03071 1 2eje.

Universidad Nacional Autónoma de México

UNIDAD ACADEMICA DE LOS CICLOS PROFESIONAL Y DE POSGRADO DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

"PROPUESTA EDUCATIVA, APLICACIONES DE LAS MATEMATICAS; CRECIMIENTO DEMOGRAFICO".

T E S I S

Como requisito para obtener el grado de

Maestra en Educación en Matemáticas

P r e s e n t a

ASELA CARLON MONROY

CIUDAD UNIVERSITARIA ENERO DE 1994

Dedicatoria:

A la memoria de la

DRA. ELFRIEDE WENZELBURGER GUTTENBERGER
(† 31 de julio de 1993)

quien ya no pudo ver impreso este trabajo.

"PROPUESTA EDUCATIVA. APLICACIONES DE LAS MATEMATICAS; CRECIMIENTO DEMOGRAFICO".

ASELA CARLON MONROY

P R E F A C I O

Este trabajo es una Propuesta Educativa. Propone tres cosas:

Primera: enseñar, a alumnos de bachillerato, la forma en la cual se han utilizado conceptos, relaciones, métodos y algoritmos, provenientes de diferentes áreas del conocimiento, en el estudio científico de una situación concreta real, como puede ser un hecho social o un fenómeno de la naturaleza.

Segunda: realizar la enseñanza de lo anterior mediante tres acercamientos. Primer acercamiento: Utilizando los conocimientos y las vivencias que tiene el alumno, al momento de iniciar el estudio de la situación, introducirlo a su estudio, tratando de que se involucre en ella, comprenda el problema central que se plantea, identifique los aspectos relevantes y ponga de manifiesto los elementos conceptuales, ya sean correctos o incorrectos, con que cuenta, para estudiar la situación. Segundo acercamiento: Recordar o aprender los elementos teóricos necesarios que se necesiten para estudiar la situación de que se trate. Tercer acercamiento: Retomar de nueva cuenta la situación para realizar su estudio, contando ya con los elementos teóricos que requiere su desarrollo, al nivel que se juzgue adecuado.

Tercera: enseñar lo anterior, de la forma antes descrita, en cursos extra-curriculares, enfocados a incrementar la formación científica de un estudiante.

Dos ideas centrales subyacen en el fondo de este trabajo. Una le dió origen, lo motivó. La otra marcó la orientación, delineó la forma de concretarlo. La primera : llevar a la clase de Matemáticas, para el aprendizaje de los alumnos, unas Matemáticas que la presenten como expresión numérica de la naturaleza y de algunos fenómenos sociales. La otra : que el tipo de situaciones reales que se utilicen para mostrar e ilustrar, el papel y la utilidad de las Matemáticas, sean aquellas que han tomado como objeto de estudio las diferentes áreas del conocimiento para la construcción racional de la realidad.

El trabajo está estructurado en dos partes. La primera justifica y aclara posiciones; la segunda es el desarrollo de la propuesta en sí.

Hay necesidad de decir por qué es conveniente que el alumno aprenda la forma en la cual se han utilizado conceptos, relaciones, métodos y algoritmos, provenientes de diferentes áreas del conocimiento, en el estudio científico de una situación concreta real, como puede ser un hecho social o un fenómeno de la naturaleza.

Por otro lado, es necesario aclarar qué se entiende por "estudio científico de una situación concreta real" y explicitar las bases que sustentan, por un lado, la propuesta de realizar la enseñanza a partir de tres acercamientos y por otro, aquellos que justifican el que la propuesta se estructure en la forma en que se hace.

De lo anterior, la primera parte de este trabajo la integra una Introducción y el denominado Marco Teórico Conceptual. En la Introducción se plantea el problema y se formula la Propuesta; en el Marco Teórico Conceptual se dan justificaciones de por qué enseñar lo que se propone; qué se entiende por aquello que se propone; por qué enseñarlo de la manera propuesta y por qué la propuesta se desarrolla en la forma en que se hace. La segunda parte del trabajo, denominada Propuesta Educativa, está integrada de dos partes: el Programa del Curso y la Planeación del mismo. El Programa hace explícito los contenidos y aprendizajes que se intenta promover y en la Planeación, la forma de hacerlo.

INDICE

PREFACIO

INTRODUCCION 1

Bibliografía 16

CAPITULO I. Marco Teórico 17

1. Propuesta Educativa 19
2. Estudio Científico de una Situación Concreta Real 19
3. Filosofía de la Educación 28
4. Teoría del Conocimiento 30
5. Teoría del Aprendizaje 39
6. Didáctica para la Enseñanza 46
7. Modelo de Programa para un Curso 47

Bibliografía 51

CAPITULO II. Marco Referencial del Programa y Programa del Curso 53

1. Marco referencial del programa 54
2. Programa del curso 59

CAPITULO III. Descripción de las Actividades y Materiales Didácticos para Desarrollar los Temas I y II del Programa 78

Descripción de las Actividades y Materiales Didácticos para el Tema I 79

ACTIVIDAD I - 1. Presentación del curso 79

ACTIVIDAD I - 2. Identificación de necesidades individuales y colectivas 80

ACTIVIDAD I - 3. Discusión grupal del Cuestionario I-1 82

ACTIVIDAD I - 4. Proceso para satisfacer una necesidad 84

ACTIVIDAD I - 5. Algunos aspectos del proceso para satisfacer una necesidad 87

ACTIVIDAD I - 6. Necesidades de la humanidad 97

ACTIVIDAD I - 7. Los alimentos: necesidad básica de la humanidad 99

ACTIVIDAD I - 8. Otras necesidades materiales 103

ACTIVIDAD I - 9. La Tierra: fuente de nuestros recursos naturales 104

ACTIVIDAD I -10. La humanidad en el año 2100 y la cantidad de satisfactores que necesita 105

ACTIVIDAD I-11. Capacidad de la Tierra de proporcionar los recursos naturales que la humanidad necesitará para el año 2100 — 109

ACTIVIDAD I-12. Elementos principales que intervienen en la producción de alimentos que necesitará la humanidad en el año 2100 — 110

ACTIVIDAD I-13. Evolución del sistema : población-alimentos-recursos no renovables-industrialización-contaminación, con el tiempo — 111

ACTIVIDAD I-14. Las necesidades humanas y su satisfacción en la actualidad — 114

ACTIVIDAD I-15. Las futuras necesidades humanas y su satisfacción — 116

ACTIVIDAD I-16. Aumento de la población futura y de los satisfactores que se necesitan — 118

ACTIVIDAD I-17. El Predicamento de la humanidad I — 120

ACTIVIDAD I-18. "Comprensión de un hecho social" — 125

Descripción de las Actividades y Materiales Didácticos para el Tema II — 129

Primer Acercamiento — 130

ACTIVIDAD II-1-1. El Predicamento de la humanidad. Parte II — 131

ACTIVIDAD II-1-2. El Predicamento de la humanidad. Parte III — 133

ACTIVIDAD II-1-3. ¿Cómo está creciendo la población humana? — 135

ACTIVIDAD II-1-4. Método de estudio del sistema: población-alimentos-recursos no renovables-industrialización-contaminación — 141

ACTIVIDAD II-1-5. La población, alimentos, contaminación, industria y recursos naturales: problema actual — 143

ACTIVIDAD II-1-6. Película: "Cuando el Destino nos Alcance" — 157

Segundo Acercamiento — 158

ACTIVIDAD II-2-1. Introducción al estudio de Series y Sucesiones — 160

ACTIVIDAD II-2-2. Introducción al concepto de Función. Primera parte — 168

ACTIVIDAD II-2-3. Series y Sucesiones. "Procesos Infinitos": 1a. parte — 180

ACTIVIDAD II-2-4. Discusión por equipos — 183

ACTIVIDAD II-2-5. Discusión grupal — 183

ACTIVIDAD II-2-6. Series y Sucesiones. "Procesos Infinitos". 2a. parte — 183

ACTIVIDAD II-2-7.	Discusión grupal de las respuestas al Cuestionario resuelto en la actividad anterior	190
ACTIVIDAD II-2-8.	Lectura sobre series y sucesiones	190
ACTIVIDAD II-2-9.	Cuestionario sobre la lectura de la actividad anterior	195
ACTIVIDAD II-2-10.	Revisión del cuestionario anterior	203
ACTIVIDAD II-2-11.	Análisis del texto leído	203
ACTIVIDAD II-2-12.	Ejemplo de un proceso infinito: Serie de Fibonacci	204
ACTIVIDAD II-2-13.	El número irracional $\sqrt{2}$	211
ACTIVIDAD II-2-14.	Revisión colectiva de los resultados obtenidos en la actividad anterior	222
ACTIVIDAD II-2-15.	Otra forma de aproximarse a $\sqrt{2}$	223
ACTIVIDAD II-2-16.	Revisión colectiva de los resultados obtenidos en la actividad anterior	231
ACTIVIDAD II-2-17.	Cálculo del número π	231
ACTIVIDAD II-2-18.	Discusión grupal del material titulado "El número π"	239
ACTIVIDAD II-2-19.	Planes de inversión bancaria.	239
ACTIVIDAD II-2-20.	Discusión grupal del material titulado "Planes de inversión bancaria"	243
ACTIVIDAD II-2-21.	El número e	243
ACTIVIDAD II-2-22.	Generalización de la fórmula $\left[1 + \frac{1}{n}\right]^n$	262
ACTIVIDAD II-2-23.	Importancia del número e	266
ACTIVIDAD II-2-24.	Introducción al concepto de Función, 2a. parte	268
ACTIVIDAD II-2-25.	Función exponencial	278
ACTIVIDAD II-2-26.	La función exponencial vs la función potencia	284
ACTIVIDAD II-2-27.	Período de duplicación en la función exponencial	295

ACTIVIDAD II-2-28. Combinación de exponenciales entre sí y con otro tipo de funciones 299

ACTIVIDAD II-2-29. Modelos matemáticos: Primera parte 303

ACTIVIDAD II-2-30. Modelos matemáticos: Segunda parte 305

ACTIVIDAD II-2-31. Un ejemplo de modelo matemático 328

ACTIVIDAD II-2-32. Los modelos matemáticos y la computación 329

ACTIVIDAD II-2-33. El crecimiento de las poblaciones o una breve introducción a la Demografía 330

ACTIVIDAD II-2-34. Contaminación 330

ACTIVIDAD II-2-35. Recursos naturales 331

ACTIVIDAD II-2-36. Alimentos 331

ACTIVIDAD II-2-37. Industrialización 331

Tercer Acercamiento 358

ACTIVIDAD II-3-1. Discusión grupal 360

ACTIVIDAD II-3-2. Lectura "Los límites del crecimiento exponencial" 361

ACTIVIDAD II-3-3. Resumen de la lectura "Los límites del crecimiento exponencial" 376

CONCLUSIONES 379

REFERENCIAS DE ALGUNAS DE LAS LECTURAS DE ESTE TRABAJO

LECTURA I-18 . *Explicar y comprender* en: MARDONES,J. y URSUA,N.; "Filosofía de las ciencias humanas y sociales", Fontamara, Barcelona, 1982.

LECTURA II-1-1 . *El crecimiento de las poblaciones humanas*, en: "Ecología-Contaminación-Medio Ambiente", Interamericana, México, 1973.

Las lecturas II-1-3, II-1-4, II-1-6, II-1-9, II-1-10, II-1-11, II-2-7, II-2-10, II-2-13, II-2-17 aparecen en: "UN MEJOR PLANETA", Ediciones Especiales, Excelsior, 5 de junio de 1991, México, D.F.

LECTURA II-1-3 . *Ciudad de México.*

LECTURA II-1-4 . *Treinta Millones de Habitantes para el año 2000 en el D.F.*

LECTURA II-1-6 . *Abatir la Contaminación en la Ciudad de México.*

LECTURA II-1-9 . *La Basura, Causa de la Mayor Destrucción Ecológica.*

LECTURA II-1-10. *Daños Irreversibles al Planeta por Conflictos Bélicos.*

LECTURA II-1-11. *La urbanización originó la migración de aves, mariposas e insectos.*

LECTURA II-2-7 . *La población Mundial ha crecido en 50 años de 2500 a 6000 millones.*

LECTURA II-2-10. *El hombre, causa del deterioro ambiental.*

LECTURA II-2-13. *Obsoleto, el Sistema Hidráulico en la Zona Metropolitana.*

LECTURA II-2-17. *Desconocimiento tecnológico sobre desechos industriales : IPN.*

LECTURA II-2-1 . *Paradojas del Infinito*, en : NORTHROP,E.P.; "Paradojas Matemáticas", UTEHA, México, 1968.

LECTURA II-2-2 . *Números de Fibonacci y de Lucas*, en: GARDNER,M.; "Miscelánea Matemática", Salvat Editores, Barcelona, 1986.

LECTURA II-2-3 . *La formulación de Modelos*, en: JUDSON,H.F.; "La búsqueda de respuestas", Fondo Educativo Interamericano, México, 1984.

Las lecturas II-2-4, II-2-12, II-2-15 y II-2-16, aparecen en: ODUM,E.P.; "Ecología", Interamericana, México, 1988.

LECTURA II-2-4 . *Modelos.*

LECTURA II-2-12. *Contaminación e higiene ambiental.*

LECTURA II-2-15. *Recursos.*

LECTURA II-2-16. *Utilización de la producción primaria por el hombre.*

LECTURA II-2-5 . *El progreso científico-técnico y las matemáticas*, en: TIJONOV, A.N. y KOSTOMAROV,D.P.;"Algo acerca de la matemática aplicada", Editorial Mir, Moscú, 1983.

LECTURA II-2-6 . *Modelos y arquetipos*, en: "Modelos y Metáforas", Editorial Tecnos, Madrid, 1966.

LECTURA II-2-9 . *La población*, en: LEON PORTILLA,L.; "México: Tu historia", Salvat Editores, México, 1974.

LECTURA II-3-1 . *Los límites del crecimiento exponencial*, en: MEADOWS,D.H. et al.; "Los límites del crecimiento", F.C.E.,México, 1975.

INTRODUCCION

En general se acepta (SCHAAF, 1980) que las fuentes de la invención matemática residen, a veces, en las realidades del mundo que nos rodea y que muchos de los resultados matemáticos son parte de la base conceptual con que cuentan los científicos para la comprensión y descripción del mundo físico.

La educación institucionalizada reconoce la importancia de lo anterior y lo erige en objeto de enseñanza, apareciendo, no pocas veces, explícitamente formulado en el currículo. Tal es el caso del Colegio de Ciencias y Humanidades (CASANOVA,1974) que establece como un ideal por alcanzar, en cuanto a formación matemática, el que sus alumnos conozcan a esta ciencia en lo que tiene de lógica y de expresión numérica de la naturaleza y de algunos fenómenos sociales.

Hay en este ideal un claro deseo de conocer a las matemáticas en sí, y de aplicarlas. Aplicarlas tanto al mundo natural, como al mundo creado por el hombre, o sea, a la realidad.

En la actualidad este deseo sigue vigente, no sólo en México sino también en otras muchas partes. Al respecto, la opinión de la Comisión Internacional sobre Instrucción Matemática es que : "enseñar a los estudiantes cómo aplicar sus matemáticas debe ser un propósito principal para los años noventas" (NEWSON et.al.,1986). En forma parecida se manifiesta la NCTM (NCTM,1990) de los EE.UU. cuando recomienda: "Aplicar el proceso de modelación matemática a situaciones problemáticas del mundo real".

Desde el punto de vista pedagógico la relación Matemáticas-realidad se ha interpretado o utilizado de varias maneras. Algunas de ellas son las siguientes:

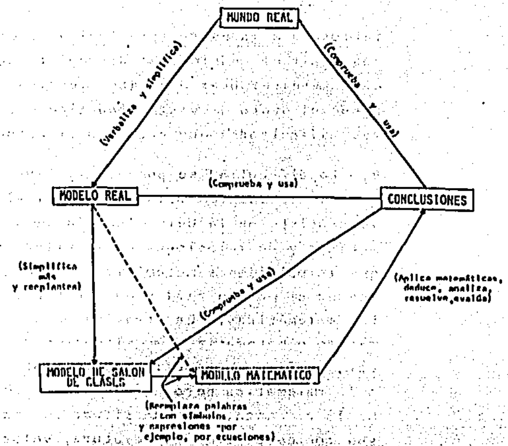
1. Enseñar contenidos matemáticos (JEREMY,1980) a partir de problemas reales.
2. Enseñar a aplicar contenidos matemáticos.
3. Enseñar matemáticas aplicadas (CASTELNUOVO,1980).
4. Enseñar cómo se han aplicado las matemáticas.

En estas cuatro directrices se ha realizado mucho trabajo. Aún con ello, y a decir de la ICMI (NEWSON et.al.op.cit.) poco se ha logrado. En particular, la forma en la cual la enseñanza tradicional ha enseñado a aplicar contenidos matemáticos ha recibido fuertes cuestionamientos (KLINE,1976).

Este trabajo se inscribe dentro de la cuarta interpretación y consiste en una Propuesta Educativa para enseñar la forma en la cual se han aplicado contenidos matemáticos, físicos, químicos, biológicos, sociológicos, etc., al estudio de ejemplos concretos de cosas, hechos o fenómenos que aparecen en la realidad.

REALIDAD Y MATEMATICAS CONSIDERACIONES GENERALES

Cuando se aborda matemáticamente un problema se habla de matematización, o de aplicar las matemáticas o de construir un modelo matemático. En esto no hay mucho acuerdo. Sin embargo, parece ser que el proceso que se sigue en su realización es en esencia el mismo. El siguiente diagrama representa dicho proceso (KERR y MAKI, 1979);



Sin pretender discutir exhaustivamente las diferentes etapas de él y de las transiciones de una a otra, es necesario puntualizar algunos aspectos.

1. La realidad es en extremo rica en cosas, hechos y fenómenos. No obstante, tener vivencias, experiencias y representaciones de ella puede ser complicado. Es difícil interaccionar con gases, o percatarse de lo que ocurre en las profundidades marinas, o en el interior del cuerpo humano, y casi imposible percibir lo que sucede en el interior de un átomo o en algún sistema planetario casi infinitamente distante de nosotros. Naturalmente no siempre es así y hay casos en que es fácil tener vivencias de la realidad.

2. Pasar del Mundo Real al Modelo Real, reclama una gran vivencia, conocimientos y experiencias, tanto del Mundo Real, como de distintas áreas del conocimiento -diferentes de las matemáticas- de las cuales surgirán los conceptos y relaciones que servirán para construir el Modelo Real. La vivencia, ya sea concreta o simbólica de la realidad es de fundamental importancia cuando se transita de la realidad al Modelo Real, o sea, a un conjunto de conceptos y de relaciones entre ellos. Pero, ¿cómo se podrán construir conceptos y relaciones entre ellos cuando se desconocen o son pobres, las vivencias que sirven de asideros a tales representaciones simbólicas?

3. Aún con todo, supongámos que fue posible construir un modelo real de una situación concreta. Su construcción no respeta disciplinas o áreas del conocimiento. Mucho menos se ciñe a índices de

textos, o a la estructura lógica de una disciplina. Es decir, al construir el modelo real de una situación, lo más probable es que haya menester usar elementos teóricos de más de una disciplina. Desde el punto de vista didáctico este aspecto es una de las mayores dificultades que encierra el estudio de la realidad.

4. La dificultad se pone de relieve al momento en que se lleva a cabo la transición del modelo real al modelo matemático. Este paso consiste en la determinación de un conjunto de conceptos matemáticos y de relaciones entre ellos que, sin embargo, no son más que formulaciones matemáticas de conceptos y relaciones que aparecen en el modelo real y que pertenecen a disciplinas distintas de las matemáticas. En otras palabras, al construir el modelo matemático o matematizar una situación concreta lo que se hace es expresar, en forma matemática, conceptos y relaciones que no pertenecen a la matemática pero, que sí son matematizables. Por lo tanto, cabe la pregunta, ¿en una situación real, qué se matematiza si no son conceptos como temperatura, velocidad, peso, aceleración, momento, concentración, PIB, ingreso per cápita, tasa de producción, o agregar, quitar, comparar, repartir, razón de cambio, etc.? Construir un modelo matemático únicamente con matemáticas es imposible. Por otro lado, pasar del modelo real al modelo matemático implica conocer matemáticas. Pero, en general, los conceptos y relaciones matemáticas que se necesitan en un "problema real" pueden ser muchos y muy diversos entre sí. Algo que es difícil de poseer cuando se está en un punto determinado de un curso de matemáticas.

5. La transición modelo real → modelo de salón de clases es, desde el punto de vista pedagógico, fundamental. Es el paso que tiene que ver con la decisión de convertir a la modelación matemática en objeto de enseñanza. En esta transición se corre el riesgo de que aparezcan los "trenes de salón de clase" que no transportan a nadie. En clase de matemáticas, que no es lo mismo en física o química, hay el peligro de que al pasar del modelo real al modelo de salón de clases se dé tal simplificación que la situación concreta tenga poco que ver con la realidad.

6. En la realidad se dan una amplia gama de problemas. Algunos los enfrentan la inmensa mayoría de los miembros de un cierto grupo social y otros son abordados sólo por grupos bastante minoritarios. Los primeros son los problemas cotidianos, de la vida diaria, comunes para "toda" la gente; los segundos son, por lo general, aquellos que corresponden al mundo del trabajo especializado. Pero, independientemente de que sean de un tipo o de otro, para abordarlos se necesita un entrenamiento, una formación. Para los

primeros, ésta se da en la vida diaria, social, cotidiana. En la interrelación diaria con nuestros semejantes, vamos construyendo los elementos teórico-formales que necesitamos para su racionalización. En cambio, para los segundos, hay necesidad de recibir una formación especial, lo cual normalmente ocurre en una institución educativa. Todos los miembros de un cierto grupo social pueden abordar y resolver una gran cantidad de problemas reales cotidianos, en virtud de que por su misma vida social han elaborado las conceptualizaciones necesarias para ello; pero, sólo algunos de ellos pueden abocarse a problemas, por ejemplo, científicos. Lo anterior nos deja en claro una cosa: para una determinada comunidad, en un cierto tiempo y lugar, existen dos grandes grupos de conceptualizaciones: la que comparten todos los miembros del grupo y que se adquieren y desarrollan por la vida social cotidiana, y aquella que la poseen sólo grupos particulares que han recibido una formación especializada. Esto es de particular importancia para el proceso enseñanza-aprendizaje, en especial para el de las matemáticas, ya que, en principio, se cuenta con dos grandes tipos de "problemas" reales a abordar, cada uno con sus consecuentes dificultades. Construir el modelo real de un problema real puede ser "más o menos fácil" dependiendo del tipo de problema que se tenga y del individuo que lo enfrente; si es cotidiano para él, le será fácil y si no lo es, le será difícil. Para un biólogo, muchos problemas de la Biología son cotidianos, para un estudiante del bachillerato, no tienen porque serlo.

7. La cantidad y profundidad de experiencias y contenidos cognitivos a que se debe recurrir para transitar por los distintos aspectos del proceso de matematización parecen ser muy variados, dependiendo del problema real de que se trate. Enumeraremos sólo algunos casos:

CASO 1. Mucha y profunda experiencia del mundo real, pocos y simples contenidos cognitivos de áreas del conocimiento ajenas a las matemáticas y simples contenidos de éstos últimos.

CASO 2. Poca y superficial experiencia del mundo real, pocos y difíciles contenidos cognitivos de áreas del conocimiento distintas a las matemáticas y pocos y simples contenidos matemáticos.

CASO 3. Pocas, pero profundas experiencias del mundo real, muchos y simples contenidos cognitivos de áreas del conocimiento ajenas a las matemáticas y pocos y simples contenidos cognitivos matemáticos. Y, así sucesivamente, cuantas combinaciones entre vivencias y experiencias del mundo real, conocimientos en áreas distintas de las matemáticas y conocimientos matemáticos, se puedan construir.

En conclusión, podemos afirmar que enseñar "aplicaciones de las matemáticas" con puras matemáticas es imposible y que su realización reclama, tanto del profesor como del alumno, conocimientos sobre otras áreas del saber. Este es uno de los más grandes obstáculos con que se encuentra el deseo de enseñar modelos matemáticos.

LAS APLICACIONES DE LAS MATEMATICAS EN LA ENSEÑANZA

Es difícil determinar cómo se lleva a la práctica la enseñanza de la relación matemáticas-realidad mediante los problemas que se identifican en esta última. Con el ánimo de tener alguna idea de cómo se realiza lo anterior, podrían utilizarse, simultáneamente, los siguientes medios de investigación: revisión de los documentos oficiales, entrevistas a profesores, y análisis de libros de texto.

En la enseñanza de la relación matemáticas-realidad, dos aspectos son los fundamentales: el tipo de problemas, supuestamente reales de que se parte y, la didáctica utilizada para su enseñanza.

Vislumbrar el tipo de problemas en donde aparece la relación matemáticas-realidad, y que se abordan en el salón de clases, se puede lograr analizando los libros de texto que se utilizan en la instrucción matemática, ya que éstos son uno de los recursos fundamentales de que normalmente se vale un profesor para instrumentar su curso.

En los libros de texto de matemáticas -desde el Papiro de Rhin, hasta los actuales- usualmente lo que se denominan "aplicaciones de las matemáticas" son ejemplos de cómo determinados conceptos matemáticos se utilizan en la solución de problemas adjetivados como reales. La temática que abordan los problemas es variada. Depende de la rama de las matemáticas de que se trate y del nivel al que se esté estudiando. En este momento cabe hacer notar de que cuando se hable de "aplicaciones de las matemáticas" estas se pueden presentar, tanto en las mismas matemáticas, como en campos distintos de ellas.

Algunos libros incluso prescriben procedimientos para resolver este tipo de problemas. A continuación se reproducen algunas páginas del libro "ALGEBRA Y TRIGONOMETRIA CON GEOMETRIA ANALITICA" de Earl W. Swokowski (1990) que muestra lo anterior.

2.2 Aplicaciones

En todos los campos que tienen que ver con números, se usan fórmulas o ecuaciones con variables. En ciertas aplicaciones es necesario encontrar la solución para una variable particular, en términos de las variables restantes que aparecen en la fórmula, como se ilustra en los siguientes tres ejemplos.

EJEMPLO 1 Si se invierte una cantidad de dinero P a una tasa de interés simple de r por ciento anual, el interés I al final de t años está dado por $I = Prt$. Resolver la ecuación despejando r en términos de las otras variables.

SOLUCIÓN Empezamos por escribir

$$Prt = I.$$

Para despejar r, multiplicamos ambos lados por $1/Pt$ y obtenemos

$$\left(\frac{1}{Pt}\right)Prt = \left(\frac{1}{Pt}\right)I.$$

De donde $$r = \frac{I}{Pt}.$$ ■

EJEMPLO 2 La relación entre la temperatura F en la escala Fahrenheit y la temperatura C en la escala Celsius está dada por

$$C = \tfrac{5}{9}(F - 32).$$

Despejar F en términos de C.

SOLUCIÓN Podemos proceder como se ve a continuación:

$$C = \tfrac{5}{9}(F - 32)$$

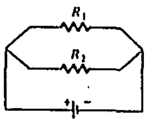
$$\tfrac{9}{5}C = F - 32$$

$$\tfrac{9}{5}C + 32 = F$$

$$F = \tfrac{9}{5}C + 32$$ ■

EJEMPLO 3 La fórmula $R = R_1R_2/(R_1 + R_2)$ se usa en la teoría de la electricidad para encontrar la resistencia total R, cuando dos resistencias R_1 y R_2 están conectadas en paralelo, como se ilustra en la Figura 2.1. Despejar R_1 en términos de R y R_2.

FIGURA 2.1



SOLUCIÓN Las ecuaciones siguientes son equivalentes a la ecuación dada.

$$R = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$$

$$(R_1 + R_2)R = (R_1 + R_2)\left(\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}\right)$$

$$R_1R + R_2R = R_1R_2$$

$$R_1R = R_1R_2 - R_2R$$

$$R_1R - R_1R_2 = -R_2R$$

$$R_1(R - R_2) = -R_2R$$

$$R_1 = \frac{-R_2R}{R - R_2}$$

Una forma alternativa es $$R_1 = \frac{R_2R}{R_2 - R}.$$ ■

En la vida diaria, a menudo ocurren problemas que se pueden resolver mediante ecuaciones u otros medios matemáticos. Algunos problemas se plantean verbalmente, de una persona a otra. Otros se enuncian por escrito, como en libros de texto. Por esa razón, los estudiantes y profesores de matemáticas los llaman a menudo "problemas verbales". También se refieren a ellos como "problemas prácticos". Usaremos el término "problema aplicado" para cualquier problema que se refiera a una aplicación de matemáticas en algún otro campo.

2.1 Aplicaciones 59

Debido a la ilimitada variedad de problemas aplicados, es difícil establecer reglas específicas para encontrar soluciones. Sin embargo, es posible desarrollar una estrategia general para resolver dichos problemas. A continuación se dan algunas guías que pueden ser útiles cuando se puede formular el problema en términos de una ecuación en una variable.

Pasos a seguir para resolver problemas aplicados

1. Si el problema se enuncia por escrito, léalo cuidadosamente varias veces y piense en los datos que se dan, junto con la cantidad desconocida que se debe encontrar.
2. Denote la cantidad desconocida mediante una letra. ¡Éste es uno de los pasos cruciales en la solución! Las frases que contienen palabras como "qué", "encuentre", "cuánto", "a qué distancia" o "cuándo", nos indican la cantidad desconocida.
3. Si es posible, trace un croquis con las anotaciones apropiadas.
4. Haga una lista de los datos conocidos, junto con todas las relaciones que contienen la cantidad desconocida. A veces se pueden describir relaciones por medio de una ecuación en la que aparecen enunciados escritos, en vez de letras o números, en uno o en ambos lados del signo igual.
5. Después de analizar la lista del paso 4 y tal vez leyendo el problema varias veces, formule una ecuación que describa precisamente lo enunciado en palabras.
6. Resuelva la ecuación formulada en el paso 5.
7. Verifique las soluciones obtenidas en el paso 6 refiriéndolas al enunciado original del problema. Observe cuidadosamente si la solución concuerda con las condiciones dadas.
8. No se desanime si no puede resolver un problema dado. Se requiere mucho esfuerzo y práctica para adquirir habilidad para resolver problemas aplicados. ¡Siga intentando! ■ ■ ■

EJEMPLO 4 Las calificaciones de un estudiante son 64 y 78. ¿Cuánto debe obtener en un tercer examen para tener un promedio de 80?

SOLUCIÓN Sigamos los pasos anteriores a este ejemplo. Si leemos el problema con cuidado, como sugiere el paso 1, notamos que la cantidad desconocida es la calificación del tercer examen. De acuerdo con el paso 2, utilizamos una letra y escribimos:

$$x = \text{calificación del tercer examen.}$$

En este problema no es apropiado trazar un croquis como se menciona en el paso 3, así que pasamos al punto 4 y buscamos una relación que contenga x. Como el promedio se obtiene al sumar los tres valores y dividiendo por 3, podemos escribir

$$\frac{64 + 78 + x}{3} = \text{promedio de las tres calificaciones 64, 78 y } x.$$

Del enunciado del problema tenemos que

$$80 = \text{promedio deseado.}$$

La principal limitación de presentaciones como la anterior es lo simplificada, reducida y descontextualizada que se presenta la situación, ya trátese de edades, engranes, balanzas, mezclas, costos, velocidades, etc. He aquí una muestra: el Ejemplo 3 de Swokowski es un tópico de Física que es de fundamental importancia en la teoría de circuitos eléctricos. A este tópico, un libro antiguo de Física para secundaria (DOMINGUEZ,R.R.,1969) le dedica seis páginas escritas con letra pequeña y que sin embargo, Swokowski, lo trata en tres renglones. El problema en los textos de matemáticas, es el mismo que en los de Física : dan por conocido aquello que no es su campo de estudio. Presentaciones como las anteriores no son escasas en los libros de texto de matemáticas, bien sea que traten de Aritmética, Algebra, Geometría Euclideana o Cálculo Diferencial e Integral. Casi se puede decir que todos los libros de texto, de matemáticas elementales, no dejan de mencionar a las aplicaciones de éstas.

Los cursos de Física y Química, pero sobre todo los primeros, son ejemplos claros de "aplicaciones de las matemáticas". En ellos, el énfasis está puesto en los contenidos físicos y químicos y se considera a las matemáticas como una herramienta que ayuda a estudiar los problemas propios de tales ciencias. En no pocas ocasiones, en estos cursos se dan por conocidos los contenidos matemáticos y lo más que se llega hacer es un "recordatorio" que consiste en un listado de fórmulas o algoritmos. Por cuestiones ideológicas, muchas veces los profesores privilegian "su" área de conocimiento y llegan al extremo de mostrar repulsa o aversión hacia otras.

PROPUESTA METODOLOGICA

En términos de las consideraciones anteriores, la segunda parte de este trabajo, es una propuesta educativa que tiene la intensión de servir de orientación para enseñar, a estudiantes que han cursado mínimamente la secundaria, cómo se han aplicado las matemáticas, junto con otras áreas del conocimiento, al estudio de situaciones concretas.

EJEMPLOS DE SITUACIONES CONCRETAS

Por situación concreta se está entendiendo cualquier objeto material, animado o inanimado, así como algún hecho social o fenómeno de la naturaleza. Como posible fuente de situaciones se pueden utilizar textos que estudien cosas, hechos o fenómenos en términos de ciencias básicas, como podrían ser Fisiología, Bioquímica, Geofísica, Ingeniería, Arquitectura, Demografía, Geografía, etc. Entre menos básico sea el campo de estudio al que pertenece la situación más significado real tendrá y así será la riqueza conceptual que se necesite para abordarla. Como ejemplos de tales situaciones estarían las siguientes:

- La fisiología del cuerpo humano a grandes alturas.
- La contaminación atmosférica en los alrededores de una fábrica.
- El funcionamiento de una bomba para elevar agua.
- Los procesos demográficos y la población en la ciudad de México.

Veamos, con un poco más de detalle, un ejemplo de problema concreto que se considera es posible de abordar. Es algo que se deriva de un hecho aparentemente simple: una actividad deportiva.

FISIOLOGIA DE LAS GRANDES ALTURAS

El deporte es una actividad de carácter lúdico. Algunos dicen que en él se resuelve una especie de instinto animal por la agresión. Sin embargo, sea cual fuere la explicación psicológica de su origen, el hecho es que el deporte ha llegado a constituir una actividad que en parte satisface la necesidad humana de la diversión; es un medio que ayuda a conservar la salud y en no pocos casos, se ha convertido en toda una actividad profesional.

En torno al deporte se ha estructurado toda una serie de actividades económicas, políticas, tecnológicas y científicas encargadas de organizarlo, promoverlo, mantenerlo, desarrollarlo y así poder proporcionar los medios materiales adecuados, fundamentar o comprender en términos científicos su realización y en especial, aclarar la forma en que el funcionamiento del cuerpo humano se ve alterado por la realización de uno en especial.

La actividad corporal que realiza un deportista no es igual para todos ellos. Tampoco son iguales las condiciones del medio físico ni las sociales en las cuales se realiza. Esto ha planteado el problema de conocer la forma en la cual la práctica de determinado deporte, modifica el funcionamiento de nuestro organismo, en virtud de realizarse en un medio físico diferente al que normalmente está habituado. Las razones, al menos las importantes, que justifican la solución de este problema son claras: se quisieran prever las posibles situaciones que pusiesen en peligro la salud o la vida misma de un deportista, o en su defecto, tener elementos para diagnosticar y aplicar un tratamiento médico adecuado a los trastornos de salud que se hayan presentado.

Vistas así las cosas, consideremos un deporte en particular: **el alpinismo.** Hace algún tiempo, un mexicano escaló el monte Everest, cuya altura es de 8 848 m . Para lograrlo tuvo que resolver numerosos problemas. La solución de algunos de ellos sólo se pudo lograr gracias al concurso del medio social. Otros, solamente a su decisión y actividad personal. Entre los problemas resueltos cabe señalar los siguientes :

- Entrenamiento físico adecuado.
- Recursos económicos para la adquisición del equipo adecuado.
- Poseer los conocimientos pertinentes acerca del comportamiento de su organismo en las condiciones físicas en que se encontraría.
- Tener conocimientos de los fenómenos físicos con que se podría encontrar, en virtud de la geografía del lugar de ascenso.
- Problemas de carácter legal derivados del hecho de que un individuo salga de su país e ingrese a otro.
- Poseer recursos económicos necesarios para el transporte y mantenimiento durante el tiempo total que implica esta actividad.
- Problemas familiares derivados de la empresa.
- Tener conocimientos detallados de su estado de salud en el tiempo inmediato al ascenso.
- Problemas de comunicación con el resto del mundo durante el tiempo de ascenso.
- Contar con medidas de seguridad permanentes en tanto dure el ascenso.
- Conocimiento de la geografía que encontraría en el ascenso.

Sin el concurso de la sociedad,muchos de estos problemas simplemente no los hubiera podido resolver, en especial los relacionados con conocimientos : desarrollar los principios teóricos y la tecnología requerida para la fabricación de los instrumentos adecuados, para el ascenso, la comprensión de la fisiología del cuerpo humano, cuando se encuentra a grandes alturas sobre el nivel del mar, etc. Por su carácter social y acumulativo del conocimiento, éste no se puede obtener si no es gracias a la participación del medio social. El deporte profesional, como cualquier otra actividad altamente especializada es, en general, el producto de procesos sociales complejamente estructurados.

Detengámonos en uno de los problemas anteriormente enlistados: conocer las alteraciones, y sus causas, que experimenta el funcionsmiento del cuerpo humano cuando éste no está habituado a encontrarse a grandes alturas. Este problema no sólo es importante para el alpinismo. También está relacionado fuertemente con la aviación que se efectúa a grandes alturas y es un ejemplo de situación concreta que puede estudiarse en el salón de clases.

ALUMNOS A QUIENES SE DIRIGE LA PROPUESTA

Una situación concreta cuyo estudio reclame de contenidos físicos, químicos, biológicos y matemáticos sería muy difícil tratarla con alumnos que no tuviesen tales conocimientos, aunque sean elementales. Por tal razón se considera que un estudiante que se encuentra en el bachillerato, y que ha cursado la Educación Media, está en posibilidades de abordar un gran número de situaciones, a cierto nivel, que reclamen saberes de dos o más disciplinas, tanto científicas como humanísticas. Estudiar una situación con las características antes anotadas no se puede llevar a cabo en un curso normal de matemáticas y en una sesión de pocas horas ; es necesario dedicarle un espacio de tiempo adecuado. Un curso, de carácter extracurricular, que esté didicado, todo él, al estudio de una sóla situación podría ser la alternativa.

SUGERENCIA METODOLOGICA

El estudio de la situación se lleva a cabo mediante tres acercamientos que se distinguen, o caracterizan, en dos aspectos : por la complejidad en los aprendizajes deseados y por las características de las actividades de aprendizaje que se realizan. En cada acercamiento se realizan todo un conjunto de actividades, con la finalidad de propiciar los aprendizajes deseados. Estas diversas actividades se organizan para efectuarse en las distintas sesiones destinadas al estudio de la situación.

PRIMER ACERCAMIENTO

El primer acercamiento se caracteriza porque prácticamente todas las actividades que realiza el estudiante las lleva a cabo en base a su experiencia personal, únicamente con lo que "cree", lo que sabe, de manera un tanto intuitiva, nada formal y tendrá los siguientes objetivos :

* **Que el estudiante se familiarice, haga suyo, se involucre en la situación problemática.**

  La experiencia enseña que sin compromiso, interés, convicción o necesidad de resolver algún problema, es muy difícil intentar la búsqueda de su solución y en consecuencia, lograrla.

  Podemos afirmar que se inteta resolver un problema cuando se tiene, cuando se está involucrado en él, cuando es nuestro. En caso contrario es difícil siquiera intentar su búsqueda. Sin embargo, se es claro en lo difícil que resulta el lograr que los estudiantes "hagan suyos" problemas que en última instancia no tienen porque serlos para ellos. Tal vez este primer propósito es el más difícil de alcanzar.

  Alguien está involucrado en un problema cuando se percata de algún o algunos de los elementos que lo forman, de los datos, dificultades, incógnitas, relaciones entre datos e incógnitas que lo constituyen. Cuando se está involucrado en un problema se piensa de una u otra forma, reiteradamente se replantea, tratando de acercarse a él por diferentes ángulos, se discute con alguien mas o con uno mismo, se consideran con detenimiento los recursos que se poseen para su solución. Es este "darle de vueltas" constantemente lo que nos lleva a aclarar dificultades, a identificar sus elementos, a formular sus posibles soluciones, a tratar de simplificar sus dificultades. En suma, a "vivir" el problema.

* **Que el estudiante recuerde sus experiencias y conocimientos relacionados con la situación problemática.**

Tanto la solución de un problema como los nuevos aprendizajes que un estudiante puede alcanzar no se dan en el vacío, sobre la nada. Al contario, éstos se realizan tomando como fuente de partida sus vivencias, experiencias y conocimientos anteriores. Todo aprendizaje nuevo, para que sea significativo, tiene que "anclarse" en las vivencias, experiencias o conocimientos anteriores. Precisamente son éstos los que deberán transformarse de alguna manera para erigirse en nuevos conocimientos, en virtud de las experiencias de enseñanza-aprendizaje. De acá la importancia que reviste el hecho de que un estudiante tenga claro y sea consciente de los conocimientos que posee en relación a una nueva problemática. Puede ocurrir que en relación al nuevo aprendizaje, los conocimientos previos sean incompletos, incorrectos o inconexos, pero es sobre ellos, y su transformación, sobre los que se construirá el nuevo saber. Tanto para el alumno como para el profesor tiene importancia el ubicar y explicitar los conocimientos, con el objeto de completarlos, corregirlos y/o reestructurarlos, con miras a la solución del nuevo problema.

* **Que el estudiante haga una primera identificación de los elementos de la situación problemática.**

En una situación concreta, aislada -por fines metodológicos-, se presentan una gran diversidad de elementos o partes constituyentes de ella. Algunos son relevantes para el estudio que se pretende hacer; otros, en cambio, no tienen relación con la solución del problema. Por esto es importante que los estudiantes identifiquen, con la mayor claridad posible, el mayor número de elementos que componen la situación concreta.

* **Que el estudiante se de cuenta, cobre consciencia, de que entre las distintas partes de la situación existen relaciones, y que es precisamente de estas relaciones, de donde se obtendrá la solución del problema planteado por la situación concreta.**

Los diferentes elementos de una situación pueden estar relacionados, entre ellos, de múltiples maneras. Puede ser que estén presentes relaciones cualitativas, cuantitativas, de orden, causales, etc. Vista la situación concreta como un sistema, no sólo es importante reconocer sus partes, sino también la relación que existe entre ellas.

* Que el estudiante tenga una primera aproximación a lo que se entenderá por "explicación" o "comprensión" de la situación concreta. Todo fenómeno de la naturaleza se puede pensar como un efecto debido a determinadas causas. Por lo tanto, su explicación consiste en el establecimiento de las distintas relaciones de tipo causal que conjuntamente dan cuenta del fenómeno en cuestión. Las relaciones de tipo causa-efecto, que desde el punto de vista lógico tienen una estructura de proposiciones condicionales, son leyes que reducen al fenómeno bajo estudio a un caso particular. Esta es precisamente la característica fundamental de toda explicación : incluir en una generalidad un fenómeno en particular.

  A diferencia de un fenómeno natural, que puede incluirse en una generalidad, un hecho social es algo casuístico, específico. Por lo tanto, parece que no tiene mucho sentido hablar de "causas" como se hace para un fenómeno de la naturaleza, sino de los factores que lo hacen comprensible. Identificar estos distintos aspectos, tanto para los fenómenos naturales, como para los hechos sociales, es fundamental para un pensamiento racional.

SEGUNDO ACERCAMIENTO En el segundo acercamiento se inicia la formalización. Es la parte más larga y pesada por las numerosas actividades que se realizan con el fin de que los alumnos recuerden o lleguen a conocer los conceptos, relaciones, algoritmos y métodos, que son necesarios para la comprensión del problema y su solución. Es en esta etapa, digamos, cuando se elabora el cúmulo de conceptos teóricos indispensables para el estudio de la situación.

TERCER ACERCAMIENTO En el tercer acercamiento se aborda la solución al problema planteado en el primero, a través de la integración de lo estudiado en el segundo. En otras palabras, se resuelve un problema como forma de integrar conocimientos aislados.

B I B L I O G R A F I A

CASANOVA,P.G.,"Esta es la Nueva Universidad. Es la Misma Universidad que Cambia y se Renueva" en : DOCUMENTA No.1,CCH-UNAM,México,1979.

CASTELNUOVO,E.y BARRA,M.,"La Mathématique dans la Réalité". France:Editions CEDIC, 1980.

DOMINGUEZ,R.R.,"Curso Elemental de Física".México:Porrúa,1969.

JEREMY,L.,"Activites sur Quelques Themes D'Algebre". France:Editions CEDIC,1980.

KERR,D.R. and MAKI,D.,"Mathematical Models to Provide Applications in the Classroom" en APPLICATIONS IN ACHOOL MATHEMATICS",1979 Yearbook. EEUU: NCMT, 1979.

KLINE,M., "El Fracaso de la Matemática Moderna". España:Siglo XXI editores,1976.

HOWSON,A.G. and WILSON,B.,"School Mathematics in the 1990s"; ICMI Study Series. EEUU:Cambridge University Press,1990.

------"Curriculum and Evaluation. Standards for School Mathematics". EEUU:NCTM,1990.

PIAGET,J. et al.,"La enseñanza de las matemáticas modernas". España:Alianza Editorial, 1980.

SCHAAF,W.L. "Sobre la Modernidad de las Matemáticas Modernas", en: La enseñanza de las matemáticas modernas, Hernández,J.(ed.). Madrid: Alianza U., 1980.

SWOKOWSKI,E.W. "Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica". México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1990.

CAPITULO I

MARCO TEORICO

INTRODUCCION

Como se dijo anteriormente, este trabajo es una propuesta educativa: propone enseñar algo, de una particular manera, a estudiantes con ciertas características.

Naturalmente que lo que se propone enseñar, así como la forma específica de hacerlo, tienen sus razones, sus justificaciones. Hay sendos porqués para el objeto de enseñanza, para la didáctica seleccionada y para la forma de organizar el proceso enseñanza-aprendizaje.

Por lo anterior, antes de pasar a desarrollar la propuesta como tal, hay necesidad de precisar, en la medida de lo posible, lo que se entenderá por cada uno, de un cierto número de conceptos o aspectos fundamentales para la propuesta. Existen planteamientos o formulaciones teóricas distintas para algunos de estos conceptos o aspectos, por lo que se hace necesario aclarar, o poner de manifiesto, la formulación o concepción que se acepta en este trabajo. Sin estas precisiones sería difícil entender el planteamiento mismo del problema que se aborda, las propuestas que se hacen y los fundamentos en que se apoyan. En resumen, el propósito de este CAPITULO es dar el encuadre teórico y conceptual, es decir, aquellos elementos teóricos y conceptos básicos, que permitan justificar distintos aspectos de la propuesta que se hace.

En una propuesta educativa hay diversos aspectos que se deben precisar y justificar. Para nuestro caso son los siguientes:

1. Propuesta educativa.
2. Estudio científico de una situación concreta real.
   - Realidad.
   - Situación Concreta real.
   - Estudio científico.
     + Concepto.
     + Leyes.
     + Teorías.
     + Modelo.
     + Métodos.
   - Matemáticas.
     + Matematización o modelo matemático.
3. FILOSOFIA DE LA EDUCACION o por qué es conveniente estudiar la forma en la cual se han utilizado conceptos, relaciones, métodos y algoritmos, provenientes de diferentes áreas del conocimiento, en el estudio científico de una situación concreta real, como puede ser un hecho social o un fenómeno de la naturaleza.
4. TEORIA DEL CONOCIMIENTO o qué es conocer algo.
   - Medios de llegar a conocer algo.
5. TEORIA DEL APRENDIZAJE. El aprendizaje como medio de adquirir conocimientos.
   - Aprendizaje significativo.
   - Estructura cognitiva de un alumno del bachillerato.
   - Modelo de aprendizaje de estudios científicos de situaciones concretas reales.
6. Didáctica para la enseñanza de la forma en la cual se han utilizado conceptos, relaciones, métodos y algoritmos, provenientes de diferentes áreas del conocimiento, en el estudio científico de una situación concreta real, como puede ser un hecho social o un fenómeno de la naturaleza.
7. Modelo de Programa para un curso.

En general se puede decir que la conceptualización y los fundamentos teóricos para los aspectos anteriores los proporcionan áreas del conocimiento como la Filosofía, la Sociología, la Psicología y las propias Matemáticas, todas ellas en estrecha relación con la educación.

1. PROPUESTA EDUCATIVA Es la propuesta (Suplemento de la Gaceta CCH, Enero 29 de 1990) estructurada y fundada que tiende a modificar algún aspecto del proceso educativo en alguna institución, tales como currículum, métodos de enseñanza, evaluación de una asignatura o algunos de sus temas. Debe contener el marco teórico conceptual, explicitación de su contribución o ventajas para la docencia, así como las sugerencias para su aplicación.

2. ESTUDIO CIENTIFICO DE UNA SITUACION CONCRETA REAL El hombre ha construído representaciones simbólicas del mundo o de la realidad en que se halla. Hechos a "imagen y semejanza nuestra" tales representaciones pueden verse como imagen, modelo o réplica de cómo creemos que es el mundo, de cómo percibimos lo que ocurre o lo que hay en nosotros mismos o en nuestro entorno : mitos, ritos y teorías son ejemplos concretos de construcciones conceptuales de la realidad.

REALIDAD Principio y fin de la reflexión humana, la realidad es difícil de definir, de conceptualizar. Como que intuitivamente sabemos lo que se quiere expresar por realidad; es más, podemos señalar o enumerar objetos o cosas que forman parte de la realidad. Así, LEWIS CAROLL(1972) dice: " ...en el mundo hay cosas y éstas tienen atributos". Es frecuente hablar de la realidad o sobre la realidad sin decir lo que por ésta se entiende. Los siguientes son algunos ejemplos: "El hombre obtiene el conocimiento de la realidad de una manera espontánea" (GRZEGORCZYK,1967); "En ciertos períodos, cuando se exploran científicamente nuevos niveles de la realidad, la modificación de las categorías se realiza con mayor rapidez" (GORTARI,1964); "La lógica marxista, por el contrario, adopta una posición inequívoca sobre las relaciones entre las leyes y formas del pensamiento y el resto de la realidad" (NOVACK, 1982); "...un modelo útil describe un mundo imaginario que, por ser suficientemente complejo y semejante a la realidad..." (CAFFE, 1963); "La física intenta representar la realidad" (BUNGE,1972). Cuando así se hace, tácitamente se da por hecho de que se sabe de quién se está hablando, a qué nos referimos. En este trabajo pudimos seguir el mismo camino : dejar indefinido el término y confiar en que todos entendemos por realidad más o menos algo. Sin embargo, se ha creído conveniente proponer como significado para este término una definición del tipo descriptivo (COPI,1974), que si bien puede ser muy discutible, es adecuada para los fines de este trabajo. Por lo tanto, para nosotros, realidad es la unión del mundo natural y del mundo creado por el hombre. Por mundo natural se entiende todo aquello que no es hechura humana y que, en principio, podemos aceptar que existe, independientemente de él. En cambio, por mundo creado por el hombre, entendemos aquellos productos como la religión, la técnica, la familia, la ciencia, la organización política, social, económica, etc., que han surgido del trabajo del hombre en un medio social.

SITUACION CONCRETA REAL

Una situación concreta real será cualquier elemento que pertenezca, ya sea al mundo natural (como puede ser una cosa, animada o inanimada, o un determinado fenómeno) o al mundo creado por el hombre, como lo es un objeto o un hecho de carácter eminentemente social.

PROBLEMA

El hombre forma parte de lo que hemos denominado realidad. Su vida diaria no es otra cosa que el conjunto de interacciones entre él y los mundos natural y social en que se encuentra inmerso. Su sobrevivencia, tanto como ser biológico, como social, está garantizada en la medida en que pueda satisfacer una serie de necesidades básicas. Sin embargo, algo que por lo general ocurre es que, en los intentos por satisfacer necesidades, aparecen dificultades que limitan o bloquean tales tentativas. En estos casos, generalmente decimos que el hombre enfrenta **problemas**. Por la importancia que el concepto **problema** tiene (y porque lo vamos a utilizar frecuentemente) y con el ánimo de ser un poco más precisos, seguimos a BRUNER(1967) (quien a su vez se basa en el filósofo inglés-WALDON) en la distinción que éste acepta entre **dificultad**, **problema** y **acertijo**.

Una **dificultad** es una inconveniencia con definición mínima. Es un estado en el que sabemos que queremos ir de aquí a allá, pero ambos puntos están bastante vagamente definidos y no tenemos mucha idea de cómo trasladarnos.

Un **enigma**, o **acertijo**, en este caso, es en cambio, un juego en el que hay un conjunto de datos conocidos y otro de restricciones al modo de proceder, ambos expresados con precisión. Un acertijo requiere también que vayamos de aquí a allá, y hay cuando menos una ruta admisible para hacerlo, pero la elección de esa ruta está sujeta a reglas precisas que no deben ser infringidas.

Un **problema** es una dificultad a la que intentamos dar forma de enigma. Resolvemos un problema o hacemos un descubrimiento, cuando damos forma de enigma a una dificultad, para convertirla en un problema que pueda ser resuelto de manera tal, que nos lleve a donde queremos ir. Es decir, refundimos la dificultad en un molde con el que sabemos cómo trabajar, y en seguida la trabajamos. Mucho de lo que llamamos descubrimiento, consiste en saber cómo imponer una forma de índole practicable a varias clases de dificultades. Una parte pequeña pero decisiva del descubrimiento de primer orden, es inventar y desarrollar eficaces moldes o "formas de enigmas".

EXPLICACION Y COMPRENSION

En el transcurso de su historia el hombre ha enfrentado un gran número de problemas. No obstante, desde el punto de vista cualitativo, un tipo particular de problemas ha sido sistemáticamente enfrentado : aquel que tiene que ver con la **explicación** o **comprensión** de lo que ocurre en la realidad. Lo que se da en la realidad son hechos. Un hecho (KNELLER,1981), puede ser, según los casos, natural (un fenómeno o un proceso natural) o un hecho humano (por ejemplo, un fenómeno social). Ejemplos de hechos podrían ser la caída de los cuerpos, la oxidación del Fe, la desigualdad en la distribución del poder político entre distintos sectores de la sociedad mexicana, el desempleo en México, la disminución del poder adquisitivo de la clase trabajadora en México, durante el gobierno de CSG, el vuelo de las aves, etc.

La **explicación** de hechos ha sido el objetivo de la magia, de la religión y de la ciencia. En este trabajo estamos interesados sólo en cuanto quehacer de la ciencia. Algunos pensadores (DILTHEY, 1980) han hecho la distinción entre **explicación** y **comprensión** , aplicando el primer concepto a las razones que dan cuenta de un hecho natural y el segundo a aquellas que se refieren a un hecho del espíritu o social. Para DILTHEY una explicación tiene que ver con la causa, y la comprensión con el sentido. En este trabajo entenderemos explicación en el sentido causal. **Explicar causalmente** un proceso (REICHENBACH,1975) significa poder derivar deductivamente de leyes y condiciones concomitantes una proposición que describe tal proceso.

Veamos el concepto de **comprender**. Los hechos humanos y sociales, a diferencia de los naturales, tienen un sentido. En ellos se exteriorìza la vida psíquica de los individuos. Por lo tanto, estamos de acuerdo con DILTHEY en que **comprender** significa, pasar de una exteriorización del espíritu a su vivencia originaria, es decir,al conjunto de actos que producen o han producido bajo las formas más diversas -gesto, lenguaje, objetos de la cultura, etc.- la mencionada exteriorización.

METODO CIENTIFICO

Comprender o explicar hechos es el objetivo de la ciencia. Por lo tanto cabe preguntarse: ¿existe algún procedimiento o procedimientos para alcanzar tal fin? Esta pregunta nos lleva directamente al método de la ciencia. Si por "método" se entiende un procedimiento único, inflexible, formado por una serie de etapas que se siguen en el tiempo de manera ordenada, en tal sentido no existe (FEYERABEND,1981). En lo que se está de acuerdo, y que es a lo que se denomina método científico es el procedimiento que partiendo de la observación (COHEN y NAGEL, 1973) y reconocimiento de un problema,en algún ámbito de la realidad,comprende actividades como la observación de hechos y su registro en datos, la medición, la formulación de hipótesis, deducción de implicaciones a partir de la hipótesis, contrastación de las implicaciones con los resultados que se obtienen de nuevas observaciones o de experimentos y desechar, modificar o aceptar temporalmente la hipótesis. Parece claro que en toda investigación que tiende a explicar o comprender algún hecho real, están presentes, de una u otra forma, las anteriores actividades.

CONCEPTO, LEYES, TEORIAS Y MODELOS

Un **problema** que consista en una explicación o comprensión de un hecho, sólo se resuelve hallando alguna conexión general entre el y otros hechos. En virtud de tal conexión se comprendería que hechos aparentemente aislados son en realidad hechos ordenados.
La ciencia busca no solamente registrar hechos particulares sino descubrir regularidades entre ellos. Estas regularidades encontradas con el método resumido anteriormente, se estructuran (BUNGE, 1981) formando **conceptos,leyes y teorías**. Los **conceptos** (CARNAP, 1969) pueden ser de tres tipos: **clasificatorios**, son aquellos que ubican los objetos a los que se refieren dentro de una cierta clase; **comparativos**, son aquellos que indican cómo se relaciona un concepto con otro, mediante las expresiones "más que", "menos que", "igual a", "débil-fuerte", "ágil-lento"; **cuantitativos**, son aquellos que indican valores numéricos para conceptos comparativos, permitiendo la aplicación del cálculo para ellos.
Las **leyes** de la ciencia son solamente enunciados que expresan regularidades entre hechos. La ciencia comienza con observaciones directas de hechos aislados. No hay otra cosa que sea observable, por cierto. Las regularidades se descubren solamente cuando se comparan muchas observaciones. Las leyes se usan para **explicar** hechos ya conocidos y para **predecir** hechos aún desconocidos. Lo que queremos decir con explicar un hecho conocido es que se incorpora ese hecho a una ley general. Si los hechos no pueden ser conectados con otros hechos mediante una ley, por lo menos, enunciada explícitamente o entendida tácitamente, no suministra explicaciones. Las construcciones más importantes de la ciencia

son sus teorías. Una teoría explica una ley al proporcionar un mecanismo que explica la regularidad descrita por la ley y al abarcar la ley como una consecuencia lógica de sus supuestos.

