

01162  
2  
20)

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

DEPARTAMENTO DE POSGRADO FACULTAD DE INGENIERIA

"INVESTIGACION EXPERIMENTAL DEL VORTICE LIBRE"

Tesis profesional que para obtener el título de

MAESTRO EN INGENIERIA

presenta

el ING. EDWARD MCCANN SMYTH

México D.F., enero 1994.

TERMINA CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## CONTENIDO

### 1. Introducción.

### 2. Generalidades.

#### 2.1 Nomenclatura.

#### 2.2 Efectos prácticos de los vórtices.

#### 2.3 Clasificación de los vórtices.

#### 2.4 Métodos de diseño.

### 3. Bases teóricas.

#### 3.1 Definiciones de términos.

#### 3.2 Las ecuaciones gobernantes.

#### 3.3 El régimen del flujo: turbulento o laminar.

#### 3.4 La forma escalar de las ecuaciones gobernantes.

#### 3.5 Las ecuaciones gobernantes en términos del vector vorticidad.

#### 3.6 La convección de vorticidad.

#### 3.7 Difusión de vorticidad.

#### 3.8 El estado de equilibrio en la distribución de vorticidad.

#### 3.9 La ley de Thompson.

#### 3.10 El principio de conservación de vorticidad.

#### 3.11 El teorema de Kelvin.

#### 3.12 Las leyes de vorticidad de Helmholtz.

### 4. Modelos matemáticos.

#### 4.1 Generalidades.

#### 4.2 Modelos bidimensionales simples.

#### 4.2.1 Simplificaciones de las ecuaciones gobernantes.

#### 4.2.2 El vórtice irrotacional.

#### 4.2.3 El vórtice forzado.

#### 4.3 El vórtice de Einstein-Li.

#### 4.4 El vórtice de Woodford.

#### 4.5 El modelo de Lewellen para un vórtice con circulación fuerte.

4.6 El modelo de Granger.

4.7 El vórtice tridimensional de Levi.

5. El problema físico.

5.1 Generalidades.

5.2. El vórtice como un fenómeno de la cantidad de movimiento angular.

5.3 La entrada y salida de cantidad de movimiento angular al sistema.

5.4 Transporte de la cantidad de movimiento angular.

5.5 Estado de equilibrio.

5.6 La causa de la depresión de la superficie asociada con vórtices intensos.

5.7 La sumergencia crítica para la formación de un vórtice.

5.8 El efecto de aumentar la rugosidad de las fronteras en la formación de vórtices.

5.9 Un modelo cualitativo del desarrollo del vórtice cuando aumenta la circulación.

6. Modelos físicos.

6.1 Los objetivos.

6.2 Semejanza dinámica.

6.3 Los criterios de escala.

6.4 Parámetros del flujo adimensionales.

6.5 La elección de parámetros adimensionales.

6.6 El uso del criterio de Froude en modelos de vórtices.

7. Método experimental.

7.1 Objetivos experimentales.

7.1.1 Cualitativos.

7.1.2 Cuantitativo.

7.2 Equipo experimental.

7.3 Método experimental.

7.3.1 Cualitativo.

7.3.2 Cuantitativo.

8. Distribución de flujo en la región del núcleo del vórtice.

8.1 La existencia de dos flujos principales.

8.2 La importancia del flujo del núcleo del vórtice.

8.3 Demostración de la dependencia de los dos flujos.

8.4 Determinación de las magnitudes relativas de los dos gastos.

8.5 Terminación del flujo en el tubo central con el desarrollo del núcleo de aire.

8.6 Origen del flujo en el núcleo del vórtice.

8.7 Las implicaciones de la existencia de dos zonas de flujo al modelar los vórtices.

9. Flujos secundarios.

9.1 Existencia de flujos secundarios.

9.2 La formación de estructuras de flujos secundarios.

9.3 El carácter circular de las estructuras.

9.4 Movimiento vertical asociado con las estructuras.

9.5 Estado final de las estructuras.

9.6 Ocurrencia y persistencia de las estructuras.

9.7 La existencia de flujo vertical, ascendente.

9.8 Origen de las estructuras.

10. Evidencia para la existencia del vórtice tridimensional.

11. Fenómeno de la deformación o separación periódica del núcleo de aire.

11.1 Ocurrencia del fenómeno.

11.2 Desarrollo del fenómeno.

11.3 Variabilidad del fenómeno.

11.4 Causas del fenómeno - un modelo tentativo.

## 12. Ondas en la superficie del agua.

### 12.1 Generalidades

12.2 La formación de una burbuja en un vórtice débil.

12.3 Ondas de superficie en el núcleo de aire.

12.4 Formas de la superficie en la punta del vórtice.

12.5 Causa de las formas de las ondas superficiales en la punta.

12.6 Efectos posibles de las ondas superficiales en la punta de los vórtices de baja intensidad.

## 13. Conclusiones.

## 14. Referencias.

## DEDICATORIA

A Enzo Levi, el único maestro que  
me hizo entender la matemática y quien me  
introdujo al estudio de los vórtices.

## AGRADECIMIENTOS

A mi compañera por su apoyo y amor.

A la familia Navarro, en particular a Piti, por su amistad y aliento a seguir el camino.

A Rafael Rosal por permitirme su tiempo y equipo, aun en momentos muy inoportunos.

A Carlos Arango por su capacidad como camarógrafo.

A Ruben Padilla por prestarme su computadora.

A Binnie and Partners por darme la oportunidad de venir a México.

A CONACYT por su apoyo económico.

A todos mis maestros, en particular Dr Gabriel Echávez, por compartir sus conocimientos.



## 1. INTRODUCCION

En el estudio de la mecánica de los fluidos uno de los fenómenos más interesantes es el del vórtice. Desde Los ciclones atmosféricos a los torbellinos que constituyen la turbulencia, existe un mundo de flujos rotatorios. Uno de los más conocidos es el que ocurre comúnmente en los fregaderos de nuestras casas. Este vórtice se caracteriza por la existencia de tres elementos: una superficie libre, circulación y una salida del flujo. Este mismo vórtice se encuentra en los cárcamos de bombeo, entradas a las turbinas y muchas otras obras hidráulicas. Por lo general los vórtices se consideran perjudiciales al funcionamiento de la obra o máquina, porque provocan entradas de aire, pérdida de energía y por lo tanto reducción en la eficiencia. De ahí que la tarea del ingeniero hidráulico es normalmente impedir que se forman estos vórtices. Al mismo tiempo se puede notar que algunos de los efectos de los vórtices pueden ser de utilidad en ciertas circunstancias.

En general los intentos para representar el fenómeno teóricamente han tenido un éxito limitado por la incapacidad de determinar las condiciones de fronteras reales o incorporarlas en el modelo. Esto sucede incluso bajo las condiciones geométricas mas ideales, de modo que la representación de los vórtices en la practica parece una posibilidad lejana. A la fecha los modelos numéricos tampoco han tenido un éxito notable. Para desarrollar mejores modelos es necesario tener una comprensión mayor de los patrones de flujo interno.

Al mismo tiempo existe una discusión con respecto a los criterios bajo los cuales se deben hacer los modelos físicos. La evidencia de la practica parece apoyar el uso del criterio de Froude para la operación de modelos del vórtice. Aun así varios investigadores han observado, a veces indirectamente, que existe una falta de justificación teórica de esta práctica.

Parece que ambos problemas se deben, por lo menos en parte, a la falta de claridad con respecto a los diversos elementos involucrados en los flujos con vórtices. A esto debe sumarse la necesidad de una mayor comprensión del fenómeno de los vórtices para optimizar el proceso de diseño y aumentar la seguridad.

Es por esto que los objetivos de la presente tesis se proponen como:

- (i) Identificar y clarificar los elementos del fenómeno del vórtice para marcar los parámetros de mayor importancia.
- (ii) Presentar un modelo cualitativo, basado en observaciones experimentales, de los patrones de flujo en la región de la salida.
- (iii) Presentar los resultados de una serie de experimentos que muestran varias características del vórtice libre que no han sido descritos hasta ahora.

Con la finalidad de lograr éstos objetivos se presentan primero ciertas generalidades. En esta sección se definen los términos comunes, se consideran los efectos perjudiciales de los vórtices y el problema que se presenta en su clasificación.

Después se introducen los fundamentos teóricos y en particular se consideran las ecuaciones gobernantes y el significado de su representación en términos del vector vorticidad. También se presentan las leyes y teoremas asociados con flujo no viscoso.

Después de presentar las bases teóricas se consideran los modelos claves resultantes de las mismas. También se examinan los problemas que se encuentran al formular éstos modelos, como el régimen de

flujo y las condiciones de frontera. El resultado de esta sección es la afirmación de la importancia de un buen conocimiento de los patrones de flujo para que el modelo tenga éxito.

El siguiente capítulo se dedica a una consideración de la naturaleza física del fenómeno que se basa en el principio de conservación de la cantidad de movimiento angular.

Después de clarificar los elementos y procesos físicos se consideran los modelos físicos del fenómeno. Se considera la importancia del concepto de semejanza dinámica y como se puede obtener. También se da un análisis del uso del criterio de Froude en los modelos de los vórtices.

Como resultado de estos primeros capítulos se obtiene una idea de los problemas que se encuentran en el tema. La segunda parte de la tesis se dedica a la presentación de un experimento.

Primero se presenta una descripción del equipo y método del experimento. Después se dedican cinco secciones a los resultados obtenidos.

La consideración de los resultados se basa en evidencia visual y por lo tanto se muestra en forma de fotografías.

Las últimas dos secciones se dedican a las conclusiones y las referencias empleados en este trabajo.

## 2. Generalidades.

### 2.1 Nomenclatura

Varios de los problemas que encuentran los estudiantes en el estudio del campo de flujos rotatorios, se relacionan con la terminología confusa existente. Para evitar este problema se dedica esta sección a definir los términos más comunes.

**Vórtice** - Descripción de la parte de un flujo donde las partículas tiene trayectorias espirales o circulares.

**Vórtice sumergido** - Vórtice que no termina en una superficie libre.

**Vórtice superficial** - Vórtice que termina en una superficie libre.

**Vorticidad** - Propiedad vectorial de un flujo, definido matemáticamente como el rotacional del vector velocidad ( $\omega = \text{rot } V$ ). En un sentido físico la vorticidad es la propiedad de rotación de un elemento del fluido sobre sí mismo.

**Vorticoso** - Descripción del flujo donde la vorticidad no es nula.

**No vorticoso** - Descripción del flujo donde la vorticidad es nula.

**Circulación** - Función escalar del campo de velocidades, definido matemáticamente como la integral de línea  $\Gamma = \int V \cdot dr$  lo cual se puede expresar como  $\Gamma = \int_A \omega \cdot da$  por medio de el teorema de Stokes.

**Línea vorticiosa** - Línea teórica, análoga a la línea de corriente. Definida matemáticamente como una línea en el fluido cuya tangente es paralela al vector de vorticidad en todos lugares.

**Tubo vorticoso** - Tubo teórico, análogo al tubo de corriente, definido como la superficie en el fluido formado por todas las

líneas vorticosas ligadas por una curva cerrada reducible y arbitraria. La curva debe tocar cada línea vorticiosa sólo una vez.

Vórtice de línea - Idealización teórica obtenida por medio de la reducción de un tubo vorticoso hasta que tenga una sección nula.

Viscosidad - Propiedad del fluido debido al carácter molecular y la temperatura de la sustancia. Cuando el flujo es laminar la viscosidad es responsable del transporte de la cantidad de movimiento en dirección perpendicular al flujo.

La viscosidad turbulenta - Cuando el flujo es turbulento la viscosidad es un elemento esencial en la creación de pequeños flujos rotatorios, que transportan cantidad de movimiento por convección. Como este transporte es en la dirección perpendicular al flujo el proceso se considera análogo a él debido a la viscosidad. En la formulación matemática se usa un parámetro llamado viscosidad turbulenta para describir este proceso. La viscosidad turbulenta es una propiedad del flujo no del fluido y por lo tanto es función del tiempo y el espacio.

## 2.2 Efectos prácticos de los vórtices.

En esta presentación es necesario distinguir entre vórtices con superficie libre y vórtices sumergidos. El primero se asocia con la posible existencia de un núcleo de aire y en el segundo no. Ambos pueden tener serios efectos en las obras hidráulicas, bombas y turbinas. A continuación se consideran brevemente los más importantes de estos.

La presencia de un vórtice da origen a una distribución de velocidad que es perjudicial al funcionamiento óptimo de bombas y turbinas de flujo axial o mixto. Tales máquinas se diseñan para un flujo rectilíneo en la entrada, en particular las paletas se

orientan de tal forma que la eficiencia es óptima con este tipo de flujo. El flujo espiral asociado con la presencia de vórtices causa una reducción en la eficiencia debido a la separación del flujo resultante. También, si el flujo carece de simetría axial entonces la carga estructural sobre las paletas varía con el tiempo y pueden aparecer vibraciones.

Si el vórtice es fuerte y la sumergencia es pequeña, pueden ocurrir presiones negativas y disolución de gas en el núcleo. Esto puede ocasionar daños en la estructura debido a cavitación.

Cuando el vórtice tiene un núcleo de aire, el problema de cavitación no se presenta. Sin embargo tal núcleo resulta en más pérdidas de carga, vibración etc..

### 2.3 Clasificación de los vórtices.

Un vórtice se describe como fuerte cuando las características asociadas, como el núcleo de aire o circulación en la salida, son notables. De ahí que la clasificación se basa normalmente en la observación o medición de uno de estas características. Por ejemplo, Hecker (1981) y otros han usado las características del núcleo de aire como la base de su sistema de clasificación. Estos sistemas tienden a ser arbitrarios y muchas veces cualitativos.

Como todos los vórtices tienen, por definición, circulación se puede obtener un sistema más coherente por medio de su medición. Desgraciadamente tal medición no es fácil de hacer en la práctica y han surgido varios métodos de representar la circulación indirectamente. Anwar y Amphlett (1977) han utilizado la sombra producida por la depresión de la superficie como indicador de la circulación.

Una medición más directa fue obtenida por Hecker (1984) usando un

aparato tetrapodo flotante para medir la circulación en la superficie. Basado en su idea la medición de circulación en este experimento se logra usando un aparato flotante. Este tipo de aparato no es tan útil cuando la ubicación de los vórtices es variable en el espacio.

Otro aspecto importante es que los sistemas de clasificación son casi exclusivamente para vórtices de superficie libre. El único método común que da resultados para los vórtices sumergidos es el de medir la circulación en la salida. De hecho este método no se considera confiable como lo explicó Quick (1970).

Por tanto, mientras que la medición de la circulación parece atractiva como la base de un sistema de clasificación, en la realidad no es fácil. De hecho, la medición de la circulación completa necesitará medición completa del campo de velocidades y un proceso de cálculos considerable. Esto es poco factible así que los sistemas mas arbitrarios serán importantes para el futuro inmediato.

#### 2.4 Métodos de diseño.

La falta de modelos analíticos o numéricos hace necesario el uso de modelos físicos en el diseño de obras hidráulicas cuando existe la posibilidad de la existencia de vórtices.

Por razones económicos es necesario construir estos modelos lo mas pequeños posible. Para que un modelo físico sea útil, tiene que reproducir el comportamiento del prototipo y por tanto debe mantenerse la semejanza dinámica. Esto requiere que todas las fuerzas sean reducidas por el mismo factor entre prototipo y modelo. Como fuerzas asociados a la viscosidad, gravedad, presión, tensión superficial y a veces cavitación, pueden ser importantes, y como cada una de ellas depende de la escala en una forma

diferente, resulta generalmente imposible lograr mantener la semejanza dinámica. El estudio de efectos de escala busca identificar las implicaciones de no lograr la semejanza dinámica.



### 3. Bases teóricas.

#### 3.1 Definiciones de términos.

En la figura 3.1 se presenta un croquis de definición del problema. Después se definen los términos usados.

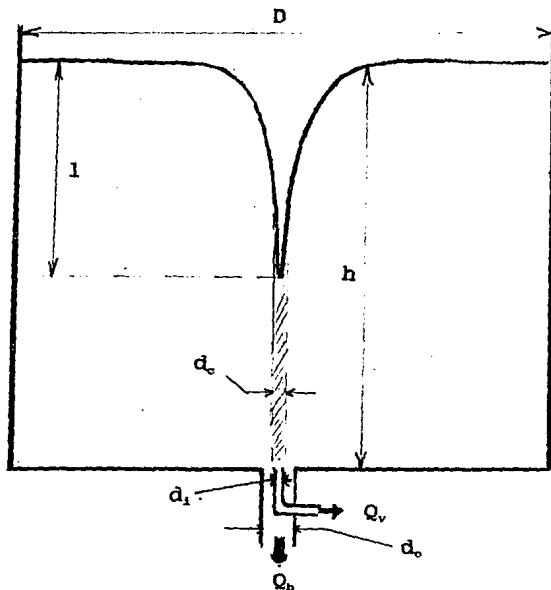


Figura 3.1 Croquis de definición del problema.

$V$  = el vector velocidad [ $\text{ms}^{-1}$ ].

$a$  = el vector aceleración [ $\text{ms}^{-2}$ ].

$\omega$  = el vector rotacional [ $\text{s}^{-1}$ ].

$f$  = el vector de la fuerza de cuerpo [ $\text{N}$ ].

$r, \theta, z$  las coordenadas: radial, azimutal y axial [ $\text{m}$ ].

$V_r, V_\theta, V_z$  los componentes  $r, \theta, z$ : del vector velocidad [ $\text{ms}^{-1}$ ].

$\xi, \eta, \zeta$  los componentes  $r, \theta, z$ : del vector rotacional [ $s^{-1}$ ].

$\Gamma$  = La circulación [ $m^2s^{-1}$ ].

$\Omega$  = La rotación angular en el vórtice forzado [ $s^{-1}$ ].

$g$  = magnitud de la aceleración de gravedad [ $ms^{-2}$ ].

$p$  = la presión [ $Nm^{-2}$ ].

$P$  = termino de presión modificado [ $Nm^{-2}$ ].

$\mu$  = la viscosidad dinámica [ $kgm^{-1}s^{-1}$ ].

$\nu$  = la viscosidad cinemática [ $m^2s^{-1}$ ].

$\rho$  = la densidad [ $kgm^{-3}$ ].

$Q_t$  = el gasto de salida total [ $m^3s^{-1}$ ].

$Q_b$  = el gasto en el tubo de salida externa [ $m^3s^{-1}$ ].

$Q_v$  = el gasto en el tubo de salida interna [ $m^3s^{-1}$ ].

$D$  = diámetro del tanque [m].

$d_o$  = diámetro del tubo externo [m].

$d_i$  = diámetro del tubo interno [m].

$d_c$  = diámetro del núcleo de colorante [m].

$l$  = longitud del núcleo del aire [m].

$h$  = nivel de superficie de agua [m].

### 3.2 Las ecuaciones gobernantes.

Las ecuaciones gobernantes en problemas del flujo de fluidos son: la ecuación de continuidad, la ecuación de Navier-Stokes y la ecuación de estado que relaciona a la densidad, presión y temperatura. Las formas completas de las ecuaciones de continuidad y de Navier-Stokes son:

$$(1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0$$

$$(2) \quad \rho a = \rho f - \text{grad}(p) + \mu \nabla^2 V + \frac{1}{2} \mu \text{grad div } V$$

Suponiendo que la única fuerza del cuerpo se debe a la gravedad y que ésto se puede representar por medio de una función potencial, es posible escribir:

$$(3) \quad \rho f = -\rho g z = \text{grad}(-\rho g z)$$

De esta manera se obtiene un termino de presión modificado:

$$(4) \quad P = p + \rho g z$$

Si se supone flujo incompresible la ecuación 1 resulta:

$$(5) \quad \text{div } V = 0$$

Usando ecuaciones (3), (4) y (5) la ecuación 2 resulta:

$$(6) \quad \rho a = \text{grad}(P) + \mu \nabla^2 V$$

(5) y (6) son las formas vectoriales de las ecuaciones gobernantes del problema considerado en esta tesis.

