3
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE FILOSOFIA Y LETRAS

LA INTRODUCCION DEL CALCULO LOGICO EN FREGE

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL TITULO:

LICENCIADO EN FILOSOFIA

P R E S E N T A :

AXEL ARTURO BARCELO ASPEITIA

ASESOR: LIC. RAUL ORAYEN

MEXICO, D. F. 1993

Indice

Prólogo

Introducción 1

I. ¿ Qué es la Conceptografía ? 8
A. Sobre los contenidos (9) B. Contenido conceptual y conceptografía (21) C. La Conceptografía como Herramienta y Cartografía (25)

II. Simbología 30
A. Una clasificación de los símbolos de la Conceptografía (32) B.Letras (44) C.Cuantificadores (50)

III. ¿ Es la Conceptografía una Teoría Formal ? 58
Apéndice: Conceptografía y Notación Horizontal (73)

IV. Representación y Derivación de Algunos Juicios del Pensamiento puro 79
A. Pruebas y demostraciones (79) B. Representacion y Derivación de Algunos Juicios del Pensamiento puro (85)

Epílogo: ¿ Por qué abandona Frege su primer Conceptografía ? 112
A. Sentido y Referencia (115) B. Concepto y Valor de Verdad (119)

Conclusiones 127

Bibliografía 133

PROLOGO

Esta tesis lleva como título La Introducción del Cálculo Logico en Frege por varias razones. Las mas obvias son que la mayoría del trabajo de investigación que se hace en esta tesis cae dentro del campo de la lógica y, además, que se centra en la obra del filósofo y matemático alemán Gottlöb Frege. Creo que, por lo menos, este aspecto es claro. Sin embargo, aún es necesario explicar con mas detalle a que se refieren el resto de los elementos mencionados en el título. En primer lugar, hablo de "cálculo" porque el objeto de estudio de este trabajo no es todo el pensamiento lógico de Frege, sino sólo su parte puramente formal, la que comúnmente se llama, precisamente, "Cálculo". Respecto a este punto, sigo al historiador de la Lógica I.M. Bochenski, para quién una de las mas importantes diferencias de la Lógica Matemática inaugurada por Frege, con respecto a las formas anteriores de lógica, es que por primera vez esta toma la forma de un cálculo.

> En primer lugar, en esta forma de la Lógica se trata siempre de un *cálculo*, es decir, de un método formalístico, que consiste fundamentalmente en que las reglas de las operaciones se refieren a la *forma* de los signos y *no* a su *sentido*, exactamente igual que en matemáticas.[1]

Hablo, además, de "introducción", porque este estudio no abarca la teoría formal de Frege en toda su compleja evolución, sino que se restringe a su primer sistema de cálculo lógico, lo que él llama su primer conceptografía. Este primer sistema fue presentado por Frege en su primer gran obra La Conceptografía (1879) y en ella se centra casi todo el análisis de esta tesis.

Existe relativo consenso entre los historiadores de las ideas en considerar a Frege como uno de los mas importantes filósofos de su época, es decir, finales del siglo diecinueve e inicios del veinte. Casi todos los estudiosos de la Lógica y de su Historia lo ubican, sobre sus contemporáneos Pierce, Peano y Schröder, como el verdadero creador de la lógica moderna o matemática. Sus trabajos en Filosofía y Matemáticas abrieron nuevos horizontes dentro de campos tan variadas como la Lógica, la Filosofía de las Matemáticas y la Semántica Filosófica. Con su Conceptografía (1879), Frege inauguró, no solamente la era matemática en la Lógica sino también lo que posteriormente ha sido conocido como Filosofía Analítica[2]. Pese a ser uno de los grandes nombres dentro de la historia del pensamiento contemporáneo, no toda la obra de Frege cuenta con el mismo prestigio y actualidad. Mientras que las contribuciones de Frege a la Filosofía del Lenguaje y de las Matemáticas siguen siendo centrales en el debate actual, sus aportaciones en el campo de la lógica formal, sin ser menos importantes o novedosas para su tiempo, son consideradas arcaicas y superadas. Es por ello que, a diferencia de otras obras de Frege como Los Fundamentos de la Aritmética o el quasiubicuo *Sobre el Sentido y la Referencia*, pocos especialistas se dedican al estudio de la Conceptografía.

Es clara la línea que partiendo de la Conceptografía, pasando por Carnap, Fraenkel, Russell, Gödel, y las mismas Leyes Fundamentales... de Frege, se continúa hasta las mas recientes teorías formales de la lógica matemática. Sin embargo, esta línea no describe un simple proceso progresivo de perfeccionamiento, sino una línea evolutiva que, como tal, desarrolla ciertos aspectos de sus antecedentes y hace desaparecer otros. Es así como, a partir de 1879, ciertos elementos de la primera conceptografía de Frege se han ido desarrollando hasta conformar la lógica matemática tal y como la conocemos ahora. En ese mismo proceso, sin embargo, muchos otros elementos se han ido desvaneciendo hasta casi desaparecer.

El objetivo de esta investigación es explorar los elementos formales de la primera conceptografía de Frege poniendo atención no sólo a los elementos que han sobrevivido la prueba del tiempo, sino también a aquellos que han pasado inadvertidos a través de la historia y en este momento se encuentran casi olvidados. De esta manera se puede dar una imagen mas completa del pensamiento filosófico de Frege, poniendo de relieve su parte original y dejando de verlo sólo como un antecedente de la lógica matemática contemporánea[3].

Como una especie de introducción, presento un pequeño texto que ubica a la Conceptografía dentro de la obra lógico-filosófico de Gottlöb Frege. En este sentido, está escrito de una manera muy sencilla y difícilmente podría decirse que es un texto filosófico, simplemente es una introducción para el lector que no está familiarizado con la vida y pensamiento de este extraordinario filósofo y matemático alemán. Cuenta en qué momento de su vida y la evolución de su pensamiento, apareció publicada y, por lo tanto, qué lugar ocupa dentro de la amplia obra de Frege. La relaciona que guarda esta obra con la crítica de su autor a las propuestas de fundamentación de las matemáticas vigentes en su tiempo, y con su proyecto logicista.

En el primer capítulo me propongo responder a la pregunta obligatoria ¿ Qué es una conceptografía ? haciendo Referencia, no tanto a la obra así titulada, como al concepto fregeano de conceptografía. Para responder esta pregunta es necesario, por lo menos, conocer un poco de la semántica de Frege. En este capítulo, pues, hago un breve análisis de algunas nociones centrales de la semántica fregeana como son *contenido judicable*, *proposición*, etcétera, poniendo un especial acento en el *contenido conceptual*, ya que a través de él nombra Frege la forma lógica de los pensamientos en tanto contenidos de nuestras expresiones. Por último, expongo algunas de las razones por las cuales Frege cree que lo mas conveniente es que este lenguaje artificial sea también simbólico y escrito.

El segundo capitulo tiene como objetivo exponer el funcionamiento de los símbolos que usa Frege en su Conceptografía. Cualquiera que se haya asomado a esta obra, seguramente recordará la extraña simbología con la cual Frege presenta sus formulas y juicios. Esta característica es un fuerte obstáculo para el acercamiento al pensamiento de Frege. Sin embargo, algunos de los elementos mas originales de la primera conceptografía de Frege se encuentran en el funcionamiento de sus símbolos.

Distinguiendo tres niveles de representación: el nivel los nombres, el de los contenidos y el de los juicios y haciendo uso de la distinción entre símbolos de sentido fijo y de sentido no-fijo (Letras), elaboro un cuadro completo de los símbolos usados no sólo en el lenguaje, sino también el meta-lenguaje de la conceptografía. Además, ubico el uso que da Frege a las letras y el cuantificador universal con respecto a la lógica matemática contemporánea. Para la letras, me refiero de manera directa a la distinción entre letras esquemáticas y variables de cuantificación y, para el cuantificador, a la distinción entre interpretación sustitucional e interpretación objetal, según la presentación que hace Quine de ellas en la cuarta edición de su Methods of Logic[4], aunque también me auxilio de los textos From a logical point of view[5], la edición revisada de Mathematical Logic[6] de Quine y Philosophy of Logic[7] de Susan Haack.

El tercer capítulo tiene como objetivo responder una pregunta específica sobre la conceptografia. Esta pregunta es ¿ es la conceptografía una teoría formal ? Como el pensamiento fregeano no contempla la noción de "Teoría Formal", me valgo de la definición que aparece en el texto de Elliott Mendelson Introduction to Mathematical Logic[8] según la cual, toda teoría formal debe satisfacer cuatro condiciones básicas: simbología, wffs, axiomas y reglas de inferencia. Lo que yo intento en este capítulo es definir la primera conceptografía de Frege como un sistema formal, satisfaciendo esencialmente cada una de las condiciones citadas por Mendelson. Para ello, es necesario hacer toda una traducción de la Conceptografía a la terminología de la lógica matemática contemporánea. En un Apéndice a este capítulo, doy una sencilla técnica paso por paso para traducir entre la notación horizontal estandard y la usada por Frege en su primera conceptografía.

El cuarto capítulo de mi tesis está dedicado a las pruebas y demostraciones de los juicios del pensamiento puro que expone Frege, a través del lenguaje de su conceptografía, en las últimas páginas de la Conceptografía. En la primera parte del capítulo explico que, para la conceptografía, las nociones de "prueba" y "demostración" no se identifican. Sólo se llama "pruebas" a las demostraciones formales, es decir, aquellas que toman la forma de *modus ponens* o cadenas de *modus ponens*. Sin embargo, Frege da también demostraciones semánticas de algunos juicios. En esta capítulo analizo y reconstruyo ambos tipos de pruebas de tal manera que gran parte del capítulo está dedicado a reconstruir las cadenas de inferencias que presenta Frege en su libro. Para facilitar su lectura y ahorrar espacio, las he traducido a una simbología horizontal similar a la que utiliza Mendelson en su citado libro de Lógica matemática.

Pese a los fuertes logros de esta primera conceptografía, la evolución del pensamiento de Frege hizo necesaria la elaboración de una segunda teoría formal. A menos de veinte años de la redacción de la Conceptografía, Frege presentó en su obra Las leyes fundamentales de la Aritmética[9], una segunda y mas elaborada conceptografía, en la cual se incluían los resultados de las investigaciones que realizó Frege durante los años que siguieron a la publicación de la Conceptografía. Pese a que el propósito de tales textos era sólo elucidar en mayor detalle algunos conceptos fundamentales de la Conceptografía, como *función, concepto,* etcétera, el resultado de tales precisiones revolucionó tanto el sistema original, que fue necesario crear uno nuevo. El quinto y último capítulo se centra en el resultado de estas investigaciones y en las razones que llevaron a Frege a elaborar una segunda conceptografía. No trato de exponer toda la nueva conceptografía de Frege ni sus diferencias con respecto a la primera, sino únicamente los motivos que lo llevaron a abandonar algunos elementos y desarrollar otros.

No quisiera olvidarme de mencionar y agradecer a todas las personas e instituciones que hicieron posible esta tesis. En primer lugar, al Instituto de Investigaciones Filosóficas y sus directores León Olivé y Olbeth Hansbergh quiénes siempre mostraron su apoyo por este proyecto, también a la Dirección general de Asuntos del Personal Académico de la U.N.A.M. por la beca otorgada para la realización de esta tesis y, por supuesto, a mi asesor Raúl Orayén por todo lo hecho por mí dentro del Instituto. Merecen una mención especial también el Dr. Sergio Martínez quién desinteresadamente ha estado siempre apoyándome y aconsejándome desde que pertenezco al Instituto y el Lic. Arturo G. Yañez quién revisó concienzudamente algunas versiones preliminares de esta tesis. Sin todos ellos, este texto simplemente no existiría.

Notas y Referencias Bibliográficas.

1. Bochenski, I.M.: Historia de la Lógica Formal Gredós, Madrid, 1985. p.281
2. Frege...puso en marcha a la vez la lógica simbólica y la filosofía del lenguaje, y su herencia pesó no menos en la teoría del significado que en el desarrollo de los cálculos lógicos o en la filosofía de la Lógica. Hierro S.P., José: Principios de Filosofía del Lenguaje. Vol 2., Alianza Ed., Madrid, 1982 pp.11.12. No obstante es Frege, sin ningún género de duda, el más importante de todos los pensadores de la Lógica matemática. Bochenski, I.M.: Historia de la Lógica Formal Gredós, Madrid, 1985. p.284
3. De ahí que, entre otras cosas, haya preferido hablar del sistema formal de Frege como su "Conceptografía", en vez de su "Lógica".
4. Quine,W.v.O.: Methods of Logic Fourth Edition, Harvard U.P., Cambridge, 1982
5. Quine,W.v.O.: From a logical point of view. Harvard U.P., Cambridge, 1961
6. Quine,W.v.O.: Mathematical Logic. Revised Edition, Harvard U.P., Cambridge, 1979
7. Haack,Susan: *Quantifiers* en Philosophy of Logic. Cambridge U.P., Cambridge, 1978
8. Mendelson, Elliott: Introduction to Mathematical Logic. Wadsworth & Brooks, Third edition, Pacific Groove, 1987.
9. Frege, Gottlöb: Grungesetze der Arithmetik. Hildesheim, G.Olms, 1962 Trad. al Inglés: Furth (ed.): The basic Laws of Arithmetic.

La Introducción del Cálculo Lógico en Frege

Introducción

Jena, 1879. A los escasos treinta y un años, el filósofo y matemático alemán Friedrich Ludwig Gottlob Frege edita su primer obra: La Conceptografía [*Begriffsschrift*]. Egresado de la Universidad de Göttingen, Frege llevaba apenas ocho años de docencia en la facultad de matemáticas de la Universidad de Jena cuando publicó su Conceptografía. Gracias a ella fue ascendido a *ausserordentlicher Professor*[1] y pudo, por primera vez, recibir un salario por su actividad docente[2]. En los pocos años que llevaba dentro de la Universidad, Frege se había hecho de una muy buena fama, tanto como profesor como matemático e investigador. Los alumnos lo buscaban, no sólo por el rigor de sus conocimientos, sino también por la claridad de sus exposiciones. Frege sabía cómo evitar la complejidad excesiva aun en la presentación de los temas más oscuros y difíciles de la matemática. Su anterior formación en Göttingen, cuya facultad de matemáticas era más prestigiada que la de Jena, le había dado una formación muy completa, no sólo en matemáticas sino en otras ramas del saber universitario como la física experimental. Además, su participación en la *Jannische Gessellschaft für Medizin und Naturwissenschaft* (de 1874 a 1917) lo puso en contacto con los mas recientes avances de las ciencias naturales. Sin embargo, la Filosofía fue la disciplina que, fuera de las matemáticas, captó en mayor grado la atención de Frege. Desde un principio elaboró trabajos de investigación que no podían llamarse propiamente filosóficos ni propiamente matemáticos. Desde su

Habilitationsschrift hasta los artículos que formaron su *Nachlass*, todos sus textos se ubican en una zona que no se encuentra de lleno dentro del área de las matemáticas, ni del de la Filosofía, sino en una zona limítrofe entre ellas[??] Sin embargo, Gottlöb Frege no era el único investigador interesado en esta extraña zona intermedia entre las matemáticas y la filosofía. Para la segunda mitad del siglo XIX, eran varios los investigadores de ambas disciplinas trabajando temas dentro de lo que posteriormente sería llamado la *filosofía de las matemáticas*.

> Frege no fue, por supuesto, la primera persona que se interesó seriamente por la filosofía de la matemática, pero sí inauguró una manera de hacer investigaciones en esta área: fue el primer autor que propuso una teoría *filosófica* de la aritmética y la desarrolló *técnicamente* con el mayor detalle[??]

El problema principal que impulsó a estos investigadores, Frege incluso, hasta esta zona limítrofe, fue la pregunta por los fundamentos de las matemáticas. A Frege, como a muchos otros filósofos y matemáticos, les preocupaba sobremanera la falta de rigor y precisión con la cual trabajaban los matemáticos de su tiempo, i.e., le preocupaba que trabajaran sin tener un conocimiento claro y definido ni siquiera de sus conceptos más básicos, como el de número o el de magnitud. Un texto temprano de Frege, donde podemos encontrar por primera vez esta preocupación, es su *review* de la obra de H.Seeger The Elements of Arithmetic. Ahí, Frege condena obras que, como la de Seeger, tratan de explicar los fundamentos de la aritmética sin preocuparse por la exactitud y corrección de sus definiciones y demostraciones. Se presume que es a partir de ese momento, y con esta preocupación *in mente*, que Frege empieza a proyectar una obra que sí explique con rigor y claridad los verdaderos fundamentos de la aritmética. A partir de ese momento, las carencias y deficiencias del libro de Seeger se convirtieron en las metas y objetivos de todo su trabajo posterior.

En aquellos años, tres eran las principales tendencias explicativas alrededor de los fundamentos de la aritmética. En primer lugar, se encontraban los **psicologistas**, para quiénes los números no eran más que construcciones mentales y las operaciones matemáticas se identificaban con procesos psicológicos. En segundo lugar, estaban los **formalistas**, para quiénes no había diferencia entre número y numeral. Para ellos, los números no eran más que símbolos y las leyes de la aritmética, reglas para la manipulación de estos símbolos. Por último, también existía la posición empirista extrema de Mill, para quien las leyes de la aritmética no eran más que generalizaciones empíricas basadas en la inducción. Sin embargo, para Frege, ninguna de estas escuelas de pensamiento ofrecía una verdadera, es decir clara y correcta, explicación de los fundamentos de la aritmética, ni proveían a los matemáticos de una efectiva teoría de los números.

Para Frege, como para la mayoría de los críticos del psicologismo, el mayor pecado filosófico que éste cometía era el confundir la génesis psicológica de un conocimiento con su validez. Por lo menos, así lo entendía al decir:

> No se confunda la verdad de una proposición con su ser pensada. Es necesario recordar bien esto: que una proposición no cesa de ser verdadera en cuanto yo no la pienso más, como el sol no cesa de existir cuando yo cierro los ojos.[5]

Tal era la firmeza de las verdades matemáticas, que no podía descansar en algo tan débil y mutable como las ideas y el pensamiento. Si así fuera, perdería su carácter objetivo y universal. De la misma manera, los formalistas estaban equivocados al creer que los números, y sus propiedades, eran construcciones subjetivas. Para Frege, los matemáticos no podían inventar números y leyes matemáticas, sino solamente descubrirlas y tratar de enunciarlas de una manera clara. Para esto último eran indispensables los símbolos, pero no por ello debía de identificárseles con los verdaderos números. Para Frege, pues, las matemáticas no podían ser una mera invención del hombre, como lo sostenían los formalistas. Por último, Frege consideraba la teoría empirista de Stuart Mill como primitiva y ajena al verdadero espíritu matemático. Mill veía a los matemáticos como si todavía usaran guijarros y pasteles para hacer sus cálculos y de esos resultados infirieran las leyes de la matemática, lo cual le parecía a Frege completamente absurdo.

Frege, pues, no estaba en lo absoluto satisfecho con los trabajos de estas escuelas. Sin embargo, también sabía que no podía simplemente rechazarlas si no ofrecía, al mismo tiempo, una respuesta alternativa que explicara efectivamente la naturaleza del número y las leyes fundamentales de la aritmética. Después de complejos razonamientos pensó que había encontrado la respuesta definitiva en la Lógica. Según Frege "(1) los conceptos fundamentales de la aritmética (como el de número) podían ser definidos usando sólo conceptos de la lógica formal, y (2), dadas estas definiciones, las leyes básicas de la aritmética podían ser probadas usando exclusivamente modos de inferencia lógicos y leyes de la lógica formal"[6]. Esta posición, según la cual, los verdaderos fundamentos de las matemáticas se encontraban dentro de la lógica, de tal manera que la matemática fuera una rama de la lógica, es conocida aún hoy en día como logicismo, y el proyecto fregeano, continuado después por pensadores como Bertrand Russell y Nino Cocchiarella, de comprobar las tesis (1) y (2), como *proyecto logicista*.

El primer paso dado por Frege en la dirección de su proyecto logicista fue tratar de reducir el concepto de orden-en-una-secuencia [(*den Begriff der) Anordnung in einer Reihe*] al de ordenación lógica [*logische Folge*]. Sin embargo, al tratar de dar ese primer paso, Frege se topó con una primera, pero muy importante, dificultad: el lenguaje. Frege necesitaba que sus argumentos quedaran expresados de una manera completamente clara, precisa, y fácil de seguir. Necesitaba que cada uno de sus pasos fuera fácilmente identificable, de tal manera que ninguna asunción quedara implícita, sino fuera claramente expuesta. Sin embargo, su lenguaje natural, el alemán, no ofrecía sino ambigüedad y extrema complejidad al tratar de expresar argumentos tan complejos como los que necesitaba para su proyecto logicista. Frege intentó con otros lenguajes naturales y artificiales, pero ninguno le satisfizo. Los naturales eran ambiguos e inexactos, mientras que los artificiales habían sido todos diseñados con otros propósitos, de tal manera que ninguno servía a los fines del proyecto logicista. Fue precisamente al tratr de sortear estas dificultades que le surgió a Frege la idea de elaborar una conceptografía, es decir, un lenguaje artificial creado *ad-hoc* para las necesidades de su proyecto. Antes de reducir las matemáticas a la lógica, era necesario contar con un lenguaje artificial que facilitara la comprensión y elaboración de esta reducción. Para Frege, ese lenguaje artificial no podía ser otro sino la conceptografía. La presentación de este lenguaje y la reducción, en ella, del concepto de orden-en-una-secuencia al de ordenación lógica, son los principales objetivos que Frege cree haber logrado en su Conceptografía. Sin embargo, los alcances de la obra sobrepasan por mucho las expectativas de su joven autor. Pese a que Frege no pretendía que la Conceptografía fuera una obra de lógica, los avances en este campo que por primera vez aparecen en ella son abrumadores. En la Conceptografía, aparecen por primera vez las funciones logicas[7], las pruebas recursivas, la teoría cuantificacional y, por supuesto, el cálculo lógico - en el que he centrado mi investigación. No por nada es llamado Frege el inventor de la lógica matemática y padre del *giro lingüístico* en la Filosofía.

Sin embargo, pese a todos estos impresionantes avances en el campo de la lógica, las matemáticas y la filosofía, la Conceptografía no fue nada bien recibida por el público de ninguna de esas áreas. Aunque también es muy probable que la pésima acogida con la que esta obra fue recibida se haya debido, precisamente, a todas estas novedades.

> Parte de la responsabilidad de este desafortunado estado de cosas pertenece a Frege mismo. Presentó en su libro demasiadas ideas nuevas y profundas; pero eran abstractas y, en el mejor de los casos, difíciles de captar para el lector no preparado; y Frege no preparó bien a sus lectores[8].

La mala recepción de su primer obra no desalentó a Frege para continuar con su proyecto logicista. Sin embargo, éste también fue el primero de muchos desagradables sucesos, frustraciones y tragedias, personales y profesionales que, desde entonces, rondaron la vida del pensador alemán. También es probable que, si la respuesta desfavorable por parte del mundo académico a su primera obra hubiera movido a Frege a abandonar su proyecto, la Conceptografía seguiría siendo una obra monumental dentro del amplio espectro del pensamiento filosófico universal.

Notas y Referencias Bibliográficas:

1. Literalmente, *Profesor extraordinario*.
2. Su posición anterior dentro de la Universidad, *Privatdozent*, no era asalariada.
3. La expresión es de Rudolph Carnap *apud*. Ward Bynum, Terrell: *On the Life and Works of Gottlob Frege* en Conceptual Notation. Oxford Clarendon Press, 1972. p.8
4. Orayén, Raúl: *Frege: Una aproximación a sus concepciones semánticas*. en Ergo Vol.II, N°4, Agosto 1988. p12
5. Frege: Die Grundlagen der Arithmetik. Basil Blackwell, Oxford, 1968. p.vi. Trad. Padilla, Hugo: Los Fundamentos de la Aritmética IIF, México, 1972.
6. Ward Bynum, Terrell: *Op cit.* p.26
7. Esta central aportación de Frege a la lógica es indudablemente fruto del amplio conocimiento de funciones matemáticas que obtuvo Frege en sus años en Göttingen, a las cuales dedicó su *Habilitationsschrift*,.
8. Part of the responsability for this unfortunate state of affairs was Frege's. He presented in his books many new and profound ideas, but they were abstract and difficult, at best, for the unprepared reader to grasp; and Frege did not prepare his readers well. Ward Bynum, Terrell: Op.cit. p.16 [Traducción mía].

I. ¿Qué es la conceptografía?

Pese a ser considerado el texto que impulsó la lógica y las matemáticas hacia toda una nueva etapa de desarrollo, la Conceptografía[1] es una obra que, desde su primera edición, ha sido ignorada casi por completo tanto por la comunidad filosófica, como por la matemática[2]. Recién aparecida, poca gente reparo en ella y hoy en día siguen siendo pocos los especialistas que siquiera la han leído[3]. Lo cual es una verdadera pena, ya que en sus páginas se encuentran las raices, no solamente de la lógica matemática, sino también de toda la tradición analítica en la Filosofía. El propósito de este capítulo y, en general, de este trabajo de investigación, es exponer algunas de estas raices desde dentro del mismo texto fregeano, pues creo que una lectura atenta a la Conceptografía, como la que pretendo hacer aquí, puede arrojar nueva luz sobre problemas centrales del pensamiento de Frege y, en general, de la filosofía de este siglo, como son la relación entre función y concepto, o entre los contenidos conceptual y judicable.

Este capítulo esta dedicado a dar respuesta a una pregunta básica que debería encontrarse a la base de toda lectura de la Conceptografía y, sin embargo, parece ser ignorada por muchos de los intérpretes y estudiosos del pensamiento fregeano: *¿ qué es una conceptografía ?*

De hecho, son muy pocas las veces que Frege mismo trata de exponer el significado del término *conceptografía* [*Begriffschrift]*. En el prólogo, por ejemplo, Frege señala que el término conceptografía proviene del neologismo "*contenido conceptual*" [*Begrifflicher Inhalt*] y que esta circunstancia "se deberá tener siempre en mente si se quiere entender correctamente la naturaleza de mi lenguaje formal [*Formalsprache*]"[??] "*Conceptografía*" y "*Con-*

tenido conceptual" son nociones íntimamente ligadas dentro del sistema fregeano. Es necesario, pues, antes de adentrarse de lleno en la conceptografía, hacer un poco de análisis semántico y aclarar qué eso a lo que Frege llama "contenido conceptual".

A. Sobre los contenidos

La Conceptografía parte de dos sencillas intuiciones *semánticas*, a saber, (1) algunas expresiones tienen contenidos[??] y (2) estos contenidos le otorgan ciertas propiedades a las expresiones que las contienen. Como son intuiciones básicas, Frege no cree necesario argumentar a su favor. Simplemente las toma como supuestos de su teoría. Para Frege es claro que, a veces, lo que hablamos y escribimos expresa *algo*[6], es decir, que en ciertos contextos las expresiones que utilizamos -habladas o escritas- tienen algún contenido. Los enunciados no son sólo conjuntos de manchas sobre el papel, sino que además tienen ciertas propiedades determinadas por su uso dentro del lenguaje. Por ejemplo, casi siempre que decimos la palabra "sí", no sólo hacemos vibrar el aire a nuestro alrededor, es decir, no sólo emitimos una serie de sonidos, sino que además afirmamos o aceptamos algo. Afirmar y aceptar, son acciones que sólo pueden realizarse dentro del Lenguaje.

A Frege le parece igual de claro que hay expresiones que, en ciertos contextos, pierden todo sentido. Por ejemplo, si en el índice de esta tesis hubiera escrito las palabras "Yo helado ama o dale hoy", habría escrito una expresión que, por lo menos en este contexto, no tiene sentido alguno. Aún cuando cada uno de las palabras que forman parte de ella son fácilmente reconocibles y tienen un uso determinado dentro del español, la expresión completa no dice nada. Para Frege, este tipo de expresiones se caracterizan porque no pueden ser afirmadas ni negadas. Poseen ciertas propiedades, como la de ser palíndromas, o la de estar escritas en español, etcétera. Sin embargo, estas propiedades no son semánticas, es decir, no apelan a ningún contenido. Por eso pueden aplicarse a todo tipo de expresiones, incluyendo frases sin sentido como la que utilice como ejemplo al principio de este párrafo. Las propiedades semánticas, como la de ser sinónimas, antónimas, etcétera, por el contrario, sí apelan al contenido de las expresiones y se aplican de manera exclusiva a aquellas que, valga la redundancia, expresan algo. Para Frege, dentro de esta categoría existen propiedades que comúnmente creemos se aplican a expresiones, pero en realidad se aplican a sus contenidos, por ejemplo, la propiedad de poder ser afirmados (o negados), particulares o generales, etcétera.

1. Contenido conceptual [*Begrifflicher Inhalt*].

Para Frege, el contenido de las expresiones no es una unidad indivisible y monolítica, sino que tiene diferentes aspectos[9] que se manifiestan de maneras distintas. Dos expresiones pueden nombrar al mismo objeto y, sin embargo, no tener el mismo contenido. Dos expresiones pueden también, por ejemplo, describir el mismo hecho y, sin embargo, una puede ser más convincente, o mas clara en su descripción, que la otra. En estos casos, decimos que las expresiones comparten un aspecto del contenido, pero difieren en otro. Entre estos aspectos del contenido de las expresiones, se cuenta lo que Frege llama el *"contenido conceptual"*.

Pese a ser uno de sus conceptos centrales, Frege no da una sino dos caracterizaciones distintas de contenido conceptual en la Conceptografía. La noción aparece por primera vez en el prólogo. Ahí, de una manera más bien oscura, Frege señala que el contenido conceptual es todo aquello que tiene significado para la secuencia de inferencias. También nos promete dar una exposición más detallada de él en el §3 del texto. No obstante, en el referido parágrafo, Frege solamente reitera la idea de que contenido conceptual es esa cierta parte del contenido de las expresiones que es significativa para las relaciones de inferencia entre juicios, de tal manera que el contenido conceptual de dos juicios es idéntico cuando

> ...las consecuencias que se pueden derivar de uno, en combinación con otros juicios determinados, se siguen también del otro, en combinación con los mismos otros juicios...[10].

Desde el prólogo, Frege observa que los juicios tienen la capacidad de, en combinación con otros juicios, inferir y ser inferidos unos de otros[11]. Esta capacidad no es otra sino su "contenido conceptual". También en el prólogo, Frege señala que este aspecto del contenido de los juicios es el principal objeto de estudio de la conceptografía. El contenido de las expresiones tiene otros aspectos también, pero Frege no los estudia a profundidad en esta obra porque no son de relevancia para la conceptografía.

> ...ya que en los juicios sólo se considera aquello que influye en las *posibles consecuencias*.[12]

La conceptografía, para centrarse en el contenido conceptual de las expresiones, debe hacer a un lado no solamente el resto de los aspectos del contenido de las expresiones, sino también otros elementos básicos del lenguaje como son la gramática[13] y la pragmática[14]. Frege no niega la existencia de estos aspectos del lenguaje, pero sí señala que deben hacerse a un lado para acceder con mayor facilidad a lo que determina las relaciones de inferencia entre los juicios. Con ello, Frege hace una fuerte crítica a la lógica aristotélica en la que categorías gramaticales como sujeto y predicado son tomadas equivocadamente por categorías lógicas.

La intención de Frege es construir un "lenguaje de fórmulas para el pensamiento puro"[15] parecido a los lenguajes simbólicos que se han desarrollado para ciencias particulares como la química y las matemáticas, pero con un campo de aplicación mas general que el de éstas. Asimismo, cree que puede lograr esto mediante la suspensión de los elementos no-lógicos del lenguaje (pragmáticos, retóricos, etcétera) y la sustitución de la gramática del lenguaje natural por una sintaxis formal. Para Frege, su conceptografía no es sólo un modelo formalizado del lenguaje (natural, científico o de otro tipo), sino todo un lenguaje artificial[16].