De acuerdo con los empiristas lógicos (HEMPEL,1979), a una teoría científica idealmente puede dársele una estructura tripartita formada por un cálculo, una serie de reglas de correspondencia y un modelo. Un cálculo es un sistema deductivo de axiomas y teoremas escritos totalmente en símbolos lógicos, que no se refieren a nada en el mundo exterior. Su finalidad es simplemente mostrar la estructura lógica interna de la teoría lo más claramente que sea posible.

El cálculo se relaciona con el contenido empírico de la teoría por medio de reglas de correspondencia, oraciones que correlacionan ciertos términos lógicos en el cálculo con términos de observación que describen los fenómenos que la teoría pretende explicar. Finalmente, el contenido empírico de la teoría está representado por medio de una serie de oraciones denominada **modelo**. Las oraciones se obtienen al sustituir los términos no interpretados del cálculo por otros términos con los cuales ya estamos familiarizados, tales como volúmen, temperatura y presión.

Uno de los conceptos más útiles para la ciencia y que más se ha trabajado es el de **modelo**. El término **modelo** (ACHINSTEIN,1967), cuenta con una amplia gama de usos en la ciencia y puede referirse a cualquier cosa, desde una maqueta hasta un conjunto de ideas abstractas. Para nosotros, sin embargo, la mayor parte de las cosas que se llaman modelos pueden ser clasificadas como representaciones,teóricas o imaginarias.

Un modelo representacional es una representación física en tres dimensiones de algo. Una variante es el modelo analógico, que representa a un objeto sin reproducir sus propiedades.

Un **modelo teórico** es una serie de supuestos acerca de un objeto o de un sistema. Un modelo teórico puede ser expresado en la forma de ecuaciones matemáticas, pero debe distinguirse de cualesquiera diagramas, imágenes o construcciones físicas utilizadas para ilustrarlo.

Un **modelo imaginario** es una serie de supuestos propuestos, no como descripción plausible de un objeto o sistema, sino como descripción de a qué se parecería el objeto o sistema si se satisfacieran determinadas condiciones.

Las teorías y los modelos a menudo se construyen y se expresan en forma matemática. Las matemáticas proporcionan al científico una variedad de estructuras deductivas por medio de las cuales pue de inferir las implicaciones de las expresiones -tales como leyes empíricas o principios teóricos- que son isomorfos respecto de, o tienen la misma forma lógica que las proposiciones en las estruc turas matemáticas mismas.

ESTRUCTURA MATEMATICA

Una estructura matemática consiste de una serie de axiomas y de una serie de teoremas que lógicamente se deducen de ellos. Tanto los axiomas como los teoremas presentan las relaciones generales que valen entre entidades puramente abstractas. El científico in terpreta esta estructura al sustituir los símbolos o variables en determinados axiomas con términos del tema propio. Así, inter pretadas, las proposiciones matemáticas abstractas se convierten en expresiones relativas al mundo.

Las matemáticas se utilizan para construir modelos y teorías en tres formas principales. La primera, que es también la menos co mún, es construir un formalismo matemático y después interpretar lo físicamente. Con mayor frecuencia el científico comienza con una idea física y después busca hacerla más precisa al expresar la matemáticamente. Finalmente el científico utiliza las matemáti cas para deducir las consecuencias de sus supuestos.

CONCEPTUALIZACION DE MA TEMATICAS

En este trabajo se acepta que la esencia de las matemáticas contemporáneas (SCHAAF,1980),está definida por los siguientes aspectos:

1. Las matemáticas son un lenguaje que debe aprenderse, y debemos aprender sus técnicas si queremos usar este lenguaje.
2. Las matemáticas son, a la vez, inductivas y deductivas, pero la imaginación es totalmente indispensable para su desarrollo.
3. Las matemáticas crecen por acumulación, las nuevas formas se crean a veces por la intuición, y a veces por el formalismo lógico.
4. Las demostraciones y justificaciones dependen de la lógica ha bitual, pero el matemático es libre de modificar esta lógica si lo necesita.
5. Las fuentes de la invención matemática residen a veces en las propias matemáticas y otras veces en las realidades del mundo que nos rodea.
6. El proceso de abstracción y de axiomatización ha servido si multáneamente para profundizar en los problemas de fundamentos y para elevar una soberbia superestructura.
7. Los resultados obtenidos por las matemáticas puras en el pasa do y en el presente han proporcionado a los científicos la

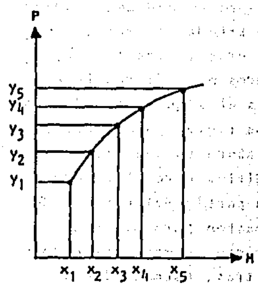
base conceptual para la comprensión y la descripción del mundo físico.

MATEMATIZACION

Volvamos a las leyes para considerar el caso en que éstas se expresan matemáticamente. Pero antes es necesario abundar un poco más en los conceptos cuantitativos (CARNAP, op.cit.), que se introdujeron anteriormente.
Todo concepto cuantitativo tiene un par correspondiente de conceptos comparativos, los cuales, con el desarrollo de un campo de la ciencia, habitualmente son el primer paso hacia los conceptos cuantitativos. Por ejemplo, los conceptos comparativos de "menor peso" e "igual peso" condujeron fácilmente a un concepto de peso que puede ser medido y expresado mediante números.

Para describir los hechos de la realidad mediante conceptos cuantitativos, conceptos con valores numéricos, debemos disponer de procedimientos para llegar a esos valores. El más simple de tales procedimientos es contar y uno más elaborado es la medición. Contar sólo permite obtener valores que se expresan mediante números enteros. La medición va más allá. No sólo brinda valores que pueden expresarse por números racionales (enteros y fracciones), sino también valores que pueden ser expresados por números irracionales. No se puede decir realmente cuál es el significado de una magnitud cuantitativa hasta que formulamos reglas para medirla. Podría pensarse que la ciencia primero elabora un concepto cuantitativo y luego busca las maneras de medirlo. Pero el concepto cuantitativo, en realidad se desarrolla a partir del proceso de medición. El número de reglas que se necesitan para medir un concepto es variable. Algunos necesitan cinco, como es el caso de la temperatura y otros necesitan sólo tres. Esto último se cumple para todas las llamadas "magnitudes extensas", es decir, aquellas para las cuales es posible combinar o juntar de alguna manera dos cosas para producir una tercera, y el valor de la magnitud M de esta nueva cosa será la suma de los valores de M para las dos cosas combinadas. Cuando se han establecido reglas para la medición de algunas magnitudes "primitivas", entonces sobre la base de estas magnitudes se pueden introducir otras magnitudes por definición. Estas magnitudes son llamadas "definidas" o "derivadas". Siempre es posible determinar indirectamente el valor de una magnitud derivada, con ayuda de su definición, a partir de los valores de las magnitudes primitivas que intervienen en la definición. En cuanto a la posibilidad de hacer mediciones de todo aspecto de la realidad somos de la opinión de CARNAP (op.cit. pág.140) que afirma : "Si en un ámbito de fenómenos encontramos suficiente orden como para hacer comparaciones y decir que, en algún aspecto, una cosa está por sobre otra y ésta, a su vez, por sobre otra, entonces hay, en principio, la posibilidad de efectuar mediciones".

Los conceptos cuantitativos no están dados por la realidad, sino que surgen de nuestra práctica de aplicar números a los hechos de la realidad. Ellos son parte de nuestro lenguaje, no de la realidad. Somos nosotros quienes los introducimos; por ello, es legítimo preguntar por qué lo hacemos. ¿Por qué nos tomamos el trabajo de idear reglas y postulados complicados para tener magnitudes que puedan ser medidas en escalas numéricas? Son varias las razones : uno, aumenta la eficiencia de nuestro vocabulario; dos, los conceptos cuantitativos nos permiten formular leyes cuantitativas. Estas leyes son mucho más poderosas, como maneras de explicar los hechos y como medio para predecir nuevos hechos. Aún con un lenguaje cualitativo enriquecido, con el cual nuestra memoria se recargaría con cientos de adjetivos calificativos, hallaríamos gran dificultad para expresar hasta las leyes más simples.



Supongamos, por ejemplo, que estamos ante una situación experimental en la cual observamos que una cierta magnitud M depende de otra P. Representamos gráficamente esta relación y obtenemos la curva que aparece en la siguiente figura . En la línea horizontal de esta gráfica, la magnitud M adopta los valores x_1, x_2, x_3, .. Para estos valores de M, la magnitud P adopta los valores y_1, y_2, y_3, ... Después de representar en la gráfica los puntos correspondientes a estos valores, trazamos una curva a través de esos puntos. Quizás la curva resultante sea una recta; en tal caso, decimos que M es una función lineal de P. Expresamos esto del siguiente modo: $P = aM + b$, donde a y b son parámetros que permanecen constantes en la situación dada. Si los puntos forman una curva de segundo grado, tenemos una función cuadrática. Quizás M es el logaritmo de P; o puede ser una función más complicada, que sea necesario expresar en términos de varias funciones simples. Después que hemos decidido cuál es la función más probable, hacemos ensayos, mediante observaciones repetidas, para ver si hemos encontrado una función que represente una ley universal que vincule las dos magnitudes. Una ley expresada en un lenguaje cuantitativo es mucho más breve y más simple que las engorrosas expresiones que necesitaríamos si tratáramos de expresar la misma ley en términos cualitativos. En lugar de una ecuación simple y reducida, tendríamos docenas de oraciones de la forma "si ... entonces ...", cada una de las cuales haría corresponder un predicado de una clase con un predicado de otra clase.

Pero la ventaja más importante de la ley cuantitativa no es su brevedad, sino el uso que puede hacerse de ella. Una vez que damos a la ley forma numérica, podemos utilizar esa poderosa parte de la lógica deductiva a la que llamamos matemática y, de este modo hacer predicciones. El método cuantitativo nos permite expresar leyes de forma tal que, utilizando funciones matemáticas, podamos hacer predicciones de la manera más eficiente y precisa.

MODELO MATEMATICO

Algunos autores denominan "modelo matemático" de una situación real, a todo concepto o relación cuantitativa expresado en lenguaje matemático. Por ejemplo, LOPEZ DE MEDRANO (1972) dice: "Al escribir con el lenguaje simbólico de la aritmética la operación que debemos efectuar, hemos construído el modelo de la situación real..." y J.LUDLOW-WIECHERS (1984), anota: "La idea es que la expresión algebraica es un modelo del fenómeno, al cual le hacemos una pregunta, y la respuesta es la solución a la ecuación". Sin embargo, de acuerdo a M. BLACK (1966), cuando así se habla, "da la impresión de que las ecuaciones matemáticas se refiriesen a un mecanismo invisible cuyo funcionamiento ejemplificase -o, incluso, explicase en parte- el del sistema social que se investigue (sugerencia, esta última, que es preciso rechazar como ilusoria).

PROCESO DE MATEMATIZACION

Expresar cuantitativamente (o formular matemáticamente o matematizar o modelar matemáticamente) un fenómeno o hecho de la realidad, es todo un proceso. Según M.BLACK (op.cit.), el proceso que se sigue cuando se utiliza un "modelo matemático" parece ser el siguiente:

1. En un campo determinado de investigación se identifica cierto número de variables pertinentes, ya sea basándose en el sentido común, ya en virtud de condiciones teoréticas más alambicadas.
2. Se forman hipótesis empíricas concernientes a las relaciones imputadas entre las variables elegidas.
3. Se introducen simplificaciones, a menudo drásticas, con objeto de facilitar la formulación y la manipulación matemática de las variables.
4. Se hace un esfuerzo por resolver las ecuaciones matemáticas resultantes, o, en caso que ello fracase, por estudiar los rasgos globales de los sistemas matemáticos así construídos.
5. Se intentan extrapolar las consecuencias susceptibles de contrastación al campo original.
6. La eliminación de algunas de las restricciones impuestas en beneficio de la sencillez sobre las funciones componentes (por

ejemplo, su linealidad) puede conducir a cierto aumento de generalidad de la teoría.

Las ventajas que concede el proceder anterior son las que se encuentran ordinariamente al introducir el análisis matemático en un dominio cualquiera de investigaciones empíricas, entre ellas la precisión en la formulación de relaciones, la facilidad con que se efectúan las inferencias a través del cálculo matemático y la captación intuitiva de las estructuras así descubiertas.

Los peligros que acechan son igualmente obvios. Las drásticas simplificaciones que se requieren para que se pueda llevar a cabo con éxito el análisis matemático involucran un grave riesgo de confundir la exactitud de las matemáticas con la fuerza de la verificación empírica en el campo original. Tiene especial importancia recordar que el tratamiento matemático no proporciona explicaciones: lo único que puede esperarse de las matemáticas es que saquen consecuencias de las suposiciones empíricas iniciales (si las funciones y ecuaciones son de formas conocidas puede haber un acervo de investigaciones puramente matemáticas fácilmente aplicables al caso entre manos); podemos decir, si queremos, que las matemáticas puras nos ofrecen la **forma** de una explicación, al hacernos ver qué tipos de función podrían ajustarse aproximadamente a los datos conocidos; pero es preciso buscar por otro lado las explicaciones causales.

3. FILOSOFIA DE LA EDUCACION

Una sociedad en su conjunto, y sus miembros, en forma individual, poseen necesidades. Para satisfacerlas, la misma sociedad, en el transcurso del tiempo, ha creado complejas organizaciones sociales en donde, en forma organizada y utilizando recursos materiales, económicos y humanos, afronta y resuelve una gran diversidad de problemas que surgen en el camino que lleva a la satisfacción de necesidades.

Son muchos y variados los recursos que se utilizan cuando se afrontan problemas reales. Por el momento sólo nos vamos a dedicar a uno: el trabajo socialmente útil que realizan los miembros de la sociedad.

Cuando un individuo realiza un trabajo utiliza herramientas. Estas pueden ser,en forma general, de dos grandes clases : materiales o intelectuales. Entre las primeras están, tanto aquellas cosas que se encuentran en forma natural, como aquellas que son producto de la técnica. Entre las segundas, que son los que por el momento nos interesan, están, en general, actitudes, habilidades, destrezas y conocimientos. Cabe hacer una aclaración : cuando acá nos referimos a destrezas y habilidades, no nos estamos refirien do a aquellas de carácter psicomotriz, sino a las que son puramen te intelectuales y que se refieren al manejo de representaciones abstractas, es decir a ideas. Así como se es hábil o diestro en el uso de nuestras facultades psicomotrices, también se puede ser hábil o diestro en el manejo de nuestras capacidades intelectua les . Entre estas últimas podemos anotar las siguientes : abstra er, generalizar, transferir, analizar, sintetizar, inducir, dedu cir, inferir, imaginar, seriar, ordenar, seleccionar, clasificar, etc. En cuanto a los conocimientos, en éstos se incluyen, tanto a los que responden a la pregunta "qué" como a los que contestan a la pregunta "cómo".

Cuando alguien efectúa un trabajo, y está plenamente comprometi do con él, pondrá en juego todas sus capacidades intelectuales para realizarlo. Lo mismo sucede con alguien que desea resolver un problema : pondrá en movimiento su arsenal de conocimientos y habilidades, de todo género, en la búsqueda de solución. Por lo tanto, si bien a un individuo que se educa, se le pueden pre sentar cualquier tipo de problemas, parece ser que es más adecua do familiarizarlo con aquellos que tengan la característica de ser lo más reales posible.

En el transcurso del tiempo, la humanidad ha acumulado un acer vo inmenso de conocimientos. Entre éstos se encuentran determi nadas formas de hacer las cosas. En particular están las solucio nes dadas a una cantidad considerable de problemas. Si bien no se conoce con "exactitud" la forma, proceso o procedimiento que se siguió para resolver determinado problema, ya que en gran me dida aquél está marcado por conductas individuales, difíciles de conocer; si se han identificado algunos aspectos, etapas, fa ces, métodos, procedimientos, actitudes, conceptos, relaciones, que se han juzgado valiosos en el proceso de resolución. Es claro que ha habido problemas -e, indiscutiblemente puede que los ha ya- que requieran alguna forma original de pensamiento, algún as pecto innovador o novedoso para su solución, pero también no es menos cierto que antes de buscar e idear formas originales de pensamiento, hay necesidad de conocer y dominar aquellas que han probado ser útiles herramientas intelectuales. Una gran parte de nuestra formación descansa en el siguiente supuesto : al matemá tico se le forma como matemático, es decir, como conocedor y prácticante de ciertas formas de pensamiento, a través de estu diar y recorrer, en forma abreviada, los problemas, formas de resolverlos, y soluciones dadas en el pasado. Se cree que haciendo esto, a la larga, él mismo se convertirá en un "creador" de mate máticas. Gran parte de nuestra formación se da bajo el supuesto de que ésta se alcanza repitiendo, rehaciendo, "recreando" soluciones a problemas ya resueltos. Si no fuese así, nada más habría que preguntarnos qué sucedería con alguien que iniciando su formación como físico se le enfrentase a problemas cuya solución no se ha alcanzado.

Razones como las anteriores son las que justifican a que en el bachillerato, el alumno aprenda la forma en la cual se han utilizado conceptos, relaciones, métodos y algoritmos, provenientes de diferentes áreas del conocimiento, en el estudio científico de una situación concreta real, como puede ser un hecho social o un fenómeno de la naturaleza.

4. TEORIA DEL CONOCIMIENTO

Lo más probable es que un niño de ciudad, que tenga cinco años de edad, sabe a qué nos referimos cuando hablamos de una *pelota*. Puede formarse una "imagen" mental de su forma, de su tamaño, de sus colores, de los movimientos que puede realizar, de la textura de su superficie, del material de que está hecha y posiblemente hasta de su costo. Decimos que el niño *conoce* el concepto *pelota*.

Es claro que el niño, que es el que sabe todas estas cosas, no tiene en él a la pelota, como objeto físico. El objeto físico llamado pelota está fuera de él. Lo que se encuentra en él es una representación de la pelota. Decimos que *posee el concepto "pelota"* . Tampoco la forma, tamaño, color, movimientos, textura, material, se encuentran en el niño con su carácter de objetos físicos. En él se están "representaciones" de estas propiedades.

A la pregunta: ¿Qué es una pelota?, nuestro niño de seguro, intenta formular una respuesta. Lo que no ocurre si le preguntamos ¿qué es una galaxia?. Pero, si esta misma pregunta se la planteamos a un astrónomo, sin duda se explayará en explicaciones, datos, informes, Etc., cuya concordancia con las características de los objetos denominados galaxias, indica que *conoce* lo que éstos son.

Por otro lado, la mejor forma de saber si alguien tiene idea de *cómo se toca* una flauta dulce, o de *cómo se hace* un pastel, o *cómo* se construye un "eliminador" de baterías, Etc., es proporcionarle los elementos y que lo haga. En estos casos decimos: fulano *conoce cómo* tocar una flauta, hacer un pastel o construir un eliminador. Estos ejemplos muestran que es posible *conocer* formas o maneras de hacer ciertas cosas.

En la actualidad se dice que la humanidad *conoce* muchas cosas, pero que al mismo tiempo son más las que ignora. Por ejemplo, parece ser que hasta la fecha "nadie" conoce cómo curar el SIDA. Hay en el mundo personas que están trabajando en la búsqueda de cura a esta enfermedad. Tal vez en un futuro se llegue a *conocer* algún remedio.

Los ejemplos anteriores son suficientes para poner de manifiesto que en el fenómeno del conocimiento concurre, de inicio, dos elementos: el sujeto que conoce y un objeto susceptible de ser conocido. El sujeto que conoce no es otro que el hombre; el objeto susceptible de conocerse lo hemos ejemplificado en un caso, con un objeto físico, una pelota, y en otro, con formas de hacer cosas.

De igual manera se ha mostrado que cuando una persona conoce un objeto cognoscible, ese objeto se encuentra en ella en forma de una representación y nunca en la forma en el objeto es. Por esta razón, en un diccionario de Filosofía se dice que: ***conocer es el acto por el cual un sujeto aprehende***, es decir, representa un objeto.

En conclusión, se puede decir que en el fenómeno del conocimiento hay tres elementos: el sujeto cognoscente (el hombre), el objeto cognoscible y la representación que de éste último se hace el hombre cuando ya lo conoce.

Hasta acá parecen muy simples las cosas. Sin embargo, puede vislumbrarse su extrema complejidad cuando nos formulamos preguntas sobre estos tres elementos. En seguida se enuncian algunas de ellas:

Con respecto al objeto cognoscible.

¿Qué objetos son objetos cognoscibles?.
¿Qué es lo que hace a un objeto ser objeto cognoscible?.
¿Cuántos tipos de objetos cognoscibles hay?.

Con respecto al sujeto cognoscente.

¿Qué parte del hombre -sentidos o razón- son los medios para conocer?.
¿Un hombre puede conocer todos los objetos cognoscibles?.
¿Por qué mecanismo llega un hombre a conocer, lo que conoce?.
¿Qué "actitud" asume el sujeto durante el proceso del conocimiento?.

Con respecto a la representación.

¿Cuál es la naturaleza de la representación?.
¿La representación se encuentra en el sujeto o fuera de él?.
¿Cómo se sabe que la representación realmente representa al objeto?.

¿Cuántos tipos de representaciones hay?.

Las representaciones de los objetos cognoscibles, ¿son todas de la misma naturaleza?.

¿Es posible conocer la naturaleza de la representación?.

¿Es posible conocer el proceso por el cual un hombre llega a obtener la representación, sea ésta lo que sea?.

Algunas de estas preguntas las han contestado las Ciencias distintas de la Psicología y de las Ciencias Sociales, y en este caso casi no ha habido problemas. La razón: de un tiempo para acá entre los que practican las Matemáticas, la Física y la Biología sólo se presentan discrepancias cuando se meten a filósofos. Otras preguntas las ha contestado la Psicología, y ahí aparecen algunas posiciones francamente irreconciliables. Por ejemplo, el conductismo al negar la posibilidad de conocer los procesos mentales por los cuales un hombre aprehende, se contradice con aquellos que afirman lo contrario, la psicogenética, por ejemplo. Finalmente, algunas otras de las preguntas anteriores las contesta la Filosofía, y ahí todo es un *no* ponerse de acuerdo. Aparecen todos los **ismos** y hay para todos los gustos: sólo se conoce por los sentidos; no, sólo se conoce con la razón; no, se conoce con los sentidos y con la razón; la certidumbre de *todo* conocimiento se determina al hacer una comparación con el universo de los sentidos; no, existen conocimientos cuya certidumbre se determina independientemente de los sentidos; "*el conocimiento es una reminiscencia*, es decir, el conocedor *tiene* la verdad; No la aprende; simplemente la recuerda con la ayuda de la enseñanza"; el conocimiento no consiste en impresiones de los sentidos, sino en razonamientos sobre ellas; el conocimiento es un conocimiento de los principios permanentes del mundo, no de las apariencias cambiantes, Etc.

Así es la Filosofía; es más, ésa es la Filosofía. No debe ni asustarnos ni llevarnos a un escepticismo inmovilizante. Russell señala el papel negativo que jugó, para el desarrollo del conocimiento (esto último en el sentido de acumular resultados), el que se hayan impuesto opiniones que, si no cancelaban, sí limitaban los alcances que tenía el conocimiento obtenido por vía empírica. Sin embargo, a lo largo de los tiempos se han llegado a producir una gran cantidad de conocimientos que no todos los tenemos. Son conocimientos ya establecidos, algunos tal vez cuestionables por su propia naturaleza -lo valores, por ejemplo- pero conocimientos en fin. Por las razones antes señaladas, estos conocimientos ya establecidos, debemos enseñarlos a los que no los tienen. Es decir, ahora los conocimientos ya logrados, se convierten en objetos de enseñanza.

En la educación institucionalizada son tres los elementos que participan durante el proceso enseñanza-aprendizaje: los alumnos, los aprendizajes que se desea alcancen los alumnos y el profesor. Estos tres elementos inmersos, claro está, en un contexto social, en todos sus aspectos.

Con el objeto de que los alumnos se apropien de los aprendizajes deseados, se hace necesario que entre alumnos, profesor y aprendizajes se realicen todo un conjunto de interacciones que favorezcan el aprendizaje de los alumnos. Es función del profesor conducir al alumno para que adquiera los aprendizajes deseados, y para ello tenderá a provocar, de manera conciente y sistemática, los procesos que juzgue convenientes para la formación del alumno.

De lo anterior es pertinente que el profesor planee, de alguna manera, su enseñanza. La planeación consistirá en la selección y estructuración de los procesos que ayudarán al estudiante a su formación.

Dos criterios tendrán relevancia al efectuar la planeación. Ambos de carácter psicológico. Uno, definir lo que significa decir, "...fulano de tal *conoce* tal cosa"; dos, precisar la naturaleza de los procesos de adquisición por los cuales un alumno se apropia de determinados objetos de enseñanza. Dependiendo de las respuestas que se dén a estas preguntas, así serán los procesos que se elijan para la conducción del alumno en su formación.

En la historia de la Psicología ha habido al menos dos formas diferentes de responder a las preguntas anteriores: una, la psicogenética desarrollada por J. PIAGET y otra, que por comodidad y de forma muy esquemática denominaremos "tradicional".

De alguna manera la "psicología tradicional" contesta a las dos preguntas anteriores y con sus respuestas pretende orientar y justificar la didáctica, es decir, el conjunto de prácticas, procesos o actividades de que se vale la "enseñanza tradicional". PIAGET puso de manifiesto que tales respuestas no explican el por qué la enseñanza tradicional recurre a ciertas actividades que de ninguna manera se infieren de las respuestas dadas a las mencionadas preguntas.

Pero vamos por partes. Por ejemplo, ¿qué es para la psicología tradicional que X conozca Y?, siendo Y un concepto. La respuesta que dá es, naturalmente (de acuerdo a lo que se dijo anteriormente), que, X conoce Y, cuando X se ha representado mentalmente a Y. Hasta acá no hay problema. El primero aparece cuando se aclara la *naturaleza de tal representación*: una representación, se dice, es una imagen. Tratemos de explicar este punto. El significado más usual que se le dá al término imagen es de carácter visual, en este sentido se tiene una imagen de carácter plástico, algo así como un dibujo o una fotografía. Los artistas plásticos tienen muy desarrollada su capacidad de imaginar representaciones de esta naturaleza. Pero también hay imágenes de carácter auditivo, de carácter tactíl, Etc. Los músicos pueden, digamos, "ver" no solamente sonidos aislados sino formando toda una estructura armónica. Uno puede mentalmente tener una imagen de los sonidos que forman el habla de las personas muy cercanas a nosotros, amón de su aspecto físico. De acuerdo a la psicología tradicional la respuesta a la primera pregunta es: X conoce Y, cuando X tiene una imagen de Y.

Vamos ahora a la segunda pregunta: ¿cuál es el proceso psicológico que sigue X cuando llega a conocer el concepto Y?. Antes de intentar contestar esta pregunta anotemos que para la psicología tradicional, tanto como para aquella que no lo es, un *concepto* es de naturaleza general. Es decir, un concepto o noción no es algo singular, particular. El concepto *Libro*, por ejemplo, es algo que se dice para toda una colección de objetos. El *concepto* es de naturaleza genérica. Esto lo tiene presente la psicología tradicional.

Desde los primeros filósofos griegos se estuvo de acuerdo en que mediante los sentidos sólo se puede captar lo individual, lo particular, nunca lo general. Por tal razón, la psicología tradicional que se vale de los sentidos para explicar la construcción de nociones, recurre al proceso de ***abstracción***, para zanjar tal dificultad. Gracias a este proceso, la formación de conceptos se lleva a cabo de la siguiente manera -según la psicología tradicional- :

- los sentidos recogen estímulos que provienen de objetos del mundo exterior, los cuales de alguna forma se "trasmiten" al cerebro y se imprimen en él. Al acto físico de recibir impresiones sensoriales, es decir, de registrar la reflexión de la luz o, para ser más exactos, las ondas luminosas; de registrar las ondas sonoras; de responder con una sensación cuando se tocan las llaves que marcan "frío", "calor" o "dolor" se le llama ***percepción***.

- una vez que se han percibido "gran cantidad" de objetos individuales de la misma clase, entra en juego el proceso de ***abstracción*** por el cual, se elimina de las percepciones todo aquello que es *accidental, no común a todas y cada una de las percepciones individuales*, dejando sólo aquellas características genéricas. De esta manera, bastaría que se ofreciera a mi vista gran cantidad de objetos amarillos para que yo llegara a tener el concepto ***amarillo***.

Las dos respuestas anteriores fundamentan algunos de los procesos didácticos utilizados por la "didáctica tradicional": se explica el empeño del profesor en presentarle a la experiencia visual del alumno ejemplos particulares que exhiben la noción por conocer; la poca actividad del alumno y su actitud fundamentalmente receptiva. Para nuestros fines no es muy importante lo que sí explica, sino lo que no puede hacer. Se trata de señalar sus limitaciones. Lo que no explica es por qué la didáctica tradicional precisa de cierta "actividad" de parte del alumno para lograr la adquisición de una noción. Ejemplos de acciones que se utilizan son, sobreponer, girar, contar, separar, Etc. realizadas en pocos casos de manera objetiva pero con frecuencia mentalmente. Los dos supuestos básicos de esta psicología no haría necesaria esta actividad. En otras palabras, de acuerdo a la psicología tradicional no cabe la interacción activa entre el sujeto cognoscente y el objeto cognoscible cuando aquel intenta llegar a conocer a este último. La psicología de PIAGET, entre otras cosas, dá cuenta y razón de este hecho.

Repasemos brevemente algunos aspectos de la psicología de PIAGET con miras a formular directrices que guíen el proceso enseñanza-aprendizaje. Sería absurdo siquiera pretender discutir con amplitud algún detalle de esta teoría. No es el objetivo de este trabajo.

De acuerdo a PIAGET, para la formación de un concepto no basta con la sóla imagen estática; se precisa de realizar alguna actividad ya sea de manera objetiva o mental. Lo anterior, le permite afirmar que : *Los elementos fundamentales del pensamiento no son imágenes estáticas, sino esquemas de actividad en cuya elaboración el sujeto toma parte activa e importante.* Algunos ejemplos de actividades o acciones son: sustitución, reunión, separación, reproducir algo, situar cercanamente, envolver, congregar, espaciar, cortar, reducir, plegar o desplegar, aumentar, disminuir, alterar un punto de vista, conectar, Etc.

Estas acciones o actividades se realizan practicamente sobre objetos materiales. Pero, en otro momento, es posible poderlas "efectuar mentalmente"; imaginar acciones sólo con el pensamiento. En este momento ya no sólo se es capaz de "comparar" parejas de objetos, por ejemplo, en cuanto a su tamaño, sino que ya se tiene una representación mental del acto de "comparar" y se es capaz de realizarla en la imaginación.

De acuerdo a PIAGET, el pensamiento en todas sus manifestaciones se muestra como esencialmente operativo. Gran parte de la obra de este pensador está dedicada a estudiar el desarrollo de este tipo de pensamiento desde sus niveles más simples y rudimentarios hasta los más complejos y elaborados. Se puede decir, que según PIAGET, el desarrollo del pensamiento es el desarrollo de los esquemas, moldes, modelos o formas (como se le quiera llamar) de actividades.

FIG. 1

Lo anterior no quiere decir que para PIAGET ya no existan imágenes. Siguen existiendo, pero ya no como los elementos fundamentales del pensamiento. Pero, si ya no son eso entonces, ¿qué son para PIAGET? Para PIAGET son ***símbolos***. Tratemos de explicarnos. Los símbolos, para quien sabe su significado, al verlos y prestarles atención le recuerdan su significado. Cuando un automovilista, al llegar a una boca-calle ve una luz roja en el semáforo, sabe que hacer; cuando una persona ve el símbolo representado en la FIG. 1 y sabe su significado, le recuerda cosas. Así, para PIAGET las imágenes son símbolos que nos recuerdan operaciones que se pueden realizar con el objeto simbolizado. Claro está, como ocurre para cualquier símbolo, previamente hay que estar en posesión de su significado. Tradúzcase esto a : previamente hay que estar en posesión de las operaciones.

Acciones es todo aquello que objetivamente se realiza. La acción de "cortar" se presenta cuando se corta madera, papel, un pastel, una naranja, Etc.; la acción de "girar" -alrededor de algo- se realiza cuando una puerta "gira" alrededor de sus visagras, cuando un niño "gira" alrededor de un árbol, cuando una moneda se hace "girar" sobre uno de sus puntos en contacto de la mesa, cuando, manteniendo fijo uno de los brazos de un compás, el otro brazo se hace "girar" en torno al tornillo que los une, Etc.. PIAGET le llama ***interiorización** al proceso por el cual un individuo llega a poder realizar acciones sólo mentalmente*. Por ejemplo, cuando alguien es capaz de imaginarse la rotación de la tierra alrededor del sol, la rotación del sistema solar alrededor del centro de la Vía Láctea, la rotación de la Vía Láctea alrededor de ..., se dice que ha interiorizado la acción de giro. *A una **acción interiorizada**, PIAGET le llama **operación**.* Se dice que por el proceso de interiorización, el acto efectivo, real, se transforma en representación del acto.

Pero PIAGET no sólo asigna a la imagen de la psicología tradicional una función distinta, también explica su origen, es decir, su "naturaleza" de manera distinta. Para PIAGET una **imagen** es el resultado de la interiorización de una acción; acción que no es cortar, unir, prolongar, Etc., sino de la que él denomina ***acción perceptiva***. Es decir, para PIAGET la percepción misma -que constituye un capítulo de todo libro de psicología- la interpreta de otra forma. en esencia, para él la percepción, de lo que sea, no es algo pasivo, sino al contrario, toda una actividad. Usando una figura del lenguaje: una *imagen* para la psicología clásica es una fotografía, para PIAGET es un dibujo. Así, tanto la *imagen* como la *operación*, si bien diferentes en cuanto a función, tienen, de acuerdo siempre a PIAGET, un mismo origen: las acciones.

La operación es lo fundamental para el pensamiento, según PIAGET. Sus investigaciones le llevan a darle a las operaciones una estructura semejante a la que presentan las matemáticas. Les atribuye características como por ejemplo el que se pueden "*componer*", es decir, obtener una operación diferente como resultado de la realización de dos o más de ellas en forma subsecuente; que en conjuntos especiales de operaciones hay alguna que aplicada a ciertos objetos, los deja invariables -es decir, que existe una operación idéntica-; que tres operaciones del mismo grupo son asociativas y por último, para cada operación hay otra que aplicada a continuación de la primera, deja al objeto en su estado inicial en el que se encontraba (es decir, las operaciones son reversibles).

Estas propiedades que identifica en las operaciones le permiten explicar la conducta inteligente ya que para él, la inteligencia no es más que la colección de operaciones de que dispone un individuo.

Por sus propiedades que tiene, a la *operación* PIAGET opone el *hábito*. Sobre este último LOCKE dice: "... cuando ese poder o habilidad en el hombre de hacer cualquier cosa ha sido adquirido mediante frecuente ejecución de la misma cosa, es la idea que llamamos *hábito*...". El hábito nos permite hacer algo siempre de la misma manera. Muchas de nuestras conductas son "habituales". Basta que se dén ciertos estímulos para desencadenar una acción o acciones siempre en la misma forma, en la misma "dirección". PIAGET explica que cuando las operaciones incluídas en un proceso no son interiorizadas o lo son sólo parcialmente, este proceso, de convertirse en una conducta inteligente, degenera en un hábito. Por otro lado, PIAGET asemeja la ejecución de una conducta habitual como aquella que resulta de un *reflejo condicionado*. De igual forma, dá cuenta de la repetición de memoria y de la realización "automática" de algoritmos (sin comprenderlos) como resultados de hábitos sensorio-motores adquiridos como sustitución de una comprensión cabal de las operaciones involucradas. En resumen, un hábito es una conducta esteriotipada. Al contrario de los hábitos, las operaciones por su propiedad de reversibilidad aseguran una movilidad de la cual carecen aquellos y por sus otras propiedades permiten organizarce formando sistemas integrados, algo de lo cual carecen los hábitos, los cuales son, en general, conductas aisladas.

Un resultado a que llega PIAGET, y que es importante para la didác tica es el que asegura que el pensamiento organizado de manera operacional es un efecto, en parte, del trabajo realizado en forma cooperativa entre varios individuos.

¿Cómo se produce el progreso del pensamiento y cómo se construyen las operaciones? Las investigaciones de PIAGET sugieren que las operaciones, al igual que otras conductas de carácter psicológico, no aparecen súbitamente por, digamos, generación espontánea, sino que son un resultado de la evolución, por diferenciación de conductas anteriores de carácter más elemental y primitivo. Lo mismo sucede con los *conceptos*. Estos se construyen en forma progresiva y continua a partir de otros que le preceden. De acuerdo a PIAGET la construcción, tanto de operaciones como de conceptos se produce en el curso de una investigación, es decir, en la búsqueda de respuestas a preguntas planteadas.

Toda investigación es guiada por una pregunta. PIAGET estudia la relación que existe entre la pregunta, el problema y la operación y concluye, entre otras cosas, que cada operación está en función de una pregunta. Es decir, cada pregunta es un llamado a realizar alguna operación. De esta forma, una pregunta o problema es un *proyecto de acción o de operación* que alguna persona intenta aplicar a un nuevo objeto, con el fin de llegar a la respuesta buscada. Es decir, de alguna forma, la pregunta *anticipa* las operaciones o acciones que se aplicarán a determinados datos. Por esto se dice que una pregunta o problema es un *proyecto anticipador*, no siendo la investigación, otra cosa que la realización del proyecto de acción.

Con lo dicho hasta este momento se intentará aclarar el significado de la expresión " X conoce Y" para PIAGET. Con el objeto de hacer más claro el significado de la expresión "X conoce Y" , antes se contestan las siguientes preguntas: ¿qué es lo que hace a un *objeto* ser "*objeto cognoscible*"?, ¿qué es lo que hace a un *sujeto* ser *sujeto cognoscente*? y por último, ¿cuál es la esencia de un objeto, en cuanto es objeto cognoscible? o de otra forma, ¿qué distingue a un "objeto cognoscible" en particular de otro "objeto cognoscible" cualquiera?. En términos de lo dicho hasta este momento es posible poder afirmar :

a. Lo que hace a Y ser "objeto cognoscible" es la posibilidad de que sobre él se puedan o no realizar ciertas acciones.

b. Lo que hace a X ser "sujeto cognoscente" es la posibilidad de que X puede realizar acciones sobre objetos, los cuales pueden ser objetivos o puramente mentales.

c. La esencia de un "objeto cognoscible" (su "ser", como "ser cognoscible", no su "ser" en sentido metafísico) es el conjunto de operaciones que se pueden realizar sobre él.

d. Como resultado de su *desarrollo*, X, en cierto momento está en posesión de un conjunto de operaciones, las cuales, como se ha visto son de carácter puramente formal, es decir, son una especie de "moldes" o "estructuras".

Por lo tanto, para PIAGET, X conoce Y *si y sólo si* Y (como objeto cognoscible) *se encuentra en alguna o algunas de las operaciones de que dispone X.*

Cuando PIAGET habla de que X conoce Y, lo hace en el sentido anterior. Sus investigaciones y las de sus discípulos se han enfocado a desarrollar, en varios aspectos, el conocer en el sentido antes apuntado.

En el caso de que a X se le presente un objeto de conocimiento "nuevo", Y, ¿cuál es el mecanismo por el cual X llega a conocer Y? La respuesta, resumida, de PIAGET es : modificando -por efecto de la acción- alguna operación que ya posea X, con el fin de construir una nueva operación en donde sea posible asimilar a Y.

Tales son las respuestas que dá PIAGET a las preguntas de ¿qué es conocer algo? y ¿cuál es el mecanismo por el cual alguien llega a conocer ése algo? y que son las que se aceptan en este trabajo. En otras palabras tal es la teoría del aprendizaje con la que se está de acuerdo.

5. TEORIA DEL APRENDIZAJE

El estudio de qué es el aprendizaje, y cómo se alcanza, es algo que tradicionalmente se ha incluído en el campo de la Psicología. Hasta el momento se han formulado teorías que intentan englobar y explicar hechos observables sobre el aprendizaje. Hay tantas -o más- teorías psicológicas del aprendizaje, como escuelas psicológicas existen. Cada una, de acuerdo a los supuestos de que parte, se propone explicar, dar coherencia a resultados observados y, en lo posible, predecir otros.

En este trabajo se hablará, con un poco de detalle, de la teoría desarrollada por el psicólogo norteamericano D.P.AUSUBEL (NOVAK, 1978), en virtud de que se considera que esta teoría da "mejor" cuenta de lo que ocurre en el proceso enseñanza-aprendizaje y es más adecuada para orientar dicho proceso. Sin embargo, por lo menos, habrá que nombrar otras teorías que cuentan en la actualidad con un gran número de partidarios. Entre ellas están las que derivan de corrientes psicológicas como el Conductismo (SKINER,1975), la Gestalt (WERTHEIMER,1961), la Psicogenética (PIAGET,1975), la Soviética (VIGOTZKY,1992), la tradicional (HUME,1965).

APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO

El concepto central en la teoría de AUSUBEL, es el de aprendizaje significativo :

> X aprende significativamente Y cuando Y se enlaza con los conceptos pertinentes que existen ya, en la estructura cognoscitiva de X.

En lo anterior, por enlace entre un concepto con otro pertinente, se entiende la relación -del tipo que sea- entre tales conceptos y, por estructura cognoscitiva de X se quiere significar "las series organizadas de hechos, conceptos y generalizaciones que ya se han aprendido".

La definición anterior afirma, implícitamente, dos cosas: que Y está enlazado con otros conceptos y que X posee, en cierto momento, una estructura cognoscitiva.

De acuerdo con AUSUBEL, en la estructura cognoscitiva de un individuo los conceptos pueden aparecer bajo dos formas : como conceptos "aislados" o como conceptos que permitan integrar una serie de conceptos "aislados". Hay que hacer notar que estas dos formas no son absolutas: un mismo concepto puede ser al mismo tiempo "aislado" o integrador.

Para que un individuo logre aprender significativamente algún aprendizaje Y, se requiere que en su estructura cognitiva exista un concepto integrador adecuado para Y que realice los enlaces entre Y con los demás conceptos con quienes se pueda relacionar. La función del concepto integrador es sevir de anclaje para diversos elementos de conocimiento.

El proceso mediante el cual un individuo aprende significativamente algo es el de **integración**. Este consiste en relacionar, por medio del concepto integrador pertinente, el nuevo conocimiento a los otros que ya poseía el sujeto y con los cuales se puede relacionar. El resultado final de este proceso es una modificación, tanto del nuevo conocimiento, como de la estructura cognoscitiva original del individuo.

Un tipo particular de aprendizaje significativo es aquel que AUSUBEL denomina **aprendizaje supraordinado**. Es aquel que se da, cuando lo nuevo que aprende un individuo, en lugar de integrarse, mediante un concepto integrador pertinente, con los conceptos ya existentes en el individuo, lo que hace es establecer nuevas asociones entre los conceptos ya existentes en la estructura cognoscitiva del aprendiz.

Al progresar el aprendizaje significativo de un individuo, los conceptos que existen en su estructura cognoscitiva experimentan dos posibles modificaciones: se vuelven más elaborados o se hacen más diferenciados. Lo primero ocurre cuando la nueva información se integra a un concepto integrador y la segunda se da por efecto de que la nueva información haya propiciado un cierto tipo de asociación entre los conceptos ya existentes. A la segunda transformación AUSUBEL denomina **diferenciación progresiva** y que, al igual que la primera, puede ocurrir en cualquier período de tiempo.

Durante el aprendizaje, puede suceder que se contraponga el significado de un concepto que ya se posee con uno nuevo que se intenta aprender. En la teoría de AUSUBEL se llama **reconciliación integradora**, al proceso por el cual se aclaran las diferencias entre significados.

Otro de los conceptos en la teoría de AUSUBEL es el de **organizador avanzado**. Por éste se entiende un pequeño segmento de material de aprendizaje que suministra al estudiante la guía para que pueda emplear los conceptos que posee en su estructura cognoscitiva para aprender significativamente. También puede auxiliarlo para encontrar los conceptos claves en el nuevo material e, igualmente, si en éstos hay una relación de supraordinación o de subordinación con los que ya posee. El elemento crítico de un organizador avanzado es que sirve para enlazar la nueva información que se aprenderá con los conceptos existentes en la estructura cognoscitiva. La característica predominante que AUSUBEL atribuyó al organizador avanzado fue que debía ser más general y abstracto que la información a seguir y que eso debía servir para facilitar el aprendizaje significativo del nuevo material.

Sirviéndose de los conceptos de **aprendizaje significativo**, **aprendizaje supraordinado**, **diferenciación progresiva** y **reconciliación integradora**, AUSUBEL explica la capacidad de un individuo para resolver problemas, descubrir e investigar, así como la creatividad. Se dice : "...la capacidad de resolver problemas deriva de la diferenciación de la estructura cognoscitiva, y que eso se específico del concepto.."; "...no hay una estrategia general o una lógica del descubrimiento, excepto la estrategia general del aprendizaje significativo, que es, primariamente, una función del desarrollo del concepto y de la reconciliación integradora de los conceptos"; "...el proceso creativo se presenta, en esencia, como forma avanzada de diferenciación del concepto supraordinado y de reconciliación integradora".

LA TEORIA DE AUSUBEL Y LA DIDACTICA

Antes de enunciar algunos elementos que podrían figurar en una didáctica basada en la teoría de AUSUBEL, es necesario hacer la siguiente aclaración :

Es una teoría que intenta fundamentar, principalmente, el aprendizaje de carácter cognitivo.

Una didáctica basada en la teoría de AUSUBEL se aplica principalmente a los alumnos que ya saben leer bastante bien y que ya poseen un conjunto de principios y conceptos básicos de una manera determinada y, debe tender a propiciar :

- el aprendizaje significativo;
- el aprendizaje supraordinado;
- la diferenciación progresiva;
- la reconciliación integradora;

para ello, habría necesidad, entre otras cosas de :

- determinar, para cada aprendizaje que se desee enseñar, aquellos que le sean pertinentes;
- indagar si en la estructura cognitiva de un estudiante, existen los elementos pertinentes, al aprendizaje que se va a enseñar;
- suministrar los conceptos integradores que mejor convenga;
- utilizar, en lo posible, técnicas individuales de enseñanza, en virtud de que la rapidez de aprendizaje de un individuo depende de su estructura cognitiva;
- considerar, sobre todo, aquellos aprendizajes que potencialmente tengan alta significatividad.

ESTRUCTURA COGNITIVA EN ESTUDIANTES QUE HAN CONCLUIDO SU EDUCACION MEDIA.

La estructura cognitiva de cada individuo es única, ya que las experiencias y la forma de interpretarlas e interiorizarlas tienen un carácter singular.

La estructura cognitiva no es estática. Cambia conforme aprendemos, ampliándose, enriqueciéndose, ajustándose, reestructurándose.

A su vez, la estructura cognitiva afecta lo que se va aprender, pues facilita, dificulta o impide que el nuevo aprendizaje se integre a ella, que le sirve como base. De hecho, para que el aprendizaje se dé de manera significativa es menester que lo nuevo se interiorice y se relacione con la estructura cognitiva.

De lo anterior, uno podría esperar, razonablemente, que al final de cada ciclo, en la educación escolarizada, los estudiantes hubié sen alcanzado una determinada estructura cognitiva.

Para el caso de los alumnos que han concluído su educación media básica tal estructura cognitiva, en principio, y de acuerdo a los Planes y Programas de Estudio Oficiales, sería rica tanto en las ciencias como en las humanidades.

En cuanto a las ciencias, un alumno que ha concluído su educación media, ha estudiado varios cursos de Física, Química, Biología, Geografía y Matemáticas.

Con respecto a las humanidades, el mismo alumno, ha cursado las asignaturas de Civismo, Historia -tanto Universal como de México- y un idioma extranjero.

Los anteriores conocimientos se han enriquecido por la práctica de alguna tecnología, el ejercicio de la música y la práctica de algún deporte.

Como puede verse, no es nada despreciable la gran riqueza de la estructura cognitiva que cabría esperar de un alumno que ha concluido su educación Secundaria. Naturalmente se está claro en que no todos los aprendizajes alcanzados hayan sido significativos para todos los alumnos. En esto se espera un espectro amplio de posibilidades.

Aún con todo, se considera que nueve años de educación escolarizada (es decir, hasta el término de la educación secundaria) en mucho hayan contribuído al desarrollo cognitivo de los aprendices tanto en las ciencias como en las humanidades. Aún suponiendo que no todos los aprendizajes hayan sido significativos y que aún los alcanzados de esta forma se encuentran entremezclados con prejuicios , falsas creencias y conocimientos aislados, esta estructura cognitiva hay que tomar en cuenta si se quieren promover nuevos aprendizajes de manera significativa.

MODELO DE APRENDIZAJE DE-EXPLICACIONES CIENTIFICAS

Con anterioridad nos hemos referido a lo que entendemos por dar una explicación de un fenómeno natural o comprender un hecho social. También se hizo explícito el concepto de aprendizaje significativo en el sentido en que AUSUBEL lo formula y que es el que se utiliza en este trabajo. Por otro lado, se abordaron las particularidades cognitivas que podrían definir al tipo de alumno que se intenta que aprenda, en forma significativa, soluciones dadas a problemas que consistan en una explicación o comprensión.

En otras palabras : se ha hablado de un objeto de conocimiento específico que se desea sea aprendido, en forma significativa, por un alumno particular. Por lo tanto, en este momento, cabe formular la pregunta: ¿de qué manera, o de qué forma se supone que un individuo, con tales características, se apropia significativamente, de tal conocimiento?

De inmediato es oportuno señalar que la respuesta a tal pregunta sólo la podemos bosquejar en términos muy generales. Una respuesta categórica y completa la desconocemos.

Una respuesta completa y categórica, desde el punto de vista lógico, a tal pregunta, consistiría en la formulación de algún modelo de aprendizaje que explicara la forma en la cual, alumnos que han estudiado diferentes disciplinas científicas y humanísticas, en forma separada, interiorizan, significativamente, las explicaciones dadas a hechos o fenómenos que se basan en contenidos que provienen de diferentes racionalidades.

Elaborar un modelo de aprendizaje de explicaciones científicas en aprendices que han estudiado en forma aislada distintas disciplinas científicas y humanísticas debe ser el resultado de observaciones empíricas y de elaboraciones teóricas. Para las primeras, habría necesidad de realizar observaciones de campo que permitan esclarecer la forma en que proceden los aprendices en la reconstrucción de diferentes representaciones sobre soluciones dadas a problemas de naturaleza explicativa. Estas experiencias deben apoyarse o guiarse en consideraciones epistemológicas acerca del desarrollo de explicaciones en diferentes áreas del saber.

Aún con lo anteriormente dicho, en el sentido de que se carece de un modelo de aprendizaje de la forma en la cual se han utilizado conceptos, relaciones, métodos y algoritmos, provenientes de diferentes áreas del conocimiento, en el estudio científico de una situación concreta real, como puede ser un hecho social o un fenómeno de la naturaleza, que esté basado tanto en elementos empíricos como en teóricos de carácter epistemológico y validado por la experiencia, creemos que es posible formular un primer acercamiento a tal modelo que, como primera hipótesis podría ser puesta a prueba. Este primer modelo se integraría de las siguientes etapas de aprendizaje.

1. **IDENTIFICACION DEL FENOMENO O HECHO POR EXPLICAR.** El alumno identifica o reconoce, en diferentes aspectos de la realidad, manifestaciones específicas del hecho o fenómeno por explicar. En otras palabras, cobra conciencia de su existencia.

2. **APROPIACION, POR EL ALUMNO, DE LA SITUACION PROBLEMATICA.** En esta etapa el alumno hace suyo el problema. Cobra conciencia de su importancia, de su utilidad, de su interés y lo relaciona con aspectos de su propia vivencia, experiencia y vida.

3. **VISION GLOBAL DEL HECHO O SITUACION PROBLEMATICA.** Una vez aceptado el hecho o fenómeno en cuestión, al plantear la interrogante ¿a qué se debe? o ¿cómo se explica?, hay una primera visión global o total del hecho por explicar. Como toda visión total que apenas se origina, ésta es muy esquemática e incompleta. Se reconoce con facilidad el efecto y se atribuye como causa aquella situación particular e inmediata que aparentemente originó el efecto. En esta etapa parece que no hay mucha dificultad en identificar el efecto y al mismo tiempo se empieza a reparar en aquellos hechos o circunstancias que rodean al hecho o fenómeno que interesa y que, a primera vista, pareciese que guarda cierta relación con el efecto observado. Por el nivel de desarrollo que la estructura conceptual ha alcanzado, ellos, desde un principio, están conscientes de que debe existir una relación de causa-efecto entre el fenómeno que se observa y otros que es pertinente descubrir.

4. **ANALISIS DETALLADO DEL HECHO O FENOMENO:** En esta etapa se identifican hechos o fenómenos pertinentes o no al hecho bajo estudio. Después de la primera visión global del hecho y de que se ha identificado el efecto, se empiezan a proponer posibles causas. Sugerir causas no es otra cosa que formular hipótesis que serán retenidas o descartadas en virtud de la concordancia entre las inferencias que ellas originen con los hechos que se observen. Este proceso da lugar a una clasificación de los hechos o fenómenos, circundantes al original, en pertinentes o no al que primordialmente interesa. Este análisis pone de relieve que si bien puede ocurrir que la causa que en primer lugar se identificó, no sea otra que aquella que desencadena un efecto que será causa de otro efecto, y así sucesivamente, hasta llegar a identificar la cadena de relaciones causales que están involucradas en el hecho considerado.

5. **ANALISIS DE LAS DISTINTAS RELACIONES CAUSALES.** Identificadas las diferentes relaciones causales que tienen lugar en la explicación de un hecho o fenómeno, se analizan en forma más detallada tales relaciones. Es decir, se llega a una etapa de análisis más puntual de las relaciones involucradas y que puede ser que se genere o pertenezcan a diferentes racionalidades. En esta etapa es en donde, de manera principal, se da lugar a la recuperación de diferentes conocimientos que, lo más seguro, es que pertenezcan a disciplinas muy diferentes.

6. **VISION INTEGRADORA DE LA SITUACION.** Una vez que las diferentes partes de la situación y de su explicación, contituída por toda la serie de implicaciones, se han establecido en forma detallada, se retoma de nueva cuenta la situación y se integra en

forma completa su explicación. Esta es una etapa de síntesis en la cual se reestructura la visión total elaborada al principio pero ahora ya aparece estructurada, tomando en consideración vivencia, experiencia y conocimientos particulares pertenecientes a diferentes áreas científicas y humanísticas.

6. DIDACTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA FORMA EN LA CUAL SE HAN UTILIZADO CONCEPTOS, RELACIONES, METODOS Y ALGORITMOS, PROVENIENTES DE DIFERENTES AREAS DEL CONOCIMIENTO, EN EL ESTUDIO CIENTIFICO DE UNA SITUACION CONCRETA REAL.

Después de haber descrito lo que se entenderá por explicación científica; el concepto de aprendizaje significativo de AUSUBEL, el cual se acepta en este trabajo; la estructura cognitiva de un alumno que ha concluído su educación media básica y el modelo que sugerimos para el aprendizaje de explicaciones científicas, es el momento de proponer una didáctica que se juzga adecuada para que tales alumnos se apropien significativamente de los aprendizajes propuestos. Esta propuesta está formada de dos etapas : en la primera se ubica la situación concreta a estudiar y en la segunda, a partir de tres acercamientos, se lleva a cabo el estudio de tal situación.

PRIMERA ETAPA

IDENTIFICACION DE HECHOS SOCIALES O FENOMENOS DE LA NATURALEZA (SITUACION CONCRETA REAL). Solamente la reflexión personal nos lleva a cobrar conciencia de los hechos. Es posible que transcurra toda una existencia en la inconciencia sobre muchos aspectos de la realidad. Sin interrogantes, cuestionamientos y problemas, es difícil llegar a interiorizar hechos o situaciones de nuestra vida real. Por lo anterior, esta etapa está encaminada a que los estudiantes, a partir de su experiencia personal, reflexión propia y discusión colectiva cobren conciencia, fundamentalmente, de cuatro cosas. Una, del cúmulo de necesidades sociales e individuales que deben satisfacerse para hacer posible la supervivencia en un determinado lugar y tiempo; dos, que la satisfacción de cualquier necesidad se ve enfrentada a una serie de problemas que es menester resolver; tres, del papel que en la solución de los problemas que enfrentamos desempeñan los conocimientos que se posean; cuatro, de la situación concreta -hecho social o fenómeno de la naturaleza- que se estudiará y que se deriva como problema particular, necesario de resolver, para la satisfacción de una necesidad específica.

SEGUNDA ETAPA

PRIMER ACERCAMIENTO. Este se caracteriza porque prácticamente todas las actividades que realiza el estudiante las lleva a cabo en base a su experiencia personal, únicamente con lo que "cree", lo que sabe, de manera un tanto intuitiva, nada formal, con el fin de que se familiarice, haga suyo, se involucre en la situación problemática, recuerde sus experiencias y conocimientos relacionados con la situación, haga una primera identificación de los elementos de la situación problemática, cobre conciencia de que entre las distintas partes de la situación existen relaciones, y que es precisamente de estas relaciones de donde se obtendrá la solución del problema planteado por la situación problemática, y, por último, que tenga una primera aproximación a lo que se entenderá por "explicación" o "comprensión" de la situación concreta.

SEGUNDO ACERCAMIENTO. En el segundo acercamiento se inicia la formalización. Es la parte más larga y pesada por las numerosas actividades que se realizan con el fin de que los alumnos recuerden o lleguen a conocer los conceptos, relaciones, algoritmos y métodos, que son necesarios para la comprensión del problema y su solución. Es en esta etapa, digamos, cuando se elabora el cúmulo de conceptos teóricos indispensables para el estudio de la situación.

TERCER ACERCAMIENTO. En el tercer acercamiento se aborda la solución del problema planteado en el primero, a través de la integración de lo estudiado en el segundo. En otras palabras, se resuelve un problema como forma de integrar conocimientos aislados.

7. MODELO DE PROGRAMA PARA UN CURSO

Hemos dicho que este trabajo propone enseñar, en un curso extracurricular, a alumnos del bachillerato, la forma en la cual se han utilizado conceptos, relaciones, métodos y algoritmos, provenientes de diferentes áreas del conocimiento, en el estudio científico de una situación concreta real, como puede ser un hecho social o un fenómeno de la naturaleza. Por tal razón, hay necesidad de elaborar un programa para dicho curso.

Existen diversas propuestas metodológicas para la elaboración de programas. Están, por ejemplo, la de TYLER (1970), TABA(1976), MAGER(1970), POPHAM-BAKER(1972). Sin embargo, en este trabajo utilizaremos la propuesta que hace DIAZ BARRIGA(1980) que tiene algunos razgos comunes con las de TYLER y TABA, pero que está en total desacuerdo con las de MAGER y POPHAM-BAKER.