### 3.3 El régimen del flujo: turbulento o laminar.

No es factible obtener soluciones a la ecuación de Navier-Stokes cuando el flujo es turbulento por la complejidad de las pequeñas estructuras de flujo. En caso de flujo turbulento se usan las ecuaciones para flujo medio de Reynolds, donde la viscosidad turbulenta reemplaza a la viscosidad. El uso de la viscosidad turbulenta reduce el problema a uno equivalente al laminar. Sin embargo, la viscosidad es un parámetro del fluido y la viscosidad turbulenta es un parámetro del flujo. Este hecho aumenta la cantidad de incógnitas y hace que normalmente no se pueda resolver

el problema matemático.

En esta tesis solo consideran modelos basados en la ecuación de Navier-Stokes y por lo tanto la presentación es de ésta y no de las ecuaciones de Reynolds.

La mayoría de flujos con vórtices, en la práctica, son turbulentos y este hecho reduce los límites de aplicabilidad de los modelos matemáticos.

### 3.4 La forma escalar de las ecuaciones gobernantes.

Para obtener las ecuaciones gobernantes en forma escalar se necesita definir un sistema coordenado adecuado. Debido a la simetría axial del problema se acostumbra usar el sistema cilíndrico. El sistema que se utiliza aquí se describe en la figura 3.2.

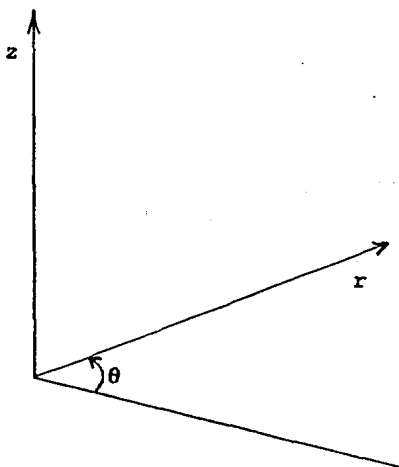


Figura 3.2 Croquis para definir las coordenadas.

Desarrollando las ecuaciones 5 y 6 en este sistema coordenado se obtienen las siguientes relaciones:

$$(7) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$(8) \quad \frac{\partial v_r}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_r - \frac{v_\theta^2}{r} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + v \left\{ \nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right\}$$

$$(9) \quad \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_\theta - \frac{v_r v_\theta}{r} = - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + v \left\{ \nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right\}$$

$$(10) \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_z = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + v \nabla^2 v_z$$

Donde el vector velocidad en este sistema se define como:

$$(11) \quad \mathbf{v} = v_r \mathbf{r} + v_\theta \boldsymbol{\theta} + v_z \mathbf{z}$$

### 3.5 Las ecuaciones gobernantes en términos del vector vorticidad.

Aplicando el rotacional a ambos lados de la ecuación 6 y usando las identidades en las ecuaciones 12 y 13, con las definiciones en las ecuaciones 14 y 15, se obtiene la ecuación de Navier-Stokes en términos del vector vorticidad 16:

$$(12) \quad \text{rot}(\text{grad } F) = 0 \quad \text{donde } F \text{ es una función escalar arbitraria}$$

$$(13) \quad \mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) + (\text{rot } \mathbf{v}) \times \mathbf{v}$$

$$(14) \quad \boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$$

donde  $\omega$  es:

$$(15) \quad \omega = \xi r + \eta \theta + \zeta z$$

$$(16) \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} + \text{rot}(\mathbf{v} \times \omega) = \nu \nabla^2 \omega$$

La ecuación 16 demuestra que, en un punto en el flujo, el cambio de la vorticidad depende de dos factores. La contribución de la convección, representado por el termino  $\text{rot}(\mathbf{v} \times \omega)$ , referente a la tasa de cambio en la vorticidad debido al transporte por el flujo; y la contribución de difusión, señalado por el termino  $\nu \nabla^2 \omega$ , referente a la tasa de cambio en la vorticidad debido a la difusión viscosa.

Usando las ecuaciones 11 y 14 se obtiene:

$$(17) \quad \xi = \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}$$

$$(18) \quad \eta = \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_r}{\partial r}$$

$$(19) \quad \zeta = \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r}$$

### 3.6 La convección de vorticidad.

El efecto de la convección se puede considerar si se supone que no existe la viscosidad, en tal caso  $\nu=0$  y la ecuación 16 se reduce a:

$$(20) \frac{\partial \omega}{\partial t} + \text{rot}(\mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega}) = 0$$

Esta ecuación muestra que si en un punto en el flujo el término  $\text{rot}(\mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega}) \neq 0$ , entonces la vorticidad es variable. Esta condición requiere que el flujo tenga velocidad y rotación y que cuyos vectores no sean paralelos. Existen otras restricciones con respecto a los campos vectoriales, pero por el momento es suficiente notar la importancia de la velocidad y por tanto de la convección.

### 3.7 Difusión de vorticidad.

Si en un punto del flujo no existe una velocidad ( $\mathbf{V}=0$ ) pero existe rotación ( $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ ) entonces la ecuación 16 resulta:

$$(21) \frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \nabla^2 \omega$$

Esta ecuación es de la familia de ecuaciones de difusión y muestra que si, en un fluido viscoso existe una región de flujo rotacional, tenderá a contaminar las regiones previamente no rotacionales aun en reposo.

### 3.8 El estado de equilibrio en la distribución de vorticidad.

Esto ocurre cuando los componentes de convección y difusión son iguales en magnitud y opuestos en dirección.

### 3.9 La ley de Thompson.

La ecuación 16 también demuestra la ley de Thompson que dice que si, en un momento y lugar específico, en un fluido no viscoso, el flujo es irrotacional ( $\boldsymbol{\omega}=0$ ) entonces, si no actúan fuerzas

externas, así se quedara para siempre.

### 3.10 El principio de conservación de vorticidad.

Otro resultado de la ecuación 16 es que si en un punto especificado, en un fluido no viscoso en lo cual no existe velocidad ( $V=0$ ) entonces, si no actúan fuerzas externas, la vorticidad se quedara constante. Este es el resultado del principio de conservación de cantidad de movimiento angular aplicado a un fluido no viscoso.

### 3.11 El teorema de Kelvin.

Sacando la integral de la ecuación 6 sobre una curva cerrada y dado que  $f$  es una función potencial, monódroma, y de posición:

$$(22) \quad \frac{d\Gamma}{dt} = \oint (\nabla^2 \psi) \cdot dr = \oint (\text{rot } \omega) \cdot dr$$

donde la circulación se define como:

$$(23) \quad \Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

La ecuación 22 muestra que ni la fuerza de gravedad ni la de presión afectan a la circulación. Cuando el fluido es no viscoso esta ecuación resulta:

$$(24) \quad \frac{d\Gamma}{dt} = 0$$

Esta es la expresión matemática de la ley de Kelvin que dice: En un fluido no viscoso, donde la fuerza del cuerpo se derive de una función monódroma, y potencial, la circulación sobre cualquier



curva material es una constante.

### 3.12 Las leyes de vorticidad de Helmholtz.

Estas leyes se pueden decir como:

En un fluido no viscoso de densidad constante con la fuerza de cuerpo derivada de una función monódroma y potencial, un tubo vorticoso se mueve con el fluido y su intensidad es constante.

Aquí la intensidad del tubo vorticoso se define como la circulación sobre una curva en su superficie que pasa una sola vez alrededor del tubo. La comprobación de estas leyes es como sigue:

Considera una curva material cerrada en la superficie del tubo pero que no pasa alrededor de él. La teoría de Kelvin muestra que el valor de la circulación sobre esta curva es una constante y es cero. Ahora, como la curva es arbitraria la única manera en que se puede satisfacer esta condición es si la curva coincide con el tubo, lo que implica que el tubo vorticoso siempre se forma de los mismos elementos materiales.

También, si, como indican los argumentos anteriores, una curva material en la superficie del tubo y que pasa alrededor de él una vez, se mueve con el tubo, entonces según el teorema de Kelvin el valor de la circulación sobre esta curva y, por tanto la intensidad del tubo, es constante.

#### 4. Modelos matemáticos.

##### 4.1 Generalidades.

El problema matemático consiste en resolver las ecuaciones de continuidad y de Navier-Stokes bajo ciertas condiciones de frontera. En las próximas secciones se consideran los modelos más notables.

##### 4.2 Modelos bidimensionales simples.

###### 4.2.1 Simplificaciones de las ecuaciones gobernantes.

Suponiendo flujo bidimensional axisimétrico, es decir:

$$v_r = v_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial v_r}{\partial z} = 0$$

las ecuaciones 7, 8, 9 y 10 se simplifican a:

$$(25) \quad \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$$

$$(26) \quad \frac{v_\theta^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$(27) \quad \mu \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} \right) = 0$$

$$(28) \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Se puede integrar la ecuación 27 para dar:

$$(29) \quad v_{\theta} = C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

la cual es la solución general para un vórtice bidimensional.

Con las condiciones de bidimensionalidad presentadas arriba las ecuaciones 17, 18, y 19 quedan:

$$(30) \quad \xi = \frac{\partial v_r}{r \partial \theta} - \frac{\partial v_{\theta}}{\partial z} = 0$$

$$(31) \quad \eta = \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} = 0$$

$$(32) \quad \zeta = \frac{\partial v_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial (r v_{\theta})}{r \partial r} = \frac{\partial (r v_{\theta})}{r \partial r}$$

#### 4.2.2 El vórtice irrotacional.

Para que el vórtice sea irrotacional todas las componentes del vector vorticidad tienen que ser nulas. Así que la ecuación 32 queda:

$$(33) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_{\theta})}{\partial r} = 0$$

Esta ecuación tiene la solución:

$$(34) \quad v_{\theta} = \frac{C_2}{r}$$

La cual se puede expresar en términos de la circulación como:

$$(35) \quad v_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Y la presión se obtiene por medio de integrar las ecuaciones 26 y 28:

$$(36) \quad \rho g z + p + \rho \frac{V_0^2}{2} = \text{constante}$$

En un vórtice irrotacional con  $p=p_0$  sobre la superficie libre y con  $h=h_0$  en  $r=\infty$ , entonces:

$$(37) \quad h = h_0 - \frac{1}{8\pi^2} \frac{\Gamma^2}{gr^2}$$

Así que la superficie tiene forma de una hipérbola.

#### 4.2.3 El vórtice forzado.

En este caso todo el cuerpo del fluido gira como un cuerpo sólido con una rotación angular  $\Omega$ . Por lo tanto,  $\zeta$  es una constante igual a  $\Omega$ , así que la ecuación 28 queda:

$$(38) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial(rV_0)}{\partial r} = \Omega$$

La integración de la ecuación 38 resulta:

$$(39) \quad V_0 = \Omega r$$

Otra vez se obtiene la presión por integrar las ecuaciones 26 y 28, así que:

$$(40) \quad \rho g z + p - \rho \frac{V_0^2}{2} = \text{constante}$$

Con  $p=p_0$  sobre la superficie libre y con  $h=h_0$  en  $r=0$  entonces:

$$(41) \quad h = h_0 + \frac{\Omega^2 r^2}{2g}$$

En este caso la forma de la superficie es una parábola.

#### 4.2.4 El vórtice combinado de Rankine.

El vórtice irrotacional se caracteriza por el hecho de que la componente tangencial de la velocidad tiende al infinito cuando el radio tiende a cero. Evidentemente esto es imposible, lo que da como resultado un modelo de vórtice combinado. Este vórtice se caracteriza por flujo irrotacional donde ( $r > a$ ) y flujo rotacional, del tipo del vórtice forzado, donde ( $r \leq a$ ). El hecho de que no pueden existir discontinuidades en la distribución de las velocidades, permite la determinación de 'a' por medio de una comparación de las ecuaciones 35 y 39:

$$(42) \quad a = \sqrt{\frac{\Gamma}{2\pi\Omega}}$$

Si se sustituyen por  $r$  con 'a' en las ecuaciones 37 y 41 y haciendo uso de la ecuación 42 entonces se obtienen las siguientes relaciones:

$$(43) \quad h_a = h_0 - \frac{1}{8\pi^2} \frac{\Gamma^2}{ga^2}$$

$$(44) \quad h_a = h_0 + \frac{\omega^2 a^2}{2g} = h_0 + \frac{1}{8\pi^2} \frac{\Gamma^2}{ga^2}$$

Donde el subscrito 'a' indica que ( $r = a$ ).

Si se combinan las ecuaciones 43 y 44 entonces se obtiene la depresión máxima de la superficie en el vórtice combinado de Rankine:

$$(45) \quad h_a - h_o = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\Gamma^2}{g a^2} = \frac{V_{\theta a}^2}{g}$$

#### 4.3 El vórtice de Einstein-Li.

Uno de los primeros intentos para considerar el flujo radial y la viscosidad fue hecho por Einstein y Li (1955). Para separar las ecuaciones axiales y tangenciales de movimiento se hicieron un numero de suposiciones sobre el flujo. Por medio de separar las ecuaciones les permitió derivar expresiones para las velocidades y presiones. Sin embargo los resultados experimentales que obtuvieron solo fueron parcialmente de acuerdo con las predicciones teóricas. Einstein y Li atribuyeron las diferencias a cambios en la viscosidad efectiva debido a turbulencia en el núcleo del vórtice, aunque no presentaron resultados experimentales para comprobar su idea.

La suposición de viscosidad nula fuera de un núcleo laminar reduce las ecuaciones de Navier-Stokes a las de Euler, las cuales dan una buena representación de flujo completamente turbulento lejos de fronteras. Einstein y Li no consideran el efecto de la capa limite en sus derivaciones. Este suposición es razonable lejos de la zona central porque no afecta mucho ni el nivel de la superficie ni las velocidades tangenciales en el cuerpo del flujo. Es notable que su teoría dio mejores predicciones lejos del centro. Así que el uso de las ecuaciones completas de Navier-Stokes se limita al núcleo laminar. Es posible que el flujo en tal núcleo sea laminar si el vórtice es débil y las dimensiones del núcleo son pequeñas, aunque los autores no lo comprobaron. Por lo tanto las hipótesis de los

autores parecen factibles. Sin embargo, las condiciones de frontera que usan son muy dudosas.

El problema mas evidente es la suposición de que los limites del núcleo laminar coincide con los del tubo de salida. Tal suposición es muy dudosa, de hecho la zona donde interviene la viscosidad es probablemente una función de la circulación como está indicado en la teoría del vórtice combinado.

Otro problema es la suposición de que  $V_r$  y  $V_\theta$  son funciones de  $r$  únicamente, ya que Anwar (1965), Daggett y Keulegan (1974) y otros investigadores han notado que esto no es cierto, sino que las velocidades son funciones también de la coordenada  $z$ . Esta variabilidad vertical se debe a la influencia de la capa limite en el fondo.

De hecho se puede observar que el flujo en la capa limite forma la mayor parte del gasto de salida. También el flujo radial en el núcleo del vórtice es nulo sobre la mayor parte de la profundidad.

Se supone que la velocidad axial dentro del núcleo laminar es despreciable. Los resultados de los experimentos de Woodford (1964), Granger (1966) y los hechos en este estudio indican que esto no es cierto.

Estas observaciones ponen en duda el modelo de Einstein-Li. Sin embargo su modelo sirve como indicador de la necesidad por un entendimiento claro de los patrones de flujo y las condiciones de frontera.

#### 4.4 El vórtice de Woodford.

La investigación de Woodford (1966) trata de vórtices débiles y encuentra algunos resultados cualilativos interesantes. Hizo las mismas suposiciones que Einstein y Li con respecto a la existencia

de flujo no viscoso fuera de un núcleo laminar. Tampoco consideró los efectos de la capa límite. Al mismo tiempo, para obtener condiciones de frontera mas reales, hizo unos experimentos con colorante. Estos indicaron que el núcleo laminar es mucho mas pequeño que el tubo de salida y también que la velocidad axial dentro de este núcleo es notable y es varia con  $r$ .

Con estas condiciones de frontera mas reales logró un acuerdo cualitativo entre su teoría y los resultados experimentales. El atribuyó las diferencias a la representación incompleta del perfil de las velocidades axiales en el núcleo laminar.

Mientras que las condiciones de frontera usadas en este modelo son mas reales que las de Einstein y Li, existe todavía duda con respecto al origen del flujo en el núcleo. Woodford supone que existe un flujo radial pequeño sobre toda la profundidad, lo que no se ha confirmado por observaciones experimentales. Al mismo tiempo es importante notar que el vórtice de Woodford es muy débil, ciertamente mas débil que los estudiados por Anwar (1965). Así que existe la posibilidad de que el patrón de flujo supuesto por Woodford se aplique a vórtices muy débiles. Sin embargo, la existencia de una columna de colorante, como la que se muestra en su artículo, tiende a indicar que el flujo radial es cero.

El estudio de Woodford produce el resultado interesante de que para circulaciones altas, la profundidad del núcleo de aire es independiente de la circulación y depende solo de la velocidad en el tubo de salida. En el próximo capítulo se considera esta observación y su implicación para la modelación del vórtice.

Otra observación interesante es que ,para profundidades grandes,  $h > 10d$  por ejemplo, la profundidad del núcleo de aire es independiente de la velocidad en el tubo de salida.



#### 4.5 El modelo de Lewellen para un vórtice con circulación fuerte.

En este modelo (1962) se usa un método completamente distinto. Se utiliza una función de corriente para sustituir las velocidades axiales y radiales y se deriva en forma cruzada para eliminar la presión modificada  $P$ , que incluye el efecto de gravedad. De esta manera se producen dos ecuaciones ligadas en derivadas parciales. La solución a estas ecuaciones se expresan en términos de expansiones en series de la función corriente y la circulación, con el número de Rossby como el parámetro de expansión. Al hacer estas ecuaciones adimensionales se generan tres parámetros adimensionales: el número de Reynolds radial, una relación entre longitudes características axiales y radial, y una relación entre el flujo, la circulación y una longitud radial. Para obtener soluciones se necesita especificar la función corriente en dos posiciones axiales y dos radiales.

Se observó que el método no se puede aplicar en la capa límite debido a la magnitud del cambio de la circulación, que hace inválida la solución en serie. Así que las condiciones de frontera se deben elegir fuera de la capa límite.

Se consideró también la posibilidad de que el fluido puede entrar en el flujo del tubo de salida como resultado de las variaciones grandes en la presión a la salida.

Lewellen hizo un experimento, por medio de inyectar colorante en la capa límite del fondo con lo que formó una columna, lo que demuestra la importancia de flujos secundarios que resultan de la existencia de la capa límite.

El concluye que para utilizar el método se necesita resolver primero los problemas de la capa límite, flujo secundario y recirculación en la salida.

Por lo general las observaciones parecen razonables pero el carácter laminar del modelo y los problemas para obtener una solución limitan su utilidad.

#### 4.6 El modelo de Granger.

Granger (1966) desarrolló un modelo semejante al de Lewellen, pero utilizó el número de Reynolds radial como el parámetro de expansión. Encontró que el uso de este parámetro es menos limitante. De hecho se necesita solo tener velocidades radiales pequeñas comparadas a las axiales y tangenciales para obtener soluciones. Después de desarrollar las expansiones obtuvo soluciones para distribuciones de  $\omega$  sobre el eje central. También presenta los resultados de un experimento hecho para demostrar los elementos claves del vórtice libre.

En este caso el investigador asegura que el flujo es laminar en el núcleo del vórtice.

Los resultados experimentales indican distribuciones complejas de la velocidad axial y vorticidad en el núcleo laminar. Granger atribuye las diferencias entre los resultados teóricos y físicos a la representación inadecuada de estas distribuciones en su modelo.

