025}$$

$$\mathbf{= \lim_{z \to \infty} \int_b^z -\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{z}{\lambda}} dz = 0.025}$$

$$\mathbf{= \lim_{z \to \infty} -e^{-\frac{z}{\lambda}}]_b^\infty = 0.025}$$

$$\mathbf{= \lim_{z \to \infty} -e^{-\frac{\infty}{\lambda}} + e^{-\frac{b}{\lambda}} = 0.025}$$

$$\mathbf{= e^{-\frac{b}{\lambda}} = 0.025}$$

$$\mathbf{= -\frac{b}{\lambda} = -3.6888}$$

$$\mathbf{b = 1.844 \text{ días.}}$$

Es decir, con una confiabilidad del 95% el próximo grupo de eventos, ocurrirá en un intervalo entre los 0 y los 2 días .

Para verificar este resultado calculamos el complemento del área bajo la curva de la figura 4.1:

$$\mathbf{P(0.01265 \leq t_n \leq 1.8444) = \int_{1.8444}^{0.01265} \frac{1}{\lambda} e^{\frac{t_n}{\lambda}} dt_n}$$

$$= -e^{-\frac{t_n}{\lambda}} \Big]_{0.01265}^{1.8444}$$

$$= -e^{-\frac{1.8444}{0.5}} + e^{-\frac{0.01265}{0.5}} = \mathbf{0.95}$$

Tenemos ya, el número de días más probable entre grupos de eventos, calculamos a continuación el número de ocurrencias más probable en cada grupo:

Tenemos que la probabilidad de ocurrencia del número de casos **N(t)**, está dada por:

$$\mathbf{P\{N(t+s) - N(s)\} = e^{-\lambda t \mu} \frac{(\lambda t \mu)^k}{k!}} \quad \text{donde } k = 0,1,2,....$$

si t = 2, **N(t)**, se subordina a una distribución de probabilidades Poisson con parámetro **$t\lambda\mu$ = 1.5** donde:

$$\mathbf{t = 2}$$
$$\lambda = 0.5$$
$$\mu = 1.5$$

El problema consiste ahora en encontrar valores para **N(t)** que satisfagan lo siguiente:

$$\mathbf{P(a \le N(t) \le b) = \sum_{N(t)=a}^{b} e^{-1.5} \frac{(1.5)^{N(t)}}{N(t)!} = 0.95}$$

En tablas de la distribución acumulativa de Poisson con parámetro $\varphi = 1.5$ ($\varphi = \mathbf{t\lambda\mu}$) encontramos que:

$$\mathbf{P(0 \le N(t) \le 3) = \sum_{N(t)=0}^{3} e^{-1.5} \frac{(1.5)^{N(t)}}{N(t)!} = 0.934}$$

es decir, con un 93.4% de confiabilidad, en los próximos 2 dias ocurrirán entre 0 y 3 siniestros reclamados de la enfermedad denominada "Otros trastornos organogenitales femeninos".

4.4
RESULTADOS

Ahora, aplicando el procedimiento desarrollado en el apartado **4.2** es posible calcular las ocurrencias del evento E para diversos períodos de tiempo. Los resultados obtenidos se reflejan en el siguiente cuadro

Período	**t**	**φ**	**N(t)**	% de conf.
Del 1o. de noviembre de 1991 al 5 de enero de 1992.	66	49.5	[30, 66]	94.2
Del 1o. de enero al 29 de diciembre de 1992	363	275.25	[165, 363]	94.2

cuadro 4.6

Ahora bien, teniendo en cuenta los valores máximo y mínimo del intervalo en los que puede caer el verdadero valor de **N(t)** para el período de tiempo proyectado, se pueden tomar las decisiones correctas de manera más oportuna, tales como incrementos a las tarifas, modificaciones a las condiciones generales etc., las cuales serán siempre en beneficio tanto de la Compañía Aseguradora como de los mismos asegurados.

ANEXOS

ANEXO IVa.