Para DIAZ BARRIGA un programa escolar es la propuesta mínima de aprendizajes relativos a un curso escolar y que forma parte de una táctica concreta, que posibilita, por medio de los aprendizajes, el logro de ciertas metas curriculares.

Es pertinente aclarar que si bien el curso que proponemos es de carácter extracurricular, no por ello deja de apoyar, promover y enriquecer los grandes propósitos que un currículo establece y en tal sentido, se juzga que la metodología propuesta por DIAZ BARRIGA se puede extender a cursos extracurriculares, siempre y cuando éstos se enmarquen completamente en un determinado currículo.

De acuerdo a DIAZ BARRIGA, la elaboración de un programa escolar involucra tres momentos : determinación del marco referencial, elaboración del programa escolar y la instrumentación didáctica del mismo.

DETERMINACION DEL MARCO REFERENCIAL. Para la elaboración del programa escolar es necesario analizar los propósitos del plan de estudios (al cual el programa pertenece), el tipo de necesidades sociales e individuales que se consideraron para su elaboración, las áreas de formación en que está organizado y las nociones básicas de cada una de dichas áreas. Otro aspecto que se debe contemplar en el marco referencial son las condiciones (institucionales, ambientales, individuales, metodológicas) de desarrollo del programa, lo cual permitirá determinar una primera aproximación a la situación de campo específico de un grupo, como un diagnóstico de necesidades y para detectar las condiciones que van a incidir en una situación educativa, elementos que permitirán la precisión de los propósitos del curso. A partir de estos análisis es como se puede considerar la pertinencia o no de la propuesta de aprendizajes que se concreta en un programa escolar.

ELABORACION DEL PROGRAMA ESCOLAR. Todo programa escolar es una propuesta referente a los aprendizajes curriculares mínimos de un curso, dado que se relacionan con un plan de estudios del que forma parte. El programa escolar orienta las decisiones que maestros y alumnos tomen, referidas al logro de ciertos resultados de aprendizaje.

La elaboración del programa escolar tiene que verse como una segunda etapa que se basa en los estudios y análisis realizados para la organización del marco referencial.

En virtud de que el programa escolar es un medio para comunicar a maestros y alumnos los aprendizajes mínimos a desarrollar en un curso, hay necesidad de presentar no sólo una lista de objetivos de aprendizaje, sino de elaborar, por escrito, una explicación sobre el significado del curso, sobre sus propósitos explícitos y su vinculación con el plan de estudios del que forma parte.

Si bien DIAZ BARRIGA no lo hace explícito, parece que suguiere que el programa escolar estaría formado de las siguientes partes: presentación del programa; nociones básicas que propicia; objetivos terminales; contenidos organizados en unidades temáticas con un nombre adecuado y presentación para cada una de ellas y, los objetivos de aprendizaje para cada unidad temática.

La presentación escrita del programa escolar consiste en la redacción de las principales características del curso, de las nociones básicas que se desarrollarán, de las relaciones que guarda el curso con los anteriores y posteriores a él, en términos de los problemas concretos que ayuda a resolver. La presentación permite conceptualizar una panorámica general del curso y es un primer intento de estructurar el objeto de estudio con el fin de que se perciban las relaciones que guarda la unidad fenoménica a estudiar y los principales elementos que la conforman.

A partir de la concepción que se tiene sobre la totalidad del curso y de las nociones básicas que propicia el mismo, es como se pueden redactar los objetivos terminales, en términos de productos o resultados de aprendizaje. La elaboración de objetivos terminales de aprendizaje constituye una síntesis de los análisis realizados en el marco referencial.

Una vez que se han precisado los objetivos terminales de un curso, que reflejen la totalidad del mismo y las nociones básicas que se desarrollarán, es preciso realizar un desglose de los contenidos del mismo a fin de intentar una organización y estructuración de aquellos contenidos que se reflejarán en las unidades temáticas. La organización del contenido debe reflejar la estructura interna de la disciplina y hay necesidad de que se presenten a los estudiantes de tal manera integrados que posibiliten la percepción de la unidad y totalidad que guardan los fenómenos entre sí.

Cuando el contenido temático del curso se encuentra organizado en unidades temáticas, a cada una de ellas se le asigna un nombre que refleje el contenido a trabajar y se procede a elaborar una presentación escrita de los mismos a fin de aclarar a los alumnos el papel, la estructura, el aprendizaje que promueve y su relación con la totalidad del programa, así como la especificación de los objetivos de aprendizaje para cada unidad.

Los objetivos de aprendizaje por unidad forman parte de la totalidad del producto final o terminal del curso. En este sentido se cree que la cantidad de estos objetivos debe ser mínima. Manejar un mínimo de objetivos de aprendizaje por unidad posibilitará una instrumentación didáctica más profunda y coherente.

INSTRUMENTACION DIDACTICA DE LOS PROGRAMAS ESCOLARES. La instrumentación de un programa escolar es la selección de actividades de aprendizaje (técnicas y recursos didácticos) y de las técnicas de evaluación. En la selección de tales instrumentos se concreta (de manera consciente o no para el profesor) una concepción de la sociedad, del hombre y del aprendizaje.

La instrumentación está formada por dos grandes momentos : la planificación de situaciones de aprendizaje y la planificación de la acreditación del mismo.

Para la planificación de las situaciones de aprendizaje es necesario tomar en cuenta las condiciones particulares del grupo escolar y tomar como punto de inicio la experiencia del estudiante en un intento de retener su propia experiencia como fuente irremplazable para aprender. Esta experiencia del sujeto conforma, por un lado, su esquema referencial, y por otro, la historicidad con que se presenta en el acto de aprender.

PLANIFICACION DE LA ACREDITACION DE LOS APRENDIZAJES. La acreditación se refiere a la verificación de ciertos resultados de aprendizaje, previstos curricularmente, como parte de la formación del estudiante y que permiten su desarrollo adecuado.

El problema de la acreditación se inicia desde la elaboración del programa y, concretamente, desde la definición de los productos del aprendizaje. La planificación de la acreditación se puede realizar a partir de la claridad que tengan los objetivos terminales como producto o resultado del aprendizaje. Es necesario recordar que estos objetivos deben expresar el más alto nivel posible de integración del fenómeno a estudiar. Para comprender el manejo de los contenidos, es necesario detectar la capacidad de establecer las relaciones, de hacer síntesis y de realizar juicios críticos que permiten el desarrollo de las capacidades humanas superiores.

Planificar las evidencias de los resultados del aprendizaje implica, por tanto, establecer los criterios con los que estas evidencias se mostrarán, sus grandes etapas y sus formas de desarrollo. Esta planificación se efectúa mediante el análisis de los objetivos terminales del curso y la determinación de una serie de evidencias : trabajos, ensayos, reportes, investigaciones, etc., que de ellos se pueden derivar.

El conocimiento del plan de acreditación del curso por parte de los estudiantes, desde su iniciación, constituye un elemento que puede favorecer la motivación y el compromiso para su desarrollo, por cuanto que permite visualizar una primera estructura general del curso y la concreción de la misma.

Si consideramos que el examen no es el instrumento más adecuado para verificar el proceso de aprendizaje del estudiante, ni la manera cómo elabora y re-elabora el contenido, el problema a resolver es : cómo plantear las características que debe reunir el resultado del aprendizaje y cómo definir sus criterios de apreciación.

B I B L I O G R A F I A

ACHINSTEIN,P. "Los Modelos Teóricos". México,UNAM. 1967.

AEBLI,H. "Una Didáctica Fundada en la Psicología de Piaget". Buenos Aires: Edit. Kapelusz, 1979.

BLACK,M. "Modelos y metáforas".Madrid: Edit. Tecnos, 1966.

BRUNER,J.S. "El saber y el sentir". México: Eit. Pax-México, 1967.

BUNGE,M. "Teoría y Realidad". Barcelona: Ediciones Ariel, 1972.

-------- "La Ciencia su Método y su Filosofía". Buenos Aires: Ediciones Siglo Veinte, 1981.

CAFFE,F. "Economistas Modernos". Mexico: UTHEA, 1963.

CARNAP,R. "Funadamentación Lógica de la Física". Buenos Aires: Edit. Sudamericana, 1969.

CARROLL,L. "El juego de la lógica y otros ensayos". Madrid:Alianza Editorial, 1972.

COHEN,M. y NAGEL,E. "Introducción a la lógica y al metodo científico".Vol.2. Buenos Aires: Amorrortu editores, 1973.

COPI, I.B. "Introducción a la Lógica". Argentina: EUDEBA, 1974.

DE GORTARI,E. "Dialéctica de la Física". Mexico: UNAM, 1964.

DIAZ,A.B. "Un enfoque metodológico para la elaboración de programas escolares" en: Perfiles Educativos No. 10. México: UNAM, 1980.

DILTHEY,W. "Introducción a las ciencias del espíritu". Madrid: Alianza U.,19880,82.

FEYERABEND,P.K. "Contra el Método". Barcelona: Edit. Ariel, 1981.

GRZEGORCZYK,A. "Hacia una Síntesis Metodológica del Conocimiento". México: UNAM, 1967.

HEMPEL,C.G. "La Explicación Científica. Estudios Sobre la Filosofía de la Ciencia". Buenos Aires: Paidos, 1979.

HUME,D. "A Treateise of Human Nature". L.A.Selby-Bigge (ed.).Nueva York: Dover,1965.

KNELLER,G.F. "La Ciencia en cuanto Esfuerzo Humano". México: NOEMA editores, 1981.

LOPEZ DE MEDRANO,S. "modelos Matemáticos". México: ANUIES, 1972.

LUDLOW-WIECHERS,J. "Algebra y Modelos con Enfasis en Administración y Economía". México: Ediciones Océano, 1984.

MAGER,R. "Análisis de Metas". México: Edit. Trillas, 1970.

NOVAK,D. "Understanding the Learning Process and Effectiveness of Teaching Methods in the Classroom, Laboratory, and Field" in Science Education,60(4): 493-512 (1976)

NOVACK,G. "Introducción a la Lógica. Lógica Formal y Lógica Dialéctica". Barcelona: Fontamara, 1982.

PIAGET,J. "Psicología de la Inteligencia". Buenos Aires: Psique, 1975.

POPHAM-BAKER, "El Maestro y la Enseñanza Escolar". Buenos Aires: Edit. Paidós,1972.

REICHENBACH,H. "La Filosofía Científica", México, F.C.E., 1975.

SCHAAF,W.L. "Sobre la Modernidad de las Matemáticas Modernas", en: La enseñanza de las matemáticas modernas, Hernández,J.(ed.). Madrid; Alianza U., 1980.

SKINNER, B. "Sobre el Conductismo". Barcelona: Fontanella, 1975.

TABA,H. "Elaboración del Currículo". Buenos Aires: Edit. Troquel, 1976.

TYLER,R. "Principios Básicos Para la Elaboración del Currículo". Buenos Aires: Edit. Troquel, 1979.

VIGOTZKY, L. "Pensamiento y Lenguaje". México: Ediciones Quinto Sol, 1992.

WERTHEIMER, M. "Productive Thinking". Londres: Tavistock Publications, 1961.

S.A. "Protocolo de Equivalencias Para el Ingreso y la Promoción de los Profesores de Carrera Ordinarios de la Unidad Académica del Ciclo de Bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades" en: Suplemento de la Gaceta CCH. México, UNAM, 29 de enero de 1990.

C A P I T U L O I I

1. MARCO REFERENCIAL DEL PROGRAMA

2. PROGRAMA DEL CURSO

1. MARCO REFERENCIAL DEL PROGRAMA

INTRODUCCION

Con anterioridad se puntualizó la concepción de Programa de Estudio, de acuerdo al maestro DIAZ BARRIGA (que es el que se acepta en este trabajo), y de la necesidad que existe de realizar su contextualización en términos de analizar el Plan de Estudios en el cual aquél se hallará inmerso. En tal sentido, en este lugar se describirá el contexto en el que se ubica el curso que se propone en este trabajo.

La Institución educativa en la cual se piensa llevar a la práctica el curso que se propone, es el bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades. Por tal razón, los diferentes elementos a considerar (análisis del Plan de Estudios, el tipo de necesidades sociales e individuales que se consideraron para su elaboración, las áreas de formación en que está organizado y las nociones básicas de cada una de dichas áreas) para la formulación del Marco Referencial serán en relación con tal Institución educativa.

ANALISIS DE LOS PROPOSITOS DEL PLAN DE ESTUDIOS

El Plan de Estudios para el bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades se propone (DOCUMENTA No 1): dar una formación secundaria del nivel superior al estudiante, que le permita comprender dos lenguajes fundamentales: las matemáticas y el español, y dos métodos básicos para el estudio de la naturaleza y del hombre: el método experimental y el método histórico. El Plan se propone además, enseñar a todo estudiante un idioma extranjero. Por otro lado, el ideal de formación académica del Plan consiste en que el estudiante sepa leer y escribir en el sentido más profundo de la palabra. Esto es, que el estudiante tenga el hábito de la lectura de los libros fundamentales de nuestro tiempo y de los clásicos del pensamiento humano, el que adquiera una cultura matemática en lo que ésta tiene de lógica y de expresión numérica de la naturaleza y de algunos fenómenos sociales; y el que relacione los resultados de las ciencias experimentales con el método que permite alcanzar sus resultados. Por lo anterior, el Plan se propone que el estudiante aprenda a aprender lo que todavía no sabe y, además, que tenga la posibilidad de estudiar en las fuentes y de investigar cosas nuevas, bajo el supuesto de que la escuela no puede darle a uno el conjunto de los conocimientos humanos sino los métodos esenciales para adquirirlos.

NECESIDADES SOCIALES E INDIVIDUALES QUE SE CONSIDERARON PARA LA ELABORACION DEL PLAN DE ESTUDIOS

El Colegio de Ciencias y Humanidades se creó en enero de 1971. En aquel entonces, algunas necesidades sociales, que justificaron su creación fueron las siguientes:

1. La UNAM requiere unir distintas facultades y escuelas. Vincular a la Escuela Nacional Preparatoria con las facultades; crear un órgano de innovación permanente de la Universidad.

2. Se requiere la utilización óptima de los recursos destinados a la educación; la formación sistemática e institucional de nuevos cuadros de enseñanza media superior; la formación de estudios preparatorios y/o terminales que el desarrollo del país reclama.

3. Se prevé que para la década de los 80's la demanda de matrícula para la enseñanza media superior sería cincuenta veces mayor que la que se tiene al inicio de los 70's.

4. El desarrollo del país necesita nuevas posibilidades para trabajadores en técnicas, oficios y artes aplicadas.

5. En el futuro las profesiones de carácter típicamente interdisciplinario tendrán un amplio mercado de trabajo.

6. Hay necesidad de estudiar áreas y problemas que requieren el concurso de varias disciplinas.

7. Estudiar los problemas de desarrollo regional en nuestro país.

AREAS DE FORMACION EN QUE ESTA ORGANIZADO EL PLAN DE ESTUDIOS

El Plan de Estudios del CCH está organizado en cuatro áreas de formación obligatoria para todos los alumnos: Matemáticas, Ciencias Experimentales, Histórico-Social y Taller del Lenguaje. Además, es obligatorio cursar un idioma extranjero y sólo de manera optativa cursar alguna Opción Técnica. El área de Matemáticas incluye seis semestres obligatorios, de los cuales los cuatro primeros son comunes para todos los alumnos y comprenden las materias de Algebra (dos cursos), Geometría Euclideana (un curso) y Geometría Analítica (un curso). Los dos últimos semestres obligatorios de Matemáticas incluyen las opciones (dos cursos de la misma opción) de Estadística, Lógica, Cálculo Diferencial e Integral. En el área de Ciencias Experimentales los cuatro primeros semestres son comunes a todos los alumnos y se estudian las siguientes asignaturas: Física, Química, Biología y Método Científico Experimental; en los dos semestres siguientes, el alumno lleva dos cursos de entre las siguientes opciones: Física, Química o Biología. En el área Histórico-Social los cuatro primeros semestres son también comunes a todos los estudiantes y en ellos se cursan las siguientes asignaturas: Hist. Univ. Mod. y Contemporánea, Hist. de Méx. (dos cursos) y Teoría de la Historia; en los dos últimos semestres el alumno lleva dos cursos que opta entre las siguientes posibilidades: Estética, Etica o Filosofía. En el área del Taller del Lenguaje, los cuatro primeros semestres obligatorios incluyen las siguientes asignaturas: Taller de Redacción (cuatro cursos), Taller de Lectura de Clásicos Universales, Taller de Lectura de Clásicos Españoles e Hispanoamericanos, Taller de Lectura de Autores Modernos Universales, Taller de Lectura de Autores Modernos Españoles e Hispanoamericanos. Finalmente existen dos grupos de opciones (Psicología, Administración, Economía, Derecho, Ciencias Políticas y Sociales, Geografía, Griego, Latín) y (Cibernética y Computación, C. de la Salud, C. de la Comunicación, Diseño Ambiental y Taller de Expresión Gráfica) de las cuales el alumno optará dos y una asignatura respectivamente y que cursará en los dos últimos semestres.

NOCIONES BASICAS DE CADA UNA DE LAS AREAS DE CONOCIMIENTO EN QUE ESTA DIVIDIDO EL PLAN DE ESTUDIOS DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES DE LA UNAM

Este es un aspecto difícil de determinar. El Plan de Estudios no es explícito en este punto. Una forma de identificar tales nociones básicas es analizar los Programas de estudio para cada una de las diferentes asignaturas. Sin embargo acá aparece una dificultad: con el tiempo, los Programas originales han experimentado cambios que han llevado a que en la actualidad los diferentes Planteles que integran el CCH cuenten con Programas de estudios diferentes entre sí y con los originales.

Por otro lado, el concepto nociones básicas del Plan de Estudios es posible entenderlo, para el caso del CCH, al menos en dos sentidos. Se podría entender como aquellas nociones que abarcasen "todo" el Plan de Estudios y en consecuencias serían aquellas nociones que, o permeasen los seis semestres o fuesen apareciendo a lo largo de los seis semestres. Pero. también se podrían entender como aquellas nociones que "todo" alumno que haya cursado el CCH las conoce, y en tal sentido, deberían de ser sólo aquellas susceptibles de presentarse en los cuatro primeros semestres, que son los semestres en donde se cursan "todas" las materias obligatorias para todo estudiante.

Ante este estado de cosas, en este trabajo se han decidido dos cuestiones: primera, entender como "nociones básicas de cada una de las áreas" como aquellas que cubren los cuatro primeros semestres y, segunda, tomar como fuente para determinar tales nociones básicas a los Programas de estudios vigentes (para todas las asignaturas que se estudian en los cuatro primeros semestres), en el Plantel Sur del CCH.

Después de decidir los dos aspectos arriba enunciados y realizar el análisis de los programas vigentes, para las distintas asignaturas obligatorias de los cuatro primeros semestres, en el Plantel Sur del CCH, se llegaron a identificar las siguientes nociones básicas para las cuatro áreas del conocimiento que integran el Plan de Estudios:

MATEMATICAS

- Número real.
- Modelo matemático.
- Función.
- Ecuación.
- Transformación geométrica.
- Semejanza de figuras.
- Congruencia de figuras.
- Método axiomático.
- Figura geométrica.
- Angulo.
- Polígono.
- Sistema de coordenadas.
- Lugar geométrico.
- Gráfica de una relación de dos variables reales.
- Pendiente de una recta.
- Ecuación de un lugar geométrico.
- Secciones cónicas.

C.EXPERIMENTALES

- Mét. experimental.
- Explicación científica.
- Relación causal.
- Fenómeno natural.
- Fenómeno físico.
- Fenómeno químico.
- Magnitud física.
- Medición.
- Error de medición.
- Masa.
- Tiempo.
- Distancia.
- Volúmen.
- Densidad.
- Energía.
- Fuerza.
- Velocidad.
- Mov. uniformemente acelerado.
- Mezcla.
- Reacción química.
- Oxidación.
- Reducción.
- Estructura atómica.
- Atomo.
- Molécula.
- Ión.
- Célula.
- Evolución.
- Herencia.
- Reproducción.
- Diversidad.
- Clasificación
- Medio ambiente.
- Mét. Científico.

TALLER DEL LENGUAJE

- Lengua.
- Lenguaje.
- Idioma.
- Semántica.
- Sintáxis.
- Pragmática.
- Género literario.
- Estilo literario.
- Figura del lenguaje.
- Análisis literario.
- Investigación documental.
- Resumen.
- Ensayo.

HISTORICO-SOCIAL

- Ideología.
- Proceso social.
- Comprensión de un hecho social.
- Medio de producción.
- Capitalismo.
- Socialismo.
- Comunismo.
- Superestructura.
- Cultura.
- Revolución.
- Economía.
- Subdesarrollo.
- Historia.
- Religión.
- Mito.
- Materialismo histórico.
- Materialismo dialéctico.
- Dialéctica.

CONDICIONES EN LAS CUALES SE REALIZARA EL CURSO

El curso se realizará en condiciones específicas. Algunas de tales condiciones tienen que ver con el propio curso -el cual incluye tanto a las características del profesor, como aquellas que corresponden a los alumnos- y al entorno en que tendrá lugar.

En cuanto a las características del curso se tienen las siguientes:

-Nombre del curso: APLICACIONES DE LAS MATEMATICAS.

-Carácter del curso: EXTRACURRICULAR.

-Alumnos a quienes está dirigido: ALUMNOS DE CUALQUIER SEMESTRE.

-Duración del curso: 60 horas.

-Duración de las sesiones: TRES HORAS DIARIAS CON 15 MINUTOS DE DESCANSO A LA MITAD DE LAS SESIONES.

-Costo del curso: Gratuito para alumnos del Colegio.

-Materiales didácticos: Adecuados al curso y en cantidad suficiente.

-Cupo en el curso: Máximo 40 alumnos.

CARACTERISTICAS DE LOS ALUMNOS QUE ASISTEN AL CURSO.

-Mínimamente han completado su educación media básica (secundaria).

-Posiblemente no domine los conocimientos anteriores ni tenga las actitudes y habilidades adecuadas para el curso.

-No importa la situación académica en que se encuentre al momento de asistir al curso.

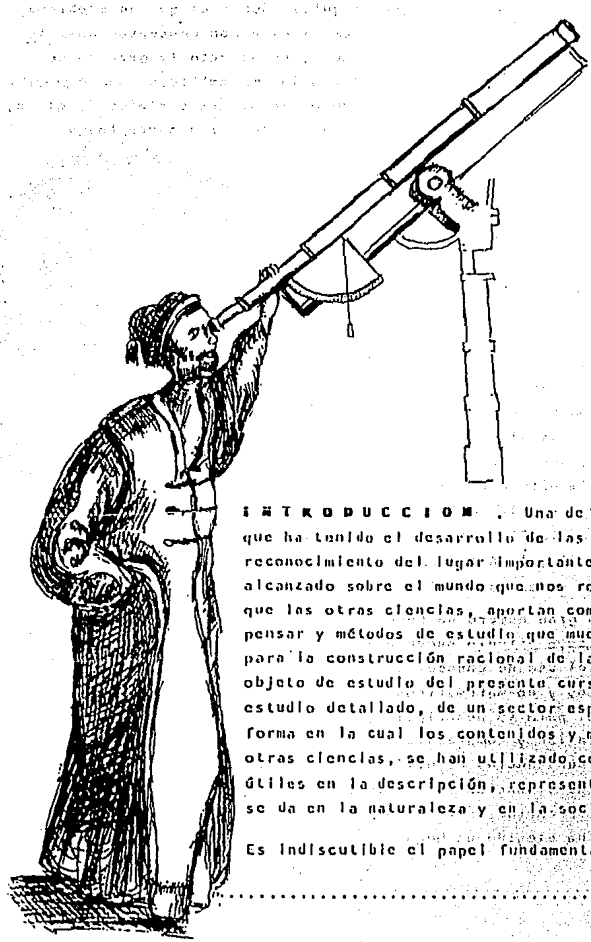
CARACTERISTICAS DEL PROFESOR QUE IMPARTIRA EL CURSO.

-El profesor tiene la formación adecuada para impartirlo.

CONDICIONES EXTERNAS EN LAS CUALES SE REALIZARA EL CURSO.

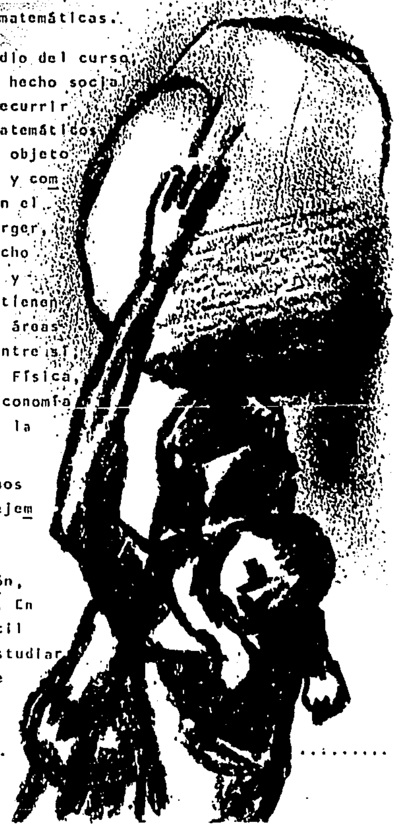
-En cuanto a las condiciones externas sólo consideramos aquellas de carácter material y que la institución proporciona. En este aspecto se considera que tales condiciones son adecuadas.

2. PROGRAMA DEL CURSO



INTRODUCCION . Una de las motivaciones más fuertes que ha tenido el desarrollo de las matemáticas se encuentra en el reconocimiento del lugar importante que ocupa en el conocimiento alcanzado sobre el mundo que nos rodea. Las matemáticas, al igual que las otras ciencias, aportan complejos conceptuales, formas de pensar y métodos de estudio que muestran ser eficaces herramientas para la construcción racional de la realidad. Por tal razón, el objeto de estudio del presente curso es ilustrar, a través del estudio detallado, de un sector específico de la realidad, la forma en la cual los contenidos y métodos de las matemáticas, y de otras ciencias, se han utilizado como los instrumentos conceptuales útiles en la descripción, representación y comprensión de lo que se da en la naturaleza y en la sociedad.

Es indiscutible el papel fundamental que juegan las matemáticas un la construcción racional de la realidad. Pero, también es indiscutible reconocer que es imposible racionalizar la realidad con puras matemáticas. Ningún sector de la realidad, excepto las propias matemáticas, se puede describir, representar o explicar sólo con contenidos y métodos matemáticos. Por muy simple que sea el sector de la realidad al que dirijamos nuestra atención, con el objeto de realizar su construcción conceptual, requerirá, en general, conceptos y métodos provenientes de áreas del conocimiento diferentes de las que tradicionalmente corresponden a las matemáticas. En otras palabras, lo que se quiere decir es que un problema real se estudia con conceptos matemáticos y con conceptos no-matemáticos. Esta es la razón por la cual, un aspecto importante de este curso es mostrar que presentar a las matemáticas como expresión numérica de la naturaleza y de algunos fenómenos sociales, reclama, de manera imprescindible, el tener que recurrir a conceptos y métodos ajenos a las propias matemáticas.

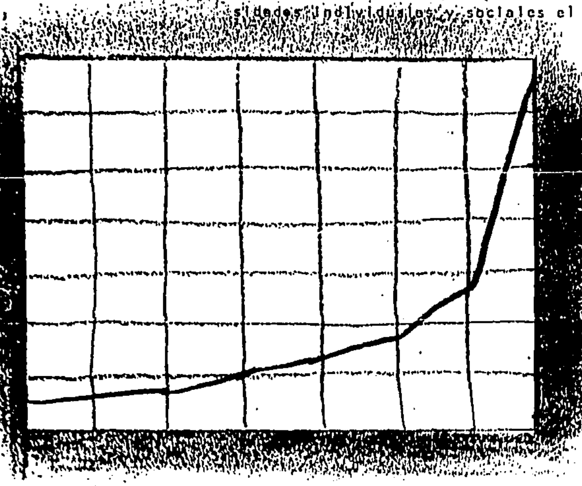


En resumen, el objeto de estudio del curso consiste en el análisis de un hecho social que muestra la necesidad de recurrir tanto a conceptos y métodos matemáticos como a no-matemáticos, con el objeto de describirlo, representarlo y comprenderlo. En tal sentido, en el curso se persigue hacer converger, a través del estudio de un hecho social, conceptos, relaciones y métodos que usualmente se mantienen separados, por corresponder a áreas del conocimiento diferentes entre sí, como pueden ser la Lógica, la Física, la Química, la Biología, la Economía, la Demografía, la Astronomía, la Sociología y las Matemáticas.

Existe un gran número de hechos sociales cuyo estudio puede ejemplificar el uso de conceptos matemáticos y no-matemáticos necesarios para su descripción, representación y comprensión. En estas circunstancias es difícil decidir qué situación real estudiar y cuáles descartar. Para este curso se ha elegido un hecho social de gran actualidad porque es factor determinante de otro gran número de ellos: **el crecimiento demográfico de una población.** Con este hecho están relacionados desde la cantidad de tierra cultivable necesaria, hasta el volúmen de desperdicios que terminan por contaminar la corriente de un río de agua dulce.

Comprender la forma en la cual crece una población humana es fundamental porque las decisiones políticas, sociales y económicas que se tomen en un determinado tiempo y aquellas que se planeen para un futuro mediano o lejano están determinadas, en mucho, por la forma en que se piensa, o se espera, que evolucione la población a que directamente afecta. La demanda de alimento, trabajo, salud y demás bienes y satisfactores, depende en principio de la población a quien está dirigida. Cuando se planean bienes y sevicios para un futuro próximo o lejano, ésta previsión se realiza siempre tomando en cuenta un cierto patrón de crecimiento poblacional.

El hombre siempre ha intentado conocer la realidad. Para justificar esta actitud se han recurrido a dos tipos de razones: su propia curiosidad y el imperativo de satisfacer necesidades individuales y colectivas. La primera razón asigna al conocimiento valor por sí mismo, la segunda lo juzga en tanto instrumento utilitario y pragmático hacia fines de carácter práctico. Aún reconociendo el mérito y valor que tiene la curiosidad en sí, la actitud inquisitiva, un aspecto fundamental en este programa es hacer gravitar en las necesidades individuales y sociales el motor que mueve hacia el conocimiento de la realidad como uno de los recursos fundamentales para satisfacer necesidades materiales y que tienen los hombres en todo lugar y tiempo.



Otro aspecto importante en este programa es la forma en la cual se llevará a cabo el estudio de la situación real que se plantea. La forma particular de abordar el estudio de la situación se basa en el reconocimiento de que el aprendizaje de algo, por parte de un individuo, no es otra cosa que el enriquecimiento y reestructuración de la estructura cognitiva original que posea el aprendiz. En este sentido, el estudio de la situación real se realiza en tres momentos: primero se identifica en la estructura cognitiva del alumno la conceptualización que tenga acerca de la situación bajo estudio; a continuación el estudiante recuerda o reconstruye los conocimientos necesarios para el estudio de la situación y por último, el alumno retoma, de nueva cuenta, la situación con el objeto de integrar, en dicho estudio, los diferentes elementos teóricos indispensables para su explicación o comprensión.

NOCIONES FUNDAMENTALES QUE SE DESARROLLAN EN EL CURSO

Estudiar el crecimiento demográfico de una población humana y algunas de sus consecuencias, requiere de un gran número de nociones. Estas nociones pertenecen a áreas de conocimiento tan diversas como son la Demografía, la Sociología, la Economía, las Matemáticas, la Ecología, la Biología, etc. Sin embargo, para hablar, pensar, razonar, teorizar, representar, describir, etc., el crecimiento demográfico hay una serie de nociones básicas, fundamentales, sin las cuales sería muy difícil conceptualizar tal situación. Entre tales nociones, que se desarrollan en el curso, podemos anotar las siguientes: necesidad individual o social, satisfactor de una necesidad, proceso social que conduce a la satisfacción de una necesidad, conocer en el sentido de "qué", conocer en el sentido de "cómo", explicación de un fenómeno natural, comprensión de un hecho social, crecimiento demográfico, natalidad, mortalidad, inmigración, índices demográficos, porcentaje, función, sucesión, serie, límite de una sucesión, número irracional, el número e, función exponencial y modelo matemático.

OBJETIVOS TERMINALES DEL CURSO.

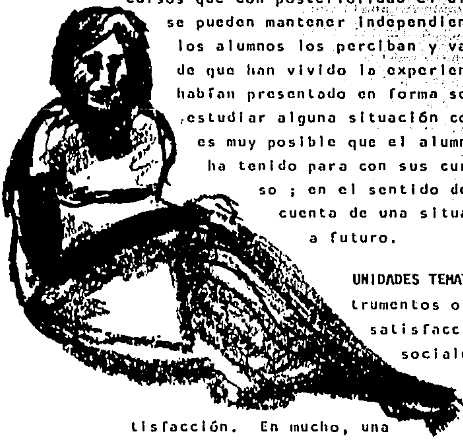
Al final del curso se pretende que el alumno:

- haya desarrollado una cultura matemática en lo que ésta tiene de lógica y de expresión numérica de la naturaleza y de algunos fenómenos sociales;
- describa el proceso que se sigue para satisfacer alguna necesidad ya sea individual o social;
- conozca en que consiste comprender un hecho social;
- comprenda, reconozca, sea consciente, que la comprensión de un hecho social se da en términos de conceptos (y relaciones entre ellos) que pertenecen a diferentes áreas del conocimiento;
- reconozca los factores principales que determinan el crecimiento demográfico de una población humana;
- comprenda la naturaleza exponencial del crecimiento demográfico de una población humana;
- reconozca diferentes hechos sociales para los cuales el crecimiento demográfico es un factor determinante;
- conozca el proceso de matematización que lleva a un modelo matemático para el crecimiento demográfico de una población humana;

- identifique los alcances y limitaciones que tiene un modelo matemático;
- conozca algunos conceptos, métodos y algoritmos matemáticos y demográficos que se utilizan para obtener un modelo matemático para el crecimiento de la población humana;
- conozca un método para el estudio de situaciones concretas reales.

RELACION DEL CURSO CON LOS ANTERIORES Y POSTERIORES A EL

El presente curso está relacionado con los que con anterioridad el alumno ha llevado en virtud de que en él se retoman algunos de los contenidos que ha estudiado para hacerlos converger o integrar, a través de la explicación de un hecho social. Con relación a los cursos que con posterioridad el alumno llevará, si bien, en general, se pueden mantener independientes entre sí, es probable que los alumnos los perciban y valoren de otra manera en virtud de que han vivido la experiencia de que racionalidades, que se habían presentado en forma separada, convergen al momento de estudiar alguna situación concreta real. En otras palabras, es muy posible que el alumno "extrapole" la experiencia que ha tenido para con sus cursos pasados (por el presente curso ; en el sentido de que conjuntamente pueden dar cuenta de una situación real), a aquellos que cursará a futuro.



UNIDADES TEMATICAS DEL PROGRAMA. Uno de los instrumentos o recursos fundamentales para la satisfacción de necesidades individuales o sociales es el conocimiento, en general. Sin éste, se puede decir que es prácticamente imposible su satisfacción. En mucho, una justificación que hay para la búsqueda del saber, es el reconocimiento de la función principalísima que desempeña durante el proceso de producir satisfactores de necesidades. En este orden de ideas, el curso se puede resumir a la presentación y análisis de necesidades individuales y sociales para las cuales, al momento de intentar satisfacerlas, es imprescindible el estudio del crecimiento demográfico de una población. Así las cosas, son dos los grandes temas que se abordan en el curso: las necesidades individuales y sociales en cuya satisfacción el conocimiento del crecimiento demográfico es importante, y el estudio del propio crecimiento demográfico de una población humana.

Es posible, por razones metodológicas, separar en dos grandes grupos los elementos conceptuales que se requieren para el estudio del crecimiento demográfico: los matemáticos y los no-matemáticos. Entre los primeros están, las nociones de función exponencial y de modelo matemático; entre los segundos, los de natalidad, mortalidad e inmigración. A continuación se describen con brevedad los dos Temas que integran este programa.

PRIMERA UNIDAD: las necesidades sociales y el crecimiento demográfico.

Los individuos, y la sociedad en su conjunto, presentan un gran número de necesidades. A medida que las sociedades se han tornado cada vez más complejas, las formas de satisfacer necesidades también han ganado en complejidad. Deteniéndonos a considerar lo que ocurre en nuestro entorno, no puede uno dejar de advertir la amplísima variedad de actividades orientadas a satisfacer necesidades individuales y sociales.

En esta Unidad se analizan, en forma detallada, diversos procesos que conllevan a la satisfacción de necesidades individuales y sociales. En particular, la gran diversidad de problemas que hubo de solucionar para producir algún satisfactor. Se ponen de relieve los distintos elementos -recursos materiales, económicos, humanos- que son indispensables para la generación de satisfactores. Especialmente se hace énfasis en el trabajo socialmente útil en el cual, el que lo efectúa, pone en acción todas sus capacidades -conocimientos, habilidades, destrezas y valores- para la producción de bienes y servicios.

En estrecha relación con lo anterior, se analizan los factores sociales fundamentales que determinan la cantidad de satisfactores que una determinada comunidad necesita. Esto nos lleva a reconocer en el tamaño de la población a uno de los factores centrales que determinan la cantidad de satisfactores que deben producirse, y en poner en claro que si se quieren planear políticas que prevengan necesidades futuras para una determinada población, se hace necesario tener alguna idea del patrón de crecimiento que con el tiempo exhibe tal población. Lo anterior nos lleva a poner de manifiesto el papel que desempeña el conocimiento (en este caso la comprensión de un hecho social) en el proceso que se sigue para la satisfacción de una necesidad social.

En este Tema, al tiempo que se intentan desarrollar algunas habilidades intelectuales, se aprende algo relacionado con el mundo que nos rodea. Reflexionar acerca de lo que ocurre en nuestro entorno, observar hechos aislados, pero también identificar las múltiples relaciones que ligan a situaciones en apariencia ajenas, son actividades que propician el desarrollo de capacidades intelectuales como las de análisis, síntesis,

establecimiento de correlaciones que contribuyen a tomar conciencia de lo que ocurre alrededor nuestro, y a percibir y valorar la realidad de otra manera....

NOCIONES BASICAS DEL TEMA I

Las nociones básicas que en este Tema se desarrollarán, son las siguientes:

- necesidad individual y social;
- satisfactor de una necesidad;
- proceso para satisfacer una necesidad;
- recurso humano, económico y material;
- conocer en el sentido de "cómo";
- conocer en el sentido de "qué"

OBJETIVOS TERMINALES DEL TEMA I

Al concluir el estudio del Tema, se pretende alcanzar los siguientes objetivos :

Que el alumno:

- sea consciente de la multiplicidad de necesidades que debe satisfacer un individuo, y la sociedad, para su sobrevivencia;
- sea consciente de que sólo con organización social es posible dar satisfacción a la gran mayoría de nuestras necesidades;
- sea consciente del papel que desempeña el trabajo humano, socialmente útil, en la satisfacción de nuestras necesidades;
- sea consciente del papel que desempeñan los **conocimientos**, las habilidades y las actitudes, en la realización de algún trabajo socialmente útil;
- valore sus conocimientos adquiridos con anterioridad;
- reconozca la importancia que tiene el tamaño de una población humana como factor central que determina la cantidad de satisfactores que necesita;
- comprenda qué es conocer algo en el sentido de **qué**, y que es conocer algo en el sentido de **cómo**.

CONTENIDOS DEL TEMA I En esta Unidad temática se desarrollan los siguientes conceptos:

Necesidad individual y social; satisfactor; proceso que lleva a producir un satisfactor; trabajo socialmente útil; recursos humanos, materiales y económicos; conocimiento en el sentido de **qué**; conocimiento en el sentido de **cómo**; relación entre la cantidad de satisfactores y el tamaño de una población, así como con el volumen de satisfactor proporcionado.

METODO DE TRABAJO

A. Las actividades de enseñanza-aprendizaje que se utilizan con el objeto de promover los aprendizajes que se proponen en el tema, incluyen las siguientes :

* Contestar cuestionarios, orales o escritos.
* Explicaciones del profesor.
* Elaboración de diagramas geométricos.

CONTESTAR CUESTIONARIOS. Esta actividad se juzga adecuada en virtud de que:

+ Un gran número de conceptos, relaciones y algoritmos de Matemáticas, Demografía, Ecología, Sociología se han enseñado con anterioridad a los alumnos y una forma de traerlos a su memoria es preguntándolos;
+ mediante preguntas es posible dirigir la atención de los alumnos hacia aspectos relevantes del objeto de estudio;
+ obliga al estudiante a dirigir su esfuerzo hacia lo que se esté estudiando y lo lleva a participar más activamente en el proceso enseñanza-aprendizaje;

+ es un indicador -con todos sus peros que tiene- del grado, mínimamente, de información, que un alumno posee;
+ puede ser útil para promover la capacidad de reflexión, de síntesis, de análisis, de poner en juego las capacidades intelectuales de que se dispone.

EXPLICACIONES DEL PROFESOR. Esta actividad, que se trata de minimizar en la propuesta metodológica que se hace, se justifica en virtud de que :

+ en ocasiones hay necesidad de aclarar alguna cuestión que cae fuera del alcance del grupo;
+ hay necesidad de remarcar o hacer énfasis en algún aspecto;
+ en la metodología que se propone, el profesor orienta el proceso enseñanza-aprendizaje;
+ hay la necesidad de señalar extensiones a lo que se esté estudiando y que pueden caer fuera del alcance de los alumnos.

ELABORACION DE DIAGRAMAS GEOMETRICOS. Esta actividad se vé justificada por las razones siguientes:

+ Ayuda a formar representaciones de objetos y hechos que ocurren a nuestro alrededor, sin las cuales no es posible el pensamiento;
+ ayuda a desarrollar habilidades intelectuales como las de análisis, síntesis, abstracción, generalización;
+ ayuda a distinguir los elementos relevantes de los irrelevantes en una situación determinada de acuerdo a intereses específicos;
+ ayuda a la elaboración de modelos teóricos, mentales o materiales que es una finalidad del pensamiento científico.

B. En general, durante el curso, y en particular en este tema, las actividades antes descritas se llevan a cabo en tres formas diferentes: con trabajo individual, por equipos y grupal. Cada una de estas formas tiene alcances y propósitos definidos.

TRABAJO INDIVIDUAL. En mucho, el aprendizaje es algo individual: la decisión de realizarlo, el esfuerzo empeñado, las vivencias y experiencias que se tengan, las características biológicas propias.

Por otro lado, si bien la cultura -en el sentido amplio del término- de que se apropia un individuo pertenecen al grupo social en que le tocó vivir, los valores, actitudes, habilidades y conocimientos que posea tienen una vertiente individual.

Trabajar en forma individual ayuda a capacitarnos en la actividad fundamental del hombre : el trabajo socialmente útil.

TRABAJO POR EQUIPOS Y GRUPAL. Estas formas de trabajo son importantes puesto que se está de acuerdo en que el aprendizaje es un proceso eminentemente social. El trabajo colectivo contribuye a desarrollar un pensamiento flexible, que fácilmente procese información, establezca relaciones y que desarrolle una gran variedad de símbolos mentales. Por otro lado, el trabajo colectivo, si bien no es fácil realizarlo, fomenta y desarrolla valores y actitudes como la responsabilidad social, el compañerismo, la solidaridad, la tolerancia, el antidogmatismo, el respeto al trabajo ajeno y la honestidad intelectual.

Antes de continuar cabe señalar que:

1° En términos generales, en las actividades enseñanza-aprendizaje que se proponen en este trabajo, a fin de que los estudiantes logren los propósitos del Tema, se procura que el trabajo individual anteceda al trabajo por equipos o grupal. La razón fundamental para esto es, por un lado, que ello es una manera de garantizar la reflexión o el análisis individual y, por otro lado, permite fomentar o inculcar la actitud de discutir con un análisis previo y lograr la claridad, en el alumno, de que dar una respuesta correcta y "defenderla", en mucho depende de la profundidad con la que se haya analizado el punto a discusión.

2° Se considera que los equipos deberán tener un mínimo de cuatro personas y un máximo de seis. Un número mayor o menor de integrantes por equipo, "empobrecerían" las discusiones que se den en el seno de éste, unos por reducidos y otros por extensos.

La formación de los equipos puede ser voluntaria en unos casos y predeterminada en otros. Aparentemente la primera de ellas es más conveniente que la segunda en virtud de que los estudiantes al escoger las personas con las que van a trabajar (generalmente sus amigos), se crea un ambiente favorable para el trabajo, puesto que, el alumno los conoce, comparte gustos, intereses, inquietudes, en fin, existen lazos amistosos. Sin embargo, si deseamos que nuestros estudiantes valoren a sus semejantes no por la raza, el color, el físico, el vestido o la posición económica sino por sus valores humanos, un primer obstáculo a vencer, es que ellos se den cuenta que es posible trabajar "a gusto", con personas inclusive diametralmente opuestas a ellas en los aspectos anteriormente señalados. Por lo que no es nada recomendable que siempre se formen equipos de manera voluntaria, pues esto, no sólo impide la integración del grupo como tal sino que, agudiza el sectarismo tan marcado en la mayoría de los grupos. Formar equipos de una manera predeterminada por ejemplo, si son cuarenta alumnos "enumerarlos del uno al diez" tantas veces sea necesario hasta que todos tengan asignado un número, para que posteriormente trabajen los "unos con los unos", "los doses con los doses", etc; es un procedimiento que si bien no nos garantiza la integración total del grupo, al menos permite que todos trabajen con todos mínimamente una vez durante el curso. Con esto se pretende lograr, al menos, que cuando un alumno se refiera a otro lo haga por su nombre y no por "señas" como es lo más común.

C. En los dos apartados anteriores se ha expuesto, tanto el tipo de actividades que se efectuarán durante el desarrollo del Tema, como las formas de llevarlas a cabo. Ahora corresponde especificar cuál es el procedimiento que se sigue para revisar el trabajo realizado por los estudiantes.

Las preguntas que el profesor formula a los alumnos, bien sean orales o escritas, primero, se contestan individualmente; en ocasiones, las respuestas dadas por cada estudiante se discuten por equipo e invariablemente para finalizar se procede a la discusión grupal. Esto último, es el medio que se utiliza para la revisión del trabajo individual y por equipo, cuando la actividad consite en contestar cuestionarios bien sean orales o escritos. La manera de llevarse a cabo es, en términos generales, la siguiente:

1. Si a la discusión grupal únicamente le antecede el trabajo individual, finalizado éste, el profesor soli-

cita a un alumno lea su respuesta a la pregunta en cuestión y, la somete a consideración del grupo, de tal suerte que éste, en su conjunto, establezca la respuesta correcta, bien sea ratificando o rectificando la dada oralmente por uno de sus integrantes. Este procedimiento se sigue para cada una de las preguntas que el profesor haya formulado tanto en forma oral como escrita.

ii. Cuando después del trabajo individual se continúa con la discusión por equipo, una vez concluída ésta, se procede a la discusión grupal. Para lo cual, cada equipo nombra un representante. Este, por petición del maestro, lee las conclusiones a las que llegó su equipo. Aclarando en su participación cuáles fueron los puntos tanto de acuerdo como de desacuerdo. Después de conocer las diferentes conclusiones a las que llegaron los equipos, a los que se les concedió la palabra, y plantear las discrepancias y coincidencias de éstos, se procede a llevar a cabo la discusión grupal para aclarar sobre todo las cuestiones en las que no hubo acuerdo general, de tal manera que al finalizar la actividad se tengan las conclusiones generales sobre la(s) pregunta(s) formulada(s).

Llevar a cabo esta discusión, además de que enriquece la ya realizada en los equipos, es el mecanismo que se utiliza para "unificar" tanto las respuestas como los conocimientos que se van adquiriendo.

Los trabajos escritos, por lo general, resúmenes, son entregados al profesor para que éste, fuera de clase, los revise, haga las correcciones y observaciones pertinentes y los entregue a la brevedad posible.

La forma en que se revisan los tipos de actividades que no han sido considerados en este apartado, se explicita en las ACTIVIDADES que hacen uso de ellos.

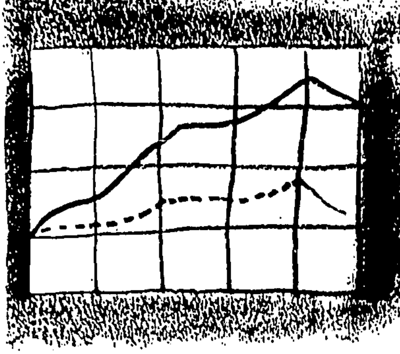
CONTENIDO INSTRUMENTAL Para llevar a cabo las actividades en este tema, se hace uso, fundamentalmente, de cuestionarios, orales y escritos, elaborados por el profesor.

EVALUACION. Una de las características propias de la educación institucionalizada, es asignar una calificación a los estudiantes a efectos de promoción o no promoción. Lo anterior debe realizarse para todos y cada uno de los cursos que el Plan de Estudios, de la institución, contempla. Sin embargo, como es sabido, el curso que en estas páginas se propone, es extracurricular, De aquí que, el profesor que lo imparte no está obligado a asignarle una calificación, con fines de acreditación, a los alumnos que a él asistan. Esta es la razón fundamental por la cual la evaluación sumativa queda excluída de este curso, y en particular del tema que ahora nos ocupa.

Lo realmente importante en este tema, como en el siguiente -al igual que en cualquier otro, aún de un curso obligatorio- es detectar, a fin de superar, las dificultades con las que el alumno se está enfrentando, los errores que está cometiendo y el aprovechamiento que está teniendo, con el objeto de mejorar el proceso enseñanza-aprendizaje en un momento en que todavía sea factible hacerlo. Bajo este supuesto, la evaluación que se llevará a cabo en este tema, para comparar lo que el alumno va logrando o ha logrado, con lo que se espera alcance, es la evaluación formativa durante el desarrollo de las actividades. Para relizarla, el maestro considera, entre otras cosas, las respuestas orales o escritas que el estudiante da a sus pregúntas, las preguntas que formula y los argumentos que utiliza para fundamentar una posición.

SEGUNDA UNIDAD: el patrón de crecimiento demográfico de una población humana y algunas de sus implicaciones sociales.

I N T R O D U C C I O N . Es fundamental reconocer que la planeación, a futuro, de satisfactores de necesidades individuales y sociales reclama, de forma principal, el conocimiento de la manera en la cual una población humana varía, en su tamaño, con el tiempo.



En esta Segunda Unidad se estudiará el crecimiento demográfico, algunos de los factores sociales, económicos, biológicos y culturales que lo determinan, así como aspectos matemáticos elementales necesarios para poder hacer una descripción cuantitativa de la forma en la cual se espera que este crecimiento evolucione con el tiempo.

Es importante que el alumno tome consciencia de los hechos sociales y fenómenos naturales con quienes el crecimiento demográfico está relacionado. Por ejemplo, de qué manera el credo religioso de una persona influye en la forma en que concibe a la familia y cómo esta concepción se refleja en su conducta sexual y por lo tanto, finalmente, en la manera en que la población crece.

Al hacer lo anterior el alumno gana en racionalidad, en conciencia, en criterio y es muy posible que cambie en algo su visión del mundo y esto se manifieste en su propia conducta individual. Identificar el mayor número de elementos y la forma en que de manera directa o indirecta afectan al crecimiento demográfico ayuda al alumno a encontrar relación entre hechos aparentemente ajenos y permite que avance en el desarrollo de un pensamiento estructurado en el cual la construcción de relaciones es fundamental. Un pensamiento científico requiere ver al mundo como un escenario en donde grandes conjuntos de hechos, sucesos o eventos ocurren en estrecha conexión unos con otros, influyéndose, determinándose, condicionándose.

En el mundo hay "cosas" y esas cosas tienen propiedades, algunas de ellas cuantificables o de forma. El crecimiento demográfico es un ejemplo particular de "cosa" existente. Del crecimiento demográfico de una población humana se pueden decir muchas cosas. En particular hay dos aspectos que son relevantes: establecer otros hechos con los cuales está relacionado y dar cuenta de su comportamiento en el tiempo. Porque, visto retrospectivamente, el crecimiento demográfico de una población presenta cambios, variaciones. En algunos momentos aumenta, en otros disminuye y la propia rapidez con que esto se realiza también varía. En otras, el crecimiento demográfico posee aspectos cuantificables, es decir, que pueden expresarse en términos matemáticos. Naturalmente primero hay que ubicar tales aspectos, elaborar los conceptos no-matemáticos que permiten conceptualizarlos y poder referirse a ellos fácilmente y después expresarlos cuantitativamente.

Parece claro que el crecimiento demográfico está relacionado con otros hechos. Sin embargo no con todos ellos se ha podido establecer una relación cuantitativa. En esta Unidad se pretende establecer una relación cuantitativa entre el número de habitantes que tendrá una población en función del tiempo. Aún un tratamiento elemental de esta relación necesita conceptos matemáticos como porcentaje, razón de crecimiento y aquellos pertinentes

para describir un proceso "infinito" que se repite una y otra, y otra vez, bajo ciertas restricciones como son sucesión, serie, límite de una sucesión, el número e y la función exponencial.

Ganar alguna comprensión acerca del crecimiento demográfico de una población humana sólo se puede lograr cuando se reconocen diversos factores con quienes tal hecho está relacionado y además se cuenta con los elementos conceptuales y metodológicos necesarios para su representación simbólica. Entre tales elementos, en general, aparecen algunos de naturaleza matemática y otros más ajenos a esta rama del conocimiento. Este es un hecho que por ninguna razón se puede perder de vista. Olvidarlo o descuidarlo, y así creer que con puros conceptos matemáticos es posible tal cosa, es un gravísimo error.

NOCIONES BASICAS DEL TEMA II

Para esta Unidad, hay algunas nociones básicas sin las cuales no se podría comprender, aún a nivel elemental, el crecimiento demográfico, y cómo éste se espera que se comporte a futuro. Entre tales nociones están las siguientes:

- Comprensión de un hecho social.
- Factores demográficos: natalidad, mortalidad, inmigración, emigración.
- Modelo matemático.
- Ecuación demográfica.
- Función exponencial.
- Periodo de duplicación en una función exponencial.

OBJETIVOS TERMINALES DE LA UNIDAD II

Los Objetivos que se pretenden alcanzar al concluir el estudio de la Unidad, son los siguientes:

Que el alumno:

- estructure una serie de nociones y métodos, provenientes de

diferentes racionalidades, para la comprensión del crecimiento demográfico de una población humana y, algunas de sus consecuencias.

- Comprenda a las matemáticas como expresión numérica de un fenómeno social (el crecimiento demográfico de la población humana).
- Conozca los principales hechos que influyen en el crecimiento demográfico de una población humana: natalidad, mortalidad, emigración e inmigración.
- Conozca las nociones de función, serie, sucesión, límite de una sucesión, el número e como límite de una sucesión, función exponencial y periodo de duplicación de una función exponencial, necesarias para la descripción cuantitativa del crecimiento de una población en función del tiempo.
- Conozca el concepto de modelo matemático y "su" proceso de construcción, así como el papel que desarrolla en las ciencias sociales.
- Comprenda las razones fundamentales que pretenden dar cuenta del crecimiento exponencial de la población humana.
- Comprenda que cuando una población humana crece exponencialmente, los hechos sociales estrechamente relacionados con con tal crecimiento (demanda de alimentos, cantidad de tierra cultivable necesaria, demanda de recursos naturales, agotamiento de los recursos naturales, nivel de contaminación, etc.), también crecen en forma exponencial.
- Reconozca la necesidad que hay de recurrir a diversas disciplinas científicas, en forma simultánea, para comprender un hecho social.

CONTENIDOS DE LA UNIDAD II

En esta Unidad se abordan una serie de conceptos, relaciones y métodos indispensables para la conceptualización, descripción cuantitativa en función del tiempo, y correlación con otros hechos sociales, del crecimiento demográfico de una población humana.

Los conceptos que se desarrollarán son los siguientes:

- Crecimiento demográfico.
- Factores del crecimiento demográfico: natalidad, mortalidad, emigración, inmigración.
- Cuantificación de la natalidad, mortalidad, emigración e inmigración: índices demográficos.
- Porcentaje.
- Función.
- Ecuación demográfica.
- Sucesión.
- Serie.
- Límite de una sucesión.
- El número e.
- La función exponencial en sus diferentes representaciones: tabla, ecuación, gráfica.
- Recursos naturales.
- Contaminación.

Las relaciones que se desarrollan son las siguientes:

Relaciones entre:

- causa y efecto;
- crecimiento demográfico y natalidad, mortalidad, emigración e inmigración;

- elementos políticos, sociales, culturales, económicos y la natalidad, la mortalidad, la emigración y la inmigración;
- el crecimiento demográfico y la demanda y agotamiento de los recursos naturales, así como con la contaminación del medio ambiente.
- el crecimiento demográfico en función del tiempo.

Los métodos que se estudian en esta Unidad son algunos que pertenecen a la Demografía y otros a las Matemáticas, éstos son:

- Método demográfico: el censo.
- Métodos estadísticos elementales: descripción estadística de una población.
- Método analítico: el método de aproximaciones sucesivas.

METODO DE TRABAJO Las actividades de enseñanza-aprendizaje que se utilizan con el objeto de promover los aprendizajes que se proponen en el tema, incluyen los siguientes:

* Contestar cuestionarios, orales o escritos.
* Lectura de textos.
* Trabajos escritos, por lo general resúmenes.
* Explicaciones del profesor.

CONTESTAR CUESTIONARIOS, ORALES O ESCRITOS. Las razones que justifican el uso de esta actividad en el desarrollo del Tema II, son las mismas que se argumentaron a favor de su empleo en el Tema I.

LECTURA DE TEXTOS. Las razones que justifican la práctica de esta actividad son:

+ Realizada, con cierto método, ayuda a desarrollar las habilidades de abstracción, de síntesis y de análisis;
+ permite integrar aspectos diversos en un todo coherente;
+ pone al alcance hechos o situaciones de difícil acceso por otros medios;
+ es uno de los medios más poderosos de obtener conocimientos.

TRABAJOS ESCRITOS, POR LO GENERAL RESUMENES. Se recurre a esta actividad porque:

+ Se reconoce que la escritura es una forma fundamental de comunicación para alguien que tiene algo que decir;
+ permite desarrollar la capacidad de análisis y síntesis, al integrar en un todo coherente, elementos diversos;
+ desarrolla la capacidad de auto-crítica, en el sentido de que, por lo general, cuando se escribe se es más cuidadoso que cuando se habla.

EXPLICACIONES DEL PROFESOR. Las razones que justifican el uso de esta actividad en el desarrollo del Tema II, son las mismas que se argumentaron a favor de su empleo en el Tema I.

En general, durante el curso, y en particular en este Tema, las actividades antes descritas se llevan a cabo en tres formas diferentes: con trabajo individual, por equipos y grupal. Cada una de éstas tiene alcances y propósitos definidos, que han sido enumerados en la parte correspondiente al Tema I, por lo cual, no se considera pertinente insistir, de nueva cuenta, en ellos.