De hecho el uso del número de Reynolds radial como parámetro de expansión puede tener problemas, por el hecho de que casi todo el flujo radial ocurre en la capa límite, que tiene una profundidad pequeña, el número de Reynolds radial cerca del fondo puede ser grande y por tanto la solución por series inválida.

#### 4.7 El vórtice tridimensional de Levi.

Muchos investigadores han considerado que las velocidades tangenciales son independientes del tiempo y la coordenada axial  $z$ .

tangenciales son independientes del tiempo y la coordenada axial  $z$ . Estas suposiciones se han confirmado experimentalmente por Anwar (1966) y Daggett y Keulegan (1974) usando tanques con el flujo distribuido sobre la profundidad. Al mismo tiempo se ha notado la intermitencia de la formación de vórtices en bocatomas y también se ha comentado sobre la variación de las velocidades en el tiempo y en  $z$  en vórtices atmosféricos. Ambos de estos ejemplos son notables porque la distribución del flujo de entrada es función de  $z$ . En el experimento de esta tesis el flujo entra al tanque por un solo tubo y un número de efectos tridimensionales se observaron.

Levi (1991(1) y 1991(2)) desarrolló una teoría para un vórtice tridimensional que predice la variación de la circulación con el tiempo y con  $z$ . Se necesita obtener soluciones de las ecuaciones de Bessel, y el procedimiento se presenta el procedimiento en Levi (1991(2)). Un resultado interesante es la predicción de una variación sinusoidal de la circulación con la profundidad, la cual parece ocurrir en uno de los experimentos hechos aquí.

## 15. El problema físico.

### 5.1 Generalidades.

Para modelar el fenómeno del vórtice en el laboratorio, es esencial entender su naturaleza y los factores que lo controlan. Este capítulo se dedica a una descripción física del vórtice con la intención de aclarar las bases en las cuales se debe modelar. La presentación dada se basa en el principio de la conservación de la cantidad de movimiento angular, ya que es un concepto más accesible que los conceptos matemáticos de circulación o vorticidad.

### 5.2. El vórtice como un fenómeno de la cantidad de movimiento angular.

La definición de un vórtice que se presenta en la sección 2.1, señala que la existencia de un vórtice implica la presencia de cantidad de movimiento angular con respecto a un eje interno al sistema. La proposición recíproca es también verdadera, es decir, que la presencia de cantidad de movimiento angular con respecto a un eje interno al sistema implica la existencia de un vórtice.

Es posible explicar la mayoría de los fenómenos asociados con el vórtice por medio de considerar los mecanismos que determinan la entrada, salida y transporte de cantidad de movimiento angular.

### 5.3 La entrada y salida de cantidad de movimiento angular al sistema.

El concepto de un volumen de control aplicado al sistema completo ayuda a clarificar los mecanismos de entrada y salida de cantidad de movimiento angular. Existen cuatro mecanismos de importancia, los cuales se consideran abajo y se presentan en la figura 5.1:

(i) Cantidad de movimiento angular debido a asimetrías en las distribuciones de velocidades en los flujos que entran y salen del sistema.

(ii) Un par externo, asociado con fuerzas cortantes en las fronteras solidas del sistema.

(iii) Un par externo, debido a las presiones en las fronteras del sistema o asociado con separación atrás de obstáculos dentro del sistema.

(iv) Areas de flujo con cantidad de movimiento angular significantes que resultan de la generación de flujos vorticosos por cortantes en las fronteras solidas o separación del flujo causado por chorros u obstáculos. No se asocian con cambios en la cantidad de movimiento angular del sistema ni con una cantidad de movimiento externa.

Es importante notar que el primer mecanismo no depende de la viscosidad del fluido y los últimos tres, sí.

La importancia relativa de cada uno de éstos mecanismos depende de la geometría y condiciones de flujo de un problema en particular. Aun en la misma obra, cambios en el gasto resultarán en diferentes contribuciones. Por lo general se supone, aunque no explícitamente, que la contribución mas importante se debe al mecanismo (i).

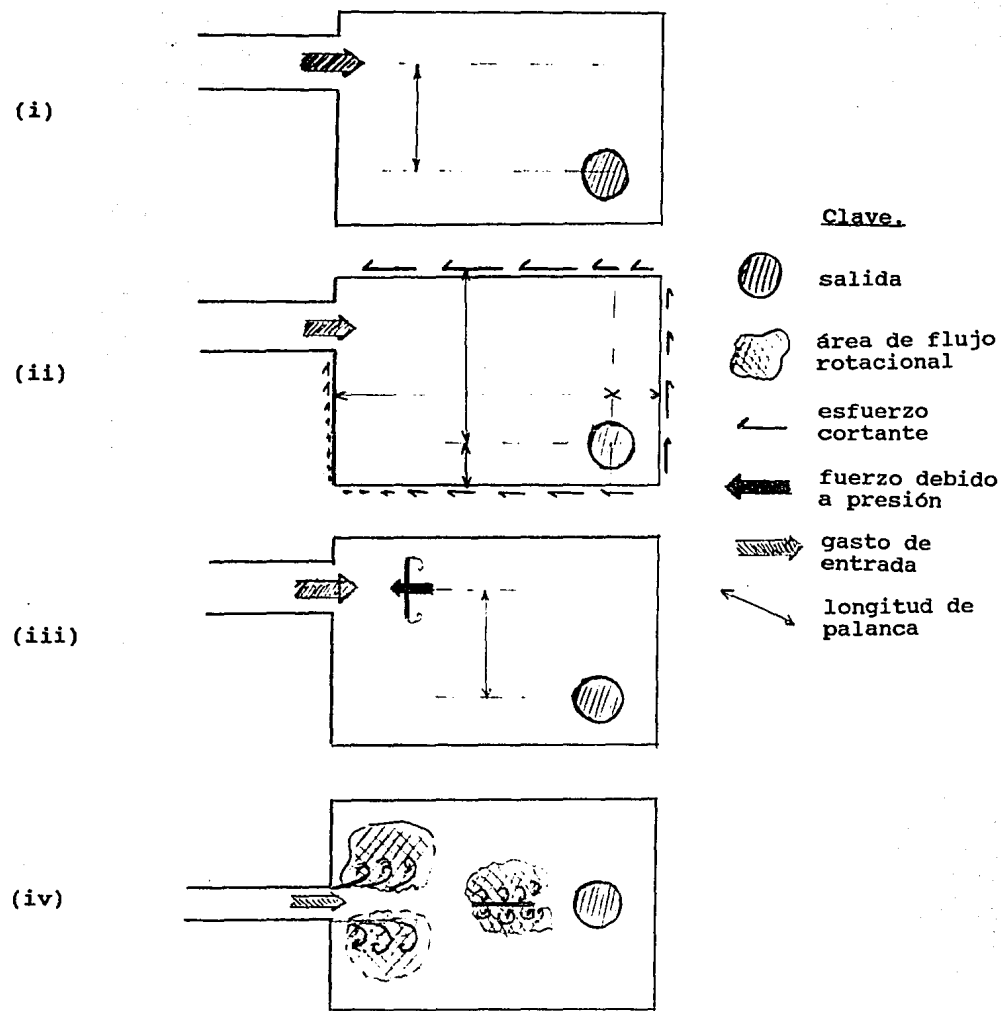


Figura 5.1 Los mecanismos de entrada y salida de la cantidad de movimiento angular al sistema.

#### 5.4 Transporte de la cantidad de movimiento angular.

Una vez que existe una cantidad de movimiento angular en el sistema, surge el problema de su transporte. Existen dos mecanismos de transporte: el debido a la convección y el debido a la viscosidad o viscosidad turbulenta.

El mecanismo de transporte convectivo corresponde al transporte de la cantidad de movimiento por el flujo. O sea, si un elemento de fluido tiene una cantidad de movimiento asociado y se mueve con el flujo entonces existe un transporte, por convección, de la cantidad de movimiento.

El segundo mecanismo resulta de la diferencia en velocidad que tienen elementos de fluido en contacto. Por medio de la viscosidad o viscosidad turbulenta existe una transferencia de cantidad de movimiento, principalmente en la dirección perpendicular a la dirección del flujo. Como la cantidad de movimiento angular se compone de la cantidad de movimiento multiplicado por una longitud, entonces por lo general la transferencia de cantidad de movimiento implica transporte de la cantidad de movimiento angular.

La importancia relativa de estos mecanismos depende del carácter del flujo en la región de interés. En general se pueden identificar tres zonas distintas: lejos de la salida y fuera de la capa límite, cerca de la salida y fuera de la capa límite, y en la capa límite.

En la primera de estas zonas el transporte radial se debe principalmente a la convección cuando el flujo tiene una componente fuerte radial o cuando es irrotacional. Cuando es rotacional y tiene una componente importante de velocidad tangencial, la viscosidad o viscosidad turbulenta son importantes. El transporte axial se debe principalmente a la viscosidad o viscosidad

turbulenta.

En la zona cerca a la salida, donde existe una componente importante de flujo axial, el transporte radial se debe a la viscosidad o viscosidad turbulenta y el transporte axial se debe al mecanismo de convección.

Finalmente, en la capa límite el transporte radial se debe a la convección y el transporte axial a la viscosidad o viscosidad turbulenta.

### 5.5 Estado de equilibrio.

La condición de equilibrio se logra cuando la cantidad de movimiento angular entrando al sistema es igual a la que sale. Esta idea es sumamente importante porque provee explicaciones para la existencia de fenómenos como la depresión de la superficie y profundidad crítica.

### 5.6 La causa de la depresión de la superficie asociada con vórtices intensos.

Si un elemento de fluido se asocia con una cantidad de movimiento angular, entonces en general como se mueve hacia la salida su velocidad tangencial aumentará. Esto es un resultado del principio de conservación de cantidad de movimiento angular.

Este aumento en velocidad significa un aumento en la energía cinética del elemento. La existencia de una depresión de la superficie se puede considerar como resultado del intercambio de energía potencial y cinética, requerido para que se cumpla con el principio de conservación de cantidad de movimiento angular.

Existen dos límites en esta aceleración. El primero se debe al



hecho de que el aumento en la velocidad resulta en un aumento en el momento aplicado al flujo en el fondo debido al cortante. El segundo se debe al aumento en la cantidad de movimiento angular que sale del sistema por la salida.

Así que la condición de equilibrio, con respecto a la depresión superficial, se logra cuando la cantidad de movimiento angular que entra al sistema es igual a la que sale, más el par externo aplicado en la frontera del fondo.

El efecto de la capa límite del fondo se transmite en el sentido axial por convección y viscosidad, o viscosidad turbulenta.

#### 5.7 La sumergencia crítica para la formación de un vórtice.

Un número de investigadores han comentado que existe una profundidad arriba de la cual, con un gasto dado, no se forman vórtices notables. Es decir que no existe depresión de la superficie ni flujo rotatorio notable.

Para explicar este fenómeno en términos del modelo propuesto arriba se debe considerar los elementos de entrada, salida y transporte, y como están afectados por el aumento de profundidad.

Si se supone que la entrada de la cantidad de movimiento angular al sistema se debe principalmente a la asimetría de la distribución de velocidad en la entrada y salida, entonces no será afectado en gran parte por la profundidad.

Al mismo tiempo la reducción en las velocidades radiales asociadas con un aumento en la profundidad cambiará la importancia relativa de los mecanismos de transporte. Esto puede causar un cambio en los patrones de flujo y por tanto en el par externo en las fronteras sólidas. Sin embargo el efecto de transporte no parece

muy importante.

El fenómeno probablemente tiene su origen en un aumento del momento externo aplicado al sistema o en la cantidad de movimiento angular que sale del sistema.

Es posible que un aumento en la profundidad cause un aumento del cortante en el fondo y por tanto un crecimiento en el momento externo aplicado. Esto implicará que el factor de fricción depende de la presión, lo cual no se ha reportado en los estudios de flujo en tuberías y por tanto es dudosa.

Otra posibilidad es que el aumento en la profundidad significa una ampliación de la frontera y por tanto el momento que actúa sobre el flujo. Esto es análogo al efecto de un aumento del radio hidráulico en flujo en canales.

5.8 El efecto de aumentar la rugosidad de las fronteras en la formación de vórtices.

Este es un problema mas sencillo que el de la profundidad crítica. Anwar (1965) observó que fue posible evitar la formación de vórtices por medio de aumentar la rugosidad del fondo. En términos del modelo propuesto aquí esto correspondería a aumentar el momento aplicado al flujo por medio de aumentar el cortante en la frontera. Así que la condición de equilibrio se logra con velocidades tangenciales mas bajas. Por tanto la reducción en el nivel de la superficie es menos notable.

5.9 Un modelo cualitativo del desarrollo del vórtice cuando aumenta la circulación.

Woodford (1964) observó que la profundidad de la punta depende de la circulación como se muestra en la figura 5.1.

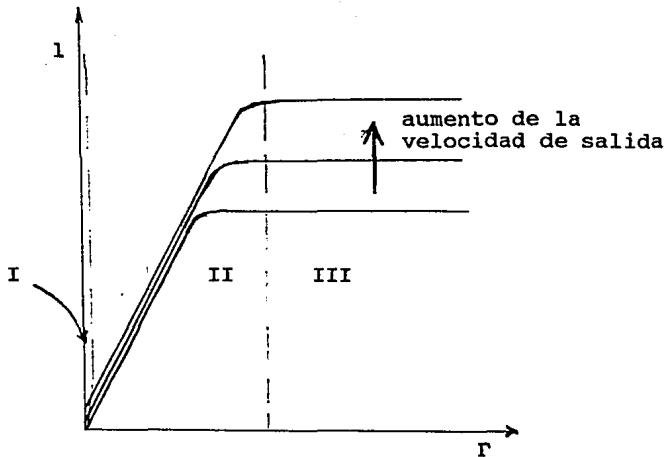


Figura 5.1 Variación de la profundidad de la punta del núcleo de aire con la circulación y la velocidad en el tubo de salida.

Las observaciones de Woodford(1964) y de este estudio indican un modelo del vórtice que explica varios de los fenómenos asociados con el. En las figuras 5.2, 5.3 y 5.4 se muestran las líneas de flujo en el tanque que corresponden a las regiones (I), (II) y (III) de la figura 5.1.

Del lado

Desde arriba al nivel del fondo

Desde arriba al nivel medio del tanque.

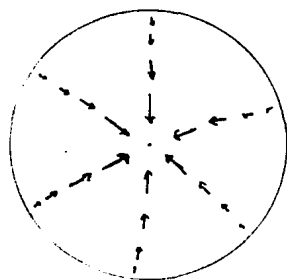
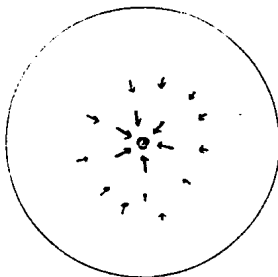
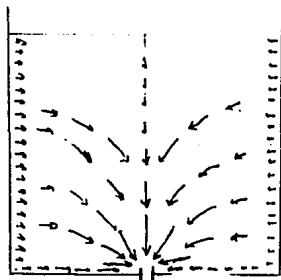


Figura 5.2 patrones de flujo correspondientes a la región (I)

En la región (I) la depresión se debe a las pérdidas en el fondo y depende de la relación entre la profundidad, el diámetro de la salida y el gasto. La transición entre la región (I) y la región (II) ocurre cuando el flujo empieza a tener circulación.

Del lado

Desde arriba al  
nivel del fondo

Desde arriba al  
nivel medio del tanque.

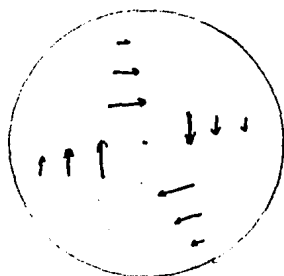
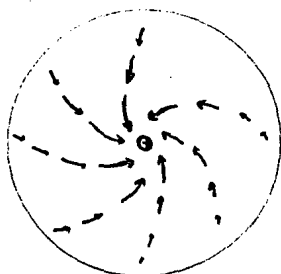
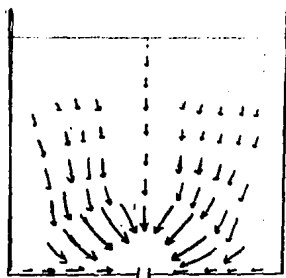


Figura 5.3 patrones de flujo correspondientes a la región (II)

En la región (II) la depresión se debe a las pérdidas, pero también al intercambio de energía potencial y cinética requerida para aumentar la velocidad tangencial y satisfacer el principio de la conservación de la cantidad de movimiento angular, como se describe en la sección 5.6. La transición entre la región (II) y la región (III) se identifica por un cambio en el campo de las velocidades brusco, y la formación de un núcleo o zona central de flujo. Es posible que esta transición se deba al cambio de la forma de la capa límite de laminar a turbulento. Es evidente que la distribución de presión en la salida es particularmente compleja en este caso.

Del lado

Desde arriba al  
nivel del fondo

Desde arriba al  
nivel medio del tanque.

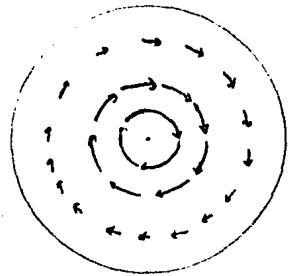
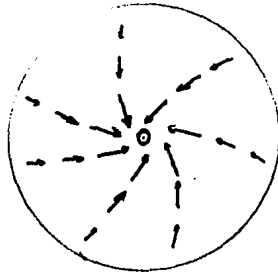
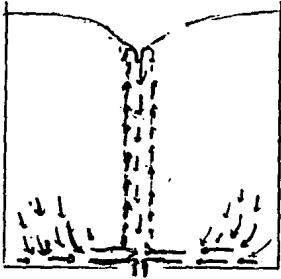


Figura 5.4 patrones de flujo correspondientes a la región (III)

La depresión en la región (III) se debe a los elementos considerados anteriormente. Sin embargo en este caso el gasto es concentrado en una capa delgada en el fondo, lo que significa que tiene una cantidad de movimiento, en la dirección hacia la salida, mayor que en la región (II). En la salida se puede considerar que no actúa el par, debido a cortantes en el fondo, y por tanto el flujo se acelera fuertemente en el sentido tangencial. Esto requiere una gradiente de presión mas fuerte que en el caso anterior. También el componente radial de la cantidad de movimiento es mas fuerte que el caso anterior y por tanto los elementos de fluido se acercan mas al centro y llegan a tener velocidades tangenciales mas grandes.

Daggett y Keulegan (1974) observaron que por aumentar la viscosidad del fluido podían restringir el desarrollo del núcleo de aire. En el modelo descrito aquí, esto corresponde a prevenir la transición de la región (II) a la región (III) por medio de mantener la capa límite laminar.

## 6. Modelos físicos.

### 6.1 Los objetivos.

El objetivo de un modelo físico en general es predecir la ocurrencia y comportamiento de vórtices en el prototipo. La meta de un modelo en particular es reproducir el comportamiento del fluido en el prototipo.

En el capítulo 5 se presenta una descripción física del vórtice en términos de la cantidad de movimiento angular. Para modelar el fenómeno del vórtice se debe representar correctamente los elementos claves; es decir: la entrada, salida y transporte de la cantidad de movimiento angular.

### 6.2 Semejanza dinámica.

Este es uno de los conceptos fundamentales en la mecánica de los fluidos. Semejanza dinámica implica la igualdad en dirección y magnitud relativa de todas las fuerzas que actúan sobre todos los elementos del fluido en sistemas de tamaños absolutos diferentes. Para lograr la semejanza dinámica se necesita tener también semejanza geométrica y cinética. La semejanza geométrica indica la igualdad de las longitudes relativas de los distintos sistemas. En forma parecida, la semejanza cinemática significa la igualdad relativa de las velocidades en los diferentes sistemas.