ESTRUCTURA BASE DE DATOS CARTERA DE SINIESTROS

No.	DESCRIPCION DEL CAMPO	TIPO	ANCHO
1	NUMERO DE SINIESTRO	A	12
2	NUMERO DE POLIZA	A	9
3	FECHA INICIO DE VIGOR	F	8
4	FECHA FIN DE VIGOR	F	8
5	AGENTE (CLAVE)	A	6
6	CORREDOR (CLAVE)	A	6
7	ESTADO Y/O POBLACION	A	6
8	SEXO AFECTADO	A	1
9	TIPO DE TRAMITE	A	1
10	FECHA DE OCURRENCIA	F	8
11	FECHA DE ALTA DEL TRAMITE	F	8
12	CLAVE DE LA ENFERMEDAD	A	3
13	IMPORTE PAGADO	N	13
14	CLAVE DEL HOSPITAL	A	3
15	CAUSA DEL RECHAZO	A	15
16	IMPORTE DEL RECHAZO	N	13
17	IMPORTE DEL INVESTIGADOR	N	10
18	SUMA ASEGURADA	N	13
19	DEDUCIBLE	N	8
20	COASEGURO	N	2
21	EDAD DE INGRESO	N	2
22	EDAD DE RECLAMO	N	2
23	CLAVE DEL PLAN	A	3
24	CONSULTAS MEDICAS	N	2
25	TURNO DE ENFERMERA	N	2
26	CTO. Y ALIMTS. RECLAMADOS	N	10
27	HON. QUIR. RECLAMADOS	N	10
28	HON. DE ANES. RECLAMADOS	N	10
29	TRATAMIENTOS MEDICOS RECLAMADOS	N	10
30	VISITAS MEDICAS RECLAMADOS	N	10
31	HON. DE ENF. RECLAMADOS	N	10
32	CAMA EXTRA RECLAMADOS	N	10
33	ESTUDIOS DE GABINETE RECLAMADOS	N	10
34	ESTUDIOS DE LABORATORIO RECLAMADOS	N	10
35	APARATOS ORTOPEDICOS RECLAMADOS	N	10

CLAVES:

A: → ALFANUMERICO   F: →DE FECHA   N: → NUMERICO

ANEXO IVa.

ESTRUCTURA BASE DE DATOS CARTERA DE SINIESTROS

No.	DESCRIPCION DEL CAMPO	TIPO	ANCHO
36	PROTESIS RECLAMADOS	N	10
37	MEDICAMENTOS FUERA DEL HOSP. RECL.	N	10
38	AMBULANCIA TERRESTRE RECLAMADOS	N	10
39	AMBULANCIA AEREA RECLAMADOS	N	10
40	GASTOS EXTRAS RECLAMADOS	N	10
41	GASTOS NO CUBIERTOS RECLAMADOS	N	10
42	TOTAL RECLAMADO	N	10
43	CUARTO Y ALIMENTOS PAGADOS	N	10
44	HONORARIOS QUIRURGICOS PAGADOS	N	10
45	HONORARIOS ANESTESISTA PAGADOS	N	10
46	TRATAMIENTOS MEDICOS PAGADOS	N	10
47	VISITAS MEDICAS PAGADOS	N	10
48	HONORARIOS DE ENFERMERA PAGADOS	N	10
49	CAMA EXTRA PAGADOS	N	10
50	ESTUDIOS DE GABINETE PAGADOS	N	10
51	ESTUDIOS DE LABORATORIO PAGADOS	N	10
52	APARATOS ORTOPEDICOS PAGADOS	N	10
53	PROTESIS PAGADOS	N	10
54	MEDICAMENTOS FUERA DEL HOSP. PAG.	N	10
55	AMBULANCIA TERRESTRE PAGADOS	N	10
56	AMBULANCIA AEREA PAGADOS	N	10
57	GASTOS EXTRAS PAGADOS	N	10
58	GASTOS NO CUBIERTOS PAGADOS	N	10
59	TOTAL PAGADO	N	10
60	FECHA DE CHEQUE	F	8
61	NUMERO DE CHEQUE	A	6
62	IMPORTE DEL CHEQUE	N	13

CLAVES:

A: → ALFANUMERICO F: →DE FECHA N: → NUMERICO

ANEXO IVb.