ELABORACION DE DIAGRAMAS O MODELOS GEOMETRICOS O MATERIALES. Las razones que justifican el uso de esta actividad en el desarrollo del Tema II, son las mismas que se argumentaron a favor de su empleo en el Tema I.

EXPLICACIONES DEL PROFESOR. Las razones que justifican el uso de esta actividad en el desarrollo del Tema II, son las mismas que se argumentaron a favor de su empleo en el Tema I.

En general, durante el curso, y en particular en este tema, las actividades antes descritas se llevan a cabo en tres formas diferentes : con trabajo individual, por equipos y grupal. Cada una de éstas tiene alcances y propósitos definidos, que han sido enumerados en la parte corespondiente al Tema I, por lo cual, no se considera pertinente insistir, de nueva cuenta, en ellos.

CONTENIDO INSTRUMENTAL

Para llevar a cabo las actividades en este tema, se hace uso, fundamentalmente, de cuestionarios, orales y escritos, elaborados por el profesor, textos seleccionados de libros y revistas y transparencias o filminas. En aquellas actividades dedicadas a la realización de experimentos o modelos, los enseres e instrumentos que se requieren para ello, se especifican en el lugar correspondiente.

EVALUACION

En la primera parte de este Capítulo se aclaró que el medio que se utilizaría, en el Tema I, para comparar lo que el alumno iba logrando o había logrado con lo que se esperaba alcanzara, sería la evaluación formativa. Al mismo tiempo, se explicitaron las razones de ello y se enunciaron los instrumentos que se emplearían para tal fin. Para el presente Tema, son válidas las consideraciones hechas para el Tema I.

CAPITULO III

DESCRIPCION DE LAS ACTIVIDADES Y MATERIALES DIDACTICOS PARA DESARROLLAR LOS TEMAS I Y II DEL PROGRAMA

INTRODUCCION

En este Capítulo se describen las actividades de aprendizaje que se piensa son adecuadas para que los estudiantes alcancen los objetivos planteados en las Unidades Temáticas que integran el Programa. Además de lo anterior, en este apartado aparecen los materiales didácticos elaborados o adaptados con la finalidad de que los alumnos los utilicen al realizar las diferentes actividades de aprendizaje. De manera muy general se puede decir que entre éstos se encuentran: contestar cuestionarios y realizar lecturas. Las formas de trabajo para las actividades anteriores incluyen trabajo individual, por equipos y grupal y los materiales didácticos utilizados son cuestionarios y lecturas.

Si bien las actividades aparecen en número y orden que se juzgan adecuadas, es muy posible que al organizar las diferentes sesiones de clase, el orden y número por realizar se vea modificado tomando en consideración el tiempo con que se cuente y la situación particular del grupo.

DESCRIPCION DE LAS ACTIVIDADES Y MATERIALES DIDACTICOS PARA EL TEMA I

INTRODUCCION

En una serie de 16 actividades, los alumnos, a partir de sus vivencias y experiencias personales, reflexionan, contestan cuestionarios y discuten acerca de las necesidades que la vida plantea a un individuo, sobre su satisfacción y los problemas que ella origina, así como el papel que en la solución de estos últimos desempeñan el trabajo humano y los conocimientos.

La segunda y tercera actividad están encaminadas a mostrar y aclarar una gran diversidad de necesidades que el hombre tiene que satisfacer, así como una primera clasificación de ellas en términos del lugar y tiempo en que se vive. La cuarta actividad exhibe de manera simple, parte del proceso que se sigue en la satisfacción de una necesidad en particular. En la quinta actividad se reconocen, explícitamente, dos elementos fundamentales para la solución de problemas que se presentan en la satisfacción de necesidades : el trabajo humano y los conocimientos. Al mismo tiempo se introduce una clasificación elemental de los problemas en base a la naturaleza de su solución, y en consecuencia, del tipo de conocimientos que las soluciones requieren. Por otra parte, se muestra el hecho de que a medida que los procesos, para satisfacer necesidades, aumentan en complejidad requieren, para su realización, de un trabajo humano cada vez más especializado. Finalmente, las actividades restantes están orientadas a que, utilizando un método de análisis semejante al llevado a cabo hasta ahora, se delimite un problema en particular cuya solución contribuye a la satisfacción de una necesidad, y que es el objeto de estudio en el Tema II.

ACTIVIDAD I-1 **PRESENTACION DEL CURSO.**

Al inicio de la primera sesión de trabajo, y después de una breve presentación de los integrantes del grupo, el profesor explica a los alumnos los siguientes aspectos del curso:

* Propósitos.
* Distintas formas de trabajo.
* Responsabilidad de los integrantes del grupo.

* Recursos necesarios.

* Evaluación.

ACTIVIDAD I-2 IDENTIFICACION DE NECESIDADES INDIVIDUALES Y COLECTIVAS.

Los propósitos de esta actividad son que los estudiantes reconozcan:

- El mayor número posible de necesidades que posee un individuo, y la sociedad en su conjunto así como la variación que éstas presentan en el tiempo y lugar en que se viva.
- La prioridad que en su satisfacción tienen unas necesidades sobre otras.

Para tal fin, el profesor, entrega a los estudiantes un cuestionario que será resuelto de manera individual y de acuerdo a las experiencias y vivencias de los alumnos. El cuestionario es el que a continuación se transcribe:

Cuestionario I-1

Necesidades de un individuo.

En todo tiempo y lugar el hombre para subsistir ha tenido que satisfacer una serie de necesidades. En un principio, sólo aquellas que garantizaran su sobrevivencia. Por otro lado, al tiempo en que la organización social se hace más compleja aparecen nuevas necesidades, pero al mismo tiempo surgen formas más eficaces de resolverlas. La actividad fundamental en que se basa la satisfacción de nuestras carencias es el trabajo socialmente útil.

El propósito de la actividad que a continuación realizarás, es el que reflexiones acerca de las necesidades individuales y colectivas que se deben satifacer para poder sobrevivir y coexistir en un grupo social. Para ello, lee con atención las siguientes preguntas y contéstalas en el espacio correspondiente.

1. Enuncia el mayor número posible de necesidades que tienes en este momento.

   RESPUESTA.

2. Con respecto a la satisfacción de las necesidades enunciadas en la pregunta anterior, ordénalas de acuerdo a la prioridad que a su satisfacción le atribuyas.

   RESPUESTA.

3. Las necesidades que un individuo tiene en un momento determinado, al correr del tiempo pueden algunas mantenerse, otras desaparecer o surgir nuevas. Enumera las necesidades que consideres tendrás dentro de ocho o diez años.

   RESPUESTA.

4. Menciona lo que consideres fueron necesidades para tus abuelos cuando ellos tenían tu edad.

   RESPUESTA.

5. En la Ciudad de México viven aproximadamente veinte millones de habitantes, de los cuales alrededor del 40% son jóvenes como tú, que los vemos en el metro, parados en las esquinas y dedicados a diversas actividades. Las necesidades de estos jóvenes, ¿son completamente diferentes a las que tú tienes?. Justifica tu respuesta con ejemplos.

   RESPUESTA.

> 6. ¿Consideras que las necesidades que poseen los jóvenes de tu edad son independientes del lugar donde residan?. Justifica tu respuesta con ejemplos.
>
> RESPUESTA.

ACTIVIDAD I-3 **DISCUSION GRUPAL DEL CUESTIONARIO I-1**

La revisión, discusión y obtención de conclusiones del cuestionario anterior se efectúa de la siguiente manera:

- Para registrar las respuestas que el grupo da a las cuatro primeras preguntas, el profesor entrega, a cada alumno, tres formatos iguales como el que a continuación se reproduce.

A L U M N O

Necesidad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	

- Las respuestas a las preguntas uno y dos que los diferentes miembros del grupo han obtenido, se registran en uno de los formatos anteriores de la siguiente manera : cada alumno es interrogado por el profesor, y al contestar lo hace en voz alta de tal manera que él y los restantes miembros del grupo, tengan oportunidad de anotar, tanto la necesidad identificada como la prioridad que se le asignó. Para esto último previamente el profesor les indica a los estudiantes que la prioridad la establezcan haciéndole corresponder a sus necesidades ya gerarquizadas, números ordinales crecientes.

- En forma parecida a la anterior, se concentran las respuestas a las preguntas tres y cuatro utilizando para cada una de ellas un formato. La única diferencia que existe con lo realizado anteriormente, es que ahora en lugar de registrar la prioridad, los estudiantes anotan, con una cruz, el hecho de que algunos de sus compañeros hayan reconocido como tal una necesidad en particular. Cabe aclarar que al momento en que los estudiantes enuncian sus necesidades, en la hoja de registro solamente se anotan en ellas aquellas que previamente no hayan aparecido.

- Por diferentes razones puede ocurrir que haya discrepancia entre las necesidades identificadas por los miembros del grupo. Cada uno de ellos puede esgrimir razones a favor de lo que ha hecho o en contra de lo que ha registrado como producto del trabajo de sus compañeros. Por esta razón se abre una etapa de discusión acerca de las diferencias que hayan aparecido, la que concluye al momento en que ya no haya estudiantes que deseen intervenir. Una vez formuladas y escuchadas las razones de los compañeros que intervinieron, el profesor pregunta al grupo por si hay alumnos que después de escuchar a sus compañeros deseen hacer alguna modificación a la respuesta que originalmente dieron, y que si éste es el caso lo hagan en voz alta con el objeto de que los restantes miembros del grupo registren la modificación.

- Mención especial se merece el hecho de que si al llevar a cabo la identificación de las necesidades, por parte de los alumnos, no apareciese la alimentación como una de ellas, el profesor "conducirá" al grupo, mediante preguntas, a que sea establecida.

- La discusión y corrección de las respuestas dadas a las preguntas tres y cuatro se efectúa en forma similar a la anteriormente descrita.

- La revisión de las respuestas dadas a las preguntas cinco y seis se realiza de tal forma que al ir contestando los alumnos, el profesor ordena la respuesta de manera que se vea claro que las necesidades que un joven posee dependen de dónde vive, a qué se dedica, su estado civil y sus responsabilidades familiares.

- Se discuten las diferentes respuestas emitidas por los integrantes del grupo con la intensión de aclarar las discrepancias que hayan aparecido.

- Cuando se han revisado y discutido las respuestas de las seis preguntas del cuestionario, el profesor indica a los alumnos que reflexionen acerca de las respuestas dadas con el objeto de que obtengan de ellas las conclusiones que consideren pertinentes. Se les otorga un lapso de aproximadamente quince minutos para que, trabajando en equipo, discutan y establezcan sus propias conclusiones, las cuales formularán mediante breves enunciados.
- Transcurrido el tiempo, los diferentes equipos, por medio de su representante, leen sus conclusiones y el profesor las anota en el pizarrón. Se abre un espacio de discusión con la finalidad de que los estudiantes que deseen intervenir para justificar o debatir las opiniones emitidas lo hagan. Con esta discusión se intenta que el grupo llegue a establecer, por concenso, conclusiones como las siguientes:

  * Hay necesidades comunes a todos los individuos.
  * Hay discrepancia en las necesidades que un individuo tiene con el correr del tiempo.
  * La actividad a la que se dedique un individuo, así como su edad, lugar de residencia, estado civil y responsabilidades familiares son causas de diferencias en sus necesidades que presente.
  * Hay necesidades comunes a todos los individuos y que son independientes del tiempo.

ACTIVIDAD: 1-4 **PROCESO PARA SATISFACER UNA NECESIDAD**

En la actividad anterior se identificaron distintas necesidades cuya satisfacción garantiza la existencia de un individuo. La satisfacción se logra cuando se dispone de un conjunto de bienes y/o servicios. Hay que hacer notar que cuando se registraron las distintas necesidades éstas se hicieron de manera general. Así, se habla de la necesidad de "alimento", sin especificar alguno en particular. Por otra parte, en la actualidad, la organización de la sociedad es a tal grado compleja que poner a la disposición de un individuo los satisfactores que requiere, se alcanza mediante procesos extremadamente intrincados : contar con un par de zapatos involucra todo un conjunto de acciones y recursos para tenerlos.

Dos son los objetivos de esta actividad :

- Que los estudiantes identifiquen para una necesidad en general, la diversidad de satisfactores que existen para remediarla.
- Que los alumnos reconozcan, lo mejor posible, las etapas inmersas en el proceso que se sigue para disponer de algún satisfactor en especial.

Una forma que se considera adecuada para alcanzar los propósitos anteriores es la discusión grupal dirigida por el profesor.

ACTIVIDAD 1-4-1. Para el primer propósito, la discusión la inicia el profesor aclarando que las necesidades son para satisfacerce y que esto se logra por medio de lo que se conoce como **bienes** o servicios. Es conveniente que muestre la diferencia entre ellos por medio de ejemplos. A continuación, el maestro dá a los estudiantes la siguiente instrucción :

> *"...en la actividad anterior ustedes han identificado algunas de sus necesidades. Nos toca ahora reflexionar sobre los satisfactores que son indispensables para una en particular. Lo que hagamos con ella, se puede hacer para las otras que se han enunciado. Detengámonos, por ejemplo, en la necesidad de alimentarnos. Se trata de reconocer un buen número de sus satisfactores. En tal sentido, cada uno de ustedes proponga uno de ellos y yo lo anoto en el pizarrón ..."*

ACTIVIDAD 1-4-2. Una vez finalizada la parte anterior, el profesor, interviene para principiar la experiencia que conlleve al segundo propósito de esta actividad. La intervención del maestro es más o menos como la siguiente :

> *"...acabamos de elaborar un listado de satisfactores para la necesidad de alimentarnos. Para un habitante de la Ciudad de México es 'relativamente fácil' hacerse de ellos : basta con tener el dinero suficiente, ir al mercado, al super o al tianguis y comprarlos. De esta manera, a su mesa llegan frutas, verduras, carnes, lácteos, dulces, etc. Algunas veces, aún envueltas las frutas en el papel de china*

que se utilizó en el embalaje que la protege al ser transportada desde Baja California. Acostumbrados como estamos a esta forma de adquirir la mayoría de nuestros satisfactores, muy pocas veces nos detenemos a considerar el tiempo, los recursos y el trabajo empleados en su producción y distribución para su consumo. Sin embargo, para nosotros es importante reconocer el proceso que siguen los satisfactores que utilizamos ya que el propósito fundamental de nuestro curso está estrechamente relacionado con la solución de problemas que la realidad plantea. Por tal razón, y a manera de ejemplo, en esta segunda experiencia elijamos un alimento en particular, a saber, la tortilla, base de la alimentación para muchos millones de habitantes de nuestra ciudad, y ustedes enunciarán los elementos o factores que intervinieron en el proceso que culmina con su adquisición en la tortillería. Cada uno de ustedes proponga algún elemento de este proceso que yo anotaré en el pizarrón..."

El listado que se obtiene de esta experiencia se utiliza posteriormente con varios propósitos que requieren que sea lo más exhaustivo posible.

A continuación se ejemplifica, con brevedad, la forma de construcción de tal listado. Primero se determinan "todos" los elementos necesarios para la elaboración y venta de las tortillas y en seguida se hace lo mismo para uno de los elementos antes encontrados, y en forma análoga se realiza la determinación de los elementos indispensables para uno de los subsecuentes. A continuación se mencionan lo que se considera fundamental para la producción y venta de tortillas, así como para la elaboración y distribución de la masa que es apenas el primer componente del primer listado. Con esto se puede uno formar una idea de lo intrincado que es el proceso que en la actualidad se sigue para proveer de tortillas al Distrito Federal. Algo parecido ocurre para cualquier otro satisfactor que necesitemos.

ETAPAS QUE INTERVIENEN PARA EL SUMINISTRO
DE TORTILLAS EN EL DISTRITO FEDERAL.

* Elaboración y venta de la tortilla.

Masa   mano de obra   agua potable   maquinaria   gas

energía eléctrica
artículos de limpieza
local
capital
papel
mantenimiento de la máquina
licencias para el funcionamiento
movillario
extinguidor
báscula

● PRODUCCION DE MASA

maíz
molino
cal
local
grasa
capital
báscula
movillario
extinguidor
licencias para funcionamiento
agua potable
mano de obra
energía eléctrica
mantenimiento de la máquina
sistema de cocción del maíz
tela para envasar la masa
artículos de limpieza

● MANO DE OBRA

•

•

•

ACTIVIDAD 1-5 **ALGUNOS ASPECTOS DEL PROCESO PARA SATISFACER UNA NECESIDAD**

En la actividad anterior se enumeraron los distintos elementos que hacen factible la elaboración y venta de tortillas en el Distrito Federal. Se identificaron un total de 15 . Es posible hacer lo mismo para cada uno de ellos , y esto se ha ejemplificado para el caso de la masa. Para este último se tienen 17. En otras palabras, la elaboración de tortillas requiere 15 condiciones y cada una de ellas un número similar, y estas últimas tendrán otras y éstas a su vez otras y así sucesivamente. Como se ve es un proceso extremadamente complejo.

El primer propósito de esta actividad es introducir una representación gráfica que ponga de manifiesto, de manera clara, lo intrincado que es la satisfacción de una necesidad en una sociedad moderna.

Al momento en que a un individuo se le presenta una necesidad, aparejada con ella surge un problema : cómo satisfacer la necesidad. De esta forma, en cada etapa que integra el proceso que lleva a la satisfacción de una necesidad pueden estar presentes uno o más problemas. El segundo propósito de esta actividad es que el estudiante reconozca en cada etapa que conlleva a la satisfacción de una necesidad :

a. Los problemas que se deben resolver.
b. El hecho de que los problemas anteriores se resuelven, en parte, gracias al trabajo humano.
c. Los distintos trabajos especializados que se requieren en todas y cada una de las etapas del proceso.
d. El papel que los conocimientos desempeñan en la solución de los problemas anteriores.
e. La existencia de problemas cuya solución consiste en realizar algo de cierta manera.
f. La existencia de problemas cuya solución consiste en justificar un hecho, un suceso o un comportamiento en especial.

Un tercer propósito en esta actividad es que los estudiantes reconozcan que llevar a cabo procesos como los anteriormente descritos sólo pueden realizarse gracias a una muy desarrollada división del trabajo, viable en una sociedad altamente estructurada. En otros términos, trátase de que los estudiantes se den cuenta de que proveer de tortillas al Distrito Federal es algo que solamente la sociedad en su conjunto puede realizar.

ACTIVIDAD I-5-1. DIAGRAMA PARA REPRESENTAR EL PROCESO SEGUIDO EN EL ABASTECIMIENTO DE TORTILLAS AL DISTRITO FEDERAL. Para alcanzar el primer propósito, el profesor inicia la discusión en una forma parecida a la siguiente :

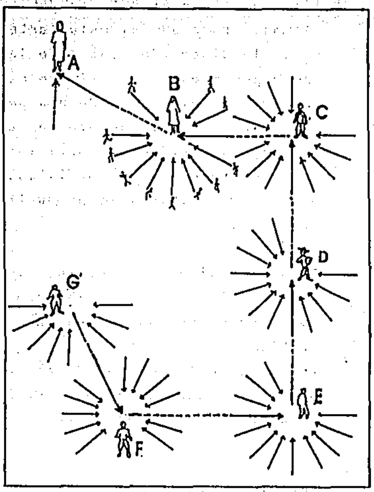
> *"...cuando un ingeniero civil da las instrucciones a su maestro de obras para la construcción de una-*

casa, lo hace entregándole un plano. ¿Por qué lo hace de esta forma y no mediante un texto?

Después de que algunos alumnos responden a esta pregunta y sus opiniones se discuten grupalmente, se llega a la conclusión de que el ingeniero da las instrucciones mediante un plano en virtud de las características que tiene dicha representación : sintetiza gran cantidad de información, no presenta las ambiguedades propias de la expresión oral, muestra de conjunto las características de la obra completa en una forma estructurada.

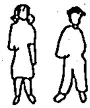
A continuación el profesor hace ver a los alumnos que las ventajas observadas para el caso del plano, se pueden obtener en una representación gráfica del proceso que se sigue para suministrar tortillas al D.F., y que si bien tal representación no tiene las complicaciones técnicas de un plano, nos permite observar con claridad algunas características del proceso.

En seguida, el profesor construye en el pizarrón, la representación que a continuación se muestra para el proceso antes mencionado, explicándole a los alumnos el significado de los símbolos



utilizados y la forma de construirla al momento de hacerla.

La representación anterior se inicia en la parte superior izquierda utilizando tres símbolos :



Representa a la persona que tiene una cierta necesidad. Así, la persona A tiene necesidad de tortillas, la B de producir tortillas, la C de producir masa, la D de producir maíz, la E de producir semillas para siembra y la F de producir conocimientos.

——→ Representa las necesidades que tiene cada persona ya sea consumidor o productor.

------→ Representa una necesidad en particular de la cual se hace responsable un cierto individuo. Así, el individuo productor de masa (C) tiene un total de 17 necesidades, una de las cuales es contar con maíz, de cuya satisfacción se encarga el individuo D .

ACTIVIDAD 1-5-2-a. ALGUNAS CARACTERISTICAS DEL PROCESO SEGUIDO EN EL ABASTECIMIENTO DE TORTILLAS EN EL D.F. Para satisfacer la necesidad de tortillas que tiene el D.F. se deben resolver una multiplicidad de problemas. Para que el estudiante se percate de esto, el profesor principia la discusión señalando la diferencia que existe entre **necesidad** y **problema** : lo primero es una carencia, su satisfacción plantea un problema. Cuando una persona reconoce que tiene una necesidad inmediatamente se plantea como problema su satisfacción: "... ...tengo necesidad de tortillas. ¿Cómo me avengo de ellas? ". "... ...Necesito elaborar tortillas. ¿Qué necesito y cómo lo obtengo? ...". "... Necesito producir masa. ¿Qué necesito y cómo lo obtengo? ...".

A continuación, el maestro, sirviéndose del esquema desarrollado con anterioridad, describe con amplitud las distintas necesidades que tienen los individuos A, B, C, D, . . . , así como los problemas que enfrentan al tratar de satisfacerlas y que, o las resuelven ellos mismos de alguna manera, o alguien se las soluciona. Puede ser que algunos problemas sean muy simples, pero en todo el proceso aparecen algunos extremadamente complejos.

ACTIVIDAD 1-5-2-b. TRABAJO HUMANO. Cuando se ha mostrado que a lo largo del proceso que lleva a la satisfacción de una necesidad, existe una diversidad de problemas, el profesor señala que uno de los elementos importantes en la solución de éstos es el trabajo humano. Debe quedar claro, y esto será objeto de explicación del profesor, que si bien para solucionar una dificultad se puede necesitar materias primas, maquinarias, etc., es imprescindible el trabajo del hombre. En este contexto, el profesor recuerda a los alumnos, que en el futuro, ellos se incorporarán al mercado de trabajo, en donde, como lo muestra el diagrama, su finalidad será contribuir a la solución del problema que ellos eligan, y que apunta a la satisfacción de alguna necesidad.

ACTIVIDAD 1-5-2-c. TRABAJOS ESPECIALIZADOS. En estrecha relación con el punto anterior, el maestro, sirviéndose del multicitado diagrama, ejemplifica diversos problemas que son cualitativamente distintos: no es lo mismo cultivar maíz que darle mantenimiento a un tractor, así como ambos son distintos al problema de determinar las características que deberá tener un maíz de alto rendimiento. A continuación hace ver que resolver problemas distintos reclama de trabajos humanos, también cualitativamente distintos: así, no es lo mismo el trabajo que desarrolla un productor de masa, que el técnico encargado del mantenimiento de la máquina tortilladora.

ACTIVIDAD 1-5-2-d. LOS CONOCIMIENTOS Y LAS NECESIDADES. La experiencia que haga posible el que los estudiantes reconozcan la importancia de los conocimientos en la realización de un trabajo, se inicia cuando el profesor formula al grupo la siguiente pregunta:

> *De los distintos trabajos que se han identificado en el diagrama que tenemos enfrente, ¿cuál o cuáles puedes realizar? : ¿Atender una tortillería? ¿Cultivar maíz?, ¿Dar mantenimiento al tractor?, ¿Determinar qué tipo de fertilizantes son los más adecuados para una clase particular de terreno, en un clima específico?, etc.*

Cuando los alumnos han considerado las posibilidades que tienen de poder desempeñar alguno de los trabajos anteriores, se llega a la conclusión de que no es dable para todos el poder hacerlo.

En seguida, el maestro les formula otra pregunta:

> *¿Cuál es el motivo, causa o razón por la cual no*

todos ustedes pueden desempeñar alguno de los trabajos anteriores?

Escuchadas y discutidas por el grupo, las respuestas que algunos de los estudiantes, a solicitud del maestro, dan a la pregunta en cuestión, se concluye que la limitante para realizar cierto trabajo, **radica en el desconocimiento** que se tiene acerca de cómo hacerlo. El profesor explica, con cierta amplitud, el tipo de conocimiento que deben tener las personas que se dediquen a efectuar algunos de los trabajos que se han identificado en el proceso que sirve para abastecer de tortillas al D.F. Al mismo tiempo hace notar que la adquisición de conocimientos es en sí mismo el resultado de un proceso que algunas veces se puede realizar en la casa o taller, pero que en otras se requiere de la asistencia a centros educativos altamente especializados. Finalmente, el profesor les recuerda a los alumnos que uno de los objetivos de la educación es capacitarlos para el trabajo socialmente útil a través de la trasmisión de los conocimientos adecuados para ello.

ACTIVIDAD I-5-2-e-f. DOS TIPOS DE CONOCIMIENTOS. En esta experiencia se trata de que los estudiantes reconozcan la existencia de dos tipos de conocimientos útiles en la solución de problemas: aquellos que hacen posible la realización de algo y los que explican o justifican un hecho. En otras palabras, nos referimos al **conocer en el sentido de cómo y al conocer en el sentido de qué.** Para ello, el profesor les entrega a los estudiantes un cuestionario impreso que después de contestado se discute grupalmente. El cuestionario que se les aplica se reproduce a continuación:

Cuestionario I-2

DOS TIPOS DE CONOCIMIENTOS

En el transcurso de nuestra existencia aprendemos muchas cosas. Este aprendizaje se lleva a cabo en la casa, en la calle, con nuestros familiares, con nuestros amigos y en particular en la escuela. Todos son valiosos y nos son útiles en la solución de problemas que se nos presentan.

A continuación encontrarás ocho preguntas. Lee con atención y contéstalas en el espacio indicado.

1. Tal vez no lo hayas hecho, pero si observas detenidamente los postes de alumbrado público, notarás que su parte inferior es mucho más gruesa que la superior, ¿por qué crees que se diseñen de esta manera?

RESPUESTA.

2. Del listado de actividades que se te presenta en seguida, marca con una cruz aquellas que sabes realizar :

A C T I V I D A D E S	Espacio para marcar
+ Andar en bicicleta.	___
+ Hacer gelatinas de agua.	___
+ Cortar y confeccionar una prenda de vestir sencilla.	___
+ Resolver una ecuación de primer grado.	___
+ Tocar un instrumento.	___
+ Elaborar un pastel.	___
+ Sumar dos fracciones.	___
+ Escribir a máquina correctamente utilizando los diez dedos.	___
+ Instalar un timbre eléctrico.	___
+ Tomar las medidas adecuadas en caso de un terremoto.	___

3. Elige una de las actividades de la pregunta anterior que puedas realizar y describe, en forma detallada, en qué consiste y cómo se efectúa.

RESPUESTA.

4. ¿Cuál es la razón de que el cielo se observe, durante el día, de color azul?

RESPUESTA.

5. Juan quiere aprender a conducir un automóvil estandar, es decir, uno en donde el cambio de velocidades se hace manualmente. Su amigo Enrique está dispuesto a ayudarlo, y para ello le explica, detalladamente, todo lo que considera necesario. Como Juan tiene muchos deseos de aprender a conducir, rápidamente memoriza las instrucciones, y es capaz de repetirlas en voz alta cuantas veces se le demanda. ¿Basta con esto para que Juan tome el automóvil y lo conduzca, sin causar problemas, por toda la avenida de los Insurgentes?. Justifica tu respuesta.

RESPUESTA.

6. Por lo general los dueños de automóviles les dan servicio cada seis meses. Cuando los llevan, el encargado del servicio lava el motor con una mezcla de agua y petróleo, le cambia el aceite y finalmente lo engrasa. ¿Por qué hace lo último?.

RESPUESTA.

7. ¿Cuál es la razón por la cual, para cocinar algunos alimentos se recubre, levemente, el recipiente con aceite, manteca o mantequilla?

RESPUESTA.

8. A primera vista es claro que hay diferencia entre las dos preguntas siguientes:

a. "...señora María, ¿sabe Ud. hacer 'chiles rellenos' ? ..."

b. "...señora María, ¿sabe usted por qué, después de asar los chiles, se envuelven con un plástico, o con una servilleta húmeda, o se introducen en un recipiente y se tapan? . . ?

La mejor manera que uno tiene de convencerse de que la señora sabe hacer chiles rellenos, es que compre los ingredientes, los haga y después los probemos. En cambio, para cerciorarnos de que conoce la respuesta a la segunda pregunta es necesario escuchar la explicación que da. Para la primera pregunta sobra cualquier explicación : basta con probar los chiles. Sin embargo, para la segunda es esencial.

En forma parecida a estas dos últimas preguntas, de las siete primeras que integran este cuestionario, algunas tienen que ver con una explicación, y otras con mostrar que se sabe hacer algo. Señala, en el espacio indicado, las que se asemejan a la pregunta a y las que son parecidas a la pregunta b .

RESPUESTA.

Preguntas semejantes a la a ____________

Preguntas parecidas a la b ____________

El tiempo de que disponen los estudiantes para resolver el cuestionario anterior es de aproximadamente 15 minutos. Una vez que se ha contestado se procede a revisar las respuestas que dieron los alumnos, en forma grupal.

Al inicio de la revisión el profesor les aclara a los estudiantes que el objetivo del cuestionario no es que conozcan las respuestas correctas a cada una de las siete primeras preguntas, sino que se den cuenta que los problemas que lo integran se pueden clasificar en dos grandes grupos : los que tienen que ver con la habilidad de poder hacer algo y los que requieren de conocer una explicación. Por lo tanto, la revisión se hará en tal sentido.

Para ello basta discutir la respuesta a la pregunta ocho.

La discusión grupal, a la respuesta de la pregunta ocho, se lleva a cabo después de que algún estudiante, a petición del profesor, da la respuesta que obtuvo. La discusión finaliza al momento en que el grupo en su conjunto clasifica correctamente las siete primeras preguntas del cuestionario. Este es el momento adecuado que utiliza el maestro para intervenir y ejemplificar, cómo es que en el proceso que se sigue para satisfacer la necesidad de tortillas en el D.F., aparecen problemas que se resuelven con una explicación y otros cuya solución es ser capaz de hacer algo. Al mismo tiempo, el profesor introduce una clasificación simple de los conocimientos : los que sirven para hacer algo y que se pueden expresar por un conjunto de instrucciones y aquellos otros que explican, justifican o dan razón de un hecho y que se expresan por una serie de argumentos.

ACTIVIDAD I-5-3. LA SATISFACCION DE NECESIDADES : RESPONSABILIDAD DE LA SOCIEDAD. Para alcanzar el tercer propósito de esta actividad, una vez que los estudiantes han participado en las experiencias descritas en las actividades I-5-1 y I-5-2 el profesor explica, detalladamente, que tal y como se ha analizado el proceso involucrado en el abasto de tortillas, éste nos ha mostrado sus múltiples problemas cuya solución requiere de una gran diversidad de trabajos especializados, razón por la cual, satisfacer dicha necesidad, es responsabilidad de la sociedad en su conjunto.

ACTIVIDAD I-6 NECESIDADES DE LA HUMANIDAD

La humanidad, entendida como el conjunto de personas que habitan nuestro planeta en un momento dado, posee necesidades. Algunas de naturaleza material como alimentos, vestidos, casa, etc., y otras de naturaleza espiritual como paz, seguridad, relaciones amistosas, supervivencia, etc. El propósito de esta ACTIVIDAD, es que los alumnos reconozcan que la humanidad en su conjunto tiene, en parte, necesidades análogas a las de un individuo en particular; pero, que además, posee otras relacionadas con el grupo en su conjunto.

La ACTIVIDAD se realiza en dos partes: la primera, es de carácter individual, en ella, los estudiantes contestan un cuestionario; la segunda, es grupal, en la cual se discuten las respuestas. Los puntos a los que conduzca la discusión, serán los siguientes:

1. Las respuestas correctas a las preguntas planteadas en el cuestionario.

2. Señalar que la necesidad fundamental de la humanidad es la de la alimentación.

3. Se introduce una clasificación en las necesidades materiales: alimentos y no-alimentos.

4. El profesor hará notar, que en el Curso sólo se consideran necesidades de orden material. Explica, lo más detalladamente posible, la importancia de las necesidades no-materiales, como la supervivencia, paz, concordia, etc. que debe privar en la humanidad, pero lo difícil que es aproximarse a su estudio.

El contenido del cuestionario que se les aplica a los alumnos en la primera parte de la ACTIVIDAD que ahora nos ocupa, es el que se reproduce en la página siguiente.

Cuestionario I-3

NECESIDADES DE LA HUMANIDAD

En las ACTIVIDADES anteriores nos hemos estado refiriendo a las necesidades de individuos. En ésta, sin embargo, hablaremos de las necesidades que la humanidad, en su conjunto, tiene.

Independiente del lugar en que se nazca, los hombres tienen necesidades comunes. Algunos de ellos las han podido satisfacer en demasía; en cambio, otros, han carecido hasta de lo más elemental. Muchas, diversas y complejas son las razones que han llevado a la humanidad a este estado de cosas.

El propósito de la ACTIVIDAD es que reflexionemos, en conjunto, en la multiplicidad de necesidades que poseemos; sobre el carácter distinto de muchas de ellas e identificar, en particular, la que con bastante seguridad, es la fundamental.

Por lo anterior, LEE CON CUIDADO LAS SIGUIENTES PREGUNTAS Y CONTESTALAS EN EL LUGAR INDICADO:

Pregunta 1. Enumera, las más que puedas, necesidades de carácter "material", que tenga la humanidad.

Respuesta:

Pregunta 2. Enumera, las más que puedas, necesidades "no-materiales", que consideres posee la humanidad.

Respuesta:

Pregunta 3. De las necesidades materiales que elegiste, escoge aquella que consideres sea la fundamental.

Respuesta:

ACTIVIDAD I-7 LOS ALIMENTOS : NECESIDAD BASICA DE LA HUMANIDAD

Identificados a los alimentos como la necesidad básica de la humanidad, se pasa a considerar su proceso de producción. El propósito de esta ACTIVIDAD es llegar a la conclusión de que los elementos indispensables en la producción de satisfactores son dos : recursos naturales (tanto renovables, como no-renovables) y lo que denominaremos proceso de industrialización.

La ACTIVIDAD está formada de tres partes. En la primera parte, la actividad es grupal, dirigida por el profesor y se inicia cuando éste hace un recuento rápido de las conclusiones a que se llegó en la ACTIVIDAD anterior y fija el propósito de la presente : reflexionar sobre el proceso de producción de alimentos, con el objeto de hallar los elementos necesarios con que se debe contar para su producción. Para ello, el profesor formula, una después de otra, las dos preguntas siguientes:

Pregunta 1. Dar ejemplos -diez- de alimentos.

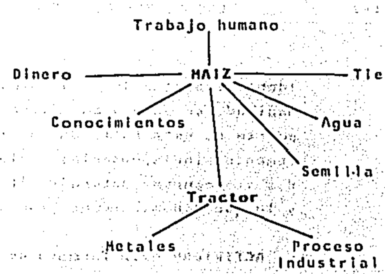
Pregunta 2. El profesor muestra dos alimentos : uno natural, digámos una naranja, y otro procesado, e interroga : en cuanto a su origen, ¿ qué diferencia hay entre ambos alimentos ?

Las respuestas que se den a ambas preguntas, permitirán establecer que los alimentos pueden ser de dos tipos : naturales y procesados.

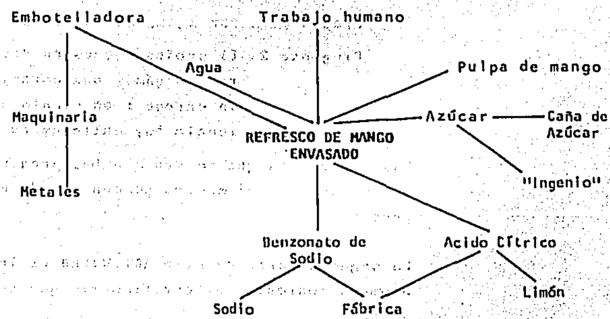
La segunda parte de esta ACTIVIDAD es individual y en ella, los alumnos contestan el cuestionario que se reproduce más adelante.

En la tercera parte de la ACTIVIDAD, se discuten grupalmente las respuestas dadas al cuestionario de la segunda parte. La discusión en esta tercera parte se centrará en la preguntas tres y cuatro del mencionado cuestionario. Se pretende que los alumnos recuerden que para producir alimentos, ya sea naturales o procesados, se requiere de una u otra forma, recursos naturales, así como cierto grado de industrialización.

Los diagramas que corresponden a las preguntas tres y cuatro, deben tener un grado de desarrollo que sea adecuado para mostrar los dos elementos anteriores. Ejemplos de tales desarrollos podrían ser los siguientes :



ALIMENTO "NATURAL"



ALIMENTO PROCESADO

Una vez que se tienen los diagramas con el detalle requerido, es decir, que aparezcan explícitamente recursos naturales -renovables y no-renovables- y aspectos industriales, el profesor formula las siguientes preguntas, en ése orden, una después de otra:

* De los recursos que aparecen en ambos diagramas, señalar aquellos que son naturales, es decir, que se obtienen directamente de la naturaleza, y que no requieren

procesamiento alguno, excepto su extracción

* De los recursos naturales que se han señalado, clasificarlos en renovables y no-renovables

* Dar, además de los anteriores, más ejemplos de recursos renovables y no-renovables.

* En los diagramas anteriores, señalar en dónde intervienen procesos industriales.

* Dar más ejemplos de procesos industriales.

Posiblemente haya necesidad de que los alumnos recuerden lo que se entiende por recurso renovable, recurso no-renovable y proceso industrial; en tal caso, el profesor formulará las preguntas que considere pertinentes para que los alumnos obtengan ideas claras de los conceptos anteriores. Esto es muy importante para el problema que nos ocupa.

Finalmente, los alumnos deben reconocer de que, al margen de otros elementos que participan en la producción de alimentos, (trabajo humano, capital, conocimientos, etc.) hay dos que son imprescindibles : recursos naturales y procesos industriales.

Cuestionario I-4

ELEMENTOS FUNDAMENTALES EN LA PRODUCCION DE ALIMENTOS

Como se ha visto, los alimentos pueden encontrarse bajo dos formas diferentes : naturales o procesados. Pero, al margen del estado en que se hallen, en la sociedad contemporánea, se deben producir.

Con anterioridad se han presentado, en forma de diagramas, los elementos que intervienen en la producción de satisfactores (tortillas, maíz, ...). Algo parecido vas a realizar en esta ACTIVIDAD, para ello, lee con atención las siguientes preguntas, y contéstalas en el lugar indicado.

Pregunta 1. Menciona cinco alimentos naturales.

Respuesta :

Pregunta 2. Menciona cinco alimentos procesados.

Respuesta :

Pregunta 3. De los alimentos naturales que registraste en la Pregunta 1, elige uno y construye un diagrama que muestre los elementos necesarios en su producción. Trata de desarrollar, lo más que puedas, los elementos que intervienen en la producción del alimento que escogiste.

Respuesta :

Pregunta 4. De los alimentos procesados que registraste para la Pregunta 2, escoge uno y haz algo parecido a lo que hiciste en la Pregunta 3.

Respuesta :

ACTIVIDAD I-8 OTRAS NECESIDADES MATERIALES

Hasta el momento, los alumnos han recordado dos elementos (recursos naturales e industria) que intervienen en la producción de alimentos y que son importantes al problema que nos ocupa. Sin embargo, " no sólo de pan vive el hombre ", también tiene otras necesidades materiales. El propósito de esta ACTIVIDAD es que los alumnos reconozcan que, en la producción de cualquier satisfactor de carácter material, vuelven aparecer los dos elementos antes mencionados.

Cabe hacer una aclaración : Cuando se habla de proceso industrial, nos estamos refiriendo a él, en el sentido moderno del término.

Esta ACTIVIDAD es relativamente rápida. Se realiza mediante trabajo grupal, coordinado por el profesor.

Después de que el profesor resume las dos últimas actividades, formula a los estudiantes una serie de preguntas, una después de la otra, y que ellos contestan en el órden en que se presentan. Las preguntas son las siguientes:

Pregunta 1. Señalar algunas otras, además del alimento, necesidades que la humanidad posee y los satisfactores por medio de los cuales las remedia.

Pregunta 2. Por ejemplo, para el caso del vestido : construir rápidamente un diagrama que registre los elementos que intervienen en su elaboración.

Pregunta 3. Señalar, en el diagrama anterior, los recursos naturales que aparecen.

Pregunta 4. Señalar, en el diagrama anterior, los procesos industriales que aparecen.

Pregunta 5. Para el caso de la vivienda, enumerar algunos recursos naturales y procesos industriales que aparecen en su construcción.

Pregunta 6. La necesidad de transporte se resuelve, en parte, fabricando vehículos. Enumerar parte de los recursos naturales y de los industriales que participan en su fabricación.

Cuando los alumnos han contestado las preguntas anteriores, el profesor resume las tres últimas actividades señalando que, tanto en la producción de alimentos como en la de otros satisfactores, la sociedad moderna no puede prescindir de recursos naturales y de procesos industriales (industrialización).

ACTIVIDAD 1-9 LA TIERRA : FUENTE DE NUESTROS RECURSOS NATURALES

Se han identificado ya dos elementos importantes (para lo que nos ocupa, y que en ésta ACTIVIDAD se verá claramente) en la producción de cualquier satisfactor y, en particular, del alimento : los recursos naturales -renovables y no-renovables- y los procesos industriales. En esta ACTIVIDAD nos ocuparemos de los recursos naturales.

El hombre -la humanidad- hasta ahora, cuenta con nuestro planeta, la Tierra, como su única fuente de recursos. Durante toda su existencia, el hombre ha recurrido a ella en busca de sustento. Así, generación tras generación, la ha labrado; ha pescado en sus ríos, lagos, mares y océanos; ha utilizado los materiales que extrae de su interior; pero, también la ha deteriorado, la ha sobreexplotado y en muchos aspectos la ha visto como un enemigo. Sobre todo para la cultura occidental : la naturaleza es un enemigo a vencer.

La Tierra es grande, pero no infinita. Poco a poco se agota en varios aspectos : los recursos naturales no-renovables se están acabando y los renovables se van mermando por efectos de la contaminación y el uso exagerado, y en no pocas veces irracional, que de ellos se hace. Esto lo debemos de tener muy en cuenta si reconocemos que, sea cual sea el satisfactor que necesitemos, en especial el alimento, los recursos naturales sólo nos lo puede pruede proporcionar la Tierra.

Los propósitos de esta ACTIVIDAD son varios : que los estudiantes reconozcan que,

+ la fuente de recursos naturales, tanto renovables como no-renovables, con que la humanidad cuenta es la Tierra;
+ el fin último de los recursos no-renovables es su agotamiento;
+ la contaminación ambiental, es la principal causa de la disminución, por parte de la Tierra, de su capacidad para producir recursos renovables.

La ACTIVIDAD se realiza mediante discusión grupal, guiada por el profesor. En ella, el maestro formula las preguntas en forma oral y los alumnos las contestan y discuten una por una. En otras palabras, el profesor no plantea la siguiente hasta que la anterior no se haya contestado y discutido lo que fuese necesario. Las preguntas que el profesor hace son las siguientes:

Pregunta 1. ¿ Cuál es la fuente de recursos naturales de que dispone la humanidad ? O, en otros términos : ¿de dónde obtiene el hombre los recursos naturales que necesita ?

Pregunta 2. Un recurso no-renovable, por ejemplo los minerales, ¿ qué ocurrirá con ellos al explotarlos sistemáticamente?

Pregunta 3. ¿ De qué formas la humanidad ha alterado el medio ambiente ?. Señalar ejemplos.

Pregunta 4. Señalar ejemplos que muestren el efecto de la contaminación en la producción, por parte de la Tierra, de recursos renovables.

La discusión para cada una de éstas preguntas debe ser lo más amplia posible de tal suerte que los estudiantes establezcan como conclusiones los propósitos que la ACTIVIDAD se plantea.

ACTIVIDAD I-10 LA HUMANIDAD EN EL AÑO 2100 Y LA CANTIDAD DE SATISFACTORES QUE NECESITA

Resumiendo rápidamente lo que se ha visto en las cuatro últimas ACTIVIDADES podemos decir que:

> La humanidad tiene necesidades, fundamentalmente, la de alimentarse, que se satisface por medio de **alimentos**; para producir alimentos necesitamos recursos naturales, tanto renovables como no-renovables y procesos industriales; finalmente se reconoció que los recursos no-renovables se pueden agotar y que la contaminación afecta la producción de recursos renovables. Todo lo anterior, teniendo a la Tierra como el hábitat natural de la humanidad.

En esta ACTIVIDAD se abordará el problema de puntualizar qué elementos o factores, determinan la cantidad de satisfactores que necesitará la humanidad para el año 2100. Este es un problema relativamente simple : los factores son los mismos que determinan, en teoría, la cantidad de pan que necesita la Ciudad de México, o la cantidad de pan que necesita una familia. Para ello basta determinar dos cuestiones :

* ¿ A cuántos individuos hay que darles pan ?.

* ¿ Qué cantidad de pan se le va a dar a cada uno ?.

Sabiendo ambas cosas, es posible, en teoría, tener una idea muy aproximada de la cantidad del satisfactor que se necesita.

La **ACTIVIDAD** se realiza en dos partes. En la primera, los alumnos contestan un cuestionario. Lo anterior se realiza individualmente. El contenido del cuestionario, es el que a continuación -en la siguiente página- se reproduce. En la segunda parte, el grupo discute las respuestas dadas al susodicho cuestionario. Después de discutir cada respuesta, todo lo que se considere necesario, se debe concluir que, para la Pregunta 5, son dos los elementos fundamentales a considerar :

+ El número de habitantes (o población) que exista en el año 2100.

+ La cantidad de alimentos que se juzge conveniente dar a cada habitante.

Cuestionario I-5

¿ CUANTO COMPRO DE PAN ?

En todas las familias se compra cierta cantidad de "esto", de "aquello" y de lo "otro". Es claro que no todas las familias compran la misma cantidad. Sin embargo, hay ocasiones, que por ciertas circunstancias, la cantidad que usualmente compran se vé afectada.

Como sucede en una familia, sucede en una ciudad, o en un Estado : ¿ cuántas escuelas primarias se necesitan ?, ¿ cuántos hospitales ?, ¿ cuántos taxis o "peseras" ?... Etc.

Pensando un poco más general, algo parecido debe suceder con toda la humanidad : ¿ cuánto trigo se necesita para alimentarla?, ¿ cuánta leche habría que producir ?.

Para tener una idea de lo anterior, lee con cuidado las siguientes preguntas y contéstalas en el lugar indicado :

Pregunta 1. Cuando una familia fija la cantidad de pan que se compra, ¿ qué elementos considera ?.

Respuesta :

Pregunta 2. ¿ En qué circunstancias (puede haber varias) la cantidad determinada en el Problema 1, se debe aumentar ?.

Respuesta :

Pregunta 3. ¿ En qué circunstancias la cantidad de pan que se compra normalmente, se debe disminuir ?. Se supone que hay el dinero suficiente para comprarlo.

Respuesta :

Pregunta 4. ¿ De qué depende la cantidad de tortillas que se producen, diariamente, en el D.F.

Respuesta :

Pregunta 5. Para fijar la cantidad de alimentos que necesitará la humanidad para el año 2100, ¿qué elementos se deben considerar?

Respuesta :

ACTIVIDAD I-11

CAPACIDAD DE LA TIERRA DE PROPORCIONAR LOS RECURSOS NATURALES QUE LA HUMANIDAD NECESITARA PARA EL AÑO 2100

En **ACTIVIDADES** anteriores se ha concluido que los recursos naturales, renovables y no-renovables, que se requieren para la producción de alimentos, los proporciona la Tierra. Otra conclusión a la que se llegó es que los no-renovables corren el riesgo de que se acaben y que los renovables se ven afectados por la contaminación existente. Por otro lado, en la ACTIVIDAD anterior se concluyó que la cantidad de alimentos que necesitará la humanidad para el año 2100 está determinado por la población que en aquel momento exista y por que tanto alimento se desee proporcionar a cada individuo. Pero, independientemente de la cantidad de alimentos que se requiriese, otro elemento que no se puede olvidar, es la cantidad de recursos naturales con que se contase en ese momento. Puede suceder que no sean suficientes los que en aquel momento estén disponibles.

Por lo anterior, esta ACTIVIDAD está encaminada a que los estudiantes sean conscientes de tal hecho. La ACTIVIDAD es muy corta y se realiza en forma grupal. En ella, el profesor plantea una serie de preguntas, una después de otra, no formulando la siguiente hasta que no haya sido contestada la anterior. Las preguntas que el profesor plantea, son las siguientes :

Pregunta 1. ¿ De qué depende el que la humanidad pueda producir los alimentos que requerirá para el año 2100 ?

Pregunta 2. ¿ Por qué es importante el nivel de contaminación que haya alcanzado la Tierra, en la producción de alimentos que requerirá la humanidad en el año 2100 ?

Pregunta 3. ¿ Por qué se dice que los recursos no-renovables es un aspecto fundamental en la disponibilidad de alimentos para la humanidad del año 2100 ?

Las respuestas se deben discutir con la aplitud que se requiera y las conclusiones a que se llegue serán, explícitamente, las siguientes :

+ El estado de la Tierra es elemento definitivo a considerar cuando se habla de los alimentos que la humanidad del año 2100 necesita.

+ El nivel de contaminación es importante porque determina la posibilidad de que existan recursos naturales renovables.

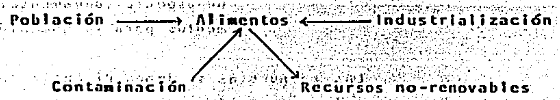
+ Los recursos no-renovables son fundamentales debido a que se pueden agotar y, en consecuencia, la cantidad de que se disponga es importantísimo.

ACTIVIDAD I-12 **ELEMENTOS PRINCIPALES QUE INTERVIENEN EN LA PRODUCCION DE ALIMENTOS QUE NECESITARA LA HUMANIDAD EN EL AÑO 2100**

En una serie de cinco ACTIVIDADES, poco a poco se fue llevando a que los alumnos, con sus propios recursos, reflexionaran acerca de lo que significa, e implica, el problema alimenticio para la humanidad que exista en el año 2100. Se han identificado cinco elementos que son primordiales en el problema.

El propósito de ésta ACTIVIDAD, es que el profesor, por medio de "cátedra magistral", no sólo resuma, sino, principalmente, señale los elementos que están involucrados en la producción de alimentos y las relaciones que hay entre ellos. Para ello, recorrerá, paso a paso, lo realizado en las cinco actividades anteriores que permitieron ubicar a los alimentos, recursos no-renovables, contaminación, procesos industriales y población, como los factores que interesan al problema que abordamos : la posibilidad de que la humanidad del año 2100 pueda contar con el principal recurso para su subsistencia.

Al hacer la presentación anterior, no escatimará explicaciones para clarificar cómo es que es posible llegar a una primera estructura, como la siguiente



en la cual se aprecian los cinco elementos relacionados de una manera muy elemental.

ACTIVIDAD I-13

EVOLUCION DEL SISTEMA
población-alimentos-recursos no-renovables-industrialización-contaminación
CON EL TIEMPO

Hemos visto en la ACTIVIDAD "CAPACIDAD DE LA TIERRA PARA PROPORCIONAR LOS RECURSOS NATURALES QUE LA HUMANIDAD NECESITARA EN EL AÑO 2100" que plantear el problema alimenticio para la humanidad en el año 2100, nos remite a considerar la posibilidad de que el Planeta Tierra tenga la capacidad de proporcionar los recursos naturales básicos para su producción. Entonces, en el fondo, "El Predicamento de la Humanidad" es que la Tierra sea capáz de proporcionar los recursos naturales que la humanidad necesitará.

En qué posibilidades se encuentre el planeta de proporcionar los recursos necesarios, depende de cómo evolucione, con el tiempo, el sistema aclarado en la ACTIVIDAD anterior. En otras palabras, si se quiere conocer en qué condiciones se encontrará la Tierra para mantener a la humanidad que exista en el año 2100, se debe considerar cómo evolucionará el sistema, a partir de cierta fecha, hasta el año 2100.

Ahora bien, ¿ cómo evolucionará el sistema anterior ? Esa es la pregunta. Una posibilidad es que siga evolucionando como lo ha hecho hasta ahora. Eso tendría ciertas consecuencias. Otra posibilidad es que evolucione de "otra" forma, gracias a cambios que se realicen en el sistema anterior. Eso tendría otras consecuencias.

El propósito de esta ACTIVIDAD, es que el profesor delimite con más precisión, el problema que se aborda en el curso : analizar posibles comportamientos, en el tiempo, del sistema anterior, a partir del año 1990 hasta el año 2100. Cada uno de ellos dará respuestas particulares a la pregunta : ¿ Qué posibilidades tiene el Planeta de mantener a la humanidad del año 2100 ?

La ACTIVIDAD la realizará, fundamentalmente, el profesor, mediante exposición oral. En ella se hará énfasis en los siguientes aspectos :

A. El sistema

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{INDUSTRIALIZACION} \arrow[d] & \\
\text{POBLACION} \arrow[r] & \text{ALIMENTOS} \arrow[d] & \text{CONTAMINACION} \arrow[l] \\
 & \text{RECURSOS NO-RENOVABLES} &
\end{tikzcd}
$$

cambia con el tiempo. En otras palabras, cada uno de sus elementos muestra diferentes valores en el tiempo. Por ejemplo, la población. Para ilustrar lo anterior, se puede recurrir al caso de la población mexicana que muestra una gran variación en el tiempo.

* Los distintos elementos del sistema están estrechamente relacionados unos con otros, de suerte que cambios en uno desencadena modificaciones en los otros. El ejemplo claro de mostrar es entre población y alimentos y entre éstos y la demanda de recursos naturales.

* No es posible conocer con certeza como evolucionará, es decir, cómo se modificarán en el tiempo, tanto los valores para cada elemento del sistema, como las relaciones que existen entre ellos.

* La situación en que se encuentre el planeta en el año 2100, en cuanto a su capacidad de proporcionar los recursos naturales suficientes para la producción de alimentos que necesitará la población de entonces, depende de cómo evolucione, con el tiempo, el sistema anterior.

* Como no es posible conocer con certeza la forma en que evolucionará el sistema, lo que se puede hacer es suponer distintas formas de evolución y predecir las posibles consecuencias que tendría una particular forma de evolución.

* Como el sistema

$$\begin{tikzcd}
 & \text{INDUSTRIALIZACION} \arrow[d] & \\
\text{POBLACION} \arrow[r] & \text{ALIMENTOS} \arrow[d] & \text{CONTAMINACION} \arrow[l] \\
 & \text{RECURSOS NO-RENOVABLES} &
\end{tikzcd}$$

se encuentra en distintos "estados", en tiempos diferentes, se elige, en el estudio que se hará en el curso (por razones que en su momento se aclararán), el momento inicial, a partir del cual se va a estudiar su evolución en el tiempo, el estado en que se encuentre en 1990.

El profesor será bastante explícito, abundando en cada punto lo que considere necesario, de forma que a los alumnos les quede, lo más claro posible, el problema que se estudiará.

ACTIVIDAD I-14

LAS NECESIDADES HUMANAS Y SU SATISFACCION EN LA ACTUALIDAD

Como se ha visto, el ser humano necesita satisfacer una serie de necesidades. Algunas de ellas son básicas, en el sentido de que sin su satisfacción la propia vida está en peligro.

Si bien existen una serie de necesidades que en principio debieran ser satisfechas para que se pueda hablar de una calidad de vida adecuada para un ser humano, éstas no necesariamente se han satisfecho en el pasado, ni se alcanzan a lograr en la actualidad. Por todos lados se observan carencias, existe hambre en muchos lugares del planeta y amplios sectores de la población apenas tienen lo suficiente para sobrevivir. Por el contrario, hay lugares, los menos, en donde parece ser que existen individuos que poseen más de lo necesario, que exhiben y derrochan una riqueza, muchas veces lograda mediante la explotación, el saqueo y el engaño de los que menos tienen. En síntesis, uno observa, en nuestro entorno, un gran desequilibrio en la distribución de la riqueza.

Para el caso particular de México, las condiciones no son mejores. Existen grandes sectores de la población en condiciones de sobrevivencia, que apenas comen, cuya salud es mala y con escasas posibilidades de mejorar en su nivel de vida. Todo ello, producto de complejos y sutiles problemas de carácter económico, político y social.

El propósito de esta ACTIVIDAD es que los alumnos recuerden y ganen conciencia de que actualmente hay sectores de población en México y en el mundo, que aún no han satisfecho aquellas necesidades consideradas como básicas. Para ello, la actividad está dividida en dos partes: en la primera, los alumnos, en forma individual, contestan un cuestionario y en la segunda, se discuten, grupalmente, las respuestas dadas. Al llevar a cabo la discusión se pretende, que mediante ejemplos, proporcionados por los mismos estudiantes, se pueda llegar a convencer a la totalidad del grupo de que en la actualidad existen, tanto en México, como en el mundo, grandes sectores de poblaciones para quienen el nivel de vida es bajo, en términos del grado en el cual han satisfecho sus diversas necesidades.

El cuestionario que se aplica a los estudiantes es el que se reproduce en la página siguiente.

Cuestionario I-6

LAS NECESIDADES HUMANAS Y SU SATISFACCION EN LA ACTUALIDAD

Hasta ahora hemos estado trabajando con el objeto de identificar distintas necesidades que tiene el ser humano así como en el análisis del proceso y elementos que participan, en su satisfacción. Es el momento de reflexionar un poco, utilizando nuestros conocimientos y experiencias, acerca de la medida en que estas necesidades se encuentran satisfechas, en la actualidad, tanto en nuestro país, como en el resto del mundo. Para ello, lee con atención y contesta, de la manera más amplia que te sea posible (ilustrando con ejemplos tus respuestas), las siguientes preguntas.

Pregunta 1. ¿Qué opinas acerca de la alimentación, salud, trabajo, educación, vivienda y bienes materiales, de que dispone, en la actualidad, el pueblo mexicano?

Pregunta 2. ¿Qué opinas acerca de los mismos satisfactores de la pregunta anterior, pero ahora con respecto a la población mundial?