En problemas asociados con obras hidráulicas las fuerzas que actúan sobre elementos de fluidos son los de gravedad, presión, cortante o viscosidad, y tensión superficial. El resultado de estas fuerzas causa una aceleración del elemento que se considera por medio de una fuerza imaginaria que se llama la fuerza de inercia. No es una fuerza en el sentido común de la palabra sino corresponde al producto de la masa del elemento multiplicado por su aceleración.

Así, la fuerza de inercia se incluye dentro de las fuerzas actuando sobre el elemento.

Desgraciadamente lograr semejanza dinámica es generalmente imposible. Esto se debe al hecho de que la importancia relativa de cada componente de fuerza cambia con la escala en una manera distinta. De hecho si el modelo usa el mismo fluido a la misma temperatura solo se puede modelar correctamente una de las componentes. Por medio de usar fluidos distintos a temperaturas distintos se pueden modelar mas componentes; sin embargo, estos tipos de modelos son mucho mas caros y por tanto prohibitivos.

Así que se puede definir la tarea de ingeniero como identificar las componentes de las fuerzas mas importantes, y después construir y operar el modelo en tal manera que se representan estas componentes bien. Es importante enfatizar que a veces esto es imposible.

### 6.3 Los criterios de escala.

Este termino se refiere a los criterios en los cuales se basa la operación del modelo. Es decir que si se decide que las componentes mas importante son las debidas a la gravedad y la de inercia, entonces el criterio de la operación del modelo será mantener semejanza entre las fuerzas de gravedad y inercia.

La manera de hacer esto es por medio de determinar la relación entre las fuerzas en el prototipo en términos de la velocidad del flujo, gravedad, densidad etc. y mantener esta relación en el modelo.

Como fue considerado en el capítulo 5 la, importancia de una componente de fuerza depende de la región del flujo. De hecho dependen también del tiempo y por lo tanto el problema es decidir cuál es el criterio para modelar el fenómeno del vórtice.

#### 6.4 Parámetros del flujo adimensionales.

Las relaciones descritas anteriormente son los conocidos numeros de Froude, Reynolds, Euler, Weber etc. todos los cuales son parámetros del flujo adimensionales. Se construyen estos numeros con términos que representan la velocidad, longitudes, parámetros del fluido, como viscosidad etc. Exactamente qué dimensiones o velocidades se deben usar para lograr semejanza dinámica depende del problema particular que se tenga.

De hecho se pueden formar parámetros adimensionales arbitrariamente, aunque no necesariamente tiene que ver con la semejanza dinámica.

#### 6.5 La elección de parámetros adimensionales.

En algunas situaciones, como canales o tuberías, estos parámetros se han aplicado durante años y sus definiciones son confiables. Al mismo tiempo, los flujos con vórtices son mas complicados y existen dudas con respecto a exactamente qué longitudes y velocidades se debe usar en la formulación de los parámetros adimensionales.

Es esencial observar que una elección racional de estos parámetros se debe basar en un entendimiento del flujo y debe tener el objetivo de asegurar semejanza dinámica.

Se hace esta clarificación aquí porque la tendencia ha sido definir estos parámetros en base al análisis dimensional o inspeccional. Ambos de estos métodos se basan en hacer términos adimensionales pero la elección de las longitudes, velocidades etc. son arbitrarias. Así que las productos no pueden en ninguna manera garantizar semejanza dinámica.

Se encuentra un ejemplo de esta practica en la definición del



numero de Weber en el núcleo de aire. Este numero es la relación entre la fuerza de tensión superficial y la fuerza de inercia. Es común encontrar este numero definido usando la profundidad del agua y la velocidad en el tubo de salida. Como se verá en el capítulo 8, el gasto en el núcleo es típicamente menor que 25% del gasto total, entonces el uso del gasto total es equivocado. También la fuerza de la tensión superficial depende del radio de curvatura y por lo tanto la longitud usado en la definición debe tener alguna relación con ella, no con la profundidad en el tanque.

Los problemas que resultan no son siempre evidentes porque el medio es continuo. Es decir que, por ejemplo, la velocidad en el núcleo esta ligada con la velocidad total aunque no necesariamente en una manera directa. Este hecho es importante porque existe tanta discusión sobre cuáles son los criterios correctos. Así que correlaciones espurias son muy comunes, como observado por Bremanitz y Echávez(1976).

También es importante observar que si un fenómeno depende de una dimensión externa, como la del tubo de salida, entonces usar el diámetro del tanque en los parámetros adimensionales, aunque teóricamente dudosa, puede no afectar la semejanza dinámica. Esto se debe al hecho de que ambos el diámetro del tanque y el tubo de salida se reduce por el mismo factor de escala. Es probable que estas consideraciones han resultado en una falta de exigencia por parte de los investigadores cuando definen sus parámetros adimensionales.

Desgraciadamente cuando el fenómeno se determina por una dimensión interna, como el espesor de la capa limite o el diámetro del núcleo laminar, entonces la elección de los variables es mucho mas complicada.

## 6.6 El uso del criterio de Froude en modelos de vórtices.

Como se vio en capítulo 1, el uso del criterio de Froude es adecuado en la mayoría de los diseños. Esta observación se basa en observaciones prácticas y se debe principalmente a tres razones:

(i) En problemas prácticos la cantidad de movimiento que entra al sistema se debe al gasto de entrada. Modelar con el criterio hace que se sobre estime este elemento.

(ii) Los flujos normalmente son completamente turbulentos y por lo tanto la viscosidad no afecta el cortante sobre las fronteras. Así que el momento externa aplicado en la frontera sólo depende de la rugosidad, la cual se escala geoméricamente.

(iii) El mecanismo principal para el transporte de cantidad de movimiento angular se debe a la convección, dada la irrotacionalidad de un flujo completamente turbulento. Este mecanismo depende de la superficie libre y por tanto se modela correctamente con el criterio de Froude.

Sin embargo, modelos basados en el criterio de Froude no han tenido mucho éxito en modelar el área cerca al núcleo. Es decir penetración del núcleo del aire, efectos sobre el coeficiente de descarga etc.. Esto se debe al hecho de que otros componentes de fuerza, como viscosidad y tensión superficial son importantes.

Así que se puede decir que el criterio de Froude es suficiente para el diseño. Sin embargo las consideraciones anteriores indican claramente la necesidad para una entendimiento mejor de los procedimientos involucrados. Esto resultará en mas confianza en el diseño, y por tanto mejor economía.

## 7. Método experimental.

### 7.1 Objetivos experimentales.

#### 7.1.1 Cualitativos.

El objetivo es estudiar y grabar visualmente cualquier fenómeno de interés asociado con el vórtice.

#### 7.1.2 Cuantitativo.

El objetivo es determinar las contribuciones de los gastos en el núcleo y la capa límite en el gasto total de salida.

### 7.2 Equipo experimental.

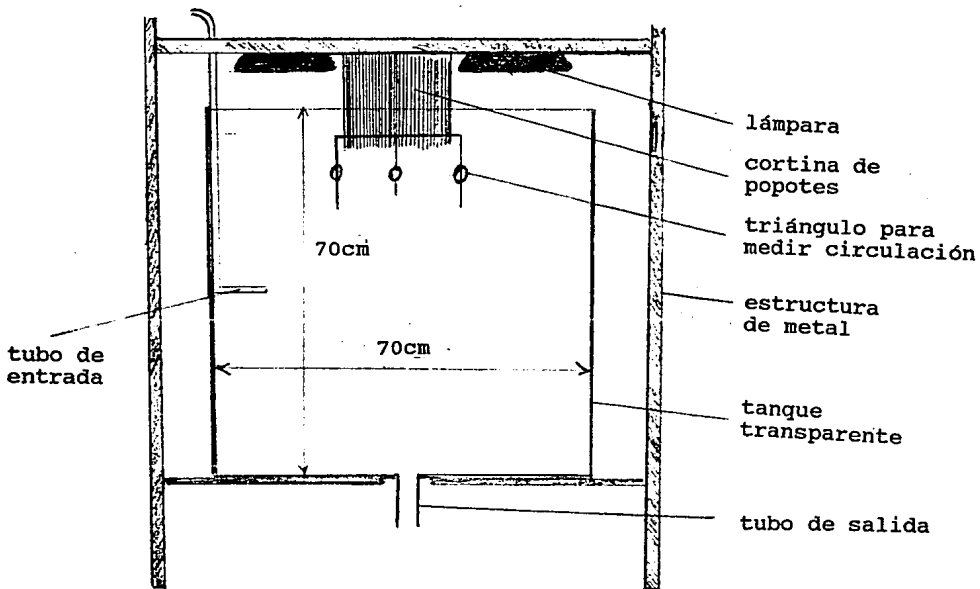
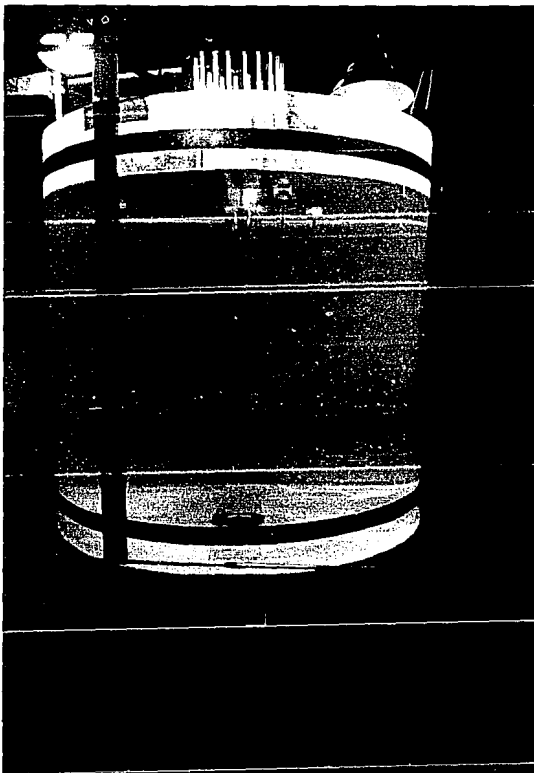


Figura 7.1 El equipo experimental.

Para lograr estos objetivos se construyó un modelo físico. La estructura fue modular y tenía una variedad de posiciones para colocar las cámaras y luces. Se presenta el equipo experimental en la fotografía 7.1 y los detalles y dimensiones se muestran en figura 7.1.



Fotografía 7.1 El equipo experimental.

El sistema es cerrado y el agua se bombea desde un cárcamo hacia el

El sistema es cerrado y el agua se bombea desde un cárcamo hacia el tanque, y sale hacia el mismo cárcamo. Se cambió el agua diariamente ya que se contaminaba con el colorante.

El flujo entra al tanque por un solo tubo horizontal a la mitad del tanque. Se usaron tres diferentes tubos con áreas de salidas distintas para variar la velocidad, y por lo tanto la circulación, sin cambiar el gasto de entrada.

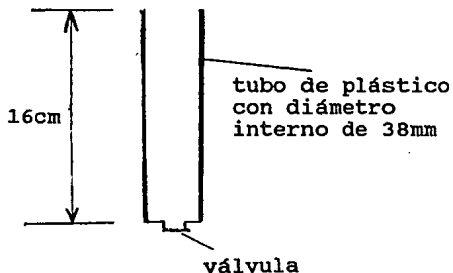
Los equipos usados por Anwar (1966) o Daggett y Keulegan (1974) proveen mejor simetría axial y la entrada del flujo se distribuye sobre la profundidad. Sin embargo el uso de un solo tubo no parece cambiar la estructura básica del vórtice. De hecho el uso de este equipo sencillo permite mas libertad con respecto a la distribución vertical de la circulación y que probablemente es importante en la ocurrencia de algunos efectos tridimensionales. También es importante notar que esta falta de simetría es mas representativa de los vórtices en la práctica.

El flujo sale por un aparato ubicado en el centro del fondo del tanque. Se utilizaron seis diferentes aparatos de salida, los cuales se muestran en figura 7.2. Algunos de estos son tubos simples, otros tubos concéntricos con o sin embudos. Estos aparatos más complejos permitieron la separación del flujo del centro y el fondo del tanque.

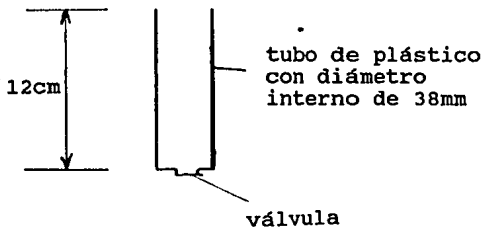
Se midió la circulación con un triángulo flotante que se muestra en la fotografía 7.2. Se utilizó una cortina de popotes montada en una tabla de madera para asegurar que el triángulo quedara centrado. La idea para esta instalación viene de una descripción en Hecker (1984).

La medición de gasto fue volumétrica utilizando tiempos de 20s.

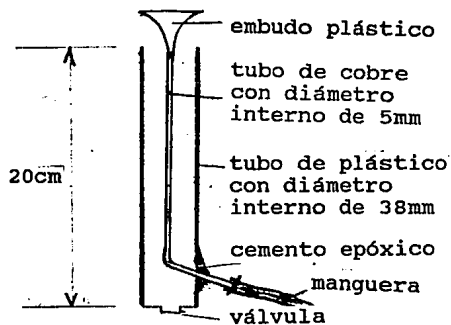
Tubo a



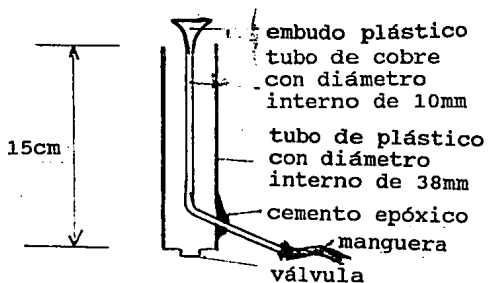
Tubo b



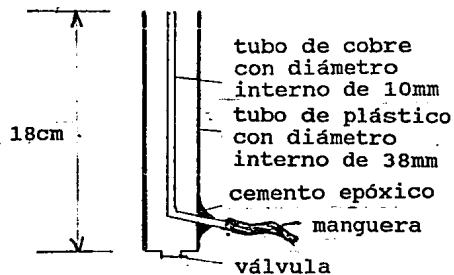
Tubo c



Tubo d



Tubo e



Tubo f

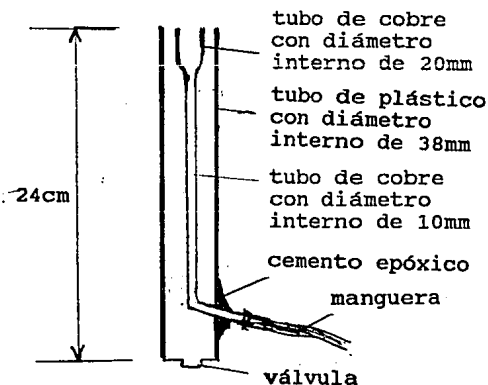
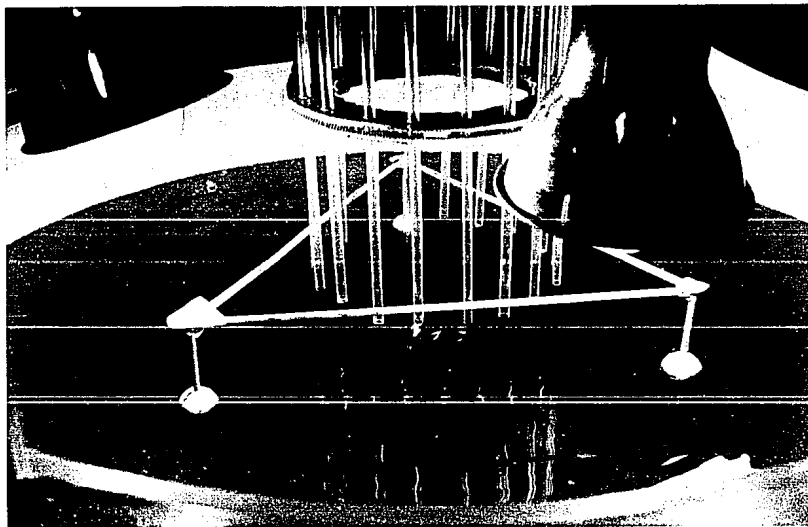


Figura 7.2 Los tubos de salida.



Fotografía 7.2 El aparato para medir la circulación.

Se utilizó una variedad de sustancias para facilitar la visualización del flujo. Los colorantes usados fueron permanganato de potasio, leche evaporada y condensada. Los solidos usados fueron lentejas, te de hoja y esferitas de silicon y unicel.

Se introdujeron los colorantes al flujo por medio de un aparato hecho de una antena telescópica y una aguja hipodérmica. Este aparato se encuentra en el primer plano del fotografía 7.1. En la región de la salida se introdujo con agujas hipodérmicas pasando por el empaque.

Las imágenes visuales se grabaron con una cámara de video Canon L1 Hi8 con un lente de 120mm con macro y con una cámara SLR Minolta X-

700 con un lente de 28-85mm con macro y película de 400 ASA. La edición y fotografías de la pantalla se hizo con el sistema de video edición Sony EVO 9700.

Se proveyó la luz con tres lámparas móviles que permitieron mucha flexibilidad. Resultó mas que suficiente el uso de un total de 450 vatios de luz con focos normales.

### 7.3 Método experimental.

#### 7.3.1 Cualitativo.

Se hicieron vórtices con flujos y circulaciones diferentes y se grabaron las imágenes de interés. Después se editaron los videos y fotogramas de interés, y se captaron con fotografías de la pantalla. Este proceso es muy importante en fenómenos que varían rápidamente en el tiempo.

#### 7.3.2 Cuantitativo.

Se realizaron los estudios cuantitativos usando los tubos de salida e y f con los tubos de entrada B y C. El procedimiento usado fue el siguiente:

- (i) Llenar el tanque y fijar el gasto de entrada.
- (ii) Cerrar la salida del tubo central.
- (iii) Ajustar el gasto de salida por el tubo exterior hasta que el nivel en el tanque quede constante.
- (iv) Abrir la salida del tubo central un poco.
- (v) Introducir colorante en el centro del vórtice para causar la formación de una columna de colorante.
- (vi) Ajustar los dos gastos de salida tal que la columna de colorante tenga el mismo diámetro que el tubo central y el nivel del tanque quede constante. Este procedimiento es



difficil y laborioso.

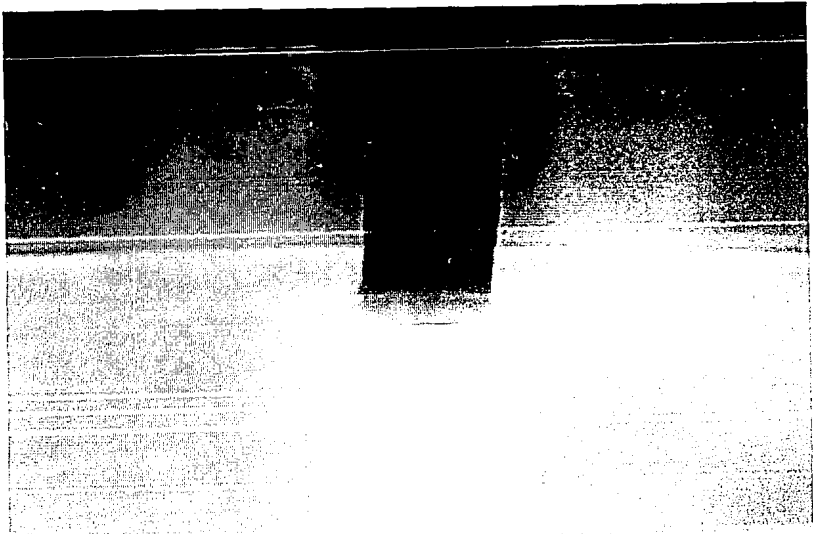
- (vii) Medir la profundidad del agua.
- (viii) Medir la profundidad del núcleo de aire.
- (ix) Medir el tiempo requerido para que el aparato dé cinco vueltas.
- (x) Determinar el volumen que sale del tubo central en 20 s.
- (xi) Determinar el volumen que sale del tubo exterior en 20 s.
- (xii) Notar observaciones y tomar fotografías de la salida.
- (xiii) repetir (vii) a (xii) dos veces.