FECHA DE OCURRENCIA DE SINIESTROS DE LA ENFERMEDAD DENOMINADA OTROS TRASTORNOS ORGANOGENITALES FEMENINOS Y CLAVE 629 DE LA O.I.I.

MES	DIA	AÑO	FRECUENCIA	FRECUENCIA ACUMULADA	%	% ACUMULADO
1	1	91	1	1	0.66%	0.66%
1	3	91	1	2	0.66%	1.32%
1	4	91	1	3	0.66%	1.97%
1	8	91	2	5	1.32%	3.29%
1	10	91	1	6	0.66%	3.95%
1	12	91	1	7	0.66%	4.61%
1	16	91	1	8	0.66%	5.26%
1	18	91	2	10	1.32%	6.58%
1	23	91	4	14	2.63%	9.21%
1	25	91	2	16	1.32%	10.53%
1	26	91	1	17	0.66%	11.18%
1	28	91	1	18	0.66%	11.84%
1	29	91	1	19	0.66%	12.50%
2	4	91	1	20	0.66%	13.16%
2	8	91	3	23	1.97%	15.13%
2	9	91	1	24	0.66%	15.79%
2	10	91	2	26	1.32%	17.11%
2	12	91	2	28	1.32%	18.42%
2	14	91	1	29	0.66%	19.08%
2	16	91	1	30	0.66%	19.74%
2	21	91	1	31	0.66%	20.39%
2	25	91	1	32	0.66%	21.05%
2	27	91	1	33	0.66%	21.71%
2	28	91	1	34	0.66%	22.37%
3	1	91	1	35	0.66%	23.03%
3	2	91	2	37	1.32%	24.34%

ANEXO IVb.

FECHA DE OCURRENCIA DE SINIESTROS DE LA ENFERMEDAD DENOMINADA OTROS TRASTORNOS ORGANOGENITALES FEMENINOS Y CLAVE 629 DE LA O.I.I.

MES	DIA	AÑO	FRECUENCIA	FRECUENCIA ACUMULADA	%	% ACUMULADO
3	4	91	1	38	0.66%	25.00%
3	6	91	2	40	1.32%	26.32%
3	11	91	2	42	1.32%	27.63%
3	12	91	1	43	0.66%	28.29%
3	15	91	1	44	0.66%	28.95%
3	18	91	1	45	0.66%	29.61%
3	20	91	2	47	1.32%	30.92%
3	25	91	1	48	0.66%	31.58%
3	27	91	1	49	0.66%	32.24%
4	1	91	1	50	0.66%	32.89%
4	6	91	2	52	1.32%	34.21%
4	12	91	1	53	0.66%	34.87%
4	16	91	1	54	0.66%	35.53%
4	25	91	1	55	0.66%	36.18%
5	2	91	2	57	1.32%	37.50%
5	4	91	4	61	2.63%	40.13%
5	6	91	2	63	1.32%	41.45%
5	9	91	2	65	1.32%	42.76%
5	14	91	1	66	0.66%	43.42%
5	16	91	3	69	1.97%	45.39%
5	18	91	1	70	0.66%	46.05%
5	23	91	1	71	0.66%	46.71%
5	24	91	3	74	1.97%	48.68%
5	25	91	1	75	0.66%	49.34%
5	27	91	1	76	0.66%	50.00%

ANEXO IVb.

FECHA DE OCURRENCIA DE SINIESTROS DE LA ENFERMEDAD DENOMINADA OTROS TRASTORNOS ORGANOGENITALES FEMENINOS Y CLAVE 629 DE LA O.I.I.