Dentro de la conceptografía tiene poco sentido apelar a la oposición entre forma y contenido, ya que en ella, la forma es un aspecto del contenido de los juicios. Para Frege, la forma lógica de las expresiones no es otra cosa que su contenido conceptual. Cuando Frege dice que la conceptografía es un lenguaje formal, no está entendiendo por "lenguaje formal" [*Formelsprache*] aquel cuyas expresiones carecen de contenido, sino simplemente lenguaje de fórmulas. Si no fuera así, los juicios de la conceptografía no podrían tener contenido conceptual. Sin embargo, si no lo tuvieran, no podrían pertenecer a ninguna cadena de inferencias, ya que, según lo que hemos visto sobre el contenido conceptual, para que se puedan establecer relaciones de inferencia entre juicios (tales como las que establece Frege entre los juicios de la conceptografía), éstos deben mantener, por lo menos, su contenido conceptual. Lo mismo podemos decir sobre los otros lenguajes formales que Frege cita. También toda fórmula algebraica, por dar un ejemplo, debe tener cierto contenido (conceptual) para poder ser inferida de otras fórmulas algebraicas. De otra manera se caería en una contradicción.

2. Porqué el contenido conceptual es conceptual, *i.e.*, a qué refiere el término "*conceptual*" [*begrifflicher*] dentro de la expresión "contenido conceptual".

La segunda caracterización que hace Frege de contenido conceptual aparece en uno de los mas controversiales parágrafos de la Conceptografía: el §8, que está dedicado a la identidad de contenido [*Inhaltsgleichheit*]. Entre otras cosas, Frege señala ahí que debemos distinguir entre el contenido conceptual de una expresión y la manera en que ésta lo determina. Distinción que luego evolucionará dentro de la filosofía de Frege hasta convertirse en la distinción entre Sentido [*Sinn*] y Referencia [*Bedeutung*]. Empero, ese desarrollo significará también toda una reformulación de su explicación de la identidad[17].

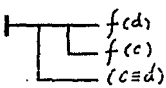
Más adelante, en el mismo parágrafo, Frege introduce el símbolo y funcionamiento de la igualdad de contenido.

$$\vdash (A \equiv B)$$

> signifi[ca] que *el símbolo A y el símbolo B tienen el mismo contenido conceptual, de modo que, en cualquier caso, se puede poner B en lugar de A.*[18]

Mas adelante, dentro de la cadena de inferencias con que ilustra su conceptografía, Frege enuncia este principio bajo la forma de una fórmula:

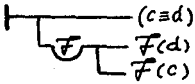
(52)



> El caso en que el contenido de *c* es igual al contenido de *d*, y en que *f(c)* se afirma y *f(d)* se niega, no tiene lugar. Esta proposición expresa que en general *d* se podría poner en lugar de *c*, si $c \equiv d$.[19]

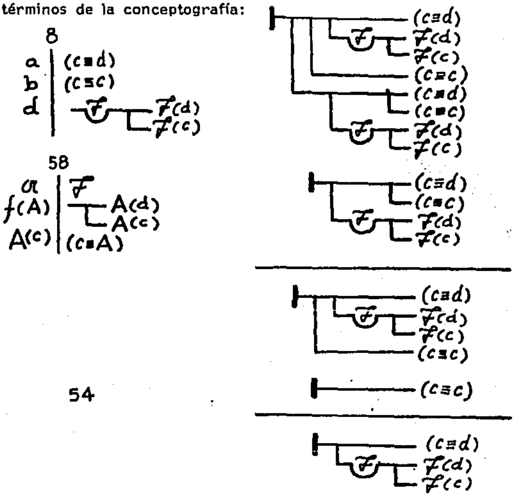
Esta fórmula (52) no define la identidad de contenido, simplemente da una de sus reglas de funcionamiento: el principio de indiscernibilidad de los idénticos. Según este principio, si los contenidos de *c* y *d* son idénticos, no existe una función *f* que sea afirmada para *c*, pero no para *d*. Sin embargo, no implica el principio contrario, es decir, que si no existe una función que se afirme para una expresión pero no para la otra, entonces el contenido de las expresiones es idéntico. Este segundo principio se puede expresar a través de la siguiente fórmula:

(52')



[20]

Esta fórmula nunca aparece en la *Conceptografía*. Sin embargo, sí es teorema de la teoría formal de Frege. Lo demostraré ofreciendo una prueba formal en términos de la conceptografía:



Esta prueba dice que, si toda función que se afirma de *c*, se afirma también de *d*, entonces, en particular, la identidad de contenido debe también afirmarse para las dos. Esto implica que el contenido de ambas expresiones es idéntico.

Esta fórmula (52') expresa una especie de principio de identidad de los indiscernibles, ya que afirma que para cualquier par de expresiones *c* y *d* que difieren, por lo menos, en su contenido conceptual, se cumple que existe por lo menos una función *F* tal que *F(c)* se afirma y *F(d)* se niega, en otras palabras, afirma que toda diferencia que no pueda expresarse en una proposición de la forma *f(a)*, no es conceptual[??]. Las diferencias conceptuales siempre pueden expresarse a través de juicios de la forma *f*(*a*). Toda otra diferencia que se de entre dos expresiones, no será de carácter conceptual, no afectará el aspecto conceptual del contenido, lo que Frege llama el "contenido conceptual".

Este par de fórmulas deja ver de manera clara como la noción de contenido conceptual (en contradicción a lo que dice Frege en el §9[22]) esta íntimamente ligada a la noción de función. Todo juicio puede verse como la asignación de un concepto a un contenido. De tal manera que las condiciones de identidad del contenido conceptual de una expresión son dadas a partir de los juicios en los que tal expresión aparece en el lugar del argumento. Cada uno de estos juicios expresa un contenido[23]. Esto muestra la íntima relación que existe entre las dimensiones lingüística y conceptual en el pensamiento filosófico de Frege. Dado que los conceptos son, por ellos mismos, imperceptibles, necesitamos del lenguaje para conocerlos y manejarlos[24]. Esto lo sabemos aun antes de conocer la relación entre función y concepto, o más bien, a partir de esto podemos ir adivinando la relación que Frege hará explícita en su artículo *"Función y Concepto"*.

Permítanme usar un ejemplo para aclarar la relación entre *función* y *concepto*. Tomemos una expresión cualquiera con contenido conceptual, digamos "Perro". Este nombre puede aparecer en un gran numero de otras expresiones, como "Perro rabioso", "Vida de Perro", etcétera, juicios incluso. De hecho, la palabra "perro" ocurre en un sinnúmero de juicios, desde los mas sencillos como "Snoopy es un perro." o "Quisiera ser perro.", hasta otros mas complejos como "Es una creencia popular que, en los últimos días de otoño, ningún perro suele ladrarle a la Luna llena.", "Nada puede, a la vez, ser y no ser perro.", etcétera. Fácilmente podemos distinguir dos partes en cada uno de estos juicios: la palabra "perro" y el resto del juicio. Dado que la distinción fregeana función/argumento lo permite, podemos tomar la palabra "perro" como argumento y el resto de cada juicio como funciones. Por ejemplo, podemos tomar el juicio "El perro de mi vecino apesta." y dividirlo en el argumento "perro" y la función "El...de mi vecino apesta.". Si hacemos lo mismo con el resto de los juicios, tendremos una lista extensiva de funciones que se afirman para el argumento "perro". Cada una de ellas dice *algo* sobre perro. Cuando se quiere responder la pregunta "¿ Que es un perro ?", lo mas común es dar una serie de juicios del tipo: "Perro es un animal mamífero.", "Tiene cola y cuatro patas.", etcétera. Al hacerlo, no hacemos otra cosa sino ir delimitando su contenido conceptual, ya que cada uno de esos juicios expresa un concepto que se aplica al perro, como el concepto de ser animal o el de tener cola y cuatro patas. Dado que la lista de juicios en la que puede aparecer una expresión es infinita, también lo es el número de conceptos que se aplican a su contenido. Sin embargo, el no poder dar una lista exhaustiva de ellos no significa que no podamos definir el contenido conceptual de una expresión. Frege cree que para ello bastan un número finito de ellos. Para definir un contenido conceptual bastan los que Frege llama sus "marcas características" [*Markmale*].

Sin embargo, debe quedar claro que no todas las funciones expresan conceptos, sino únicamente las que forman contenidos judicables al ser llenados sus espacios para argumentos. El resto de las funciones no dan información alguna sobre el contenido conceptual de sus argumentos. Por seguir con el ejemplo anterior, tomemos la expresión "Un perro". Esta expresión puede dividirse en la función "Un..." y el argumento "perro". Sin embargo, la función "Un...", a diferencia de las funciones provenientes de los juicios, no expresa ningún concepto que se aplique a los perros, es decir, no nos dice nada sobre el contenido conceptual del nombre "perro".

3. Contenido judicable [*Beurtheilbarer Inhalt*]

Dentro de la semántica fregeana no todos los contenidos conceptuales son iguales. En el §2, Frege distingue entre contenidos judicables [*beurtheilbare*] y no-judicables [*unbeurtheilbare*]. Contenido judicable es todo aquel contenido que puede ser afirmado [*wird bejaht*] y así convertirse en juicio [*Urtheil*]. Esta afirmación difícilmente podría tomarse como definición, ya que es claramente circular. Sin embargo, sí deja clara la distinción entre contenidos judicables y no judicables. El contenido judicable se distingue de la proposición [*Satz*], en que esta última abarca la totalidad del contenido del juicio, mientras que el contenido judicable se refiere de manera exclusiva al contenido conceptual.

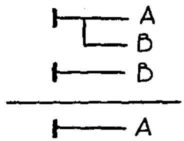
Imaginen que en el ejemplo anterior, en vez de "perro" hubiéramos utilizado una expresión con contenido judicable, digamos "los pájaros cantan". Al afirmar esta expresión, produzco el juicio (1) "Los pájaros cantan.". Pero la expresión puede aparecer en un gran número de otros juicios, por ejemplo: (2) "No es verdad que los pájaros cantan." o (3) "Si los pájaros cantan, es porque están contentos.". Estos dos juicios también pueden dividirse, como en el ejemplo anterior, en el argumento común "los pájaros cantan" y las funciones

(2') "No es verdad que..."

(3') "Si..., es porque están contentos."

Estas dos funciones representan conceptos que se aplican a la expresión "los pájaros cantan" y nos dicen algo sobre su contenido conceptual. Si hiciéramos lo mismo con el juicio (1) nos quedaríamos como función (1') la pura acción de afirmar como función. En este sentido, esta acción es también un concepto y, como tal, se aplica al contenido de algunas expresiones: las expresiones con contenido judicable. La diferencia entre un contenido judicable y otro no-judicable es una diferencia conceptual. La función (1') representa el concepto de judicable, la función (2'), la negación y la (3'), la condicionalización. Es claro que estos conceptos son distintos de los que se aplican a las expresiones que tienen contenido conceptual, pero esto no es judicable (los nombres), ya que este tipo de conceptos están relacionados a lo que Frege llama la cadena de inferencias.

Ahora es necesario relacionar lo dicho sobre el contenido conceptual en los parágrafos tres y ocho. Dado que la caracterización hecha en el §3 se refiere a juicios únicamente, tengo la hipótesis de que ella es solo un caso específico de la regla enunciada en el §8 y la fórmula 52. Esta última regla es mas general, pues se aplica a toda expresión con contenido conceptual, mientras que la que aparece en el §3 se aplica de manera exclusiva al contenido conceptual de los juicios. Para probar mi hipótesis demostrare, entre otras cosas, que las inferencias entre juicios pueden manejarse como juicios de la forma $f(a,..)$, donde los lugares de argumento $a,...$ se encuentran ocupados por juicios. Esto se puede mostrar fácilmente si se aceptan algunas condiciones del lenguaje simbólico de la Conceptografía que demostraré con mayor detalle en su momento: Primero, que toda prueba no abreviada de una fórmula tiene la forma del *Modus Ponens*, es decir



Luego, si aceptamos que la barra de inferencia es el símbolo de la inferencia en tanto que relación entre juicios, entonces habremos aceptado no sólo que toda prueba expresa una inferencia, sino que, además, toda prueba es una expresión de la forma *f(a,b,c)* donde *f* representa la barra de inferencia y las letras *a*, *b*, y *c* los juicios que aparecen en la prueba.

De esta manera podemos reformular el enunciado del §3 sobre el contenido conceptual de los juicios, como una particularización del principio enunciado en el §8 (y en la formula 54). Dentro de toda prueba se podría poner *d* en lugar de *c*, si el contenido judicable de *c* fuera idéntico al de *d*. Igualdad de contenido judicable es aquella que existe entre dos juicios tales que uno puede sustituir al otro dentro de cualquier prueba sin alterar su validez[25]. Solo en el caso de los juicios, contenido conceptual y contenido judicable son conceptos equivalentes, ya que no todas las expresiones que tienen contenido conceptual, lo tienen judicable. Por ejemplo, la expresión:

(1) " No todos los perros tienen rabia."

puede dividirse en función y argumento de esta manera:

Función: (2) " No todos los perros tienen "

Argumento: (3) " rabia "

o de esta otra:

Función: (4) " No "

Argumento: (5) " Todos los perros tienen rabia."

Las expresiones (3) y (5)[26] tienen contenido conceptual, ya que ambas pueden, ocupando el lugar del argumento de expresiones funcionales (como (2) y (4)) expresiones complejas (como (1)). Sin embargo, de ellas, sólo (5) tiene contenido judicable, en otras palabras, sólo el contenido de (5) puede ser afirmado o negado[27]. Esto lo sabemos, porque, a diferencia de (5), la expresión (3) no puede ocupar el lugar de una expresión con contenido judicable dentro de una inferencia. En otras palabras, de la afirmación del contenido de (3) no podemos inferir la afirmación (o negación) de ningún otro juicio, ni viceversa.

Es importante, sin embargo, dejar claro que la conceptografía no se reduce a la expresión de las (posibles) relaciones de inferencia entre los juicios, lo que Frege llama los contenidos judicables, ya que, como ya vimos, éstos son sólo un tipo de contenidos conceptuales y, tal y como su nombre lo indica, la conceptografía debe ocuparse de todos los contenidos conceptuales, no sólo los judicables.

En resumen, por contenido conceptual Frege entiende esa parte del contenido de un término que nos permite distinguirlo de otros en su papel como argumento de una función. En otras palabras, dos expresiones comparten el mismo contenido conceptual si sus contenidos son conceptuosamente indiscernibles. Como tal, el contenido conceptual es sólo una parte del contenido total de las expresiones y, aunque para algunos usos es el más importante, para otros puede ser vacuo. Una vez que hemos analizado de manera detallada[28] las consideraciones semánticas alrededor de la conceptografía, podemos regresar al problema central de este capítulo: ¿ Qué es una conceptografía ?

B. Contenido Conceptual y Conceptografía

Una de los puntos más oscuros alrededor de la Conceptografía es su propósito u objetivo. Aun aquellos que lo han estudiado detenidamente, no saben a ciencia cierta cuales fueron las razones que motivaron a Frege a escribirlo, ni qué papel juega dentro de su proyecto filosófico[??]. No es extraño que, una vez que se ha leído por completo el texto, el lector no tenga aún una idea clara del objetivo del mismo. Es por ello que, tres años después de la primera edición de su Conceptografía, Frege decidió publicar un par de artículos dedicados exclusivamente a aclarar sus motivos para escribir tan extraño texto[30]. En ellos, Frege reconoce que nuestro lenguaje *ordinario* cuenta con muchas deficiencias de uso. Dada la multiplicidad de sus usos, el lenguaje es más apto para unos usos que para otros. De ahí que sea provechoso producir lenguajes artificiales, como la conceptografía, que sirvan como herramientas para suplir - o asistir - al lenguaje ordinario precisamente en aquellos usos para los que es menos apto.

Uno de estos usos es el de expresar pruebas lógicas puras, es decir, inferencias puramente formales. En vez de ayudar a la mente en su discurrir lógico, el lenguaje ordinario parece forzarlo en esquemas que le son ajenos y llevan casi de manera inevitable al desconcierto y la incomprensión. En este sentido, el principal problema des que casi todas las reglas lógicas le son ajenas. El pensamiento tiene una forma (la lógica) y el lenguaje ordinario otra (la gramática), lo que produce un conflicto de formas del cual no surgen sino errores y dificultades. Si el lenguaje estuviera gobernado internamente por las mismas leyes que el pensamiento, es decir, las leyes de la lógica, toda expresión gramaticálmente correcta sería también lógicamente correcta. Sin embargo, y pese a que no es así, aún podemos crear un lenguaje artificial –el cual Frege llama conceptografía cuyas reglas gramaticales se identifiquen con las reglas lógicas, de tal manera que la mera adherencia a su gramática garantice la corrección formal del pensamiento[31].

En su artículo "*On the Scientific Justification of a Conceptual Notation*[32]" Frege señala que, como el microscopio al ojo, la conceptografía no puede, ni debe, sustituir al lenguaje ordinario, ya que, de alguna manera, parte y es construido en función de él. Los contenidos conceptuales están íntimamente vinculados con las expresiones que los contienen. En este sentido, no podemos hablar de una independencia de la conceptografía con respecto al resto de los lenguajes. Una independencia de la que sí presumen los sistemas lógicos como el de Boole y Schröder. La conceptografía ha de ser un lenguaje artificial, pero por lo mismo, no debe tomarse por un lenguaje **inventado**. El conocimiento detrás de la conceptografía, aunque un poco técnico, es esencialmente descriptivo.

Frege hace mucho hincapié en recordarnos que, a nivel de los contenidos, las relaciones ya están dadas. A los lógicos y los matemáticos sólo nos queda descubrirlas. Es al nivel de los significantes que se construye la conceptografía: Se trata de *traducir* en relaciones simbólicas las relaciones conceptuales que existen de hecho entre los contenidos. En este proceso, la única relación artificial de los objetos que se produce es aquella que nos permite hacer referencia a ellos a través de los signos que conforman la conceptografía (Pretender hacerlo de otra manera es caer en el formalismo y en sus nefastas consecuéncias[33]).De ahí que a Frege no le preocupe tanto hacer lógica como traducirla en un lenguaje artificial.

> Yo no deseaba presentar una lógica abstracta en fórmulas, sino expresar un contenido a través de símbolos escritos de una manera mas precisa de lo que es posible con palabras.[34]

Frege no se cansa de señalar que todo el trabajo lógico en la conceptografía es de tipo sintáctico. Lo que se trata es de hacer que la forma sintáctica de nuestro lenguaje artificial se corresponda lo mas íntimamente con el contenido conceptual de nuestro lenguaje objeto. Frege sabe que para acceder al nivel de los contenidos, es inevitable pasar por la interpretación y que toda interpretación puede dar pie a malentendidos. Es mas fácil, pues, eliminar todo contenido en el lenguaje y con ello toda interpretación, que tratar de evitar malentendidos dentro del lenguaje ordinario. Es más fácil introducir la forma lógica en la sintaxis que en el contenido. Sólo así, señala Frege, podemos lograr un discurrir claro y unívoco.

Respecto a este punto, la de Frege es una posición muy ingenua. Él sigue creyendo que sí es posible evitar los malentendidos dentro del lenguaje ordinario. Cree que es posible, aunque, al momento de querer expresar pruebas lógicas, hacerlo significaría una prolijidad excesiva. Para Frege, el camino que pasa por la conceptografía no es la única vía para acceder a un discurrir claro y unívoco, aunque sí es el más sencillo. Frege no dice cómo, pero supone que, acotando y acotando el contexto de los juicios, podemos llegar a obtener univocidad dentro del lenguaje ordinario. Lo único que le parece imposible es que un juicio, dentro del lenguaje ordinario, determine unívocamente y por sí solo su contenido. Cosa que sí es posible dentro de la conceptografía. Así podemos distinguirla del lenguaje ordinario, ya que sólo en la conceptografía podemos expresar el contenido de un juicio simple a través de una expresión simple.

Debe de ser obvio que el desarrollo de la conceptografía está íntimamente ligado al estudio de los contenidos conceptuales, y que ambos deben desarrollarse de manera paralela: solo conociendo bien el funcionamiento conceptual de los contenidos, podemos adecuar mejor nuestro lenguaje artificial a ellos, y solo con una buena herramienta da análisis de los contenidos conceptuales, como es la conceptografía, podemos emprender una buena investigación de su funcionamiento. De ahí que el sistema lógico de Frege haya evolucionado de manera paralela a su lenguaje simbólico.

Sin embargo, aún no hemos ubicado completamente el objeto de análisis de la conceptografía, ya que todavía no sabemos qué tipo de análisis se debe hacer a los contenidos conceptuales. En Frege quedan todavía muchas cuestiones oscuras: ¿ Son nuestros pensamientos los que tienen contenidos judicables ? ¿ Por qué a veces parece que el objeto de la conceptografía es el pensamiento, y otras veces parece que existe una especie de lenguaje objeto ? En el prologo, Frege señala que el término *conceptografía* es sinónimo de la expresión *"lenguaje formal para el pensamiento puro"*[35]. Sin embargo, ahí mismo, señala también que el objeto central de su conceptografía es cierto aspecto del contenido de las expresiones. ¿ Qué pasa ? La forma pura de la que habla Frege ¿ es la forma de los pensamientos, de los contenidos, o qué ?

Existe un argumento muy sencillo, tal vez demasiado sencillo, que puede responder a estas preguntas al mismo tiempo que termina de redondear nuestro análisis del término "conceptografía": Si (1) las expresiones del lenguaje objeto tienen como contenidos pensamientos[36], y (2) estos pensamientos tienen (como pensamientos) cierta forma, pero (3) esta forma no es la del lenguaje objeto (el cual, ya vimos, tiene una forma propia), entonces si utilizamos el lenguaje objeto para, a través de él, obtener esta forma en el contenido (el contenido conceptual propiamente dicho, no el contenido total, ni el pensamiento, etcétera), entonces (5) nuestro verdadero objeto es la forma del pensamiento, aunque sea como contenido en el lenguaje. Lo cual sería inadmisible para la crítica que pretende hacer Frege al psicologismo.

C. La conceptografía como herramienta y cartografía.

Un buen acercamiento a la idea que tiene Frege de su propia conceptografía se puede obtener de una de sus mas afortunadas imágenes metafóricas: la metáfora del geógrafo y sus mapas. Según ésta, las fórmulas de la conceptografía deben ser como mapas del contenido conceptual de los juicios. El conceptógrafo no debe crearlos, sino solo representar de manera gráfica su existencia real y, al igual que el cartógrafo, buscar los medios mas convenientes para hacerlo. Así como para algunos fines, es preferible una maqueta o un mapa de colores, que un sencillo mapa bidimensional en blanco y negro, así tenemos que reconocer los mejores medios para construir un lenguaje artificial adecuado a nuestros fines. Así como hay diferentes mapas, de navegación, políticos, orográficos, etcétera, para diferentes usos, así también es la variedad de lenguajes artificiales posibles. Y así como ningún mapa contiene la totalidad de información sobre un espacio topográfico, así tampoco puede la conceptografía ni ningún otro lenguaje artificial, contener la totalidad de los contenidos posibles del lenguaje ordinario. Como ningún mapa puede sustituir la experiencia directa de un lugar, tampoco puede un lenguaje artificial (6) sustituir nuestro lenguaje ordinario.

Después de señalar esto, Frege adelanta que la conceptografía debe ser un lenguaje simbólico, bidimensional y escrito, ya que éstos son los elementos que lo hacen el más apto para la tarea encomendada. Sin embargo, aún le falta argumentar su conclusión. Todavía le quedan por responder las preguntas ¿ Por qué es más conveniente que la conceptografía sea un lenguaje simbólico ? ¿ Por qué no escrito en vez de hablado ? y ¿ Porqué sus símbolos se deben escribir en un plano de dos dimensiones y no en una, tres, o mas ?

En *On the scientific Aim of a conceptual notation*, de una manera más bien ingenua, casi copiada del libro tercero del Ensayo de Locke, Frege argumenta a favor del carácter simbólico de la conceptografía. Para entender su argumento, es necesario entender, antes, qué entiende Frege por símbolo:

Un símbolo es una *idea*[37] que funciona como foco para la compilación de imágenes provenientes de la memoria. El vínculo entre esta idea y las imágenes que llama, pese a ser artificial, es también más fijo que el de un simple recuerdo. La única ventaja del lenguaje escrito sobre el hablado, es su permanencia[38]. El fin de los símbolos es permitirnos movernos entre ideas sin la fuerte constricción del tiempo. Gracias al lenguaje, nuestro pensamiento se vuelve más complejo, hasta el punto en que se nos hace "*necesario usar símbolos sensibles para pensar*"[39]. Aún sin verlos ni oirlos, pensamos a través de ellos. Tal es su importancia que se vuelve indispensable hacer una elección cuidadosa de ellos.

A partir de otros lenguajes[40] cercanos al proyecto de la conceptografía como son el de la aritmética y el de la lógica simbólica, Frege va acotando poco a poco su propio lenguaje artificial. De tal manera que va recogiendo las mejores características de cada uno (De la aritmética, por ejemplo, toma la bidimensionalidad) y buscando nuevas alternativas para resolver sus desventajas. Para Frege, la conceptografía debe conjugar las ventajas de los lenguajes simbólicos de la aritmética y la lógica, pero, a diferencia de ellas, debe ser capaz de expresar cualquier contenido conceptual y toda forma lógica.

Notas Y Referencias bibliográficas.

1. Con respecto al término "conceptografía", adopto la siguiente convención: Uso "Conceptografía" subrayado y con mayúscula para referirme a la obra de Gottlöb Frege así titulada y uso "conceptografía" sin subrayar, para nombrar el lenguaje formal que Frege pretende construir dentro de ella. Algunas veces, utilizo la expresión "primera conceptografía" en el mismo sentido, especialmente cuando quiero distinguirla de la "segunda conceptografía" o del lenguaje formal que introduce Frege en las Leyes Fundamentales de la Aritmética.

Frege, Gottlöb: Conceptografía. 1879 De aquí en adelante, todas las referencias, excepto donde sea indicado, corresponderán a este texto. Cuando las citas sean textuales y en español, se usará la traducción de Hugo Padilla. Instituto de Investigaciones Filosóficos, Cd. de México, 1972

2. Pinpointed, the logical renaissance might be identified with the publication of Frege's Begriffsschrift in 1879, Quine, W.v.O. prefacio a J.T.Clark, Conventional Logic and Modern Logic Woodstock C.P, 1952, pp.v,vii. ....Ocupa un lugar destacado entre todos estos lógicos, Gottlöb Frege. Su Begriffsschrift no puede compararse más que con una gran obra en toda la Historia de la Lógica: Los Analíticos Primeros de Aristóteles. Bochenski, I.M.: Historia de la Lógica Formal, Gredós, Madrid, 1985. p.283. Frege's Work [the Begriffsschrift] contains all the essentials of modern logic, and it is not unfair either to his predecessors or to his successors to say that 1879 is the most important date in the history of the subject. Kneale & Kneale: The Development of Logic London, Oxford U.P. 1962, pp.510,511 apud, Ward, T.B.: "Evaluations of Frege's Conceptual Notation by Present-day Scholars. en Op.cit. pp.236.238

3. Aunque el haber fundado la lógica matemática moderna lo hacía una de las mayores figuras en la historia de las matemáticas y la filosofía, su primera publicación sobre el tema, *Begriffsschrift* (1879), se encontró con la incomprensión general... Dummett, Michael: *La Filosofía de Frege* en La verdad y otros enigmas. F.C.E. México, 1990. p.157

4. p.8

5. Como el objeto de estudio de este trabajo de investigación no es la ontología que subyace a la Conceptografía, no preguntaré qué es ese *'algo'* que expresan las expresiones, es decir, no preguntaré qué tipo de entidades son los contenidos. A decir verdad, creo que esa tampoco fue la preocupación de Frege al escribir su obra. Sobre la ontología de Frege cfr. Raúl A. Orayén: La ontología de Frege. Universidad nacional de La Plata, La Plata, Argentina, s/d, Dummett, Michael: La Filosofía de Frege y el clásico artículo de E.D. Klemke "Frege's Ontology" en Essays on Frege University of Illinois Press, Urbana, 1968

6. Espero que quede claro que no son las personas las que expresan o tienen contenidos, sino las expresiones. Las palabras y los enunciados no son medios de expresión sino expresiones. Por eso, es erróneo hablar de los contenidos como entidades subjetivas, ya que, en sentido estricto, no pertenecen a las personas, sino a las expresiones. Sin embargo, son las personas las que pueden utilizar estas expresiones para actuar (que es lo propio de ellas). Así como lo propio de las expresiones es la expresión, lo propio de las personas es la acción. Entre estas dos dimensiones hay una vínculo muy fuerte que las une, pero también hay una tenaz linea que no se puede violar fácilmente.

7. §4

8. Vale la pena notar, que durante la presentación de su primera conceptografía, Frege evita a toda costa hablar de verdad y falsedad, especialmente cuando trata el contenido de las expresiones. Cuando presenta la negación y el condicional, explica su funcionamiento a partir de la afirmación y negación de los contenidos, no de su verdad o falsedad. Es por ello, impropio llamar a éstas funciones de verdad. Por la misma razón, a sus wffs tampoco les corresponden tablas de verdad propiamente dichas. No es sino hasta trabajos posteriores, que Frege trata de incorporar los valores de verdad a su conceptografía. Los resultados de tales trabajos llevaron a Frege a abandonar su primera conceptografía en busca de una nueva, en la cual el papel de los valores de verdad fuera mas claro e importante. V. "¿ Por qué abandona Frege su primera conceptografía ?".

9. Hablo de "aspecto" en vez de "parte del contenido"; que es la expresión original de Frege, para evitar las innecesarias dificultades engendradas por la desafortunada metáfora fregeana. Dificultades que fueron reconocidas, posteriormente, por el propio Frege. Cfr. Hurtado, Guillermo: "Partes Fregeanas" ponencia presentada en el Seminario de Investigación del Instituto de Investigaciones Filosóficas el 27 de Octubre de 1993.

10. §3

11. p.8

12. §8

13. §4

14. Así, todos los fenómenos del lenguaje que surgen sólo de la interacción del parlante y el oyente, en que, por ejemplo, el parlante toma en consideración la expectación del oyente e intenta ponerlo sobre la pista correcta aun antes de enunciar una proposición, nada tienen que les corresponda en mi lenguaje de formulas. Frege: §3

15. p.8

16. Hay que notar que Frege no argumenta a favor de la posibilidad de conciliación de esta tesis con la pretensión de que la conceptografía no incluya mas que elementos puramente formales. Tampoco queda justificado de manera alguna que Frege se refiera a su conceptografía como un lenguaje completo. La polémica alrededor de este punto es demasiado larga y compleja como para tomar posición con sencillez. Cfr. "Llamar Lenguaje a la Lógica es ejercer cierta violencia tanto al Lenguaje como a la Lógica." Raúl Quesada: *Teorías del Lenguaje y teorías Literarias*. Ponencia presentada el Miércoles 29 de Septiembre en la mesa *Lo barroco, la creación, la sabiduría, el romanticismo* en el VII Congreso Nacional de Filosofía *Por qué aún Filosofía*.

17. Cfr. Epílogo: ¿ Por qué abandona Frege su primera conceptografía ?

18. §8

19. §20

20. $(\forall x)(\forall y)(((\forall f)(f(x)\to f(y)))\to(x\equiv y))$

21. Cfr. Deleuze, Gilles: Diferencia y repetición. Júcar Universidad, Barcelona, 1988

22. "Esta distinción [función/argumento] no tiene nada que ver con el contenido conceptual..." [Traducción mía].