Pregunta 3. Enumera algunas acciones que sepas que se están llevando a cabo en México para satisfacer, en la actualidad, necesidades de la población.

ACTIVIDAD I-15

LAS FUTURAS NECESIDADES HUMANAS Y SU SATISFACCION

En la actividad anterior se ha reflexionado acerca del grado en el cual se satisfacen, en la actualidad, diversas necesidades humanas. Toca ahora hacer lo mismo pero con cara al futuro. Esta ACTIVIDAD es particularmente interesante porque se propone contribuir a desarrollar en el estudiante la conciencia de que es importante pensar en el futuro, en detenerse y considerar qué es lo que puede ocurrir y cómo es posible hacerlo de tal suerte que aquello que se prevé, tenga cierta posibilidad de ocurrencia y no sea sólo sueño o ilusión.

La actividad se lleva a cabo en dos partes. Primero, los alumnos, en forma individual, contestan un breve cuestionario y segundo, se discuten, grupalmente, las respuestas, hasta que más o menos se llega a las conclusiones anteriores.

El contenido del cuestionario es el que a continuación se reproduce.

Cuestionario I-7

LAS FUTURAS NECESIDADES HUMANAS Y SU SATISFACCION

El hombre no sólo se preocupa por resolver sus necesidades inmediatas, del día, también se preocupa por el futuro y algunas veces hasta toma decisiones en tal sentido.

Con el propósito de reflexionar un poco con respecto al "futuro", a continuación aparecen algunas preguntas; léelas con cuidado y contéstalas, lo más ampliamente que te sea posible, así como, si fuera el caso, puedes proporcionar ejemplos que ayuden a dar una idea más clara de la respuesta.

Pregunta 1. ¿Será posible prever,lo que puede ocurrir, a futuro, con la satisfacción de necesidades humanas?

Pregunta 2. ¿Consideras que es necesario pensar, planear y tomar acciones inmediatas, orientadas a satisfacer necesidades futuras? ¿Por qué?

Pregunta 3. ¿Qué podría hacer un país, pensando en las necesidades futuras de sus ciudadanos?

Pregunta 4. ¿Conoces algo que actualmente se esté realizando en México, con vistas a satisfacer necesidades futuras?

Pregunta 5. ¿Qué elementos sería adecuado considerar para proyectar acciones futuras, que tengan que ver con la satisfacción de necesidades?

ACTIVIDAD I-16

AUMENTO DE LA POBLACION FUTURA Y DE LOS SATISFACTORES QUE SE NECESITAN.

Como se ha visto por la actividad anterior hay una estrecha relación entre el tamaño de la población y la cantidad de satisfactores que se necesitan para mantener a sus miembros. Por consiguiente, si una sociedad ha de tomar previsiones para asegurar el mantenimiento futuro de sus ciudadanos, la primera cuestión que tendría que aclarar sería en relación al número estimado de individuos de que se trata. Es decir, deberá tener una estimación de la futura población a la que, en principio, habría que alimentar, educar, vestir, dar trabajo, etc.

De momento, dos cosas interesan. Primero, que los alumnos sean completamente conscientes, de que hay buenas razones, para creer que si las cosas siguen, de forma bastante parecida a como se aprecian en la actualidad, lo más probable es que si por "futuro" entendemos los próximos cien años, la población que se espera mantener de acá a tal fecha será mayor que la que actualmente tenemos. El segundo aspecto que interesa en esta actividad, y que se deriva, en parte, de la anterior, es que el estudiante recuerde que si al hecho de que la población futura sea mayor, aunamos el deseo de proporcionarle a todos sus miembros los satisfactores suficientes para su existencia, la consecuencia inmediata sería, por lo tanto, un aumento en la cantidad de satisfactores que se necesitan.

La actividad está formada de dos partes: en la primera, de manera individual, los alumnos contestan un cuestionario y en la segunda, se discuten grupalmente las respuestas dadas. El cuestionario es el que se reproduce a continuación.

Cuestionario I-8

LA POBLACION EN EL FUTURO Y LA SATISFACCION DE SUS NECESIDADES

Anteriormente se ha visto que la cantidad de satisfactores que se necesitan para una población depende, fundamentalmente, de dos factores: el tamaño de la población y la cantidad de satisfactores que se les proporciona a cada uno de sus miembros.

Por otro lado, se ha intentado identificar los elementos indispensables que se deben considerar en la producción de bienes y servicios, en especial se ha hecho énfasis en tres de ellos: recursos, desarrollo industrial y contaminación.

Un tercer aspecto en que hemos fijado nuestra atención, y que fue objeto de una actividad pasada, es el hecho de que vale la pena, por más de una razón, que la sociedad en su conjunto tenga ideas concretas acerca de posibles formas a que su propio desarrollo la puede conducir. En otras palabras, que es conveniente que nos podamos anticipar y "predecir" cómo, posiblemente, puede ser construida la futura sociedad.

De acuerdo al último punto arriba mencionado, existen muchos (y algunos extremadamente complejos) aspectos de la sociedad en los cuales uno quisiese anticiparse al tiempo. En esta ACTIVIDAD sólo consideraremos uno: el tamaño de la población futura y las implicaciones que ello tiene, no sólo en la cantidad de satisfactores que se necesitarían, sino, principalmente, en la cantidad de los distintos elementos que participan en su satisfacción.

Con el objeto de ayudarnos en la construcción de una idea con relación al punto anterior, a continuación aparecen unas dos preguntas, léelas con cuidado y contéstalas con la mayor amplitud que puedas. Recuerda: los conocimientos más valiosos que uno adquiere son aquellos que resultan de nuestro esfuerzo al intentar resolver alguna dificultad.

Pregunta 1. De acuerdo a tus conocimientos y experiencia personal, ¿cómo te imaginas que sea la población (en cuanto a su tamaño) de México y del mundo, para los próximos cien años, comparada con la actual? ¿Por qué? Si te es posible señala ejemplos concretos.

Pregunta 2. De acuerdo a la respuesta que hayas dado a la pregunta anterior, explica qué va a ocurrir con los satisfactores (alimento, trabajo, salud, etc.) que se necesitarán, así como con el proceso y elementos (recursos, trabajo, industria, contaminación) que participan en su producción.

ACTIVIDAD I-17 EL PREDICAMENTO DE LA HUMANIDAD I

Esta ACTIVIDAD es particularmente importante: en ella se delimita la situación concreta que se estudia en el curso. Su realización está dividida en dos partes. En la primera, los alumnos contestan, individualmente, un cuestionario. En la siguiente página se reproduce el contenido de tal cuestionario.

En la segunda parte de esta ACTIVIDAD se revisan, grupalmente, las respuestas que los alumnos dan a las preguntas del cuestionario.

Antes de iniciarse la revisión, el profesor aclara que dos preguntas del cuestionario no pueden tener respuestas unánimes. Se trata de las preguntas dos y tres. Sus respuestas son básicamente subjetivas. Para tales casos, solamente se leerán las respuestas, sin más averiguaciones.

Las conclusiones a que conducirá la discusión del cuestionario son básicamente dos: las respuestas correctas a las preguntas del cuestionario y, principalmente, señalar que el curso estará dedicado al problema que plantea la satisfacción de necesidades para la humanidad que habite la Tierra en el año 2100: ¿qué ocurrirá si se mantiene el objetivo del sistema mundial de producir más gente con más (alimentos, bienes materiales, aire puro y agua) para cada persona?

Como un aspecto fundamental en esta ACTIVIDAD estará el despertar la conciencia del estudiante ante un problema de esta naturaleza. De seguro lo ven distante y ajeno a ellos.

Cuestionario I-9

EL PREDICAMENTO DE LA HUMANIDAD I

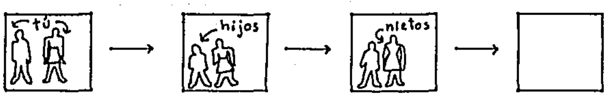
Con anterioridad hemos identificado necesidades que son independientes del tiempo; es decir, necesidades que las tuvieron nuestros antepasados, las tenemos actualmente y las tendrán futuras generaciones. En esta ACTIVIDAD pensaremos y hablaremos acerca del futuro. Hablaremos sobre tu futuro, sobre el futuro de los hijos que tendrás y del futuro de los hijos de tus hijos ...... ¿ Qué necesidades tendrán ?, ¿ cómo las remediarán ?. A mucha gente le preocupa "su" futuro, el futuro de los "suyos". Y toma providencias, emprende acciones. El futuro inquieta, angustia, crea expectativas, sueños, Etc. En algunos periódicos y revistas es usual encontrar "personas" a quienes se interroga sobre el futuro. Se les envía una carta, como la siguiente :

> F.B.I., nacido el 14 de mayo de 1967, desea saber cuáles son las iniciales de la mujer que será su novia, si la novia que llegue a tener lo querrá por amor o por interés, a los cuántos años se casará, qué carrera le conviene estudiar y cómo será su futuro en lo económico.

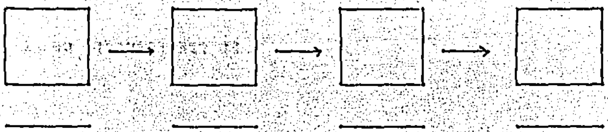
El contesta; y con ello resuelve dudas a quienes creen o confían en él. También nosotros hablaremos del futuro, pero en otro sentido. Para ello, lee con atención las siguientes preguntas y contéstalas en el espacio indicado.

Pregunta 1. El siguiente diagrama intenta ilustrar la cadena de tus descendientes. Aparecen en él, además de ti, tus hijos, nietos, ... Completa la cadena hasta que llegues a un descendiente tuyo que viva aproximadamente en el año 2100.

Respuesta :



1992 ______ ______ ______ ______



Pregunta 2. Describe cómo te gustaría vivir dentro de 20 años.

Respuesta :

Pregunta 3. Describe cómo te gustaría que vivieran tus descendientes en el año 2100.

Respuesta :

Pregunta 4. ¿ Qué acciones estás emprendiendo, pensando en tu futuro ?

Respuesta :

Pregunta 5. Menciona qué personas o instituciones se dedican a pensar en tus necesidades futuras.

Respuesta :

Pregunta 6. Enumera aquellas necesidades que consideres básicas para poder vivir.

Respuesta :

Pregunta 7. Para cada una de las siguientes afirmaciones, escoge una, y sólo una, de las opciones que aparecen a la derecha.

AFIRMACIONES		OPCIONES
1. Mis necesidades básicas de mañana......................	( )	a ... con seguridad se van a satisfacer.
2. Mis necesidades básicas de acá a un año	( )	b ... no se podrán satisfacer.
3. Mis necesidades básicas de acá a 20 años	( )	c ... es muy probable que se satisfagan.
4. Las necesidades básicas de mis nietos	( )	d ... posiblemente no se satisfagan.

5. Las necesidades básicas de los que vivan en el año 2100 ... ( )

e. ... no se puede saber si se satisfacen o no.

Pregunta 8. Señala quiénes consideras que sean responsables de "pensar", en las necesidades y sus satisfactores de los que vivan en el año 2100.

Respuesta :

Pregunta 9. Las necesidades y sus satisfactores plantean muchos problemas. Algunos más fáciles que otros. Por ejemplo :

a. Tú tienes necesidades hoy, y las tendrás a futuro.
b. Los habitantes del continente americano hoy tienen necesidades y a futuro las tendrán.
c. Los habitantes de tu colonia tienen hoy necesidades, y las tendrán a futuro.
d. Lo mexicanos hoy tenemos necesidades, y a futuro las seguiremos teniendo.
e. Tu familia tiene hoy necesidades, y en el futuro las tendrá.
f. Los habitantes en el mundo hoy tienen necesidades, y los que vivan en el año 2100 también las tendrán.
g. Tus amistades tienen necesidades, y en un futuro las tendrán.

Ordena los anteriores conjuntos de personas, de acuerdo a lo más o menos complicados que sean los problemas que sus necesidades generan. Empieza por los más simples.

Respuesta :

___, ___, ___, ___, ___, ___, ___.

Pregunta 10. ¿Creea que en el futuro la población va a aumentar?

Respuesta :

Pregunta 11. ¿Cómo te gustaría que vivieran los habitantes del mundo en el futuro?

Respuesta :

Pregunta 12. En consecuencia de las preguntas anteriores, ¿cuál debe ser la pregunta más importante que deba plantearse la humanidad en este momento con miras a su futuro?

Respuesta :

El curso estará dedicado a contestar la pregunta más importante que deba plantearse la humanidad. A tal pregunta se ha llamado **"EL PREDICAMENTO DE LA HUMANIDAD"**.

ACTIVIDAD I-18 "COMPRENSION DE UN HECHO SOCIAL"

Desde diferentes puntos de vista, un fenómeno de la naturaleza y un hecho social son distintos entre sí.

En la ocurrencia de un hecho social y en la forma concreta en que se manifiesta, mucho tiene que ver la voluntad del hombre, sus deseos, aspiraciones, prejuicios, pasiones, su visión del mundo y su cultura. Se puede decir que un hecho social tiene un sentido, obedece a una voluntad, a una orientación y en mucho es reflejo de la naturaleza humana.

Puede ser que el hombre disponga las condiciones iniciales para que ocurra un fenómeno natural, pero una vez que éste se ha puesto en marcha, su desenvolvimiento o desarrollo sigue su propia lógica y está determinado por fuerzas o causas en donde la naturaleza y voluntad humana nada tienen que hacer.

A diferencia de lo anterior, el devenir de un hecho social puede ser modificado por causas y a voluntad humana, muchas veces de manera conciente, pero en no pocos casos hasta inconcientemente.

Naturalmente que los móviles, causas o razones que definen un acontecimiento social pueden ser de naturaleza objetiva pero, no se excluye la posibilidad de la influencia de componentes subjetivos, lo cual hace que ciertos hechos parezcan irracionales.

Otro aspecto que distingue a un hecho social de un fenómeno natural es la actitud con la cual nos enfrentamos a ellos ante el acto de conocer.

Frente a un fenómeno de la naturaleza todo nos es externo. Solamente con la imaginación nos podemos aproximar a él y, en esta aproximación nada tienen que hacer nuestras emociones. En cambio, ante un hecho social, resultado en mucho definido por la naturaleza humana, nuestra situación es muy diferente. Podemos espiritualmente aprehenderlo, hay rasgos que pueden identificarse o no con nosotros, pero no por eso serán ajenos a nosotros.

Son estas características distintas de un fenómeno de la naturaleza con un hecho social lo que ha llevado a pensar que la aprehensión racional de ellos debe ser cualitativamente diferente. En otras palabras, que aproximarse a un hechos social para conocerlo, no se puede realizar de la misma forma en que nos aproximamos, con tal fin, a un fenómeno de la naturaleza.

El propósito de esta ACTIVIDAD es arrojar alguna luz sobre aspectos como los anteriores. Para ello se realiza la lectura colectiva del texto que se reproduce en la página siguiente y los alumnos contestan las preguntas que acompañan dicho texto.

Una vez realizada la lectura colectiva y contestadas, en forma individual, cada una de las preguntas del cuestionario, se procede a discutir grupalmente las respuestas dadas por los miembros del grupo.

5. EXPLICAR Y COMPRENDER

Nos hallamos ante uno de los problemas más debatidos en la disputa entre las ciencias naturales y las ciencias del espíritu. Cada una ha acuñado un término que define su método científico: la explicación causal o Erklären frente a la comprensión del significado, los valores o la intencionalidad del autor de la acción (Verstehen).

El concepto Verstehen tiene una historia bastante azorosa: sufrió variaciones en la evolución del pensamiento de Dilthey y es entendido en la hermenéutica gadameriana, desde el círculo del todo y las partes. La tradicción empírico-analítica le ha tergiversado frecuentemente, un índice para fenomenólogos, hermeneutas y dialécticos de su incapacidad para revisar sus presupuestos. Un representante actual de esta tradición, W. Stegmüller ofrede su idea del método Verstehen reduciéndolo a un procedimiento heurístico, precientífico, que exige naturalmente, el Erklären.

A) W. DILTHEY:
EL CONOCIMIENTO DE LA REALIDAD HISTÓRICO-SOCIAL.*

De aquí nace la diferencia entre nuestra relación con la sociedad y con la naturaleza. La situaciones en la sociedad nos son comprensibles desde dentro; podemos reproducirlas, hasta cierto punto, en nosotros, en virtud de la percepción de nuestros propios estados, y acompañamos con amor y odio, con apasionada alegría, con todo el juego de nuestros afectos, la contemplación de la imagen del mundo histórico. La naturaleza es muda para nosotros. Solo el poder de la imaginación vierte sobre ella una vislumbre de vida e intimidad. Pues en cuanto somos una sola cosa con su sistema de elementos corporales en interacción, ninguna conciencia interna acompaña al juego de esa acción recíproca. Por esto también puede tener para nosotros la naturaleza la exprexión de una sublime calma. Esta expresión desaparecería si advirtiésemos en sus elementos o nos viésemos obligados a representar en ellos el mismo juego cambiante de vida interior que la sociedad realiza para nosotros. La naturaleza nos es ajena. Pues es para nosotros algo externo, no interior. La sociedad es nuestro mundo. Presenciamos con toda la energía de nuestro ser entero el juego de las interacciones dentro de ella, pues advertimos en nosotros mismos desde dentro, con la más viva inquietud, las situaciones y energías con que ella construye su sistema. Tenemos que dominar la imagen de su estado mediante juicios de valor siempre en actividad, que transformarlo, al menos en idea, mediante una acción incesante de la voluntad.

Todo esto imprime al estudio de la sociedad ciertos caracteres que lo distinguen radicalmente del de la naturaleza. Las regularidades que se pueden establecer en la esfera de la sociedad son muy inferiores en número, importancia y precisión formal a las leyes que han podido formularse acerca de la naturaleza, sobre la base segura de las relaciones espaciales y las propiedades del movimiento. Los movimientos de los astros, no solo de nuestro sistema planetario, sino de estrellas cuya luz solo después de años llega a nuestros ojos, pueden mostrarse sometidos a la ley –tan sencilla– de la gravitación y calcularse con largo tiempo de adelanto. Las ciencias de la sociedad no pueden permitir tal satisfacción del entendimiento. Las dificultades del conocimiento de una unidad psíquica aislada se multiplican por la gran diversidad y singularidad de estas unidades, tales como cooperan en la sociedad, por la complicación de las condiciones naturales a que están ligadas, por la suma de las interacciones que se realiza en la sucesión de muchas generaciones y que no permite deducir directamente de la naturaleza humana, tal como la conocemos hoy, la situación de épocas anteriores, o inferir la situación actual de un tipo general de naturaleza humana.

Y sin embargo, todo esto queda más que compensado por le hecho de que yo mismo, que vivo y me conozco desde dentro de mí, soy un elemento de ese cuerpo social, y de que los demás elementos son análogos a mí y por consiguiente, igualmente comprensibles pra mí en su interioridad. Yo comprendo la vida de la sociedad. [...]

La facultad de comprensión que actúa en las ciencias del espíritu es el hombre entero; los grandes resultados en ellas no proceden de la mera fuerza de la inteligencia, sino de una potencia de la vida personal. Esta actividad espiritual se encuentra atraída y satisfecha –sin ninguna finalidad ulterior de conocer la conexión total– por lo singular y efectivo en ese mundo espiritual, y con la comprensión está ligada para ella la tendencia práctica en juicios, ideales, normas.

Cuestionario

1.–¿Cómo se conocen las situaciones sociales?
2.–¿Qué quiere decir que se pueden reproducir?
3.–Diferencia, desde este punto de vista, entre el mundo histórico-social y el natural.
4.–Razones de por qué el mundo histórico-social nos es interior.
5.–¿Qué consecuencias respecto al conocimiento tiene lo que precede?
6.–¿Qué tipo de estudio se puede efectuar con la sociedad a diferencia del de la naturaleza?
7.–¿Qué ventajas tiene, sin embargo, el conocimiento histórico-social frente al de la naturaleza?
8.–Analiza cuidadosamente qué quiere decir para el autor «*comprender*».

DESCRIPCION DE LAS ACTIVIDADES Y MATERIALES DIDACTICOS PARA EL TEMA II

INTRODUCCION

Los propósitos del segundo tema se alcanzan mediante tres acercamientos que se distinguen o caracterizan en dos aspectos : por la complejidad, tanto de los aprendizajes deseados, como por las actividades dirigidas a su desarrollo. En cada acercamiento se realizan actividades diversas con la finalidad de propiciar los aprendizajes establecidos. Estas distintas actividades se organizan para ser realizadas en las diferentes sesiones destinadas al estudio de la situación concreta.

El primer acercamiento se caracteriza porque prácticamente todas las actividades que realiza el estudiante las lleva a cabo en base a su experiencia personal, únicamente con lo que "cree, lo que piensa", de manera un tanto intuitiva, nada formal.

En el segundo acercamiento se inicia la formalización. Se utilizan conceptos, relaciones entre conceptos, ya sea cualitativas o cuantitativas así como algoritmos propios de una área del conocimiento.

Se puede decir, que el tercer y último acercamiento, es un tratamiento formal de la situación concreta. Los alumnos habrán de determinar cuántas y cuáles son las áreas del conocimiento que intervienen en la explicación, qué conceptos, relaciones entre ellos y/o algoritmos de cada una de dichas áreas se utilizan.

Una actividad en particular, que los alumnos realizan, en los tres acercamientos antes enunciados, es la lectura de materiales bibliográficos adecuados a la complejidad del acercamiento de que se trate.

PRIMER ACERCAMIENTO

INTRODUCCION Cuando el grupo de estudiantes tiene perfectamente clara la situación concreta que se plantea así como los elementos principales que participan en ella y las distintas formas en que están relacionados unos con otros, se está en condiciones de iniciar el Primer Acercamiento, en el cual, el alumno, con sus propios recursos intelectuales, da respuesta a la pregunta planteada por la situación.

Los propósitos del Primer Acercamiento son, en esencia, dos: que los alumnos den respuesta (correcta, aunque incompleta) a la situación problemática planteada y que se aporten elementos de juicio que justifiquen el Segundo Acercamiento. Como algo suplementario se plantean algunas actividades que ayuden a los aprendices a convencerse un poco más de la importancia de la situación bajo estudio, así como de su actualidad y vigencia.

Por su propia naturaleza, definida por los propósitos que persigue, el Primer Acercamiento es corto en extensión, y se reduce a unas pocas actividades. En nuestro caso está formado de cuatro actividades básicas y dos suplementarias. En las cuatro básicas se tratan los siguientes aspectos: en la primera, se llega a obtener la respuesta que los alumnos dan a la situación problemática y las tres restantes, se centran en justificar el Segundo Acercamiento.

ACTIVIDAD II-I-I EL PREDICAMENTO DE LA HUMANIDAD

PARTE II

En esta ACTIVIDAD del Primer Acercamiento, el alumno, con lo que sabe, cree o estima, da respuesta a la situación planteada. En principio, la respuesta que el alumno da a la pregunta que se le hace, refleja algunos aspectos de su estructura cognitiva, con respecto a la situación.

La pregunta plantea la necesidad de considerar una serie de hechos (crecimiento de la población, producción de alimentos, desarrollo de la industria, consumo de recursos naturales, la tierra como fuente de recursos y contaminación del medio), en forma aislada pero también en su relación mutua (aumento de la población ↔ aumento de alimentos ↔ aumento de industrialización ↔ aumento en la demanda de recursos naturales, etc.) de tal forma que la respuesta que el alumno dé a la pregunta, será una síntesis o integración de tales hechos y sus relaciones.

Es muy posible que en un principio muchos alumnos den respuestas incorrectas o muy escuetas. Uno no tiene porqué desesperarse ante este hecho, pues tal es lo que tienen en su estructura cognitiva. En mucho, la finalidad de las sub-actividades que se realizan en esta actividad tienen por finalidad ayudar al estudiante a desarrollar tal estructura cognitiva.

La presente ACTIVIDAD está dividida en tres partes: en la primera, el alumno, en forma individual, contesta un cuestionario que contiene una sola pregunta; en la segunda, por equipos, discuten y trabajan el mismo cuestionario y, en la tercera, se da una discusión grupal en torno a lo hecho en las dos sub-actividades anteriores.

Al final de la actividad se pretende que los alumnos lleguen a la siguiente conclusión:

> Si en lo futuro, la humanidad sigue creciendo en la forma en que lo ha hecho hasta la fecha, y se mantiene el deseo de proporcionar cada vez más satisfactores (de todo) a todos, parece ser que la consecuencia de todo ello, será, tarde o temprano, el agotamiento de los recursos naturales no-renovables y, cuando ello ocurra, posiblemente se alcance un límite para el futuro crecimiento de la población.

El cuestionario con el cual se inician los trabajos de esta actividad es el siguiente:

Cuestionario II-1-1

EL PREDICAMENTO DE LA HUMANIDAD
PARTE II

"Según proyecciones del Fondo de Naciones Unidas para la Población (FNUP), los habitantes en los cinco continentes durante el presente año (1993) ascienden ya a 5 mil 570 millones de personas. Esta cifra crecerá hasta 6 mil 250 millones al cumplirse el año 2000; a 8 mil 500 en 2025, y a 10 mil en 2050" (La Jornada/11de Julio/93).

Como hemos visto, más población reclama más alimentos, más industria, más recursos naturales y genera más contaminación, etc. Por lo tanto, lee con atención la siguiente pregunta e intenta contestarla lo más detalladamente que te sea posible.

Pregunta: ¿Qué ocurrirá si se mantiene el objetivo del sistema mundial de producir más gente con más (alimentos, bienes materiales, aire puro y agua) para cada persona?

ACTIVIDAD II-1-2

EL PREDICAMENTO DE LA HUMANIDAD
PARTE III

En la actividad anterior los estudiantes han llegado a la conclusión que, de mantener el objetivo del sistema mundial, de producir más gente con más (alimentos, bienes materiales, aire puro y agua) para cada persona, lo que muy posiblemente ocurra es que se lleguen a agotar, tarde o temprano, los recursos no renovables con que cuenta nuestro planeta.

Supongamos que aceptamos la conclusión anterior. Cabe ahora la pregunta: ¿cuándo ocurrirá tal cosa?

La presente ACTIVIDAD tiene como finalidad mostrarle al estudiante, la importancia de la pregunta anterior, pero, sobre todo, ayudarle a desarrollar la conciencia de que si se desea una respuesta cuantitativa para la pregunta anterior, hay necesidad de estudiar, de manera más detallada, sobre todo la forma en la cual está creciendo (y se espera que crezca) la población humana. En otras palabras, lo que se desea con esta actividad es proporcionarle al estudiante argumentos que justifiquen el trabajo que se desarrollará en el segundo acercamiento.

La actividad se desarrolla en dos partes: en la primera, los alumnos contestan, en forma individual, un cuestionario; y en la segunda, se discute grupalmente lo hecho individualmente. Al final de la discusión se reconocerá al crecimiento de la población humana y a sus relaciones con la demanda de alimentos, industrialización, fuente de recursos naturales y contaminación como los aspectos centrales a estudiar.

El cuestionario que se les aplica a los estudiantes es el que se reproduce en la página siguiente.

Cuestionario II-1-2

EL PREDICAMENTO DE LA HUMANIDAD
PARTE III

En la actividad anterior se llegó a la conclusión que de mantener el objetivo del sistema mundial de producir más gente con más (alimentos, bienes materiales, aire puro y agua) para cada persona, lo que muy posiblemente ocurra es que se lleguen a agotar, tarde o temprano, los recursos no renovables con que cuenta nuestro planeta. Supongamos que aceptamos la conclusión anterior. Caben ahora las siguientes dos preguntas:

1. *¿Cuándo ocurrirá tal cosa?*
2. *¿Cómo es posible llegar a tener alguna idea del momento en que eso sucederá?*

CONTESTA LAS PREGUNTAS ANTERIORES LO MAS AMPLIAMENTE QUE TE SEA POSIBLE.

ACTIVIDAD II-1-3   ¿COMO ESTA CRECIENDO LA POBLACION HUMANA?

Por las actividades realizadas anteriormente, se han podido establecer las siguientes conclusiones:

1. La cantidad de satisfactores que requiere una población depende, fundamentalmente, del número de individuos que formen la población y de la cantidad que se le proporcione a cada uno.

2. La población del mundo en general, y la de México en particular, se espera que aumente a medida que el tiempo transcurre.

3. Un elemento fundamental para poder predecir y planear la satisfacción de necesidades futuras, es conocer el número de individuos que formarán la población.

Las conclusiones anteriores, pero particularmente la última, ponen de manifiesto la importancia de que los alumnos cobren conciencia de la necesidad que hay de realizar un estudio que nos lleve a encontrar una descripción cuantitativa de la forma en la cual varía la población humana con el tiempo. Esta descripción es un recurso que nos ayuda a formarnos alguna idea aproximada de la población que existirá a futuro, que por muy imperfecta y limitada que sea, algo puede ayudar a preveer y anticiparnos a lo que sucederá más adelante.

En este contexto, el propósito de esta ACTIVIDAD es que el alumno cobre conciencia de la necesidad de analizar, desde el punto de vista matemático, la forma en la cual crece una población humana. Es pertinente aclarar en este momento que cuando se habla de "la forma en la cual crece una población humana", nos estamos refiriendo al caso de una población que se encuentra en un periodo de crecimiento, entendiendo este término en el sentido demográfico. Es decir, nos referimos a una población que aún no alcanza su etapa de estabilización, ni mucho menos su periodo de envejecimiento.

La actividad consta de dos partes. En la primera, el alumno, en forma individual, lee un texto y contesta, en términos de él, dos preguntas; y la segunda parte, consiste en la revisión grupal, tanto de la lectura, como de las respuestas dadas a las preguntas.

El material que se utiliza para la primera parte de esta actividad se reproduce en la página siguiente.

¿COMO ESTA CRECIENDO LA POBLACION?

Por algunas lecturas anteriores hemos llegado a conocer las predicciones que se hacen en relación al número de mexicanos que vivirán al principio del próximo siglo. En particular se nos dice que el D.F., será la Ciudad más poblada del mundo y que de no disminuir el ritmo de crecimiento de la población, los problemas sociales a los que se enfrentarán las generaciones futuras estarán comprometiendo seriamente su porvenir. En este momento es oportuno formular dos preguntas:

1. Se dice que el número de habitantes que poblarán el planeta, y México, en particular, aumentará con el tiempo. ¿Cómo es este crecimiento?

2. ¿Cómo es posible estimar (predecir), con cierta certeza la población que habrá en el futuro?

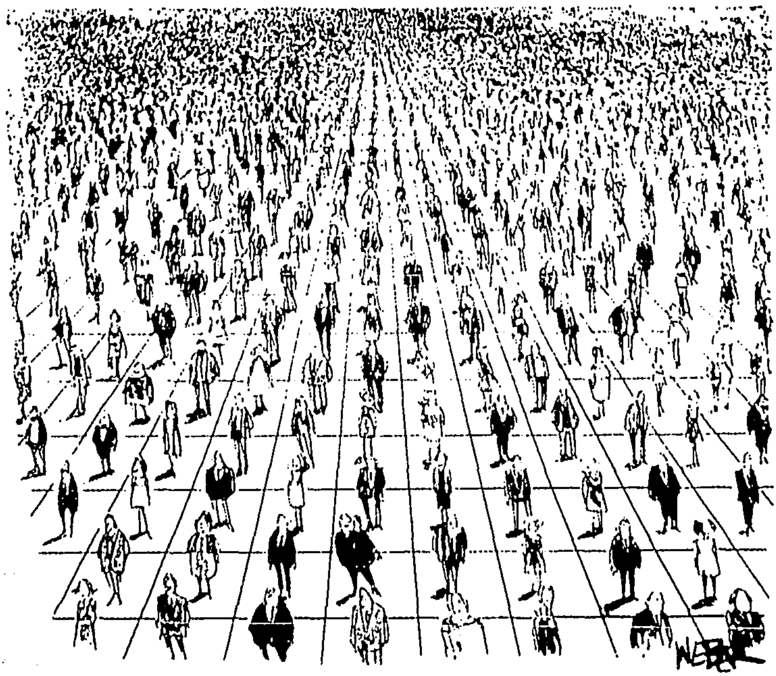
Lee con atención el siguiente texto y contesta las preguntas anteriores.

LECTURA II-1-1

EL CRECIMIENTO DE LAS POBLACIONES HUMANAS

8-1 INTRODUCCION

Los años setentas prometen ser un decenio de un crecimiento sin precedentes de la población. No sólo traerá cada año un aumento en el número total de las personas sobre la Tierra, y no sólo se espera que se haga mayor cada año la proporción del crecimiento, sino también la proporción de esta proporción, esto es, la aceleración experimentará también probablemente un rápido ascenso. Nuestros abuelos no vivieron tiempos de un cambio tan rápido. Las apreciaciones relativas a las poblaciones del mundo antes del siglo xx son muy imprecisas. (En efecto, inclusive los datos actuales son aproximados para una parte muy grande de Africa, para toda China y para varias otras regiones.) Las pruebas antropológicas sugieren que el hombre moderno hizo su aparición en el curso de la evolución hace unos 100 000 años. Durante los tiempos prehistóricos, la población humana total de la Tierra hubo de fluctuar grandemente. En algunos años había más defunciones que nacimientos, lo que ocasionaba un descenso temporal de la población humana. En cambio, para el siglo I de nuestra era, la población había establecido ya su ritmo actual de crecimiento continuo. Sin duda, las tasas de crecimiento eran muy lentas y sumamente variables, pero es el caso que cada decenio se veía a más gente en la Tierra. El Renacimiento señaló en Europa el comienzo de un rápido aumento en la población mundial. En la época del descubrimiento de América había aproximadamente 250 millones de personas vivas sobre la Tierra. En 1650, aproximadamente un siglo y medio más tarde, la población mundial había doblado, siendo



"Perdone, señor, estoy dispuesto a hacerle a usted una proposición interesante por su cuadro." (Dibujo de Weber; ©1971, The New Yorker Magazine, Inc.)

de aproximadamente de 500 millones. En otros 300 años, la población mundial había de aumentar en cinco veces, hasta 2 500 millones de personas. Durante los años cincuentas, la población aumentó casi otros 500 millones y, para 1970, la población del mundo era de aproximadamente 3 500 millones de personas. En otros términos, el *aumento* de la población mundial de 1950 a 1970 fue de aproximadamente dos veces el *volumen* de la población mundial en 1650. O bien, consideremos otra comparación. Hoy en día hay más gente en China de la que había sobre la Tierra en 1650. U otra: viven actualmente las dos terceras partes de todas las personas nacidas desde el año 1500.

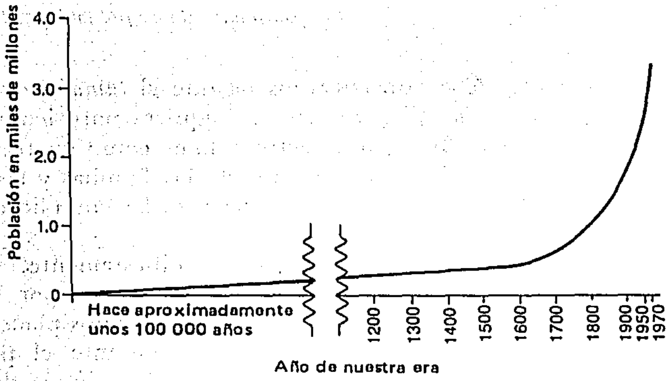


FIG. 8-1. Volumen de la población mundial, desde la aparición del *Homo sapiens* hasta 1970.

La figura 8-1 presenta una gráfica esquemática del volumen de la población mundial desde la aparición del hombre moderno. Téngase presente, con todo, que la regularidad de la curva refleja ignorancia de los detalles de los datos relativos a la población, más bien que regularidad en el aumento de ésta. Es obvio que la curva del crecimiento se está poniendo cada vez más empinada. Y de hecho, una mirada a la figura 8-1 podrá causarnos pánico, ya que si la población sigue creciendo en forma cada vez más rápida, o inclusive si siguie creciendo a su velocidad actual, no transcurrirá mucho tiempo antes de que haya más gente de la que la Tierra puede soportar. Y si hay pobreza y hambre ahora, ¿cómo podría esperarse que el desarrollo económico y agrícola mantenga el paso con una población que crece en forma explosiva? Cabe esperar que la destrucción de tierra, el agotamiento de los recursos naturales, la producción de desechos y la contaminación de la Tierra aumentarán con el crecimiento de población. El lector habrá oído probablemente predicciones funestas con fundamento en la extrapolación de la curva de crecimiento de la figura 8-1. Una profecía que ha adquirido carta de naturaleza, tanto en revistas legas como en periódicos científicos, dice que si la velocidad presente del aumento de la población mundial sigue en esta forma, habrá una persona por metro cuadrado de la superficie de la Tierra en menos de 700 años. Si aceptamos la premisa, la conclusión se hace necesaria. Pero sabemos que la conclusión ha de ser falsa. En efecto es imposible que los individuos subsistan en este planeta con los codos tocando. Un metro cuadrado de superficie terrestre no puede alimentar, vestir ni abrigar una persona. Así, pues, la premisa ha de ser insostenible. En otras palabras, la población humana no puede seguir creciendo a la velocidad actual de modo indefinido. En realidad, esta forma de razonamiento debe convencernos de que el *tamaño de la población no puede crecer indefinidamente,* ni siquiera muy lentamente. Se verá obstaculizado, en efecto, por factores tales como los límites de espacio y alimento, por decisiones concretas de las familias y las naciones, por hambre y enfermedades, y por fuerzas sociales complicadas que se relacionan entre sí.

Con todo, es de la mayor importancia, manifiestamente, saber a dónde va la curva de la figura 8-1. Una de las razones por las que necesitamos semejantes apreciaciones es la de que podamos planear para el futuro. Cuántos alimentos han de producirse durante el próximo decenio. ¿Cuántas escuelas habría que construir? ¿Por dónde deberían pasar las carreteras? ¿Dónde deberían situarse los parques? ¿Las centrales eléctricas? Sin algunos métodos para anticipar el crecimiento futuro de la población, los planificadores se encontrarían ante dificultades insuperables. A fin de que estas preguntas no parezcan implicar que el crecimiento de la población actúa como una fuerza inexorable e independiente, queremos subrayar que los factores económicos y sociales contribuyen a condicionar el volumen de la población del mismo modo que el volumen de la población es uno de los condicionantes de las situaciones sociales y económicas. Por ejemplo, una sociedad cultivada y bien alimentada tiende típicamente a aumentar lentamente. Porque los individuos se dan cuenta, en ella, de la necesidad del control de población y se sienten motivados a practicarlo. E inversamente, una sociedad que crece lentamente tiene probabilidades de estar bien alimentada.

Otra razón en favor de que necesitemos saber cómo predecir el crecimiento de la población es de carácter político. En efecto, si podemos llegar a una apreciación razonablemente aproximada del volumen de la población en alguna fecha futura y podemos mostrar que es demasiado grande para ser compatible con el bienestar social, tenemos en manos un arma numérica con que luchar para la aplicación de las medidas de control de la población. Y para poder apreciar por nosotros mismos la validez de los enunciados, las predicciones y las propuestas relativas al volumen de la población, también nosotros necesitamos comprender el mecanismo del crecimiento de la misma.

ACTIVIDAD 11-1-4 METODO DE ESTUDIO DEL SISTEMA : población-alimentos-recursos no-renovables-industrialización-contaminación.

Con las últimas Actividades, los estudiantes han vislumbrado lo complejo del sistema "Población-alimentos. ....." . Han notado lo intrincado que son las relaciones que se establecen entre sus elementos y lo variable que se muestran con el tiempo. Pues bien, aún con todo ello, si deseamos comprender algo acerca del futuro que le espera a la humanidad para el año 2100, de alguna manera, con algún método tenemos que analizar el comportamiento del sistema anterior con el tiempo.

¿Cómo evolucionará el sistema en el lapso de 100 años ? No se conoce a ciencia cierta. Sin embargo, nos proponemos anticiparnos al futuro, prever algo, formarnos alguna idea de lo que les espera a las generaciones futuras, queremos anticiparnos, para, en la medida de lo posible, intentar corregir conductas o actitudes actuales que puedan alterar gravemente las posibilidades de subsistencia futura.

No es éste el único sistema del cual se desconoce su comportamiento futuro. Existen otros para los cuales no se sabe exactamente cómo se comportarán; estos son algunos ejemplos : un nuevo diseño de automóvil o de avión, las preferencias políticas de los ciudadanos para dentro de tres años; la aceptación que un nuevo producto tendrá en el mercado; las posibilidades de éxito que un centro comercial podría tener en una colonia proletaria; la forma en que funcionará cierto tipo de organización en una gran empresa; lo efectivo que serán los mecanismos de seguridad con que cuenta la Ciudad de México ante un siniestro o los del Metro o los de una escuela; la magnitud del daño que podría causar un accidente "total" en la Nucleoeléctrica de LAGUNA VERDE; ... Etc.

Pues bien, no exactamente de la misma forma, pero de una manera muy parecida, se puede estudiar el comportamiento futuro de los sistemas anteriores. Y, de la misma forma en que no vamos a esperar a que ocurra un incendio en el Metro Capitalino para "poner a prueba" los sistemas de seguridad, o esperar a que el nuevo modelo de auto o de avión se enfrente a las condiciones reales, para darnos cuenta de que el sistema de frenado no respondió como se esperaba, ... así, no podemos esperar hasta que llegue el año 2100 y ver que realmente, lo que parecía ficción, ocurrió.

El propósito de esta ACTIVIDAD es enunciar el método con el cual se puede estudiar "el comportamiento" del sistema

INDUSTRIALIZACION

↓

POBLACION ⟶ ALIMENTOS ⟵ CONTAMINACION

↓

RECURSOS
NO-RENOVABLES

del año 1990 hasta el 2100. Este método se basa en un modelo matemático que permite simular, en computadora, el comportamiento del sistema.

La ACTIVIDAD consiste en la exposición oral por parte del profesor. Para ello, se ayudará de ejemplos como los antes citados, y que, de cierta manera, son un poco más accesibles al alumno. Describirá, lo más que pueda, cómo es posible conocer el comportamiento de sistemas complejos y establecerá analogías con el que nos interesará en el curso.

Finalmente indicará el profesor, que precisamente por la complejidad del problema y de su solución, las siguientes actividades están dedicadas a estudiar, con más detalle, los siguientes aspectos, tanto matemáticos, como pertenecientes a otras disciplinas:

* Modelos matemáticos.
* La función exponencial.
* Algunos conceptos económicos.
* Algunos conceptos demográficos.
* Algunos aspectos de la contaminación.

ACTIVIDAD II-1-5

LA POBLACION, ALIMENTOS, CONTAMINACION, INDUSTRIA Y RECURSOS NATURALES : PROBLEMA ACTUAL.

Hasta este momento se ha reflexionado y discutido, en relación al "predicamento de la Humanidad", utilizando solamente lo que los estudiantes recuerden o intuyan. Naturalmente que es mucho lo que saben. No en vano tienen once años de estudios y algunos más de vivir en un medio social, en donde, los medios de comunicación, en todas sus formas, han hecho énfasis en los problemas que nos ocupan. En periódicos, revistas, cine, radio, televisión, Etc., sistemáticamente (aunque en muchos de ellos sin orden y concierto) se abordan, al menos como noticia, aspectos de población, alimentos, industria, recursos naturales y contaminación.

El problema que se desarrolla en el curso es de mucha actualidad. Diariamente se acumulan informaciones, datos, en relación a los cinco elementos antes mencionados. De igual forma, estos temas han sido tratados en la educación Primaria, en la Secundaria y en la Preparatoria. Y aún con todo lo anterior, no deja de llamar la atención el grado de inconciencia que nuestra juventud muestra. ¿ Será que para ellos el futuro lo ven color de rosa ?. ¿ Será cosa de la edad ?.

Esta ACTIVIDAD tiene el propósito de mostrar a los estudiantes que lo que se ha estado discutiendo, si bien es abstracto, tiene su contraparte en la vida diaria. Diariamente, cotidianamente, ya sea en la familia, en nosotros mismos, en nuestro país y, sobre todo a nivel mundial, se suceden hechos, se discuten problemas y se buscan soluciones que tienen que ver con la población, los alimentos, la industria, los recursos naturales y la contaminación.

La ACTIVIDAD se divide en dos partes : en la primera los alumnos leen, grupalmente, una serie de pequeños textos, obtenidos de diarios, revistas y libros, en donde se abordan, a un nivel elemental, aspectos de población, alimentos, recursos naturales, contaminación e industrialización. La única finalidad de estas lecturas es que los alumnos se familiaricen con la cotideanidad de estos problemas. En donde hubiése dudas se intentará que el grupo, en su conjunto las aclare. Los textos que se leerán se reproducen a partir de la página siguiente.

Para realizar la segunda parte de esta ACTIVIDAD es necesario que los alumnos cuenten con un material específico. Con la idea de que cuenten con él, con anterioridad a la fecha en que se realiza la ACTIVIDAD, el profesor indica a los alumnos que en tal fecha (en la cual se tenga pensado realizar la ACTIVIDAD), los alumnos traerán cada uno, dos periódicos de circulación nacional (de cualquier fecha, pero de preferencia uno actual y otro lo más atrasado que encuentren); unas tijeras, un tubo de lápiz adhesivo, un marcador y, por equipos, dos pliegos de papel manila grande.

En esta parte de la ACTIVIDAD, los alumnos, por equipos, elaborarán un "collage" con recortes de periódicos que se refieran a los problemas de población (textos e ilustraciones), alimentos, contaminación, industrialización y recursos naturales. El "collage" estará dividido en dos partes: por una, lo relativo a México y, por otra, al resto del mundo.

Una vez que los alumnos seleccionaron el material y elaboraron su "collage", realizan, en equipo, un listado de afirmaciones breves que resuman lo que contiene cada texto o ilustración que hayan seleccionado.

A continuación, cada equipo escoge, del material que obtuvieron, el texto que más les guste o interese para que, en un tiempo no mayor de cinco minutos, expongan su contenido ante sus compañeros.

LECTURA 11-1-2

Novedades

domingo 18 de agosto de 1991

Sombría perspectiva poblacional

Por FRANCISCO J. SILLER

De seguir la tendencia actual de crecimiento demográfico seremos 162.2 millones de habitantes en México para el año 2025. Es decir, que la población del país se duplicaría en los próximos 33 años.

El hacinamiento humano en las grandes urbes, en especial la ciudad de México y su zona metropolitana será tal, que se superarán los 10 mil habitantes por kilómetro cuadrado, agotándose incluso las actuales reservas territoriales urbanas.

De acuerdo con el Consejo Nacional de Población, nacen actualmente cinco niños cada minuto y cada año se suman más de un millón 800 mil nuevos mexicanos, que demandan empleos, escuelas, alimentos, viviendas y servicios. Incluso se prevé para el nuevo milenio una drástica reducción en la tasa de mortalidad infantil que para 1990 se situó en 38 decesos por cada mil nacimientos.

Cifras dadas a conocer a **Novedades** por el doctor Manuel Urbina Fuentes, secretario general del Conapo, en un análisis sobre las expectativas de México en el plano demográfico que contemplan en términos absolutos una población de cien millones al año 2000.

Advirtió que debe darse continuidad sexenal a las políticas de población y garantizar que la tasa actual de crecimiento del 2.1 por ciento se reducirá al uno por ciento anual para las próximas tres décadas. De esa forma la población del país se duplicaría sólo cada 70 años y no cada 33 años, puntualizó el funcionario.

Equilibrio demográfico

Destacó que la política de población en la actual administración da continuidad a los lineamientos establecidos en 1974, cuando el país cambia su línea pronatalista y busca una de equilibrio demográfico. Ahora hay características que la diferencian prácticamente de las tres etapas previas, sobre todo en lo que se refiere a una descentralización programática, a la planeación y evaluación de los programas y a un reforzamiento importante en materia de educación.

Urbina Fuentes expuso que el programa de población básicamente se orienta hacia aquellas estrategias que permitan mejorar el bienestar de la población y la calidad de vida en relación a los factores que condicionan el volumen, estructura y distribución de la población y sus factores de migración, natalidad y mortalidad.

En la política demográfica —agregó— se han establecido programas para incidir en esas variables, incluso distribuyendo a la población en regiones deshabitadas y evitar una concentración humana en el centro del país en una acción vinculada estrechamente con el Plan Nacional de Desarrollo Urbano y el de Población.

Los resultados que se han obtenido hasta ahora muestran que la tendencia del país a principios de la década de los 70's se ha corregido favorablemente al reducirse el promedio de siete hijos por pareja a solamente tres, como consecuencia de un incremento en los niveles educativos y culturales de la población.

Territorio y población

En México el problema inmediato no es territorial, sino de densidad de población, ya que existen lugares como Baja California Sur donde hay 10 habitantes por kilómetro cuadrado y otros —como la capital de la República— que aglutinan a cinco mil personas en la misma área, puntualizó.

La tendencia de un crecimiento acorde con la capacidad económica y social del país fue además expuesta por el titular del Consejo Nacional de Población que permita atender la demanda generada y a la vinculación entre población y desarrollo.

Al continuar la explicación afirmó que si nosotros hubiéramos mantenido el ritmo de crecimiento de 3.5 por ciento —una de las tasas más altas en el mundo— a principios de la década de los 70's, la población se hubiera duplicado cada 20 años. Era como hacer otro país cada cada vez y atender las demandas que ello implica.

Por otra parte, expuso la sistemática ampliación de la cobertura de los programas de planificación familiar a partir de 1976 cuando solamente el 30.2 por ciento de las mujeres en edad fértil hacían uso de algún método contraceptual, cantidad que aumentó en los siguientes 10 años a un 57.7 por ciento.

Avances heterogéneos

Consideró sin embargo que los avances no han sido homogéneos en todos los grupos sociales y comunidades del país, ya que la cobertura en las comunidades rurales alcanzó para ese lapso sólo un 33 por ciento contra un 59 por ciento en las áreas urbanas y un 65 por ciento en las tres principales zonas metropolitanas del país.

Además de acuerdo a la Encuesta Nacional sobre Fecundidad y Salud existe una estrecha relación entre el uso de anticonceptivos, con la escolaridad y el área de residencia de tal suerte que los índices más reducidos se presentan en mujeres de comunidades rurales menores de 2 mil 500 habitantes y donde el promedio de escolaridad es inferior al de las áreas urbanas.

Las soluciones que se están planteando ya para absorver el crecimiento demográfico del país, están en el desarrollo de ciudades medias y en planear el poblamiento de áreas de baja densidad —en las que haya el abasto de agua y la oferta de servicios—, con los 18 millones de personas más que habrá en los 8 años y cuatro meses que faltan para la conclusión del milenio.

De hecho se contempla que a finales de este siglo el 85 por ciento de la población será urbana, concluyó Urbina Fuentes.

LECTURA II-1-3

CIUDAD DE MEXICO

Superficie: 9,600 kilómetros cuadrados. Ocupa el 16% del territorio total, con 1,500 kilómetros cuadrados de área urbana, de los cuales 600 están urbanizados

—Altitud: 2,237 metros sobre el nivel del mar

—Población: 18 millones de habitantes

—Densidad de Población: 7,500 habitantes por kilómetro cuadrado

—Delegaciones:16

—Zona Ecológica: 85,000 hectáreas; bosques, 36 mil; campos de cultivo, 34,000; áreas verdes, 15,000; poblados rurales, 36; 77 regiones especiales de desarrollo controlado y 23 volcanes, lo que determina que el suelo de la ciudad de México es permeable, y permite recargar los mantos acuíferos por la filtración de líquidos

—Viveros: Uno en Nezahualcóyotl, con 28 hectáreas dedicadas a la producción de árboles forestales y frutales

—Industrias: 40,000 (25% del total del país)

—Parque Vehicular: 2'719,889 (35%)

—Transporte Diario: 29.5 millones-viaje

—Producción: 36% del total del producto interno bruto

—Contaminación Biológica: 310,500 toneladas de desechos biológicos y orgánicos al año

—Abastecimiento de Agua: 80% proviene de pozos y 20% de sistemas superficiales

—Plantas Tratadoras de Aguas residuales: Nueve

—Aguas Residuales: 45 metros cúbicos por segundo, sin tratamiento

—Emisión de partículas contaminantes: 5 millones de toneladas anuales, producidas por vehículos, 80%; industrias, 15%; fuentes naturales, 5%

—Consumo Diario de Combustible: 240,000 barriles diarios

—Producción de Basura: Tres millones de metros cúbicos mensuales

—Contaminación por Materia Fecal: 132,000 toneladas anuales, de perros y humanos, principalmente (indigentes, subempleados o desempleados)

—Contaminación de Suelos: 21 millones de toneladas de basura doméstica, que no es recolectada en su totalidad

—El Sistema metropolitano, en Monterrey, Nuevo León, para la transferencia y disposición final de los residuos sólidos eliminará todos los tiraderos a cielo abierto de los municipios que componen el área metropolitana

—La clausura de los tiraderos a cielo abierto de Santa Cruz Meyehualco, Santa Fe, Bordo de Xochiaca, Tlalpan, San Lorenzo Tezonco, Milpa Alta, Xochimilco y Tláhuac, que se convertirán en parques recreativos.

LECTURA II-1-4

TREINTA MILLONES DE HABITANTES PARA EL AÑO 2000 EN EL D.F.

Para el año 2000 la ciudad de México ocupará una extensión territorial de 2,700 kilómetros cuadrados, indican estudios relativos al ambiente y la concentración urbana en la zona metropolitana, elaborados por el Centro de Ecología de la Universidad Nacional Autónoma de México. La mayor parte de esta inmensa área urbana será ocupada por edificios y calles, mientras que sólo 6 por ciento se destinará a parques y áreas verdes, además de que los 30 millones de habitantes que en ese tiempo habrá, vivirán con menos de cinco metros cuadrados de áreas verdes por persona, incluidos los jardines privados a los que no tiene acceso el grueso de la población.

Peor aún, en las zonas más pobres de la ciudad la situación será mucho más grave, ya que los vecinos de condominios verticales y de colonias populares tendrán menos de un metro cuadrado de espacios verdes para uso recreacional. Así, la ciudad de México habrá cambiado, de la mezcla heterogénea de ambientes urbanos y rurales, que era su característica más típica durante la primera mitad del siglo, a uno más sobrepoblado, sin áreas verdes ni espacios públicos abiertos. Asimismo, aproximadamente 50 metros cúbicos de agua deberán ser bombeados cada segundo desde fuera de la cuenca para abastecer las necesidades domésticas, comerciales, industriales y agrícolas de los pobladores de la gran urbe. No podemos seguir pensando sólo en términos de volumen, es conveniente observar también la calidad de este recurso. Habrá que tener en cuenta que son interminables los elementos contaminantes biológicos y químicos que se encuentran en el agua. Los primeros son los virus, algas, etcétera. Los químicos se subdividen en inorgánicos y orgánicos. Entre los primeros encontramos compuestos como el amonio, los nitritos y nitratos, los sulfatos, sodio, potasio, fósforo y metales como mercurio, plomo, zinc y cadmio. Entre los compuestos orgánicos, existen algunos que se utilizan como combustibles: benceno, tolueno y xileno, y otros solventes como el tetracloroetileno, tricloroetileno, tetracloruro de carbono y bromoformo, los cuales son vertidos por las industrias directamente al drenaje de esta ciudad sin haber recibido ningún tratamiento.

MEJORAR LAS CONDICIONES AMBIENTALES DE LA GRAN URBE

Cabe señalar al respecto, que no existen confinamientos controlados en el área metropolitana donde se puedan depositar residuos líquidos y sólidos adecuadamente. Ello representa un riesgo de contaminación del suelo y el agua, tanto superficial como subterránea, y hace pensar en una gran sobreexplotación de los mantos acuíferos de la Cuenca de México.

Al parecer, informa el Centro Ecológico, la capa subterránea de arcilla en las áreas que corresponden a la zona lacustre actúa como capa protectora impidiendo hasta cierto punto la infiltración de partículas contaminantes. Pero, no se sabe a ciencia cierta qué ocurre en zonas de transición, como son el Pedregal de San Angel y las regiones comprendidas entre la zona lacustre y las montañas.

Ante este trágico panorama, no se ha definido el inmenso caudal de agua que proveerá a los habitantes de la ciudad en los 2,700 kilómetros cuadrados de mancha urbana, pero lo que sí es fácil de prever es qua necesariamente habrá deforestación en muchas áreas boscosas periféricas que actualmente funcionan como reguladores del ya fuertemente perturbado ciclo hidrológico de la cuenca.

Todos los habitantes de esta ciudad usamos agua para cubrir diversas necesidades. Todos respiramos aire de incierta calidad. Todos generamos desechos. De ahí que debemos todos cooperar, en mayor o menor medida, a mejorar las condiciones actuales de esta gran urbe, cuyos problemas ecológicos tendrán que ser resueltos mediante la integración de profesionales de diversas instituciones del país, a fin de que el desarrollo industrial no agote los límites de la cuenca de México, que en la actualidad ocupa 0.03 por ciento del país y 22 por ciento de su población consume cerca de 30 por ciento de los recursos energéticos.

LECTURA 11-1-5

■ Rebasa la migración femenina a la masculina

INEGI: 17% de la población no reside en su entidad de origen

El presidente del Instituto Nacional de Geografía, Estadística e Informática (INEGI), Carlos M. Jarque, señaló que de los 81.1 millones de habitantes en el país —a marzo de 1990—, 14.1 millones residían en una entidad distinta a la de su lugar de nacimiento, es decir, la emigración interna asciende a poco más del 17 por ciento.

Al hablar en la inauguración de un simposium sobre migración, el funcionario expresó que resulta fundamental conocer los factores que determinan los movimientos poblacionales, así como sus principales características, en especial ante la transformación económica que está sufriendo el país y la negociación del Tratado de Libre Comercio con Estados Unidos y Canadá.

Recordó que la migración es un fenómeno estrechamente relacionado con las transformaciones socioeconómicas, culturales y demográficas, por esos es muy importante estudiar los factores que inciden en las decisiones para emigrar.

Según los datos censales, dijo, el fenómeno de migración interna no ha cesado y registra un porcentaje importante en el país.

Además, se registra una migración femenina sumamente elevada, ya que por cada 100 hombres migrantes hay 109 mujeres que no viven en su entidad de origen. Incluso en el Distrito Federal, se tiene un índice de migrantes de 135 mujeres por cada cien hombres.

No obstante, esta situación se revierte en las entidades fronterizas, ya que en la mayoría de los estados ubicados en la frontera colindante con Estados Unidos de América, predomina la migración masculina.

Esto significa que la migración femenina no es sólo un fenómeno "asociado" que ocurre como resultado de una iniciativa migratoria del hombre, sino que es una acción autónoma e independiente, indicó el presidente del INEGI.

Jarque precisó que de los 14.1 millones de personas que han emigrado de una entidad a otra, 6.7 millones son del sexo masculino y 7.4 del femenino, es decir, se aprecia una participación importante de las mujeres en las corrientes migratorias. Además se observan significativas diferencias, tanto por región de destino como por edad, en este comportamiento.