MES	DIA	AÑO	FRECUENCIA	FRECUENCIA ACUMULADA	%	% ACUMULADO
5	29	91	1	77	0.66%	50.66%
5	30	91	2	79	1.32%	51.97%
5	31	91	2	81	1.32%	53.29%
6	3	91	1	82	0.66%	53.95%
6	5	91	1	83	0.66%	54.61%
6	8	91	1	84	0.66%	55.26%
6	10	91	2	86	1.32%	56.58%
6	11	91	2	88	1.32%	57.89%
6	24	91	1	89	0.66%	58.55%
6	26	91	1	90	0.66%	59.21%
6	27	91	2	92	1.32%	60.53%
6	28	91	2	94	1.32%	61.84%
6	29	91	2	96	1.32%	63.16%
7	1	91	3	99	1.97%	65.13%
7	2	91	2	101	1.32%	66.45%
7	5	91	1	102	0.66%	67.11%
7	7	91	1	103	0.66%	67.76%
7	9	91	1	104	0.66%	68.42%
7	10	91	3	107	1.97%	70.39%
7	11	91	1	108	0.66%	71.05%
7	12	91	2	110	1.32%	72.37%
7	14	91	1	111	0.66%	73.03%
7	17	91	1	112	0.66%	73.68%
7	18	91	3	115	1.97%	75.66%
7	23	91	1	116	0.66%	76.32%

ANEXO IVb.

FECHA DE OCURRENCIA DE SINIESTROS DE LA ENFERMEDAD DENOMINADA OTROS TRASTORNOS ORGANOGENITALES FEMENINOS Y CLAVE 629 DE LA O.I.I.

MES	DIA	AÑO	FRECUENCIA	FRECUENCIA ACUMULADA	%	% ACUMULADO
7	24	91	1	117	0.66%	76.97%
7	25	91	1	118	0.66%	77.63%
7	28	91	1	119	0.66%	78.29%
7	30	91	1	120	0.66%	78.95%
7	31	91	2	122	1.32%	80.26%
8	2	91	1	123	0.66%	80.92%
8	6	91	1	124	0.66%	81.58%
8	7	91	1	125	0.66%	82.24%
8	8	91	2	127	1.32%	83.55%
8	9	91	2	129	1.32%	84.87%
8	10	91	1	130	0.66%	85.53%
8	14	91	3	133	1.97%	87.50%
8	26	91	1	134	0.66%	88.16%
8	28	91	1	135	0.66%	88.82%
9	4	91	2	137	1.32%	90.13%
9	11	91	2	139	1.32%	91.45%
9	16	91	1	140	0.66%	92.11%
9	20	91	1	141	0.66%	92.76%
9	27	91	1	142	0.66%	93.42%
9	29	91	1	143	0.66%	94.08%
9	30	91	1	144	0.66%	94.74%
10	3	91	2	146	1.32%	96.05%
10	14	91	2	148	1.32%	97.37%
10	24	91	1	149	0.66%	98.03%
10	25	91	1	150	0.66%	98.68%

ANEXO IVb.

FECHA DE OCURRENCIA DE SINIESTROS DE LA ENFERMEDAD DENOMINADA OTROS TRASTORNOS ORGANOGENITALES FEMENINOS Y CLAVE 629 DE LA O.I.I.

MES	DIA	AÑO	FRECUENCIA	FRECUENCIA ACUMULADA	%	% ACUMULADO
10	31	91	2	152	1.32%	100.00%
TOTALES			152		100.00%	

ANEXO IVc.

ANALISIS DE LA SINIESTRALIDAD DE LA ENFERMEDAD DENOMINADA "OTROS TRASTORNOS ORGANOGENITALES FEMENINOS"

✎❶ Haciendo referencia al cuadro 4.1, la enfermedad denominada "otros trastornos órgànogenitales femeninos", presenta el cuarto lugar de incidencia de todas la enfermedades, superada únicamente por accidentes, cesárea, accidentes cap y cae, aunado a que el promedio por siniestro de esta enfermedad es de N$7,009.96, (superada únicamente por la enfermedad con clave de la O.I.I. 470 "Desviación del tabique nasal"), es decir, el segundo lugar más caro de todos los siniestros promedio, presentando una desviación del 82.03% respecto del siniestro promedio general.

✎❷ Consideremos además que a esta enfermedad está expuesta sólo la mitad de la población de la cartera[1], aproximadamente, por lo que el riesgo es doblemente significativo.