## 8. Distribución de flujo en la región del núcleo del vórtice.

### 8.1 La existencia de dos flujos principales.

Anwar (1965) comentó que el gasto de salida, en un tanque como el usado en estos experimentos y con vórtices intensos, tiene dos componentes. El mayor de estos viene de la capa límite en el fondo con una contribución menor del núcleo del vórtice.

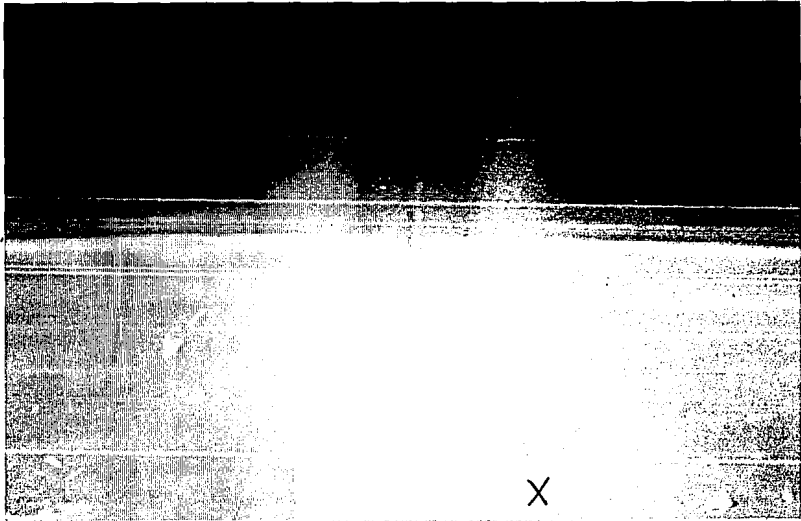
En la fotografía 8.1 se demuestra la existencia de las dos contribuciones. La columna de colorante marca una zona de cero flujo radial.



Fotografía 8.1 Columna de colorante  $t=0$ .

En la fotografía 8.2 se presenta el mismo plano 30 segundos después. Como la concentración es menor, debe existir un flujo

desde este tubo. También se pueden ver también vestigios blancos de leche condensada que fue introducida en X. Parte de esta sustancia entra en el tubo de salida mostrando la existencia de un componente del gasto de salida con origen en la capa limite.



Fotografía 8.2 Columna de colorante con leche condensada  $t=30s$ .

Farell y Cuomo (1981) y Lewellen (1962), han comentado sobre la existencia de un flujo axial con origen en la capa limite. En la fotografía 8.2 esto se demuestra por el hecho de que la parte de leche que no entra en el tubo de salida se mueve hacia arriba.

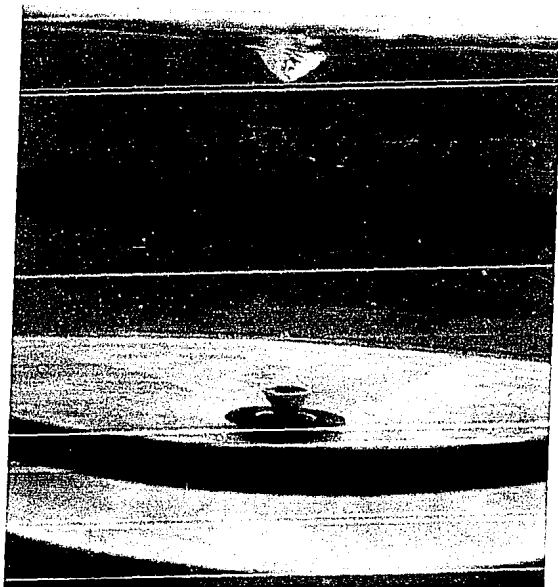
Se repitió este experimento con el tubo de salida en diferentes niveles, incluso empotrado con el fondo. No se observaron diferencias en la estructura básica del flujo.

## 8.2 La importancia del flujo del núcleo del vórtice.

De la existencia de las dos zonas de flujo, surgen preguntas con respecto a la importancia de cada una de ellos en fenómenos como penetración del núcleo del aire.

Se demostrará en la siguiente sección que los flujos no son independientes. Sin embargo, separándolos se puede obtener un idea de su importancia relativa de tales fenómenos.

El uso del tubo de salida  $d$  resulta en separación de los flujos, mientras que los efectos sobre los patrones de flujo global son despreciables por los fines de este experimento.



Fotografía 8.3 Vórtice de intensidad media con  $Q_v=0$  y  $Q_b \neq 0$ .

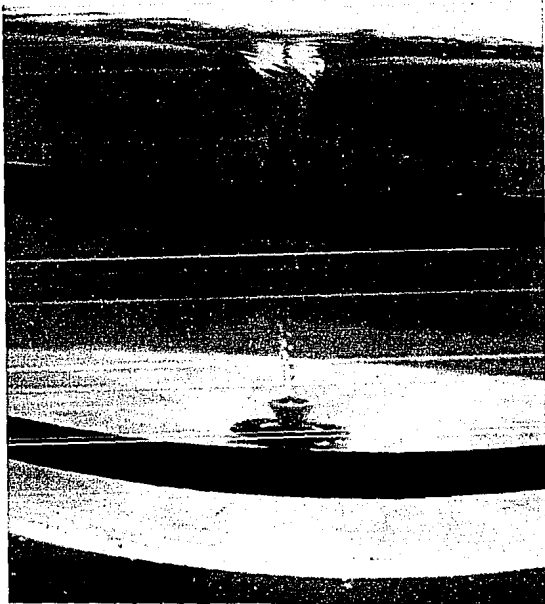
En la fotografía 8.3 se presenta un vórtice con el tubo central

cerrado,  $Q_v=0$ , pero el tubo exterior abierto,  $Q_b \neq 0$ . No existe un núcleo de aire.



Fotografía 8.4 Vórtice de intensidad media con  $Q_b=0$  y  $Q_v \neq 0$ .

En la fotografía 8.4 se presenta un vórtice con el tubo central abierto,  $Q_v \neq 0$ , y el tubo exterior cerrado,  $Q_b = 0$ . En este caso se forma un núcleo de aire sinuoso y con una penetración completa.



Fotografía 8.5 Vórtice de intensidad media con  $Q_b \neq 0$  y  $Q_v \neq 0$ .

En la fotografía 8.5 se presenta un vórtice con ambos tubos central y exterior, abiertos,  $Q_b \neq 0$  y  $Q_v \neq 0$ . Se puede ver un núcleo de aire muy robusto. El cambio en el diámetro se debe al cambio en el campo de presiones que resulta cuando se abre el tubo exterior.

Dado éstos resultados es evidente que la existencia del flujo del núcleo es esencial para la ocurrencia de un núcleo de aire penetrante. Resultó posible mantener el punto del núcleo de aire en cualquier nivel variando el gasto en el tubo central.

Se muestra la importancia del flujo central otra vez en la

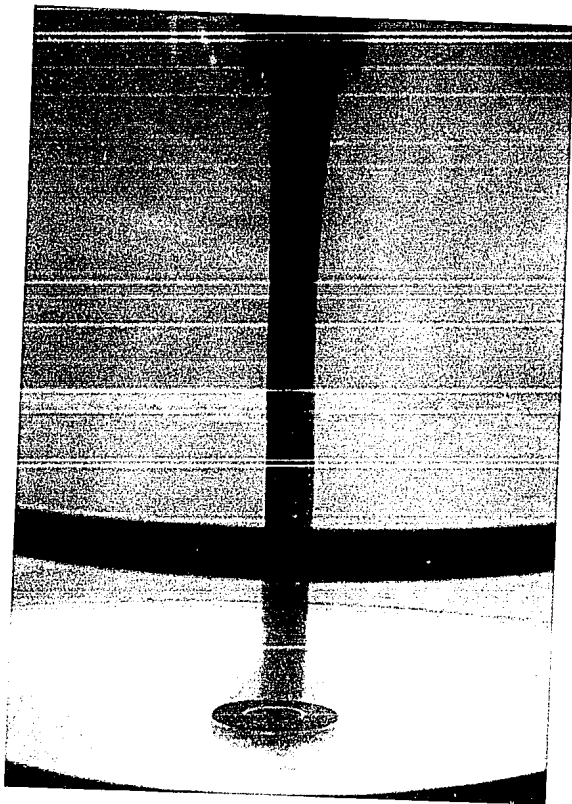
fotografía 8.6 que corresponde a un vórtice muy fuerte. Este vórtice no puede formar un núcleo de aire penetrante aunque el flujo en el tubo exterior es grande.



Fotografía 8.6 Vórtice de intensidad muy alta con  $Q_b \neq 0$  y  $Q_v = 0$ .

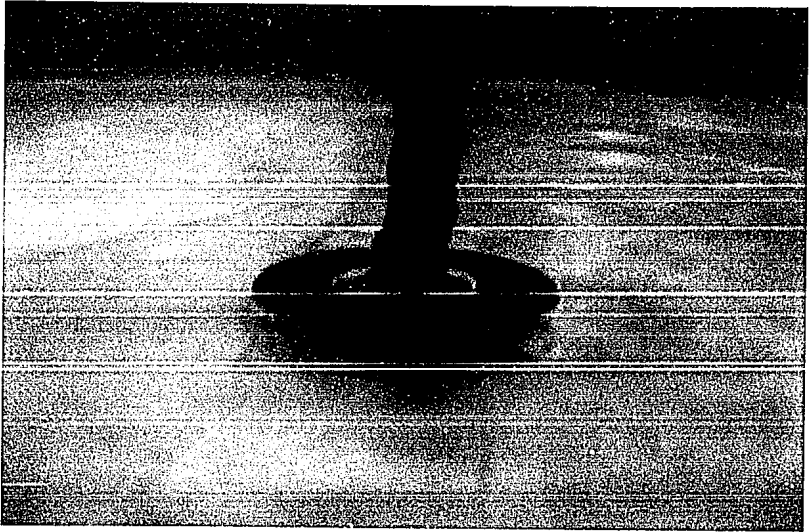
### 8.3 Demostración de la dependencia de los dos flujos.

En la fotografía 8.7 se muestra un vórtice con  $Q_v = 0$  l/s y  $Q_b = 0.24$  l/s, el núcleo de colorante tiene un diámetro como de 30mm. En la fotografía 8.8 se muestra el mismo vórtice con  $Q_b = 0.19$  l/s y  $Q_v = 0.5$  l/s y en este caso el diámetro del núcleo de colorante es aproximadamente de 20mm. Como el diámetro del núcleo de colorante cambia queda claro que depende de la relación entre los dos flujos, aun con un gasto de salida constante. En ambos casos la circulación es  $0.047\text{m}^2/\text{s}$  y el gasto total es  $0.24$  l/s.



Fotografía 8.7 Vórtice con intensidad media.





Fotografía 8.8 Vórtice con  $Q_b$  disminuido y  $Q_v$  aumentado con respecto al vortice de la fotografía 8.7.

#### 8.4 Determinación de las magnitudes relativas de los dos gastos.

Para investigar la relación entre el gasto de salida, la circulación, la profundidad de la punta del vórtice y el diámetro del núcleo de colorante, se hicieron varios experimentos. Existen dos series de experimentos; la primero con el tubo de salida e y la segunda con el tubo de salida f. En la figura 8.1 se muestra la forma de la salida en estos experimentos. En las tablas 8.1 y 8.2 se presentan los resultados de los experimentos.

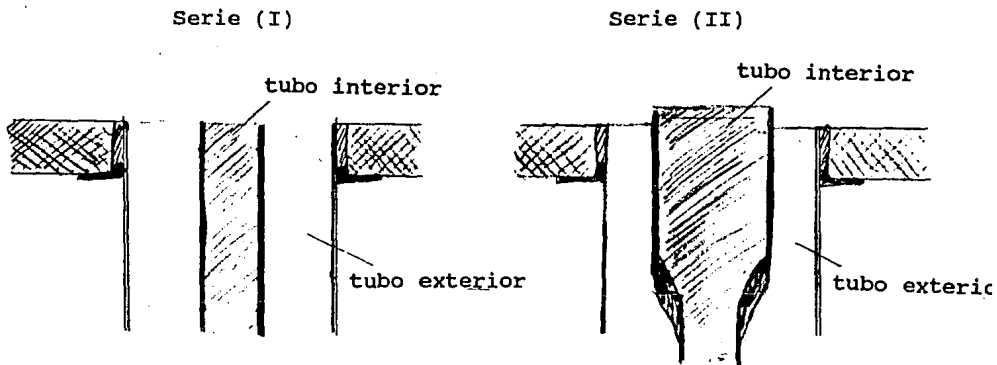


Figura 8.1 Las salidas en los experimentos.

Exp	$h_w$ (cm)	$l$ (cm)	$\Gamma$ (m <sup>2</sup> /s)	$Q_b$ (l/s)	$Q_v$ (l/s)	$Q_e$ (l/s)
1	62.7	6.7	0.029	0.167	0.000	0.167
2	62.3	33.3	0.029	0.103	0.063	0.166
3	62.5	62.5	0.028	0.073	0.089	0.162
4	61.9	16.9	0.047	0.240	0.000	0.240
5	61.5	41.5	0.047	0.190	0.050	0.240
6	62.1	62.1	0.046	0.158	0.068	0.226
7	61.8	11.7	0.040	0.212	0.000	0.212
8	62.0	34.2	0.040	0.167	0.050	0.217
9	61.0	61.0	0.040	0.143	0.072	0.215

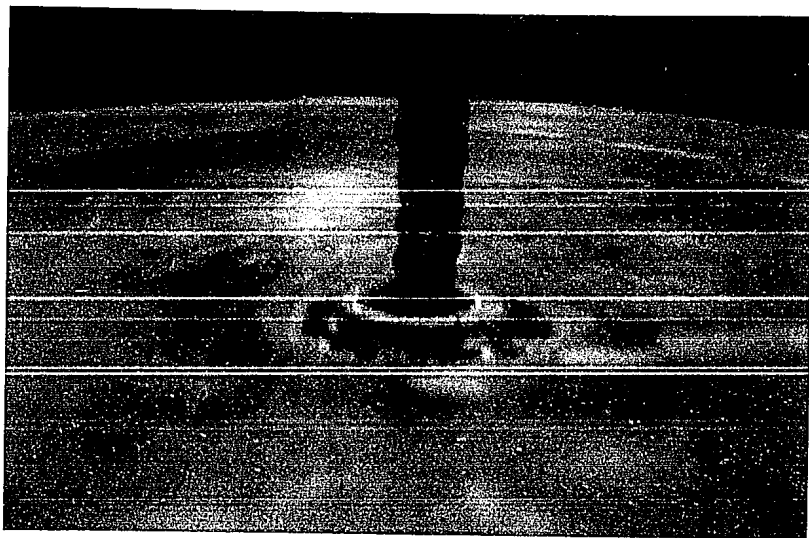
Tabla 8.1 Resultados a los experimentos de serie (I)

Exp	$h_c$ (cm)	$l$ (cm)	$\Gamma$ (m <sup>2</sup> /s)	$Q_b$ (l/s)	$Q_v$ (l/s)	$Q_t$ (l/s)
10	61.9	28.4	0.065	0.308	0.000	0.308
11	61.5	61.5	0.060	0.263	0.048	0.311
12	61.0	61.0	0.060	0.270	0.040	0.310
13	61.8	51.1	0.058	0.267	0.033	0.300
14	62.4	17.4	0.078	0.276	0.000	0.276
15	62.5	47.5	0.078	0.212	0.057	0.269
16	61.8	47.8	0.133	0.503	0.000	0.503

Tabla 8.2 Resultados a los experimentos de serie (II)

Se pueden determinar las magnitudes del gasto en el núcleo sólo cuando todo el gasto del núcleo de colorante pasa por el tubo central y todo el gasto de la capa límite sale por el tubo exterior. En realidad esto es difícil de hacer, sin embargo se logró en algunos experimentos.

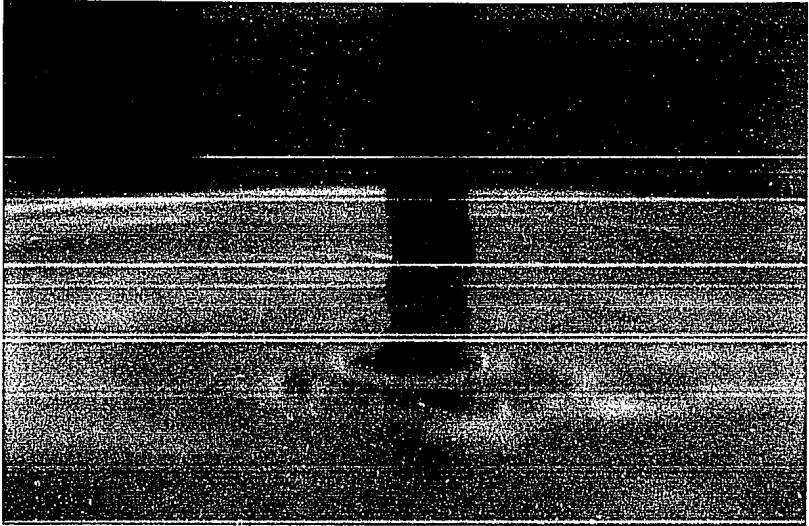
Como se puede ver en la fotografía 8.9, que corresponde a experimento 11, el núcleo de colorante tiene casi el mismo diámetro que el tubo central. La distribución de flujo en este caso es aproximadamente 15%  $Q_v$  y 85%  $Q_b$ . También se ve la existencia de un núcleo de aire con penetración completa.



Fotografía 8.9 Núcleo de colorante coincide con el tubo central, en un vórtice con penetración del núcleo de aire.

Con el objetivo de determinar la distribución sin que haya penetración del núcleo de aire se repitió el experimento. Como se puede ver en la fotografía 8.10, que corresponde a experimento 13, no hay penetración de aire. En este caso la distribución de gastos es aproximadamente 11%  $Q_c$  y 89%  $Q_o$ .

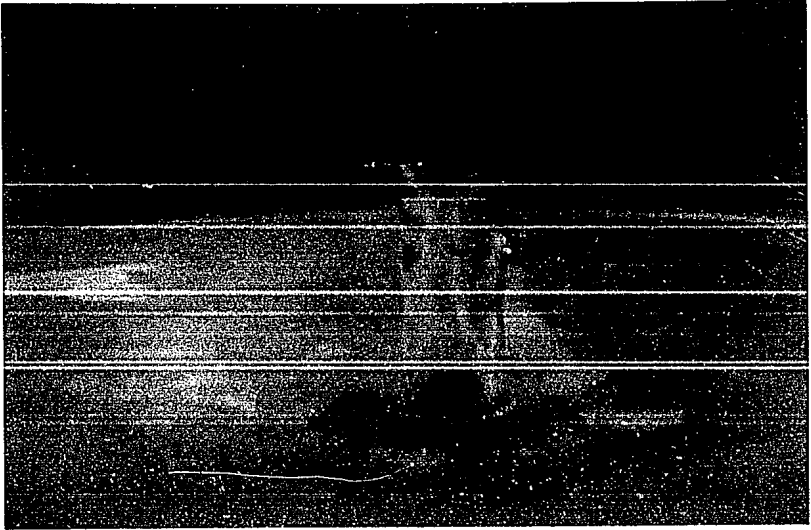
Este resultado indica que cuanto aumenta el gasto central, también aumenta la penetración del núcleo de aire. Esto confirma las conclusiones de la sección 8.2, demostrando otra vez la importancia del flujo de la zona central.