También sostuvo que el fenómeno migratorio tiene efectos socioeconómicos subsecuentes, tanto en la región de origen como en la de destino, a través de la estructura familiar y del número de hijos de los inmigrantes. Por ejemplo "se observa que el promedio de hijos de las mujeres migrantes es 30 por ciento inferior al de las que no emigraron. En las primeras, el promedio es de tres hijos por mujer y en la segundas es de dos hijos".

El presidente del INEGI indicó que los sectores de actividad en los que principalmente se emplean las mujeres migrantes son, en orden de importancia: los servicios, la industria manufacturera y el comercio. En conjunto, estos tres sectores absorben a cerca de 75 por ciento de las migrantes. Las ocupaciones más frecuentes para este segmento de la población son trabajadoras domésticas, oficinistas y vendedoras, entre las cuales se ubica el 47 por ciento del total de las migrantes.

No obstante, en México, al igual que en otros países, el proceso migratorio es un fenómeno dinámico que requiere ser analizado periodicamente con amplios estudios, ya que que las economías registran cambios a una velocidad impresionante.

MIERCOLES 23 DE OCTUBRE DE 1991
La Jornada

LECTURA 11-1-6

ABATIR LA CONTAMINACION EN LA CIUDAD DE MEXICO

NIDIA MARIN

De acuerdo con la política que se desarrolla contra la contaminación, en la ciudad de México, en la cual participa activamente la comunidad, la mediana industria realiza un esfuerzo equivalente al que desempeñan los automovilistas con el programa "Hoy no circula", ya que efectúan inversiones financieras para mejorar la combustión en las calderas.

Mientras esto ocurre y en las temporadas más críticas como es común durante el invierno o cuando los niveles de contaminación son muy altos, la colaboración de los integrantes de pequeñas empresas de baños y balnearios, en combinación con el Departamento del Distrito Federal y, en general con el gobierno de la ciudad de México, ha sido un hecho, como el apagar sus calderas un día a la semana durante tres meses o cuando se les solicita.

Por medio de la Cámara Nacional de la Industria de Baños y Balnearios se convocó a universidades, institutos tecnológicos y de investigación científica, para que realicen los estudios que se requieran,a fin de encontrar la tecnología adecuada para reducir la emisión de contaminantes que producen las calderas de sus establecimientos.

La solidaridad expresada por diversos sectores de la comunidad hacia las acciones en materia de política contra la contaminación, concertada por el gobierno capitalino, es parte fundamental en lo que se refiere a las decisiones de premiar a México en el extranjero.

Mediante la concertación entre autoridades y propietarios, en los establecimientos se impartieron cursos para fogoneros, lo cual ya permitió reducir, en un cinco por ciento, la emisión de contaminantes al mejorar la operación de las calderas.

Se calcula que un alto porcentaje de las empresas pertenecientes a este ramo de la mediana industria ya terminó de instalar filtros y otros equipos a sus sistemas de combustión, con la finalidad de abatir la contaminación en el Distrito Federal.

La mediana empresa de este rubro, hasta antes de llevar a la práctica el mencionado programa, contaba con tecnologías muy atrasadas que poco a poco se han ido modernizando.

LECTURA 11-1-7

La Jornada

DOMINGO 23 DE JUNIO DE 1991

No hay prueba clara de la relación, indica

Leves daños a la salud por el ozono, dice un estudio de la Ssa

Los altos niveles de concentración de ozono en la zona metropolitana de la ciudad de México provocan en sus habitantes "un ligero aumento de enfermedades respiratorias", según un estudio realizado por las instituciones de salud sobre el periodo comprendido entre los días 4 y 15 de marzo, incluyendo los tres días en que se registraron más de 300 puntos de ozono, dijo en entrevista el director de Medio Ambiente de la Secretaría de Salud, Marco Polo Peña Corona.

Los estudios que se efectúan en el sistema de salud, dijo Peña Corona, se enfocan a medir el efecto del ozono sobre la salud en la ciudad de México, y hasta ahora los resultados no arrojan datos concluyentes que indiquen algún daño.

"Los análisis más avanzados nos inducen a pensar que sí se provoca algún tipo de reacción en la mucosa del tracto respiratorio, y que sí puede en un momento dado inducir hacia modificaciones que sean precursoras de padecimientos", continuó el médico. Sin embargo, precisó, no se sabe qué cantidad de contaminante, ni en qué tiempo puede provocar efectos negativos en la salud.

Durante los días 7, 8 y 9 de marzo, el nivel de ozono superó los 300 puntos, lo cual obligó a la Secretaría de Desarrollo Urbano y Ecología a poner en marcha el nivel II del Plan de Contingencias Ambientales, que consiste en la paralización de 50 por ciento del funcionamiento de las industrias, así como restricción de la circulación de vehículos oficiales.

Las instituciones de salud, través de Dirección de Medio Ambiente, informó el titular de ésta, decidieron hacer un estudio de la salud de la población de la zona metropolitana, tomando como punto de referencia la alta concentración de esos días, y que se extendiese un periodo antes y después de los mismos, por lo cual se determinó el lapso comprendido entre el 4 y el 15 de marzo.

"Los resultados", dijo Marco Polo Peña, "nos indican que sí hay una ligera asociación del ozono con crisis de tipo asmático, pero es mínima."

Se tomó un registro, día a día, de todas las consultas otorgadas por padecimientos respiratorios, y no se encontró un elemento significativo que indicara un incremento de ellos. Los datos que se tienen de esos tres días, expresó, no revelan que se haya provocado algún daño ni que se haya dado un incremento de molestias; es decir, "no fueron significativos para decir que por la contaminación se dieron más padecimientos".

Con relación al plomo, afirmó que, si bien sí está presente "en la sangre de los niños y mujeres, se trata de un plomo que no se ha producido este año; existe desde hace muchos años, y también desde hace años se han tomado varias medidas para disminuirlo".

"Los contaminantes están ahí y buenos no son; deben de estar causando algún efecto, pero eso se está estudiando", añadió el médico, y señaló que los efectos sólo pueden ser medidos a largo plazo.

Por otro lado, ayer, durante la presentación de la revista *Ecología y Salud*, editada por la Fundación Rotaria Tecamachalco, el doctor Jesús Pérez Martínez, director de la revista *Alergia*, de la Sociedad Mexicana de Alergia, dijo que a través de los años se han incrementado los padecimientos respiratorios, y señaló que "los pacientes se enferman más seguido". Sin embargo, reconoció no disponer de estadísticas sobre esta situación.

AGENDA URBANA

Llegó ayer a 267 puntos de ozono la zona suroeste

Según el reporte del Indice Metropolitano de Calidad del Aire, ayer la zona más contaminada con ozono fue la suroeste a las 13 horas, con 267 puntos, mientras la sureste tuvo 244 puntos.

No se registró inversión térmica, y los niveles de ozono en las otras zonas de la ciudad fueron: centro, 185 puntos; noroeste, 129, y noreste 118.

El nivel de contaminantes fue propiciado por la presencia en la atmósfera superior de un sistema anticiclónico que se localiza sobre la parte norte y centro del país, lo que en el valle de México favorece estabilidad atmosférica y vientos débiles.

LECTURA II-1-8

■ Urge detener el uso de clorofluorocarbonos

Crece cada día el *hoyo* en la capa de ozono: expertos

El hoyo en la capa de ozono mide ya 12 kilómetros de ancho por 20 de largo y aumenta cada día, según revelan las investigaciones científicas más recientes sobre esa protección atmosférica, informaron ayer los representantes del Fondo Multilateral del Ozono, del Programa de las Naciones Unidas para el Medio Ambiente (PNUMA) y del Banco Mundial (BM).

Expresaron que es tal el deterioro de esa capa, que podría adelantarse el cumplimiento de las metas fijadas en el Protocolo de Montreal, las cuales fijan un plazo de 10 años, a partir de la fecha de ratificación por parte de las naciones firmantes, para que éstas dejen de utilizar clorofluorocarbonos (CFC) en los procesos industriales.

En conferencia de prensa, el principal asesor de Administradores en Medio Ambiente, Michael Gukovsky, expresó que de acuerdo con las últimos estudios no sólo se agranda cada vez más el agujero, sino se ha comprobado que las alternaciones del ambiente —como el famoso efecto de invernadero— ya no se presentan únicamente en el invierno, sino todo el año.

Los delegados, quienes se encuentran en la ciudad de México analizando dos proyectos industriales que podrían obtener recursos financieros del Fondo Multilateral, expresaron que en la próxima reunión del Protocolo, el año que viene, es muy posibe que se reformen los acuerdos, porque en vista de la destrucción paulatina de la capa de ozono es necesario "establecer metas más serias".

La capa de ozono puede renovarse, aseveró Jorge Corona de la Vega, director de enlace entre los industriales de la transformación y la Secretaría de Desarrollo Urbano y Ecología (Sedue). Sin embargo, agregó, tiene que tomarse en cuenta que los volúmenes de CFC que se desprenden de las actividades humanas permanecen entre 40 y 100 años en la atmósfera, antes de elevarse a la estratosfera.

A su vez, el embajador Juan Antonio Mateos, presidente del Comité Ejecutivo del Fondo Multilateral y representante permanente de México ante el PNUMA, indicó que 85 por ciento de los CFC son producidos por las naciones industrializadas, y el 15 por ciento restante por los países en vías de desarrollo.

Estados Unidos, Japón, Inglaterra y Alemania, se indicó, son los industrializados que emiten el mayor número de gramos de CFC por persona.

Aunque únicamente genera uno por ciento de la totalidad de CFC, México es el mayor productor del Tercer Mundo, junto con India, Brasil y China; pero —subrayaron— lo importante de estos países no es tanto su producción, sino el consumo que puede hacerse de los productos que contegan el CFC, los cuales se importan para sus poblaciones.

En este sentido, los representantes manifestaron que las acciones llevadas a cabo por el gobierno mexicano en la materia "van a la vanguardia" y superan incluso lo realizado por muchas naciones industrializadas. Esta nación, aseveró el director del Fondo, Omar El Arini, fue la primera en ratificar el Protocolo.

También estuvieron presentes Choung Phung, director de la Oficina de Operaciones del Banco Mundial, y René Altamirano, director general de Prevención y Control de la Contaminación Ambiental de la Sedue.

MIERCOLES 23 DE OCTUBRE DE 1991
La Jornada

LECTURA 11-1-9

LA BASURA, CAUSA DE LA MAYOR DESTRUCCION ECOLOGICA

Una familia urbana, integrada en promedio por cinco personas, produce un metro cúbico de desperdicios mensualmente, lo cual equivale a generar, aproximadamente, tres millones de metros cúbicos, solamente en lo que atañe al Valle de México, mientras que, a nivel país, la cifra aumenta a unos 10 millones de metros cúbicos, en igual lapso.

El ingeniero Carlos Padilla Massieu, funcionario del Movimiento Ecologista Mexicano, señaló lo anterior y agregó que ello es consecuencia de los malos hábitos, flojera, incultura e irresponsabilidad que privan en la mayoría de las familias urbanas, defectos que tornan más difícil aún la situación, si se toma en cuenta que los métodos empleados para recolectar los desechos son absolutamente inadecuados, además de resultar muy costosos; de ahí que sea imprescindible continuar utilizando los arcaicos sistemas de la llamada "pepena", que únicamente beneficia a unos cuantos explotadores, en detrimento de cientos de personas que trabajan en situaciones deprimentes de explotación, promiscuidad e insalubridad.

Incluso, se da el caso de que las mafias de la basura eviten que los camiones recolectores compriman los desperdicios sólidos, ya que si lo hacen, el "pepenador" no puede trabajar. Así, un vehículo que debe de ser cargado a un mínimo de su capacidad, provoca que, para cumplir su objetivo, tenga que hacer hasta diez viajes, en lugar de tres, aumentando con ello el uso de 3,000 camiones que consumen gasolina, generan contaminación y saturan aún más el ya tan complicado tráfico vehicular.

El funcionario señaló asimismo que el Movimiento Ecologista Mexicano tiene registradas 350 hectáreas, en las que han sido ubicados tres gigantescos tiraderos a cielo abierto, lugares donde hacen la pepena unas 12,000 familias, que definitivamente no se dan abasto, por lo que 60 ó 70 por ciento de la basura va a parar a barrancas, ríos, alcantarillas, terrenos baldíos, etc., ocasionando con ello la proliferación de ratas, insectos, moscas, hedor y asco, además de cientos de toneladas de detritus que agreden directamente a los millones de habitantes de la zona metropolitana del Valle de México.

Esta basura, que generalmente se encuentra al aire libre, es levantada y esparcida por el viento, contaminando el suelo, el agua, e incluso nuestros propios alimentos, además de que se impregna en la epidermis, se inhala y muchas veces se ingiere, provocando enfermedades como la amibiasis, infecciones en la piel e intestinales, así como tifoidea y conjuntivitis.

Pero esto no es todo, señala el funcionario del Movimiento Ecologista Mexicano, quien categóricamente agrega que los productos degradados, al fermentarse, por estar expuestos al sol favorecen la proliferación de organismos nocivos para la salud y ocasionan su filtración a través del suelo, contaminando las aguas subterráneas.

Consecuentemente, en una ciudad tan grande como lo es la zona metropolitana del Valle de México, donde sólo existen tres basureros y dos vertederos industriales para los casi 22 millones de habitantes, resultan insuficientes los camiones recolectores y los depósitos, así como la mano de obra.

Ante este triste panorama, concluye Carlos Padilla Massieu, "nos damos cuenta que si no cambiamos nuestra manera de actuar, de producir y de trabajar, nos llenaremos de basura día con día, contribuyendo así no sólo a la destrucción de la naturaleza, sino a la de todos los seres vivos que habitan esta gran ciudad, que otrora fue la región más transparente del aire".

LECTURA II-1-10

DAÑOS IRREVERSIBLES AL PLANETA POR CONFLICTOS BELICOS

ALFONSO ARANZABAL

El reciente conflicto bélico en el Golfo Pérsico, además de haber sido causante directo en la pérdida de vidas humanas, destruyó extensas redes de agua potable y drenaje, así como líneas de energía, lo cual frenó la producción de alimentos enlatados y afectó la conservación de los perecederos, además de los consecuentes estragos contaminantes sobre el líquido vital, en el suelo, la vegetación y la atmósfera.

Los derrames de petróleo, consecuencia de que Irak dinamitó los pozos kuwaitíes, siguen consumiendo millones de metros cúbicos de ese energético que, a querer o no, alteran la atmósfera. Y, junto con la pérdida de oxígeno, la saturación de gases tóxicos no sólo afectará el lugar donde se desarrolló la guerra, sino que perjudicará en el futuro a todo el planeta, porque la Tierra, en su constante girar sobre su eje y en torno del Sol, suscita movimientos de las capas de gases que la rodean, es decir, los vientos que no topan con fronteras ni con naciones.

La contaminación que generó la guerra en Oriente Medio, inevitablemente acarreó drásticos cambios en el clima, suelos, flora y fauna, todos ellos difícilmente recobrables. La posibilidad de una guerra nuclear limitada destruiría los sistemas de producción, la distribución agrícola y energética, la interrupción en las vías de comunicación, la reducción de la capa de ozono, muertes calculadas entre 100 millones y 1,000 millones de personas —según datos de la Organización Mundial de la Salud—, así como efectos letales, causados por la contaminación radiactiva, son algunos de los daños que ocasionará al planeta una guerra de esta magnitud.

Estudios elaborados al respecto por la Comisión de Desarrollo y Medio Ambiente de América Latina y el Caribe, del Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo, y auspiciados por el Banco Interamericano de Desarrollo, asientan que el riesgo nuclear amenaza la existencia de la humanidad, porque podría sobrevenir una conflagración bélica atribuida a errores humanos y fallas de funcionamiento de los sistemas bélicos por terrorismo nuclear o por el escalamiento de las guerras convencionales.

La contaminación radiactiva del mar provocada por accidentes de reactores de uso civil, como el de Chernobyl, han tenido repercusiones globales en el ambiente, de lo cual se infiere que una contienda nuclear limitada ocasionaría daños irreversibles al planeta Tierra.

EL LATENTE RIESGO DE UNA GUERRA NUCLEAR

Igualmente, la guerra en el Golfo Pérsico, puede haber destruido, el patrimonio cultural de la humanidad, pues el efecto destructivo de cualquier tipo de armamento —químico, bacteriológico, atómico o nuclear— aniquila la vida de varios seres humanos, daña y destruye ecosistemas. Lo más grave de las guerras, es que de utilizarse una bomba nuclear borraría todo signo de vida en 30 kilómetros a la redonda del lugar donde cayera. El impacto de los armamentos en el ecosistema mundial sería sumamente crítico y la contaminación, gravísima. En las guerras, el gas mostaza, por ejemplo, contiene elementos químicos que destruyen el sistema nervioso del ser humano, pero además emiten una serie de sustancias tóxicas en el ambiente, cuya distorsión no solamente perjudica a los seres humanos sino a todo el ambiente en su conjunto.

LA URBANIZACION ORIGINO LA MIGRACION DE AVES, MARIPOSAS E INSECTOS

La amplia gama de espacios naturales con que contaba el Distrito Federal, como áreas acuáticas, bosques mixtos, matorrales y pastizales favorecieron la existencia de innumerables especies de aves, mariposas, insectos, batracios y reptiles.

Sin embargo, a causa del incontrolable y desordenado crecimiento de los asentamientos humanos, existe fuerte riesgo de perder los pocos recursos naturales que aún quedan. La zona lacustre, por ejemplo, ha sido prácticamente destruida en Texcoco y se halla muy reducida en Xochimilco.

No obstante que el número de especies que existen en el Valle de México puede parecer sorprendentemente alto, hay que considerar que 60 por ciento son migratorias y sólo se encuentran durante el invierno, o de paso en una época determinada del año, en tanto algunos sólo buscan lugares específicos para su sobrevivencia.

Las mariposas, por ejemplo, que tuvieron gran significación en las culturas que florecieron en el Valle de Anáhuac, actualmente han modificado su comportamiento y el hábitat por los factores ambientales del desarrollo urbano de la ciudad.

El Valle de México, como hábitat para las mariposas, pájaros e insectos ya no es el de antes, motivo por el cual algunas especies emigraron, otras redujeron su área de distribución y muchas también se extinguieron.

A esto último, entomólogos de la Universidad Nacional Autónoma de México señalan que las causas de la desaparición. de muchos insectos, como grillos, libélulas, luciérnagas, aves y muchas clases de mariposas de la Zona Metropolitana de la Ciudad de México, se debe principalmente a la destrucción de su entorno natural, dada la explotación irracional de los recursos, al envenenamiento del aire y a la irracional cacería que cometen muchos seres humanos.

Por ello, determinar si su ausencia de la ciudad de México se debe a la contaminación ambiental, resultaría exagerado, pero sí es cierto que su migración se debe a la urbanización y a la destrucción de las zonas verdes y a la falta de fuentes húmedas.

LECTURA 11-1-12

La Jornada

DOMINGO 18 DE AGOSTO DE 1991

■ Las reservas llegarán a 12 mil 700 mdd

Crecerá a 3.9% el PIB al término de 1991: Bimsa

María de Jesús Espinosa □ El crecimiento del producto interno bruto (PIB) ascenderá a 3.9 por ciento al término del presente año, como resultado de un aumento de 15.2 por ciento en la inversión fija bruta, señalan estimaciones de los consultores privados del Grupo Bimsa, quienes precisan que las reservas internacionales cerrarán el año con 12 mil 700 millones de dólares y el empleo formal en la economía ascenderá a 24.3 millones.

Las finanzas públicas registraron un superávit financiero de 4.3 billones de pesos en el primer trimestre del año, lo que representa 2.3 por ciento del PIB. Esta evolución fue determinada por una reducción de 19.7 por ciento en términos reales en el gasto total y un aumento de 6.7 en los ingresos del sector público.

Sin embargo, debe considerarse que dentro de la contabilidad gubernamental se incluyeron los ingresos por la venta de Telmex, cercanos a los 5.3 billones de pesos. Pero aun sin ellos la evolución de los ingresos distintos a la venta de la empresa respecto de los gastos totales indican "una dirección adecuada en el manejo de las finanzas públicas".

Descontando los ingresos por la venta de Telmex el déficit financiero del sector público habría sido de sólo 0.5 por ciento del PIB generado en el primer trimestre, lo que indica un ajuste real y profundo en las finanzas públicas.

Esta política de saneamiento del gasto público es un aspecto primordial para la estabilidad de los precios y para fortalecer la balanza de pagos, agrega el estudio.

Según los analistas privados, "la profundidad de los avances alcanzados dentro de esta estrategia económica a dos años y medio de su conceptualización es inegable. Sin embargo, todavía existe una agenda pendiente para asegurar la continuidad en la estrategia económica descrita anteriormente y consolidar la estabilidad económica nacional".

Respecto de la inflación, el Grupo Bimsa señala que este indicador presenta una clara tendencia a la baja, pues del 29.9 por ciento registrado al cierre de 1990, las estimaciones apuntan a un 18.2 por ciento al término de 1991.

La vigorosa reactivación de la inversión pública en infraestructura y las acciones encaminadas a fortalecer la inversión privada, nacional y extranjera, originaron que el PIB creciera en 3.9 por ciento en el primer trimestre y se estima un crecimiento de 3.5 para el segundo, con lo cual al término del año este indicador podría cerrar en 3.9 por ciento anual.

De mantener y profundizarse la actual estrategia económica se lograría un crecimiento estable que asegurará una entrada de capitales suficiente para sostener el déficit de la cuenta corriente, que se estima ascenderá a 9 mil 200 millones de dólares al término del año.

LECTURA 11-1-13

■ Casi un tercio de alimentos se produce ahí

De riego, sólo 5 por ciento de tierras cultivables en el mundo

Matilde Pérez U. ☐ En el mundo sólo cinco por ciento de las tierras cultivables está bajo riego y en ellas se produce 30 por ciento de los alimentos que demanda la población del orbe, apuntó el investigador alemán Hans K. Barth, durante el seminario internacional sobre *Uso eficiente del agua*.

Precisó que hasta el año pasado había en el mundo 430 millones de hectáreas bajo riego y, de acuerdo a perspectivas de la Organización de las Naciones Unidas para la Alimentación y la Agricultura (FAO), se esperaba que para el año 2000 estuvieran bajo este sistema poco más de 800 millones de hectáreas.

Explicó que de 1986 a 1990 sólo se incorporaron al riego 180 millones de hectáreas adicionales a las 250 millones de hectáreas ya irrigadas. Problemas económicos, degradación del suelo y problemas de abasto de agua son algunos de los factores que influyen en que no se cumplan las perspectivas de incremento de tierras agrícolas irrigadas, agregó.

Sin embargo, el investigador alemán de la universidad de Padeborn, descartó que este sea el fin de la era del riego. La humanidad, dijo, debe retornar a las formas ancestrales de irrigación, pero aplicándoles las tecnologías modernas. Advirtió que de no ampliarse la extensión agrícola bajo riego, la población más afectada por la falta de alimentos será la de los países subdesarrollados, la cual está destinada a morir de hambre si no se cambian las políticas actuales, pues mientras las tierras de riego sólo crecen uno por ciento al año, la población lo hace en un dos por ciento.

En el seminario organizado por la Comisión Nacional del Agua, el Instituto Mexicano de Tecnología del Agua y la Asociación Internacional de Recursos Hidráulicos, se informó que a nivel mundial la eficiencia en el uso del agua es de apenas 37 por ciento; es decir, de cada 100 metros cúbicos sólo se aprovechan 37 y se desperdician 63, en tanto que en México estos parámetros son variables.

Como ejemplo del caso mexicano se indicó que mientras en el noroeste del país el desperdicio de agua se calcula en un 40 por ciento, en el centro y sur, la eficiencia del uso del líquido es de entre 30 y 40 por ciento.

Al respecto, Gabriel Echávez, investigador de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, comentó que las fugas de agua en las redes de distribución tanto para usos potables como para riego, constituyen una de las preocupaciones a nivel mundial y en particular donde este recurso es escaso.

Indicó que en la UNAM se realizan estudios, que en breve someterán a la consideración de las autoridades correspondientes, para que en el Reglamento de Construcción se tomen en cuenta mecanismos para evitar el desperdicio y la contaminación del agua. Asimismo, consideró urgente la revisión de todas las redes de distribución para evitar en lo posible las fugas, ya que en algunas zonas las redes de distribución tienen entre 50 y 70 años de existencia.

MIERCOLES 23 DE OCTUBRE DE 1991
La Jornada

ACTIVIDAD II-1-6 PELICULA: "CUANDO EL DESTINO NOS ALCANCE"

El propósito de la ACTIVIDAD es que los estudiantes conozcan cómo el cine ha presentado una visión "apocalíptica" para el futuro de la humanidad. Después de ver la película, el grupo hará comentarios acerca de los plantemientos que en ella se hacen.

FICHA FILMOGRAFICA DE LA PELICULA:

Título: "Cuando el destino nos alcance".

Año: 1973.

Director: Richard S.L. Elsher.

Productor: Walter W.A. Seltzer y Russell Tehacher.

Basada en la novela: Soylent Green.

Autor: Harrison.

Guión: Stanley R. Greenberg.

Actores: Charlton Heston, Leigth Taylor Young y Chuck Coonnors.

SEGUNDO ACERCAMIENTO

INTRODUCCION

Como se dijo anteriormente, en este Acercamiento se realizan las actividades que sirven para recordar o aprender los contenidos necesarios al estudio de la situación concreta. En tal sentido, en las siguientes páginas se describen las actividades de enseñanza-aprendizaje que realizan, alumnos y profesor, y aparecen los materiales didácticos (que en un primer intento, se juzgan adecuados) que apoyan su realización con el propósito de alcanzar ambos objetivos.

Todas las actividades en este Acercamiento están encaminadas a cubrir contenidos temáticos pertenecientes al Segundo Tema del Programa, al tiempo que intentan propiciar en los alumnos oportunidades de que puedan desarrollar aún más sus habilidades intelectuales y el fortalecimiento de valores positivos hacia, principalmente, su responsabilidad con respecto al futuro de la humanidad.

Las características de la situación estudiada hacen necesario el repaso o estudio de aspectos demográficos, económicos, ecológicos y matemáticos. Sin embargo, por los objetivos propios de este trabajo, el énfasis recae en la matemática necesaria para la descripción cuantitativa de la situación.

La razón fundamental de los múltiples problemas que inquietan porque, de no tomar medidas adecuadas, ponen en peligro la propia existencia de la humanidad, es la forma en que la población humana se está multiplicando.

En forma fácil y rápida se dice que la población humana, en general, se multiplica en forma exponencial. Sin embargo, comprender el aspecto matemático de tal forma de multiplicación, y que vaya más allá de una tabla de valores o de una representación gráfica, requiere de numerosos contenidos matemáticos (función, sucesión, serie, límite de una sucesión, número irracional, etc) y de formas peculiares de pensar (procesos que se repiten, de acuerdo a cierto patrón, una y otra y otra vez de manera indefinida). Esto precisamente explica el cuidado que se ha tenido en considerar un número de actividades que puede parecer, a primera vista, excesivo, pero que no lo es si se piensa que siempre existe la posibilidad de la elección y/o eliminación de algunos de ellos, de acuerdo con la situación particular de los estudiantes.

En cuanto a los aspectos no-matemáticos de la situación estudiada, si bien el número de actividades desarrolladas no se asemeja a las que se dedican a la parte matemática, se considera que son suficientes para ofrecer un contexto adecuado a la descripción cuantitativa, permitiendo anclarla en el estudio de una situación concreta real y exhibiendo sus múltiples conexiones, tanto con otras racionalidades, como con diversos hechos sociales de capital importancia para la vida humana.

ACTIVIDAD II-2-1

INTRODUCCION AL ESTUDIO DE SERIES Y SUCESIONES

Aprender en forma significativa el concepto de función exponencial ($y=e^x$) implica estar en posesión de una estructura cognitiva en donde estén presentes conceptos como los de función, sucesión, límite de una sucesión, número e, etc, y el de habilidades intelectuales como las de inferir, generalizar, pensamiento algebraico, etc. Por el nivel de estudios de los alumnos a quienes se dirige la propuesta, lo más probable que ocurra es que tales aprendices tengan en su estructura cognitiva pocos de los elementos antes enumerados y que por lo tanto haya necesidad de construir muchos de ellos.

El propósito de esta ACTIVIDAD es que los alumnos, describan cuantitativamente situaciones muy simples mediante colecciones finitas de números construídos de acuerdo a un cierto patrón. Tales colecciones de números son ejemplos de "sucesiones finitas" de números naturales. Por otro lado, en esta misma Actividad se introduce a los alumnos en el estudio de las series, a partir de las mismas sucesiones desarrolladas. En particular, uno de los propósitos de esta Actividad, es que los alumnos se inicien en los procesos infinitos que aparecen en las matemáticas, de tal forma que se ejerciten mentalmente y puedan por este medio repetir un proceso que se realiza (mediante ciertas condiciones) una y otra vez.

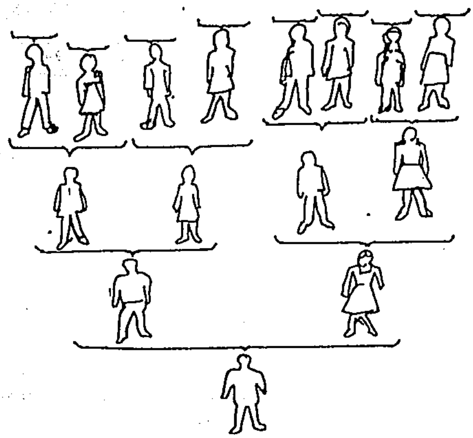
La Actividad está dividida en dos partes: en la primera los alumnos, en forma individual, contestan un cuestionario que contiene diecinueve preguntas y que se reproduce a partir de la siguiente página; en la segunda parte de la Actividad los estudiantes, en forma grupal, discuten las respuestas dadas al cuestionario, hasta obtener las correctas. Durante la discusión el profesor estará pendiente de que los alumnos muestren o exhiban rasgos que indiquen que han desarrollado las nociones de "sucesión finita" y "serie finita", así como de un proceso que se repite una y otra vez.

Cuestionario II-2-1

INTRODUCCION AL ESTUDIO DE SERIES Y SUCESIONES

LEE CON ATENCION Y CONTESTA LAS PREGUNTAS QUE SE TE FORMULAN EN EL ESPACIO CORRESPONDIENTE O LLENA LOS ESPACIOS EN BLANCO.

En la siguiente figura se intenta ilustrar el hecho de que cada una de las personas que vive hoy día tuvo dos padres, cuatro abuelos, ocho bisabuelos, etc.



Tiene 2 antepasados de una generación antes;

4, o sea 2x2 o 2^2 de hace dos generaciones;

8, o sea ____ o ____ de hace tres generaciones;

16, o sea ____ o ____ de hace cuatro generaciones.

Pregunta 1: ¿Cuántos antepasados tiene hasta la séptima generación?

Respuesta:

Pregunta 2: ¿Cómo se escribe en potencias de 2, el número anterior?

Respuesta:

Pregunta 3: ¿Cómo se escribe el número de antepasados que pertenecen a la generación n que le antecedió a un individuo cualquiera?

Respuesta:

Pregunta 4: Escribe, en forma ordenada, el número de antepasados, por generación, que un individuo tiene, tomando en cuenta las diez generaciones que le precedieron inmediatamente antes.

Respuesta: _____ (1a. Gen.), _____ (2a. Gen.), _____ (3a. Gen.), _____ (4a. Gen.), _____ (5a. Gen.), _____ (6a. Gen.),

_____ (7a. Gen.), _____ (8a. Gen.), _____ (9a. Gen.) y _____ (10a. Gen.)

Pregunta 5: Observando el conjunto de números de la respuesta anterior, ¿cómo se encuentra, el número de individuos de una generación, si se conoce el número que había en la generación inmediata anterior?

Respuesta:

Pregunta 6: Escribe solamente, es decir, no encuentres el resultado, del número total de individuos, que forman los antepasados directos de una persona y que vivieron durante las diez últimas generaciones que le antecedieron.

Respuesta:

R E S U M E N:

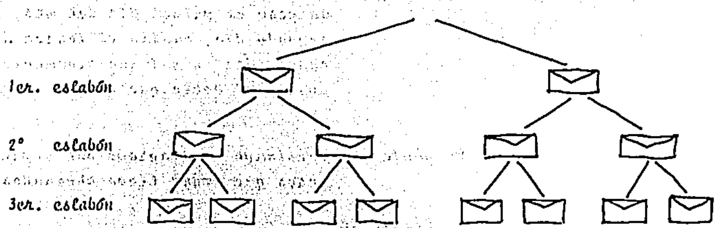
El conjunto de números, tal como se ha encontrado en la respuesta a la pregunta cuatro, es un ejemplo de SUCESION.

El n-ésimo término de una sucesión es el número que está en el lugar n de la sucesión

El número escrito en la respuesta a la pregunta seis, es un ejemplo de una SERIE.

LEE CON CUIDADO CADA UNO DE LOS TEXTOS SIGUIENTES Y RESPONDE, EN EL LUGAR INDICADO, LAS PREGUNTAS QUE SE TE HACEN.

TEXTO 1. *Las cadenas de cartas es un mal que bajo una forma u otra aparecen cada pocos años. Consideremos el caso tan sencillo en que una persona manda una carta a dos amigos, pidiéndoles que la copien y a su vez la manden cada uno a dos de sus amigos, y, así sucesivamente. El primer eslabón consta de 2^1 cartas, el segundo de cuatro o sea 2^2 cartas, el tercero de ocho o sea 2^3, etc.*



Pregunta 7: ¿Cuántas cartas hay en el sexto eslabón?

Respuesta:

Pregunta 8: ¿Cómo se escribe el número de cartas que corresponden al vigésimo primer eslabón?

Respuesta:

Pregunta 9: En los veinte primeros eslabones, ¿cuántas cartas en total se han enviado?. ¡No encuentres el número!. Solamente describe el procedimiento que se seguiría para encontrarlo.

Respuesta:

Pregunta 10. ¿Cuántos eslabones de cartas habrá que mandar para que cada uno de los dos mil millones de hombres, mujeres y niños de este mundo, analfabetos o no, reciban una y sólo una carta? ¡No encuentres el número! Solamente describe el procedimiento que seguirías para encontrarlo.

Respuesta:

TEXTO 2. Tu compañero Pedro decide poner en práctica el siguiente proyecto de economizar: ahorra un peso el primer día del mes, dos pesos el segundo día, cuatro el tercer día, ocho el cuarto día, y así sucesivamente, cada día ahorra el doble que el día anterior.

Pregunta 11. Construye un diagrama que represente el número de pesos que Pedro lleva ahorrados hasta el cuarto día.

Respuesta:

TEXTO 3. Supongamos que tenemos una hoja de papel muy fino, de una milésima de centímetro de espesor, lo cual equivale a decir que un montón de mil hojas de esas tendría una altura de un centímetro. Rompemos por la mitad esa hoja de papel y ponemos los dos trozos uno encima del otro. Las partimos por la mitad, y colocamos los cuatro pedazos uno encima de otro, los volvemos a partir por la mitad y a colocar los trozos en montón, y así sucesivamente.

TEXTO 4. Dice la leyenda que un antiguo Shah de Persia (hoy Irak), le gustó tanto el ajedrez que mandó a su inventor que pidiera la recompensa que deseara. El inventor, que probablemente sabía bastante Aritmética, pidió un grano de trigo por el primer cuadro del tablero, dos granos por el segundo, cuatro granos por el tercer cuadro, y así sucesivamente hasta que hubiera tenido en cuenta a todos los cuadros del tablero.

TEXTO 5. Una amiba puede realizar una trampa matemática que no se puede hacer: ¡multiplicar, dividiendo!. Después de que la única célula de la amiba ha alcanzado un cierto tamaño, se parte en dos y habrá dos amibas donde antes sólo había una. Aproximadamente en un día las dos amibas han crecido hasta un punto donde están preparadas para dividirse y formar cuatro; un día después habrá ocho, y así sucesivamente.

Pregunta 12. ¿Qué tienen en común las situaciones referentes a las generaciones, a la cadena de cartas, al ahorro de Pedro, al montón de hojas de papel, a la leyenda de la invensión del ajedrez y a la multiplicación de una amiba?

Respuesta:

Pregunta 13. Cuándo se intenta hablar, cuantitativamente (es decir con números), en todas y cada una de las seis situaciones antes descritas, de seguro aparece una expresión como la siguiente:

$$2^5.$$

Explica qué significado tendría el número 2 y el exponente 5 en cada situación. Escribe tu respuesta llenando el cuadro siguiente.

Respuesta:

	SIGNIFICADO	
SITUACION	2	5
Antepasados		
Cadena de cartas		
Ahorro de Pedro		
Montón de hojas		
Ajedrez		
Amiba		

Pregunta 14. ¿En cuáles de las seis situaciones anteriores tiene sentido la expresión

$$1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 ?$$

Respuesta:

Pregunta 15. En las situaciones encontradas en la pregunta anterior, ¿qué significa la expresión

$$1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 ?$$

Respuesta:

Pregunta 16. ¿En cuáles de las seis situaciones anteriores tiene sentido la expresión

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 ?$$

Respuesta:

Pregunta 17. En las situaciones encontradas en la pregunta anterior, ¿qué significado se le atribuye a la expresión

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 ?$$

Respuesta:

Pregunta 18. ¿Qué significa, para cada una de las seis situaciones anteriores, la expresión

$$2^6 ?$$

Respuesta:

Pregunta 19: Escribe las sucesiones, y las series correspondientes, para los siguientes casos:

a. Hasta la sexta generación de los antepasados.
b. Hasta el séptimo eslabón en la cadena de cartas.
c. Hasta el quinto día de ahorro de Pedro.
d. Hasta la novena división a la hoja de papel.
e. Hasta el décimo cuadro de ajedrez.
f. Hasta el octavo día en la célula que se divide.

Respuesta:

	Sucesión	Serie
a.		
b.		
c.		
d.		
e.		
f.		

ACTIVIDAD II-2-2

INTRODUCCION AL CONCEPTO DE FUNCION: PRIMERA PARTE

En esta ACTIVIDAD los alumnos tienen la oportunidad de acercarse, ya sea para recordar o aprehender, uno de los conceptos básicos de las Matemáticas: el concepto de función.

Para las pretensiones de este trabajo es más que suficiente que los alumnos entiendan a una función como el "asociar" a un cierto número, otro; y solamente otro; o también como una magnitud que varía (o cambia de valor) al variar otra. No se pretende, ni hay necesidad, de llegar a obtener una definición formal, rigurosa, del concepto de función.

Abordar la construcción del concepto de función da la oportunidad de que el estudiante desarrolle una actitud de visualizar aspectos relacionados en un entorno aparentemente caótico e inconexo. De alguna forma, en el fondo de toda relación funcional subyace una de tipo causal, aunque, no necesariamente, toda relación causal que se presente entre un hecho y otro conjunto de hechos, sea susceptible de cuantificarse y de expresarse en forma funcional.

Posiblemente se esté abusando en el uso de la idea de relación "causal" para llevarlo a un terreno matemático; pero ayuda al pensamiento el imaginarse que el "aumento" en el área de un círculo es "causado" por el aumento en la longitud de su radio; o que el aumento en la altura, en el área de la base y en la longitud de la generatriz, son las "causas" del incremento que experimenta el volumen de un cono al variar tales magnitudes.

Si bien una relación de tipo causal explica, o hace explícito, el nexo que existe entre hechos o fenómenos en apariencia ajenos, cuando en ellos se identifican elementos cuantitativos, a veces es posible encontrar alguna relación funcional, que describa (no explique) cuantitativamente la interdependencia que se da entre elementos pertenecientes a tales hechos.

En la misma ACTIVIDAD se desarrollan dos presentaciones de las funciones: mediante una tabla y por medio de una ecuación o fórmula. Cada una de tales presentaciones, con sus propios alcances y limitaciones, ponen de manifiesto o revelan la regularidad y armonía que exhiben hechos que ocurren en nuestro entorno.

La ACTIVIDAD consiste en la LECTURA GRUPAL, del texto que se reproduce a partir de la siguiente página, con las aclaraciones necesarias por parte del profesor.

Cuestionario II-2-2

INTRODUCCION AL CONCEPTO DE FUNCION: PRIMERA PARTE

En la ACTIVIDAD anterior se obtuvo una sucesión y su serie correspondiente. La sucesión apareció de cuantificar situaciones muy sencillas: cadena de cartas, la leyenda sobre el origen del ajedrez, etc.

En esta ACTIVIDAD precisaremos los conceptos de sucesión y serie, y con ello, conocerás el procedimiento para construir, tantos cuantos ejemplos desees.

Empecemos con el concepto de sucesión. Piensa en tus antepasados directos de las generaciones que te precedieron. Si se escriben ordenadamente (empezando por la generación de tus padres) el número de ellos en cada generación, tendremos la siguiente expresión:

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ \ldots$$

No es difícil convencerse de los siguientes hechos en relación a la expresión anterior.

1. Es una colección de números que se puede continuar tanto como se desee.
2. La colección de números presenta una cierta "regularidad", es decir, su construcción obedece a un determinado patrón.
3. Cada uno de los elementos de la colección es una potencia del número dos, es decir, se obtiene elevándolo a la primera, segunda, tercera, etc. potencia.

Pregunta 1: En el problema del ajedrez, ¿cuántos términos tiene la sucesión que resulta?

Respuesta:

Pregunta 2: ¿A qué potencias hay que elevar el número dos para obtener la sucesión en el problema del ajedrez?

Respuesta:

Observa que para obtener el número de granos por casilla, se debe considerar el número de casilla de que se trate. Has de notar entonces que hay necesidad de numerar las casillas del tablero de ajedrez: es decir, a cada casilla se le debe asociar un número natural. Esta asociación puede ser de muchas maneras diferentes, todas ellas equivalentes, con la condición de que a cada casilla sólo se le asigne un número natural. La siguiente figura muestra una asociación en particular.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Habiéndole asignado a cada casilla "su" número natural, ya se puede saber cuántos granos de trigo le corresponden. La figura de la página siguiente muestra el número de granos que le corresponden a cada casilla.

2^{0}	2^{1}	2^{2}	2^{3}	2^{4}	2^{5}	2^{6}	2^{7}
2^{8}	2^{9}	2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}	2^{14}	2^{15}
2^{16}	2^{17}	2^{18}	2^{19}	2^{20}	2^{21}	2^{22}	2^{23}
2^{24}	2^{25}	2^{26}	2^{27}	2^{28}	2^{29}	2^{30}	2^{31}
2^{32}	2^{33}	2^{34}	2^{35}	2^{36}	2^{37}	2^{38}	2^{39}
2^{40}	2^{41}	2^{42}	2^{43}	2^{44}	2^{45}	2^{46}	2^{47}
2^{48}	2^{49}	2^{50}	2^{51}	2^{52}	2^{53}	2^{54}	2^{55}
2^{56}	2^{57}	2^{58}	2^{59}	2^{60}	2^{61}	2^{62}	2^{63}

Una observación "obvia" que se puede hacer es la siguiente: el número de granos que le toca a cada casilla es variable, es decir, no es el mismo para todas ellas; depende del número asociado a la casilla.

Es cierto que es una observación "obvia". Pero es importantísima. Encierra una de las ideas centrales de las matemáticas: la de FUNCION.

La idea de FUNCION, en resumen, es "asociar" a un cierto número, otro, y solamente otro. Ni uno más.

En el problema del ajedrez, del cual nos estamos valiendo para presentar estas ideas, la asociación que se da es la siguiente:

Al número de casilla se le asocia
un cierto número de granos.

Una manera usual de presentar en Matemáticas una función, (es decir, una asociación) es mediante una "tabla" que registre claramente qué número está asociado con quien. Las conoces y has trabajado con ellas. Parte de la asociación que corresponde a la leyenda del ajedrez se registra en la tabla de la página siguiente.

Número de Casilla	Número de Granos por Casilla
1	1
2	$2^1 = 2$
3	$2^2 = 4$
4	$2^3 = 8$
.	.
.	.
.	.
64	2^{63}

Una "tabla con números" que represente una función estará formada de dos columnas y un cierto número de renglones. La tabla se lee "por renglones"; para un renglón determinado, al número de la izquierda se le asocia, el de la derecha.

Otro hecho muy importante en el que debes reparar, es en la forma o manera en que se establece la asociación. Esta se realiza de acuerdo a una regla. En el caso del ajedrez la "regla" se deriva de la condición impuesta (por el "supuesto" inventor) sobre el número de granos que le corresponden a cada casilla:

> "... el doble de lo que se le asignó a la anterior, empezando con un grano para la primera".

Si observas la tabla anterior, notarás que los números de la columna derecha cumplen con la regla arriba enunciada: cada uno de ellos es el doble del anterior y el primero es uno.

En Matemáticas, el término regla significa prescripción, "casi" mandato: establece cómo encontrar el número asociado a otro (como es el caso que estamos considerando) u otros.

Entre paréntesis, busca en un "buen" diccionario los significados que registre el término regla.

Volviendo a las Matemáticas, en ellas, una regla se puede expresar con palabras, en Español o en cualquier otro idioma; pero también mediante el "lenguaje algebraico": por medio de una fórmula.

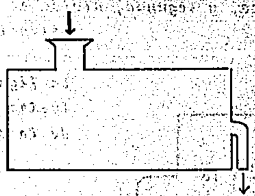
Cuando escribimos

"... el doble de lo que se le asignó a la 'anterior', empezando con un grano para la primera",

estamos usando el lenguaje español para expresar una "regla".

Para expresar la regla anterior en "lenguaje algebraico", debemos tener una fórmula que diga exactamente lo mismo: es decir, que diga cómo encontrar el número asociado a cada uno de los que están a la derecha. La fórmula deberá decir qué número se asocia con el uno, con el dos, con el tres, hasta terminar con el 64.

Para tener una idea intuitiva de lo que hace una regla -ya sea que se exprese en Español o mediante una fórmula- podemos pensarla como si fuera una "máquina produce números". La siguiente figura ilustra la idea. En ella se ha intentado ilustar una máquina que recibe números por la parte superior, en su "interior" los procesa y por el conducto de la derecha expulsa el resultado.



Ahora bien, esta "máquina" es muy simple: sólo recibe un número o una pareja de números o una terna o ... (según sea el caso), y no recibe otro u otros hasta que no ha expulsado el resultado que produjo con los que recibió anteriormente. Por otro lado, el proceso a que somete a los números que entran es el que la regla establece.

Las "fórmulas" matemáticas que conoces funcionan como si fuesen "máquinas que producen números". Pongamos un ejemplo. Desde la primaria sabes que con la fórmula

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

se calcula el área de cualquier triángulo, siempre y cuando conozcas la medida de su 'base' y de su 'altura'.

La fórmula anterior es una "regla": nos dice cómo encontrar el área de un triángulo. Expresada en Español diría algo así como esto:

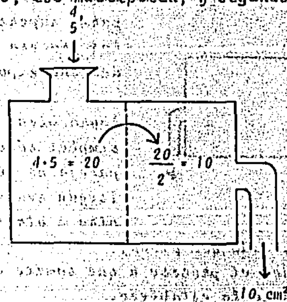
> "... para encontrar el área de cualquier triángulo, ¡multiplíquese! la medida de su base por aquella de su altura y este resultado, ¡divídase! entre dos ..."

Nótese el tono autoritario del párrafo anterior. Como corresponde a una regla. Las reglas son órdenes y las órdenes se expresan en un lenguaje imperativo.

Vista la fórmula

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

como una "máquina produce números", necesita que se le proporcionen -desde "fuera"-, ¡dos! números: la medida de la base y la medida de la altura. En su "interior", el "proceso" a que somete los números que recibe consiste de dos etapas: primero, los multiplica, y segundo, divide el resultado de la multiplicación entre dos.



La figura de la izquierda ilustra el "funcionamiento" de la fórmula

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

para el caso de un triángulo de base 4 cm y altura 5 cm.

Para este caso, la regla

> "... para encontrar el área de cualquier triángulo, ¡multiplíquese! la medida de su base por aquella de su altura y este resultado, ¡divídase! entre dos ...";

o en la forma

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

asocia a dos números -el que corresponde a la base y el que corresponde a la altura- un tercero, el correspondiente al área.

Visualizada la regla como "máquina produce números", la asociación se da entre lo que recibe la máquina con lo que sale de ella.

Cuando la "asociación" que establece la regla

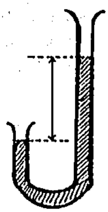
$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

entre las medidas de bases y alturas de diferentes triángulos (es decir, cuyas bases y alturas tengan valores diferentes) con sus respectivas áreas, se expresa mediante una "tabla de números", obtenemos algo semejante a la tabla que aparece en seguida a la izquierda. En ella, cada renglón corresponde a un triángulo.

Base	Altura	Área
4	5	10
8	3	12
7	6	21
10	7	35
1	8	4
9	4	18
11	4	22
6	9	27
5	4	10

Cuando en ciencias como la Física, Química, Biología, etc, se recurre a las Matemáticas con el objeto de ayudarse en la solución de algún problema, muy frecuentemente aparecen "tablas" de números que resultan de medir magnitudes relacionadas con el problema de que se trate.

El trabajo de Robert Boyle (1627-1691) sobre compresibilidad del aire es un ejemplo útil. Por cierto, algunos de sus experimentos más esmerados fueron hechos con un simple tubo en forma de J (ver figura a la izquierda) cerrada en el extremo de su rama corta e inicialmente lleno con suficiente mercurio para contener el aire en la rama corta a la presión atmosférica. Cuando se pone mercurio de más en el brazo largo, el aire que se encuentra en el brazo corto resiente



una presión adicional y se contrae. Una escala en el brazo corto permite medir el volumen del aire, y la diferencia en la altura del mercurio en los dos brazos muestra la presión a la cual el aire está sujeto. Algunos de los resultados de Boyle se muestran en la siguiente tabla.

J.B.CONANT (ed), "Harvard Case Histories in Experimental Sciences", Vol.I., Harvard University Press, 1957.

TABLE 1.1

Boyle's observations on the compression of air

V No. of spaces on short leg	P Observed pressure on air in inches of mercury	E Expected pressure according to hypothesis
48	$29\frac{2}{16}$	$29\frac{2}{16}$
46	$30\frac{9}{16}$	$30\frac{6}{16}$
44	$31\frac{15}{16}$	$31\frac{12}{16}$
42	$33\frac{8}{16}$	$33\frac{1}{7}$
40	$35\frac{5}{16}$	35
38	37	$36\frac{15}{19}$
36	$39\frac{5}{16}$	$38\frac{7}{8}$
34	$41\frac{10}{16}$	$41\frac{2}{17}$
32	$44\frac{3}{16}$	$43\frac{11}{16}$
30	$47\frac{1}{16}$	$46\frac{3}{5}$
28	$50\frac{5}{16}$	50
26	$54\frac{5}{16}$	$53\frac{10}{13}$
24	$58\frac{13}{16}$	$58\frac{2}{8}$
23	$61\frac{5}{16}$	$60\frac{18}{23}$
22	$64\frac{1}{16}$	$63\frac{6}{11}$
21	$67\frac{1}{16}$	$66\frac{4}{7}$
20	$70\frac{11}{16}$	70
19	$74\frac{2}{16}$	$73\frac{11}{19}$
18	$77\frac{14}{16}$	$77\frac{2}{3}$
17	$82\frac{12}{16}$	$82\frac{4}{17}$
16	$87\frac{14}{16}$	$87\frac{3}{8}$
15	$93\frac{1}{16}$	$93\frac{1}{5}$
14	$100\frac{7}{16}$	$99\frac{6}{7}$
13	$107\frac{13}{16}$	$107\frac{7}{13}$
12	$117\frac{9}{16}$	$116\frac{4}{8}$

Obtenida la "tabla de números", el problema, desde el punto de vista matemático, es "encontrar" la regla por medio de la cual a los números que aparecen a la izquierda se les asocia los de la derecha. Este problema, en algunos casos que registra la Historia de la Ciencia, fue extremadamente complejo. Ocurrió, por ejemplo, con una tabla construída por Ptolomeo (127-151) que esperó ¡catorce siglos! para que alguien encontrase la regla de asociación.

Para el caso de la tabla de Boyle, la regla, en Español, podría establecerse de la siguiente forma:

> "... para encontrar la presión, divídase el número 1406 entre el valor del volumen ..."

o, mediante una fórmula

$$P = \frac{1406}{V}$$

Volvamos al problema del ajedrez. Consideremos de nueva cuenta la tabla que registra la asociación entre el número de casilla y el número de granos de trigo que le corresponde, así como la regla

Número de Casilla	Número de Granos
1	$2^0 = 1$
2	$2^1 = 2$
3	$2^2 = 4$
4	$2^3 = 8$
.	.
.	.
.	.
64	2^{63}

"... el número de granos que le corresponde a una casilla cualesquiera es el doble del que se le asignó a la 'anterior', empezando con uno para la primera ..."

que se utilizó para construir la tabla.

¿Cuál será la expresión algebraica -es decir, la fórmula- equivalente a la regla anterior?

Pensando a la regla dada renglones arriba, o a la fórmula que buscamos, como el proceso a que la "máquina productora de números" somete a los números que entran (que son los que aparecen a la izquierda de la tabla) para obtener los que salen (que son los de la derecha de la tabla), la pregunta sería: ¿a qué proceso se someten los números de la izquierda para que produzcan los de la derecha?

En este caso, la propia tabla nos indica lo que le ocurre a un número cualquiera de la izquierda para producir el correspondiente de la derecha: primero se le quita un uno y lo que resulta es el número de veces que el dos se multiplica por sí mismo. En otras palabras, para obtener el número de granos asociados a una cierta casilla, al número que le corresponde a la casilla se le resta el número uno y, a continuación, el número dos se eleva a una potencia igual al número que resultó de la resta.

Para tener la fórmula, debemos recurrir al "lenguaje" del Algebra. En él se utilizan "letras" para simbolizar un "número cualquiera" y no uno en especial, particular. En el caso que nos ocupa, la fórmula que buscamos, no se referirá a una casilla en particular o en especial, tampoco a un determinado "número de granos". Por tal razón nos serviremos de dos letras: una para representar "un número cualquiera de casilla" y otra para simbolizar "un número cualquiera de granos". Para el primero usaremos la letra "n" y para el segundo la letra "N".

Utilizando las letras "n" y "N" la simbolización de la expresión

> "... para obtener el número de granos que le corresponden a una casilla cualquiera, al número asociado a dicha casilla se le resta el número uno y, a continuación, el número dos se eleva a la potencia que resultó de la resta ..."

es:

$$N = 2^{n-1} .$$

La fórmula anterior produce todas las asociaciones que aparecen en la tabla anterior: para tener el número que se le asocia a uno cualesquiera de la izquierda, basta poner en la fórmula su valor y realizar las operaciones. En otros términos, la tabla anterior se puede reproducir completamente a partir de la fórmula arriba establecida y conociendo los valores que puede tomar la "n".

La sucesión

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ \ldots$$

(los puntos suspensivos quieren decir que se continúa indefinidamente) se puede obtener a partir de la fórmula

$$N = 2^{n-1} ,$$

cuando en lugar de la "n" se van colocando, uno después de otro, los números Naturales (1, 2, 3, 4, 5, ...) y se realizan las operaciones indicadas.

Para el caso del ajedrez la sucesión termina cuando a la "n" se le asigna el valor 64.

La sucesión

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \ldots$$

no es la única. Hay un número infinito de ellas. A continuación se dan otros pocos ejemplos.

a. $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \ldots$

b. $2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ \ldots$

c. $1,\ 8,\ 27,\ 64,\ 125,\ \ldots$

d. $\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \ldots$

e. $\frac{1}{1},\ \frac{1}{1\cdot 2},\ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3},\ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},\ \ldots$

f. $-1,\ +1,\ -1,\ +1,\ -1,\ +1,\ \ldots$

g. $\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots$

Cada una de estas sucesiones tiene "su" fórmula por medio de la cual se construye a partir de números naturales. Tal es la característica de toda sucesión: se construye a partir de números Naturales, mediante alguna fórmula .

ACTIVIDAD II-2-3

SERIES Y SUCESIONES.
"PROCESOS INFINITOS". 1a. PARTE

La vida diaria, cotidiana, no ofrece ejemplos de "procesos infinitos", o sea de aquellos que se puedan realizar una y otra y otra vez. Tampoco muestra casos, de magnitudes infinitamente grandes o infinitamente pequeñas, o en donde se construya una magnitud por el agregado indefinido de cantidades finitas.

Al abordar, en la enseñanza, los problemas matemáticos del infinito, se enfrenta uno a la gran limitación que implica el hecho de no existir en un mundo finito y de no tener la experiencia, ni el hábito, ni la necesidad, de ejercitarse mentalmente en los procesos que lo demandan.

Hablar de series, sucesiones y sus respectivos "límites", implica realizar un tipo de actividades que sólo mentalmente se pueden efectuar: ningún objeto material es susceptible de subdividirse, en la práctica, de manera indefinida.

Por tal razón, el propósito de esta ACTIVIDAD, es enfrentar a los estudiantes a problemas que implican la realización de procesos infinitos. Naturalmente, estos problemas no pueden abordarse en forma práctica, manual, experimental. Lo más que se podrá hacer es presentar algunos ejemplos, casos, etapas, momentos, y esperar y confiar en que los estudiantes podrán "ver", imaginarse o realizar "mentalmente" todo el proceso: siempre, ante la limitación de la experiencia, contamos con lo ilimitado de nuestra imaginación.

Para esta ACTIVIDAD, el profesor entrega a cada uno de los alumnos el material que se reproduce a partir de la página siguiente. En él se explica lo que individualmente deberán de realizar.

Cuestionario II-2-3

SERIES Y SUCESIONES.
"PROCESOS INFINITOS". 1a. PARTE

LEE CUIDADOSAMENTE Y CONTESTA LAS PREGUNTAS EN EL ESPACIO INDICADO.

Esta ACTIVIDAD la realizarás, fundamentalmente, "con la cabeza". Es decir, pensando. La habilidad de pensar, de concentrarse en algo, de analizar, se mejora, pensando, concentrándose o analizando algo. Solamente por el esfuerzo personal de uno, se puede mejorar nuestra habilidad de "pensar". Al pensar, te puedes ayudar de una figura, de un pedazo de papel, madera o cualquier cosa y de acciones como cortar, doblar, estirar, etc.

Problema. Este problema es muy simple, pero muy importante porque contiene la idea de "proceso infinito", algo que es muy útil para resolver problemas y que los matemáticos han estudiado. Consiste simplemente en lo siguiente:

Imagínate que tienes un número infinito de lápices de colores rojo, azul y amarillo.

De un lápiz de color rojo tomas la mitad y la colocas "horizontalmente". La otra mitad ya no te servirá.