EDAD	FRECUENCIA	PORCENTAJE	PORCENTAJE ACUMULADO
00 - 04	0	0.00000	0.00000
05 - 09	1	0.00657	0.00657
10 - 14	0	0.00000	0.00657
15 - 19	5	0.03289	0.03994
20 - 24	14	0.09210	0.13156
25 - 29	22	0.14473	0.27629
30 - 34	31	0.20394	0.48023
35 - 39	30	0.19736	0.67759
40 - 44	19	0.12500	0.80259
45 - 49	17	0.11184	0.91443
50 - 54	7	0.04605	0.96048
55 - 59	3	0.01973	0.98021
60 - 64	1	0.00658	0.98679
65 - 69	2	0.01315	0.99994
TOTAL	152	1.00000	

[1] LA DISTRIBUCION DE LA CARTERA PARA EL PERIODO CONSIDERADO FUE LA SIGUIENTE:
HOMBRES → 51.00% MUJERES→ 49.00%

ANEXO IVc.

ANALISIS DE LA SINIESTRALIDAD DE LA ENFERMEDAD DENOMINADA "OTROS TRASTORNOS ORGANOGENITALES FEMENINOS"

✎❸ Es importante observar (cuadro VIc.1), que las probabilidades de padecimiento de esta enfermedad son muy altas en edades entre el rango de 20 a 49 años, de hecho, entre estas edades, se acumula el 87.5% del total de las reclamaciones.

✎❹ Del cuadro VIc.1, graficamos las frecuencias acumuladas (figura VIc.1).

Un trabajo interesante, sería aquél que encontrara la función de probabilidad de cada una de las enfermedades más significativas para una cartera de siniestros dada. Queda abierta pues la posibilidad para otro trabajo de investigación, bastante interesante y por demás útil para el análisis de la siniestralidad, considerando la importancia de las distribuciones de probabilidad dentro de la aplicación futura en el campo de los seguros.

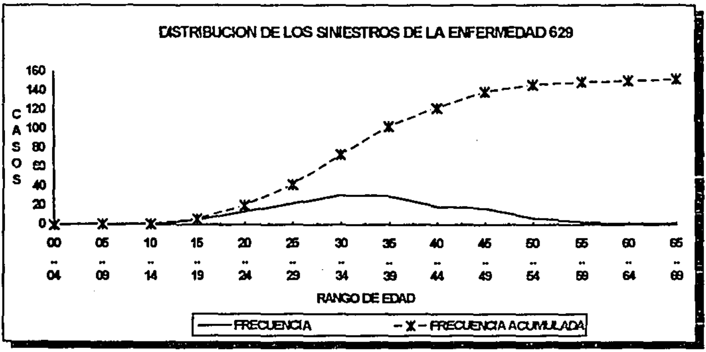


FIGURA IVc.1

ANEXO IVc.

ANALISIS DE LA SINIESTRALIDAD DE LA ENFERMEDAD DENOMINADA "OTROS TRASTORNOS ORGANOGENITALES FEMENINOS"

Por los puntos anteriores, se considera que la incidencia de siniestros reclamados debido a esta enfermedad, dentro de la cartera de la compañía X, es una muestra altamente significativa por lo que será sumamente ilustrativo ejemplificar la técnica de análisis desarrollada anteriormente con la misma.

CONCLUSIONES

De acuerdo con la realidad actual del Seguro de Enfermedad, existen fundamentalmente las siguientes prioridades:

❶ CORREGIR LA IMAGEN DE UNA INDUSTRIA ASEGURADORA "PASIVA" EN EL AMBIENTE CAMBIANTE DE LOS SERVICIOS DE SALUD, TOMANDO UNA POSICIÓN MÁS ACTIVA Y DINÁMICA FRENTE A LA OPINIÓN PÚBLICA Y A LAS AUTORIDADES.

Actualmente la industria aseguradora del país, ha tenido a bien sacar al mercado "Planes Hospitalarios" de los Seguros de Enfermedad, como son el caso de:

Línea Azul Hospitalaria (Grupo Nacional Provincial).

SEGUROS MONTERREY **Médical (Seguros Monterrey).**

SEGUROS AMERICA **Medamérica (Seguros América).**

Estos planes, dentro de sus múltiples características cuentan, para un correcto funcionamiento tanto de suficiencia de primas como de excelencia en el servicio, con convenios con las sociedades médicas de los hospitales seleccionados por las aseguradoras para constituir su red de prestadores de servicios, a fin de fijar tarifas por tratamientos médicos y/o quirúrgicos y hospitalizaciones, frenando de esta manera, los abusos por parte de algunos médicos hacia pacientes con algún tipo de Seguro de Enfermedad.