23. "Functions... can serve to express... concepts. It has sometimes been maintained by interpreters... that the identification of concepts... with functions is a latter addition to Frege's theory and derives from the semantic doctrine (developed around 1891) that declarative sentences are names of truth values. But this is surely mistaken and completely

underestimates the central logical role of the notion of function in Frege's thought from the pre-Begriffsschrift days onwards. What changes around 1891 is only the explanation of why concepts... are functions, but not the identification itself." Sluga, H.: Op.cit. p,86

24. "Además, sin símbolos difícilmente podríamos ascender al pensamiento conceptual." Frege: *On the scientific*... p.84 Traducción mía.

25. Sean R_1,R_2 y R_3 los predicados asociados a las tres reglas de inferencia dentro de la teoría formal de Frege. $(\forall f)$ (($(f{=}R_1)$ v $(f{=}R_2)$ v $(f{=}R_3)$) > ($f(a,\ldots)$ --> $f(b,..)$)) --> (a=b), donde $f(b,\ldots)$ es la expresión resultante de remplazar algúnas o todas las ocurencias de *a* en $f(a,\ldots)$.

26. Al igual que (1), (2) y (4)

27. Esta condición no debe confundirse con aquella según la cual, sólo las expresiones con contenido judicable pueden calificarse de verdaderas o falsas. V.n.5 de este mismo capítulo.

28. No exhaustivamente, pero con el suficiente detalle para un trabajo como este, que no se pretende esencialmente semántico.

29. He did not thoroughly explain the purpose of his symbolic language... The misconstrual of Frege's aim might have been avoided if he had chosen a different title for his book. Ward Bynum, Terrell: *On the Life and Works of Gottlöb Frege* en Conceptual Notation, Oxford Clarendon Press, 1972. p.16,19

30. *On the scientific justification of a Conceptual notation y The Aim of "Conceptual Notataion".*

31. p.85

32. p.86

33. *V.* la *Introducción* a este mismo trabajo.

34. I did not wish to present an abstract logic in formulas, but to express a content through written symbols in a more precise way than is possible with words. (Traducción mía) Frege: *On the aim*... pp.90,91

35. En el "*prólogo*" Frege distingue entre dos tipos de pensamiento. Uno establece relaciones entre las cosas en virtud de sus propiedades específicas y al otro lo llama Frege el "*pensamiento puro*".

36. Tal será la tesis que adoptará Frege en su segunda conceptografía. A esta parte del contenido la llamara "sentido" [*Sinn*]. Sin embargo, debemos recordar que lo que Frege entiende por "pensamiento" no es una entidad subjetiva.

37. Por ello es que puede haber símbolos no gráficos. Nótese, además que un símbolo no es una entidad físicas, cierta cantidad de tinta en el papel o algo por el estilo, sino una entidad psicológica. Todo su argumento a favor de la importancia de los símbolos en el pensamiento se sostiene de ello. En su crítica posterior al psicologismo, Frege cambia su definición de símbolo.

38. p.85

39. p.83

40. Nótese que también falta la definición fregeana de *Lenguaje*. Sin ella difícilmente podemos saber en qué sentido la aritmética, la lógica y la conceptografía son lenguajes, y porqué las herramientas que asisten al lenguaje deben ser ellas mismas lenguajes.

II. Simbología

Cuando uno se enfrenta por primera vez a la conceptografía de Gottlöb Frege, lo primero que llama la atención es la extraña y abigarrada simbología de su lenguaje formal: Letras latinas, góticas y griegas se alternan con líneas curvas, rectas horizontales y verticales de diversos grosores[1]. Cuando se emprende la revisión de este sistema formal se puede, o bien traducir su simbología a otra más familiar y estandard o bien tratar de entender el uso de tan extraños símbolos y su papel dentro de la filosofía de Frege, tratando de comprender no sólo porque han caído en desuso, sino también qué tanto de su significado ha sido mantenido en la simbología actual, y qué tanto son parte de lo original del sistema formal de Frege.

En este escrito, he optado por la segunda alternativa (aun cuando para otras secciones, será mas conveniente seguir la primera opción). De esta manera, dedico este segundo capitulo a la comprensión de los símbolos que Frege introduce en su Conceptografía. Dado que no pretendo hacer únicamente una exposición del sistema fregeano, no seguiré un orden expositivo estricto y me permitiré, al hablar de cada símbolo, usar todos los que conforman la primera conceptografía de Frege.

A . Una Clasificación de los símbolos de la Conceptografía.

1. Preliminares

La clasificación de símbolos que propongo a continuación, obedece a dos criterios de clasificación distintos. Estos dos criterios son como las dos coordenadas a partir de las cuales pretenderé ubicar, sino todos los símbolos de la conceptografía, por lo menos si todos los tipos de ellos: el primero está dado en términos del sentido del símbolo y el segundo en función de su nivel de representación. Con el fin de mantenernos fieles al texto, es importante considerar como primer criterio aquel que Frege introduce al mero inicio de la *Conceptografía*.

> Por tanto, divido todos los símbolos que empleo en *aquellos bajo los cuales se puede representar varias cosas distintas, y aquellos que tienen un sentido totalmente determinado*??

Es fácil distinguir entre símbolos de un tipo y del otro, principalmente, porque en el primer grupo solamente se incluyen las letras. Es fácil reconocer cuando un símbolo es una letra y saber así que el símbolo no tiene un significado determinado sino que puede usarse como variable. Este uso de las letras lo toma Frege de las matemáticas. En la conceptografía, al igual que en las matemáticas, las letras pueden representar muchas cosas distintas, mientras que el resto de los símbolos - la negación, la barra del contenido, etcétera - tiene un sentido definido. Sin embargo, esto no significa que estos sentido no pueden ser representados también por una letra. Frege utiliza este criterio para distinguir entre símbolos exclusivamente, aunque se puede aplicar también a expresiones mas complejas. Toda expresión de la conceptografía que contiene por lo menos una letra expresa un contenido general. En este sentido, ninguna expresión de la conceptografía tiene un sentido particular determinado, ya que todas ellas contienen letras. Es imposible formar una expresión con puros símbolos con sentido determinado.

El siguiente criterio de clasificación también proviene del texto fregeano. En el §8, Frege distingue entre operaciones de distinto nivel, según se apliquen a las expresiones o a sus contenidos. Si seguimos de cerca la *Conceptografía*, podemos extender esta distinción de niveles hasta incluir no dos sino tres niveles de representación[3]: El primer nivel de los nombres, el segundo de los contenidos y el tercero de los juicios. Esta distinción, ademas de permitirnos distinguir entre operaciones de distinto nivel, puede ser un instrumento analítico de gran utilidad que puede aplicarse a todos los elementos de la conceptografía. Los llamo niveles de representación, porque corresponden a los tres papeles que puede jugar todo símbolo o conjunto de símbolos dentro de una expresión de la conceptografía. Estos tres niveles de representación corresponden a los tres tipos de entidades que pueden ser representadas por un símbolo o expresión de la conceptografía[4]. Una expresión puede a> representarse a sí misma [*für sich selben stehen*[5]], b> expresar su contenido [*für ihren Inhalt stehen*[6]] o b> expresar un juicio [*ein Urtheil ausdrücken*[7]].

El primer nivel es el nivel de las expresiones. Frege también lo llama el "nivel de los nombres". A este nivel pertenecen todos los símbolos y las expresiones. Desde combinaciones arbitrarias de símbolos como "Wytw8b 56%/&2", hasta expresiones complejas como "Toda propiedad aritmética es hereditaria en el orden de los números naturales". En este nivel, cada símbolo, cada expresión no es más que eso, un símbolo o una expresión. No representa otra cosa mas que sí misma. Frege reconoce que algunas veces utilizamos símbolos y expresiones para hablar de otras cosas, y a veces las usamos para referirnos a ellas mismas. Por ejemplo, la palabra "perro". A veces la usamos para referirnos al mamífero cuadrúpedo así llamado, y aveces la usamos para hablar de la palabra española de cuatro letras "perro". Este último uso pertenece a lo que Frege llama el nivel de los nombres. El primer uso, por su parte, pertenece al siguiente nivel: el nivel de los contenidos. Algunas expresiones tienen contenidos conceptuales. Estos son los contenidos que importan para la conceptografía[??] Por lo tanto, solamente pertenecen a este nivel aquellos símbolos o combinaciones de símbolos que tienen contenido conceptual, expresiones como "Los polos opuestos se atraen" o "Se reduce a la mitad la densidad de aire en un cilindro"[9]. Los contenidos conceptuales se dividen en contenidos judicables y no_judicables. Los primeros, a su vez, se dividen en generales y particulares. El tercero y último nivel es el nivel de los juicios. Un juicio, no es un contenido, sino una afirmación, la afirmación de un contenido judicable, para ser mas exactos. Sólo los contenidos judicables se pueden afirmar en un juicio (Por eso son llamados "judicables"). Un juicio es una acción. Afirmar es decir que algo es verdadero, sólo si abarcamos dentro de este *decir* una acción, no una relación conceptual ni, por lo tanto, una función.

No espero que estas dos distinciones (entre niveles de representación y entre variables y símbolos con sentido determinado) queden completamente clara tras una explicación tan escueta, pero sí creo que quedan claramente reflejadas en la clasificación que presento a continuación. Algunas de las clasificaciones precisan una justificación mas clara y en mayor detalle, a la cual dedico la tercera sección de este capítulo. Cuando digo que estos criterios provienen del texto de Frege no quiero decir que fueron propuestos por él como criterios de clasificación de símbolos. De ninguna manera, la clasificación que propongo a continuación, con todo y sus criterios y métodos de análisis es una propuesta mía que parte de algunas afirmaciones de Frege pero no fue dada por Frege mismo. Yo no sostengo que Frege pensara en tres niveles de representación para sus símbolos, por ejemplo, sino que su sistema simbólico puede ser analizado de una manera clara y sencilla si se manejan estos tres niveles. La idea no es de manera alguna descabellada o arbitraria ya que Frege sí creía que la representación en su conceptografía se daba a varios niveles. Cuales y cuantos son estos niveles no lo dice Frege, pero lo sugiere a través de la exposición de su lenguaje formal. De esta exposición es de la que extraje estos dos criterios y la siguiente clasificación es el resultado de aplicarlos a la conceptografía misma.

. 2 .

Si hacemos exclusión de los símbolos derivados (que se introducen a partir de la doble barra vertical[10]), podemos agrupar los símbolos que utiliza Frege en su Conceptografía tomando como coordenadas, primero, los dos tipos básicos que él menciona en su primer parágrafo, y luego, los tres niveles de representación, de la manera siguiente:

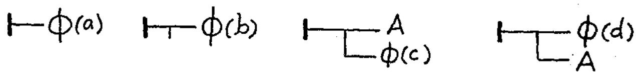
I. Símbolos bajo los cuales se puede expresar distintas cosas [§1].

A. **Las Letras:** Expresan la generalidad del lenguaje formal que es la conceptografía propiamente dicha. Representan expresiones completas o partes de ellas, es decir, nombres, argumentos y funciones indeterminadas. A excepción de las minúsculas latinas que se usan como abreviaturas de expresiones más complejas, las letras por sí mismas, solo pertenecen al nivel de las expresiones. Una letra sola no es más que una letra y no se representa más que a sí misma. Necesita verse acompañada de otros símbolos para formar parte de expresiones de otros niveles.

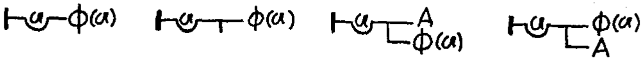
a) Mayúsculas griegas. Representan tanto contenidos judicables completos [§5] como funciones y argumentos no cuantificados [§9].

b) Mayúsculas y minúsculas góticas. Representan funciones o argumentos cuantificados [§11].

c) Minúsculas latinas. Operan como abreviaturas de funciones, argumentos o proposiciones universalmente cuantificados [§11]. De tal manera que expresiones de la forma



son abreviatura de expresiones de la forma



respectivamente.

d) Minúsculas griegas. Marcan lugares de argumentos dentro de símbolos introducidos a través de la igualdad por definición.

II. Símbolos con sentido determinado [§1].

A. Símbolos que permiten el paso de un nivel a otro o símbolos que representan una relación entre expresiones de distinto nivel.

– **El símbolo del juicio** esta formado por dos barras perpendiculares: una corta barra vertical oscura que lleva el nombre de "barra del juicio" y otra larga horizontal y delgada llamada "barra del contenido". Como en Frege, la unión de ambos elementos es considerada algunas veces como uno, y otras veces como dos símbolos completos, es difícil saber cual es la función propia de cada una de las barras que forman el símbolo del juicio. En mi clasificación ignoro el símbolo conjunto del juicio para centrarme en el funcionamiento de cada una de las barras. Para aclarar este punto me serviré de la distinción entre niveles de representación de la que he hablado. Según ella, las barras del juicio y del contenido pueden verse o bien como símbolos de relaciones entre elementos de distinto nivel, o como símbolos que permiten que una expresión ascienda de un nivel de representación a otro superior (del nivel de los contenidos al de los juicios, la primera, y del de las expresiones al de las proposiciones, la segunda). En el símbolo del juicio, la barra horizontal es la que permite que las expresiones dejen de representarse a sí mismas para representar sus contenidos[11], mientras que la barra vertical permite que una expresión pase de representar un contenido judicable a expresar la afirmación del mismo, es decir, un juicio. Por otro lado, para que una expresión represente su contenido, es necesario hacerle antecederle la barra horizontal, por ello llamada, del contenido. La barra horizontal permite que el símbolo o conjunto de símbolos que le siguen a la derecha representen su contenido, de tal manera que si este contenido es judicable, la nueva combinación de símbolos represente una proposición. En otras palabras, para que una expresión represente una proposición, es necesario no solo que se encuentre antecedida por la barra del contenido, sino también que el contenido de tal expresión sea judicable.[12] Algo similar se puede decir de la barra del juicio: si se excluye la barra vertical de la expresión de un juicio, ésta nueva serie de símbolos solamente expresará la proposición que el juicio afirmaba.

a) La barra vertical oscura [§2]: permite el paso del nivel de los contenidos judicables al de los juicios. Representa la afirmación de una proposición.

b) La barra horizontal o barra del contenido [§2] con y sin concavidad [§11]: permite el paso del nivel de las expresiones al de los contenidos. También determina si el contenido de la proposición es general o particular, según tenga o no una concavidad en el centro.

Otra regla del uso de la barra horizontal, que Frege no menciona pero obedece es la que posteriormente[13] llamará *amalgamación de horizontales*: Si en una expresión tenemos una iteración de barras horizontales (dos o más barras horizontales seguidas), podemos eliminarlas todas menos una, teniendo preferencia siempre por aquellas que formen parte de signos complejos, como el de la negación o el del juicio. La expresión resultante tendrá el mismo referente de la expresión original, siempre que ésta tuviera alguno.

Si adoptamos por un momento la distinción sujeto / predicado (que Frege trata de evitar) y la aplicamos a la conceptografía, es decir, si consideramos, tal y como lo hace Frege en el §3, a la conceptografía como un lenguaje de un solo predicado, deberemos considerar a la barra del contenido como el único símbolo que puede formar parte tanto del sujeto como del predicado de un juicio: cuando esta antecedido por la barra del juicio, forma parte del predicado ("*es un hecho*"), mientras que cuando es sólo uno más de los símbolos que quedan unificados por el símbolo conjunto de las barras vertical y horizontal, debe considerarse como un elemento más del sujeto (el contenido judicable que se afirma en el juicio). En otras palabras, solo como parte del símbolo del juicio, la barra del contenido puede considerarse parte del predicado de los juicios.

c) La doble barra vertical oscura [§24]: se usa para introducir nuevos símbolos *por definición*. Como tal, parece ser sólo una relación al nivel de las expresiones, sin embargo opera realmente sobre contenidos, o para ser más precisos, opera sobre contenidos de igualdades de contenido, es decir, relaciones entre nombres antecedidas por la barra horizontal. Pese a no ser un juicio propiamente dicho, la fórmula que empieza por la doble barra vale también como juicio y así la usa Frege en su Conceptografía.

En un sentido, la igualdad por definición, es una relación más fuerte que la simple igualdad de contenido, porque de toda igualdad por definición se puede inferir una igualdad de contenido. Sin embargo, también es más débil, en tanto que el juicio de igualdad que se infiere de ella es analítico.

No hay límite para los nuevos símbolos que se pueden introducir por esta función, tanto en número como en tipo. Las reglas que deben seguirse para el uso de esta función son dos: (a) Todo símbolo (básico o ya definido) o expresión que aparezca al lado derecho de la igualdad debe aparecer, a su vez, del lado izquierdo de la misma. (b) Todas las variables que ocurren libres al lado derecho de la igualdad, y solo ellas, deben ocurrir libres al lado derecho de la igualdad[14]. De estas dos reglas se infieren fácilmente otras limitantes al uso de la igualdad por definición. Por ejemplo, todas las variables que ocurren ligadas al lado derecho de la igualdad, deben ocurrir ligadas también al lado izquierdo de la misma; todo símbolo de función que aparezca en el nuevo símbolo, debe tener el mismo argumento a ambos lados de la igualdad; etcétera[15].

En la Conceptografía no hay ejemplos del uso de esta función sino hasta la tercera parte. Los nuevos símbolos que Frege introduce ahí no son, como podría esperarse en un sistema como la conceptografía que se pretende claro y sencillo, símbolos simples, sino complejos conjuntos de letras griegas, líneas rectas y curvas, etcétera. Si bien esto parece absurdo para las pretensiones de perspicacidad de la conceptografía, no contradice las reglas de funcionamiento de la igualdad por definición que ya mencioné.

B. Símbolos de Operaciones.

a) entre nombres: la igualdad de contenido [§8].[16]

b) entre contenidos: el condicional [§5] y la negación [§7].

Tanto el condicional como la negación son relaciones entre contenidos, es decir, tanto sus argumentos como el resultado de su aplicación son contenidos. Según lo visto anteriormente sobre la barra del contenido, esto significa que tanto entre los símbolos de la negación o del condicional y los símbolos que les sirven de argumentos, como antes de la expresión completa, debe escribirse una barra del contenido. Las primeras barras son necesarias para garantizar que la negación o el condicional se apliquen sobre contenidos y la última barra es necesaria para que el resultado de tal aplicación sea también un contenido. La violación de cualquiera de las condiciones de esta regla haría que la expresión dejara de representar contenido alguno y se convirtiera en un simple conjunto de símbolos, en una expresión, pero no una fórmula.

Esta regla, que sirve tanto para la negación como para el condicional, no se aplica a la igualdad de contenido, por lo menos en su primera condición, ya que la igualdad de contenido, a diferencia de las otras dos funciones, opera exclusivamente sobre expresiones, no sobre sus contenidos??. Para que una expresión funcione como argumento de una igualdad de contenido, no es necesario que este antecedida por la barra del contenido, ya que de cualquier manera sigue siendo una expresión de la conceptografía. Lo que viene a reforzar nuestra tesis[18] según la cual la barra horizontal sirve como puente entre el nivel de los nombres y el de los contenidos en el lenguaje simbólico de Frege[19].

c) entre juicios: símbolos de inferencia [§6]. A diferencia de los símbolos hasta ahora vistos, estos símbolos no aparecen dentro de las expresiones de los juicios, sino que Frege los utiliza para señalar, dentro de las pruebas, las vías de inferencia de un juicio a otro. Los incluyo dentro de este grupo, porque la inferencia es la única operación entre juicios que considera Frege en su conceptografía.

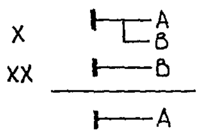
1. La barra horizontal oscura, a la cual, pese a que Frege no le da un nombre especial, llamaré de ahora en adelante barra de inferencia [§6]. indica que el juicio que se escribe abajo de ella, se infiere del o de los juicios escritos arriba de la misma línea. Como la relación de inferencia es transitiva, siempre se pueden poner nuevas barras de inferencia abajo de las fórmulas ya probadas, y construir así cadenas de inferencias para deducir fórmulas mas complejas.

2. Los numerales entre paréntesis [§6]. Con estos números se abrevia una fórmula ya probada. El número correspondiente se escribe entre paréntesis a la derecha de la fórmula la primera vez que aparece ésta y luego se pone, seguida de dos o cuatro puntos, según corresponda, a la izquierda de la

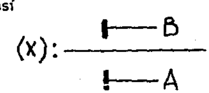
barra de inferencia cada vez que el juicio o alguno de sus casos especiales forme parte de una nueva prueba. Cuando se desean usar dos o más fórmulas abreviadas dentro de la misma prueba, se pueden poner todos los números, separados por comas, dentro de un solo par de paréntesis.

3. Los dos y cuatro puntos [§6]. Cuando, en una prueba, se abrevia una de las fórmulas con su número entre paréntesis, a su derecha se escriben dos puntos o cuatro puntos según sea la fórmula abreviada la premisa mayor o la menor del *modus ponens*.

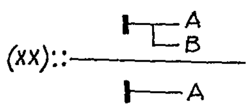
Si consideramos que toda prueba tiene la forma del *modus ponens*



entonces podemos reescribir la misma prueba abreviando alguna de sus premisas, ya sea así

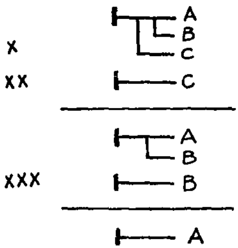


o así

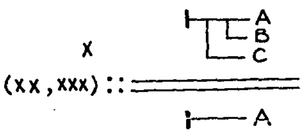


Como puede verse, en el primer caso se escriben dos puntos luego del número entre paréntesis de la fórmula abreviada, y en el segundo caso se escriben cuatro.

Los cuatro puntos también pueden usarse para abreviar no solo las premisas de una inferencia, sino también las conclusiones intermedias de una cadena de inferencias. Frege señala solo el caso en el que la conclusión de una inferencia sirve de premisa (mayor) para otra. Toda cadena que toma la forma:



se puede abreviar, usando los cuatro puntos, así:



4. La barra vertical oscura [§15]. Cada vez que se aplica la regla de sustitución, tercera regla de inferencia del sistema[20], es necesario escribir debajo del número del juicio al que se aplica la regla una tabla en la que se pueda leer que letras fueron sustituidas y que expresiones las sustituyeron. Esta tabla esta formada por una barra vertical oscura, a cuyos lados se escriben dos columnas de expresiones. En el lado izquierdo se escriben las letras del juicio original que se van a sustituir, y en el lado derechoa, las expresiones por las que serán sustituidas. Para que la aplicación de la regla

sea válida es necesario que la sustitución sea uniforme y se dé entre expresiones del mismo tipo.

· 3 ·

Es importante señalar que la distinción entre niveles de representación que usé en esta clasificación, además de ser una distinción conceptual, tiene un significado sintáctico. Por ejemplo, podemos reconocer que el condicional y la negación simbolizan operaciones entre contenidos y no entre nombres, no sólo a través del análisis formal que subyace a la Conceptografía, sino también a través del uso que se da a esos símbolos al escribir las fórmulas: el condicional es una línea que conecta expresiones que representan contenidos. Conectar expresiones o letras que no representen contenidos, por ejemplo, dos letras mayúsculas griegas, a través de la barra del condicional, no sería cometer un error teórico solamente, sino también uno sintáctico.

Dentro de la Conceptografía existe un lugar en el que uno cree ver claramente que se viola esta distinción entre niveles. Este lugar es en el §12. Ahí claramente leemos que un juicio es la negación no de otro juicio, sino de una proposición. Más adelante en el mismo parágrafo, Frege reconstruye el cuadrado de oposición lógica en el lenguaje de su conceptografía en una tabla en la que sólo se encuentran proposiciones, es decir, Frege claramente señala que solo una proposición puede ser la contraria, subalterna o contradictoria de otra proposición. En otras palabras, las relaciones lógicas de contrariedad, oposición, etcétera, se dan solo al nivel de las proposiciones. Un juicio no puede contradecir una proposición. Sin embargo, una página antes Frege había dicho que un juicio sí niega una proposición. ¿ Qué pasa ?

La respuesta es sencilla. La negación y la afirmación no son, como la oposición, la contradicción, etcétera, relaciones entre proposiciones, sino modos en que se da el paso del nivel de las proposiciones al de los juicios. Los juicios no son otra cosa más que afirmaciones (y negaciones) de proposiciones. El significado fijo de la barra del juicio, el único predicado de la conceptografía, no es otro más que la afirmación. De tal manera que el juicio $\vdash A$

afirma la proposición $— A$.

Sin embargo, al parecer esto da como resultado nuevamente una contradicción, ya que cuando es introducida la negación[21], ésta se presenta no como una relación entre la proposición y el juicio, sino como una operación sobre contenidos judicables. ¿ Cómo puede la negación jugar estos dos papeles sin caer en una contradicción ? Recordemos que para la conceptografía, dos expresiones con el mismo contenido judicable, son la misma proposición, esto es la afirmación de dos expresiones con el mismo contenido judicable, da como resultado el mismo juicio. De manera tal que la distinción entre juicios afirmativos y negativos no es tan sustancial como para que se tome en cuenta en nuestro lenguaje formal, ya que un juicio de la forma $\vdash\neg B$ puede considerarse tanto como la afirmación de la proposición $\neg B$ como la negación de la proposición $— B$. Donde una proposición es la negación de la otra. De esta manera, si mantenemos la negación al nivel de las proposiciones, no tenemos que reproducirla al nivel de los juicios. En otras palabras, por un lado, la negación es una relación entre juicios y proposiciones (cuando decimos que un juicio *niega* una proposición), y por el otro lado, la negación es una relación entre proposiciones (cuando decimos que una proposición ***es la negación*** de otra[22]). Como en la conceptografía el primer uso puede reducirse al segundo, sólo este último se simboliza.

B. L e t r a s

En el capítulo anterior entre los elementos que conforman la primera conceptografía de Frege, hice un breve análisis de la letras. El propósito de este nuevo texto, es detallar un poco más aquel análisis con el fin de ubicarlas no sólo (i) al interior de la conceptografía sino también (ii) en relación al uso que de ellas se hace en la lógica simbólica contemporánea.

. 1 .

Las letras son los únicos símbolos bajo los cuales se pueden expresar varias cosas distintas [§1]: Las letras sirven para expresar la generalidad de la conceptografía. Frege cree que sin ellas sería imposible para ningún lenguaje formal poder expresar mas que juicios particulares, ya que todos sus símbolos tendrían contenidos fijos. Para Frege, ésa es la diferencia mas relevante entre la aritmética y el álgebra. Sólo en los juicios algebraicos, gracias al uso de las letras, se expresa la generalidad de las matemáticas.

Las letras representan expresiones completas o partes sintácticamente completas de ellas, es decir, representan nombres, argumentos y funciones. A excepción de las minúsculas latinas que se usan como abreviaturas de expresiones más complejas, las letras por sí solas, solo pertenecen al nivel de las expresiones, es decir, una letra sola no es más que una letra y no se representa más que a sí misma, necesita de otros símbolos para formar parte de expresiones de otros niveles.

Frege quería que los símbolos de las matemáticas formaran, junto con los símbolos introducidos por él[23], un solo lenguaje simbólico, donde mantuvierán tanto su uso como su significado[24]. Por ello, su uso de las letras debía ser consistente con el que se hace de las mismas en las matemáticas, de manera más específica, en el álgebra.

En la Conceptografía, Frege hace uso de los siguientes tres tipos de letras (por orden de aparición):

a) Mayúsculas griegas. Representan contenidos judicables [§5], expresiones completas [§2], funciones y argumentos no cuantificados [§9]. En el §2, Frege empieza a utilizarlas para exponer su lenguaje simbólico.

> ...utilizo las letras griegas como abreviaturas; si no las defino específicamente, el lector les puede atribuir un sentido conveniente[??].

Frege empieza utilizándolas para abreviar cualquiera de los "símbolos o combinaciones de símbolos que indican el contenido del juicio"[26], pero pronto[27] extiende su uso hasta abarcar cualquier expresión en general. Es importante notar que desde el primer momento Frege utiliza las letras para expresar generalidad, pero también hay que tener en cuenta que este primer uso de las letras no se hace dentro del lenguaje de la conceptografía, sino desde el metalenguaje que Frege usa para exponer éste. Las expresiones en las que aparecen mayúsculas griegas no pertenecen a la conceptografía sino que Frege las usa para representar expresiones de la conceptografía *en general*. Expresiones como " ├┬── A " o " —— B " no forman parte de la conceptografía, porque por lo menos uno de sus elementos, la mayúscula griega, no ha sido definido dentro de ella. Si ponemos atención a los primeros parágrafos de la Conceptografía, notaremos que el significado de las mayúsculas griegas se define sólo como parte de expresiones mas complejas, como los juicios, las proposiciones y los condicionales. También notaremos que, para hablar de ellas, Frege nunca utiliza la expresión "significar" [*bedeuten*], sino que siempre dice que *representan* expresiones o contenidos de la conceptografía. De ello podemos concluir fácilmente que las mayúsculas griegas no forman parte de la conceptografía, sino del metalenguaje que utiliza Frege para exponer ésta. Esta afirmación se ve apoyada por el hecho de que dentro de las formulas que expresan los 133 juicios del pensamiento puro que Frege presenta en la Conceptografía, no aparece ninguna mayúscula griega.

b) Letras góticas. Sirven para expresar contenidos generales. Representan funciones (mayúsculas como la "F")[28] o argumentos (minúsculas de la "a" en adelante) cuantificados [§11]. Toda expresión en la que aparece, o parte de ella, debe tomar la forma

$$-\underset{\smile}{\mathfrak{a}}-\phi(\mathfrak{a}) .$$

para ser sintácticamente correcta. Su mayor importancia radica en que gracias a ellas, podemos delimitar el alcance de los cuantificadores. Véase la sección sobre cuantificadores.

c) Minúsculas latinas. Abrevian letras góticas [§11] cuyo alcance es la totalidad del *contenido* del juicio. Una vez que la letra gótica ha sido sustituida por la latina, la concavidad se vuelve superflua.

d) Minúsculas griegas. Marcan lugares de argumentos dentro de símbolos introducidos a través de la igualdad por definición.

En la tercera parte de la Conceptografía, titulada *Some topics from a general theory of sequences*, Frege hace uso de una letra más que no cabe dentro de ninguna de las clases que recién describí. Esta letra es la "F" mayúscula latina que aparece por primera vez en el juicio 69 y se repite en la mayoría de los juicios de ahí en adelante. Por la construcción de tales juicios, podemos inferir que Frege hace uso de esta letra como cualquier minúscula latina funcional, ya que al aplicársele la tercera regla de inferencia, la letra "F" es sustituida por expresiones funcionales como ((- h(A)) -> g(A))[29], la efe gótica[30] e incluso letras minúsculas latinas[31]. Además, expresiones de la forma F(a) sustituyen y son sustituidas por otras expresiones de contenidos judicables, letras minúsculas latinas incluso[32].

. 2 .

Esta es la clasificación de las letras desde la conceptografía misma, sin embargo, conforme los desarrollos posteriores de la lógica y los sistemas formales, muchas preguntas quedan aún en el aire: De estos tres tipos de letras ¿ cuales funcionan como letras de cuantificación y cuales como letras esquemáticas ? Si son variables, ¿ está definido su dominio ? ¿ O es irrestricto ? Sólo respondiendo también a este tipo de preguntas podremos tener una imagen completa del papel que juegan las letras dentro de la primera conceptografía de Frege.

Para ello, empezare utilizando la distinción entre letras esquemáticas y variables de cuantificación. En este trabajo me referiré de manera central a la presentación que hace Quine de ella en la cuarta edición de su Methods of Logic[33], aunque también me auxiliaré de los textos From a logical point of view[34] y la edición revisada de Mathematical Logic[35]. Son varios los criterios que Quine utiliza en estos libros para distinguir las letras esquemáticas de las variables, y cada uno de estos criterios da resultados distintos cuando son aplicados a la conceptografía. Como estos criterios son ajenos a Frege y su Conceptografía, es necesario tener mucho cuidado en no forzar demasiado los textos.