En seguida, tomas de un lápiz de color azul la tercera parte y la colocas en seguida del color rojo y en la misma posición que éste. Lo que resta del azul ya no lo vas a necesitar.

A continuación, tomas de un lápiz de color amarillo, la cuarta parte, la colocas en seguida de la azul. El resto ya no lo usarás.

Posteriormente, repites el proceso (con lápices completos), primero con el rojo, luego con el azul y finalmente con el amarillo, pero ahora te quedas con la quinta parte del rojo, la sexta del azul y la séptima del amarillo y lo haces una y otra y otra vez.

Pregunta 1. Desde el punto de vista "práctico", es decir, realizando el proceso con lápices de a verdad, ¿cuándo termina el proceso?

Respuesta:

Pregunta 2. Desde el punto de vista teórico o ideal, ¿cuándo termina el proceso?

Respuesta:

Pregunta 3. Al realizar el proceso, tal como se ha descrito, clasifica las siguientes afirmaciones como Verdaderas (V), Falsas (F) o No se puede decir (I), anotando, en el espacio indicado, una V, F o I según sea el caso.

Afirmación	Respuesta
• La longitud de la hilera que se forma aumenta indefinidamente.	______
• La longitud de la hilera que se forma "llega a alcanzar un cierto valor" y luego ya no aumenta.	______
• La longitud de la hilera que se forma llega a medir lo que mide un lápiz.	______
• En la hilera, hay más trozos de lápices rojos.	______
• Si de la hilera original, separamos los trozos y formamos tres hileras, una para cada color, las tres hileras que resulten miden lo mismo.	______

ACTIVIDAD II-2-4 DISCUSION POR EQUIPOS

Una vez que los estudiantes han concluido con el cuestionario de la ACTIVIDAD anterior, someten a la consideración de sus compañeros de equipo, las respuestas que dieron a las preguntas de dicho cuestionario.

ACTIVIDAD II-2-5 DISCUSION GRUPAL

Finalizada la discusión por equipos se entabla la grupal. Las conclusiones a las que se pretende llegar en esta ACTIVIDAD, son las respuestas correctas a las preguntas planteadas en el cuestionario con el que han trabajado los alumnos en las dos últimas ACTIVIDADES.

ACTIVIDAD II-2-6 SERIES Y SUCESIONES. "PROCESOS INFINITOS". 2a. PARTE

Hay una serie que los estudiantes conocen y han trabajado: la expresión decimal de los números racionales. Y no hay otra. Por tal razón, esta ACTIVIDAD tiene varios propósitos: que los alumnos construyan sucesiones, series, series parciales, y tengan un primer acercamiento al concepto de límite, tanto de una sucesión como de una serie. Naturalmente, se tratará de ayudar, a la "intuición" del estudiante, a través del planteamiento de situaciones imaginarias, pero simples, y recurriendo a representaciones de carácter geométrico.

Los estudiantes, en clase y en forma individual, trabajan con el material que se reproduce en las páginas siguientes.

Cuestionario II-2-4

SERIES Y SUCESIONES.
"PROCESOS INFINITOS". 2a. PARTE

En esta ACTIVIDAD estudiarás algunos problemas elementales que exhiben la realización de procesos que se pueden realizar indefinidamente. La idea central de la ACTIVIDAD consiste en dos partes: primera, que obtengas entidades matemáticas que surgen de realizar un proceso que es factible realizarlo una, otra y otra vez; segunda que identifiques algunas características matemáticas que tales entes poseen.

LEE CON ATENCION Y CONTESTA LAS PREGUNTAS QUE SE TE HACEN EN EL LUGAR INDICADO.

Problema. Dice la leyenda que a un antiguo Shah de Persia le gustó tanto el ajedrez que mandó a su inventor que pidiera la recompensa que deseara. El inventor, que probablemente sabía bastante de Aritmética, pidió un grano de trigo por el primer cuadro del tablero, dos granos por el segundo, cuatro granos por el tercer cuadro, y así sucesivamente hasta que se hubiera tenido en cuenta a todos los cuadros del tablero. A continuación aparece representado un tablero de ajedrez en el cual a cada uno de los cuadros se les ha asignado un número natural.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Pregunta 1. Escribe, en forma ordenada, empezando por el cuadro UNO, el número de granos que le corresponden a los diez primeros cuadros.

Respuesta: ______, ______, ______, ______, ______, ______, ______, ______, ______, ______.

Pregunta 2. Deja indicado el número total de granos que le corresponde: al primer cuadro, a los dos primeros, a los tres primeros, a los cuatro primeros cuadros, y así sucesivamente, hasta los ocho primeros cuadros.

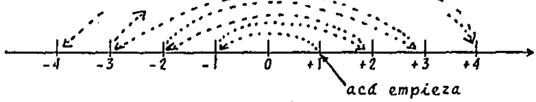
Nota. Dejar indicado el resultado de sumar 3 con 9 se escribe así: 3+9.

Respuesta:

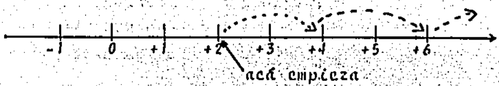
Cuadros	Total de Granos (Indicado)
Primero	
Dos primeros	
Tres primeros	
Cuatro primeros	
Cinco primeros	
Seis primeros	
Siete primeros	
Ocho primeros	

Problema. Este, al igual que otros de este mismo material, es un problema en "broma", pero su solución es "seria". Una ranita está parada en el eje numérico. Como no tiene otra cosa más urgente que hacer, se dedica a estar saltando, de un lado a otro. Primero salta en una "forma" y luego en otra. Cada uno de los siguientes diagramas intenta ilustrar los distintos "tipos" de saltos que da, las flechas indican el "patrón" que sigue en cada estilo.

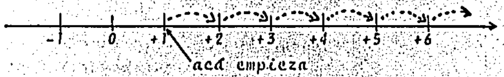
a.



b.



c.



Pregunta 3. Registra, utilizando las coordenadas de los ejes numéricos, las posiciones que ocuparía la ranita si saltara "indefinidamente" de acuerdo a cada uno de los anteriores estilos. Hecho lo anterior "inventa" tres estilos de saltar diferentes a los anteriores.

Respuesta:

POSICIONES

a.

b.

c.

NUEVOS ESTILOS

d.

e.

f.

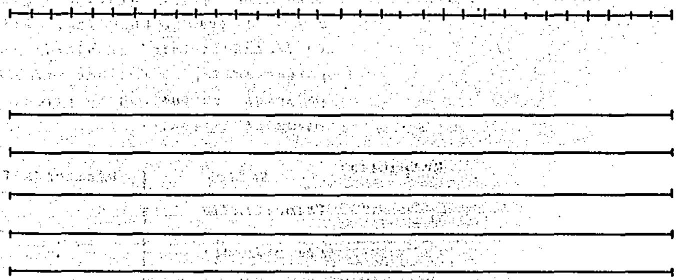
Problema. El problema que ahora nos ocupa consiste en dividir un segmento en un determinado número de partes iguales.

Pregunta 4. En la página siguiente se da el segmento "a". Representa, usando un lápiz de color azul, el

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32}$$

de su longitud total. Representa en segmentos distintos cada una de las partes por separado.

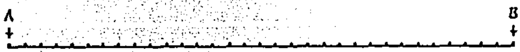
Segmento "a":



Pregunta 5. Si el proceso se continuase indefinidamente, ¿a qué valor se acerca la longitud del segmento coloreado?

Respuesta:

Problema. Una ranita va a ir del punto A al punto B, sal-



tando de la siguiente forma: siempre salta la mitad de lo que le falta.

Pregunta 6. Representa, en la siguiente recta, con puntos rojos, las posiciones que ocupa la ranita en los cinco primeros saltos.

Respuesta:

Pregunta 7. ¿Cuántos saltos tiene que dar la ranita para que alcance el punto B?

Respuesta:

Pregunta 8. Suponiendo que la distancia que separa el punto B del A sea de un metro. Indica (¡nada más!), la distancia total recorrida por la ranita en el primer salto, en los dos primeros, en los tres primeros, en los cuatro primeros y en los cinco primeros saltos.

Respuesta:

Saltos	Distancia Total Recorrida
Primer salto	
Dos primeros	
Tres primeros	
Cuatro primeros	
Cinco primeros	

Pregunta 9. A medida que la ranita siga saltando, ¿a qué longitud se aproxima la longitud de su salto?

Respuesta:

Problema. La ranita de este problema dijo: "... aquella rana es media "rana", yo mejor salto así: en el primer salto lo doy a la mitad del total, el segundo de la tercera parte del total, el tercero de la cuarta parte del total, el cuarto de la quinta parte del total y así sucesivamente ..."

Pregunta 10. Representa con color rojo, las posiciones en que está la ranita en los seis primeros saltos que da.

Respuesta:

A B

Pregunta 11. Indica y encuentra la distancia total recorrida en los seis primeros saltos.

Respuesta:

Pregunta 12. ¿Encuentras "diferencias" en las formas en las cuales las dos ranitas saltan?

Respuesta:

En algunos de los anteriores problemas hemos utilizado la idea de una "ranita". Es eso, una pura idea. No hay ranita "real" que se comporte de la forma en que las nuestras lo han hecho.

Pregunta 13. ¿Por qué en el párrafo anterior se afirma que: "... No hay ranita "real" que se comporte de la forma en que las nuestras lo han hecho." ?

Respuesta:

ACTIVIDAD II-2-7

DISCUSION GRUPAL DE LAS RESPUESTAS AL CUESTIONARIO RESUELTO EN LA ACTIVIDAD ANTERIOR

Las conclusiones a las que se llegan en esta ACTIVIDAD son, en primer lugar, las respuestas correctas a las preguntas del cuestionario titulado 'Series y Sucesiones. "Procesos Infinitos". 2a. Parte' y en segundo lugar, una caracterización de los términos sucesión, serie, serie parcial y límite. Este último, tanto para el caso de las sucesiones, como para el de las series.

ACTIVIDAD II-2-8

LECTURA SOBRE SERIES Y SUCESIONES

Los alumnos han trabajado, digamos, "empíricamente" con algunos ejemplos de sucesiones y series. Después de esta experiencia se juzga pertinente que ellos conozcan, en forma más precisa y formal algunos conceptos en relación a ellas. Tal es el propósito de esta ACTIVIDAD. La lectura será colectiva en el salón de clases. Al momento de realizarla, el profesor explica las dudas e interrogantes que los estudiantes planteen.

El texto, que en las páginas siguientes se reproduce, da una definición intuitiva del infinito, hace diferencia entre conjunto infinito y conjunto finito pero "muy grande" y muestra ejemplos de ambos. Por otro lado, plantea dos paradojas de Zenón de Elea y muestra como al analizarlas aritméricamente, se desvanece el sofisma sobre el cual descansan: creer que "la suma de un número infinito de intervalos finitos de tiempo, es siempre infinita". En el texto, se utilizan conceptos, que si bien no se definen en forma precisa, se ejemplifica su uso en casos concretos: conjunto infinito, conjunto finito, serie infinita, serie creciente, serie decreciente, serie convergente, serie divergente, serie alternante. Aunque en el texto no aparece explícitamente el concepto de límite, en cambio, se da "casi" su definición, y se utiliza, para el caso de dos series.

LECTURA II-2-1

CAPITULO VII

PARADOJAS DEL INFINITO

Desde hace más de dos mil años vienen luchando los matemáticos con el infinito. No se pueden permitir descuidar esta lucha porque les es indispensable para muchos de sus trabajos. Pero en sus tentativas por entenderló y aprovecharse de él han incurrido en muchas contradicciones, algunas de las cuales han podido superar, mientras que otras todavía les están dando qué pensar. Por ejemplo, las paradojas enunciadas por Zenón de Elea en el siglo V antes de J. C., no han sido resueltas todavía a completa satisfacción de todos los matemáticos.

El infinito es una especie de monstruo traidor, que a menudo se presenta cuando menos se le espera, por la espalda, como aquel que dice. A veces es difícil de reconocer, ya que de este monstruo hay más de una clase: el infinito en Algebra, el infinito en Geometría, lo infinitamente pequeño, lo infinitamente grande, etc. No hay un sólo infinito, sino toda una jerarquía de infinitos.

No podemos esperar que sea posible tratar en un solo capítulo todo el material que ha ocupado volúmenes enteros. Nos contentaremos con ver algunas cosas que nos permitan apreciar sus notables paradojas. Y siempre que sea posible remitiremos al lector a obras en que se discuta más detalladamente los diversos tópicos que vamos a examinar.

* * *

El infinito en Aritmética

Empecemos por considerar a qué nos referimos cuando hablamos de una clase, grupo, ó colección infinita de cosas. A nosotros nos bastará con la siguiente definición, intuitiva y no muy rigurosa: "se dice que un conjunto es infinito cuando no se pueden contar sus elementos en un período de tiempo finito, por muy largo que sea". Supondremos que se cuenta a una velocidad uniforme, por ejemplo un objeto cada segundo. Algunos objetarán esta definición fundándose en que usamos lo finito para definir el infinito, pero hemos de convenir en que todo el mundo sabe qué quiere decir "un período finito de tiempo".

No hemos de confundir el *infinito* con lo *muy grande aunque finito*. Piénsese, por ejemplo, en el número de habitantes que tiene la Tierra en un instante dado, o en el número de hojas que tienen todos los árboles de la Tierra en un determinado momento, o en el número de briznas de hierba que hay en la Tierra en un cierto instante. Todos éstos son números muy grandes, pero son *finitos*. Es decir, que bastaría emplear suficiente paciencia y bastantes hombres para ponerse a contar a todos los elementos de esos grandes conjuntos, con la seguridad de que se podría terminar la tarea. Hace unos veintiún siglos, Arquímedes estableció la distinción entre lo infinito y lo finito aunque muy grande, al calcular el número de granos de arena que se necesitaban para llenar al Universo entonces conocido.

¿Dónde vamos a encontrar un ejemplo de un conjunto infinito? Cierto que no en nuestro mundo de experiencias físicas, que después de todo es un mundo finito. Pero esperad. Acabamos de hablar de contar los elementos de un conjunto muy grande. Pero ¿y qué hay de la colección constituída por los mismos números con que contamos, los llamados "números naturales"? Este es un conjunto que llena todos los requisitos de nuestra definición, ya que si nos ponemos a contar los números naturales, 1, 2, 3, 4, 5,..., ¿no hemos de hacerlo con la seguridad de que si continuamos así hasta morir, transmitiendo la tarea de generación en generación, ni nosotros ni ninguno de nuestros descendientes agotará jamás los que queden? Por consiguiente los números naturales constituyen un conjunto infinito, con el que estamos bastante familiarizados.

Antes de seguir más adelante, examinemos unos cuantos ejemplos de conjuntos infinitos, todos los cuales surgen del conjunto fundamental formado por los números naturales. En todos los casos, los puntos suspensivos significan que la sucesión continúa indefinidamente, es decir, sin fin.

1) Todos los valores de n^2, en que n es un número natural:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64 \ldots$$

2) Todos los valores de $\frac{1}{n}$, en que n es un número natural:

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{8} \ldots$$

3) Todos los valores de 2^n, en que n es un número natural:

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256 \ldots$$

4) Todos los valores de $\frac{1}{2^n}$, en que n es un número natural:

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \frac{1}{64},\ \frac{1}{128},\ \frac{1}{256} \ldots$$

Todos estos conjuntos tienen la propiedad de que es imposible agotar sus miembros contándolos en cualquier período de tiempo finito por muy grande que sea.

* * *

Ya estamos en situación de examinar la primera de las paradojas de Zenón, a las que aludimos brevemente al principio de este capítulo: *El movimiento es imposible.* Esta conclusión, hemos de admitir que es sorprendente, pero el argumento es muy convincente como vamos a ver.

Para ir de un punto P a otro punto Q, hemos de recorrer primero la mitad de la distancia de P a Q, después la mitad de la que queda, después la mitad de la que entonces queda, después la mitad del resto, y así sucesivamente. El "así sucesivamente", implica que se puede repetir el proceso, y que hay que repetirlo un número infinito de veces. Y por muy pequeñas que sean las distancias sucesivas, el recorrerlas, exige indudablemente un período finito de tiempo. Y, como decía Zenón, la suma de un número infinito de intervalos finitos de tiempo, es infinita. Por lo tanto, nunca podremos ir de P a Q por muy cerca que estén los dos puntos.

Se han propuesto muchas posibles soluciones para esta paradoja[1]. La que vamos a examinar atribuye el sofisma a la afirmación de que "la suma de un número infinito de intervalos finitos de tiempo, es infinita". Esta afirmación es en general cierta, pero no siempre. Investiguemos primeramente la suma de todos los miembros de la clase infinita del ejemplo (3) expuesto más arriba. Si escribimos

$$2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + \ldots,$$

es evidente, a primera vista, que si continuamos añadiendo términos sucesivos, la suma crece rápidamente más y más. Pero no basta con decir sencillamente que "crece más y más". Tenemos que ser más precisos. Hagamos notar que tomando una cantidad suficiente de términos podemos hacer que la suma de todos los anteriores exceda a cualquier número finito dado por muy grande que sea. Esto se indica gráficamente en la figura 74. Por ejemplo, si alguien menciona el número finito 1 000, podemos, sin más que tomar 9 términos, hacer que la suma sea 1 022. Si se mencionara 1 000 000 podemos hacer que la suma sea 1 048 574 sin más que tomar 19 términos. Si subiera hasta 1 000 000 000, nos bastaría coger 29 términos para hacer que la suma valiera 1 073 741 822. No importa *cuál* fuera el número finito que eligiera nuestro imaginario adversario, es evidente que siempre podemos hacer que nuestra suma lo supere tomando un número finito de términos suficientemente grande. Esto es lo que el matemático quiere dar a entender cuando dice que "la suma de esta serie infinita, es infinita".

Pero volvamos al problema del movimiento de un punto a otro punto. Supongamos que la distancia de P a Q, es de 100 metros, y que la recorremos a la velocidad de 100 metros por

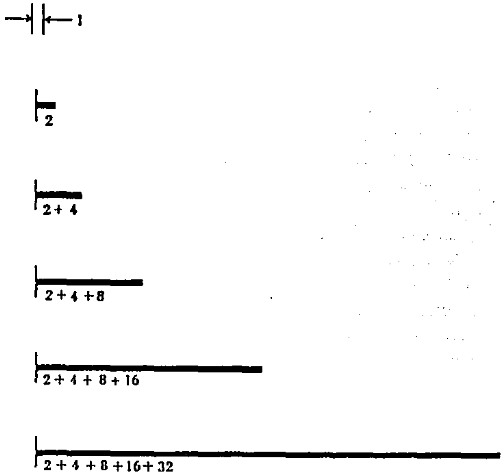


FIG. 74. La suma 2 + 4 + 8 + 16 ... crece más allá de todo límite.

minuto. Entonces el tiempo que se necesita para recorrer la primera etapa de nuestro viaje, la mitad de la distancia de P a Q, es $^1/_2$ minuto; el que se necesita para la mitad de la distancia que queda, $^1/_4$ minutos; para la mitad de la distancia que queda, $^1/_8$ minutos; para la mitad de la distancia que queda *entonces*, $^1/_{16}$ minutos y así sucesivamente. Dicho de otro modo, el tiempo en minutos que se tarda para ir de P a Q, es la suma de la serie infinita

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+\ldots.$$

(Nótese que ésta es la suma de todos los elementos de la clase infinita del ejemplo (4) que vimos más arriba.) ¿Es infinita la suma de esta serie? Como en el caso anterior, la suma se hace cada vez mayor al ir añadiendo términos sucesivos, pero *no* es cierto que llegue a exceder a cualquier número finito por grande que sea. Una ojeada a la figura 75 nos muestra intuitivamente, que la suma se aproxima cada vez más a 1, pero nunca lo supera. En términos más precisos, se puede decir que sin más que tomar un número de términos suficientemente grande, se puede hacer que la diferencia entre nuestra suma y 1, sea menor que un número finito cualquiera, por muy pequeño que sea. Por ejemplo si alguien menciona el número $\frac{1}{1\,000}$, podemos, sin más que tomar 10 términos, hacer que la diferencia entre la suma y 1 sea de $\frac{1}{1\,024}$. Si mencionara $\frac{1}{1\,000\,000}$, podemos hacer que la suma difiera de 1 en $\frac{1}{1\,048\,576}$ tomando 20 términos. Si bajara hasta $\frac{1}{1\,000\,000\,000}$, nos bastaría tomar 30 términos para que la suma se diferencie de 1 en $\frac{1}{1\,073\,741\,824}$. También esta vez llevamos las de ganar a nuestro imaginario adversario. Esto es lo que el ma-

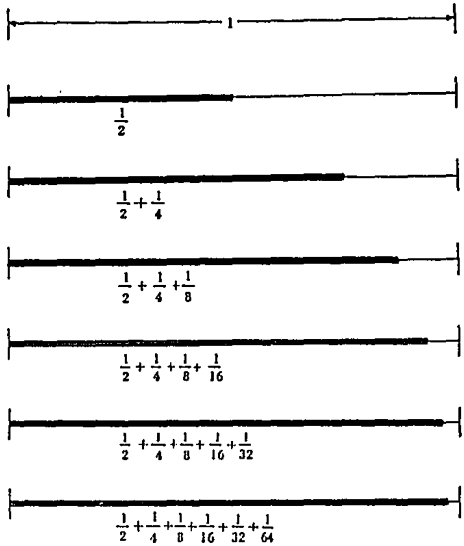


FIG. 75. La suma $^1/_2 + {^1/_4} + {^1/_8} + {^1/_{16}} \ldots$ tiene por límite 1.

temático quiere dar a entender cuando dice que "la suma de esta serie infinita es 1".

Por consiguiente el tiempo que se necesita para recorrer los 100 metros que hay de P a Q, no es infinito, sino 1 minuto. Podemos pues, quedarnos tranquilos, ya que el movimiento *no* es imposible. Es decir que las matemáticas vienen a corroborar, lo que hemos aprendido en la experiencia de cada día.

* * *

La segunda paradoja de Zenón, es la de Aquiles y la tortuga. El razonamiento en este caso viene a decir que si Aquiles le da a la tortuga algo de ventaja, en una carrera, nunca podrá alcanzarla, y que siempre tendrá que empezar por llegar al sitio de donde la tortuga acaba de partir, y por tanto siempre estará ésta por delante.

Para fijar ideas, supongamos que Aquiles le da a la tortuga 100 metros de ventaja, y que las velocidades de Aquiles y la tortuga son de 10 metros por segundo y 1 metro por segundo respectivamente. Por lo tanto Aquiles tarda 10 segundos en recorrer los 100 primeros metros. Mientras tanto, la tortuga se ha adelantado otros 10 metros. Aquiles tarda un segundo en recorrer esa distancia, y mientras tanto la tortuga ha avanzado 1 metro más. Aquiles recorre esa distancia en $^1/_{10}$ segundo, pero la tortuga estará todavía $^1/_{10}$ metro por delante y así sucesivamente. Por lo tanto el número de segundos que transcurren hasta que Aquiles alcanza a la tortuga, es la suma de la serie infinita.

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1\,000} + \ldots .$$

Los que recuerden las fórmulas de las progresiones geométricas, no tardarán más que un mometo en ver que esta suma no es infinita, sino 11 $^1/_9$ segundos.

* * *

En los últimos cien años se han dado numerosos criterios, para determinar si una serie dada "diverge hacia el infinito" o "converge a un límite finito", es decir, si la suma de la serie es infinita, o un número finito.[2] No profundizaremos los tecnicismos de esos criterios, y dedicaremos un momento más a las dos series,

$$2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + \ldots$$

y

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \ldots$$

Hemos visto que la primera de ellas diverge hacia el infinito, mientras que la segunda converge hacia 1. ¿Puede deberse esta diferencia a que los términos sucesivos de la primera sean *crecientes,* mientras que los de la segunda son *decrecientes?* No nos precipitemos. Lo único cierto es que: una condición *necesaria* de convergencia, es que los términos sucesivos sean decrecientes. Que esa condición *no es suficiente,* se ve con facilidad en la "serie armónica"

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \ldots .$$

Intercalando paréntesis esta serie se puede escribir en la forma

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right) + \ldots .$$

Puesto que $\frac{1}{3}$ es mayor que $\frac{1}{4}$, $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$ será mayor que $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, es decir mayor que $\frac{2}{4}$, o sea $\frac{1}{2}$. También, puesto que $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{7}$, son todos mayores que $\frac{1}{8}$, el segundo grupo del paréntesis es mayor que $\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)$ o sea $\frac{4}{8}$, es decir $\frac{1}{2}$. Del mismo modo el tercer grupo es mayor que $\frac{8}{16}$, o sea $\frac{1}{2}$, y así sucesivamente. Por tanto la suma de la serie es mayor que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots ,$$

y por tanto diverge hacia el infinito, aunque muy despacio.

La condición de que los términos sucesivos sean decrecientes, no es por tanto suficiente para la convergencia de una serie en la que todos los términos sean positivos. Por otro lado, esta condición *sí* es suficiente para la convergencia de una "serie alternada", una en que los términos sean alternativamente positivos y negativos. No vamos a dar ninguna demostración de este teorema. Por ejemplo, la serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \ldots$$

converge hacia un límite finito. El valor de este límite, con seis decimales,[3] es 0,693147 (es decir $\log_e 2$).

ACTIVIDAD II-2-9

CUESTIONARIO SOBRE LA LECTURA DE LA ACTIVIDAD ANTERIOR

Cuando el grupo ha concluído la lectura del texto, el profesor entrega a cada uno de los alumnos un cuestionario para que, en forma individual, lo contesten. El propósito de esta ACTIVIDAD es múltiple: dirigir la atención del estudiante hacia algunos contenidos específicos; dar oportunidad a que los alumnos ubiquen en el texto información específica; mostrar, de manera práctica, que una forma concreta de realizar la lectura de un texto es principiar reformulándolo en forma de preguntas.

De los aspectos señalados en el párrafo anterior, el último es tal vez el más importante desde el punto de vista formativo. En general, se dedica poca atención en proporcionarle al estudiante "técnicas" que lo ayuden a que la "lectura" se convierta en el medio más eficaz, inmediato y económico, que tiene a su disposición para adquirir conocimientos. Estar en posesión de un instrumento semejante, le abre la posibilidad de reconocerse como sujeto capaz de realizar, por sí mismo, una actividad tan importante para el proceso enseñanza-aprendizaje. No es la única, ni tal vez la más valiosa, pero que desempeña un papel, no pequeño, es incuestionable.

El contenido del cuestionario al que se ha hecho referencia es el que se reproduce a partir de la página siguiente.

CUESTIONARIO SOBRE LA LECTURA DE LA ACTIVIDAD ANTERIOR

Los escritos, textos, lecturas, o como le quieras llamar, tienen un autor. De algunos no se conoce, pero de que lo tienen, lo tienen. En ellos, el autor plantea problemas, de los cuales algunos son fundamentales; sostiene puntos de vista (tesis) y los fundamenta. Puede ocurrir que tú estés o no de acuerdo con los planteamientos que formula el autor; tal vez cuestiones (pongas en duda) afirmaciones del texto y es posible que establezcas puntos de vista diferentes a los que se plantean. Otra cosa que puede ocurrir es que el autor aborde aspectos importantes que luego no desarrolla y sobre los cuales tú podrías decir algo. En fin, siempre es conveniente reflexionar en lo que el texto le ha descubierto a uno.

Un texto contiene aspectos como los antes mencionados. Sin embargo, a menos que se tenga mucha experiencia en la lectura y se conozca muy bien el tema que se desarrolla, es difícil, en una primera lectura, captar las múltiples facetas que el texto ofrece. Lo anterior se agrava si se enfrenta uno a problemas de comprensión del texto. Hay muchas cosas de un texto que bien puede ocurrir que uno no comprenda: un concepto, un principio, una ley, una demostración, un cálculo, ... y hasta el significado de un término. Cuando esto ocurra, lo mejor es preguntarle a alguien. Decirle: no entiendo esto, y aquello, y aquello otro. No sientas pena por preguntar. Recuerda: nadie nace sabiendo. Pero, naturalmente, primero hay que identificar aquello que no se comprende.

Una forma de iniciar la ubicación en el texto, de elementos como los anteriormente mencionados es, transformarlo en preguntas: leer línea por línea y elaborar una pregunta sobre el contenido de ellas. Al principio esto es difícil. Por lo general, se elaboran más preguntas que las "esenciales". Con la práctica se adquiere la experiencia suficiente para, desde la primera lectura, descartar contenidos "irrelevantes".

A continuación se te presenta un ejemplo de cuestionario elaborado para tal fin. Es sobre la lectura que acabas de realizar.

Su propósito es doble: servirte de ejemplo y de paso para que te ejercites en la identificación de contenidos específicos de la lectura. VUELVE A LEER CON CUIDADO EL TEXTO Y CONTESTA CADA UNA DE LAS PREGUNTAS EN EL ESPACIO INDICADO.

Pregunta 1. Al intentar entender y aprovechar el infinito, ¿en qué han incurrido los matemáticos?

Respuesta:

Pregunta 2. Escribe la paradoja de "Aquiles y la tortuga" de Zenón de Elea.

Respuesta:

Pregunta 3. ¿Qué quiere decir que una serie infinita "diverge hacia el infinito"?

Respuesta:

Pregunta 4. "Todos los valores de $\frac{1}{n}$, en que n es un número natural", es una forma de referirse al conjunto cuyos elementos son:

Respuesta:

Pregunta 5. ¿Con qué no debe confundirse el infinito?

Respuesta:

Pregunta 6. Para una serie infinita, cuyos términos son positivos, ¿es suficiente que sus términos sucesivos sean decrecientes para que converja?

Respuesta:

Pregunta 7. Da, mínimamente, cinco ejemplos de conjuntos "muy grandes".

Respuesta:

Pregunta 8. ¿Qué números utilizamos para contar?

Respuesta:

Pregunta 9. ¿Quién, y en qué siglo, estableció la distinción entre infinito y finito "muy grande"?

Respuesta:

Pregunta 10. ¿Qué "propiedad" tienen los conjuntos

$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \ldots$

$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \ldots$

$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \ldots$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \ldots$?

Respuesta:

Pregunta 11. Escribe la paradoja "El movimiento es imposible" de Zenón de Elea.

Respuesta:

Pregunta 12. ¿Cuándo se dice que una serie es alternante?

Respuesta:

Pregunta 13. Da todo el argumento que prueba que la serie infinita

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \ldots$$

diverge hacia infinito.

Respuesta:

Pregunta 14. La afirmación "La suma de un número infinito de intervalos finitos de tiempo, es infinita", ¿es siempre cierta?

Respuesta:

Pregunta 15. ¿Cuándo se dice que un conjunto es infinito?

Respuesta:

Pregunta 16. ¿Qué quiere decir que los términos sucesivos de una serie infinita sean crecientes?

Respuesta:

Pregunta 17. Da, mínimamente, cinco ejemplos de conjuntos infinitos que surjan del conjunto de los números naturales.

Respuesta:

Pregunta 18. ¿Cuándo enunció Zenón de Elea sus paradojas?

Respuesta:

Pregunta 19. ¿Qué quiere decir que una serie infinita "converja a un límite finito"?

Respuesta:

Pregunta 20. ¿Es posible "contar" los números naturales?

Respuesta:

Pregunta 21. ¿Qué quiere decir que los términos sucesivos de una serie infinita sean decrecientes?

Respuesta:

Pregunta 22. ¿A qué se atribuye el sofisma que aparece en la paradoja "El movimiento es imposible" ?

Respuesta:

Pregunta 23. ¿Por qué no pueden descuidar los matemáticos su lucha por el infinito?

Respuesta:

Pregunta 24. ¿Qué quiere dar a entender el matemático cuando dice que "La suma de esta serie infinita , es in finita" ?

Respuesta:

Pregunta 25. ¿En dónde no hay ejemplos de conjuntos infinitos?

Respuesta:

Pregunta 26. ¿Con qué han luchado los matemáticos desde hace más de 2000 años?

Respuesta:

Pregunta 27. ¿Qué quiere dar a entender el matemático cuando di ce que "La suma de la serie infinita

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \dots$$

es uno" ?

Respuesta:

Pregunta 28. En la expresión

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, ...

¿qué significan los puntos suspensivos?

Respuesta:

ACTIVIDAD II-2-10

REVISION DEL CUESTIONARIO ANTERIOR

Las respuestas dadas a las preguntas del cuestionario anterior se revisan grupalmente. El objetivo es llegar a las respuestas correctas.

ACTIVIDAD II-2-11

ANALISIS DEL TEXTO LEIDO

Cuando los estudiantes han leído el texto, contestado el cuestionario y el profesor ha respondido preguntas y aclarado dudas, se pasa a analizar "globalmente el texto". Las dos ACTIVIDADES anteriores han reparado en el "detalle", en lo particular. Ahora es la etapa de "borrar" detalles, "abstraer" lo esencial, establecer relaciones entre lo particular. Hacer lo anterior no es fácil. Lo individual y específico es lo que a primera vista resalta. Lo general e interrelacionado se "descubre", se infiere. No se espere que a primera intención los alumnos exhiban la estructura del texto (lo particular y sus relaciones entre sí).

La ACTIVIDAD es de carácter grupal, dirigida por el profesor. Al inicio el maestro plantea la pregunta:

[*¿De qué trata el texto?*]

Cada estudiante contribuye a la respuesta. El profesor anota en el pizarrón "todas" las respuestas que los alumnos dan que, entre paréntesis, se les pide que sean lo "más breve" posible.

Cuando ya se tiene el listado (que no es muy difícil de obtener), el maestro plantea al grupo la siguiente pregunta:

> *"... Lo que acá está enlistado guarda cierta relación entre sí, no son cosas ajenas unas de otras. Por ejemplo, el conjunto 1,2,3,4,... es un ejemplo de sucesión.*

> *Otras cosas son "un cierto tipo o clase" de algo. Traten de identificar en la lista anterior*
>
> - *atributos o cualidades de "algo",*
> - *casos particulares o ejemplos de "algo",*
> - *tipo o clase de "algo",*
> - *procesos o cosas que den origen a "algo".*

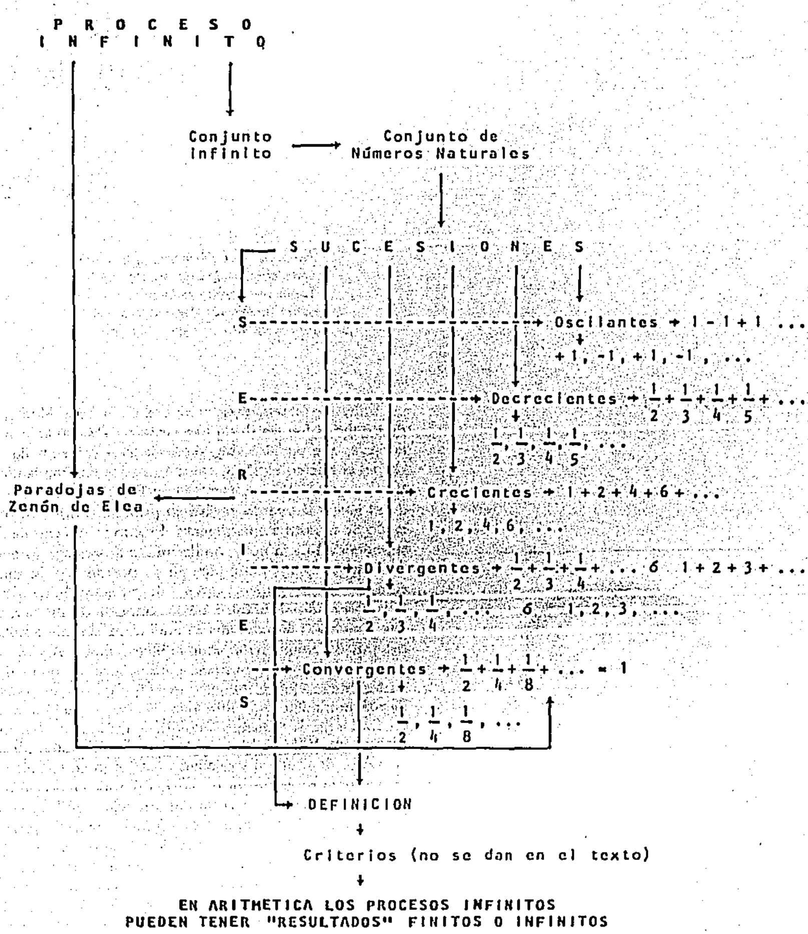
De lo que se trata es por ejemplo, que identifiquen o reconozcan que "creciente", "decreciente" u "oscilante" son atributos o cualidades que puede tener una serie; que una serie tiene su origen en el conjunto de números Naturales; que éstos son un ejemplo de conjunto infinito; que $1+2+4+8+\ldots$ es un ejemplo de serie divergente; etc.

Cuando los estudiantes han identificado entre los elementos de su listado relaciones como las mencionadas, el profesor les construye, paso a paso, un diagrama, como el que se muestra en la página siguiente, que muestra relaciones entre lo que se considera "fundamental" del texto. Nótese que este diagrama muestra la relación que hay entre: proceso infinito, conjunto infinito, números Naturales, sucesiones, series y convergencia. Lo demás es ejemplo!!

ACTIVIDAD II-2-12 EJEMPLO DE UN PROCESO INFINITO: SERIE DE FIBONACCI

Para que los estudiantes conozcan un ejemplo de un proceso infinito que conduce a una serie, ¡claramente! divergente, se les presenta el clásico trabajo de Fibonacci. Para ello, el profesor les entrega el texto que se reproduce después del diagrama de la página siguiente. La lectura de dicho texto se realiza grupalmente, con las pertinentes aclaraciones, si hay necesidad, del maestro. Nada más eso !!

DIAGRAMA QUE MUESTRA RELACIONES ENTRE LO QUE SE CONSIDERA "FUNDAMENTAL" DEL TEXTO



11. Números de Fibonacci y de Lucas

Tuvo esposas Fibonacci, que comer
nada comían (pastas aparte).
Tanto así pesaba cada una
como juntas sus dos antecesoras
¡Era la quinta una gran signora!

J. A. Lindon

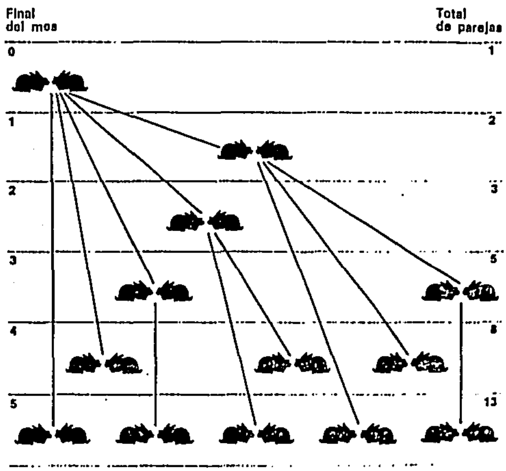
LECTURA 11-2-2

Fibonacci.

Entre los matemáticos europeos de la Edad Media, el más grande de todos fue sin duda Leonardo de Pisa, más conocido por Fibonacci, que significa «hijo de Bonaccio» (véase la fig. 70). A pesar de haber nacido en Pisa, como su padre era empleado en una factoría mercantil italiana asentada en Bougie, en Argelia, fue allí donde el joven Leonardo recibió su primera formación matemática, a cargo de maestros musulmanes. Pronto se dio cuenta de la enorme superioridad de la notación decimal indo-arábiga (provista ya de cifras cuyos valores dependen de su posición, y de símbolo para el cero) sobre el engorroso sistema de numeración romana, empleado todavía en su país natal. La más conocida de sus obras, *Liber abaci* (literalmente, Libro del ábaco) era en realidad un amplio tratado del sistema de numeración indo-arábigo, mas sus razonamientos no parecieron causar demasiada impresión a los mercaderes italianos de la época. Con el tiempo, su libro llegó a ser, empero, la obra de máxima influencia entre todas las que contribuyeron a introducir en Occidente la notación indo-arábiga. El *Liber abaci* fue concluido en Pisa en 1202; hasta nosotros ha llegado una edición revisada, de 1228, dedicada a un famoso astrólogo cortesano de la época.

No deja de ser irónico que Leonardo, cuyas aportaciones a la matemática fueron de tanta importancia, sea hoy conocido sobre todo a causa de un matemático francés del siglo pasado, Edouard Lucas, interesado por la teoría de números (y recopilador de una clásica obra de matemáticas recreativas, en cuatro volúmenes), quien encadenó el nombre de Fibonacci a una sucesión numérica que forma parte de un problema trivial del *Liber abaci*. Imaginemos, escribía Leonardo, un par de conejos adultos, macho y hembra, encerrados en un cercado, donde pueden anidar y criar. Supongamos que los conejos empiezan a procrear a los dos meses de su nacimiento, engendrando siempre un único par macho-hembra, y a partir de ese momento, cada uno de los meses siguientes un par más, de iguales características. Admitiendo que no muriese ninguno de los conejitos, ¿cuántos contendría el cercado al cabo de un año?

El gráfico arborescente de la figura 71 nos muestra qué sucedería durante los cinco primeros meses. Es fácil observar que al término de cada mes los números de pares van formando la sucesión 1, 2, 3, 5, 8..., donde cada número (como el propio Fibonacci hizo notar) resulta de sumar los dos que le anteceden. Al cabo de los 12 meses tendremos 377 pares de conejos.



Árbol genealógico de los conejitos de Fibonacci.

Fibonacci no investigó la sucesión, que tampoco recibió ningún estudio serio hasta comienzos del siglo pasado. Hacia esa fecha los artículos dedicados a ella empezaron a proliferar —son palabras de un matemático— como los conejitos de Fibonacci. Lucas efectuó un profundo estudio de las llamadas sucesiones generalizadas de Fibonacci, que comienzan por dos enteros positivos *cualesquiera* y a partir de ahí, cada número de la sucesión es suma de los dos precedentes. Lucas dio el nombre de sucesión de Fibonacci a la más sencilla de estas sucesiones, a saber, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21... (la inmediatamente más sencilla, 1, 3, 4, 7, 11, 18..., es hoy conocida por sucesión de Lucas). Tradicionalmente, la posición que cada número ocupa dentro de una sucesión se denota mediante un subíndice, y de esta forma, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, y así sucesivamente. (Se da la lista de los primeros cuarenta números de Fibonacci en la fig. 72.) F_n denota el n-ésimo número de Fibonacci; f_{n-1} es el número que antecede a F_n; F_{2n} es el número de Fibonacci cuyo subíndice es doble del de F_n, etc.

La sucesión de Fibonacci ha tenido intrigados a los matemáticos durante siglos, en parte a causa de su tendencia a presentarse en los lugares más inopinados, pero sobre todo, porque el más novel de los *amateurs* en teoría de números, aunque sus conocimientos no vayan mucho más allá de la aritmética elemental, puede aspirar a investigarla y descubrir curiosos teoremas inéditos, de los que parece haber variedad inagotable. El interés por estas sucesiones ha sido avivado por desarrollos recientes en programación de computadores, ya que tiene aplicación en clasificación de datos, recuperación de informaciones, generación de números aleatorios, e incluso en métodos rápidos de cálculo aproximado de valores máximos o mínimos de funciones complicadas, cuando no se conoce la derivada.

Los resultados más clásicos acerca de estas sucesiones están resumidos en el capítulo 17 del primer tomo de *History of the Theory of Numbers*, de Leonard Eugene Dickson. Los lectores interesados pueden consultar *The Fibonacci Quarterly*, que desde 1963 viene siendo publicada por la Fibonacci Association. Su redactor jefe es

F_1	1	L_1	1
F_2	1	L_2	3
F_3	2	L_3	4
F_4	3	L_4	7
F_5	5	L_5	11
F_6	8	L_6	18
F_7	13	L_7	29
F_8	21	L_8	47
F_9	34	L_9	76
F_{10}	55	L_{10}	123
F_{11}	89	L_{11}	199
F_{12}	144	L_{12}	322
F_{13}	233	L_{13}	521
F_{14}	377	L_{14}	843
F_{15}	610	L_{15}	1364
F_{16}	987	L_{16}	2207
F_{17}	1597	L_{17}	3571
F_{18}	2584	L_{18}	5778
F_{19}	4181	L_{19}	9349
F_{20}	6765	L_{20}	15127
F_{21}	10946	L_{21}	24476
F_{22}	17711	L_{22}	39603
F_{23}	28657	L_{23}	64079
F_{24}	46368	L_{24}	103682
F_{25}	75025	L_{25}	167761
F_{26}	121393	L_{26}	271443
F_{27}	196418	L_{27}	439204
F_{28}	317811	L_{28}	710647
F_{29}	514229	L_{29}	1149851
F_{30}	832040	L_{30}	1860498
F_{31}	1346269	L_{31}	3010349
F_{32}	2178309	L_{32}	4870847
F_{33}	3524578	L_{33}	7881196
F_{34}	5702887	L_{34}	12752043
F_{35}	9227465	L_{35}	20633239
F_{36}	14930352	L_{36}	33385282
F_{37}	24157817	L_{37}	54018521
F_{38}	39088169	L_{38}	87403803
F_{39}	63245986	L_{39}	141422324
F_{40}	102334155	L_{40}	228826127

Los 40 primeros números de Fibonacci y de Lucas.

Verner E. Hoggatt, Jr., de San José State College de San José, Calif. La revista se ocupa, sobre todo, de las sucesiones generalizadas de Fibonacci y de otras sucesiones análogas (como los llamados «números tribonacci», que son cada uno suma de los tres precedentes), aunque la revista está dedicada también «al estudio de enteros con propiedades especiales».

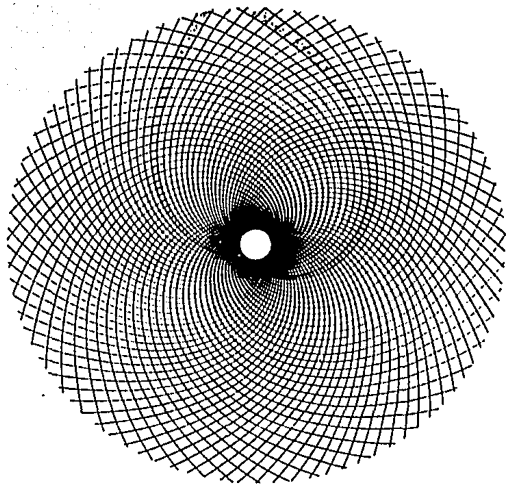
Seguramente la propiedad más notable de la sucesión de Fibonacci (válida también para las series generalizadas) sea que la razón entre cada par de números consecutivos va oscilando por encima y debajo de la razón áurea, y que conforme se va avanzando en la sucesión, la diferencia con ésta va haciéndose cada vez menor; las razones de términos consecutivos tienen por límite, en el infinito, la razón áurea. La razón áurea es un famoso número irracional, de valor aproximado 1,61803..., que resulta de hallar la semisuma de 1 y la raíz cuadrada de 5. Hay abundante literatura (no siempre seria) dedicada a la aparición de la razón áurea y de la sucesión de Fibonacci tan relacionada con ella, en el crecimiento de los organismos y a sus aplicaciones a las artes plásticas, a la arquitectura e incluso a la poesía. George Eckel Duckworth, profesor de clásicas en la Universidad de Princeton, sostiene en su libro *Structural Patterns and Proportions in Vergil's Aeneid* (University of Michigan Press, 1962) que lo mismo Virgilio que otros poetas latinos de su época se sirvieron deliberadamente de la sucesión de Fibonacci en sus composiciones. Por mi parte, me he referido ya a estas cuestiones en un artículo anterior dedicado a la razón áurea, que puede verse en *The Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions*.

En el reino vegetal, la sucesión de Fibonacci hace su aparición más llamativa en la implantación espiral de las semillas en ciertas variedades de girasol. Hay en ellas dos haces de espirales logarítmicas, una de sentido horario, otra en sentido antihorario, como muestran las espirales sombreadas de la figura 73. Los números de espirales son distintos en cada familia, y por lo común, números de Fibonacci consecutivos. Los girasoles de tamaño medio suelen contener 34 y 55 espirales, pero hay flores gigantescas que alcanzan valores de hasta 89 y 144. Y en la sección de cartas a la redacción de *The Scientific Monthly* (noviembre de 1951), el geólogo Daniel T. O'Connell y su esposa dijeron haber encontrado en su granja de Vermont un girasol monstruo, con ¡144 y 233 espirales!

La íntima relación existente entre la sucesión de Fibonacci y la razón áurea queda de manifiesto en la siguiente fórmula explícita para el n-ésimo término de Fibonacci:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Esta expresión da exactamente el n-ésimo número de Fibonacci (al desarrollarla, las $\sqrt{5}$ se cancelan), pero para números F_n de lugar muy avanzado es fastidiosa de utilizar, si bien pueden conseguirse buenas aproximaciones mediante logaritmos. Otra fórmula mucho más sencilla para el n-ésimo número de Fibonacci consiste en dividir entre la raíz cuadrada de 5 la n-ésima potencia de la razón áurea. Redondeando el número así obtenido al entero más cercano resulta también el valor entero exacto del número buscado. Ambas fórmulas son «explícitas», pues conocido n dan directamente el valor de F_n. Un «procedimiento recursivo» consiste en una serie de etapas, cada una de ellas dependiente de las anteriores. Si



Girasol gigante que contiene 55 espirales en sentido antihorario, y 89 en sentido horario.

para calcular el n-ésimo número de Fibonacci se van sumando pares de términos consecutivos hasta alcanzarlo, se estará procediendo iterativamente, o por recurrencia. Al definir el término F_n como suma de los dos términos que le anteceden estamos dando un ejemplo sencillo de fórmula recurrente.

La fórmula que da exactamente el término general de la sucesión de Lucas es:

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

pero, como sucedía con los números de Fibonacci, hay un procedimiento mucho más sencillo para hallar el n-ésimo número de Lucas. Basta elevar la razón áurea a la n-ésima potencia y redondear al entero más cercano.

Dado un número cualquiera de la sucesión de Fibonacci, para calcular el término siguiente no es preciso conocer su índice. Sea A el término dado. El siguiente viene dado por:

$$\left[\frac{A+1+\sqrt{5A^2}}{2}\right]$$

donde los corchetes indican que es necesario tomar la parte entera de la expresión, es decir, el entero más cercano por defecto. Esta *misma* fórmula da el número de Lucas consecutivo a cualquiera de su serie, con tal de que sea mayor que 3.

ACTIVIDAD II-2-13

EL NUMERO IRRACIONAL $\sqrt{2}$

En la ACTIVIDAD anterior se mostró que dos de las Paradojas de Zenón de Elea conllevan procesos infinitos que al llevarse a la Aritmética, dan origen a series infinitas que convergen a un número racional.

El propósito de esta ACTIVIDAD es exhibir, un proceso infinito que g e n e r a una sucesión convergente. Para ello se obtendrá una sucesión de "aproximaciones", en forma decimal, para $\sqrt{2}$. Sin embargo, previo a lo anterior, primero se describe el origen geométrico de $\sqrt{2}$ y la forma de localizarlo, geométricamente, en el eje numérico y se prueba su irracionalidad.

Por lo intrincado del problema, se considera que una forma de abordar la ACTIVIDAD es con una lectura de carácter grupal, en donde, los alumnos tengan la oportunidad de plantear todas las dudas que surjan y el profesor cuente con el espacio adecuado para hacer las aclaraciones, explicaciones y acotaciones que juzgue pertinentes.

El contenido de la lectura que se les proporciona a todos los estudiantes es el que se reproduce a partir de la siguiente página.

Cuestionario II-2-6

EL NUMERO IRRACIONAL $\sqrt{2}$

En esta ACTIVIDAD recordarás el origen del número $\sqrt{2}$ y el por qué se dice que es un número "irracional". Por otro lado conocerás la forma en la cual el concepto de sucesión convergente está relacionado con este tipo de números.

LOS NUMEROS RACIONALES: SU EXPRESION DECIMAL Y LOS IRRACIONALES

Los números racionales los has expresado utilizando un sistema de numeración decimal. Por ejemplo, la fracción $\frac{3}{8}$ se escribe usando el decimal 0.375 que tiene "fin" y la fracción $\frac{2}{3}$ se escribe por medio del decimal $0.66\overline{6}$ o 0.666... que se repite indefinidamente. Hay un procedimiento mediante el cual cada número racional se puede escribir en una de estas dos formas; y cada decimal de aquellas formas representa un número racional.

Examinando los diferentes tipos de números decimales se observa

- decimal
  - termina
  - no termina
    - se repite
    - no se repite

que pueden existir algunos números que no pertenecen al conjunto de los números racionales. Por ejemplo, el número 0.01001000100001..., el cual no termina y no se repite. Los números que pueden representarse por decimales que no terminan y no se repiten, se llaman números irracionales.

Combinando el conjunto de los números irracionales con el conjunto de los números racionales, se obtiene un nuevo conjunto de números, llamado el conjunto de los números reales. Así, cualquier número real debe pertenecer a uno de dos conjuntos, los racionales o los irracionales.

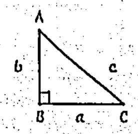
Históricamente, la existencia de los números irracionales se conoció desde los tiempos de los Griegos. A la escuela Pitagórica se le atribuye su descubrimiento; pero, la irracionalidad de $\sqrt{2}$, por ejemplo, fue difícil de aceptar para muchos Griegos -aún para los mismos Pitagóricos-. Ellos suponían que cada cosa dependía de los números enteros, y desarrollaron una teoría de la proporción que se limitó a magnitudes que tienen una unidad de medida común. El descubrimiento de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ planteó una amenaza a esta estructura teórica, de modo que por algún tiempo los Pitagóricos intentaron mantener en secreto la existencia de los números irracionales. Los miembros de la secta fueron amenazados con la muerte si divulgaban información acerca de los nuevos números.

Por el año 370 A.C., el "escándalo" fue resuelto por un discípulo de Platón, Eudoxio, quien ideó una nueva definición de proporción. Su manejo de los números irracionales aparece en el Libro V de los Elementos de Euclides y es semejante a aquella del matemático Dedeking quien, en 1872, dió la primera descripción moderna y rigurosa del conjunto de los números reales.

En aquel tiempo, de Dedeking, los matemáticos estaban buscando una forma de dar un fundamento sólido a las nuevas matemáticas que se habían estado desarrollando. Para realizar esto, fue necesario definir formalmente el conjunto de los números irracionales. Es interesante notar que esta definición formal del conjunto de los números irracionales y, consecuentemente, de los números reales ocurrió 100 años después.

EL NUMERO $\sqrt{2}$

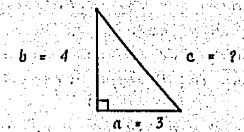
Los objetos geométricos como triángulos rectángulos y círculos fueron ampliamente estudiados por los matemáticos Griegos que antecedieron a Euclides. Fue analizando estos objetos como descubrieron el hecho de que los números racionales no eran los únicos. Recuerda que usando el Teorema de Pitágoras es posible encontrar, en un triángulo rectángulo, la longitud de tercer lado, dadas las longitudes de los otros dos. Para el triángulo rectángulo ABC represtado en la página siguiente, con lados a, b y c, el Teorema de Pitágoras establece que:



$$a^2 + b^2 = c^2$$

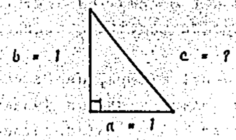
Pregunta 1. Usa el Teorema de Pitágoras para encontrar la longitud del tercer lado del triángulo mostrado en la siguiente figura.

Respuesta



Pregunta 2. Haz lo mismo para el siguiente triángulo.

Respuesta

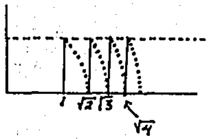


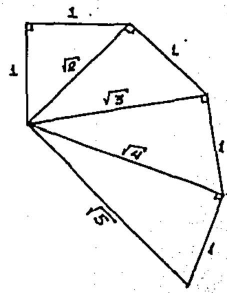
Pregunta 3. Menciona tres pares de números enteros más para a y b, que no produzcan un valor entero para c.

Respuesta:

> Si un número entero no es un cuadrado perfecto (un número entero n es un cuadrado perfecto si existe un número entero m de modo que $m^2 = n$. Ejemplos de cuadrados perfectos son el 1, 4, 9, 16, 25,...), su raíz cuadrada es un número irracional. Por ejemplo $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{17}$ son todos ellos números irracionales.

Pregunta 4. En seguida se muestran dos construcciones para números irracionales. Describe con brevedad cómo se construyeron las longitudes $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{4}$.





Respuesta:

Pregunta 5. Usando la misma técnica, construir los números $\sqrt{5}$ y $\sqrt{6}$ sobre cada uno de los diagramas de la pregunta anterior.

IRRACIONALIDAD DE $\sqrt{2}$

Se ha dicho que $\sqrt{2}$ es un número irracional. Es decir, que no es un número racional. En otras palabras, no es ninguna fracción. O de otra forma, no se puede escribir como un decimal que "acaba" o como un decimal "periódico". El texto que se reproduce en la página siguiente, tiene la finalidad de darte a conocer los argumentos que se atribuyen a Aristóteles y que demuestran en forma irrevatible que $\sqrt{2}$ no es un número racional.

BOLL, MARCEL, *"Historia de las Matemáticas"*, Ed. Diana, México, 1966.

Tratemos de sustituir $\sqrt{2}$ por una fracción ordinaria.

Si el numerador y el denominador fuesen *ambos* pares, se les dividiría, al uno y al otro, por 2. Finalmente, se le lleva a uno a establecer:

$\frac{N}{D} = \sqrt{2}$ con una de estas tres condiciones: ya sea que N sea impar, ya sea que D sea impar, ya sea que N y D sean impares.

1º Elevando al cuadrado se tiene:

$$\frac{N^2}{D^2} = 2 \quad \text{o bien} \quad N^2 = 2D^2$$

Luego el *numerador es par* (porque un número impar N, multiplicado por sí mismo, no puede dar sino un número N^2 impar, puesto que $2D^2$ es par).

2º Llamemos M a la mitad de N. Sustituyendo N por 2 M, tenemos:

$$\frac{2M}{D} = \sqrt{2} \qquad \frac{4M^2}{D^2} = 2 \qquad \frac{2M^2}{D^2} = 1 \qquad 2M^2 = D^2$$

Por consiguiente, D^2 es par; y (por la misma causa que arriba), el *denominador es par.*

Estas dos conclusiones (1º y 2º) están en contradicción con las condiciones establecidas. Cuando una suposición implica contradicción, es que esa suposición es falsa. En consecuencia, la fracción N/D *no puede existir.*

Fig. 1.—Un tipo de demostración matemática (Aristóteles), el razonamiento por el absurdo.

El número $\sqrt{2}$ no puede ser substituido rigurosamente por fracción ordinaria.

Como se vió antes, desde el punto de vista geométrico es posible localizar, en la recta numérica, el punto que corresponde al número $\sqrt{2}$. Lo que ya no es posible, aritméticamente, es dar las coordenadas de ese punto en forma de decimal que "termine" o como un decimal "periódico". Claro, siempre se puede decir que la coordenada de tal punto es $\sqrt{2}$.