Los convenios y las formas de operar de las redes de hospitales y médicos, requieren una explicación extensa, por lo que no se expondrá en este trabajo.

Basta decir que la industria aseguradora ha comenzado a dejar atrás ese papel pasivo ante la evolución de los servicios médicos y que está tomando, cada vez con más fuerza, un papel participativo no sólo en éstos sino además en servicios de ambulancia aérea y terrestre, servicios funerarios, etc.

Esta posición comienza a dejar sentir sus efectos. Para las aseguradoras en sus estados de resultados finales y a mediano plazo se verá en las tarifas, beneficiando así al público consumidor.

❷ REAJUSTAR LAS COBERTURAS A LA REALIDAD ACTUAL DE LAS INDUSTRIA DE LOS SERVICIOS DE SALUD.

Dada la rapidez con la que evolucionan los servicios de salud, el otorgar ciertas condiciones de aseguramiento como son coberturas vitalicias o mayores a un año, hacen que las estimaciones de tarifas, ligadas siempre a la inflación sean insuficientes para hacer frente a las reclamaciones futuras, y más todavía para esperar un resultado técnico favorable a las aseguradoras.

También la evolución de la vida moderna (contaminación, estress, etc.) y la aparición de nuevas enfermedades (S.I.D.A.) y proliferación de otras (Cáncer en diversas manifestaciones) que antes eran poco representativas deban tener una atención especial y su cobertura se deba sujetar a períodos de espera apropiados a cada una de éstas.

Tal es el caso de la enfermedad analizada como ejemplo en este trabajo (Otros trastornos órganogenitales femeninos), la cual dado el impacto que tiene en la cartera de siniestros de la compañía "X" sería aconsejable establecer un período de espera de 10 meses[1] y eliminar cualquier posibilidad de cubrir preexistencia en este tipo de padecimientos, de esta manera, se estarían asegurando riesgos y no eventos ciertos.

[1]Según estimaciones de la Dra. Susana González del cuerpo médico de La compañía "X" del departamento de siniestros.

✎❸ REMEDIAR LAS INSUFICIENCIAS EN EL ANÁLISIS Y CONTROL DEL NEGOCIO POR LA PROPIA ORGANIZACIÓN INTERNA.

Actualmente, la industria aseguradora hace poca (y en ocasiones ninguna) aplicación de ciencias de la estadística, la probabilidad, la I. de O. y aún de la Informática, para el análisis y/o control de sus operaciones en las diferentes áreas que la conforman.

El análisis de la siniestralidad debido a la enfermedad denominada "Otros trastornos organogenitales femeninos" llevado a cabo en este trabajo, sólo ha sido un ejemplo de la aplicación de los Procesos Estocásticos de Poisson, sin embargo, para un control más apropiado de la siniestralidad se deberá analizar cada una de las enfermedades significativas del cuadro 4.1 en particular para la cartera de la compañía "X", o las que resultasen serlo en un análisis similar de la cartera de cualquier otra compañía aseguradora.

El análisis al que nos referimos en el párrafo anterior, no necesariamente debe ser por medio de los Procesos Estocásticos de Poisson, debe involucrar la aplicación y la investigación dentro de otras ramas como son:

- 🕮 Análisis de regresión,
- 🕮 Procesos estocásticos en general,
- 🕮 Series de tiempo,
- 🕮 Investigación de operaciones,
- 🕮 Muestreo,
- 🕮 Probabilidad y Estadística, etc.

No obstante que este trabajo se apoyó en el ramo del Seguro de Enfermedad para gran parte de su desarrollo y análisis, la teoría de los Procesos Estocásticos en general y los de Poisson en particular es aplicable a cualquier ramo del seguro, es decir:

- 🗁 Vida
- 🗁 Autos
- 🗁 Daños, etc.

y no únicamente al análisis de siniestralidad sino a todos los fenómenos que impliquen un comportamiento aleatorio a través del tiempo, como son cálculos de pleno de retención, ingreso de primas, tendencias de siniestralidad, etc.