Fotografía 8.10 El núcleo de colorante coincide con el tubo central en un vórtice sin penetración del núcleo de aire.

#### 8.5 Terminación del flujo en el tubo central con el desarrollo del núcleo de aire.

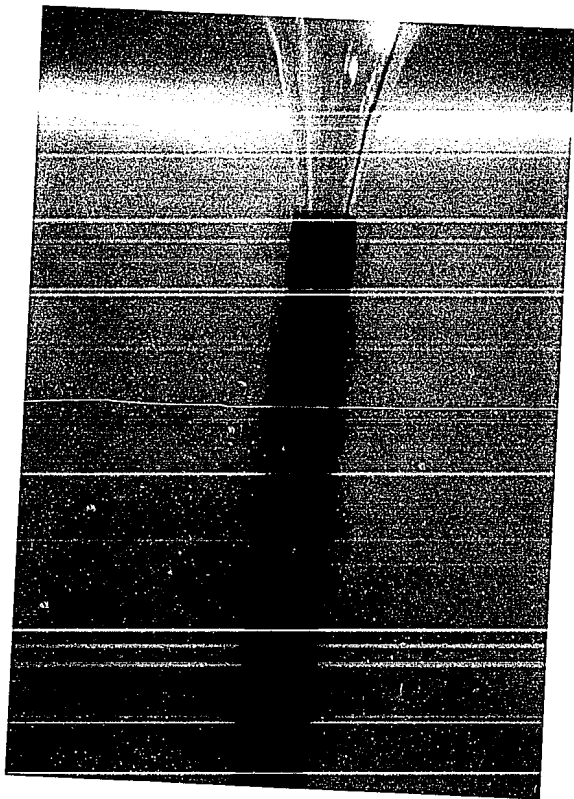
En la fotografía 8.11 se muestra un vórtice en el cual el núcleo de aire es mayor que el tubo de salida central. En este caso no existe flujo en el tubo central. Es posible usar este fenómeno con tubos centrales pequeños, para indicar la existencia de penetración del núcleo de aire. Es decir que, por medio de medir el gasto en el tubo central, es posible identificar que el núcleo de aire es penetrante porque esto corresponde a cero gasto.



Fotografía 8.11 Vórtice sin flujo en el tubo central debido a la existencia de un núcleo de aire grande.

### 8.6 Origen del flujo en el núcleo del vórtice.

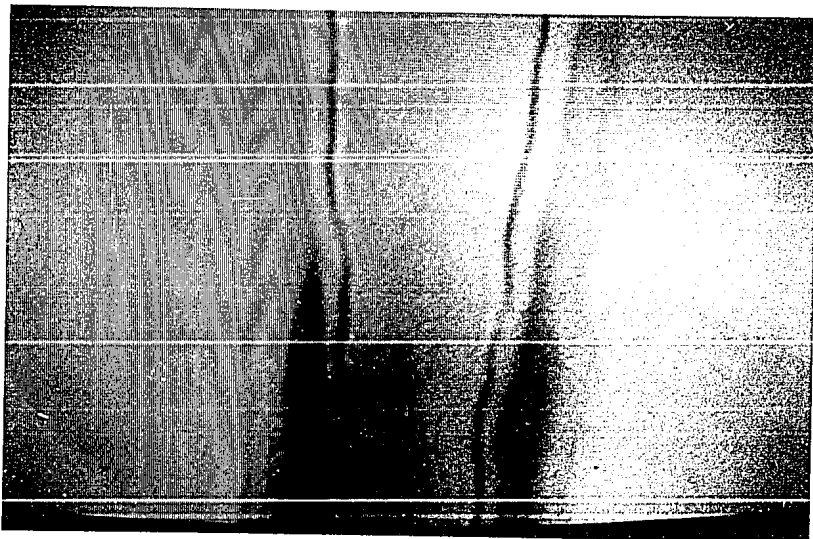
La columna de colorante en la fotografía 8.12 muestra que no existe flujo radial sobre la mayor parte de la profundidad.



Fotografía 8.12 El núcleo de colorante en un vórtice de intensidad media.

En la fotografía 8.13 se puede ver con mas detalle como la columna

termina muy cerca de la superficie. Así que parece probable que Anwar (1965) tiene razón cuando dice que el flujo en el núcleo viene de la superficie. También Lewellen (1962) observó que el colorante inyectado en la capa límite del fondo subió a la superficie y después bajó por el núcleo. En el capítulo 9 se considera esta cuestión con mas atención, y se concluye que el flujo en el núcleo se origina en la superficie.



Fotografía 8.13 La intersección del núcleo de colorante y la superficie en un vórtice de intensidad media.

8.7 Las implicaciones de la existencia de dos zonas de flujo al modelar los vórtices.

En la sección 6.2 se observa que la semejanza dinámica es necesario para que el modelo represente al prototipo correctamente. Parece



evidente que para modelar el fenómeno en el núcleo se debe usar el gasto del núcleo para definir los números de Froude, Reynolds y Weber, y no el gasto total de salida como es común encontrarse en la literatura.

## 9. Flujos secundarios.

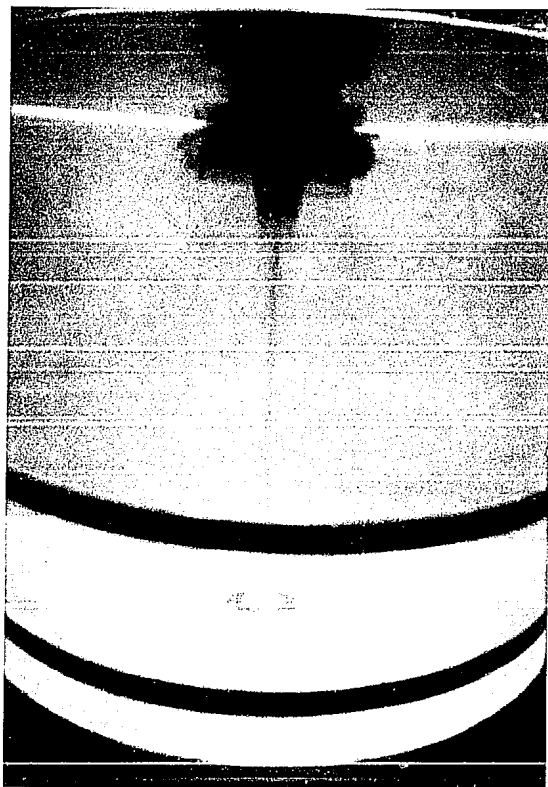
### 9.1 Existencia de flujos secundarios.

Se hicieron intentos para medir la circulación: en estos experimentos se colocaba una bola pequeña de la densidad del agua y se determinaba el tiempo en que la bola daba una vuelta. Como la bola no seguía una trayectoria cerrada lo anterior resultó imposible. De hecho Levi (1991) y otros investigadores también han observado este tipo de flujo. Las observaciones hechas aquí indican que éstos movimientos son regulares y tienen su origen en estructuras de flujos secundarios. Varios investigadores han encontrado evidencia de flujos secundarios pero por lo general no se han considerado importantes.

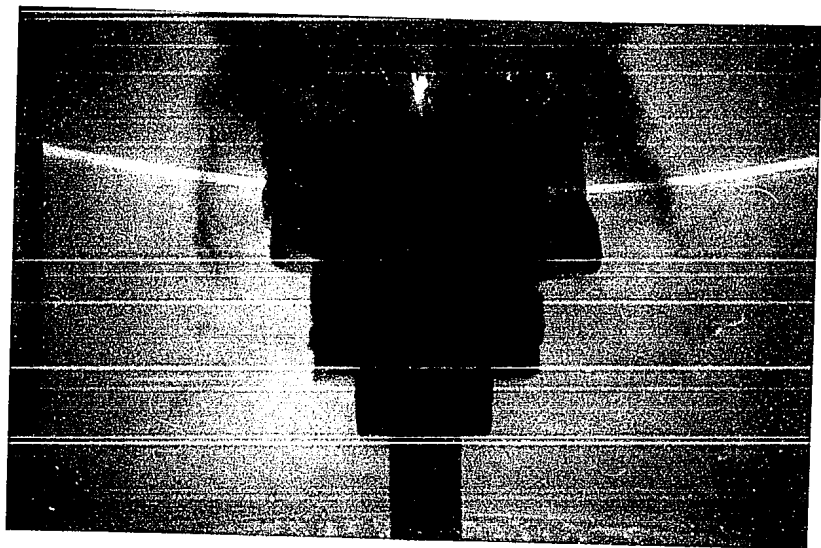
### 9.2 La formación de estructuras de flujos secundarios.

Cuando una gran cantidad de colorante fue introducida al núcleo de un vórtice débil con tubo de salida d, aparecieron varias estructuras bien definidas.

En la fotografía 9.1 se muestra el vórtice inmediatamente después de introducir el colorante. Después de alrededor de cinco minutos las estructuras mostradas en la fotografía 9.2 aparecieron.



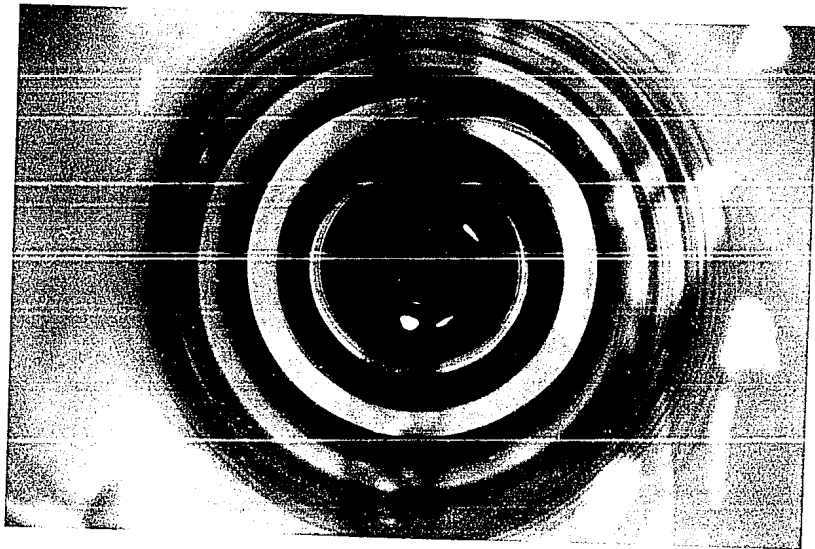
Fotografía 9.1 Vórtice con una gran cantidad de colorante.



Fotografía 9.2 El mismo vórtice después de cinco minutos.

9.3 El carácter circular de las estructuras.

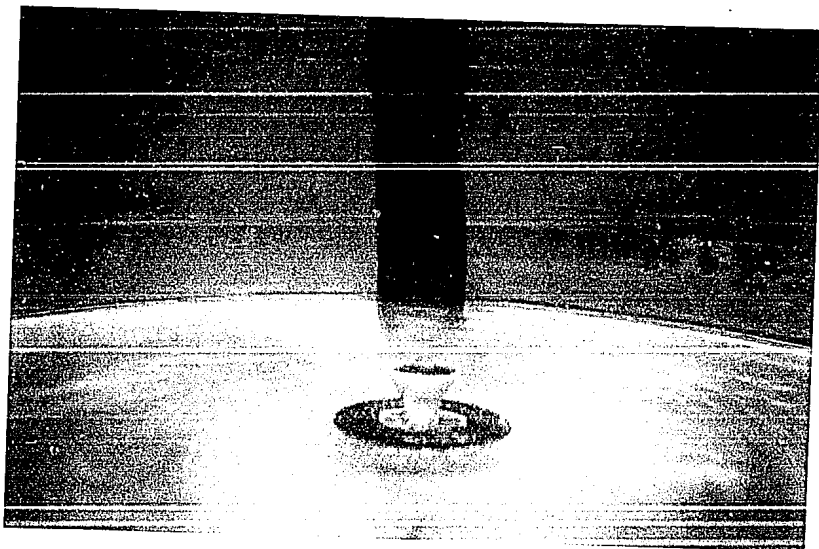
En la fotografía 9.3 se presenta una vista del vórtice desde arriba. Esta fotografía se tomó justo antes que la fotografía 9.2. El carácter circular de los anillos es muy claro.



Fotografía 9.3 El vórtice de fotografía 9.2 visto desde arriba.

#### 9.4 Movimiento vertical asociado con las estructuras.

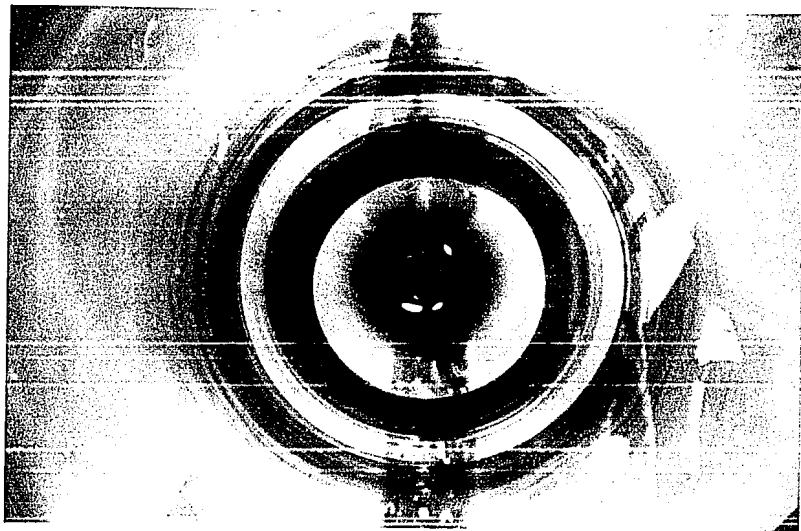
Existe evidencia de un movimiento vertical sobre la columna central, con velocidades en el orden de dos milímetros por segundo. Este fenómeno se muestra en la fotografía 9.4, donde la estructura marcada Y en la fotografía 9.2 se puede ver que ha descendido por la columna central.



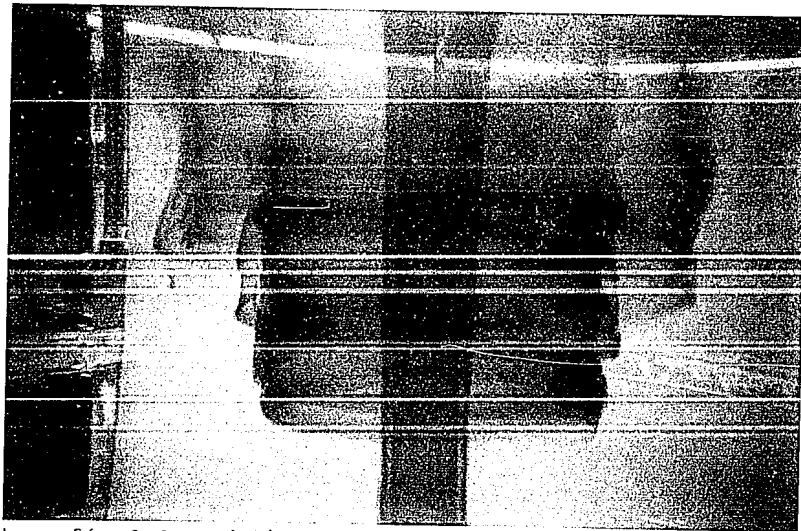
Fotografía 9.4 La estructura Y bajando por la columna central.

#### 9.5 Estado final de las estructuras.

Veinte minutos después de la introducción del colorante las estructuras se han simplificado a tres anillos que se muestran desde arriba en la fotografía 9.5 y de lado en la fotografía 9.6. Después de unos veinte minutos más el colorante se ha disipado y no queda evidencia de las estructuras.



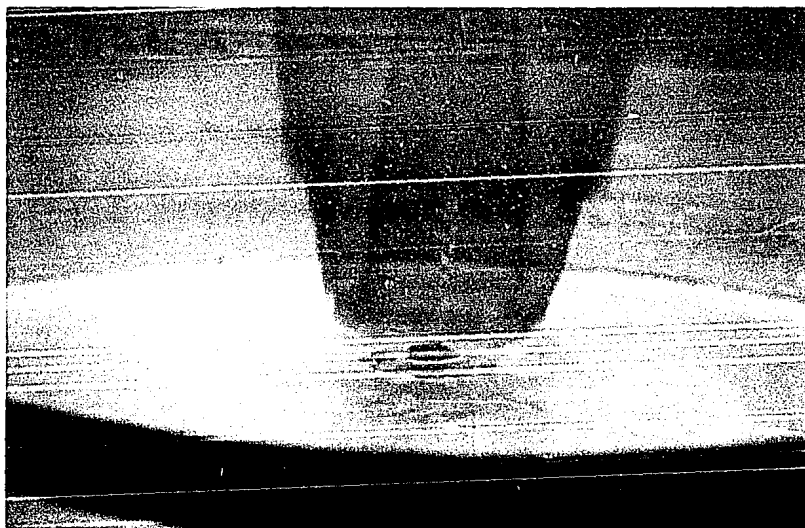
Fotografía 9.5 Vórtice de la fotografía 9.2, visto desde arriba después de veinte minutos.



Fotografía 9.6 Vórtice de la fotografía 9.2, visto del lado después de veinte minutos.

## 9.6 Ocurrencia y persistencia de las estructuras.

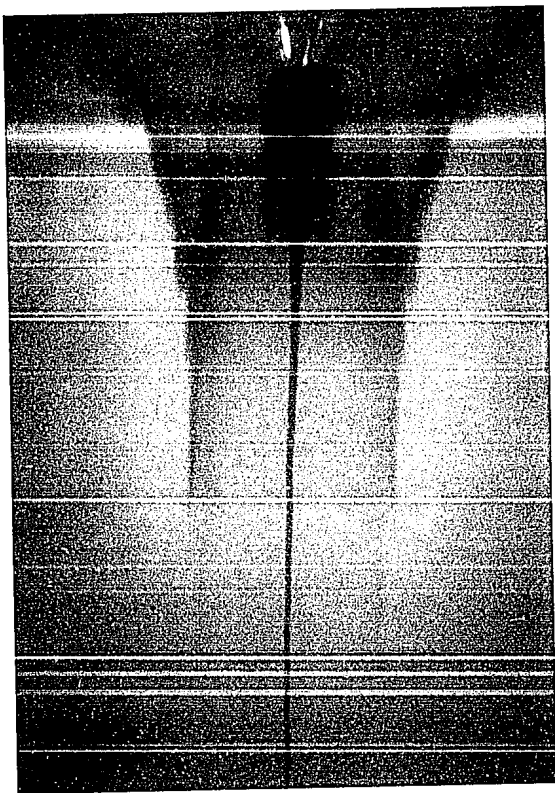
Parece probable que estas estructuras complejas y estables se presentan solo en flujos tranquilos asociados con vórtices débiles. También, su existencia parece depender mucho en la forma de la salida y las estructuras complejas y estables, que se mostraron anteriormente, solo se presentaron con el tubo de salida d. Al mismo tiempo otras estructuras ocurrieron en algunos experimentos con vórtices mas fuertes. La fotografía 9.7 muestra unas estructuras observadas en un vórtice con una circulación  $0.06 \text{ m}^2/\text{s}$ , un gasto total de  $0.27 \text{ l/s}$ . Estas estructuras se presentaron cuando el aparato para la medición de circulación se atoró en la cortina de popotes.



Fotografía 9.7 Estructuras causadas cuando se atoró el aparato para medir la circulación.



Otras estructuras pueden ocurrir también con salidas sencillos. En la fotografía 9.8 se presentan estructuras que resultaron con el tubo de salida b, que es solo un cilindro.