En primer lugar, podemos llamar letras esquemáticas aquellas que marcan el lugar de expresiones dentro de otras mas grandes. En este sentido, las letras de Frege que mas claramente podrían clasificarse de esquemáticas son las griegas mayúsculas, ya que, como dije, Frege las usa para representar expresiones de la conceptografía en general. Además, al igual que Quine con sus letras esquemáticas, Frege las usa para exponer mas fácilmente su sistema simbólico. Las expresiones de las que forman parte las mayúsculas griegas no son proposiciones propiamente dichas, sino "esquemas" expositivos de las mismas. Además, existe en Frege una distinción similar a la que Quine hace entre letras proposicionales y de términos, según la cual es distinto el uso que se hace de aquellas mayúsculas griegas que se usan para marcar el lugar de expresiones con contenido judicable (lo que, en el caso de Quine correspondería a las letras proposicionales) y el que se hace para marcar el lugar de funciones y argumentos (que corresponderían, en Quine, a los términos).

Hasta este punto es fácil adaptar las letras que usa Frege a la distinción que hace Quine, sin embargo, de ahí en adelante es más difícil decidir si el resto de las letras deben llamarse variables o letras esquemáticas. Las minúsculas góticas, indudablemente las mas importantes letras de esta primera conceptografía (todas las proposiciones básicas[36] de la conceptografía se podrían escribir usándolas sólo a ellas), son también las que mas se resisten a esta distinción. Por un lado, sí es cierto que marcan el lugar de expresiones. También es cierto que no hacen referencia, y en este sentido es correcto llamarlas letras esquemáticas. Sin embargo, a diferencia de las letras esquemáticas, sí son suceptibles de cuantificación. A decir verdad, son las únicas letras cuantificables de la conceptografía. La aparente contradicción a la que hemos llegado será resuelta en la siguiente sección sobre la cuantificación. Baste señalar otras dos características de las minúsculas góticas que hacen mas difícil un clasificación definitiva.

Primero, aún cuándo Frege sólo las usa cuantificadas, la distinción entre ocurrencias libres y ligadas también es la más apropiada para hablar de las minúsculas góticas. De esta manera, podemos fácilmente hablar de minúsculas góticas libres y ligadas, además de expresiones abiertas o cerradas. Por supuesto, no de juicios abiertos o cerrados, ya que Frege muy claramente señala, aun cuando no en estos términos, que sólo expresiones cerradas pueden tener contenidos judicables.

Segundo, como no tienen valores propiamente dichos, no podemos clasificar estas letras según la categoría de sus valores; pero sí lo podemos hacer según la categoría de los objetos a los que sus sustituendos se refieren - distinguir claramente entre minúsculas góticas que ocupan el lugar de funciones, argumentos o expresiones completas -, lo que significa transponer la distinción estandard por categorías de los valores a la referencia de los sustituendos.

Las minúsculas latinas también ocupan el lugar de otras expresiones, y tampoco refieren; sin embargo esto no basta para considerarlas esquemáticas. Más que maniquíes de expresiones, las minúsculas latinas funcionan como abreviaturas. En este sentido, no pueden ocupar el lugar de cualquier expresión en general, como las mayúsculas griegas; sino que solo pueden suplantar aquellas minúsculas góticas cuantificadas universalmente cuyo alcance sea la totalidad del juicio en el que ocurren. Por ello, sí pueden aparecer tanto dentro de proposiciones como de expresiones esquemáticas.

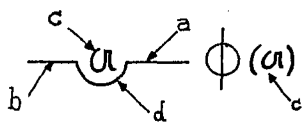
Por último, las minúsculas griegas, tampoco hacen referencia a entidad de tipo alguno. En este sentido son letras esquemáticas, ya que sólo se utilizan para marcar lugares vacíos dentro de expresiones mas complejas. Sin embargo, a diferencia de las mayúsculas griegas y las letras esquemáticas de Quine, las minúsculas griegas sí aparecen dentro de juicios de la conceptografía. Sin embargo, sólo lo hacen dentro de símbolos complejos cuyo significado les ha sido asignado a través de la doble barra vertical (Cualquier otra aparición de minúsculas griegas debe considerarse un error sintáctico). Se distinguen del resto de los elementos que sólo aparecen en estos símbolos complejos en que son sustituibles (uniformemente) por otras minúsculas griegas. Otra manera en que las minúsculas griegas se distinguen del resto de las letras que podríamos considerar esquemáticas de la conceptografía, es que las minúsculas griegas no ocupan el lugar de otras expresiones, sino que solamente marcan lugares que deben permanecer vacíos. Esto es conveniente para expresar, dentro de algún nuevo símbolo, funciones en cuyo lugar del argumento se ha dejado un espacio vacío.

C. Cuantificadores

Indudablemente, uno de las aportaciones mas importantes de Frege a la lógica moderna fueron los cuantificadores. Su importancia va más allá de la posibilidad inmediata de reducir la lógica aristotélica al sistema fregeano. Frege, como su contemporáneo Charles S. Peirce, quién también trabajaba en la elaboración de un nuevo lenguaje simbólico para la lógica[37], reconoce que mucho de la fuerza de un lenguaje simbólico surge de su habilidad para expresar la generalidad. En este sentido, y precisamente gracias a la introducción de los cuantificadores, cree Frege que su conceptografía supera en fuerza a las matemáticas.

· 1 ·

En la primera presentación que hice de los elementos de la conceptografía, dije que el cuantificador universal es un tipo de barra del contenido. Como tal, es un símbolo complejo, en el cual se distinguen cuatro elementos [§11], todos ellos, necesarios[38] para la expresión de la generalidad:



a) La barra horizontal derecha. Es la barra del contenido de cada caso particular comprendido en la generalidad. En otras palabras, es la barra del contenido de cada expresión que surge de la sustitución de la letra gótica por una expresión definida[39].

b) La barra horizontal izquierda. Es la barra del contenido de la expresión de que $\phi(\mathfrak{a})$ vale para cualquier sustitución correcta de la letra gótica $\mathfrak{a}$. En términos de Frege, la diferencia entre estas dos barras no es mas que la derecha forma parte de una expresión con contenido particular, mientras que la barra izquierda forma parte de una expresión con contenido general.

c) La letra gótica. Ver sección anterior.

d) La concavidad. Delimita el alcance de la generalidad contenida en la letra gótica que se escribe sobre ella. Es precisamente esta delimitación, donde descansa la mayor fuerza del cuantificador fregeano. Según lo que vimos sobre las letras, hace apenas unas cuantas páginas, el álgebra, como sólo puede expresar su generalidad a través de letras griegas mayúsculas, sólo puede expresar generalidades con un alcance que abarque el contenido de todo el juicio; mientras que la conceptografía puede expresar también aquellas cuyo alcance sea más limitado. Probablemente es por ello que Frege rechaza la clasificación kantiana que confunde juicios generales con contenidos generales. En un juicio de la conceptografía, a diferencia de los del álgebra, se pueden conectar contenidos particulares con generales y formar con ellos otro contenido que puede a su vez ser o no general.

• 2 •

> En la expresión de un juicio se puede considerar siempre a la combinación de símbolos que está a la derecha de
>
> $$\vdash$$

> como función de uno de los símbolos que ahí aparecen. *Si en el lugar de* este *argumento se coloca una letra gótica, y si a la barra del contenido se le hace una concavidad en la cual se pone esta misma letra, como en*
>
> $$\vdash\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!\!-\,\Phi(\mathfrak{a})$$
>
> *entonces esto significa el juicio de que esa función, sea lo que fuere lo que se considere como su argumento, es un hecho.*

Esta es la manera en la cual Frege introduce el cuantificador universal dentro de su conceptografía. Por supuesto, aún nos queda por interpretar a que refiere Frege con "sea lo que fuere lo que se considere su argumento", es decir, sobre qué esta cuantificando Frege.

En la lógica moderna existen dos maneras diferentes de interpretar los cuantificadores: la *objetal* y la *substitucional*. La interpretación que hace Frege pertenece a la segunda de éstas. Según Susan Haack en su <u>Philosophy of Logic</u>[40], la *interpretación substitucional* apela, no a los valores de las variables cuantificadas, sino a los *sustituendos* de las mismas, es decir, las expresiones que pueden sustituirse por las variables:

> " (x) Fx " se interpreta como " Todas los casos de sustituciones de " $F\ldots$ " son verdaderas"[??].

Según el §11 de la <u>Conceptografía</u>, el primer paso para expresar la generalidad del contenido de una expresión, es partir esta expresión en la parte a cuantificar y la parte que permanecerá constante a través de las sustituciones. Esta división es un caso específico de distinción entre función y argumento, donde el argumento es un sólo símbolo, el cual es remplazado por la letra gótica. Es por eso que los sustituendos deben pertenecer también al nivel de las expresiones.

En este sentido la sustitución de la letra gótica, lo que podríamos llamar el dominio de cuantificación, solo esta restringido por dos condiciones: (1) La expresión resultante de la sustitución debe tener un contenido judicable. Lo que implica que solo se puedan cuantificar expresiones con contenido judicable. Esta misma condición está ya dada por Frege al tratar al cuantificador universal como barra del contenido. (2) Si la letra gótica ocupaba el lugar de una letra funcional, esto "se debe tomar en cuenta"[42]. Esta última expresión es bastante oscura y en general, como toda la segunda condición, parece superflua. Si por "tener en cuenta" entendemos sustituir una expresión funcional por otra expresión funcional, entonces la frase no tiene sentido ya que, como claramente lo dice Frege, cualquier parte de una expresión es funcional es decir, puede tomarse como función para ciertos propósitos y como argumento para otros[43]. Cuantificar sobre funciones es lo mismo que cuantificar sobre argumentos, de cualquier manera lo que se esta cuantificando son partes de expresiones con contenido judicable.

Creer, como parece hacerlo Quine en su *Logic and...*, que cuando las variables de cuantificación ocupan el lugar de letras funcionales el dominio de sustitución es diferente a cuando ocupan el lugar de argumentos, es absurdo. El dominio de las variables cuantificadas es único y el mismo para todas[44]. Verlo de otra manera es seguir viendo la distinción función / argumento bajo la forma de la distinción sujeto / predicado. Funciones y argumentos no son entidades de distinto tipo, son diferentes maneras de separar expresiones. Frege pone especial atención en asegurarnos que no tienen el menor significado conceptual[45], y mucho menos ontológico.

La diferencia entre cuantificar funciones o argumentos sólo se vuelve sustancial cuando la distinción función / argumento en la expresión que estamos cuantificando ya ha sido usada con otros propósitos en otros juicios, por ejemplo, para cuantificarlos. Esta es otra ventaja del tipo de interpretación que adopta Frege. En ella se puede cuantificar sobre expresiones ya cuantificadas. Así por ejemplo:

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!f(\mathfrak{a})$$

Si nos fijamos en los juicios del pensamiento puro que Frege expresa en los parágrafos del 22 en adelante, muchos de ellos son juicios de este tipo, es decir, cuantificaciones de expresiones cuantificadas.

<u>Notas y Referencias Bibliográficas.</u>

1. "...La suerte corrida por la obra de Frege se debió en parte a su simbolismo. No es, desde luego, que resulte especialmente difícil de leer, ...pero es, realmente, demasiado original, choca excesivamente con los usos milenarios de la humanidad para ser aceptada." Bochenski: <u>Op.cit</u>. p.284
2. §1 [Traducción mía]
3. Es importante tener claro que el contenido [*Inhalt*] de una expresión no es su significado [*Bedeutung*]. También es importante distinguir entre el contenido de una expresión y lo que ésta representa [*Vertreten*]. Uno de los fines de la conceptografía es dejar muy clara esta distinción.
4. Por "expresión de la conceptografía" me refiero a cualquier conjunto de símbolos de la misma. Para una definición estricta de "expresión de la conceptografía" v. capítulo 3 "¿ Es la conceptografía un sistema formal ?"
5. §8
6. §8 Geach lo traduce por la expresión latina *in propia persona*.
7. §2
8. V. capítulo 1, Sección A "Sobre los contenidos"
9. Los dos son ejemplos de Frege. El primero aparece en §2 y el segundo en el §15
10. Si bien las letras minúsculas griegas sólo aparecen dentro de símbolos complejos introducidos de esta manera, es correcto considerarlas dentro de los símbolos básicos, ya que, independientemente del significado asignado al símbolo del que forman parte, mantienen su funcionamiento constante.
11. Aquí se nota fácilmente la diferencia entre el contenido de un signo y lo que éste representa.
12. En la <u>Conceptografía</u>, Frege nunca hace explícita esta última tesis. Sin embargo, la adopto no solo porque no es inconsistente con el resto del planteamiento de Frege, sino porque, además, la complementa haciéndola aparecer mas completa y elegante.
13. Frege: <u>Las Leyes Fundamentales de la Aritmética</u>.
14. En la igualdad por definición correspondiente al juicio 76, Frege parece desobedecer esta segunda regla, ya que las variables *x* e *y* que ocurren

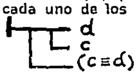
(libres) a la derecha de la igualdad, se convierten en las variables (libres) equis subíndice gamma y ye subíndice beta. Sin embargo, este error es sólo aparente, ya que en la conceptografía no existen variables con subíndices, y las expresiones equis subíndice gamma y ye subíndice beta no son mas que parte de la expresión mas compleja que se introdujo por definición, es decir, son funciones de las mismas variables *x* y *y*.

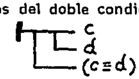
15. Frege tampoco es explícito a este respecto, pero si no se introduce esta regla, se podrían asignar nuevos significados a símbolos ya existentes en la conceptografía. Sin embargo, como los nuevos símbolos que introduce Frege en la tercera parte de la Conceptografía por medio de esta función son, en realidad, complejos de símbolos, Frege se permite incluir símbolos ya definidos entre sus elementos. Por ejemplo, el símbolo nuevo introducido en el juicio 99 difiere del símbolo introducido en el juicio 76, sólo en una pequeña linea debajo de la letra gamma, y, sin embargo, es un símbolo nuevo que se distingue fácilmente del anterior. Se presume, entonces, que esto mismo podría hacerse con los símbolos básicos, es decir, incluirlos como parte de símbolos mas complejos siempre que al hacerlo no se caiga en una ambigüedad. Sin embargo, aún esto sería absurdo ya que toda expresión que contiene un símbolo ya definido puede, y debe, entenderse como función de este. En otras palabras, para que un complejo de símbolos pueda considerarse como una unidad indivisible, cada símbolo que lo conforma debe aparecer sólo dentro de ese complejo. En el ejemplo anterior, parece que Frege no obedece este precepto, sin embargo, si nos fijamos mas detenidamente, podemos darnos cuenta que el segundo símbolo complejo también puede, y debe, verse como función, no sólo de "*x*", "*y*" y la función "*f*", sino también de

$$\frac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, y_\beta)$$

16. Matthias Schirn presenta en su libro Identität und Synonimie [*Begriffliche Inhaltsgleicheit*, Frommann / Holzboog, Stuttgart 1975. pp.34-36] una interesante crítica a esta tesis de Frege, según la cual, en la Conceptografía, Frege no es capaz de dar una verdadera explicación de la igualdad de contenido como relación entre nombres.

17. Por la misma razón, es importante no confundir la igualdad de contenido (una relación entre expresiones) con la doble implicación (una relación entre contenidos). Sin embargo, en la conceptografía sí es valido inferir esta última a partir de la primera. Si, en las fórmulas (53) y (57) sustituimos la función *f*(A) por A, obtenemos los dos siguientes juicios, que expresan cada uno de los sentidos del doble condicional:





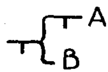
18. V. La barra del contenido en este mismo capítulo.

19. Sin embargo, a veces Frege mismo parece violar esta regla, cuando algunas lineas más adelante en la misma Conceptografía presenta el símbolo del contenido total, ya que en el uso que hace de él, a veces prescinde de la barra horizontal para representar los contenidos que se conjuntan.
En el §7 leemos que el símbolo del contenido total de A y B se escribe así:

en vez de:

como podría esperarse. Sin embargo, cuando Frege reproduce el condicional

en términos del símbolo de contenido total, sí incluye la barra horizontal cuando algún contenido esta negado, ya sea uno de los que se unen, o el propio contenido total. Escribiendo:



Por el momento vamos a dejar de lado esta aparente contradicción más que nada porque el símbolo del contenido total no forma parte de la conceptografía, y la introducción que hace Frege de él en este parágrafo es hipotética.

20. V. Capítulo 3 "¿ Es la conceptografía un sistema formal ?"
21. §7
22. §17
23. Sin embargo, el uso que hace Frege de los numerales, es muy distinto que le que se hace de los mismos en las matemáticas.
24. Frege,G.: *The Aim of "Conceptual Notation"* p.93
25. Nota 4, §2.
26. §2
27. Por ejemplo en el §8
28. Estas letras sólo aparecen en la tercera parte de la Conceptografía.
29. Prueba del juicio 83
30. Prueba del juicio 95
31. En la prueba del juicio 77, por ejemplo, la c minúscula latina es sustituida por la letra "F".
32. En la prueba del juicio 88, por ejemplo, la a minúscula latina es sustituida por la expresión $F(z)$.
33. Quine,W.v.O.: Methods of Logic Fourth Edition, Harvard U.P., Cambridge, 1982
34. Quine,W.v.O.: From a logical point of view. Harvard U.P., Cambridge, 1961
35. Quine,W.v.O.: Mathematical Logic. Revised Edition, Harvard U.P., Cambridge, 1979
36. Es decir, aquellas que no incluyen símbolos introducidos por definición
37. Cfr. Peirce,Ch.S.: Reasoning and the Logic of Things. Harvard U.P., Cambridge, 1992
38. Esta necesidad, es introducida por Frege de manera sintáctica, pero corresponde también a una necesidad conceptual.

39. Obvio que la sustitución debe ser por expresiones del mismo tipo conceptual. Agrego, como lo hace Frege, el epíteto de "definida" para evitar sustituciones que no den como resultado juicios particulares.
40. Haack, Susan: *Quantifiers* en Philosophy of Logic. Cambridge U.P., Cambridge, 1978
41. Haack: Op.cit. p.42
42. §11
43. §9
44. Frege no dice que el dominio sea infinito pero sí dice que el número de sustituciones que se pueden obtener de una generalización es *arbitrario*. §11
45. §9

III. ¿ ES LA CONCEPTOGRAFÍA UNA TEORÍA FORMAL ?

Este tercer capítulo tiene como objetivo responder exclusivamente una pregunta específica sobre la conceptografía. Esta pregunta es: ¿ Es la conceptografía una teoría formal ? Aún cuando Frege no maneja el concepto de teoría formal tal y como se hace actualmente dentro de la lógica matemática, es posible que su conceptografía sí sea una teoría formal. Por ello, es mas correcto preguntar si acaso presenta Frege una teoría formal en su Conceptografía. Para responder a esta pregunta me valdré del texto de Elliott Mendelson Introduction to Mathematical Logic[1]. Ahí, Mendelson da cuatro condiciones que deben ser satisfechas por toda teoría formal: simbología, wffs, axiomas y reglas de inferencia. Lo que yo intento en este capítulo es definir la primera conceptografía de Frege como una teoría formal, satisfaciendo esencialmente cada una de las condiciones citadas por Mendelson. *Definir* la conceptografía como teoría formal, no significa *reducirla* a una teoría formal. En la Conceptografía, Frege presenta mucho más que una teoría formal. En este capitulo y, en general, en esta tesis, me concentro en los elementos formales de la Conceptografía, mas no por ello niego la existencia o importancia del resto de sus elementos.

Desde la aparición de la Conceptografía en 1879, la lógica matemática ha ido evolucionando a pasos agigantados, haciendo cada vez más difícil distinguir de una manera clara los lazos que unen ese primer sistema formal con las teorías actuales. Una de las razones por las cuales no abunda el diálogo entre estas teorías es que la primera conceptografía de Frege no está definida en los mismos términos que las teorías formales actuales. Sin embargo, esto no significa que no pueda definirse así. Lo que pretendo hacer en este capítulo es precisamente eso: definir la primera conceptografía de Frege tal y como se definen las teorías formales contemporáneas. Para este fin me auxiliaré, una vez más, del Introduction to Mathematical Logic de Elliot Mendelson. Según este texto, existen cuatro condiciones que deben ser satisfechas por toda teoría formal *T* para ser definida como tal:

1. Existe un conjunto contable de símbolos llamados *símbolos de T*. Se llama *expresión* de *T* a toda secuencia finta de estos símbolos.
2. Existe un conjunto de expresiones de *T* llamado el conjunto de *Formulas bien formadas* ("wffs") de *T*. (Comúnmente existe también un procedimiento efectivo para determinar si una expresión dada es wff.)
3. Se distingue un conjunto de wffs llamado el conjunto de *axiomas* de *T*. (En la mayoría de los casos, uno puede decidir de manera efectiva si una wff dada es axioma. Cuando esto es así, *T* es llamada una teoría *axiomática*.)
4. Existe un conjunto finito $R_1,\ldots,R_n$ de relaciones entre wffs llamadas *reglas de inferencia*. Para cada R_i, existe un único numero entero positivo tal que, para todo conjunto de *j* wffs y para toda wff *A*, uno puede decidir de manera efectiva si las *j* wffs dadas se encuentran en relación R_i con *A*. Cuando esto es así, *A* es llamada una *consecuencia directa* de las wffs dadas en virtud de R_i.[2]

El propósito central de este capítulo es definir la conceptografía de Frege en términos de la lógica matemática contemporánea, mostrando que cumple, por lo menos de manera esencial, con todas las condiciones contempladas en el texto de Mendelson. Todas las secciones de este capítulo corresponden a cada una de las cuatro condiciones que menciona Mendelson en su definición. De tal manera que, al terminar, habré demostrado no sólo que Frege presenta en la Conceptografía una primitiva teoría formal, sino también la habré definido en términos de la lógica matemática contemporánea.

. 1 .

Primera condición: Definir el conjunto de símbolos de la conceptografía.

La conceptografía está compuesta por dos tipos de símbolos: básicos y derivados. Existe un conjunto denumerable de símbolos básicos y a partir de ellos se puede definir un numero arbitrario de símbolos derivados[3]. Estos símbolos básicos son:

a) Las letras minúsculas

1. latinas cursivas.

Frege no es explícito al respecto, pero adopta la convención de usar las letras "*f*", "*g*" y "*h*" para representar las funciones en general (De aquí en adelante llamaré a las letras que caen bajo este primer caso *letras funcionales*) y el resto del abecedario para representar argumentos en general. De éstos, acostumbra usar las primeras letras para expresiones con contenido judicable, y las últimas para el resto de las expresiones.

2. góticas.

b) Las barras

1. horizontal del contenido
2. cóncava de la generalidad.
3. vertical del juicio
4. vertical del condicional
5. corta vertical de la negación
6. doble vertical de la definición
7. larga horizontal de la inferencia
8. larga vertical de la sustitución.

c) El símbolo de igualdad de contenido.

d) Los paréntesis.

e) Los dos y cuatro puntos.

f) Los numerales de los enteros positivos.

En sentido estricto, es falso que las expresiones de la conceptografía sean secuencias de símbolos. Frege es muy celoso de la bidimensionalidad de su notación, ya que está convencido de que, para simbolizar relaciones lógicas, es poco conspicua la secuencialidad lineal. Por lo tanto, es necesario usar un concepto expandido de expresión, donde a cada expresión de la conceptografía le corresponda una secuencia de secuencias de símbolos de la conceptografía. Sería muy sencilla implementar algunas reglas *ad-hoc* que nos permitan secuencializar la conceptografía. Es más, la técnica de traducción entre notación horizontal y conceptografía que doy en el apéndice a este capítulo puede funcionar bien para este propósito.

. 2 .

Segunda condición: Definir el conjunto de *Formulas bien formadas* ("wffs") de la conceptografía. Definir también un procedimiento efectivo para determinar si una expresión de la conceptografía es wff.

Dentro del conjunto de expresiones de la conceptografía existe un subconjunto propio que podríamos llamar el conjunto de fórmulas bien formadas. Frege no proporciona un procedimiento efectivo para reconocer wffs, pero sí da criterios gramaticales para el buen uso de sus símbolos y a partir de ellos podemos construir una definición recursiva de wff similar a la que da Mendelson para su teoría cuantificacional.

En primer lugar, definiré un término de la conceptografía:

1. Las letras minúsculas latinas y góticas son términos.

2. Si A es una letra funcional y $B_1,\ldots,B_n$ son términos, entonces $A(B_1,\ldots B_n)$ es también un término.

3. Una expresión es un término si y solo si puede demostrase que lo es con base en las condiciones 1 y 2.

En segundo lugar, definiremos *fórmula atómica*:

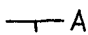
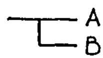
1. Si A es un término, entonces —— A es una fórmula atómica.

2. Si A y B son términos, entonces (A ≡ B) es una fórmula atómica.

Ahora sí podemos definir lo que es una *Formula bien formadas de la conceptografía*:

1. Toda formula atómica es una wff.

2. Si A y B son wffs, entonces

 y  también lo son.

3. Si A es una wff, y B es una minúscula gótica, entonces

 es una wff[4].

4. Una expresión es una wff si y solo si se puede demostrar que lo es con base en las condiciones 1, 2 y 3.

Esta definición recursiva es un procedimiento efectivo para reconocer si una expresión de la conceptografía es fórmula bien formada. Sin embargo, se aplica de manera exclusiva a expresiones en la que no ocurren mas que símbolos básicos, es decir, no sirve para expresiones en las que ocurren símbolos derivados incorporados al lenguaje a través de la doble barra de la definición.

Por último, nos queda definir como juicio a la expresión resultante de hacer anteceder una wff por la barra del juicio. Por supuesto, esto no es necesario para definir a la conceptografía como teoría formal, ya que la conceptografía deja de ser puramente formal al nivel de los juicios[5].

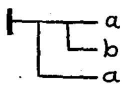
· 3 ·

Tercera condición. Distinguir el conjunto de *axiomas* de *T*.

Con respecto a los axiomas, no es fácil reconocer qué juicios de la conceptografía juegan este papel en la teoría de Frege. En el siguiente capítulo se vera que varios de los juicios de la conceptografía, por un criterio u otro, podrían ser llamados axiomas[7]. Para este, llamaré axioma de la conceptografía a todo *juicio del pensamiento puro*[8] que no demuestre Frege por una *prueba* (tal y como las entiende el propio Frege). Este criterio es más amplio que el del propio Frege, pero también más exacto, ya que en una teoría que se pretende axiomática no podemos mezclar impunemente pruebas semánticas con otras puramente formales. Con las reservas pertinentes, daré la formulación del contenido de las mismas tanto en la notación de la conceptografía (derecha), como en la simbología horizontal estandard (izquierda). Estas fórmulas sin prueba que de ahora en adelante llamaré axiomas de la conceptografía son:

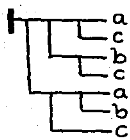
Axioma 1, Fórmula 1:

(A -> (B -> A))



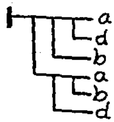
Axioma 2, Fórmula 2:

[(C -> (B -> A)) -> [(C -> B) -> (C -> A)]]



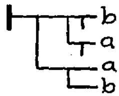
Axioma 3, Fórmula 8:

[(D -> (B -> A)) -> (B -> (D -> A))]



Axioma 4, Fórmula 28:

[(B -> A) -> ((- A) -> (- B))]

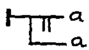


Axioma 5, Fórmula 31:

[(- (- A)) -> A]

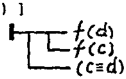
Axioma 6, Fórmula 41:

[A -> (- (- A))]



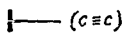
Axioma 7, Fórmula 52:

[(c ≡ d) -> (F(c) -> F(d))]



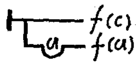
Axioma 8, Fórmula 54:

(c ≡ c)



Axioma 9, Fórmula 58:

[((∀x) F(x)) -> F(c)][9]

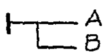


4 .

Cuarta condición: Definir un conjunto finito $R_1,\ldots,R_n$ de relaciones entre wffs, llamadas *reglas de inferencia*.

En la conceptografía existen tres relaciones entre wffs que funcionan como reglas de inferencia. La primera es el *modus ponens*:

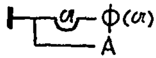
De



y $\vdash B$

se sigue $\vdash A$ 10.

La segunda no tiene nombre, pero dice que de



se sigue

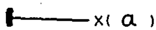
11.

La última regla, conocida como regla de sustitución, se utiliza para formar dstintos casos a partir de una misma fórmula. Según esta regla, podemos obtener nuevas wffs sustituyendo de manera uniforme las letras de una fórmula por otras expresiones (letras incluso) del mismo tipo[12]. Según Frege, en la construcción de nuevos casos, como en cualquier instanciación de un juicio con contenido universal, para que la aplicación de la regla de sustitución sea válida, es necesario no sólo que la sustitución de símbolos sea uniforme, es decir, se sustituya cada aparición del símbolo a sustituir en la fórmula original por *el mismo símbolo o la misma expresión*[13], sino además que, aun cuando lo que se vaya a sustituir sea distinto de aquello a lo que sustituye, ambos sean *conceptos de la misma clase*[14]. Por conceptos de la misma clase, Frege entiende conceptos de los que se pueden predicar *los mismos predicados en los mismos sentidos*. De manera tal que un juicio y una proposición nunca pueden ser conceptos de la misma clase. Aunque Frege nunca explica en la Conceptografía cuál es el sentido de una predicación??, queda claro que, si hemos de sustituir un símbolo en una fórmula para obtener un nuevo caso a partir de ella, debemos respetar no sólo el principio de sustitución uniforme, sino también sustituir siempre símbolos del mismo tipo. No estoy diciendo que debamos sustituir siempre letras góticas por letras góticas, y letras latinas por letras latinas, sino que no podemos sustituir símbolos que representan proposiciones por expresiones que representan funciones, ni viceversa. Aquí se nota, una vez más, lo útil de una clasificación como la que propongo, ya que nos dice claramente cuándo dos expresiones o símbolos son del mismo tipo.

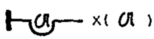
Sin embargo, tal parece que Frege no respeta este principio y que sustituye símbolos de un tipo por símbolos de otro. Si seguimos su cadena de inferencias, la mayoría de las sustituciones que hace son de letras (minúsculas latinas) por proposiciones (conjuntos de símbolos precedidos por la barra del contenido). Lo cual es una aparente violación de la segunda restricción de la regla de sustitución. Pero no nos debemos dejar llevar fácilmente por las apariencias. Este tipo de sustituciones sí respetan el principio antes enunciado, ya que las letras minúsculas latinas son abreviaturas de proposiciones universales[16]. De ahí que puedan ser sustituidas por ellas. Lo mismo sucede cuando, por ejemplo, más adelante en la prueba de la fórmula 53[17], se sustituyen letras por funciones no antecedidas por la barra del contenido, ya que la letra que ocupa el lugar del argumento en tales expresiones es también minúscula latina, es decir, la abreviatura de una letra gótica cuantificada de modo universal.

No es necesario usar esta regla una vez por cada letra que se pretenda sustituir. En este sentido, cada aplicación de la regla puede contemplar varias sustituciones a la vez. Las letras involucradas en cada aplicación de la regla no siguen ningún orden cronológico en su sustitución. Aun cuando en las tablas de sustitución aparezcan unas sobre otras, esto no significa de manera alguna que unas deben sustituirse después de otras[18].