No se debe hacer caso omiso de las ciencias de la informática para formar y actualizar bases de datos con toda la información derivada de la operación de la Compañía Aseguradora, no sabemos en que momento ni para que se pueda requerir en el futuro ante el avance de la ciencia y la tecnología.

➷❶ CONTENER LA EXPLOSIÓN DE LOS COSTOS DE LOS SINIESTROS Y PROTEGERSE CONTRA LOS SINIESTROS MÁS GRANDES.

Antes de contener la explosión de los siniestros más representativos, se debe identificar cuales son y más importante todavía, anticiparse a su ocurrencia para poder protegerese con oportunidad y eficacia.

ESTE HA SIDO EL OBJETIVO DEL PRESENTE TRABAJO.

Teniendo identificados la siniestralidad más fuerte y con más incidencia (a partir de la clasificación de las enfermedades), y teniendo una técnica adecuada para anticiparnos a su ocurrencia, se pueden tomar las medidas necesarias para reducir su impacto, tanto en las tarifas como en los resultados técnicos de las empresas.

Tomando en consideración que la tarifa en el Seguro de Enfermedad tiene su primicia en lo siguiente:

$$pts = \frac{rs}{es} * f$$

donde:

pts = Prima de tarifa por sexo y por quinquenio de edad.
rs = Reclamado por sexo y por quinquenio de edad.
es = Expuestos por sexo y por quinquenio de edad.

f = Factor que involucra diversos aspectos como son recargo por desviación, inflación estimada para el siguiente período, etc.

y dependiendo de las medidas adoptadas por la dirección de la aseguradora, respecto del control anticipado de los siniestros futuros es claro que la tarifa del seguro puede ser reducida beneficiando así al público consumidor.

Anticiparse a la siniestralidad y tomar las medidas adecuadas para hacer que ésta disminuya, es también benéfico para la empresa y para los agentes, en el sentido de ahorro de recursos que se utilizan para su administración y control.

México, D.F., Noviembre de 1993

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

SUIZA DE REASEGUROS. (1991) ENFOQUES ACTUALES DEL SEGURO DE ENFERMEDAD EN EL MUNDO.
PUBLICADO POR LA COMPAÑIA **SUIZA DE REASEGUROS.**
IMPRESO EN SUIZA.

INSTITUTE OF ACTUARIES. (1988). JOURNAL OF THE INSTITUTE OF ACTUARIES VOL. 115 PART II.
THE ALDEN PRESS.
OXFORD. ENGLAND.
PRINTED IN U.K.

GREENE - TRIESCHMANN. (1981) RISK AND INSURANCE.
SOUTH-WESTERN PUBLISHING CO.
PRINTED IN U.S.A.

ARTHUR WILLIAMS Jr. (1987) RISK MANAGEMENT AND INSURANCE.
McGRAW-HILL INTERNATIONALS EDITIONS.
PRINTED IN U.S.A.

RODNEY COLEMAN. (1986) PROCESOS ESTOCASTICOS.
EDITORIAL LIMUSA.
IMPRESO EN MEXICO.

J. MEDHI. (1985) STOCHASTIC PROCESSES.
JHON WILEY & SONS.
PRINTED IN U.S.A.

BRUCE CLARKE. (1985) PROBABILITY AND RANDOM PROCESSES A FIRST COURSE WITH APLICATIONS. JHON WILEY & SONS. PRINTED IN U.S.A.

MOOD / GRAYBILL. (1980) INTRODUCCION A LA TEORIA DE LA ESTADISTICA. COLECCION CIENCIA Y TECNICA AGUILAR. IMPRESO EN ESPAÑA.

WILLIAM MENDENHALL. (1986) ESTADISTICA MATEMATICA CON APLICACIONES. GRUPO EDITORIAL IBEROAMERICA. IMPRESO EN MEXICO.

PAUL L. MEYER (1986) PROBABILIDAD Y APLICACIONES ESTADISTICAS. SITESA. IMPRESO EN MEXICO.

DAMODAR GUJARATI (1992) ESSENTIALES OF ECONOMETRICS. McGRAW-HILL INTERNATIONALS EDITIONS. PRINTED IN U.S.A.