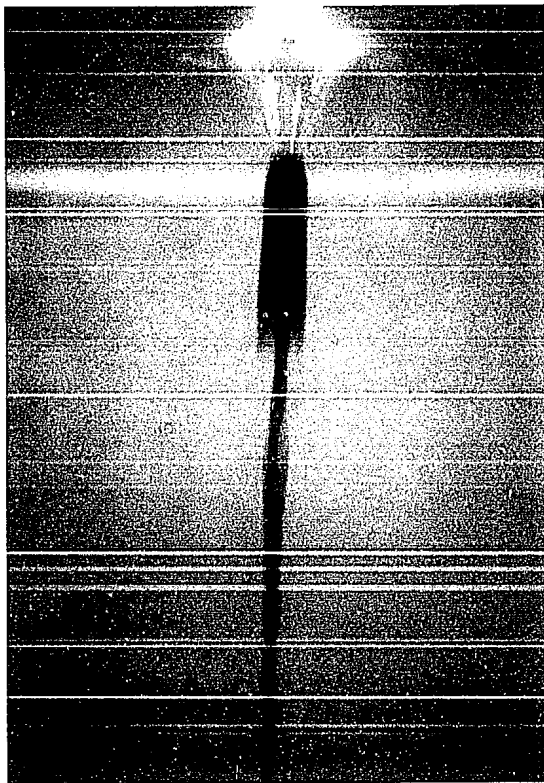
Fotografía 9.8 Estructuras en un vórtice débil con el tubo de salida b.

Parece que estas estructuras son resultados del transporte por convección del colorante. En los vórtices débiles no muy

turbulentos, donde el transporte de la cantidad de movimiento, en la dirección perpendicular al flujo, se debe a la viscosidad, las estructuras pueden llegar a ser complejas y estables. En vórtices mas turbulentos, donde la viscosidad turbulenta es responsable del transporte de la cantidad de movimiento en la dirección perpendicular a la dirección del flujo, estas estructuras no pueden formarse. Esto es debido a la mayor eficiencia de la viscosidad turbulenta como mecanismo de transporte.

### 9.7 La existencia de flujo vertical, ascendente.

Este tipo de flujo ha sido observado por Lewellen (1962) y varios otros investigadores. Evidentemente es de importancia para la existencia de las estructuras secundarias descritas anteriormente.



Fotografía 9.9 Vórtice de la fotografía 9.8 al inicio del experimento.

Aparentemente la fuente principal de flujo vertical se debe a la capa limite del fondo. El flujo en esta capa converge hacia el tubo de salida, pero no todo el flujo puede entrar y parte es obligado a moverse hacia arriba.

La fotografía 9.9 fue tomada cinco minutos antes que la fotografía 9.8. La estructura en 9.8 se puede ligar con la concentración alta de colorante en el centro del vórtice de la fotografía 9.9. Parece que el flujo llega a la superficie y se divide, una parte moviéndose fuera del núcleo y la otra parte entrando al núcleo.

#### 9.8 Origen de las estructuras.

Es interesante observar la semejanza entre las estructuras observadas en un fluido rotatorio, como resultado de gradientes de temperatura, en la investigación hecha por Boubnov y Golitsyn (1986). Es posible que los mecanismos de formación considerados en su trabajo sean semejantes a los que aparecen aquí.

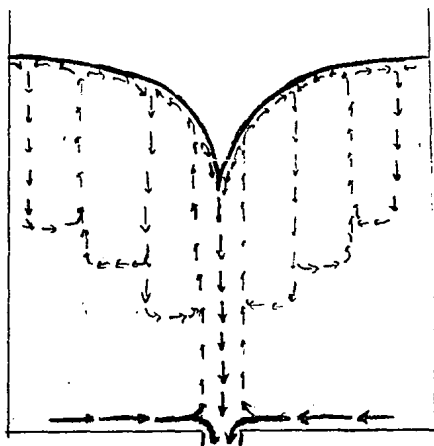


Figura 9.1 Representación de los patrones de flujo.

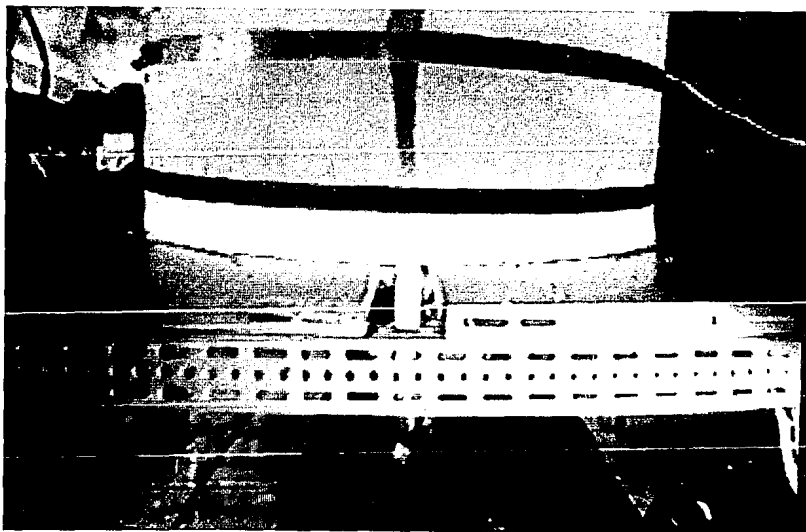
En la figura 9.1 se muestra una representación de los patrones de flujo que podrían causar las estructuras descritas en estos experimentos.

## 10. Evidencia para la existencia del vórtice tridimensional.

El equipo usado permite variar a la velocidad tangencial con la profundidad y se encontró evidencia para apoyar al modelo descrito en la sección 4.7.

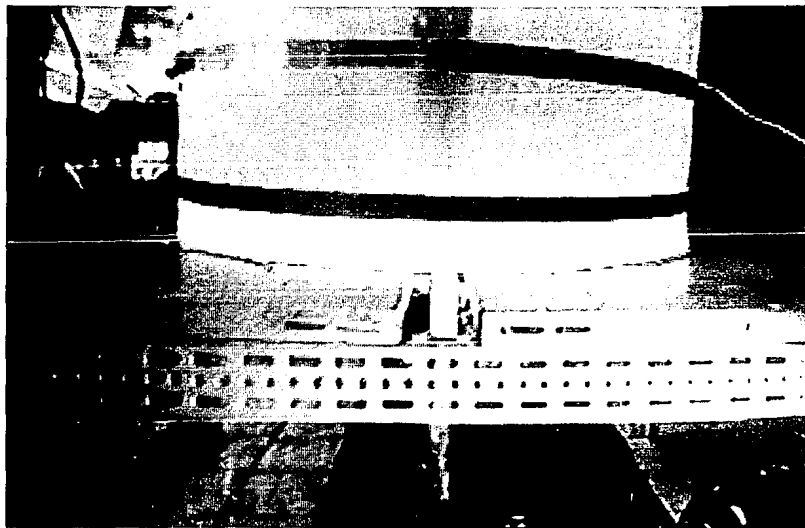
En un vórtice con alto gasto y circulación, y una profundidad de aproximadamente 40cm se observó una variación periódica de la circulación en el tiempo.

En la fotografía 10.1 se muestra un vórtice con un fuerte núcleo de aire, penetrante en el tubo de salida. El núcleo de colorante tiene un diámetro de aproximadamente 2.5cm en el tubo de salida y al salir el chorro se abre a 15cm.



Fotografía 10.1 La variación periódica de la circulación.  $t=0s$

La fotografía 10.2 muestra el mismo vórtice 10 segundos después y la punta del vórtice es 15cm arriba del tubo de salida. El núcleo de colorante tiene un diámetro de 10cm y el chorro de salida solo se abre a 6.0cm.



Fotografía 10.2 La variación periódico de la circulación.  $t=10s$

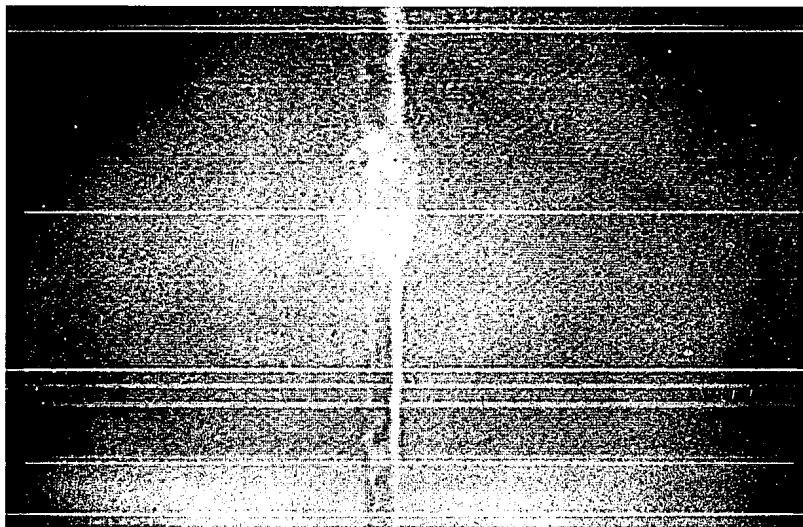
Este patrón se repite periódicamente y fue grabado en video durante cinco minutos sin evidencia de que terminará.

La contracción del núcleo de colorante, la expansión del chorro de salida y el cambio en la profundidad del núcleo de aire, muestran la variación de la circulación con el tiempo y la profundidad como previó Levi. La forma de la variación parece ser sinusoidal, lo que está de acuerdo con la teoría de E.Levi.

11. Fenómeno de la deformación o separación periódica del núcleo de aire.

11.1 Ocurrencia del fenómeno.

En experimentos preliminares, con el tubo de salida b, se notó que el núcleo de aire parecía separarse periódicamente. Bajo una investigación mas rigurosa fue evidente que no siempre se separó completamente, sino que se deformó en tal forma que parecía un tubo de cobre excesivamente doblado y luego enderezado. El fenómeno se presentó en diferentes vórtices de distintas intensidades. Se presenta un ejemplo en la fotografía 11.1.

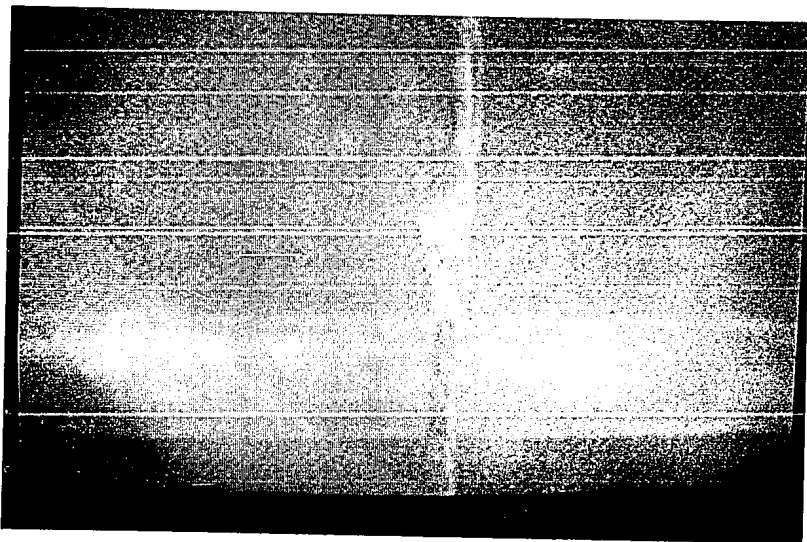


Fotografía 11.1 La forma de la distorsión.

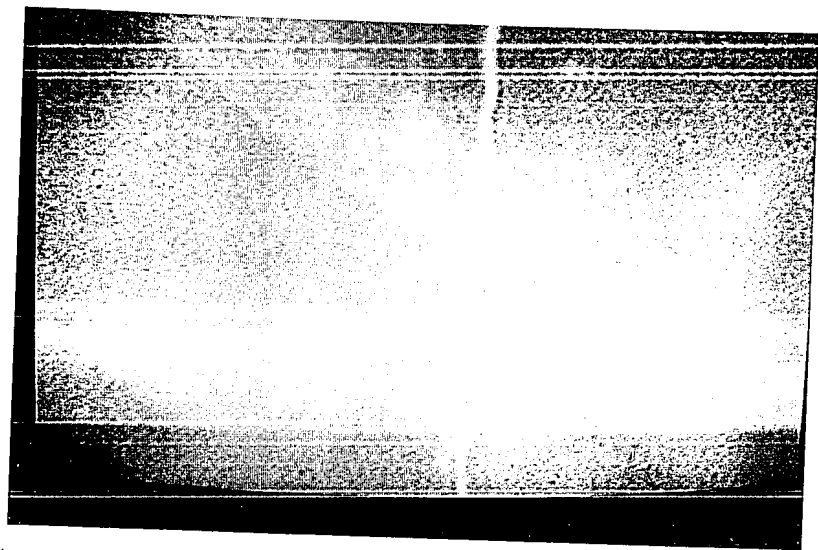


## 11.2 Desarrollo del fenómeno.

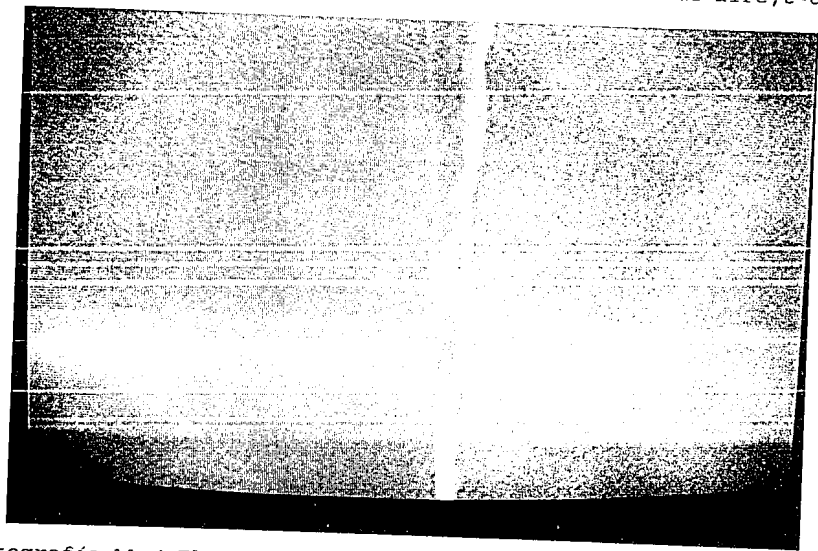
Después de formarse la distorsión, esta se baja por el núcleo de aire rotando con el flujo y saliendo por el tubo de salida. Esto se ve en la serie de fotografías 11.2, 11.3, 11.4.



Fotografía 11.2 El fenómeno de distorsión del núcleo de aire,  $t=0$



Fotografía 11.3 El fenómeno de distorsión del núcleo de aire,  $t=0.1s$



Fotografía 11.4 El fenómeno de distorsión del núcleo de aire,  $t=0.2s$

### 11.3 Variabilidad del fenómeno.

En un vórtice dado, la deformación inicial siempre se presenta al mismo nivel. Cuando aumenta el gasto, este nivel baja hacia el tubo de salida. En este experimento se usó siempre el mismo tubo de entrada, por lo que un aumento en el gasto implica un aumento en la circulación.

La deformación parece presentarse donde el núcleo de aire tiene un diámetro de 7mm, aunque no se hicieron mediciones precisas. El nivel en que se presenta este diámetro depende de la circulación y el flujo en el núcleo.

### 11.4 Causas del fenómeno - un modelo tentativo.

Las causas de este comportamiento no son claras. Un modelo tentativo resulta de la idea de que la intensidad es una función de la coordenada  $z$  y el tiempo.

Es posible ver que al acercarse una barra de metal al núcleo de aire el mismo tiende a cerrarse. Esto se debe principalmente a la reducción de la velocidad tangencial del fluido. Esta reducción implica una disminución de la circulación. El cierre resulta porque la combinación de las fuerzas de tensión superficial y presión, es mayor que la fuerza de inercia que mantiene la movimiento circular.

Ahora, si la circulación es función de  $z$  y  $t$ , entonces debe presentarse una variabilidad periódica en el diámetro del núcleo del aire. Tal distorsión se moverá por el núcleo de manera semejante que el fenómeno observado. Es necesario asumir que la circulación depende del tiempo y de  $z$  para explicar la naturaleza periódica del fenómeno.

Sin embargo el fenómeno parece ocurrir en forma repentina para un diámetro específico. Para explicar este comportamiento es necesario hacer mas suposiciones, tales como la creación de una superficie de energía mínima.

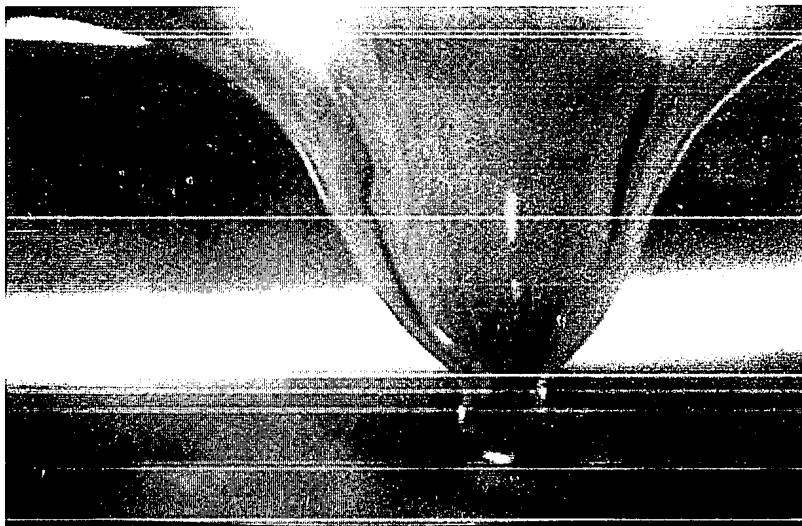
Así que el modelo tentativo del fenómeno propone una variación periódica de la circulación con el tiempo y la profundidad. Cuando la circulación es baja el núcleo tiende a cerrarse y resulta un cambio repentino en la forma de la superficie. Esta deformación baja por el núcleo con la zona de baja circulación. El nivel en que se presenta este fenómeno depende de la circulación y el gasto en el núcleo. Para entender bien este fenómeno se requiere un estudio más completo.

## 12. Ondas en la superficie del agua.

### 12.1 Generalidades

El objetivo de esta sección es presentar algunas observaciones de las pequeñas estructuras que ocurren en la superficie del agua en la región del núcleo del vórtice. De esta manera se muestra la complejidad del fenómeno del vórtice y la insuficiencia de los modelos sencillos para representar el flujo en la región del núcleo del aire.

### 12.2 La formación de una burbuja en un vórtice débil.

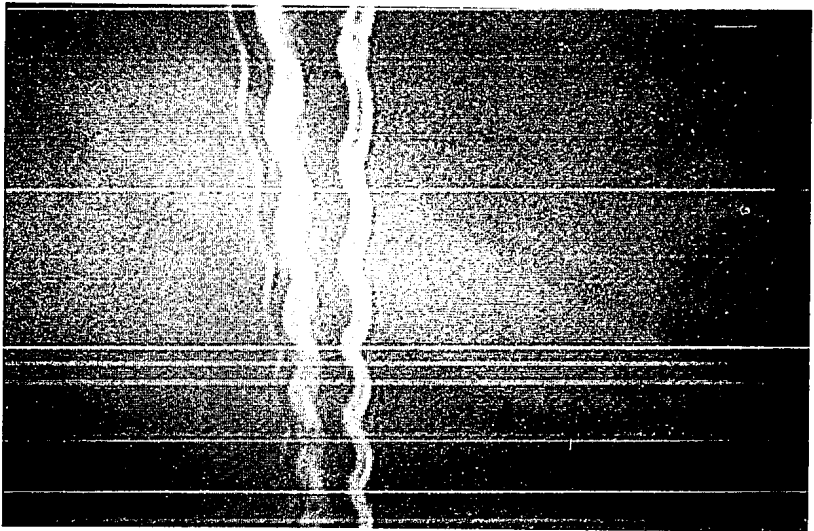


Fotografía 12.1 Burbuja esférica abajo de la depresión de la superficie de un vórtice débil.