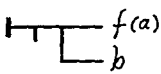
Gracias a que la sustitución es uniforme, el juicio que se obtiene de otro a través de esta regla no puede ser más general que el juicio original. Sin embargo, el término "caso" no debe tampoco confundirnos, ya que se pueden construir casos tan generales como los juicios de los que se obtienen. Esta regla tiene gran similitud con las reglas de particularización y generalización[19] que se utilizan en el cálculo cuantificacional, ya que, por un lado, permite el paso de un juicio con contenido general a uno menos general (recordemos que en la conceptografía no hay juicios cuyo contenido no sea general)[20], y por el otro lado, permite el paso de expresiones de la forma



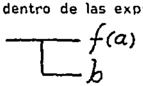
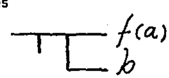
a otras de la forma



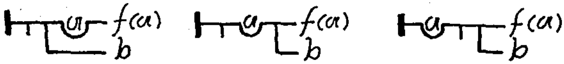
Esto está permitido, por que las minúsculas latinas abrevian góticas cuantificadas de modo universal, de tal forma que es posible invertir la abreviación reemplazando la letra itálica por una gótica que aún no ocurra en el juicio[21], siempre y cuando la concavidad de la generalidad se añada a la barra horizontal que antecede la expresión en la que ocurre esta letra. Sin embargo, por la naturaleza de la conceptografía, sabemos que no es una decisión unívoca reconocer (1) cuál es la expresión en la que ocurre una letra y, por lo tanto, (2) cuál es la barra horizontal que la antecede. Por ejemplo, en el juicio



la letra a ocurre dentro de las expresiones

$f(a)$  

de ahí que, al sustituir la letra latina, la concavidad pueda ubicarse en más de una barra del contenido, dando pie a expresiones distintas, como



Si bien estas tres expresiones claramente no son equivalentes, esto no significa que la regla es inválida. La ambigüedad que existe en la formulación de Frege no invalida la regla, ya que todas las interpretaciones de tal ambigüedad dan pie a inferencias válidas. En nuestro ejemplo, la inferencia del primer juicio a cualquiera de los tres últimos es siempre válida.

Según estas dos últimas reglas, podemos sustituir de manera uniforme cualquier término de una wff, para obtener otra nueva.

Para Frege, una de las principales metas de la Conceptografía era presentar un lenguaje formal ideal para la expresión de inferencias puramente lógicas llamado precisamente *conceptografía*. Después de la presentada en esta obra, Frege elaboró una segunda conceptografía mas compleja y completa que la primera. Sin embargo, después de Frege ningún otro filósofo o matemático se preocupó por presentar una nueva conceptografía. En cambio, conforme avanzó la lógica matemática lo que fueron apareciendo fueron *teorías formales*. En este capítulo he tratado de demostrar que la primera conceptografía de Frege, pese a haber sido construida como otra cosa, también puede verse como una teoría formal. Para hacerlo, tuve que cambiar por completo la presentación que hace Frege en la Conceptografía. Tuve que ordenar la sintaxis de su lenguaje formal y traducirla a los términos de la lógica matemática estandard actual, ya que Frege nunca habla, por ejemplo, de *fórmulas bien formadas, formulas atómicas, axiomas,* ni *reglas de inferencia*. Definir la conceptografía como teoría formal tiene la ventaja de facilitar el diálogo entre la lógica matemática contemporánea y el pensamiento lógico de Frege. Además, nos provee de una sencilla respuesta directa a la pregunta ¿ qué es la conceptografía ?: Una Teoría Formal.

Notas y Referencias Bibliográficas.

1. Mendelson, Elliott: Introduction to Mathematical Logic, Wadsworth & Brooks, tercera edición, Pacific Groove, 1987.
2. Mendelson,E.: Op.cit. p.28. Traducción mía.
3. §24
4. En sentido estricto, en la conceptografía no se usan las wffs abiertas [V. "B. Letras" en el capítulo anterior]. Sin embargo, su existencia tampoco es inconsistente con el resto de la teoría, de tal manera que no es erróneo incluirlas en la definición de wff. Por el contrario, así la definición se hace mas completa y elegante.
5. Cfr. Capítulo 2. "Simbología"
6. Según mi lectura de la Conceptografía, las inferencias también son expresiones (de la conceptografía) y, en algunos sentido, se comportan de manera similar a los juicios de la misma. De tal manera que es fácil dar también una definición formal de *inferencia lógica*.
   Para ello, definiré algo que llamaré una *llamada*.
   1. Si m es el numeral de un entero positivo, y $A_1, \ldots A_n$, $B_1, \ldots, B_n$ (no es necesario que n sea distinto de cero) son términos, entonces

$$(m) \qquad y$$

$$\begin{array}{c} (m) \\ \begin{array}{r|l} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \\ \ldots & \ldots \\ A_n & B_n \end{array} \end{array}$$

son llamadas.

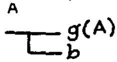
Ahora sí puedo dar una definición de inferencia en tanto expresión de la conceptografía. Si A, B y C son juicios, y m es una llamada, entonces

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ B \end{array}}{C}\,,\quad \frac{A}{B}\,,\quad m{:}\frac{A}{B}\quad \& \quad m{::}\frac{A}{B}$$

son inferencias.

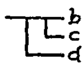
7. V. Capítulo 4. "Representación y Derivación de Algunos Juicios del Pensamiento Puro"
8. Este es el nombre que da Frege a los juicios que forman parte de la cadena de inferencias con la cual Frege ilustra su conceptografía.
9. El axioma 1 de Frege corresponde al axioma 1 de la teoría de primer orden *K* de Mendelson. El axioma 2 corresponde al axioma 2, y el axioma 9 corresponde al axioma 4.
10. Una wff A se sigue de las wffs B y (B -> A).
11. De [A -> ((∀x) F(x)] se sigue [A -> F(a)].
12. Dada la naturaleza de la distinción función/argumento, sabemos que ambos papeles pueden ser jugados no solo por letras, sino también por otros signos o conjuntos de ellos. En este sentido, una letra funcional *f*(A) puede sustituirse por expresiones como:

§22 A



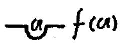
§21 (A ≡ b)

y una letra minúscula latina *a*, a su vez, puede sustituirse no solo por otras minúsculas latinas, sino también por cualquier otra expresión con contenido judicativo: negaciones, condicionales e igualdades de contenido, cuantificadas con letras góticas o sin ellas, como:



o

o



o (*a* ≡ *b*)

13. Cabe señalar que falta un criterio de identidad para símbolos y expresiones. En la Conceptografía se nos dice claramente cuándo dos contenidos conceptuales o dos juicios son idénticos, pero al nivel de los nombres, no tenemos manera alguna de distinguir cuando dos expresiones son "*la misma*".
14. §9
15. Frege llama "*predicados*" a las funciones de un solo argumento, y "*relaciones*" a las funciones de dos o mas argumentos.
16. §11
17. §20
18. Si esto fuera así, los sustitutos de las primeras letras no deberían incluir letras que habrán de sustituirse posteriormente, o sería necesario hacer una restricción a la regla de sustitución diciendo que sólo deben sustituirse las ocurrencias de una letra que no hayan formado parte del sustituto de una sustitución anterior, lo cual no hace Frege.
A decir verdad, no he notado que Frege siga orden alguno para escribir las letras a sustituir en las tablas de sustitución. Al principio, parecía escribir primero las letras góticas, luego las latinas funcionales y por

último el resto de las latinas, siguiendo el orden alfabético dentro de cada tipo de letra. Sin embargo, en la demostración de los juicios 47 [§19], 56, 57 [§21], 59 [§22], 63, 65 [§23], Frege no respeta el orden alfabético de las letras..

19. Cfr. Mendelson: Op.cit. pp.56-63

20. Por ejemplo, cuando se sustituye una letra latina por una igualdad de contenido.

21. Frege enuncia así la restricción en el §11, y la obedece en las sustituciones con las que ilustra la Conceptografía. Sin embargo, sería mas preciso decir que, si la itálica a sustituir no ocurra dentro del ámbito de su cuantificador, se puede usar una gótica que ya ocurre en el juicio.

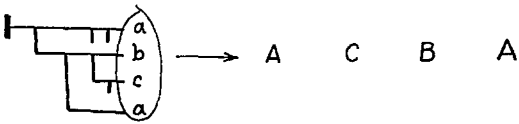
Apéndice: Conceptografía y Notación Horizontal

Algunas veces, en este trabajo, he preferido traducir los contenidos de los juicios de la *Conceptografía* a una notación horizontal. Pese a las evidentes diferencias existentes entre la conceptografía y la notación horizontal estandard de la lógica matemática contemporánea, fórmulas en una y otra notación pueden ser fácilmente traducidas entre sí, por lo menos en el caso del cálculo proposicional. Para el caso del cálculo proposicional puro - fórmulas de la conceptografía en las cuales no aparecen letras minúsculas griegas en papel funcional, ni góticas, ni signos de identidad o de otro tipo introducidos por definición - esta notación es una sencilla variación[1] de la que utiliza Elliott Mendelson en el primer capítulo de su citado libro *Introduction to Mathematical Logic.* En esta sección presento una guía sencilla para traducir de una notación a otra. Las instrucciones son tan sencillas, que cualquiera puede usarlas casi sin necesidad de conocer algo de los sistemas simbólicos entre las que se establece. Como las razones de Frege para usar una notación vertical no son formales, esta traducción no altera este aspecto de la *Conceptografía*.

I. Traducción de la conceptografía a la notación horizontal estandard

1. Las letras minúsculas latinas se traducen a mayúsculas latinas y se ordenas respetando el orden de la fórmula de la linea inferior a la superior. Entre cada letra se deja el espacio suficiente para que se puedan escribir el resto de los símbolos. En otras palabras, la letra que aparece en el renglón inferior se escribe en el extremo izquierdo, la que aparece en el renglón superior se escribe a su derecha y así hasta llegar al renglón superior de la fórmula. Cada letra será la formula correspondiente a la barra horizontal que la antecede.

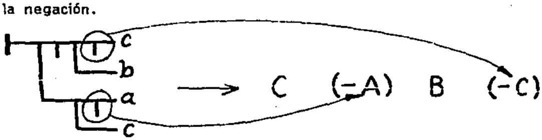
Ejemplo:



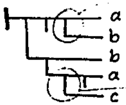
2. De izquierda a derecha se van buscando los símbolos de relaciones funcionales.

a> Cada vez que aparece una **barra vertical** pequeña de la negación, se antecede un signo " - " a la formula que corresponde a la linea horizontal sobre la que esta escrita la negación, y ambos son encerrados en un paréntesis. La unidad formada por la antigua formula, la negación y el nuevo par de paréntesis es la formula que corresponde a la barra horizontal que antecede a la negación.

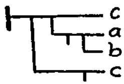
Ejemplo:



b> Cada vez que encontramos una **barra vertical larga** del **condicional**, colocamos un vector " -> " entre las formulas correspondientes a las barras horizontales conectadas por ella. Luego, encerramos ambas formulas en un par un paréntesis. La unidad formada por las dos formulas, la flecha y el par de paréntesis es la formula que corresponde a la barra horizontal que antecede a la del condicional.

Ejemplo:  $\longrightarrow$ $(C \to (-A))$ $\quad B \quad$ $(B \to A)$

c> Una vez que nos encontramos con la barra vertical gruesa del juicio, hemos terminado nuestra traducción. La formula que traduce el contenido de ese juicio sera la fórmula correspondiente a la barra del contenido que procede a la barra del juicio.

Ejemplo completo: 

$$C \qquad B \quad A \qquad C$$
$$(-C) \qquad B \quad A \qquad C$$
$$(-C) \qquad (B \to A) \qquad C$$
$$(-C) \qquad (-(B \to A)) \qquad C$$
$$(-C) \qquad ((-(B \to A)) \to C)$$
$$((-C) \to ((-(B \to A)) \to C))$$

II. Traducción de la notación horizontal estandard a la conceptografía.

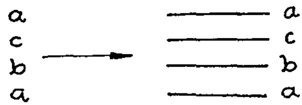
1. Las mayúsculas latinas se traducen a minúsculas latinas y se ordenan unas sobre otras empezando por la primera letra a la izquierda de la fórmula estandard que se convertirá en la letra inferior de la fórmula de la conceptografía.

Ejemplo:

$$((A \to (-B)) \to (C \to A)) \longrightarrow \begin{matrix} a \\ c \\ b \\ a \end{matrix}$$

2. A la izquierda de cada letra minúscula, se extiende una larga linea horizontal. Entre mayor sea el número de condicionales y negaciones de la fórmula, mas larga deberá ser la linea.

Ejemplo:



3. A partir del conectivo principal, se ordenan[2] las conectivas por orden de importancia, hasta llegar a las negaciones cuyo alcance sea solo una letra y los condicionales que enlacen solo un par de letras. Luego, se van traduciendo siguiendo un orden inverso, es decir, de los conectivos de menor alcance al conectivo principal.

Ejemplo:

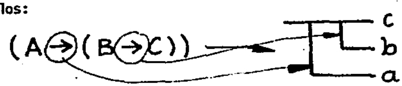
((P -> (- Q)) -> ((- P) -> (- (Q -> R))))

Importancia: 2 3 1 3 2 3 4

Orden inverso: 2 1 4 1 3 2 1

a> Para los condicionales, mediante una linea horizontal tan larga como sea necesario, se conectan las barras horizontales correspondientes a las dos formulas - antecedente y consecuente - del condicional. Luego, se borra el extremo izquierdo de la barra horizontal del contenido del antecedente hasta donde se intersecta esta barra con la del condicional. La barra horizontal superior que se deja intacta será la barra del contenido de la nueva formula.

Ejemplos:



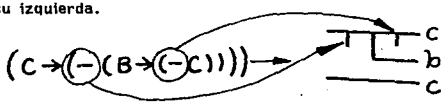
b> Para las negaciones, se escribe una pequeña barra vertical, debajo de la linea horizontal que corresponde a la formula que se esta negando. Si el alcance de la negación es sólo una letra, se coloca la pequeña barra sobre la linea que le antecede, casi inmediatamente a la izquierda de la letra.

Ejemplo:

$(-P)$ 

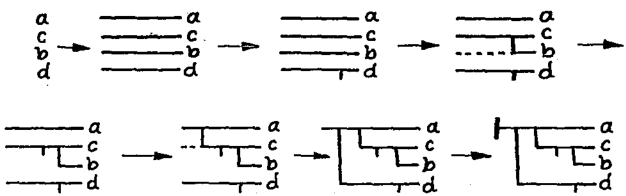
Si la fórmula es mas compleja, se escribe sobre la linea horizontal superior de la fórmula, teniendo cuidado en que la barra horizontal se continúe a la izquierda del condicional, y que ningún otro símbolo escrito sobre la barra quede a su izquierda.

Ejemplo:



4. Una vez que se han traducido todos los conectivos, el principal incluso, se añade la barra vertical gruesa del juicio a la linea horizontal superior - que también debe ser la única que no ha sido cortada por una barra del condicional.

Ejemplo completo: $((-D)\to((-(B\to C))\to A))$



Con respecto a fórmulas mas complejas, aún cuando lo único que sería necesario añadir sería un método para traducir términos de una notación a otra, es mucho más difícil dar un método paso por paso como el que cabo de dar. Primero que nada, porque Frege no hace distinción alguna entre los cálculos proposicional y cuantificacional. En sus fórmulas, letras proposicionales, letras de argumento y funciones cuantificadas coexisten sin ningún problema. Está ambigüedad no está permitida en la mayoría de las teorías formales contemporáneas, lo que hace casi imposible dar una traducción adecuada. De cualquier manera, esta técnica puede servir como un muy buen ejemplo de que tan cercana es la conceptografía con respecto a las teorías formales contemporáneas.

Notas

1. Las únicas variaciónes son: a) el cambio del signo de negación "   " por el signo menos " - ", b) La aparición de los corchetes " [", "] " y las llaves " { " y " } ", cuyo uso es idéntico al d elos paréntesis, pero uso yo para facilitar la lectura de lagunas fórmulas, especialmente, las mas complejas.

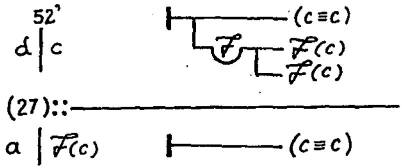
2. Supongo que se conoce como ordenar las conectivas de una wf.

IV: Representación y Derivación de Algunos Juicios del Pensamiento puro

A. Pruebas y demostraciones

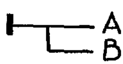
En la Conceptografía, sólo se consideran como pruebas aquellas inferencias que tienen forma de *modus ponens* o cadenas de ellos. Sin embargo, en muchas de las demostraciones que presenta Frege en su Conceptografía intervienen otros elementos. Muchos de estos elementos no aparecen expresados en la simbología de la conceptografía. De ahí que muchas fórmulas de la Conceptografía no cuenten con una *prueba* propiamente dicha. Por ejemplo, la primera fórmula[1], se demuestra a través de una reducción al absurdo apelando al principio de no contradicción, el cual, a su vez, no aparece formulado simbólicamente sino hasta la fórmula (27): *No se puede (a la vez) afirmar* a *y negar* a[2]. Lo mas interesante del caso es que, mientras que en la demostración de la primera fórmula tan sólo se menciona el principio de no contradicción, en la prueba de la fórmula (27) que expresa tal principio sí participa la fórmula (1). La fórmula (1) se demuestra informalmente a partir del principio expresado en la (27), y esta última fórmula se demuestra formalmente a partir de la primera.

Otra fórmula que no tiene prueba es la (54)[3]. Esto es así porque Frege introduce el funcionamiento de la igualdad a partir de un condicional sencillo[4], no un bicondicional. Esto hace que, aun cuando la definición que da Frege para la igualdad de contenido[5] efectivamente incluye ambos principios, su primer axioma de la igualdad solo exprese la indiscernibilidad de los idénticos y no la identidad de los indiscernibles. Si la fórmula (52) tuviera la forma de un bicondicional, o si existiera una fórmula como la (52'), la (54) se podría inferir directamente así:



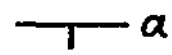
Esto no significa que el segundo axioma de la igualdad sea superfluo, solamente demustra que Frege pudo haber optado, con los mismos resultados, o bien por la fórmula (54) o la (52'), como séptimo axioma de su teoría. Esto es así porque, como demostre en el primer capítulo, la fórmula 52' se puede inferir a partir de la (58) y la (54), además, como acabo de demostrar, la (54) se puede inferir a partir de la (52') y la (27).

Otro ejemplo interesante aparece en la prueba de la segunda, fórmula. Como parte de la prueba, aparece la formulación misma del modus ponens: *la afirmación de* *y* c, *empero, implica la afirmación de* b[6]. Además, esta prueba, pese a no contener ninguna operación de *negación*, parece claramente tomar la forma del Modus Tollens tal y como aparecera posteriormente en la fórmula (28)[7]. La distinción entre Modus Ponens y Tollens dentro de la conceptografía se dificulta por el hecho de que el significado del condicional se puede interpretar en forma prohibitiva:



> significa, pues, el juicio de *que no tiene lugar la tercera de estas posibilidades, sino una de las otras tres*[8].

De esta manera, Frege no tiene que incluir en su conceptografía la regla del *De Morgan*, ya que puede leer los condicionales indiscriminadamente tanto como disyunciones como conjunciones negadas. Un ejemplo claro de esto es la fórmula (33)[9] que Frege interpreta como la regla de conmutación para la disyunción. Otro buen ejemplo es la lectura de la fórmula (43)[10], la cual debería leerse: de una contradicción se sigue cualquier proposición, y sin embargo, Frege lee como: "Si sólo hay opción entre *a* y *a*, entonces *a* tiene lugar"[11]. Frege reconoce que, sin añadir mayor contenido a la conceptografía (como sería si se supusieran relaciones causales), cada fórmula se puede leer de estas y muchas otras formas. Es más, un poco mas adelante, Frege ofrece dos expresiones distintas de la misma formula (46).

Por las mismas razones podemos decir que aún las pruebas que formalmente toman la forma del Modus Ponens contienen, de manera informal, también un Modus Tollens. La distinción entre los dos tipos de negación que señale en algún otro lado sirve muy bien para marcar la línea divisoria entre estos dos tipos de prueba. Cuando la negación a la que refiere la prueba es la operación simbolizada por la barra vertical corta, la prueba es un Modus Tollens, cuando la negación queda subsumida bajo la barra del juicio, la prueba es un Modus Ponens. En este sentido, podemos decir que la relación entre Modus Ponens y Tollens es paralela a los dos sentidos de la negación. Así lo entiende también Frege cuando introduce la fórmula [(28)[12]] que permite el paso de un sentido al otro. Un condicional y su contrafáctico expresan el mismo juicio. La única diferencia que hay entre ellos es que en el segundo caso aparecen simbolizadas las negaciones que son tácitas en el primero.Es debido a la demostración de esta fórmula, la (28), que el principio de *Duplex negatio affirmat* aparece formulado (usando ambos sentidos de la negación) antes de reducirse a los casos simbolizados en las fórmulas (31)[13] y (41)[14]. En otras palabras, es debido a que la negación de  significa la afirmación de *a* que sabemos que la afirmación de  significa también la afirmación de *a*, y no a la inversa.

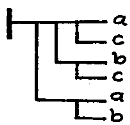
Otra fórmula cuya demostración no es una prueba, es decir no tiene la forma del *Modus Ponens*, es la (8)[15]. La demostración que ahí presenta Frege es tan escueta que difícilmente podemos reconocer en ella una reducción al absurdo o cosa parecida. Ahí mismo Frege dicetambién que dos formulas, literalmente, significan lo mismo si niegan y afirman los mismos contenidos. Es interesante resaltar que Frege no habla de condiciones de verdad ni mucho menos, sino que esta refiriéndose a un criterio semántico. De tal manera que dos expresiones pueden significar lo mismo sin tener la misma forma (como el ejemplo en esta demostración entre  y ) y pueden tener las mismas condiciones de verdad sin necesariamente compartir el significado (como todas las formulas válidas en la conceptografía).

Podríamos suponer, pese a que Frege nunca lo hace explícito, que la expresión "significa lo mismo" que utiliza Frege en la demostración de esta fórmula es sinónima de la igualdad de contenido que introdujo en el §8. Esto porque sabemos que el contenido conceptual de un juicio es su lugar dentro de toda posible inferencia, y fácilmente podemos intuir también que de dos expresiones que afirman y niegan los mismos contenidos, siempre se pueden inferir, en combinación con otros juicios, los mismos juicios; y que de donde se puede inferir uno, se puede siempre inferir el otro. Sin embargo, esto último no es tan sencillamente aceptable y precisa prestarsele una atención mas detallada.

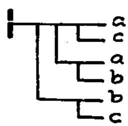
Ya señale algunas páginas atrás que el contenido judicativo de una expresión no solo dependía, sino que podía identificarse con su forma. Luego entonces, si aplicamos este criterio a lo anteriormente dicho, tendremos que aceptar que dos expresiones sí pueden significar lo mismo sin tener la misma forma, pero no pueden tener el mismo contenido judicativo sin compartir necesariamente también la forma. Por lo tanto, no es cierto que "significar lo mismo" y tener el mismo contenido judicativo son lo mismo dentro de la conceptografía.

Sin embargo podemos introducir en la conceptografía fórmulas isomórficas a la (8)[16] que, como la (22) y las que van de la (12) a la (17), permitan inferir de toda fórmula, otra de diferente forma pero mismo significado.

Mas adelante, una vez que Frege ha probado la fórmula (9), podemos leer que: "Sólo de manera no esencial se distingue esta proposición [la (9)] de (5)"[17]. ¿ Qué significa eso de *no esencial* ? Para responder esta pregunta comparemos, pues, las fórmulas (5)



y (9)



Ambas fórmulas expresan la forma del silogismo hipotético y sólo se distinguen por el orden en las premisas. Según lo dicho en la demostración de la fórmula anterior, ambas fórmulas significan lo mismo. Frege llama no esenciales a las diferencias formales que no se traducen en diferencias en el significado.

En el §22, empieza Frege a utilizar el símbolo de generalidad. Lo que le permite primero introducir, sin demostración ni prueba, la regla de instanciación universal -fórmula (58)-, con todo y restricciones. Pero, más que nada, le permite también derivar, en forma de fórmulas de su conceptografía, las formas válidas de los silogismos. En otras palabras, le permite demostrar que la silogística es derivable dentro de su sistema de lógica matemática.

Por último, no debemos dejar de señalar que, Frege reconoce desde el *Prólogo* que las pruebas ofrecidas en estos parágrafos de la Conceptografía no son las únicas pruebas posibles para la demostración de esas fórmulas, ni que su orden sea también necesario. Por ejemplo, cuando llega a la fórmula (19), repite la nota que había aparecido junto a la fórmula (9), ahora en relación a la fórmula (7): *Esta proposición difiere de (7) sólo de manera no esencial.* De esa manera nos pone en aviso de que podríamos trasladar la prueba de tal fórmula a ésta. O sea, que en vez de un Modus Ponens entre las fórmulas (9) y (18), como aparece en la Conceptografía, la fórmula 19 puede obtenerse por un Modus Ponens entre las fórmulas (7) y (8).

. 2 .

Al final de su conceptografía, Frege incluye una tabla que presenta esquemáticamente las uniones que formaron su cadena de inferencias, en otras palabras, exactamente a la inversa que lo fue haciendo a lo largo del texto, enlistando en que pruebas se utilizo cada fórmula demostrada. Cabe señalar que, como es de esperar, las fórmulas que participan en mayor número de pruebas, son precisamente las fórmulas que no están acompañadas por una prueba propiamente dicha (Frege no les llama *axiomas*, pero sí llama la atención sobre cinco de ellas en especial: (28), (31), (41), (52), (54), (58), de las cuales sólo la tercera tiene prueba). Para acompañar la lista de Frege, presento aquí otras listas estadísticas que pueden ser de utilidad sinóptica:

Fórmulas con demostración, pero sin prueba: 1, 2, 8, 28, 31.

Fórmulas sin demostración ni prueba: 41, 52, 54, 58.

Fórmulas con ejemplo: 1, 2, 5, 7, 28, 37, 59.

Fórmulas traducidas al lenguaje ordinario: 1, 2, 8, 11, 27, 29, 31, 33, 34, 36, 37, 41, 43, 46, 47, 48, 52, 54, 58.

B. Representación y Derivación de Algunos Juicos del Pensamiento puro

Una vez que se han dado a conocer la simbología y las reglas de inferencia del sistema formal presentado en la Conceptografía, la segunda parte de ella se dedica a presentar algunos de los juicios del pensamiento puro que pueden expresarse dentro de tal sistema. De acuerdo a Frege, la validez de estos juicios depende de manera directa de aquellos que no pueden ser representados dentro de él. Para distinguir entre unos y los otros, es necesario reconstruir las pruebas que conforman esta segunda parte de la Conceptografía. Con tal fín, elaboré esta sección de mi investigación.

§14

Los dos primeros juicios, no cuentan con una prueba propiamente dicha[18]. Sin embargo, esto no significa que no se derivan de otros juicios. Según Frege, esto sólo significa que no se derivan de otros juicos que se puedan expresar en la simbología de la conceptografía. La prueba informal que se usa Frege para estos dos juicos, toma la forma de la reducción al absurdo. Como ambos juicios tienen la forma del condicional, se puede tomar como hipótesis el caso excluído por el significado del condicional[19], es decir, el que el antecedente sea afirmado y el consecuente negado. Luego, se transforma esta hipótesis, casi siempre a través de la doble negación, y se deriva de ella, por *modus ponens*, un juicio contradictorio, con lo que queda demostrado el juicio. Contrario a lo que dice Frege, estas pruebas se sostienen - a excepción de las reglas de inferencia - en juicios que, no solo sí pueden ser representadas dentro de la conceptografía, sino que así aparecen - y algunas veces son demostrados - mas adelante en esta misma parte de la obra: La no contradicción en el juicio 27, la doble negación en el juicio 31, la reducción al absurdo en el 28, etcétera. Las siguientes reconstrucciones mas o menos formales corresponden a las demostraciones en el metalenguaje con que Frege acompaña los dos juicios del §14.

(1) (A -> (B -> A) Axioma 1

- (A & - (B -> A)) Por definición del condicional.

RAA: - - (A & - (B -> A)) Hipótesis.

(A & - (B -> A)) Por doble negación

(A & - - (B & (- A))) Por definición del condicional.

(A & (B & (- A))) Por doble negación.

(A & ((- A) & B) Por conmutación.

((A & (- A)) & B) Por asociación.

q.e.d.

(2) (C -> (B -> A)) -> ((C -> B) -> (C -> A)) Axioma 2.

- ((C -> (B -> A)) & - ((C -> B) -> (C -> A))) Por definición del condicional

RAA: - - ((C -> (B -> A)) & - ((C -> B) -> (C -> A))) Hipótesis.

((C -> (B -> A)) & - ((C -> B) -> (C -> A))) DN

(- (C & - (B -> A)) & - ((C -> B) -> (C -> A))) Def.cond.

(- (C & - - (B & - A))) & - ((C -> B) -> (C -> A)))   Def.cond.

(- (C & (B & - A))) & - ((C -> B) -> (C -> A)))   DN

(- (C & (B & - A))) & - - ((C -> B) & - (C -> A)))   Def cond.

(- (C & (B & - A))) & ((C -> B) & - (C -> A)))   DN

(- (C & (B & - A))) & ((C -> B) & - - (C & - A)))   Def Cond.

(- (C & (B & - A))) & ((C -> B) & (C & - A)))   DN

(- (C & (B & - A))) & (((C -> B) & C) & - A)))   Asociación

(- (C & (B & - A))) & ((B & C) & - A)))   MP

(- (C & (B & - A))) & (C & (B & - A))   Asociación

q.e.d.

§15. Los juicios que aparecen en este parágrafo, son lo primeros que cuentan con una prueba formal propiamente dicha.

1. [(C -> (B -> A)) -> ((C -> B) -> (C -> A))] -> { (B -> A) -> [(C -> (B -> A)) -> ((C -> B) -> (C -> A))] } Caso del Juicio 1 (Axioma 1)

2. [(C -> (B -> A)) -> ((C -> B) -> (C -> A))] Juicio 2 (Axioma 2)

3. (B -> A) -> [(C -> (B -> A)) -> ((C -> B) -> (C -> A))] Modus Ponens de 1 y 2: Juicio 3

4. { (B -> A) -> [(C -> (B -> A)) -> ((C -> B) -> (C -> A))] } -> { [(B -> A) -> (C -> (B -> A))] -> [(B -> A) -> ((C -> B) -> (C -> A))] } Caso del Juicio 2 (Axioma 2)

5. [(B -> A) -> (C -> (B -> A))] -> [(B -> A) -> ((C -> B) -> (C -> A))] Modus Ponens de 4 y 3: Juicio 4

6. (B -> A) -> (C -> (B -> A)) Caso del Juicio 1 (Axioma 1)

7. (B -> A) -> ((C -> B) -> (C -> A)) Modus Ponens de 5 y 6: Juicio 5

8. (B -> A) -> ((D -> B) -> (D -> A)) Caso del Juicio 5

9. [(B -> A) -> ((D -> B) -> (D -> A))] -> { [C -> (B -> A)] -> [C -> ((D -> B) -> (D -> A)] } Caso del juicio 5

10. [C -> (B -> A)] -> [C -> ((D -> B) -> (D -> A)] Modus Ponens de 9 y 10: Juicio 6

11. [(B -> A) -> ((C -> B) -> (C -> A))] -> { (B -> A) -> [(D -> (C -> B)) -> (D -> (C -> A))] } Caso del Juicio 6

12. (B -> A) -> [(D -> (C -> B)) -> (D -> (C -> A))] Modus Ponens de 11 y 7: Juicio 7

§16. En este paragrafo se introduce un tercer axioma: el juicio 8.

(8) [D -> (B -> A)] -> [B -> (D -> A)]

RAA: - [D -> (B -> A)] -> [B -> (D -> A)]	Hipótesis
- - [D -> (B -> A)] & - [B -> (D -> A)]	Def. Cond.
[D -> (B -> A)] & - [B -> (D -> A)]	DN
[- (D & - (B -> A))] & - [B -> (D -> A)]	Def. Cond.
[- (D & - (B -> A))] & - - [B & - (D -> A)]	Def Cond.
[- (D & - (B -> A))] & [B & - (D -> A)]	DN
[- (D & - - (B & - A))] & [B & - (D -> A)]	Def. Cond.
[- (D & (B & - A))] & [B & - (D -> A)]	DN
[- (D & (B & - A))] & [B & - - (D & - A)]	Def.Cond.
[- (D & (B & - A))] & [B & (D & - A)]	DN
[- (D & (B & - A))] & [D & (B & - A)]	Asociación

q.e.d.

1. [(B -> A) -> ((C -> B) -> (C -> A))] -> [(C -> B) -> ((B -> A) -> (C -> A))] Caso del Juicio 8 (Axioma 3)

2. (B -> A) -> ((C -> B) -> (C -> A)) Juicio 5

3. (C -> B) -> ((B -> A) -> (C -> A)) Modus Ponens de 1 y 2: Juicio 9

4. [D -> (E -> B)] -> [E -> (D -> B)] Caso del Juicio 8 (Axioma 3)

5. [(D -> (E -> B)) -> (E -> (D -> B))] -> { [(E -> (D -> B)) -> A] -> [(D -> (E -> B)) -> A] } Caso del Juicio 9

6. [(E -> (D -> B)) -> A] -> [(D -> (E -> B)) -> A] Modus Ponens de 5 y 4: Juicio 10

7. B -> (C -> B) Caso del Juicio 1 (Axioma 1)

8. (B -> (C -> B)) -> [((C -> B) -> A) -> (B -> A)] Caso del Juicio 9

10. ((C -> B) -> A) -> (B -> A) Modus Ponens de 8 y 7: juicio 11. [C -> (B -> A)] -> [B -> (C -> A)] Caso del Juicio 8 (Axioma 3)

12. { [C -> (B -> A)] -> [B -> (C -> A)] } -> { [D -> (C -> (B -> A))] -> [D -> (B -> (C -> A))] } Caso del Juicio 5

13. [D -> (C -> (B -> A))] -> [D -> (B -> (C -> A))] Modus Ponens de 12 y 11: Juicio 12

14. { [D -> (C -> (B -> A))] -> [D -> (B -> (C -> A))] } -> { [D -> (C -> (B -> A))] -> [B -> (D -> (C -> A))] } Caso del Juicio 12

15. [D -> (C -> (B -> A))] -> [B -> (D -> (C -> A))] Modus Ponens de 14 y 13: juicio 13

16. { [D -> (C -> (B -> A))] -> [B -> (D -> (C -> A))] } -> { [E -> [D -> (C -> (B -> A))]] -> [E -> [B -> (D -> (C -> A))]] } Caso del Juicio 5

17. { E -> [D -> (C -> (B -> A))] } -> { E -> [B -> (D -> (C -> A))] } Modus Ponens de 17 y 16: Juicio 14

18. { [E -> [D -> (C -> (B -> A))]] -> [E -> [B -> (D -> (C -> A))]] } -> { [E -> [D -> (C -> (B -> A))]] -> [B -> [E -> (D -> (C -> A))]] } Caso del Juicio 12

19. [E -> [D -> (C -> (B -> A))]] -> [B -> [E -> (D -> (C -> A))]] Modus Ponens de 18 y 17: Juicio 15

20. { [D -> (C -> (B -> A))] -> [D -> (B -> (C -> A))] } -> { [E -> [D -> (C -> (B -> A))]] -> [E -> [D -> (B -> (C -> A))]] } Caso del Juicio 5

21. [E -> [D -> (C -> (B -> A))]] -> [E -> [D -> (B -> (C -> A))]] Modus Ponens de 20 y 13: Juicio 16

22. [D -> (C -> (B -> A))] -> [C -> (D -> (B -> A))] Caaso del Juicio 8 (Axioma 3)

23. { [D -> (C -> (B -> A))] -> [C -> (D -> (B -> A))] } -> { [D -> (C -> (B -> A))] -> [C -> (B -> (D -> A))] } Caso del Juicio 16

24. [D -> (C -> (B -> A))] -> [C -> (B -> (D -> A))] Modus Ponens de 23 y 22: Juicio 17

25. (C -> (B -> A)) -> [(D -> C) -> (D -> (B -> A))] Caso del Juicio 5

26. { (C -> (B -> A)) -> [(D -> C) -> (D -> (B -> A))] } -> { (C -> (B -> A)) -> [(D -> C) -> (B -> (D -> A))] } Caso del Juicio 16

27. (C -> (B -> A)) -> [(D -> C) -> (B -> (D -> A))] } Modus Ponens de 26 y 25: Juicio 18

28. [(C -> B) -> ((B -> A) -> (C -> A))] -> { [D -> (C -> B)] -> [(B -> A) -> (D -> (C -> A))] } caso del Juicio 18

29. [D -> (C -> B)] -> [(B -> A) -> (D -> (C -> A))] Modus Ponens de 28 y 3: Juicio 19

30. { [D -> (C -> B)] -> [(B -> A) -> (D -> (C -> A))] } -> { [E -> [D -> (C -> B)]] -> [(B -> A) -> [E (D -> (C -> A))]] } Caso del Juicio 18

31. [E -> [D -> (C -> B)]] -> [(B -> A) -> [E (D -> (C -> A))]] Modus Ponens de 30 y 29: Juicio 20

32. (D -> C) -> [(C -> B) -> (D -> B)] Caso del Juicio 9

33. { (D -> C) -> [(C -> B) -> (D -> B)] } -> { (D -> B) -> A] -> [(D -> C) -> ((C -> B) -> A)] } Caso del Juicio 19

34. [(D -> B) -> A] -> [(D -> C) -> ((C -> B) -> A)] Modus Ponens de 33 y 32: Juicio 21

35. { [E -> [D -> (C -> (B -> A))]] -> [E -> [D -> (B -> (C -> A))]] } -> { { F -> [E -> [D -> (C -> (B -> A))]] } -> { F -> [E -> [D -> (B -> (C -> A))]] } } Caso del Juicio 5

36. { F -> [E -> [D -> (C -> (B -> A))]] } -> { F -> [E -> [D -> (B -> (C -> A))]] } Modus Ponens de 35 y 23: Juicio 22

37. [D -> (C -> (B -> A))] -> [(E -> D) -> [C -> (E -> (B -> A))]] Caso del Juicio 18

38. { [D -> (C -> (B -> A))] -> [(E -> D) -> [C -> (E -> (B -> A))]] } -> { [D -> (C -> (B -> A))] -> [(E -> D) -> [C -> (B -> (E -> A)]] } caso del Juicio 22

39. [D -> (C -> (B -> A))] -> [(E -> D) -> [C -> (B -> (E -> A)]] Modus Ponens de 38 y 37: Juicio 23

40. (C -> A) -> [B -> (C -> A)] Caso del Juicio 1 (Axioma 1)

41. { (C -> A) -> [B -> (C -> A)] } -> { (C -> A) -> [C -> (B -> A)] } Caso del Juicio 12

42. (C -> A) -> [C -> (B -> A)] Modus Ponens de 41 y 40: Juicio 24

43. { (C -> A) -> [C -> (B -> A)] } -> { [D -> (C -> A)] -> [D -> [C -> (B -> A)]] } Caso del Juicio 5

44. [D -> (C -> A)] -> [D -> [C -> (B -> A)]] Modus Ponens 43 y 42: Juicio 25

45. A -> (B -> A) Juicio 1 (Axioma 1)

46. [A -> (B -> A)] -> [B -> (A -> A)] Caso del Juicio 9

47. B -> (A -> A) Modus Ponens de 46 y 45: Juicio 26

48. (A -> (B -> A)) -> (A -> A) Caso del juicio 26

49. (A -> A) Modus Ponens de 48 y 47: Juicio 27: No Contradicción.

§17

(28) (B -> A) -> (- A -> - B)	Axioma 4
[(- (B & - A)) -> (- A -> - B)]	Def. Cond.
[(- (B & - A)) -> - (- A & - - B)]	Def. Cond.
[(- (B & - A)) -> - (- A & B)]	DN
[(- (B & - A)) -> - (B & - A)]	Conmutación

Caso de Juicio 27: No contradicción

q.e.d.

1. (B -> A) -> (- A -> - B) Juicio 28: Axioma 4

2. [(B -> A) -> (- A -> - B)] -> [(C -> (B -> A)) -> (C -> (- A -> - B))] Caso del Juicio 5

3. (C -> (B -> A)) -> (C -> (- A -> - B).) Modus Ponens de 2 y 1: Juicio 29

4. [(C -> (B -> A)) -> (C -> (- A -> - B))] -> [(B -> (C -> A)) -> (C -> (- A -> - B))] Caso del Juicio 10

5. (B -> (C -> A)) -> (C -> (- A -> - B)) Modus Ponens de 4 y 3: Juicio 30

§18

1. [(- - A) -> A] Juicio 31: Axioma 5

2. [(- - B) -> B] Caso del Juicio 31

3. ((- - B) -> B) -> [((- B -> A) -> ((- A) -> (- - B))) -> ((- B -> A) -> ((- A) -> B))] Caso del Juicio 7

4. [((- B -> A) -> ((- A) -> (- - B))) -> ((- B -> A) -> ((- A) -> B))] Modus Ponens de 3 y 2: Juicio 32

5. ((- B) -> A) -> (- A -> - - B) Caso del Juicio 28 (Axioma 4)

6. ((- B -> A) -> ((- A) -> B)) Modus Ponens de 4 y 5_ Juicio 33

7. [((- B) -> A) -> (- A -> B)] -> [((C -> ((- B) -> A) -> (C -> ((- A) -> B))] Caso del Juicio 5

8. ((C -> ((- B) -> A) -> (C -> ((- A) -> B)) Modus Ponens de 7 y 6: Juicio 34

9. [((C -> ((- B) -> A) -> (C -> ((- A) -> B))] -> [(C -> ((- B) -> A))) -> ((- A) -> (C -> B))] Caso del Juicio 12

10. (C -> ((- B) -> A))) -> ((- A) -> (C -> B)) Modus Ponens de 9 y 8: juicio 35

11. (A -> ((- B) -> A) Caso del Juicio 1 (Axioma 1)

12. ((A -> ((- B) -> A) -> (A -> ((- A) -> B)) Caso del Juicio 34

13. (A -> ((- A) -> B)) Modus Ponens de 12 y 11: Juicio 36

14. (C -> ((- C) -> B)) Caso del Juicio 36

15. (C -> ((- C) -> B)) -> [[((-C) -> B) -> A] -> (C -> A)] Caso del Juicio 9

16. [((-C) -> B) -> A] -> (C -> A) Modus Ponens de 15 y 14: Juicio 37

17. [A -> ((- A) -> B)] -> [(- A) -> (A -> B)] Caso del Juicio 8 (Axioma 3)

18. (- A) -> (A -> B) Modus Ponens de 17 y 13: Juicio 38

19. ((- A) -> (A -> B)) -> (((- A) -> A) -> ((- A) -> B)) Caso del Juicio 2 (Axioma 2)

20. (((- A) -> A) -> ((- A) -> B)) Modus Ponens de 19 y 18: Juicio 39

21. [((-A) -> A)) -> ((- A) -> B))] -> { (- B) -> [((-A) -> A)) -> A] } Caso del Juicio 35

22. (- B) -> [((-A) -> A)) -> A] Modus Ponens de 21 y 20: Juicio 40

§19.

(41) [A -> (- - A)] Axioma 6

1. (A -> A) Juicio 27

2. (A -> A) -> [- - (A -> A)] Caso del Juicio 41 (Axioma 6)

3. - - (A -> A) Juicio 42

4. [- - (A -> A)] -> [((-A) -> A)) -> A] Caso del Juicio 40

5. [((-A) -> A)) -> A] Modus Ponens de 4 y 3: Juicio 43

6. [((- A) -> A)) -> A] -> [((- A) -> C) -> ((C -> A) -> A)] Caso del Juicio 21

7. [((- A) -> C) -> ((C -> A) -> A)] Modus Ponens de 6 y 5: Juicio 44

8. [((- A) -> C) -> ((C -> A) -> A)] -> { [((- C) -> A) -> ((- A) -> C)] -> [((- C) -> A) -> ((C -> A) -> A)] } Caso del Juicio 5

9.[((- C) -> A) -> ((- A) -> C)] -> [((- C) -> A) -> ((C -> A) -> A)] Modus Ponens de 8 y 7: Juicio 45

10. ((- C -> A) -> ((- A) -> C)) Caso del Juicio 33

11. ((- C) -> A) -> ((C -> A) -> A) Modus Ponens de 10 y 9: Juicio 46

12. [((- C) -> A) -> ((C -> A) -> A))] -> [((- C) -> B) -> ((B -> A) -> ((C -> A) -> A))] Caso del Juicio 21

13. [((- C) -> B) -> ((B -> A) -> ((C -> A) -> A))] Modus Ponens de 12 y 12: Juicio 47

14. [((- C) -> B) -> ((B -> A) -> ((C -> A) -> A))] - > [[D -> ((- C) -> B)] -> ((B -> A) -> ((C -> A) -> (D -> A)))] Caso del Juicio 23

15. [D -> ((- C) -> B)] -> ((B -> A) -> ((C -> A) -> (D -> A))) Modus Ponens de 14 y 13: Juicio 48

16. [((- C) -> B) -> ((B -> A) -> ((C -> A) -> A))] -> [((- C) -> B) -> [(C -> A) -> ((B -> A) -> A)]] Caso del Juicio 12

17. [((- C) -> B) -> [(C -> A) -> ((B -> A) -> A)]] Modus Ponens de 16 y 13: juicio 49

18. [((- C) -> B) -> [(C -> A) -> ((B -> A) -> A)]] -> [(C -> A) -> ((B -> A) -> { [(-C) -> B] -> A })] Caso del Juicio 17

19. [(C -> A) -> ((B -> A) -> { [(-C) -> B] -> A })] Modus Ponens de 18 y 17: Juicio 50

20. [(C -> A) -> ((B -> A) -> { [(-C) -> B] -> A })] -> { (D -> (C -> A)) -> [(B -> A) -> [D -> (((- C) -> B) -> A)]] } Caso del Juicio 18

21. (D -> (C -> A)) -> [(B -> A) -> [D -> (((- C) -> B) -> A)]] Modus Ponens de 20 y 19: Juicio 51

Como Frege no distingue entre un cálculo proposicional y otro cuantificacional, es difícil traducir sus formulas de los parágrafos 20 en adelante a una simbología estandard como la que he estado utilizando en este capítulo. Para ellos, elabore una notación horizontal no estandard que combina letras mayúsculas con minúsculas. Por conveniencia, al transcribir las formulas de la conceptografía, he sustituido la a gótica por x y la b gótica por w. Por ello, también fue necesario sustituir la x minúscula latina por b, en las fórmulas donde ambas aparecían (§22: 1 a 20). También traduje las minúsculas latinas que ocupaban el lugar de contenidos judicables por mayúsculas latinas. Esta distinción la hice para facilitar la lectura de las formulas traducidas, pero no corresponde a ninguna distinción dentro de la conceptografía de Frege. Estas reconstrucciones también ponen de manifiesto de una manera mas clara que dentro de toda expresión[20], cualquiera de sus partes puede tomar el papel de función o el de argumento, o algunas veces tomar uno y otras veces el otro (§21).

§20

1. $(c \equiv d) \rightarrow (f(c) \rightarrow f(d))$ Juicio 52: Axioma 6

2. $[(c \equiv d) \rightarrow (f(c) \rightarrow f(d))] \rightarrow [f(c) \rightarrow ((c \equiv d) \rightarrow f(d))]$
Caso del Juicio 3 (Axioma 3)

3. $[f(c) \rightarrow ((c \equiv d) \rightarrow f(d))]$ Modus Ponens de 2 y 1: Juicio 53

§21

1. $(c \equiv c)$ Juicio 54: Axioma 7: Identidad

2. $[(c \equiv c) \rightarrow ((c \equiv d) \rightarrow (d \equiv c))]$ Caso del Juicio 53

3. $((c \equiv d) \rightarrow (d \equiv c))$ Modus Ponens de 2 y 1: Juicio 55

4. $((c \equiv d) \rightarrow (d \equiv c)) \rightarrow (((d \equiv c) \rightarrow (f(d) \rightarrow f(c))) \rightarrow ((c \equiv d) \rightarrow (f(d) \rightarrow f(c))))$ Caso del Juicio 9

5. $((d \equiv c) \rightarrow (f(d) \rightarrow f(c))) \rightarrow ((c \equiv d) \rightarrow (f(d) \rightarrow f(c)))$
Modus Ponens de 5 y 4: Juicio 56

6. $(d \equiv c) \rightarrow (f(d) \rightarrow f(c))$ Caso del Juicio 52 (Axioma 6)

7. (c ≡ d) -> (f(d) -> f(c)) Modus Ponens de 5 y 6: Juicio 57

§22

(58) [(∀x) f(x)] -> f(c) donde x no ocurre fuera del lugar del argumento de f. En otras palabras, x no ocurre dentro de f: Axioma 8

1. [(∀x) (g(a) -> f(a))] -> ((g(b) -> f(b)) Caso del Juicio 58 (Axioma 8)

2. { [(∀x) (g(x) -> f(x))] -> ((g(b) -> f(b))) } -> (g(b) -> { - f(b) -> - [(∀x) (g(x) -> f(x))] }) Caso del Juicio 30

3. g(b) -> { - f(b) -> - [(∀x) (g(x) -> f(x))] } Modus Ponens de 2 y 1: Juicio 59

4. [(∀x) [h(x) -> (g(x) -> f(x))]] -> [h(b) -> (g(b) -> f(b))] Caso del Juicio 58 (Axioma 8)

5. { [(∀x) [h(x) -> (g(x) -> f(x))]] -> [h(b) -> (g(b) -> f(b))] } -> { [(∀x) [h(x) -> (g(x) -> f(x))]] -> [g(b) -> (h(b) -> f(b))] } Caso del Juicio 12

6. [(∀x) [h(x) -> (g(x) -> f(x))]] -> [g(b) -> (h(b) -> f(b))] Modus Ponens de 5 y 4: Juicio 60

7. [(∀x) f(x)] -> f(c) Juicio 58: Axioma 8

8. [((∀x) f(x)) -> f(c)] -> [(((∀x) f(x)) -> A) -> (f(c) -> A)] Caso del Juicio 9

9. (((∀x) f(x)) -> A) -> (f(c) -> A) Modus Ponens de 8 y 7: Juicio 61

10. { [(∀x) (g(x) -> f(x))] -> ((g(b) -> f(b)) } -> { g(b) -> [[(∀x) (g(x) -> f(x))] -> f(b)] } Caso del Juicio 8 (Axioma 3)

11. g(b) -> [[(∀x) (g(x) -> f(x))] -> f(b)] Modus Ponens de 10 y 9: Juicio 62

12. { g(b) -> [[(∀x) (g(x) -> f(x))] -> f(b)] } -> { g(b) -> { M -> [[(∀x) (g(x) -> f(x))] -> f(b)] } } Caso del Juicio 24

13. g(b) -> { M -> [[(∀x) (g(x) -> f(x))] -> f(b)] } Modus Ponens de 12 y 11: Juicio 63

14. { g(b) -> [[(∀x) (g(x) -> f(x))] -> f(b)] } -> { (h(y) -> g(b)) -> [[(∀x) (g(x) -> f(x))] -> (h(y) -> f(b))] } Caso del Juicio 18

15. (h(y) -> g(b)) -> [[(∀x) (g(x) -> f(x))] -> (h(y) -> f(b))] Modus Ponens de 14 y 13: Juicio 64

16. (h(b) -> g(b)) -> [[(∀x) (g(x) -> f(x))] -> (h(b) -> f(b))] Caso del Juicio 64

17. { (h(b) -> g(b)) -> [[(∀x) (g(x) -> f(x))] -> (h(b) -> f(b))] } -> { [(∀x) (h(x) -> g(x))] -> [[(∀x) (g(x) -> f(x))] -> (h(x) -> f(x))] } Caso del Juicio 61

18. { [(∀x) (h(x) -> g(x))] -> [[(∀x) (g(x) -> f(x))] -> (h(x) -> f(x))] } Modus Ponens de 17 y 16: Juicio 65

19. { [(∀x) (h(x) -> g(x))] -> [[(∀x) (g(x) -> f(x))] -> (h(x) -> f(x))] } -> { [(∀x) (g(x) -> f(x))] -> [[(∀x) (h(x) -> g(x))] -> (h(x) -> f(x))] } Caso del Juicio 8 (Axioma 3)

20. [(∀x) (g(x) -> f(x))] -> [[(∀x) (h(x) -> g(x))] -> (h(x) -> f(x))] Modus Ponens de 19 y 18: Juicio 66

21. (((∀x) f(x)) -> f(c)) -> { [[((∀x) f(x)) ≡ B] -> (b -> ((∀x) f(x)))] -> [[((∀x) f(x)) ≡ B] -> (B -> f(c))]] } Caso del Juicio 7

22. { [((∀x) f(x)) ≡ B] -> [B -> ((∀x) f(x))] } -> { [((∀x) f(x)) ≡ B] -> (B -> f(c))] } Modus Ponens de 21 y 20: Juicio 67

23. [((∀x) f(x)) ≡ B] -> [B -> ((∀x) f(x))] Caso del Juicio 57

24. $[((\forall x) f(x)) \equiv B] \rightarrow (B \rightarrow f(c))]$ Modus Ponens de 22 y 23: Juicio 68

2·Una Teoría General de Secuencias

Si bien es muy probable que la fuerte impresión de in-inteligibilidad y abigarrada oscuridad que nos dio la conceptografía en una primera vista se haya suavizado al llegar a la derivación del juicio 68, también es muy probable que, al entrar a esta tercera parte del texto, la impresión regrese con mayor fuerza aún, ya que los juicios del 69 en adelante, que Frege utiliza para demostrar algunas propiedades de las secuencias (como ejemplo de las múltiples aplicaciones de su conceptografía), están plagados de extraños símbolos nuevos tales como letras griegas, subscriptos, lineas curvas, rectas, y demás. Contrario a las pretensiones de claridad y sencillez de acuerdo a las cuales Frege dice haber construido su conceptografía, estos juicios son aún mas oscuros y complejos que los de las primeras partes, además de que su nueva oscuridad y complejidad es completamente artificial y en muchos de los casos innecesaria.

La mayoría de los símbolos que aparecen por primera vez en esta parte de la Conceptografía son introducidos a través de la doble barra vertical[21]. Se supone que esta función sirve para simplificar y abreviar expresiones complejas, sin embargo los nuevos símbolos que Frege introduce como abreviaturas son tanto o mas complejos que las expresiones originales. Para la reconstrucción de esos juicios, he sustituido tales símbolos por otros màs simples, tan sencillos como lo permiten las reglas de la igualdad por definición[22]. En la mayoría de los casos, opté por símbolos sencillos en los que solo se marcan los lugares para argumentos. Sin embargo, en muchos casos estos argumentos eran a su vez funciones, por lo que fue necesario marcar también lugares para los argumentos de éstos. Para ello, utilicé el asterisco "*" y, en los casos en que era necesario marcar otro lugar de argumentos, el símbolo de adición "+". Por ejemplo, si era necesario introducir un símbolo para abreviar una expresión cuyas únicas letras que ocurren libres son las letras de funciones *f* y *g*. Según las reglas de funcionamiento de la doble barra vertical, en el nuevo símbolo las letras funcionales *f* y *g* también deberían ocurrir libres. Lo más sencillo sería asignar un carácter cualquiera "$" para abreviar esta función (cuyos argumentos son las letras *f* y *g*) así: $(f,g). Sin embargo, una vez que queramos sustituir las letras *f* y *g* nada deja ver en esta nueva expresión que hablamos de expresiones funcionales. Además de que, si queremos sustituirlas por funciones complejas que incluyan barras o cuantificadores, será necesario marcar el espacio vacío que nos permite reconocerlas como funciones. Para esto sirven las minúsculas griegas de la conceptografía[23]. En las siguientes reconstrucciones, repito, evitare estas marcas lo mas posible, adoptando versiones sencillas del tipo $(f,g) contra las mas complicadas $(f(*),g(+)), y sólo cuando sea necesario marcare sus espacios vacíos con asteriscos o con el signo de la adición.

§24

{ (∀x) F(x) -> [(∀y) (f(x,y) -> F(y))] } $\equiv_{def}$ &(F,f)

La expresión &(A,B) ha sido definida para significar que la propiedad A es hereditaria en la secuencia-B, es decir que para todo par indistinto de expresiones E y H tales que B(E,H), si A(B), entonces B(H).

§25

1. { (∀x) F(x) -> [(∀y) (f(x,y) -> F(y))] } ≡ &(F,f) Juicio 69
2. { { (∀x) F(x) -> [(∀y) (f(x,y) -> F(y))] } ≡ &(F,f) } -> { &(F,f) -> [F(a) -> [(∀x) (f(a,x) -> F(x))]] } Caso del Juiico 68

3. { &(F,f) -> [F(a) -> [(∀x) (f(a,x) -> F(x))]] } Modus Ponens de 2 y 1: Juicio 70

4. { &(F,f) -> [F(a) -> [(∀x) (f(a,x) -> F(x))]] } -> { [(∀x) (f(a,x) -> F(x)) -> (f(a,y) -> F(y))] -> [&(F,f) -> [F(a) -> (f(a,y) -> F(y))]] } Caso del Juicio 19

5. [(∀x) (f(a,x) -> F(x)) -> (f(a,y) -> F(y))] -> [&(F,f) -> [F(a) -> (f(a,y) -> F(y))]] Modus Ponens de 4 y 3: Juicio 71

6. [(∀x) (f(a,x) -> F(x)) -> (f(a,y) -> F(y))] Caso del Juicio 58

7. [&(F,f) -> [F(a) -> (f(a,y) -> F(y))]] Modus Ponens de 5 y 6: Juicio 72

8. [&(F,f) -> [F(a) -> (f(a,y) -> F(y))]] -> [(&(F,f) -> F(a)) -> [&(F,f) -> (f(a,y) -> F(y))]] Caso del Juicio 2

9. [(&(F,f) -> F(a)) -> [&(F,f) -> (f(a,y) -> F(y))]] Modus Ponens de 8 y 7: Juicio 73

10. [&(F,f) -> [F(a) -> (f(a,y) -> F(y))]] -> [F(a) -> [&(F,f) -> (f(a,y) -> F(y))]] Caso del Juicio 8 (Axioma 3)

11. [F(a) -> [&(F,f) -> (f(a,y) -> F(y))]] Modus Ponens de 10 y 7: Juicio 74

12. { { (∀x) F(x) -> [(∀y) (f(x,y) -> F(y))] } ≡ &(F,f) } -> { { (∀x) F(x) -> [(∀y) (f(x,y) -> F(y))] } -> &(F,f) } Caso del Juicio 52 (Axioma 6)

13. { { (∀x) F(x) -> [(∀y) (f(x,y) -> F(y))] } -> &(F,f) } Modus Ponens de 12 y 1: juicio 75

§26

(76) (∀(P) { &(P,f) -> [[(∀x) (f(a,x) -> P(x))] -> P(y)] }) $\equiv_{def}$ #(f(a,y))

La función #(E(A,B)) está definida para significar que *B* sigue a *A* en la secuencia-*E*, es decir, que para toda función P, si del cumplimiento de las dos condiciones, (1) que la propiedad P sea hereditaria en la secuencia-E, y (2) que para toda expresión H tal que E(A,H) se cumple que P(H), se puede inferir que P(Y).