La forma esférica de la burbuja en la fotografía 12.1 indica que esta relacionado con la tensión superficial y por lo tanto con superficies de energía mínima. La burbuja no se forma completamente sino que desaparece y reaparece de una manera variable.

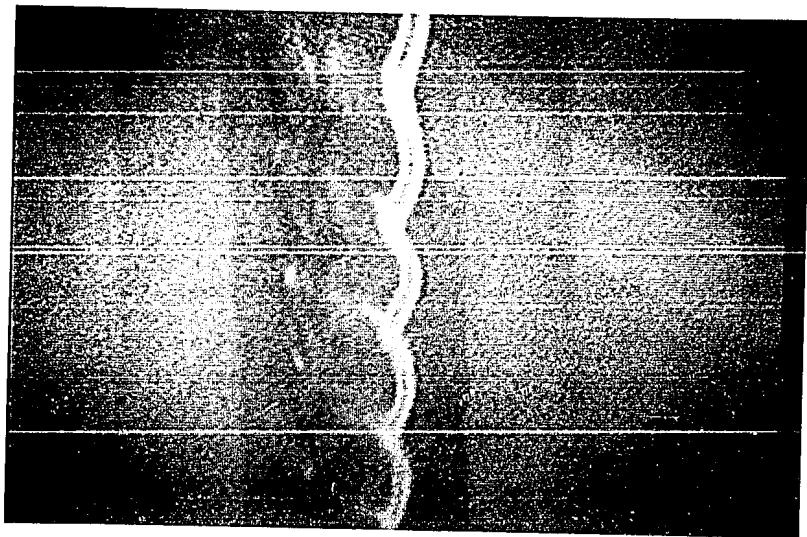
### 12.3 Ondas de superficie en el núcleo de aire.

Las perturbaciones en la superficie, lejos del núcleo, se propagan hacia el centro en forma de ondas pequeñas. La longitud de onda es corta, típicamente menos de 10cm, y esto indica que son ondas de tensión superficial y no de gravedad. Esto se confirma por el hecho de que el movimiento sigue aun cuando la superficie sea vertical.



Fotografía 12.2 Ondas de la superficie en la región media de un vórtice de intensidad media.

En la fotografía 12.2 las ondas parecen tener una simetría axial y tener una curvatura esférica. En la fotografía 12.3 se muestra el mismo vórtice que en la fotografía 12.2, pero mas cercano a la punta y con una amplificación óptica mayor. En este caso la superficie tiene una forma parecida a un tornillo.



Fotografía 12.3 Ondas de superficie en la región baja del núcleo de aire, en un vórtice de intensidad media.

#### 12.4 Formas de la superficie en la punta del vórtice.

Las ondas fuertes consideradas en la sección anterior se asocian con vórtices de intensidad media o fuerte en los cuales el núcleo de aire es completo. Así que la punta del vórtice no es visible y la estructura de las ondas en esta región no es accesible.

Sin embargo, como se han visto en la sección 8.2, es posible controlar la ubicación de la punta del vórtice de cualquier intensidad por medio de restringir el flujo en la región del núcleo. Cuando se hace esto, con el tubo de salida c, se presentaron algunas estructuras interesantes.

En la fotografía 12.4 se muestra la punta de un vórtice de intensidad media, mantenido a un nivel de 6cm arriba de la salida. Parece que la longitud de onda, es decir la distancia entre las crestas, reduce hacia la punta.



Fotografía 12.4 Ondas superficiales a la punta de un núcleo de aire refrenado.





Fotografía 12.5 Ondas superficiales en la punta de un núcleo de aire penetrante.

En la fotografía 12.5 se muestra el mismo vórtice, pero en este caso la amplificación óptica es mas grande y el núcleo de aire penetra en la salida. Los mismos tipos de transformaciones son evidentes pero no tan fuertes.

En la fotografía 12.6 se muestra la coexistencia de la forma sinuosa y las ondas superficiales. Normalmente se encuentran los núcleos de aire sinuosos cuando la penetración es incompleta o débil, y por tanto en vórtices de baja intensidad.



Fotografía 12.6 Ondas superficiales y la carácter sinuosa de un núcleo de aire penetrante en un vórtice de intensidad baja.

#### 12.5 Causa de las formas de las ondas superficiales en la punta.

Parece probable que la forma de las ondas en la punta resultan de transformaciones análogas a las de 'shoaling' en ondas de gravedad. Así que se deben a la conservación de la energía superficial.

Como la onda se baja por el núcleo de aire, el área de la superficie se reduce y son necesarios distintas formas de la superficie para acomodar la energía superficial. Esto explicaría los cambios en la forma y la amplitud de las ondas.

El efecto de una corriente en las ondas de gravedad es aumentar o reducir la longitud de onda; el fenómeno parece ser reproducido por estas ondas superficiales. Se presenta este tipo de transformación en las fotografías 12.4 y 12.5. Es posible que tengan que ver también con el cambio de formas esféricas a espirales, mostrado en las fotografías 12.2 y 12.3.

12.6 Efectos posibles de las ondas superficiales en la punta de los vórtices de baja intensidad.

Se ha observado que la punta del núcleo de aire tiene una oscilación rápida, Echávez (1992): hasta la fecha no existe una explicación concluyente de esto. Las ondas superficiales consideradas en esta sección pueden ofrecer una posible explicación. Si una perturbación de amplitud pequeña se produce lejos del núcleo y ésta se transporta hacia el núcleo, sufriendo las mismas transformaciones, como se vió en la sección anterior, la punta del núcleo se abriría y cerraría periódicamente; esto aparecería como una oscilación.

### 13. Conclusiones.

Se han presentado las bases teóricas así como los modelos matemáticos del fenómeno mas importantes. Los problemas debidos a la complejidad matemática y la incertidumbre con respecto a las condiciones de frontera, fueron identificados como las razones por las cuales los modelos no han tenido mucho éxito.

Se ha considerado el proceso de la formación del vórtice por medio del principio de la conservación de la cantidad de movimiento angular, ya que este concepto es mas accesible al ingeniero que la circulación o la vorticidad. Se ha usado la idea de equilibrio entre la cantidad de movimiento angular entrando y saliendo del sistema, para explicar algunos de los fenómenos asociados con el vórtice, como la depresión de la superficie y la profundidad crítica. También se mostraron los cambios en los patrones de flujo cuando la circulación aumenta.

El proceso de hacer modelos físicos y el concepto de semejanza dinámica fueron considerados. Se explicaron algunos de los resultados y opiniones de los investigadores como consecuencias de la interrelación entre los fenómenos asociados con el vórtice y el uso de criterios inadecuados para modelar vórtices. Se hizo énfasis en la necesidad de un entendimiento claro de las estructuras de flujo internas, para determinar criterios racionales para modelar el fenómeno. También se presentaron explicaciones del éxito que ha tenido el criterio de Froude en modelar algunos aspectos del vórtice.

Se presentaron los resultados de una investigación experimental con posibles explicaciones de los fenómenos observados.

Las observaciones de la distribución del flujo mostraron que las condiciones de frontera, usados en muchos modelos teóricos, son

inadecuados. Al mismo tiempo se identificaron los criterios usados para modelar el vórtice que no puede garantizar semejanza dinámica en la región del núcleo.

Otro resultado fue señalar la importancia de las condiciones en la salida y en particular la distribución de presión en esta zona para determinar la profundidad del núcleo de aire.

Bajo ciertas condiciones se presentaron estructuras de flujos secundarios. Estas estructuras indican una riqueza de forma normalmente no asociada con este tipo de vórtice.

Se presentaron los resultados que apoyan la existencia del vórtice tridimensional como predijo Levi. También se consideró la importancia de tener una sola entrada, y por tanto variabilidad en la velocidad de entrada, para la ocurrencia de este vórtice.

El fenómeno de distorsión del núcleo fue descrito por primera vez y la relación con el vórtice tridimensional fue considerado.

Se mostraron las formas y transformaciones de las ondas superficiales en el núcleo de aire, así como la importancia de la conservación de energía superficial y la analogía con ondas de gravedad.

Los resultados de este trabajo demuestran otra vez la complejidad del fenómeno y las dificultades en modelarlo. Al mismo tiempo surgen varios puntos de interés al ingeniero y posibles áreas de investigación en el futuro.

El ingeniero hidráulico debe entender bien todo los aspectos importantes del vórtice para diseñar obras en las que existe la posibilidad de su ocurrencia. La consideración de la cantidad de movimiento angular, y su generación, transporte etc., como fue

presentado en este trabajo, ayuda a clarificar los elementos claves y provee explicaciones sencillas de los fenómenos asociados con los vórtices. También el conocimiento de la posibilidad de efectos tridimensionales, y la existencia de dos zonas de flujo son importantes para el ingeniero. Los comentarios con respecto al uso y construcción de parámetros adimensionales, y el concepto de semejanza dinámica tienen interés para el ingeniero involucrado en los modelos físicos.

Desde el punto de vista de la investigación surgen varios trabajos posibles. Los principales dentro de ellos son: un estudio de las causas y límites para la formación de los flujos secundarios, el desarrollo de modelos matemáticos que toman en cuenta la capa límite, una investigación del vórtice tridimensional, y consideración de los fenómenos asociados con el vórtice por medio del principio de la cantidad de movimiento angular.

Un equipo mas completo, con aparatos para medir la distribución de presión en la salida y tal vez una cámara de alta velocidad para medir velocidades, seria necesario.

Este estudio indica algunas razones por las cuales el campo del vórtice libre queda no resuelto, también señala la posibilidad de mejorar la situación.

#### 14. References.

Allen, J y Taylor, G.A. 1958. A Note on Free Vortices Observed in Scale Model Tests of a Bellmouth Overflow Spillway. Proc of the Institute of Civil Engineers, London, UK, vol 10.

Amphlett, M.B. 1979. Vortex Formation at Vertical Pipe Intakes; Discussion of Jain et al.(1978) ASCE, J. Hydraul. Div. HY10.

Anwar, H.O. 1965. Flow in a Free Vortex. Water Power 1965(4).

Anwar, H.O. y Amphlett, M.B. 1980. Vortices at Vertically Inverted Intake. Journal of Hydraulic Research, 1980, Vol.18 No.2

Anwar, H.O., Weller, J.A y Amphlett, M.B. 1978. Similarity of Free-Vortex at Horizontal Intake. Journal of Hydraulic Research, 1978, Vol.16 No.2

Babb, A.F. y Mih, W.C. 1984. Selection of Model Test Programs with Reference to Viscous and Gravity Force Similitude. Proceedings of the IAHR/DVWK Symposium on Scale Effects in Modelling Hydraulic Structures, Paper 6.2. Technische Akademie Esslingen.

Batchelor, G.K. 1967. An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press.

Berge, J.P. 1966. A Study of Vortex Formation and Other Abnormal Flow in a Tank with and Without a Free Surface. La Houille Blanche 1966(1).

Bhatt, A.F. y Shah, B.P. 1981. Problems of Vortex Simulation in Models. IAHR Congress New Delhi, Subject D(a), Paper No.12.

Biesel, F. 1955 Remarks on Drain Vortex Phenomena. La Houille

Blanche 1955(4).

Blaisdell, F.W. 1979. Vortex Formation at Vertical Pipe Intakes: Discussion of Jain et al. (1978). ASCE J. Hydraul. Div. HY10.

Boillat, J.L., Bruschin, J. and Rolewicz, D. 1984. A Boundary Layer Suction Vortex Suppressor. Proc. of the IAHR/DVWK Symposium on scale effects in modelling Hydraulic Structures, Paper 6.6 Technische Akademie Esslingen.

Boubnov, B.M. y Golitsyn, G.S. 1986. Experimental Study of Convective Structures in Rotating Fluids. JFM 1986. Vol.167 pp. 503-531

Chang, E. y Prosser, M.J. 1987. Basic Results of Theoretical and Experimental Work. Swirling Flow Problems at Intakes, IAHR Hydraulic Structures Design Manual.

Daggett, L.L. y Keulegan, G.H. 1974 Similitude in Free-Surface Vortex Formations. ASCE J. Hydraul. Div. 100(11).

Dhillon, G.S., Sakhuja, V.S. y Paul, T.C. 1981. Modelling Criteria For Vortex Formation at Pipe Intakes. IAHR Congress New Delhi, Subject D(b), Paper No.7.

Echávez G. y Bremauntz C,. 1976. Correlación Espuria en la Ingeniería Hidráulica. IV Congreso Nacional de Hidráulica, Acapulco Mexico.

Echávez G., 1992. Estabilidad de Vórtices con Pequeñas Perturbaciones. XV Congreso Latinoamericano de Hidraulica, Columbia.

Einstein, H.A. y Li, H. 1955. Steady Vortex in a Real Fluid. La Houille Blanche 1955(4).



Farell,C. y Cuomo,A.R. 1981. Introduction to the Study of Vortex Dynamics and Similitud in Free Surface Flows. Cenvenio Departtamento de Aguas e Engergia Eletrica e Escola Politecnica da Universidade de Sao Paulo.

Granger,R. 1966. Steady Three-Dimensional Vortex Flow. JFM 25(3) 1966 pp. 557-576.

Gullliver,J.S. y Rindels,A.J. 1987. Weak Vortices at Vertical Intakes. ASCE J. Hydraul. Div. 113(9).

Hecker,G.E. 1987. Fundamentals of Vortex Intake Flow. Swirling Flow Problems at Intakes, IAHR Hidraulic Structures Design Manual.

Hecker,G.E. Scale Effects in Modelling Vortices. Proceedings of the IAHR/DVWK Symposium on Scale effects in Modelling Hydraulic Structures, Paper 6.1. Technische Akademie Essligen.

Hecker,G.E. 1981 Model-Prototype Comarison of Free Surface Vortices. ASCE J. Hydraul Div.107, HY10, October 1981.

Holtorff,G. 1964. La Surface Libre et Conditions de Similitud du Vortex. La Houille Blanche 1964(3).

Hughes,R.L. 1975. Similitud in Free Surface Vortex Formations: Discussion of Daggett and Keulegan (1974). ASCE. J. Hydraul. Div. 101, HY9.

Jain,A.K., Ranga Raju,K.G. y Garde,R.J. 1978. Vortex Formation at Vertical Pipe Intakes. ASCE J. Hydraul. Div. 104 HY10.

Jain,A.K.,1981. Physical Modelling of Vortices at Intakes. IAHR Congress New Delhi, Subject D(b), Paper No.16.

Jeanpierre,D. y Lachal,A. Dissipation d'energie dans un puits a vortex. La Houille Blanche 1966(7).

Julien,P.Y. 1986. Concentration of Very Fine Silts in a Steady Vortex. Journal of Hydraulic Research, Vol.24 No.4.

Kolf,R.C. 1959 The Vortex Chamber as an Automatic Flow-Control Device. ASCE J. Hydraul. Div. 85 HY12.

Kreysig,E. 1988. Advanced Engineering Mathematics, 6th Ed. John Wylie and Sons.

Kulkarni,V.K. y Shah,B.P. 1987. Study of Throat Submergence Froude Number at Vortex Formation. IAHR Congress Lausanne.

Lamb,H. 1945. Hydrodynamics, 6th Ed. Dover

Levi,E. 1965. Metodos Matematicos, UNAM

Levi,E. 1971. Efficiency of Air Entraining Vortex Formation at Water Intake: Discussion of Quick (1970). ASCE J. Hydraul. Div. HY3.

Levi,E. 1972. Experiments on Unstable Vortices. ASCE J. Engng. Div. 98 EM3.

Levi,E. 1989. El Agua Segun La Ciencia, Ediciones Castell Mexicanas,S.A.

Levi,E. 1991. Vortices in Hydraulics. ASCE J. Hydraul. Div. 117(4)

Levi,E. 1991. Mecanica de los Fluidos, UNAM

Lewellen,W.S. 1962. A Solution for Three-Dimensional Vortex Flows with Strong Circulation. JFM 14(3) pp.420-433.

Lundgren,T.S. 1985. The Vortical Flow Above the Drain Hole in a Rotating Vessel. JFM 155 pp.381-412.

Markland,E., McCorquodale,J. y Anwar,H.O. 1969. Effects of Viscosity on Vortex-Orifice Flow; Discussion of Zielinski and Villemonte (1968). ASCE J. Hydraul. Div. HY1.

Marris,A.W. 1967. Theory of the Bathtub Vortex, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME March, pp.11-15.

Martins,R. 1984. Vortex Similitud in Hydraulic Models. Proceedings of the IAHR/DVWK Symposium on Scale Effects in Modelling Hydraulic Structures, Paper 6.9. Technische Akademie Esslingen.

McCorquodale,J.A. 1968. Scale Effects in Swirling Flow. ASCE J. Hydraul. Div. HY1.

Odgaard,A.J. 1984. Fluid Properties and their Scale Effects in Froude-Scaled Hydraulic Models. Proceedings of the IAHR/DVWK Symposium on Scale Effects in Modelling Hydraulic Structures, Paper 6.10. Technische Akademie Esslingen.

Odgaard,A.J. 1986. Free-Surface Air Core Vortex. ASCE J. Hydraul. Div. 112(7).

Padmanabhan,M. 1984. Air Ingestion Due to Free Surface Vortices. ASCE J. Hydraul. Div.(tech. note) 110(12)

Padmanabhan,M. y Hecker,G.A. 1984. Scale Effects in Pump Sump Models. ASCE J. Hydraul. Div. 110(11)

Quick,M.C. 1970. Efficiency of Air Entraining Vortex Formation at Water Intake. ASCE J. Hydraul. Div. 96(7).

Ranga Raju,K.G. y Garde,R.J. 1987. Modelling of Vortices and Swirling Flows. Swirling Flow Problems at Intakes, IAHR Hidraulic Structures Design Manual.

Rayleigh,Lord. 1916. On the Dynamics of Revolving Fluids. Proceedings of the Royal Society, A, Vol. 43. pp 148-154.

Reddy,Y.R. y Pickford,J.A. 1972. Vortices at Intakes in Conventional Sumps. Water Power, March 1972.

Reddy,Y.R. y Pickford,J.A. 1974. Vortex Suppression in Stilling Pond Overflow. ASCE J. Hydraul. Div. 100(11).

Schulthess,D. 1984. Model Tests with Vortices- El Cajon Project(Honduras). Proceedings of the IAHR/DVWK Symposium on Scale Effects in Modelling Hydraulic Structures, Paper 6.5. Technische Akademie Essligen.

Vatistas,G.H. 1989. Analysis of Fine Particle Concentrations in a Combined Vortex. Journal of Hydraulic Research Vol. 27 No.3.

Venkataramana,S. y Dinakar,P.J. 1984. On the Conflicting Modelling Criteria, Causative Scale Effects and the (in) Compatability of Scale Modelling of Vortices - A case Study. Proceedings of the IAHR/DVWK Symposium on Scale Effects in Modelling Hydraulic Structures, Paper 6.8. Technische Akademie Essligen.

Venkataraman,C.P., Dhillon,G.S, Sakhuja,V.S. y Paul,T.C. 1981. Modelling Criteria For Vortex Formation at Pipe Intakes. IAHR Congress New Delhi, Subject D(b), Paper No.8.

Wijdieks, J. 1984. Practice and Criteria of Pump Sump Model Investigation. Proceedings of the IAHR/DVWK Symposium on Scale Effects in Modelling Hydraulic Structures, Paper 6.4. Technische Akademie Esslingen.

Woodford, D.J. 1964. Prediction of the Length of the Air Core in Vortices of Weak Circulation. La Houille Blanche 1964(8).

Zielinski, P.B. y Villamonte, J.R. 1968. Effect of viscosity on Vortex Flow. ASCE J. Hydraul. Div. 94(3).