§27

1. { ∀(P) { &(P,f) -> [[(∀x) (f(a,x) -> P(x))] -> P(y)] } } ≡ #(f(a,y)) Juicio 76

2. [(∀(P) { &(P,f) -> [[(∀x) (f(a,x) -> P(x))] -> P(y)] }) ≡ #(f(a,y))] -> { #(f(a,y)) -> { &(F,f) -> [[(∀x) (f(a,x) -> F(x))] -> F(y)] } } Caso del Juicio 68

3. #(f(a,y)) -> { &(F,f) -> [[(∀x) (f(a,x) -> F(x))] -> F(y)] } Modus Ponens de 2 y 1: juicio 77

4. { #(f(a,y)) -> { &(F,f) -> [[(∀x) (f(a,x) -> F(x))] -> F(y)] } } -> { &(F,f) -> [[(∀x) (f(a,x) -> F(x))] -> (#(f(a,y)) -> F(y))] } Caso del Juicio 17

5. &(F,f) -> [[(∀x) (f(a,x) -> F(x))] -> (#(f(a,y)) -> F(y))] Modus Ponens de 4 y 3: juicio 78

6. { &(F,f) -> [[(∀x) (f(a,x) -> F(x))] -> (#(f(a,y)) -> F(y))] } -> { &(F,f) -> [[(∀x) (f(a,x) -> F(x))] -> [&(F,f) -> (#(f(a,y)) -> F(y))]] } Caso del Juicio 2 (Axioma 2)

7. { &(F,f) -> [[(∀x) (f(a,x) -> F(x))] -> [&(F,f) -> (#(f(a,y)) -> F(y))]] } Modus Ponens de 6 y 5: Juicio 79

8. { &(F,f) -> [[(∀x) (f(a,x) -> F(x))] -> [&(F,f) -> (#(f(a,y)) -> F(y))]] } -> { [f(a) -> (&(F,f) -> [(∀x) (f(a,x) -> F(x))])] -> [f(a) -> (&(F,f) -> (#(f(a,y)) -> F(y)))] } caso del Juicio 5

9. { [F(a) -> (&(F,f) -> [(∀x) (f(a,x) -> F(x))])] -> [F(a) -> (&(F,f) -> (#(f(a,y)) -> F(y)))] } Modus Ponens de 8 y 7: Juicio 80

10. [F(a) -> [&(F,f) -> [(∀x) (f(a,x) -> F(x))]]] Caso del Juicio 74

11. [F(a) -> (&(F,f) -> (#(f(a,y)) -> F(y)))] Modus Ponens de 9 y 10: Juicio 81

12. [F(a) -> (&(F,f) -> (#(f(a,y)) -> F(y)))] -> { (A -> F(a)) -> [&(F,f) -> (A -> (#(f(a,y)) -> F(y)))] } Caso del Juicio 18

13. { (A -> F(a)) -> [&(F,f) -> (A -> (#(f(a,y)) -> F(y)))] } Modus Ponens de 12 y 11: juicio 82

14. { [h(a) -> ((- h(a)) -> g(a))] -> [&(F,((- h(*)) -> g(*))) -> (h(a) -> (#(f(a,y)) -> ((- h(y)) -> g(y))))] } Caso del Juicio 82

15. [h(a) -> ((- h(a)) -> g(a))] Caso del Juicio 36

16. [&(F,((- h(*)) -> g(*))) -> (h(a) -> (#(f(a,y)) -> ((- h(y)) -> g(y))))] Modus Ponens de 14 y 15: Juicio 83

17. [F(a) -> (&(F,f) -> (#(f(a,y)) -> F(y)))] -> [&(F,f) -> (F(a) -> (#(f(a,y)) -> F(y)))] Caso del Juicio 8 (Axioma 3)

18. [&(F,f) -> (F(a) -> (#(f(a,y)) -> F(y)))] Modus Ponens de 17 y 11: Juicio 84

19. { #(f(a,y)) -> { &(F,f) -> [[(∀x) (f(a,x) -> F(x))] -> F(y)] } } -> { #(f(a,y)) -> [[(∀x) (f(a,x) -> F(x))] -> (&(F,f) -> F(y))] } Caso del Juicio 12

20. { #(f(a,y)) -> [[(∀x) (f(a,x) -> F(x))] -> (&(F,f) -> F(y))] } Modus Ponens de 19 y 3: Juicio 85

21. { #(f(a,y)) -> [[(∀x) (f(a,x) -> F(x))] -> (&(F,f) -> F(y))] } -> { { (&(F,f) -> F(y)) -> [&(F,f) -> (f(y,z) -> F(z))] } -> { #(f(a,y)) -> [[(∀x) (f(a,x) -> F(x))] -> &(F,f) -> (f(y,z) -> F(z))] } } Caso del Juicio 19

22. { { (&(F,f) -> F(y)) -> [&(F,f) -> (f(y,z) -> F(z))] } -> { #(f(a,y)) -> [[(∀x) (f(a,x) -> F(x))] -> (&(F,f) -> (f(y,z) -> F(z)))] } } Modus Ponens de 21 y 20: Juicio 86

23. [(&(F,f) -> F(y)) -> [&(F,f) -> (f(y,z) -> F(z))]] Caso del Juicio 73

24. { #(f(a,y)) -> [[(∀x) (f(a,x) -> F(x))] -> (&(F,f) -> (f(y,z) -> F(z)))] } Modus Ponens de 22 y 23: Juicio 87

25. { #(f(a,y)) -> [[(∀x) (f(a,x) -> F(x))] -> &(F,f) -> (f(y,z) -> F(z))] } -> { f(y,z) -> [#(f(a,y)) -> [[(∀x) (f(a,x) -> F(x))] -> (&(F,f) -> F(z))]] } Caso del Juicio 15

26. { f(y,z) -> [#(f(a,y)) -> [[(∀x) (f(a,x) -> F(x))] -> (&(F,f) -> F(z))]] } Modus Ponens de 25 y 24: Juicio 88

§28

1. (∀(P) { &(P,f) -> [[(∀x) (f(a,x) -> P(x))] -> P(y)] }) ≡ #(f(a,y)) Juicio 76

2. [(∀(P) { &(P,f) -> [[(∀x) (f(a,x) -> P(x))] -> P(y)] }) ≡ #(f(a,y))] -> [(∀(P) { &(P,f) -> [[(∀x) (f(a,x) -> P(x))] -> P(y)] }) -> #(f(a,y))] Caso del Juicio 52 (Axioma 6)

3. [(∀(P) { &(P,f) -> [[(∀x) (f(a,x) -> P(x))] -> P(y)] }) -> #(f(a,y))] Modus Ponens de 2 y 1: Juicio 89

4. [(∀(P) { &(P,f) -> [[(∀x) (f(a,x) -> P(x))] -> P(y)] }) -> #(f(a,y))] -> [(c -> (∀(P) { &(P,f) -> [[(∀x) (f(a,x) -> P(x))] -> P(y)] }))) -> (c -> #(f(a,y)))] Caso del Juicio 5

5. [(c -> (∀(P) { &(P,f) -> [[(∀x) (f(a,x) -> P(x))] -> P(y)] })) -> (c -> #(f(a,y)))] Modus Ponens de 4 y 3: Juicio 90

6. f(a,y) -> (∀(P) { &(P,f) -> [[(∀x) (f(a,x) -> P(x))] -> P(y)] }) Caso del Juicio 63

7. [(f(a,y) -> (∀(P) { &(P,f) -> [[(∀x) (f(a,x) -> P(x))] -> P(y)] })) -> (f(a,y) -> #(f(a,y)))] Caso del juicio 90

8. (f(a,y) -> #(f(a,y))) Modus Ponens de 7 y 6: Juicio 91

9. (f(a,y) -> #(f(a,y))) -> [(a ≡ z) -> (f(a,y) -> #(f(z,y)))] Caso del Juicio 53

10. [(a ≡ z) -> (f(a,y) -> #(f(z,y)))] Juicio 92

11. { (∀P) [((∀x) -> f(a,x) -> P(x)) -> (&(P,f) -> P(y))] } -> { (∀P) [&(P,f) -> [((∀x) (f(a,x) -> P(x))) -> P(y)]] } Caso del Juicio 60

12. [({ (∀P) [((∀x) -> f(a,x) -> P(x)) -> (&(P,f) -> P(y))] } -> (∀(P) { &(P,f) -> [[(∀x) (f(a,x) -> P(x))] -> P(y)] })) -> ({ (∀P) [((∀x) -> f(a,x) -> P(x)) -> (&(P,f) -> P(y))] } -> #(f(a,y)))] Caso del Juicio 90

13. ({ (∀P) [((∀x) -> f(a,x) -> P(x)) -> (&(P,f) -> P(y))] } -> #(f(a,y))) Modus Ponens de 12 y 11: juicio 93

14. ({ (∀P) [((∀x) -> f(a,x) -> P(x)) -> (&(P,f) -> P(z))] } -> #(f(a,z))) Caso del Juicio 93

15. ({ (∀P) [((∀x) -> f(a,x) -> P(x)) -> (&(P,f) -> P(z))] } -> #(f(a,z))) -> { [f(y,z) -> [#(f(a,y)) -> { (∀P) [((∀x) -> f(a,x) -> P(x)) -> (&(P,f) -> P(z))] }]] -> [f(y,z) -> (#(f(a,y)) -> #(f(a,z)))] } Caso de juicio 7

16. { [f(y,z) -> [#(f(a,y)) -> { (∀P) [(∀x) (f(a,x) -> P(x)) -> (&(P,f) -> P(z))] }]] -> [f(y,z) -> (#(f(a,y)) -> #(f(a,z)))] } Modus Ponens de 15 y 14: Juicio 94

17. { f(y,z) -> [#(f(a,y)) -> { (∀P) [(∀x) (f(a,x) -> P(x)) -> (&(P,f) -> P(z))] }] } Caso del Juicio 88

18. [f(y,z) -> (#(f(a,y)) -> #(f(a,z)))] Modus Ponens de 17 y 16: Juicio 95

19. [f(y,z) -> (#(f(a,y)) -> #(f(a,z)))] -> [#(f(a,y)) -> (f(y,z) -> #(f(a,z)))] Caso del Juicio 8 (Axioma 3)

20. [#(f(a,y)) -> (f(y,z) -> #(f(a,z)))] Modus Ponens de 19 y 18: Juicio 96

21. (∀x) [#(f(a,x) -> [(∀w) (f(x,w) -> #(f(a,w)))]] Caso del juicio 96

22. { (∀x) [#(f(a,x) -> [(∀w) (f(x,w) -> #(f(a,w)))]] } -> &(#(f(a,*),f)) Caso del Juicio 75

23. &(#(f(a,*),f)) Modus Ponens de 22 y 21: juicio 97

24. &(#(f(a,*),f)) -> [#(f(a,y)) -> (#(f(y,z)) -> #(f(a,z)))] Caso del Juicio 84

25. [#(f(a,y)) -> (#(f(y,z)) -> #(f(a,z)))] Modus Ponens de 24 y 23: Juicio 98

§29

(99) [(- #(f(a,z))) -> (z ≡ x)] $\equiv_{def}$ %(f(a,z)) .

Donde la función %(E(A,B)) queda definida para significar que B pertenece a la secuencia-E que empieza en A. En otras palabras, que B es idéntica a A o la sigue en la secuencia-E.

1. [(- #(f(a,z))) -> (z ≡ x)] ≡ %(f(a,z)) Juicio 99

2. { [(- #(f(a,z))) -> (z ≡ x)] ≡ %(f(a,z)) } -> { [(- #(f(a,z))) -> (z ≡ x)] -> %(f(a,z)) } Caso del Juicio 57

3. { [(- #(f(a,z))) -> (z ≡ x)] -> %(f(a,z)) } Modus Ponens de 2 y 1: Juicio 100

4. { [(- #(f(a,z))) -> (z ≡ x)] -> %(f(a,z)) } -> { [(z ≡ x) -> (F(z,v) -> #(f(a,v)))] -> [[#(f(a,z)) -> (f(z,v) -> #(f(a,v)))] -> (%(f(a,z)) -> (f(z,v) -> #(f(a,b))))] } Caso del Juicio 48

5. { [(z ≡ x) -> (F(z,v) -> #(f(a,v)))] -> [[#(f(a,z)) -> (f(z,v) -> #(f(a,v)))] -> (%(f(a,z)) -> (f(z,v) -> #(f(a,b))))] } Modus Ponens de 4 y 3: Juicio 101

6. [#(f(a,z)) -> (f(z,v) -> #(f(a,v)))] Caso del Juicio 96

7. [(z ≡ a) -> (f(z,v) -> #(f(a,v)))] Caso del Juicio 92

8. [[#(f(a,z)) -> (f(z,v) -> #(f(a,v)))] -> (%(f(a,z)) -> (f(z,v) -> #(f(a,b))))] Modus Ponens de 5 y 7

9. (%(f(a,z)) -> (f(z,v) -> #(f(a,b)))) Modus Ponens de 8 y 7: Juicio 102

10. (%(f(a,z)) -> (f(z,v) -> #(f(a,b)))) -> { [(z ≡ x) -> (x ≡ z)] -> [#(f(a,z)) -> ((- #(f(a,z))) -> (x ≡ z))] } Caso del Juicio 19

11. { [(z ≡ x) -> (x ≡ z)] -> [#(f(a,z)) -> ((- #(f(a,z))) -> (x ≡ z))] } Modus Ponens de 10 y 9: Juicio 103

12. [(z ≡ x) -> (x ≡ z)] Caso del Juicio 55

13. [#(f(a,z)) -> ((- #(f(a,z))) -> (x ≡ z))] Modus Ponens de 12 y 11: Juicio 104

§30

1. [(- #(f(a,z))) -> (z ≡ x)] ≡ %(f(a,z)) Juicio 99

2. [[(- #(f(a,z))) -> (z ≡ x)] ≡ %(f(a,z))] -> [((- #(f(a,z))) -> (z ≡ x)) -> %(f(a,z))] Caso del Juicio 52

3. [((- #(f(a,z))) -> (z ≡ x)) -> %(f(a,z))] Modus Ponens de 2 y 1: Juicio 105

4. [((- #(f(a,z))) -> (z ≡ x)) -> %(f(a,z))] -> (#(f(a,z) -> %(f(a,z))) Caso del Juicio 37

5. (#(f(a,z) -> %(f(a,z))) Modus Ponens de 4 y 3: juicio 106

6. (#(f(z,v) -> %(f(z,v))) Caso del Juicio 106

7. (#(f(z,v) -> %(f(z,v))) -> [[%(f(z,y)) -> (f(y,v) -> #(f(z,v)))] -> [%(f(z,y)) -> (f(y,v) -> %(f(z,v)))]] Caso del Juicio 7

8. [[%(f(z,y)) -> (f(y,v) -> #(f(z,v)))] -> [%(f(z,y)) -> (f(y,v) -> %(f(z,v)))]] Modus Ponens de 7 y 6: Juicio 107

9. [%(f(z,y)) -> (f(y,v) -> #(f(z,v)))] Caso del Juicio 102

10. [%(f(z,y)) -> (f(y,v) -> %(f(z,v)))] Modus Ponens de 9 y 8: Juicio 108

11. (∀x) [%(f(a,x)) -> ((∀w) (f(x,w) -> %(f(a,w))))] Caso del Juicio 108

12. { ((∀x) %(f(a,x)) -> [(∀y) (f(x,y) -> %(f(a,y)))] } -> &(#(f(a,*),f) } Caso del Juicio 75

13. &(#(f(a,*),f) Modus Ponens de 12 y 11: Juicio 109

14. &(#(f(a,*),f) -> { [(∀x) (f(y,x) -> %(f(a,x)))] -> (#(f(y,m) -> %(f(a,m))) } Caso del Juicio 78

15. [(∀x) (f(y,x) -> %(f(a,x)))] -> (#(f(y,m) -> %(f(a,m))) Modus Ponens de 14 y 13: Juicio 110

16. [%(f(z,y)) -> (f(y,v) -> %(f(z,v)))] -> [%(f(z,y)) -> (f(y,v) -> ((- #(f(v,z))) -> %(f(z,v))))] Caso del Juicio 25

17. [%(f(z,y)) -> (f(y,v) -> ((- #(f(v,z))) -> %(f(z,v))))] Modus Ponens de 16 y 10: Juicio 111

18. [((- #(f(a,z))) -> (z ≡ a)) -> %(f(a,z))] -> [(z ≡ a) -> %(f(a,z))] Caso del Juicio 11

19. [(z ≡ a) -> %(f(a,z))] Modus Ponens de 18 y 3: Juicio 112

20. [(z ≡ a) -> %(f(a,z))] -> { [%(f(z,a)) -> ((- #(f(z,a))) -> (z ≡ a))] -> [%(f(z,a)) -> ((- #(f(z,a))) -> %(f(a,z)))] } Caso del Juicio 7

21. [%(f(z,a)) -> ((- #(f(z,a))) -> (z ≡ a))] -> [%(f(z,a)) -> ((- #(f(z,a))) -> %(f(a,z)))] Modus Ponens de 20 y 19: Juicio 113

22. [#(f(z,a)) -> ((- #(f(z,a))) -> (z ≡ a))] Caso del Juicio 104

23. [%(f(z,a)) -> ((- #(f(z,a))) -> %(f(a,z)))] Modus Ponens de 22 y 21: Juicio 114

§31

(115) (∀u) (∀w) [f(w,u) -> ((∀x) (f(w,x) -> (x ≡ u)))] $\equiv_{def}$ |(f)

Donde la función |(A) queda definida para significar que la función A es de muchos a uno [*eindeutig*]. O sea que, para todo par de objetos B y C, si A(B,C) entonces C es el único objeto que se relaciona con B a través de la función A.

1. (∀u) (∀w) [f(w,u) -> ((∀x) (f(w,x) -> (x ≡ u)))] ≡ |(f) Juicio 115

2. [(∀u) (∀w) [f(w,u) -> ((∀x) (f(w,x) -> (x ≡ u)))] ≡ |(f)] -> [|(f) -> (∀w) [f(w,a) -> ((∀x) (f(w,x) -> (x ≡ a)))]] Caso del Juicio 68

3. [|(f) -> (∀w) [f(w,a) -> ((∀x) (f(w,x) -> (x ≡ a)))]] Modus Ponens de 2 y 1: Juicio 116

4. [|(f) -> (∀w) [f(w,a) -> ((∀x) (f(w,x) -> (x ≡ a)))]] -> { { [(∀w) [f(w,a) -> ((∀x) (f(w,x) -> (x ≡ a)))]] -> [f(y,a) -> ((∀x) (f(y,x) -> (x ≡ a)))] } -> { |(f) -> [f(y,a) -> [(∀x) (f(y,x) -> (x ≡ a))]] } } Caso del Juicio 9

5. { [(∀w) [f(w,a) -> ((∀x) (f(w,x) -> (x ≡ a)))]] -> [f(y,a) -> ((∀x) (f(y,x) -> (x ≡ a)))] } -> { |(f) -> [f(y,a) -> [(∀x) (f(y,x) -> (x ≡ a))]] } Modus Ponens de 4 y 3: Juicio 117

6. { [(∀w) [f(w,a) -> ((∀x) (f(w,x) -> (x ≡ a)))]] -> [f(y,a) -> ((∀x) (f(y,x) -> (x ≡ a)))] } Caso del Juicio 58(Axioma 8)

7. { |(f) -> [f(y,a) -> [(∀x) (f(y,x) -> (x ≡ a))]] } Modus Ponens de 6 y 5: Juicio 118

8. { |(f) -> [f(y,a) -> [(∀x) (f(y,x) -> (x ≡ a))]] } -> { { [(∀x) (f(y,x) -> (x ≡ a))] -> (f(y,b) -> (b ≡ a)) } -> { |(f) -> [f(y,a) -> (f(y,b) -> (b ≡ a))] } } Caso del Juicio 19
9.{ { [(∀x) (f(y,x) -> (x ≡ a))] -> (f(y,b) -> (b ≡ a)) } -> { |(f) -> [f(y,a) -> (f(y,b) -> (b ≡ a))] } } Modus Ponens de 8 y 7: Juicio 119
10. { [(∀x) (f(y,x) -> (x ≡ a))] -> (f(y,b) -> (b ≡ a)) } Caso del Juicio 58 (Axioma 8)
11. { |(f) -> [f(y,a) -> (f(y,b) -> (b ≡ a))] } Modus Ponens de 10 y 9: juicio 120
12. { |(f) -> [f(y,a) -> (f(y,b) -> (b ≡ a))] } -> { ((b ≡ a) -> %(f(a,b))) -> [|(f) -> [f(y,a) -> (F(y,b) -> %(f(a,b)))]] } Caso del Juicio 20
13. (b ≡ a) -> %(f(a,b))) -> [|(f) -> [f(y,a) -> (F(y,b) -> %(f(a,b)))]] Modus Ponens de 12 y 11: Juicio 121
14. [(b ≡ a) -> %(f(a,b))] Caso del Juicio 112
15. [|(f) -> [f(y,a) -> (F(y,b) -> %(f(a,b)))]] Modus Ponens de 14 y 13: Juicio 122
16. [|(f) -> [f(y,a) -> (∀x) (F(y,x) -> %(f(a,x)))]] Caso del Juicio 122
17. [|(f) -> [f(y,a) -> (∀x) (F(y,x) -> %(f(a,x)))]] -> { [((∀x) (f(y,x) -> %(f(a,x)))) -> (#(f(y,m) -> #(f(a,m)))] -> [|(f) -> [f(y,a) -> (#(f(y,m)) -> %(f(a,m)))]] } Caso del Juicio 19
18. { [((∀x) (f(y,x) -> %(f(a,x)))) -> (#(f(y,m) -> #(f(a,m)))] -> [|(f) -> [f(y,a) -> (#(f(y,m)) -> %(f(a,m)))]] } Modus Ponens de 17 y 16: Juicio 123
19. [|(f) -> [f(y,a) -> (#(f(y,m)) -> %(f(a,m)))]] Modus Ponens de 18 y 17: Juicio 124
20. [|(f) -> [f(y,a) -> (#(f(y,m)) -> %(f(a,m)))]] -> { [%(f(a,m)) -> ((- #(f(a,m))) -> %(f(m,a)))] -> [|(f) -> [f(y,a) -> (#(f(y,m)) -> ((- #(f(a,m))) -> %(f(m,a))))]] } Caso del Juicio 20
21. [%(f(a,m)) -> ((- #(f(a,m))) -> %(f(m,a)))] -> [|(f) -> [f(y,a) -> (#(f(y,m)) -> ((- #(f(a,m))) -> %(f(m,a))))]] Modus Ponens de 20 y 19: Juicio 125
22. [%(f(a,m)) -> ((- #(f(a,m))) -> %(f(m,a)))] Caso del Juicio 114

23. [|(f) -> [f(y,a) -> (#(f(y,m)) -> ((- #(f(a,m))) -> %(f(m,a))))]] Modus Ponens de 22 y 21: Juicio 126

24. [|(f) -> [f(y,a) -> (#(f(y,m)) -> ((- #(f(a,m))) -> %(f(m,a))))]] -> [|(f) -> [#(f(y,m)) -> (f(y,a) -> ((- #(f(a,m))) -> %(f(m,a))))]] Caso del Juicio 12

25. [|(f) -> [#(f(y,m)) -> (f(y,a) -> ((- #(f(a,m))) -> %(f(m,a))))]] Modus Ponens de 24 y 23: Juicio 127

26. [|(f) -> [#(f(y,m)) -> (f(y,a) -> ((- #(f(a,m))) -> %(f(m,a))))]] -> { [#(f(m,y)) -> [f(y,a) -> ((- #(f(a,m))) -> %(f(m,a)))]] -> [|(f) -> [((- #(f(y,m))) -> %(f(m,y))) -> f(y,a) -> ((- #(f(a,m))) -> %(f(m,a)))]]] } Caso del Juicio 51: Juicio 128

27. { [#(f(m,y)) -> [f(y,a) -> ((- #(f(a,m))) -> %(f(m,a)))]] -> [|(f) -> [((- #(f(y,m))) -> %(f(m,y))) -> (f(y,a) -> ((- #(f(a,m))) -> %(f(m,a))))]] } Modus Ponens de 26 y 25: Juicio 128

28. [#(f(m,y)) -> [f(y,a) -> ((- #(f(a,m))) -> %(f(m,a)))]] Caso del Juicio 111

29. [|(f) -> [((- #(f(y,m))) -> %(f(m,y))) -> (f(y,a) -> ((- #(f(a,m))) -> %(f(m,a))))]] Modus Ponens de 27 y 28: Juicio 129

30. [|(f) -> [(∀x) ((- #(f(y,m))) -> %(f(m,y))) -> (∀w) (f(x,w) -> ((- #(f(w,m))) -> %(f(m,w))))]] Caso del Juicio 129

31. { |(f) -> [(∀x) ((- #(f(y,m))) -> %(f(m,y))) -> (∀w) (f(x,w) -> ((- #(f(w,m))) -> %(f(m,w))))] } -> { [[(∀x) ((- #(f(y,m))) -> %(f(m,y))) -> (∀w) (f(x,w) -> ((- #(f(w,m))) -> %(f(m,w))))] -> &(f,((- #(f(*,m)) -> %(f(m,*))))] -> (|(f) -> &(f,((- #(f*,m)) -> %(f(m,*))))) } Caso del Juicio 9

32. { [[(∀x) ((- #(f(y,m))) -> %(f(m,y))) -> (∀w) (f(x,w) -> ((- #(f(w,m))) -> %(f(m,w))))] -> &(f,((-#(f*,m)) -> %(f(m,*))))] -> (|(f) -> &(f,((-#(f(*,m)) -> %(f(m,*))))) } Modus Ponens de 31 y 30: Juicio 130

33. [[(∀x) ((- #(f(y,m))) -> %(f(m,y))) -> (∀w) (f(x,w) -> ((- #(f(w,m))) -> %(f(m,w))))] -> &(f,((- #(f(*,m)) -> %(f(m,*))))] Caso del Juicio 75

34. (|(f) -> &(f,((- #(f(*,m)) -> %(f(m,*))))) Modus Ponens de 32 y 33: Juicio 131

35. (|(f) -> &(f,((-#(f(*,m)) -> #(f(m,*))))) -> { { &(f,((- #(f(*,m)) -> %(f(m,*)))) -> [#(f(a,m)) -> [#(f(a,y)) -> ((- #(f(y,m))) ->

%(f(m,y)))]] } -> { |(f) -> [#(f(a,m)) -> [#(f(a,y)) -> ((- #(f(y,m))) -> %(f(m,y)))]] } } Caso del Juicio 9

36. { &(f,((- #(f(*,m)) -> %(f(m,*)))) -> [#(f(a,m)) -> [#(f(a,y)) -> ((- #(f(y,m))) -> %(f(m,y)))]] } -> { |(f) -> [#(f(a,m)) -> [#(f(a,y)) -> ((- #(f(y,m))) -> %(f(m,y)))]] } Modus Ponens de 35 y 34: Juicio 132

37. { &(f,((- #(f(*,m)) -> %(f(m,*)))) -> [#(f(a,m)) -> [#(f(a,y)) -> ((- #(f(y,m))) -> %(f(m,y)))]] } Caso del Juicio 83

38. { |(f) -> [#(f(a,m)) -> [#(f(a,y)) -> ((- #(f(y,m))) -> %(f(m,y)))]] } Modus Ponens de 37 y 36: Juicio 133

<u>Notas y Referencias Bibliográficas.</u>

1. §14
2. §16
3. §21
4. Fórmula 52
5. §8
6. §14
7. §16
8. §05
9. §17
10. §19
11. *Ibidem*
12. §17
13. §18
14. §19
15. §16
16. §16
17. §16 negritas mías.
18. V. Capítulo 3: "¿ Es la conceptografía una teoría formal ?"
19. §5 Llamo a esta prueba "semántica" porque parte del significado del condicional, no de su funcionamiento formal.
20. Si tomamos en cuenta la función identidad (F(a) = a), no solo expresiones complejas, sino también expresiones sencillas, como una simple minúscula latina, se pueden dividir en función y argumento. En este sentido, también podemos decir que toda expresión es funcional.
21. Las mayúsculas góticas, por ejemplo, también aparecen por primera vez en esta parte y, sin embargo, son símbolos básicos no introducidos por definición.
22. Sobre las reglas de funcionamiento de la doble barra vertical V. Capítulo 2: Simbología (Sección A.2.II.A.c)
23. V. Capítulo 2: Simbología, Sección B. Las letras

Epílogo
¿Por qué abandona Frege su primera conceptografía?

Una vez publicada la Conceptografía, Frege no dejó de trabajar en su proyecto de establecimiento de un lenguaje artificial que reflejara de una manera fiel las relaciones conceptuales entre los contenidos de las expresiones. Por el contrario, siguió trabajando sobre los temas e intuiciones de las cuales partió su primera obra. La mayoría de sus trabajos posteriores tuvieron como fin afinar algunos detalles que Frege creía no habían quedado completamente claros o terminados dentro de la Conceptografía. Otros tenían el propósito de llevar el análisis formal de la conceptografía hacia zonas que Frege sabiamente había preferido evitar dentro de su primera obra, como los valores de verdad. Como Frege pensaba que estas nuevas investigaciones no debían ser sino accesorias a su primera versión de la conceptografía, sus resultados fueron apareciendo asistemáticamente en pequeños artículos durante los diez años que siguieron a la publicación de la Conceptografía. Sin embargo, Frege pronto se dio cuenta de que, para tener una versión mas afinada y definitiva de la conceptografía, no bastaba ir simplemente 'parchando' los puntos débiles de su primera versión, sino que era necesario cambiar el sistema por completo. Pese a que el propósito la mayoría de sus trabajos posteriores era solamente elucidar en mayor detalle algunos conceptos fundamentales de la Conceptografía, como *función*, *concepto*, etcétera, el resultado de tales precisiones revolucionó tanto el sistema original, que fue necesario crear uno nuevo, que incluyera no solo los logros de la primera conceptografía, sino también las conclusiones de sus nuevos trabajos. Esa nueva conceptografía mas acabada es la que aparece en Las Leyes Fundamentales de la Aritmética (1893-1903). Este capítulo no pretende presentar los cambios que implanta Frege en su segunda conceptografía, lo que equivaldría a hacer toda una presentación de ese sistema (pretensión de una envergadura mucho mayor que la de toda mi tesis), su fin se reduce exclusivamente a dar una revisión rápida pero clara de algunos de los desarrollos posteriores a la Conceptografía que llevaron a Frege a abandonar el sistema formal ahí presentado.

La crítica al psicologismo y el formalismo.

Los pasos intermedios que existen entre la Conceptografía y las Leyes Fundamentales... son tantos y tan variados que es difícil hacer una presentación de ellos sin darles un órden *a-posteriori* que les de unidad y haga más sencilla su exposición. En este capítulo opte por darle un papel central a la crítica de Frege al psicologismo y el formalismo. No porque esta crítica haya sido el verdadero motor de la evolución del pensamiento filosófico de Frege, lo cual es poco probable, sino porque sirve bien como eje para la exposición de algunas de las ideas que, en conjunto, llevaron a cabo esta evolución.

Los primeros párrafos de Las Leyes Fundamentales de la Aritmética, antes aún de empezar a exponer su nueva conceptografía, los dedica a tratar de exponer de una manera las posiciones en contra de las que se levanta su nuevo sistema y las razones por las cuales lo hace. Pese a que Frege ya mantenía una posición de rechazo a al redactar la Conceptografía, aún no era completamente consciente de la manera en que se podían evitar ambas posiciones. De ahí que algunas de las tesis que Frege sostiene en la Conceptografía hayan sido fácilmente interpretadas como psicologistas o formalistas. Frege necesitaba tener una imagen mas clara de estas posiciones para poder evitar sus verdaderos núcleos problemáticos, pero no logró esto sino hasta varios años después de la redacción de su Conceptografía. Es entonces cuando Frege deja de mantener una actitud ingenua frente al formalismo y el psicologismo. Por el contrario, Frege ya sabe entonces que el formalusmo no se reduce a decir que los números son signos cuyas características les son asignadas por definiciones, ni el psicologismo a decir que son meras ideas en nuestra mente. Frege sabe que ambas posiciones son mucho mas complejas y que es imposible evitarlas si no se ubica claramente su núcleo problemático. Para Frege, éste se ubica en el uso que ambos sistemas le dan a las **definiciones** y los **pensamientos**. Evidentemente existen las definiciones y es absurdo pretender hacer Matemáticas o Lógica sin ellas. Sin embargo, Frege no acepta que, a través de ellas, se pueda estipular algún tipo de existencia o característica a las cosas. Lo mismo se puede decir con respecto a los pensamientos: no es posible negar que al hacer matemáticas se piensa, pero tampoco podemos dejar descansar la precisión de la ciencia matemática en los puros pensamientos.

En este sentido, podemos decir que la lucha emprendida por Frege en los años posteriores a la publicación de la Conceptografía esta dirigida completamente hacia su propio sistema. Es la dura lucha de Frege por que su sistema lógico no caiga en el psicologismo o el formalismo. Según Frege, las bases del psicologismo y el formalismo son consecuencia de una falta de rigor en el seguimiento de los argumentos. Por eso hace Frege tanto hincapié en el rigor lógico, porque quiere reforzar su conceptografía precisamente en aquellos lugares donde cree se originan los errores del psicologismo y el formalismo. En contra del formalismo, Frege emprende un análisis muy riguroso de las ecuaciones y de la identidad, del cual obtiene también su mayor arma en contra del psicologismo: la distinción entre sentido [*Sinn*] y referencia [*Bedeutung*].

Epílogo

A. Sentido y Referencia.

Es muy difícil encontrar una continuidad entre la Conceptografía y Las Leyes... sin remitirse a los textos intermedios de Frege como son *Función y Concepto*, *¿Qué es una Función?* y especialmente *Sobre el Sentido y la Referencia*. Sería también absurdo pretender hacer una exposición total de los cambios introducidos en estos artículos, ya que su complejidad es casi tan grande como la de la propia Conceptografía. Sin embargo, sí es necesario señalar algunas de sus conclusiones y argumentos, especialmente aquellos que más fuertemente influyeron en el paso de su primera conceptografía a la de Las leyes....

1. En primer lugar, voy a presentar la distinción sentido y referencia que introduce Frege en su artículo clásico *Uber Sinn und Bedeutung*. Este artículo rompe completamente con la visión de la igualdad que tenía Frege en la Conceptografía. En él sostiene Frege que la igualdad no es una relación al nivel de los nombres, sino al nivel de los contenidos de esos nombres. Contrario a lo que se creería por sentido común, no solo ecuaciones de la forma "a=a", sino toda ecuación que sea verdadera no hace más que afirmar la identidad de un objeto. La distinción entre ecuaciones de la forma "a=a" y "a=b" no es conceptual, sino cognitiva. Según Frege, su única diferencia es que tienen distinto *valor cognitivo*. Un enunciado de la forma "a=b" como "La Luna es el único satélite natural de la tierra" tiene mayor valor cognitivo que un sencillo juicio analítico como "La luna es la luna", aún cuando ambos sean verdaderos y afirmen la misma propiedad, la identidad, con respecto al mismo objeto, la Luna.

Esta primera premisa de Frege en su argumento a favor de la distinción entre Sentido y Referencia parece cierta y evidente, sin embargo, no creo que sea así. La tesis "Los enunciados "a=a" y "a=b" tienen distinto valor cognitivo" o bien es circular, o bien es vacía. Si aceptamos que "a=a" y "a=b" son (formas de) diferentes enunciados, habremos aceptado que "a" y "b" son también diferentes nombres (del mismo objeto, si efectivamente a=b), pero ¿ qué significa que "a" y "b" sean diferentes nombres ? 1> No podemos decir que "a" y "b" son diferentes nombres simplemente cuando son diferentes objetos, porque entonces, habría casos del enunciado "a=b" con el mismo valor cognitivo que el enunciado "a=a", por ejemplo: cuando dos signos tienen el mismo sentido y el mismo referente. Además, si llevamos este razonamiento a su extremo, veremos que no existen casos reales del enunciado "a=a". Luego, ¿ cómo es posible que Frege diga que, en el enunciado verdadero "a=b", "a" y "b" son diferentes, si lo que afirma el enunciado "a=b" es, precisamente, que son iguales. O bien Frege ha caído en una contradicción, o bien usa "iguales" Y "diferentes" en *sentidos* diferentes. ¿ En qué sentido son "a" y "b" iguales, y en qué sentido son diferentes ? es la pregunta que pretende responder Frege con su distinción entre Sentido y Referencia.

A partir de *Uber Sinn...* Frege deja de hablar del contenido de los nombres como una unidad indivisible y empieza a distinguir entre lo que él llama el Sentido [*Sinn*] y la Referencia [*Bedeutung*] de un nombre. Referente es aquello que el nombre *nombra*, es decir, el objeto mismo referido por la expresión. Sentido es la propiedad objetiva[1] del signo en la cual está contenido el modo de presentación del referente?? De tal manera, que cada sentido ilumina un solo aspecto del referente, siempre y cuando éste exista[3].

Representen las letras nombres, los vectores sentidos y los círculos referentes diferentes:

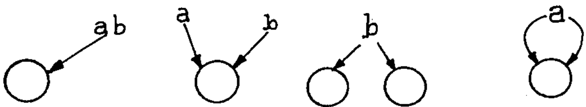


fig.1 fig.2 fig.3 fig.4

fig.5 fig.6 fig.7 fig.8

Dado que los sentidos y los objetos referidos por los nombres son objetivos[4], no necesitan de un. signo que los contenga para existir (figs.6 y 7). por el contrario, el nombre necesita, por lo menos, tener sentido para ser llamado nombre[5] (fig.5). Un nombre sin sentido nombraría su referente de ningún modo, lo cual es absurdo (fig.8). De la misma manera, un nombre con más de un sentido sería un nombre equívoco, de los que abundan en el lenguaje natural, pero no deberían existir en un lenguaje perfecto[6] (figs.3 y 4).

El mismo objeto puede ser presentado de varios modos. Varios sentidos pueden compartir el mismo referente. Sin embargo, el referente no se agota en sus sentidos·

> Un conocimiento completo del referente requeriría que fuésemos capaces de decir de inmediato si un sentido le pertenece. Este conocimiento nunca podrá alcanzarse.[7]

Dado que el signo es arbitrario, mientras que referente y sentido no lo son, el mismo sentido y referente pueden ser compartidos por diferentes expresiones (figs.1 & 2). Como se puede hablar con sentido de cosas que no existen, pueden haber nombres con sentido, pero sin referencia (fig.5).

2. Frege sabe que una de las cuestiones mas problemáticas de la Filosofía de las matemáticas son las definiciones, por eso es muy reservado en lo que dice a su respecto. Se detiene varias veces y en diversos textos a hablar de ellas, pero casi siempre es para decir lo mismo:

> ...ninguna definición es creadora de manera que pueda atribuir propiedades a una cosa que no las tiene, como no sea la de expresar y designar lo que la definición introduce como símbolo[8].
>
> Man scheint ihm vielfach eine schöpferische Kraft zuzutrauen, während doch dabei weiter nichts geschieht, als dass etwas abgrenzend hervorgehoben und mit einem Namen bezeichnet wird[9].

El único momento en el que profundiza un poco mas en ellas es cuando las introduce como parte de su primera conceptografía[??]. Ahí Frege añade que las definiciones, pese a tomar la forma de identidades normales, no son juicios, es decir no afirman nada, sino que lo estipulan. No dicen como son las cosas, sino como *deben* ser. Las ecuaciones que aparecen en un definición son un tipo muy especial de ecuaciones: Su contenido no es judicable en tanto que de ellas no se puede derivar nada que no se pueda derivar sin ellas, y sin embargo, sí lo es, en tanto puede ser afirmado[11]. Solamente una vez que las cosas *son como deben ser*, puede afirmarse que *se es* lo que antes se estipuló que *fuera así*. El juicio resultante de la afirmación del contenido de una igualdad por definición es siempre un *juicio analítico*. Las definiciones no pueden ser creadoras, es decir, el objeto que se define debe existir ya, antes de la definición, porque debemos poder referirnos a él de alguna manera. Aquello que no podemos referir, mucho menos podemos definir. Dado que una definición estipula la identidad del referente de dos signos distintos, debemos tener como dado el referente de por lo menos[12] uno de ellos[13].

Epílogo

B. Concepto y Valor de Verdad: La crítica al Psicologismo.

¿ Por qué son irreconciliables el psicologismo y la conceptografía ? Porque los pensamientos, en tanto singulares y subjetivos, no se comportan de manera conceptual, y por ende, no tienen lugar dentro de la conceptografía. ¿ Por qué es necesario *rescatar* a la primera conceptografía del psicologismo ? Porque en ella hay afirmaciones que, si bien no son ellas misma psicologistas, sí pueden fácilmente interpretarse como tales. ¿ Cuales son estas afirmaciones ? Principalmente aquellas que se refieren a los conceptos de *concepto* y *proposición*.

1. Empecemos por el concepto. En la Conceptografía Frege no está claro si los conceptos son un tipo de funciones, o si solamente son expresados por ellas. A partir de "*Función y Concepto*", queda claro que los conceptos son una subclase del conjunto de funciones[14]. En la Conceptografía, Frege entendía por concepto, toda función proveniente de una expresión con contenido judicable. En los años posteriores, Frege sigue creyendo que las expresiones de los conceptos provienen, de alguna manera, de las expresiones de los juicios. Sin embargo, deja de pensar que sea esto lo que las defina. En "*Función y Concepto*", Frege redefine al concepto "en su uso puramente lógico"[15] como aquella función que toma como valores exclusivamente a la verdad y la falsedad. En términos contemporáneos diríamos que concepto es toda función en [*into*] el conjunto de los valores de verdad, es decir, aquella función cuyo rango es un subconjunto del conjunto de los calores de verdad.

Es muy difícil comparar ambas definiciones ya que parecen estar enunciadas en términos completamente distintos. Para comprender mas claramente el paso que da Frege de una definición a otra, debemos verlo como parte de la introducción que hace Frege de la distinción sentido / referencia a los juicios. Para Frege, los valores de verdad son el aspecto objetivo del contenido de los juicios, de tal manera que todo contenido judicable toma un valor de verdad, ya sea el de lo verdadero o de lo falso. Es por ello que ambas definiciones son de alguna manera equivalentes. Solamente que la definición presentada en "Función y Concepto" no se ve mediada, como en el caso de la primera definición, por el nivel de las expresiones.

2. En Las leyes..., como en la Conceptografía, Frege es de la opinión de que las aserciones matemáticas (y en general todos los juicios) expresan pensamientos[16]. Sin embargo, después de la Conceptografía Frege deja de llamar a estos pensamientos, como en la lógica clásica, *proposiciones*. Frege sabe que cambios en el nombre no siempre implican cambios en el significado[17], de tal manera que este cambio de nombre en sí mismo no es muy importante, sin embargo también es síntoma de un cambio mas profundo que sí lo es. Y no estoy hablando sólo de la introducción de la distinción entre sentido y referencia que, de cualquier manera, hace explícita Frege al segundo parágrafo del texto, sino de otro cambio sustancial, consecuencia de éste.

El primer cambio que notamos entre los símbolos que formaron la primera conceptografía, y los de Las leyes... aparece en la barra horizontal, antiguamente conocida como *barra del contenido*. Sintácticamente no hay ninguna diferencia entre la presentada en la Conceptografía y la de Las leyes.... Sin embargo, Frege cree necesario eliminar su *comprometedor* nombre, y bautizarla con el más neutral de *barra horizontal*. La razón que da es importante aunque, tal vez, insuficiente. La he mencionado párrafos atrás dentro de la crítica de Frege al psicologismo, pero la repetiré aquí: Según Frege, ya no se le puede llamar barra del contenido, porque éste ya no debe considerarse como una unidad, sino que debe dividirse en sentido y referencia.

Ya nos había prevenido Frege en la Conceptografía de no confundir distinciones al nivel de los significantes con distinciones entre significados. Así como dar un nuevo nombre a algo no significa descubrir algo de él, así tampoco implica descubrir una distinción entre objetos el hacer una diferencia entre las expresiones que los nombran. Si tomamos un objeto, al que antes consideramos como una unidad, los separamos en varias partes y a cada una de ellas le damos un nombre, no podemos decir que hemos analizado realmente al objeto, ya que no habremos captado ninguna distinción natural que ya existía en él ni la habremos traducido en una distinción nominal, sino que sólo habremos hecho una distinción nominal que por sí misma no tiene significado conceptual alguno. Lo mismo sucede cuando Frege habla de la distinción entre sentido y referencia como la causa de que dejemos de llamar a la barra horizontal barra del contenido:

> ... Frühern nannte ich ihn Inhaltsstrich, als ich noch unter dem Ausdrucke 'beurtheilbarer Inhalt' das zusammenfasste, was ich nun unterscheiden gelernt habe als Wahrheitswerth und Gedanken.[18]

Nuestra reacción obvia sea: ¿ Y ? ¿ Qué hace de la distinción entre sentido y referencia no sólo una distinción nominal, sino una de injerencia lógica ? ¿ Qué de *comprometedor* tiene el nombre de *barra del contenido* como para que sea mejor deshacerse de él ?

La barra horizontal ya no es un signo que represente un cambio de niveles como en la Conceptografía. Ahora sólo es un concepto, es decir, una función que toma como valores exclusivamente valores de verdad: La verdad para el argumento de la verdad, y la falsedad para el resto de los argumentos. Lo que justifica su lugar dentro del nuevo símbolo conjunto del juicio. Así como antes era necesario, para que el contenido a afirmarse en el juicio fuera judicable, colocar la barra horizontal inmediatamente después de la vertical, ahora lo es para asegurar que lo que se vaya a afirmar sea un aserto, es decir, el nombre de un valor de verdad.

Cómo ya señalé en mi análisis de la Conceptografía, una de las bases en las que se sostiene es en el carácter conceptual del contenido judicable. Sin embargo, lo que descubrió Frege en sus estudios semánticos posteriores es que esto es falso: el contenido de los juicios no es conceptual ...por lo menos no en su totalidad. La única manera que encontró Frege para rescatar su conceptografía del sin sentido en el que parecía haber caído, era separando del contenido aquella parte que sí se comporta conceptuosamente de aquella que no, y luego erradicar ésta de la conceptografía (sin negarle existencia ni importancia). Con la distinción entre valor de verdad y pensamiento, Frege creyó haber logrado esto último: Los pensamientos son esa parte del contenido de las aserciones que es psicológica, subjetiva y, por ende, no-conceptual y Los valores de verdad son la parte objetiva que sí se comporta de manera conceptual. Si no fuera sí, las relaciones entre proposiciones que establece la conceptografía serían vacías y artificiales, en otras palabras, el sistema caería en el formalismo. Si el valor de verdad es el significado de las proposiciones, la lógica no tiene que tratar de pensamientos y caer en el psicologismo. Estas intuiciones dieron pie a Frege para la postulación de esos extraños entes que son los valores de verdad.

3. Uno de los cambios importantes que influyó en mayor grado al abandono de la primera conceptografía por parte de Frege es la incorporación de los valores de verdad. Como señalé en su momento, Frege nunca habla de verdad ni falsedad en la Conceptografía. Para Frege, tal parece que la verdad o falsedad de un juicio no tiene la menor importancia conceptual, por eso la

conceptografía no se ocupa de ella. Sin embargo, en los años siguientes, la opinión de Frege con respecto a la verdad y la falsedad da un giro de ciento ochenta grados, ya que Frege empieza a pensar que son precisamente los valores de verdad los que dan objetividad a las relaciones de inferencia entre los juicios. Independientemente del argumento que da Frege en su artículo *Sobre el Sentido y la Referencia* a favor de la existencia de los mismos y su carácter de objetos[19], poco dice Frege sobre qué cosa son los valores de verdad. La poca información que sobre ellos tenemos se reduce a: a) son valores de verdad, b) son dos, y c) los pensamientos falsos son sentidos de los nombres de uno y los pensamientos falsos lo son del otro. No hay más[20]. No tenemos ninguna intuición de ellos, ni podemos referirlos de manera independiente a los pensamientos verdaderos, excepto bajo los nombres: *El valor de verdad de lo que es verdadero* y *El valor de verdad de lo que es falso.* Los nombres de La Verdad [*Das Wahre*] y La Falsedad [*Das Falsche*] son abreviaturas de éstos[??]. Como abreviaturas, son estipuladas por Frege y, por lo tanto, epistémicamente vacías. En otras palabras, además de estos dos pares de nombres, toda expresión cuyo sentido sea un pensamiento verdadero o falso, es el nombre de un valor de verdad. Con esta poca información es muy difícil reconocer si los valores de verdad se comportan o no de manera conceptual, que es el punto que trata de hacer Frege en *Sobre el sentido y la Referencia.*

4. Concedamos por un momento a Frege que el referente sea la parte conceptual del contenido de los juicios. ¿ Es válido extender la tesis hasta hacerla abarcar todos los nombres ? Si así fuera, estaríamos diciendo que el referente es la parte conceptual del contenido de los nombres y, por lo tanto, la identidad de los objetos como referentes de términos singulares sería conceptual. La identidad de los conceptuosamente indiscernibles se haría

ineludible. Sin embargo, Frege nunca hace explícito si, además de los valores de verdad, otros referentes se comportan de manera conceptual[22].

A nivel de los juicios y con el desarrollo de la distinción entre sentido y referente, la distinción entre significante y significado se convierte en una tríada: el pensamiento (el sentido), su valor de verdad (el referente) y la afirmación que se hace de él (el juicio propiamente dicho). Como consecuencia de ello, al considerar a los juicios en esta nueva conceptografía, se deban atender ambos elementos del contenido. Por ejemplo, cuando decimos que una expresión es el nombre de una función, lo hacemos en función de su referente. De la misma manera, cuando decimos que un juicio es particular o negativo no estamos diciendo nada de su referente, ya que no hay tal cosa como verdades generales o falsedades negativas, sino pensamientos generales y negativos.

El imperativo, entonces, que domina a Frege al escribir Las leyes... es el de dejar de hablar de proposiciones como pensamientos y sustituir todo lo referente a ellos por referencias a los valores de verdad: Las funciones proposicionales se convierten en conceptos, la barra del contenido en barra horizontal, etcétera. Sólo así, cree Frege, se pueden mantener alejados de la auténtica lógica matemática los fantasmas del psicologismo y el formalismo. No estoy implicando con ello, que la única ventaja de esta segunda conceptografía con respecto a la primera sea que incluye de una manera clara los resultados de la crítica fregeana al formalismo y el psicologismo. Claro que no. Además de ser un trabajo claramente anti-formalista y anti-psicologista, Las Leyes Fundamentales de la Aritmética presenta toda una evolución formal, semántica y ontológica con respecto a la Conceptografía. En este capítulo me he reducido a esta crítica, porque creo que es la que ilustra de una manera mas clara la evolución que se dio en el pensamiento de Frege durante los últimos años del siglo diecinueve.

Notas Y Referencias Bibliográficas.

1. "...el sentido... no es subjetivo... sin embargo, no es el objeto mismo." Frege: *"Sobre el Sentido y la denotación"* en Tomas Moro Simpson (comp.) Semántca Filosófica p.8 Siglo XXI, Buenos Aires, 1969
2. "...el sentido del signo, en el cual está contenido el modo de presentación". Op.cit. p.8
3. "El sentido de un nombre... sólo echa luz sobre un aspecto particular del referente, suponiendo que tal nombre tenga alguna" Op.cit. p.5
4. Loc cit. p.8
5. Op.cit. p.4
6. "A cada expresión perteneciente a una configuración completa de signos debería corresponder, ciertamente, un sentido determinado, pero los lenguajes naturales no cumplen con esta condición..." Op.cit. p.6
7. Op.cit. p.5
8. *Función y Objeto*. tr. al español en Op.cit. p.217 Cfr: Man kann auch nicht einem Dinge durch blosse Definition eine Eigenschaft anzaubern, die es nun einmal nicht hat, es sei denn die eine, nun so zu heissen, wie man es etwe benannt hat. Die Grundgesetze der Arithmetik p.XIII
9. Op.cit. p.XIII
10. Conceptografía §24
11. Sobre estas dos formas de concebir al contenido judicable, refiérase al capítulo 1 "¡ Qué es una Conceptografía ?"
12. Digo: *por lo menos* un signo, porque evidentemente el referente es el mismo.
13. Frege: "*Función y Concepto*" en Op.cit. p.226
14. Sin embargo, en estos años también cambia la definición fregeana de función, lo que le da todo un nuevo sentido a la identidad entre función y concepto.
15. Frege: "*Sobre Concepto y Objeto*" en Op.cit p.237
16. Grundgesetze... pp.XIII y 7
17. "La sola diferencia de designación no puede bastar para fundar una diferencia de lo designado." Frege: "*Función y Concepto*" en Op.cit. p.216
18. Ibid. p.7
19. En la Ontología de Frege, objeto es todo lo que no es función. Ibid.
20. Se podría decir que también sabemos que son los valores posibles de los conceptos. Pero eso es algo que sabemos de los conceptos, no de los valores de verdad. El concepto se define a partir de los valores de verdad, no viceversa. Cfr. *Función y Concepto*.
21. ...der *Wahrheitswerth* des Wahren ...ich kurz das Wahre nenne. Grundesetze... p.7
22. Por un lado, el hecho de que a todo lo largo de *Sobre el sentido y la referencia* no se mencione lo conceptual como característica distintiva de la relación de referencia, nos inclina a creer que ésta se reserva a la referencia de los juicios. Además de que, si así fuera, de manera indirecta se estaría afirmando que los pensamientos, por ser también objetos y posibles referentes de términos singulares, deben comportarse de

manera conceptual. Lo que sería abrir una vez más las puertas de la lógica al psicologismo.
Por el otro lado, tampoco debemos olvidar que es el concepto el que relaciona a los valores de verdad con los objetos. Un concepto es una función que, pese a tomar cualquier objeto como argumento, sólo toma como valores, la verdad y la falsedad. De tal manera que toda relación entre un objeto y un valor de verdad es una relación conceptual. Tal vez sea en este punto crítico, donde cobre mayor importancia la distinción fregeana entre las marcas características de un concepto y las propiedades de un objeto de la que tanto habla en su introducción.
Antes de aceptar o rechazar la identidad de los conceptuosamente indiscernibles, deberemos preguntarnos antes por si hay propiedades que no se correspondan con características de un concepto. Pero, reitero, ambos son problemas cuya eminencia es ontológica antes que lógica y, para los propósitos de este trabajo, es suficiente señalarlos.

Epílogo

Conclusiones

En 1879, el Cálculo Lógico hizo su primera aparición en la Historia de las Ideas. Lejos de ser recibido con bombo y platillo, el nuevo personaje paso un buen rato ignorado antes de que se le permitiera ocupar el preponderante lugar que ocupa actualmente dentro de la Filosofía y las Matemáticas. El histórico primer paso fue una sencilla teoría formal expuesta de un modo extraño en un oscuro texto alemán intitulado la Conceptografía.

Al escribirlo, su autor, Gottlöb Frege, no pretendía crear una revolución en la historia de la Lógica, sino contar con una buena herramienta para sus trabajos en Filosofía de la Matemática. En el lenguaje ordinario, Frege encontró un fuerte conflicto entre la forma de los pensamientos y la propia del lenguaje. Según el pensador alemán, este conflicto hace practicamente imposible seguir argumentos formales de una manera precisa y completa. Este problema se resolvería si la sintaxis de nuestro lenguaje se correspondiera de manera exacta con la forma lógica. Ya que esto es imposible en el lenguaje ordinario, es necesario crear uno artificial que, al contar con esta característica, asista al ordinario en esta función.

La forma lógica de las expresiones se encuentra en lo que Frege llama su *contenido conceptual*. Toda relación conceptual entre las expresiones se encuentra en este aspecto del contenido. El contenido conceptual de una expresión es determinado por los juicios en los que ella ocurre. Se le llama conceptual porque cada uno de estos juicios expresa un concepto que vale para el contenido de la expresión. Como toda relación de inferencia entre los juicios es o corresponde con una relación conceptual entre ellos (o alguna de sus partes), las posibles relaciones de inferencia entre los juicios, lo que Frege llama el contenido judicable, se encuentran definidas también por su contenido conceptual. Lo que Frege trata de hacer es traducir estas relaciones conceptuales (ya existentes dentro del contenido conceptual de las expresiones) en relaciones sintácticas y crear así lo que él llama una *conceptografía*: Un lenguaje de fórmulas en el que se cuenta con un cálculo efectivo para el razonamiento puramente formal.

Su primer propuesta de conceptografía aparece expuesta por primera vez en su obra de 1879 La Conceptografía. El lenguaje que Frege presenta ahí está compuesto por un número denumerable de símbolos básicos a partir de los cuales se pueden derivar un número arbitrario de símbolos derivados. Ambos tipos de símbolos funcionan en tres niveles de representación. En un primer nivel, los símbolos obedecen ciertas reglas y propiedades sintácticas, las cuales conforman un cálculo lógico tal y como lo entendemos actualmente. En un segundo nivel, son capaces de expresar contenidos ajenos a ellos mismos, en otras palabras, cuentan con una semántica. En un tercer nivel, estos símbolos pueden formar juicios, es decir, pueden ser llevados a la acción. Como claramente lo indica el título de esta tesis. Los resultados de mi análisis se centran en el primer nivel de representación.

Frege clasifica los símbolos de su conceptografía dentro de dos grandes grupos. El primer grupo es el de las variables y a él pertenecen de manera exclusiva las letras. El segundo grupo es el de los símbolos con contenido fijo. A él pertenecen los símbolos que permiten el paso de un nivel a otro (la barra del contenido, la barra del juicio y la doble barra de la definición), los símbolos de operaciones (la negación, el condicional y la igualdad de contenido), como los símbolos puramente sintácticos (los paréntesis, las comas, etc.). Respecto al primer grupo, vale la pena mencionar que Frege copia el funcionamiento de sus variables del de las matemáticas. Sus letras incluyen variables del lenguaje (minúsculas latinas, góticas y griegas) y del metalenguaje (mayúsculas griegas). Según la clasificación de W.v.O. Quine en su Methods of Logic, aún cuando son suceptibles de cuantificación, las letras de Frege son *letras esquemáticas*. Esto quiere decir que no representan objetos. Solamente marcan el lugar que deben ocupar otras expresiones, las cuales sí pueden representar objetos. Es por ello que su cuantificación es sustitucional, no objetal. Sus proposiciones universalmente cuantificadas dicen que todos los casos de sustitución de la variable valen, no que una propiedad vale para todos los objetos de un universo. Sin embargo, Frege es poco consistente con su sistema, ya que pretende aplicar la cuantificación así entendida a campos que la superan, como la aritmética, donde la cuantificación objetal es evidentemente necesaria. De cualquier manera, la introducción de cuantificadores es una de las aportaciones mas importantes de Frege al cálculo lógico.

Son muchas las similitudes existentes entre la primera conceptografía de Frege y las teorías formales contemporáneas. Es más, con solo algunos elementos sintácticos presentados por Frege en su Conceptografía, podemos construir una teoría formal axiomática primitiva (Eso es lo que hice en el tercer capítulo de esta tesis). La teoría que se obtiene cuenta con los elementos mínimos para toda teoría formal axiomática, es decir, cuenta con un conjunto denumerable y definido de símbolos básicos, una definición recursiva de wff (fórmula bien formada), un conjunto definido de nueve axiomas, y otro, también definido, de tres reglas de inferencia. Esto la hace, la primer teoría formal en la Historia de la Lógica. Un logro que no será digerido por las comunidades matemática y filosófica hasta entrado el siguiente siglo.

Pese a todo esto, Frege aún no era consciente de manera completa de toda la fuerza de su cálculo lógico, por ello, las aplicaciones y ejemplos que incluye en la Conceptografía son aveces demasiado complejos y oscuros. En la derivación de algunos juicios del pensamiento puro, Frege mezcla demostraciones semánticas con pruebas formales. En las pruebas semánticas, no distingue entre *Modus Ponens* y *Modus Tollens*, usa informalmente algunos principios que no aparecen formulados sino más adelante en su cadena de inferencias y además, usa de una manera demasiado vaga expresiones como "significa lo mismo" y "tiene la misma forma".

Frege cuenta con un cálculo lógico primitivo, pero muy poderoso. Sin embargo, no sabe aprovecharlo y, al aplicarlo, lo debilita. El momento en el cual esto es más evidente es la tercera sección de su Conceptografía. Frege no se cansa de escribir que su lenguaje formal puede ser un gran instrumento para dar claridad y sencillez a ciertos razonamientos formales, lo cual es cierto. Sin embargo, al momento que trata de demostrarlo a través de aplicaciones en concreto, la hace aparecer artificialmente compleja y oscura. La tercera sección de la conceptografía es hostilmente críptica y tan difícil de leer que pierde todo sentido como ejemplo del uso de la conceptografía.

Conforme fue desarrollando y perfeccionando algunos elementos de su primer lenguaje formal, Frege se fue dando cuenta que no bastaba reformar su primer conceptografía, sino que era necesario elaborar una nueva teoría formal que incorporara los resultados de sus posteriores investigaciones y superara los logros de la primera. En este sentido, uno de los aspectos que más importaba a Frege era la crítica al psicologismo y al formalismo, dos posiciones muy fuertes dentro de la Filosofía de las Matemáticas de su tiempo. Desde el principio, Frege quiso que su teoría fuera una respuesta en contra de ambas posiciones. Sin embargo, la redacción de la Conceptografía resulto demasiado vaga en algunos aspectos, tanto que algunas de sus tesis fueron interpretadas precisamente como formalistas y psicologistas. Frege necesitaba, entonces, reforzar su teoría en las partes que habían sugerido esta interpretación. Para ello, una de sus más fuertes armas, por no decir una de sus más importantes contribuciones a la Filosofía, fue la distinción entre Sentido (la propiedad objetiva del signo, donde está contenido el modo de representación del referente) y Referencia (el objeto al que hace referencia el nombre). Esta distinción revolucionó por completo varios aspectos de la filosofía fregeana, incluyendo su interpretación de la identidad y, por lo tanto, de las definiciones. También implicó un gran cambio en la explicación de las relaciones de inferencia entre juicios. El aspecto conceptual del contenido de los juicios, lo que Frege solía llamar el contenido judicable, posteriormente lo identifica Frege con su valor de verdad, es decir, con *la verdad* si el juicio es verdadero y *la falsedad* si el juicio es falso. Para evitar el psicologismo Frege tiene que redefinir todo su sistema en función de los valores de verdad, ya que son el único aspecto del contenido de los juicios que es objetivo y se comporta de manera conceptual. Así es como desaparecen las funciones proposicionales y su teoría se ve dominada por conceptos, es decir, funciones cuyo rango es una subclase del conjunto de los valores de verdad.

Este paso, de la Conceptografía a Las Leyes Fundamentales de la Aritmética no es un corte tajante con la primera conceptografía y el surgimiento de todo un nuevo sistema, sino un paso gradual, una evolución. Pese a lo que dice el título del Epílogo, Frege no abandona su primera conceptografía, simplemente la reformula enriqueciendo y reforzando algunos elementos y abandonando otros. Los elementos que abandona son tanto o mas importantes que los otros. Sin embargo, son inconsistentes con la nueva formulación del sistema. Entre los elementos que abandona Frege se encuentra la teoría del Juicio, la distinción entre niveles de representación, el contenido judicable, etcétera. La mayoría de los elementos de cálculo sobreviven en las leyes... y, aun más, en las teorías formales actuales. Es por ello que los logros de la Conceptografía en este aspecto parecen eclipsar al resto de los elementos de la obra. Empero, son más los elementos de la primera conceptografía de Frege que siguen siendo rescatables para la Lógica y la Filosofía actuales. Al principio de este texto señale el sorprendente olvido en el que esta sumergida la Conceptografía. Con los resultados de mi análisis espero halla quedado claro que este olvido es completamente injustificado y que la riqueza del texto no se extingue en ser una curiosidad museográfica en la Historia de la Lógica y de la Filosofía.

BIBLIOGRAFIA:

I. Directa

Frege, Gottlöb:

Begriffsschrift und andere Aufsatze. Georg Olms, Hildesheim, Wissenschaftliche Buchgesselschaft, Darmstadt, 1964

Traducciones:

Conceptografía. Los fundamentos de la Aritmética. Otros estudios filosóficos. Trad. Hugo Padilla, UNAM Instituto de Investigaciones Filosóficas, México D.F., 1972

Conceptual Notation and Related Articles, Trad. Terrell Ward, Oxford, Clarendon Press, 1972

II. Indirecta y Complementaria

A. Otros Libros

Bochenski, I.M.:

Historia de la Lógica Formal. Trad. Millán Bravo Lozano, Ed. Gredos, S.A., Biblioteca Hispánica de Filosofía, N°55, Madrid, 1985

Deleuze, Gilles:

Diferencia y Repetición. Trad. A. Cardín, Júcar Universidad, serie sindéresis, primera edición, Barcelona, 1988

Dummett, Michael:

La verdad y otros enigmas. Tr. A.H. Patiño, Fondo de Cultura Económica, Sección de Obras de Filosofía, México, 1990

Fraenkel, Abraham:

Abstract Set Theory. North-Holland Publishing Company, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 4ª edición revisada, Amsterdam, 1976.

Frege, Gottlöb:

Die Grundlagen der Arithmetik; eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Hildesheim, G. Olms, 1962 Traducción al Inglés: The Foundations of Arithmetic. Trad. J.L. Austin, Basil Blackwell, Oxford, 1968 Traducción al español: Los Fundamentos de la Aritmética. Trad. Hugo Padilla en Op.cit.

Grungesetze der Arithmetik. Hildesheim, G. Olms, 1962 Trad. al Inglés: Furth(ed.): The basic Laws of Arithmetic.

Mates, Benson:
Elementary Logic, Oxford University Press, New York, 1965

Mendelson, Elliott:
Introduction to Mathematical Logic, Wadsworth & Brooks, Cole Mathematics Series, 3ª edición, Pacific Groove Ca. 1987

Orayen, Raúl:
La ontología de Frege. La Plata, Universidad Nacional, S.A., Cuadernos del instituto de lógica y filosofía de la ciencia

Pierce, Charles S.:
Reasoning and the Logic of Things. The Cambridge conferences. Lectures of 1898. Harvard University Press, Cambridge, 1992

Quine, W.v.O.:
Methods of Logic Harvard University Press, 4ª edición, Cambridge, 1982
From a logical point of view. Harvard University Press, Cambridge, 1961
Mathematical Logic, Revised Edition, Harvard University Press, Cambridge, 1979

Schirn, Matthias:
Identität und Synonymie. Logisch-semantische Untersuchungen unter Berücksichtigung der sprachlichen Verständigungspraxis. Fr.Frommann Verlag-G.Holzboog KG, Problemata N°41, Stuttgart-Bad Cannstatt, 1975

Sluga, Hans:
Gottlob Frege. Routledge & Kegan Paul Ltd. colecc. The Arguments of the Philosophers, Ed.Ted Honderich, London, 1980

B. Ponencias, Conferencias y Artículos.

Frege, Gottlöb:
On Sense and Reference en Brian McGuiness (ed.): Collected Papers on Mathematics, Logic and Philosophy. Tr.Max Black, Oxford: Basil Blackwell, 1984

Kripke, Samuel:
De Re *Attitudes toward Natural Numbers*. Seminario impartido en el Instituto de Investigaciones Filosóficas, Enero 26 y 28, 1993

Orayen, Raúl:
Frege: una aproximación a sus concepciones semánticas. en Ergo Vol.II, N°4, Agosto 1988. pp.13-40

Schirn, Matthias:
Frege y su problema principal en la Aritmética. Cursillo dictado en el Instituto de Investigaciones Filosóficas, 1993

Ward Bynum, Terrell:
On the Life and Works of Gottlob Frege, Editor's Introduction en Conceptual Notation. Oxford Clarendon Press, 1972