Pregunta 6. Con una calculadora manual encuentra una expresión decimal para $\sqrt{2}$.

Respuesta:

A continuación trabajarás en un procedimiento "manual" que te permite hacer lo que tal vez tu calculadora sea incapaz: a p r o x i m a r a $\sqrt{2}$, por un número decimal que tenga tantas cifras como quieras!!

La calculadora que se tenía a la mano cuando se escribieron estas páginas, da para $\sqrt{2}$ el valor 1.4142135, es decir, da siete decimales. El procedimiento en el que vas a trabajar te permite encontrarlo con dos, tres, nueve, diez, veinte decimales o los que quieras. Todo es cuestión de paciencia.

El procedimiento está formado por tres operaciones y una "decisión" que se pueden repetir una, y otra, y otra vez, hasta infinito. Te podrías pasar la vida sumando, dividiendo, dividiendo y tomando una "decisión", y cada vez que lo hicieras obtendrías una expresión decimal para $\sqrt{2}$ que está cada vez más cerca del valor "verdadero". Con este proceso se va construyendo una s u c e s i ó n i n f i n i t a cuyo límite es $\sqrt{2}$.

Pero, pasemos al proceso:

Primero. ¿Estás de acuerdo en que $\sqrt{2}$ se encuentra entre 1 y 2, o sea, $1 < \sqrt{2} < 2$?

Pregunta 7. ¿Por qué se dice que $1 < \sqrt{2} < 2$?

Respuesta:

Segundo. ¿Aceptas que el número que está "exactamente" en medio de 1 y 2 es 1.5 ?

Pregunta 8. ¿Por qué se afirma que 1.5 está "exactamente en medio de 1 y 2 ?

Respuesta:

Tercero. ¿Estás de acuerdo que si $\sqrt{2}$ se encuentra entre 1 y 2 entonces, tiene tres posibilidades: o está entre 1 y 1.5 o, en 1.5 o, entre 1.5 y 2?

Pregunta 9. ¿Por qué si $\sqrt{2}$ se encuentra entre 1 y 2, tiene las tres posibilidades arriba enunciadas?

Respuesta:

Cuarto. Para saber en cuál de las tres partes antes enumeradas se encuentra $\sqrt{2}$, basta con analizar cómo es el cociente que resulta de dividir 2 entre 1.5, comparado con 1.5.

Vamos por partes:

Si al dividir 2 entre 1.5 el resultado fuese 1.5, eso querría decir que $2 = 1.5 \times 1.5$ y en consecuencia que $\sqrt{2} = 1.5$. Pero claramente tal cosa no ocurre.

Pregunta 10. ¿Por qué se afirma que si al dividir 2 entre 1.5 el resultado fuese 1.5 eso querría decir que $2 = 1.5 \times 1.5$ y en consecuencia que $\sqrt{2} = 1.5$?

Respuesta:

Ahora bien, al dividir 2 entre 1.5 se obtiene 1.3333... y por lo tanto,

$$2 = 1.5 \times 1.3333...$$

En esta última expresión se tiene que $1.3333... < 1.5$

Por otro lado,

$$2 = \sqrt{2} \times \sqrt{2}$$

Comparando esta expresión con la anterior y operando algebraicamente se concluye que:

$$\boxed{1.33 < \sqrt{2} < 1.5}$$

A partir de este momento se vuelve a proceder de la misma forma.

Puesto que $1.33 < \sqrt{2} < 1.5$, eso quiere decir que $\sqrt{2}$ se encuentra entre 1.33 y 1.415 o, en 1.415 o, entre 1.415 y 1.5. Nótese que 1.415 es la mitad de 1.33 y 1.5, lo cual se encuentra sumando 1.33 con 1.5 y el resultado se divide entre dos.

De nuevo para d e c i d i r en cual de las tres "regiones" se encuentra $\sqrt{2}$, se analiza el cociente que resulta de dividir 2 entre 1.415,

$$\frac{2}{1.415} = 1.4134275$$

de donde,

$$2 \approx 1.415 \times 1.413$$ ¡¡Hay que tomar tres decimales del cociente!!

De la última expresión se tiene que: $1.413 < 1.415$,
y como

$$2 = \sqrt{2} \times \sqrt{2}$$

se concluye que:

$$\boxed{1.413 < \sqrt{2} < 1.415}$$

En este momento se repite el procedimiento.

- El punto medio de 1.413 y 1.415 es 1.414 .
- $\sqrt{2}$ se encuentra entre 1.413 y 1.414; en 1.414 o entre 1.414 y 1.415 .
- El cociente de 2 entre 1.414 es 1.4144271 o sea 1.4144 . O sea,

$$2 \approx 1.414 \times 1.4144$$

- Pero $2 = \sqrt{2} \times \sqrt{2}$, por lo tanto.

$$\boxed{1.414 < \sqrt{2} < 1.4144}$$

Repitiendo el proceso.

- El punto medio de 1.414 y 1.4144 es 1.4142 .
- $\sqrt{2}$ se encuentra entre 1.414 y 1.4142; en 1.4142 o entre 1.4142 y 1.4144 .

- El cociente de 2 entre 1.4142 es 1.4142271 o sea, 1.41422. En otras palabras,

$$2 \approx 1.4142 \times 1.41422$$

- Pero $2 = \sqrt{2} \times \sqrt{2}$, por lo tanto,

$$\boxed{1.4142 < \sqrt{2} < 1.41422}$$

Repitiendo el proceso.

- El punto medio entre 1.4142 y 1.41422 es 1.41421.

- $\sqrt{2}$ se encuentra entre 1.4142 y 1.41421; en 1.41421 o, entre 1.41421 y 1.41422.

- El cociente de 2 entre 1.41421 es 1.4142171 o sea 1.414217. Por lo tanto,

$$2 \approx 1.41421 \times 1.414217$$

- Pero $2 = \sqrt{2} \times \sqrt{2}$, de donde

$$\boxed{1.41421 < \sqrt{2} < 1.414217}$$

Repitiendo el proceso.

- El punto medio entre 1.41421 y 1.414217 es 1.4142135.

- $\sqrt{2}$ se encuentra entre 1.41421 y 1.4142135; en 1.4142135 o entre 1.4142135 y 1.414217.

- El cociente de 2 entre 1.4142135 es 1.4142136. Por lo tanto,

$$2 \approx 1.4142135 \times 1.4142136$$

- Pero $2 = \sqrt{2} \times \sqrt{2}$, por lo tanto

$$\boxed{1.4142135 < \sqrt{2} < 1.4142136}$$

Y así le podríamos seguir indefinidamente, una y otra y otra vez hasta i n f i n i t o.

Recapitulemos las distintas "aproximaciones" que para $\sqrt{2}$ se han obtenido:

1	2
1.33	1.5
1.413	1.45
1.414	1.444
1.4142	1.41422
1.41421	1.414217
1.4142135	1.4142136

$\sqrt{2}$

Todo lo anterior exhibe, con claridad, varias cosas:

* La existencia de un número irracional $-\sqrt{2}-$ y su construcción geométrica.

* Un proceso infinito, es decir algo que se puede realizar una y otra vez, sin terminar nunca.

* Las sucesiones infinitas a que da origen el proceso infinito.

* Un ejemplo particular de como se construye una "aproximación" para un tipo específico de números irracionales.

* Un ejemplo de "sucesión convergente", cuyo límite es un número irracional.

Problema: En forma parecida a la anterior, encuentra los siete primeros términos de una sucesión convergente cuyo límite sea $\sqrt{3}$.

ACTIVIDAD II-2-14

REVISION COLECTIVA DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS EN LA ACTIVIDAD ANTERIOR

La primera parte de esta ACTIVIDAD está dedicada a discutir, grupalmente, las respuestas, que dieron los estudiantes, a las preguntas que se les plantearon en el material titulado " El número irracional $\sqrt{2}$ ".

Una vez que se han obtenido las respuestas correctas, se procede a revisar, también grupalmente, las "aproximaciones" que para $\sqrt{3}$ obtuvieron los alumnos. En el caso que algún o algunos de ellos hayan cometido errores, el profesor, personalmente, revisa el trabajo que realizaron dichos estudiantes, a fin de detectar el equívoco para que sea corregido de inmediato.

La ACTIVIDAD finaliza cuando todos los integrantes del grupo tienen correctos los siete primeros términos de una sucesión convergente cuyo límite es $\sqrt{3}$.

ACTIVIDAD II-2-15

OTRA FORMA DE APROXIMARSE A $\sqrt{2}$

El propósito de esta ACTIVIDAD es, fundamentalmente, mostrar, a los estudiantes, que la forma de construir una sucesión infinita que converja a un cierto límite no es única. Para ello se recurre al concepto de fracción contínua y se ilustra para el irracional $\sqrt{2}$.

En esta parte del Curso, el trabajo que realizan los alumnos es de carácter individual y está basado en el material que se les proporciona a cada uno de ellos. Dicho material se reproduce a partir de la página siguiente.

Cuestionario II-2-7

OTRA FORMA DE APROXIMARSE A $\sqrt{2}$

En esta ACTIVIDAD se te presenta un nuevo proceso infinito que da origen a una sucesión, cuyos términos consecutivos son aproximaciones decimales, cada vez "mejores", al irracional $\sqrt{2}$.

Para ello utilizaremos el concepto de fracción continua que fue estudiado por el matemático italiano Rafael Bombelli, quien nació en el año de 1530, en Bolonia, y del cual casi nada se sabe.

A continuación se presenta muy detallado, el procedimiento que siguió Bombelli para el caso del número $\sqrt{2}$. TE CORRESPONDE ESCRIBIR LA JUSTIFICACION QUE HACE VERDADERA CADA UNA DE LAS 30 IGUALDADES SIGUIENTES.

IGUALDAD	JUSTIFICACION
1. $\sqrt{2} = \sqrt{2}$	________________
2. $\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1)$	________________
3. $\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1)\dfrac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1}$	________________
4. $\sqrt{2} = 1 + \dfrac{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{2} + 1}$	________________
5. $\sqrt{2} = 1 + \dfrac{2 - 1}{\sqrt{2} + 1}$	________________
6. $\sqrt{2} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2} + 1}$	________________
7. $\sqrt{2} = 1 + \dfrac{1}{1 + (1 + \sqrt{2} - 1)}$	________________

IGUALDAD	JUSTIFICACION
8. $\sqrt{2} = 1 + \dfrac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}$	______
9. $\sqrt{2} = 1 + \dfrac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)\dfrac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1}}$	______
10. $\sqrt{2} = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{2} + 1}}$	______
11. $\sqrt{2} = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{2 - 1}{\sqrt{2} + 1}}$	______
12. $\sqrt{2} = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{\sqrt{2} + 1}}$	______
13. $\sqrt{2} = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{1 + [1 + (\sqrt{2} - 1)]}}$	______
14. $\sqrt{2} = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}}$	______
15. $\sqrt{2} = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)\dfrac{(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} + 1)}}}$	______
16. $\sqrt{2} = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{2} + 1}}}$	______

IGUALDAD	JUSTIFICACION
17. $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2-1}{\sqrt{2}+1}}}$	
18. $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}}$	
19. $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \left[1 + (\sqrt{2}-1)\right]}}}$	
20. $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + (\sqrt{2}-1)}}}$	
21. $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + (\sqrt{2}-1)\cfrac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)}}}}$	
22. $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1}}}}$	

IGUALDAD	JUSTIFICACION
23. $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2 - 1}{\sqrt{2} + 1}}}}$	______
24. $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2} + 1}}}}$	______
25. $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + [1 + (\sqrt{2} - 1)]}}}}$	______
26. $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}}}}$	______
27. $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)\frac{(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} + 1)}}}}}$	______

IGUALDAD | JUSTIFICACION

28. $$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1}}}}}$$ ______________

29. $$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2-1}{\sqrt{2}+1}}}}}$$ ______________

30. $$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}}}}$$ ______________

.
.
.

Y ASI SUCESIVAMENTE

A una fracción como la que aparece a la derecha de la igualdad 30 es a la que se le denomina f r a c c i ó n c o n t i n u a.

Pregunta 1. Si continuamos el procedimiento, a partir de la igualdad 30, ¿cuántos "pasos" (igualdades) habría que hacer, de acuerdo al procedimiento seguido, para llegar a la expresión

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2} + 1}}}}}}}$$

Respuesta:

A continuación se reescriben las igualdades que llevan los números 2, 8, 14, 20 y 26.

2. $\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1)$

8. $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}$

14. $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}}$

20. $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}}}$

$$26. \quad \sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}}}}$$

Pregunta 2. Escribe las fracciones continuas que estarían en los lugares 32, 38 y 44.

Respuesta:

Observa que de continuar indefinidamente con el procedimiento descrito, tendríamos un proceso infinito. Por otro lado, si de las igualdades 2, 8, 14, 20. 26, ... ¡SUPRIMIMOS!, (o sea, borramos) el término $(\sqrt{2} - 1)$, ya no se tiene el valor exacto de $\sqrt{2}$, pero sí aproximaciones de él cada vez "mejores".

Pregunta 3. *Escribe los primeros seis términos de la sucesión que resulta de suprimir en las igualdades 2, 8, 14, 20, 26, ... el término* $(\sqrt{2} - 1)$.

Respuesta:

A continuación se te muestra el cálculo de Bombelli (1572) que contiene los diez primeros términos de una sucesión, y que se acercan cada vez más al número $\sqrt{2}$.

BOLL, MARCEL, "*Historia de las Matemáticas*", Ed. Diana, México, 1966.

CÁLCULO DE $\sqrt{2}$ POR LA FRACCIÓN CONTINUA:

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}}}}}}$$

LOS DIEZ PRIMEROS TÉRMINOS

1		$= 1$
$1+\frac{1}{2} =$	$\frac{3}{2}$	$= 1{,}5$
$1+\frac{1}{2{,}5} =$	$\frac{7}{5}$	$= 1{,}4$
	$\frac{17}{12}$	$= 1{,}41666666666...$
	$\frac{41}{29}$	$= 1{,}41379310345...$
	$\frac{99}{70}$	$= 1{,}41428571429...$
	$\frac{239}{169}$	$= 1{,}41420118343...$
	$\frac{577}{408}$	$= 1{,}41421568627...$
	$\frac{1393}{985}$	$= 1{,}41421319797...$
	$\frac{3363}{2378}$	$= 1{,}41421362489...$
Continuando indefinidamente:		$1{,}41421356237...$

-El cálculo de Bombelli (1572):

ACTIVIDAD II-2-16

REVISION COLECTIVA DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS EN LA ACTIVIDAD ANTERIOR

La primera parte de esta ACTIVIDAD está dedicada a discutir, grupalmente, las respuestas, que dieron los estudiantes, a las preguntas que se les plantearon en el material titulado "Otra forma de aproximarse a $\sqrt{2}$".

El trabajo que se realiza en la segunda parte de la ACTIVIDAD que ahora nos ocupa, consiste en aclarar las dudas, que hayan surgido, al realizar el análisis del "CALCULO DE $\sqrt{2}$ POR LA FRACCION CONTINUA" realizado por Bombelli.

ACTIVIDAD II-2-17

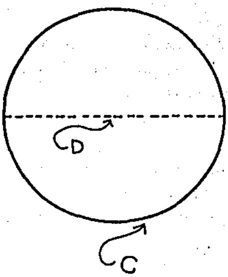
CALCULO DEL NUMERO π

El propósito de esta ACTIVIDAD es que los estudiantes conozcan un proceso infinito más que da origen a una sucesión cuyo límite es un número que conocen y han usado desde su educación primaria.

Esta ACTIVIDAD es grupal. Consiste en la lectura del material titulado "EL NUMERO π", que a partir de la próxima página se reproduce.

Cuestionario II-1-8

EL NUMERO π



La circunferencia (C) de un círculo es la distancia alrededor de él. El diámetro (D) es la distancia más grande que lo cruza. "Curiosamente", la razón $\frac{C}{D}$ es la misma para todo círculo. El valor constante de la razón $\frac{C}{D}$ es el número irracional llamado "pi" y que se representa por la decimosexta letra del alfabeto griego (π). Tú has visto este hecho expresado como

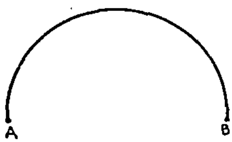
$$\frac{C}{D} = \pi \quad ó \quad C = \pi D \ .$$

Es posible, pero difícil, demostrar que π es irracional. Los primeros seis dígitos de la representación decimal (que ni termina, ni es periódica) de π son

3. 14159...

Usando computadoras electrónicas, el valor de π se ha calculado con miles de cifras decimales. En la página siguiente se te presenta un ejemplo de tales cálculos.

Los babilonios y los hebreos admitían para π el valor de 3. Los egipcios identificaban a veces π con $\sqrt{10}$ (o sea, con 3.1623...). Arquímedes calculó su valor en 3.1418785, y los indús del siglo VI en 3.1416018, alcanzando así el valor "popular" (3.1416), que basta ampliamente para trazar los planos de los mejores aviones. Hacia 1593, Francisco Viète lo calculó con once cifras exactas.



En seguida vamos a considerar, con cierto detalle, el método seguido por Arquímedes. La idea fundamental es en extremo simple. Para ilustrarla pensemos en que queremos conocer la longitud de un segmento de línea curva. La figura de la izquierda intenta representar tal hecho. La longitud buscada es la de la línea AB .

FUCHS, WALTER, R.,
"*El Libro de la Matemática Moderna*",
Ediciones Omega,
Barcelona, 1968.

CALCUL DE PI SUR ORDINATEUR IBM 704

3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510
58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679
82148 08651 32823 06647 09384 46095 50582 23172 53594 08128
48111 74502 84102 70193 85211 05559 64462 29489 54930 38196
44288 10975 66593 34461 28475 64823 37867 83165 27120 19091

45648 56692 34603 48610 45432 66482 13393 60726 02491 41273
72458 70066 06315 58817 48815 20920 96282 92540 91715 36436
78925 90360 01133 05305 48820 46652 13841 46951 94151 16094
33057 27036 57595 91953 09218 61173 81932 61179 31051 18548
07446 23799 62749 56735 18857 52724 89122 79381 83011 94912

98336 73362 44065 66430 86021 39494 63952 24737 19070 21798
60943 70277 05392 17176 29317 67523 84674 81846 76694 05132
00056 81271 45263 56082 77857 71342 75778 96091 73637 17872
14684 40901 22495 34301 46549 58537 10507 92279 68925 89235
42019 95611 21290 21960 86403 44181 59813 62977 47713 09960

51870 72113 49999 99837 29780 49951 05973 17328 16096 31859
50244 59455 34690 83026 42522 30825 33446 85035 26193 11881
71010 00313 78387 52886 58753 32083 81420 61717 76691 47303
59825 34904 28755 46873 11595 62863 88235 37875 93751 95778
18577 80532 17122 68066 13001 92787 66111 95909 21642 01989

38095 25720 10654 85863 27886 59361 53381 82796 82303 01952
03530 18529 68995 77362 25994 13891 24972 17752 83479 13151
55748 57242 45415 06959 50829 53311 68617 27855 88907 50983
81754 63746 49393 19255 06040 09277 01671 13900 98488 24012
85836 16035 63707 66010 47101 81942 95559 61989 46767 83744

94482 55379 77472 68471 04047 53464 62080 46684 25906 94912
93313 67702 89891 52104 75216 20569 66024 05803 81501 93511
25338 24300 35587 64024 74964 73263 91419 92726 04269 92279
67823 54781 63600 93417 21641 21992 45863 15030 28618 29745
55706 74983 85054 94588 58692 69956 90927 21079 75093 02955

32116 53449 87202 75596 02364 80665 49911 98818 34797 75356
63698 07426 54252 78625 51818 41757 46728 90977 77279 38000
81647 06001 61452 49192 17321 72147 72350 14144 19735 68548
16136 11573 52552 13347 57418 49468 43852 33239 07394 14333
45477 62416 86251 89835 69485 56209 92192 22184 27255 02542

56887 67179 04946 01653 46680 49886 27232 79178 60857 84383
82796 79766 81454 10095 38837 86360 95068 00642 25125 20511
73929 84896 08412 84886 26945 60424 19652 85022 21066 11863
06744 27862 20391 94945 04712 37137 86960 95636 43719 17287
46776 46575 73962 41389 08658 32645 99581 33904 78027 59009

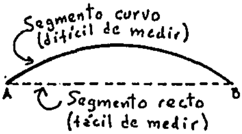
Aquí se tienen las primeras 2 000 cifras decimales del conocido número π, calculado mediante un computador electrónico tipo IBM 704 en un Instituto francés. El número irracional π, como puede verse claramente, es una fracción decimal "aperiódica".

140

Pregunta 1. Desde el punto de vista empírico-práctico, ¿ qué procedimiento seguirías para ello?. Busca un objeto que presente una línea curva, e intenta determinar su longitud en forma práctica.

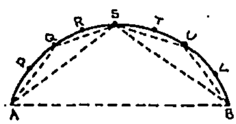
Respuesta:

Los métodos prácticos de encontrar longitudes de líneas curvas es importante. Proporcionan resultados aproximados que dependen del utencilio que se utilizó, cómo se utilizó y quién lo utilizó.

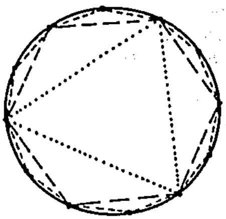


Arquímedes reconoce, de entrada, que no se puede determinar en el primer intento la longitud "exacta" del segmento AB . Algo que sí se puede hacer con un segmento de línea recta. Pero, inmediatamente se percata de que si bien, en el primer intento no se puede determinar la medida exacta del segmento AB, lo que sí se puede hacer es s u s t i t u i r el segmento curvo AB por un segmento de línea recta, que sin ser el segmento AB, sea una a p r o x i m a c i ó n de él. Lo que se gana con esto es que medir un segmento de recta es factible, y entonces, aunque no se tenga la "medida" del segmento curvo AB, si se tiene una **aproximación** de él. La figura de la izquierda ilustra este hecho.

En resumen: el segmento curvo AB se cambia por el segmento recto AB y con ello el problema se simplifica. Naturalmente, al medir la longitud del segmento recto AB no se obtiene la del segmento curvo AB, sino una a p r o x i m a c i ó n de él. Lo que sigue despues es mejorar la aproximación. Para ello se "busca", ya no un segmento de línea recta, sino dos segmentos de rectas que unidos formen una "línea quebrada" que se "aproxime mejor" al segmento curvo AB. Hay muchas formas de hacer lo anterior. Sin embargo, la más fácil es tomar un punto " S " sobre el segmento curvo AB y que se encuentre entre A y B. Uniendo este punto con los extremos A y B obtenemos una "línea poligonal" de dos lados. La figura de la izquierda ilustra este hecho. La línea ASB es una "mejor" aproximación a la curva AB. Ya llevamos dos aproximaciones. Para obtener una



"mejor" hay necesidad de tomar, por ejemplo, otros dos puntos sobre la curva AB: uno entre A y S y otro entre S y B. Estos, Q y U, después de unirlos con A, S y B, dan lugar a la poligonal AQSUB que se "acerca más" a la curva AB. Ya llevamos tres aproximaciones: A S I   S E   P U E D E   C O N T I N U A R   I N D E F I N I D A M E N T E: una, otra y otra vez, hasta infinito. Y cada vez que se haga, se obtiene una "línea quebrada" poligonal que se acerca más, más y más a la línea curva AB. Esta es, en lo fundamental, la idea de que se sirvió Arquímedes -el que dicen que corrió desnudo las calles de Siracusa, por la emoción de un descubrimiento, de los muchos que hizo- para calcular el valor de π. Cambia la línea curva AB por una circunferencia y la línea poligonal APQRSTUVB por un polígono inscrito en ella y habrás entendido la idea de Arquímedes. Esta es una de las ideas más fructíferas en Matemáticas.



La figura de la izquierda ilustra el procedimiento: se parte de un triángulo inscrito en una circunferencia de un metro de diámetro; se determina su perímetro (primera aproximación), luego se pasa al exágono (segunda aproximación), en seguida el dodecágono (tercera aproximación), Y ASI SUCESIVAMENTE, D U P L I C A N D O   INDEFINIDAMENTE EL NUMERO DE LADOS.

Los perímetros que resultan, forman una sucesión infinita. Sus términos se acercan continuamente los unos a los otros y, "e n   e l   l í m i t e", se obtiene el número π.

En principio, no hay restricción sobre como debe ser la longitud de los lados del polígono inscrito. Inclusive, pueden ser todos diferentes, o sea, tener polígonos irregulares inscritos. La otra posibilidad es que los polígonos que se inscriben tengan todos sus lados iguales. La desventaja, limitación o inconveniente que presenta el usar polígonos irregulares es que su perímetro sólo se puede obtener mediante medición directa de cada uno de los lados. En cambio, cuando los polígonos inscritos son regulares, basta con tener la medida de un solo lado. Esta es una de las razones por la cual, para calcular el número π se utilizan polígonos regulares inscritos.

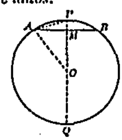
Sin embargo, la razón fundamental para usar polígonos regulares inscritos es el hecho de que para este caso, existe una fórmula que permite, conociendo la longitud del lado de un polígono regular inscrito y la del radio del círculo en el cual está inscrito, encontrar la longitud del lado del polígono regular inscrito de doble número de lados. Por ejemplo, si se sabe cuanto mide el lado de un exágono regular inscrito y el valor del radio del círculo, se puede calcular la medida del lado del dodecágono inscrito. En síntesis, si conocemo el valor del de seis lados, se puede conocer el de doce, y a partir de éste, el de 24, y de éste el de 48, y entonces el de 96, y así sucesivamente hasta infinito o hasta donde se desee.

A continuación se reproduce la página del bello libro "Geometría Plana y del Espacio" de Wentworth y Smith, en donde se d e d u c e tal fórmula.

218 LIBRO V. GEOMETRÍA PLANA

PROPOSICIÓN XIV. PROBLEMA

402. *Dados el lado y el radio de un polígono regular inscrito, calcular el lado del polígono regular inscrito de doble número de lados.*



Sean AB el lado y OA el radio de un polígono regular inscrito.

Se desea calcular el lado AP del polígono regular inscrito de doble número de lados.

Resolución. Sean r el radio OA y l el lado AB.

Trácese el diámetro PQ, que es perpendicular a AB en su punto medio M (n.° 177). Tiénese pues:

$$AM = \tfrac{1}{2} l.$$

En el $\triangle$ rectángulo AOM,

$$\overline{OM}^2 = r^2 - \tfrac{1}{4} l^2; \qquad \text{N.° 338}$$

de donde $$OM = \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4} l^2}. \qquad \text{N.° 52, 3.°}$$

También se tiene: $$PM = r - OM$$
$$= r - \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4} l^2}. \qquad \text{N.° 52, 8.°}$$

Además, $$\overline{AP}^2 = PQ \times PM. \qquad \text{N.° 298}$$

o, puesto que $$PQ = 2r, \text{ y } PM = r - \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4} l^2},$$
$$\overline{AP}^2 = 2r\left(r - \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4} l^2}\right); \qquad \text{N.° 52, 8.°}$$

de donde $$AP = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4} l^2}\right)} \qquad \text{N.° 52, 3.°}$$
$$= \sqrt{r\left(2r - \sqrt{4r^2 - l^2}\right)}.$$

403. COROLARIO. *Si* $r = 1$, $AP = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l^2}}$.

Si ℓ es la medida del lado del polígono regular inscrito, r la del radio del círculo en el cual está inscrito y AP la longitud del lado del polígono regular inscrito de doble número de lados, se tiene:

$$AP = \sqrt{r(2r - \sqrt{4r^2 - \ell^2})}$$

Pregunta 2. ¿Cuántas operaciones están indicadas en la fórmula anterior?

Respuesta:

Pregunta 3. Da un posible "orden" lógico en el que se deben efectuar las operaciones indicadas en la fórmula anterior.

Respuesta:

Pregunta 4. Para el caso de un círculo cuyo radio mide 1, ¿cómo se reduce la fórmula anterior?

Respuesta:

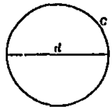
Utilizando la fórmula anterior y partiendo con un círculo de radio 1 y con un exágono regular inscrito, se puede aproximar el valor de π tanto como se desee. Este procedimiento se muestra en la página 249 del mismo libro de Wentworth y Smith, la cual es reproducida en la página siguiente de este escrito.

Pregunta 5. ¿Por qué se empieza con un exágono?

Respuesta:

PROPOSICIÓN XV. PROBLEMA

404. *Hallar la relación de la circunferencia al diámetro.*



Sean d el diámetro y C la circunferencia de un círculo.

Se desea calcular el valor de $\frac{C}{d}$, *o sea, el valor de* π.

Resolución. $2\pi r = C$ (n.° 385), y $\pi = \frac{1}{2}C$ para $r = 1$.

Sea, en general, l_n el lado de un polígono regular de n lados. Haciendo $r = 1$, se tiene también $l_6 = 1$ (n.° 394), y, aplicando la fórmula del n.° 403, se obtiene:

Fórmula	Lado	Perímetro
$l_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 1^2}}$	0,51763809	6,21165708
$l_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (0,51763809)^2}}$	0,26105238	6,26525722
$l_{48} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (0,26105238)^2}}$	0,13080626	6,27870041
$l_{96} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (0,13080626)^2}}$	0,06543817	6,28206396
$l_{192} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (0,06543817)^2}}$	0,03272346	6,28290510
$l_{384} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (0,03272346)^2}}$	0,01636228	6,28311544
$l_{768} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (0,01636228)^2}}$	0,00818121	6,28316941

Luego, aproximadamente, $C = 6,28317$, y $\pi = 3,14159$.

La relación π es inconmensurable. El valor 3,1416 es suficientemente aproximado para casi todos los fines prácticos. Cuando no se requiere grande exactitud, $\frac{22}{7}$ es un valor cómodo.

Recapitulemos lo visto en esta ACTIVIDAD: se ha presentado un proceso infinito -inscribir, en un círculo, polígonos regulares, cada vez con mayor número de lados- que da origen a una sucesión infinita cuyos términos son aproximaciones al valor de π.

ACTIVIDAD II-2-18

DISCUSION GRUPAL DEL MATERIAL TITULADO "EL NUMERO π"

En la primera parte de esta ACTIVIDAD se aclaran las dudas que los alumnos tengan en relación al material "El número π". En la segunda parte se discuten, grupalmente, las respuestas que dieron los estudiantes a las preguntas que se les plantearon en ese material.

Aclaradas todas las dudas que los alumnos hayan planteado y establecidas las respuestas correctas a las preguntas que se les formularon en el material anterior, se da por concluida esta ACTIVIDAD.

ACTIVIDAD II-2-19

PLANES DE INVERSION BANCARIA

Un contenido matemático fundamental en el estudio del "Predicamento de la Humanidad" es la función exponencial. Su introducción reclama que, aunque sea brevemente, se explique la aparición del número irracional e. Las últimas doce ACTIVIDADES estuvieron encaminadas a proporcionar elementos, no fundados rigurosamente, que permitan a los alumnos "vislumbrar" la naturaleza de tal número. El hecho de ser un número irracional explica el porqué la necesidad de hablar de sucesiones, series, límites, etc.

Para presentar el número e, se eligió "exhibirlo" como el límite al cual tiende la sucesión

$$\left[1+\frac{1}{n}\right]^n ,$$

cuando n tiende a infinito, a través de un contexto "financiero". Es sabido que el cálculo del "interés compuesto", cuando se da en "ciertas" condiciones, da origen a la sucesión antes mencionada. De nueva cuenta, como en anteriores ACTIVIDADES, se presenta un proceso infinito que da origen a una sucesión infinita convergente, pero ahora en un contexto de "dinero".

En este contexto "financiero" un cierto capital se invierte, durante cierto tiempo, a determinada tasa de interés, con la particularidad de que los intereses devengados, sumados al capital original, se reinvierten periódicamente. En otras palabras, se invierte, se gana, se reinvierte, se vuelve a ganar y así sucesivamente. Como se puede ver, al hablar del "interés compuesto" se recurre a una serie de términos técnicos, correspondientes a conceptos que no necesariamente tienen por que ser del conocimiento del alumno. Nunca ha estudiado Matemáticas Financieras. Por tal razón, el propósito de esta ACTIVIDAD es presentar a los estudiantes conceptos como: Planes de Inversión, Capital, Tasa de Interés anual, Interés, Tiempo de Inversión, Interés Simple, Interés Compuesto, Período de Reinversión y Monto total.

La ACTIVIDAD es de carácter individual y para realizarla, el profesor entrega a cada uno de los estudiantes el material que se reproduce a partir de la página siguiente.

Cuestionario II-2-9

PLANES DE INVERSION BANCARIA

Jueves 16 de mayo de 1991. 11:30 a.m. La Sra. del Sr. Gastón Billetes, en bata y con tubos, hojea el periódico del día. En las páginas centrales encuentra un folleto -impreso en papel fino, con muchas fotos a colores de personas bonitas- que promueve lo que llama "Sistema de Inversión Inteligente". Le agrada la foto que trae en la portada: un avión cesna blanco, con franjas doradas y azules, de dos motores a reacción que, con la puerta abierta, espera a alguno (o algunos, quien sabe) de dos apuestos caballeros y a una dama, de vestido negro y bleizer rojo, que platican cerca del avión; un poco separado de ellos, contempla la escena el chofer, que elegantemente vestido y con las manos hacia atrás, parece cuidar la limusina que está a su lado. La Sra. lee el folleto. Como le interesa y no entiende la explicación que da, toma el teléfono, marca el número del Banco y pregunta por el sistema de inversión a la mujer que le contestó. Con voz joven y estilo propio del que se acostumbra en los Bancos, la voz femenina dice:

> "... Fideicomiso Ultra Dinámico Serfín es un sistema constituído por diversos niveles de inversión, con tasas de rendimiento variable, de tal manera que de acuerdo al monto y permanencia de sus recursos se le asigna un nivel determinado. A mayor inversión, mayor tasa de rendimiento.
>
> Si el monto de su inversión se modifica, usted no tiene que buscar nuevos instrumentos de inversión en el mercado. Fideicomiso Ultra Dinámico Serfín asigna sus recursos automáticamente al nivel que le corresponda, ofreciéndole siempre el más atractivo rendimiento a su capital ..."

¡Lo mismo que decía el folleto! La Sra. de Gastón Billetes quedó igual de confusa. Pero no quiso preguntar. Dió las gracias y colgó. Sin embargo, unas palabras se le habían quedado grabadas: " ...el más atractivo rendimiento a su capital ...". Esto la convenció. Se arregló. Fue al Banco. Y sentada, como se sientan las gentes en el Banco, escuchó una explicación -entrecortada por las múltiples llamadas telefónicas que la Gerente tuvo que contestar- que poco entendió. Lo que sacó en claro fue que, con el dinero que llevaba, lo que ¡más le convenía! según le dijo la Srita. Hernández (así se les dice a las mujeres en el Banco) era invertirlo por un año, a una "tasa anual del 24%", capitalizable mensualmente, con lo cual al final del año, tendría, un "monto total" de ??????.

¡Ayuda a la Sra. Gastón Billetes!

Invirtió un millón de pesos. La "tasa de interés" es de 24% anual. Los intereses que obtiene cada mes se "vuelven" capital.

Pregunta 1. ¿Cuánto fue el "capital" que invirtió la Sra.?

Respuesta:

Pregunta 2. ¿Qué quiere decir que "le dan el 24% anual"?

Respuesta:

Pregunta 3. ¿Cuánto gana de intereses el primer mes?

Respuesta:

Pregunta 4. ¿Cuál es el "capital" con el que empieza el segundo mes?

Respuesta:

Tenía razón la Sra. Gastón Billetes. ¡Es difícil de entender!

ACTIVIDAD 11-2-20 DISCUSION GRUPAL DEL MATERIAL TITULADO "PLANES DE INVERSION BANCARIA"

El propósito de esta ACTIVIDAD es que al revisar las respuestas dadas al cuestionario anterior, se aclaren, ya sea por los alumnos o profesor, los conceptos : planes de inversión, capital, tasa de interés anual, rédito, tiempo de inversión, interés simple, interés compuesto, período de reinversión, monto total.

ACTIVIDAD 11-2-21 EL NUMERO e

El propósito de esta ACTIVIDAD es introducir el número e como el límite al cual tiende la sucesión

$$\left[1 + \frac{1}{n}\right]^n$$

cuando n tiende a infinito.

Para ello se utiliza una situación financiera en extremo ficticia: se deposita 1 peso, a un interés del 100% anual, durante n años, con la particularidad de que los períodos de capitalización aumentan de uno en uno, a medida que los años transcurren. En estas condiciones, los montos totales que cada fin de año recibe el inversionista, conforman una sucesión convergente cuyo límite es el número e .

La ACTIVIDAD se divide en tres partes. En la primera, mediante discusión grupal, se contestan una serie de preguntas encaminadas a puntualizar, señalar, recordar y aclarar algunos conceptos, algoritmos y representaciones simbólicas que son necesarias para comprender la c o n s t r u c c i ó n del término general de la sucesión. En la segunda parte se determina, prácticamente, el cálculo de los montos totales obtenidos en casos de interés compuesto con períodos de capitalización distintos y en la tercera parte, se efectúa la construcción del n-ésimo término de la sucesión y se ilustra, numéricamente, el límite al cual se aproxima a medida que n crece.

PRIMERA PARTE Mediante discusión grupal, se responden una serie de preguntas que el profesor plantea al grupo. Las preguntas se formulan una después de la otra y son las siguientes:

Preguntas que el profesor formula:

1. ¿ Qué significa la expresión "... en este plan su inversión obtiene un rendimiento de 100% anual" ?
2. Una persona invierte una cierta cantidad de acuerdo al plan "Fondo de Renta Fija", que ofrece un rendimiento de 100% anual. Retira su inversión a los seis meses de firmada, ¿qué parte del rendimiento le dan ?
3. El mismo problema 2, pero ahora la persona retira su inversión en los siguientes tiempos: a los 2 meses, a los 4 meses, a los 3, a los 5 meses, al mes de depositado.
4. ¿ Cómo se encuentra el " tanto por ciento " de una cantidad ?
5. ¿ Cómo se escribe un "tanto por ciento" en forma de fracción ?, y, ¿ en forma decimal ?
6. Una persona invierte $1 000 000.00 al 24% anual, y lo retira a los dos meses, ¿ cuál es el monto total que recibe ?

En la discusión grupal, cuatro cosas deben quedar claras:

- Si r es el rendimiento anual, y la inversión se retira antes de concluir el año, el rendimiento que se paga es proporcional al período de tiempo depositado.
- La forma de escribir un "por ciento", tanto en forma de fracción como en decimal.
- La forma de calcular el porcentaje de una cierta cantidad.
- La simbolización algebraica de los aspectos anteriores.

Con relación al segundo y tercer aspecto antes mencionados, el profesor decide si es necesario que los alumnos trabajen en los dos materiales sobre porcentajes que en páginas posteriores se reproducen.

SEGUNDA PARTE

Para la segunda parte de la actividad denominada "EL NUMERO e" el profesor entrega a los alumnos el material que lleva por título "LAS FINANZAS Y EL NUMERO e", que se reproduce más adelante.

TERCERA PARTE

En la tercera parte de la actividad "EL NUMERO e " se realizan, fundamentalmente, dos cosas: se discuten, grupalmente, las respuestas que los alumnos dieron al cuestionario "LAS FINANZAS Y EL NUMERO e " y se infiere el término general de la sucesión.

El profesor, ayudado por las respuestas de los alumnos, escribe, paso a paso, las operaciones a realizar para obtener el monto total. La escritura de las operaciones, en el pizarrón, se hace en forma de fracciones, con el objeto de preparar a los alumnos para la obtención del n-ésimo termino de la sucesión. A continuación se exhibe una posible forma de presentar el resultado que se obtuvo en el 5° año de inversión. Naturalmente, habrá que detenerse y explicar todas las dudas que aparezcan en el transcurso de la discusión.

INICIO DEL PRIMER AÑO $\rightarrow$ 1

$$1 + \frac{1}{5} = \left[1 + \frac{1}{5}\right]^1 \leftarrow \text{FIN DEL PRIMER AÑO}$$

$$\left[1 + \frac{1}{5}\right]^1 + \left[1+\frac{1}{5}\right]^1\frac{1}{5} = \left[1+\frac{1}{5}\right]^1\left[1+\frac{1}{5}\right] = \left[1+\frac{1}{5}\right]^2 \leftarrow \text{FIN DEL 2° AÑO}$$

$$\left[1 + \frac{1}{5}\right]^2 + \left[1+\frac{1}{5}\right]^2\frac{1}{5} = \left[1+\frac{1}{5}\right]^2\left[1+\frac{1}{5}\right] = \left[1+\frac{1}{5}\right]^3 \leftarrow \text{FIN DEL 3° AÑO}$$

$$\left[1 + \frac{1}{5}\right]^3 + \left[1+\frac{1}{5}\right]^3\frac{1}{5} = \left[1+\frac{1}{5}\right]^3\left[1+\frac{1}{5}\right] = \left[1+\frac{1}{5}\right]^4 \leftarrow \text{FIN DEL 4° AÑO}$$

$$\left[1 + \frac{1}{5}\right]^4 + \left[1+\frac{1}{5}\right]^4\frac{1}{5} = \left[1+\frac{1}{5}\right]^4\left[1+\frac{1}{5}\right] = \left[1+\frac{1}{5}\right]^5 \leftarrow \text{FIN DEL 5° AÑO}$$

Cuando ya no hay dudas sobre la forma en la cual se obtiene el monto total por año, se pasa a la deducción de la fórmula

$$\left[1 + \frac{1}{n}\right]^n$$

El profesor plantea al grupo las preguntas que considere adecuadas para ayudar a los alumnos a que obtengan, en forma grupal, la fórmula anterior, generalizando los resultados que obtuvieron en la actividad "LAS FINANZAS Y EL NUMERO e ".

A partir de la fórmula anterior, el profesor reproduce los cinco primeros términos de la sucesión que los alumnos, con anterioridad, han encontrado. Por otro lado, hace ver, mediante ejemplos concretos, que con ella se pueden construir tantos elementos como se quiera.

Finalmente, el profesor remarca el hecho de cómo un proceso infinito conduce a una sucesión, también infinita ; señala que la sucesión que se obtiene es convergente y que el límite al cual se acerca se simboliza con la letra e .

Cuestionario II-2-10

PORCENTAJE. PRIMERA PARTE

Pocas ideas matemáticas son tan populares como la de porcentaje. Tal vez las únicas que la superan en popularidad sean las de números naturales y decimales.

No hay día -excepto cuando no sale- que no se haga uso de porcentajes en algún periódico.

Cuando se nos quiere hacer ver que andamos muy bien, o que vamos muy mal, o que avanzamos, o que retrocedemos, o que nos estancamos, ya sea en la industria, el comercio, la agricultura, en las ganancias, Etc., se recurre al uso de los porcentajes. Así, se nos dice :

* Abatido en 50% el rezago de Corett en la regularización urbana.
* Fuera de competencia mundial, 25% de la planta productiva del sector textil.
* Creció 4.6% la actividad industrial en enero-abril.
* Caerá 4% la producción de autopartes, prevé la INA.
* Generaron 2 empresas 88% de la producción de cobre en 1990.

El significado de cada una de las expresiones anteriores es el siguiente:

* Abatido en 50% el rezago de Corett en la regularización urbana.

  .. significa que por cada cien terrenos cuya propiedad no estaba legalizada, ahora sólo hay 50.

* Fuera de competencia mundial, 25% de la planta productiva del sector textil.

  .. lo que significa es que de cada cien fábricas de textiles, lo que producen 25 de ellas, no es exportable.

* Creció 4.6% la actidad industrial en enero-abril.

  ...lo que quiere decir es que por cada cien productos industriales que se producían antes, de enero a abril se produjeron 4.6 más.

* Caerá 4% la producción de autopartes, prevé la INA.

...significa que por cada cien partes que se fabrican, se producirán a futuro cuatro menos.

* Generaron 2 empresas 88% de la producción de cobre en 1990.

...significa que por cada cien Ton de cobre producido, 88 lo produjeron únicamente 2 empresas.

EN SINTESIS, 88% SIGNIFICA 88 de cada 100 !!

Ahora, lee con atención el siguiente texto:

> De acuerdo con estimaciones del INEGI, el sector textil del país está conformado por mil 310 empresas, de las cuales 68.8 por ciento, es decir 902, son pequeñas; 17.7 por ciento son medianas y sólo 13.4 se refieren a grandes empresas.

Has de haber notado que en una parte dice:

> ... el sector textil del país está conformado por mil 310 empresas, de las cuales 68.8 por ciento, es decir 902, son pequeñas; ....

¿qué procedimiento se sigue para determinar que el 68.8 por ciento de mil 310 es 902?.

Sabemos que el 68.8 por ciento son pequeñas, lo que quiere decir que por cada cien empresas, 68.8 son pequeñas.

Un método fácil pero laborioso, es construir una tabla que registre el número de empresas pequeñas por cada cien empresas.

Por ejemplo:

Si	el	total	de	empresas	fuera	100	,	el	número	de	empresas	pequeñas	sería	68.8
"	"	"	"	"	"	200	,	"	"	"	"	"	"	137.6
"	"	"	"	"	"	300	,	"	"	"	"	"	"	206.4
"	"	"	"	"	"	400	,	"	"	"	"	"	"	275.2
"	"	"	"	"	"	500	,	"	"	"	"	"	"	344.0
"	"	"	"	"	"	600	,	"	"	"	"	"	"	412.8
"	"	"	"	"	"	700	,	"	"	"	"	"	"	481.6
"	"	"	"	"	"	800	,	"	"	"	"	"	"	550.4
"	"	"	"	"	"	900	,	"	"	"	"	"	"	619.2
"	"	"	"	"	"	1000	,	"	"	"	"	"	"	688.0
"	"	"	"	"	"	1100	,	"	"	"	"	"	"	756.8
"	"	"	"	"	"	1200	,	"	"	"	"	"	"	825.6
"	"	"	"	"	"	1300	,	"	"	"	"	"	"	894.4
"	"	"	"	"	"	1400	,	"	"	"	"	"	"	963.2

número total de fábricas	número de fábricas pequeñas
100	68.8
200	137.6
300	206.4
400	275.2
500	344.0
600	412.8
700	481.6
800	550.4
900	619.2
1000	688.0
1100	756.8
1200	825.6
1300	894.4
1400	963.2

Lo anterior se puede escribir en forma de tabla, tal como se muestra a la izquierda de la página.

La información que nos da la tabla es el número de fábricas pequeñas que hay de un cierto total. Así, por ejemplo, nos dice que de un total de 1300 fábricas, 894.4 son pequeñas y que de un total de 1400, 963.2 son pequeñas.

Recordemos que nuestro problema es saber cuántas fábricas pequeñas hay en un total de 1310, si sabemos que por cada 100 fábricas, 68.8 son pequeñas.

Viendo nuestra tabla, ¡¡ casi !! tenemos la respuesta. Podríamos decir, que de 1310 fábricas, casi 894.4 son pequeñas. ¿P O R Q U E podemos afirmar tal cosa ?

Para poder tener la respuesta precisa y quitarle el " c a s i", habría que completar la siguiente tabla :

número total de fábricas	número de fábricas pequeñas
5	—
10	—
25	—
50	—
100	68.8

COMPLETA LA TABLA QUE APARECE A LA IZQUIERA Y contesta la siguiente pregunta:

De un total de 1310 fábricas, ¿ cuántas son pequeñas ?

RESPUESTA.

La característica importante de la tabla anterior, y de la cual se reproduce parte a la derecha, es que **si divides el segundo número de cada pareja, entre el primero, los cocientes que se obtienen son iguales.**

Este hecho queda de manifiesto si observas la tercera columna de la tabla que acá se muestra.

No.total de fábricas	No.de fábricas pequeñas	COCIENTES
100	68.8	68.8/100 = 0.688
200	137.6	137.6/200 = 0.688
350	—	— /350 = 0.688
700	481.6	481.6/700 = 0.688
900	619.2	619.2/900 = 0.688
—	653.6	653.6/ _ = 0.688
1200	825.6	825.6/1200 = 0.688

Dos cantidades que varían de tal forma que si al dividir la segunda entre la primera, el cociente que resulta es c o n s t a n t e , se dice que la segunda varía en forma directamente proporcional con la primera.

Este hecho es muy importante porque permite encontrar los números que van en los lugares vacíos que aparecen en la tabla. Así, es posible hallar el número desconocido que va en la pareja tres. Puesto que, si bien no se conoce el segundo número de e l l a, es posible obtenerlo dividiendo el número desconocido entre el conocido. El cociente debe ser igual a los otros, por ejemplo, igual al primero. En forma simbólica se obtiene :

$$\frac{?}{350} = \frac{68.8}{100}$$

La expresión anterior es una ecuación muy sencilla. Para resolverla basta multiplicar los dos lados de la igualdad por 350, y nos da

$$? = \frac{68.8}{100}(350)$$

Desde la escuela primaria has calculado porcentajes. Al igual que tú muchos alumnos lo han hecho. Pero no todos utilizan los mismos procedimientos. Por ejemplo, cuando se les pide, ¿ cuál es el 68.8 % de 1310 ?, usan alguno de los siguientes métodos :

* Utilizan una "r e g l a d e t r e s" y escribe rápidamente

$$100 \text{ —— } 68.8$$

$$1310 \text{ —— } x$$

de donde $x = \dfrac{1310 \times 68.8}{100}$

* Otros hacen directamente la siguiente operación

$$x = 0.688 \times 1310$$

¿ SON DIFERENTES AMBOS METODOS ?

El problema que acabamos de resolver (encontrar el número desconocido que va en la pareja tres de la tabla) se puede plantear de la siguiente forma:

¿ CUANTAS FABRICAS PEQUEÑAS HAY, DE UN TOTAL DE 350?.

Veamos ahora este otro problema.

¿ Cuál es el valor del número que falta en la sexta pareja de la tabla anterior ?.

Otra forma de expresarlo es :

¿ Cuál es el número total de fábricas si se sabe que 653.6 son pequeñas ? ¡¡¡resuélvelo !!!!!

Cuestionario II-2-11

PORCENTAJE. SEGUNDA PARTE

¡GRANDES OFERTAS!

A) Ideal en la temporada, ¡para toda hora del día!: conjunto en poliéster. Saco con atractiva botonadura y falda recta. Negro, verde o naranja, sobre fondo blanco. 36 a 42.
259,000 Normal $ 309,000
(Trajes Sastre Dama).

B) Los estampados, combinados con colores lisos, son una característica clave en esta estación. Entre nuestra gran variedad de modernos vestidos, ilustramos éste, con saco drapeado al frente, y falda recta, lisa. Variedad de colores. 30 a 36.
149,995
Normal $ 195,000
(Vestidos Dama).

C) Rayas, puntos, flores y lunares... ¡una combinación que va con mamá!: blusa en rayón 100%, con manga corta y cuello camisero. Rosa o agua. 7 a 13.
84,000 Normal $ 114,000

D) Falda/pantalón haciendo juego.
99,000 Normal $ 134,000
(Coordinados Jr.).

Para crear múltiples combinaciones: sweaters tipo blusa, muy cómodos y frescos. Variedad de colores. Tres tallas.

E) Con aplicaciones bordadas.
48,300 Normal $ 109,000

F) Con diversas aplicaciones en pedrería de fantasía.
115,000 Normal $ 229,000
(Sweaters Dama).

(Sin Ilustrar):

G) Blusa en combinación de puntos y rayas. Rosa o agua. 7 a 13. Normal $ 114,000 Ahora $ 84,000

H) Falda recta con cinturón, haciendo juego. Normal $ 109,000 — Ahora $ 79,000

I) Top, tipo strapless, con resorte atrás. Rosa o agua. 7 a 13. Normal $ 69,000 Ahora $ 49,000
(Coordinados Jr.).

J) Conjunto estampado, en algodón 100%. Saco cruzado. Falda recta, con forro de acetato. Rojo o amarillo, sobre fondo blanco. 30 a 36. Normal $ 399,000 Ahora $ 199,000
(Coordinados Dama).

K) Traje sastre. Negro o blanco. 30 a 36. Normal $ 259,000 — Ahora $ 199,000
(Trajes Sastre Dama).

La Sra. Morales acostumbra leer el periódico para enterarse de las ofertas. El día de ayer recortó el anuncio que acá se reproduce. En él aparecen once ofertas. Después de analizarlas, escogió las dos que a ella le parecieron las más rebajadas: una blusa y un traje sastre.

¿Realmente, la blusa y el traje que la señora Morales escogió, son los que tienen mayor rebaja?

Vamos viendo si la elección de la Sra. Morales es como ella deseaba.

Para ello, primero, en base a la lista de ofertas, completa la siguiente tabla:

OFERTA	PRECIO NORMAL ($)	PRECIO REBAJADO ($)	DESCUENTO ($)
A			
B			
C			
D			
E			
F			
G	114,000	84,000	30,000
H			
I			
J			
K			

De la tabla anterior se puede ver que lo que hace difícil decidir sobre cuál es la prenda más rebajada es la diferencia, tanto en los precios normales, como en los rebajados.

Sin embargo, fijándose en la tabla, es fácil contestar las siguientes preguntas:

Pregunta 1: Señala dos prendas que tengan el mismo descuento.

Respuesta: ____________________,
¿por qué? ____________________.

Pregunta 2: De las prendas E y H, ¿cuál tiene mayor descuento?

Respuesta: __________, ¿por qué? __________
____________________.

Pregunta 3: De las prendas A y F, ¿cuál tiene menor descuento?

Respuesta: ____________, ¿por qué? ____________
____

Pregunta 4: De las prendas J y K, ¿cuál está más rebajada?

Respuesta: ____________, ¿por qué? ____________
____

Una forma de saber cuál es la prenda más rebajada, de todas las que están en oferta, es proceder de la siguiente manera:

El procedimiento lo vamos a ejemplificar con la oferta G.

Si la prenda G, la compráramos a su precio normal,

Pregunta 5: ¿cuántos billetes de a mil pesos, daríamos?

Respuesta:

Pero, como la compramos con descuento, en lugar de dar los 114 billetes de a mil completos, a cada uno de ellos le quitamos una cierta cantidad.

Pregunta 6: ¿Cuánto debe sumar lo que se le quita a cada uno de los 114 billetes de a mil?

Respuesta:

Pregunta 7: ¿Cuánto debe sumar lo que queda de cada uno de los 114 billetes de a mil, después de que se les restó el descuento?

Respuesta:

Usemos el método de "tanteo" para encontrar cuánto restar a cada uno de los 114 billetes de a mil, para obtener, en total, $30,000.

Pregunta 8: Lo que se le quita a cada billete de a mil, ¿será más o menos $100?

Respuesta: ______, ¿por qué? ____________

Pregunta 9: Lo que se quita a cada uno de los 114 billetes, de a mil, para que en total dé $ 30,000 ; ¿será más o menos de $ 300?

Respuesta: ______ , ¿por qué? ______________________

¡Exacto!, lo que aproximadamente se le debe quitar a cada uno de los 114 billetes de a mil, para que en total dé un descuento de $ 30,000 ; debe ser casi $ 264.

Pregunta 10: ¿Por qué?

Respuesta:

Así, si para cada una de las once prendas, encontramos cuánto se ahorra por cada mil pesos de su costo normal, se habrá encontrado un criterio para decidir cuál es la que tiene mayor descuento.

Completa la siguiente tabla que registra el ahorro, por cada mil pesos de su precio normal, para las once prendas.

PRENDA	DESCUENTO POR CADA $1,000 DE SU COSTO NORMAL ($) (APROXIMADAMENTE)
A	162
B	
C	
D	
E	
F	
G	264
H	
I	
J	
K	

Por los resultados de la tabla anterior, vemos que la Sra. Morales no sabe comprar ofertas.

Pregunta 11: ¿Por qué decimos eso?

Respuesta:

El procedimiento que se ha realizado es correcto. Sin embargo, lo usual, lo común, no es dar el ahorro por cada mil pesos, sino por cada cien pesos. ¡A eso es a lo que se le llama "por ciento"!

Pregunta 12: ¿Cómo se le llamaría cuando el ahorro se da por cada mil pesos?

Respuesta:

A partir de la tabla anterior, es fácil encontrar el "por ciento" de descuento que tiene, aproximadamente, cada prenda. Para ello, completa la siguiente tabla.

OFERTA	% DE DESCUENTO ($) (APROXIMADAMENTE)
A	16.2
B	
C	
D	
E	
F	
G	26.4
H	
I	
J	
K	

Resumiendo lo hecho hasta el momento, se puede decir que hemos encontrado cuántos pesos se ahorran por cada mil o por cada cien del costo normal de las prendas. Por ejemplo, para la prenda A, que es un saco, por cada mil pesos de su costo normal, se ahorran \$ 162 , o en otras palabras, por cada cien pesos de su precio normal, con la oferta se ahorran \$ 16.2 . Otra manera de expresar lo último, es decir que el precio del saco tiene un descuento del 16.2 %.

De esta forma, tendrá más descuento aquella prenda que, por cada mil pesos (o por cada cien) de su costo, se descuenta la mayor cantidad.

Recapitulemos lo realizado: a partir del precio normal, del precio de oferta y del monto del descuento se ha encontrado el descuento que, por cada cien pesos del precio normal, se hace. A tal cantidad le hemos llamado el "por ciento" de descuento.

De lo anterior, una forma "fácil" de encontrar el "por ciento" de descuento que se hace en ofertas, a partir del precio normal y del precio rebajado, es obtener, en primer lugar, en base a lo anterior, el monto del descuento. A continuación, utilizando el precio normal y el descuento hecho, se calcula cuánto se le deberá quitar, a cada cien pesos del precio normal, para obtener el monto del descuento.

Para realizar el cálculo anterior, se procede de la siguiente forma:

> Se construye una tabla formada de dos columnas, en la cual, el primer renglón, contiene el precio normal y el descuento total realizado; los siguientes renglones se obtienen a partir del primero al "extraer" la mitad a ambos números (esto es suponer que el costo de la prenda es la mitad, y en consecuencia, así será su descuento). Así se continúa hasta llegar a un costo de cien pesos (o aproximadamente) y su respectivo descuento.

La tabla que se muestra en la página siguiente ilustra el procedimiento antes descrito, para la oferta G.

	COSTO ($)	DESCUENTO ($)	
precio normal →	114,000	30,000	← total de descuento
mitad del precio normal →	57,000	15,000	← mitad del descuento total
mitad ... →	28,500	7,500	← mitad ...
	.	.	
	.	.	
	.	.	
	100	___	

¡No hay necesidad! de encontrar "todos" los renglones de la tabla anterior. Basta con observar que, para cada renglón, las razones que se obtienen con el descuento como numerador y el costo como denominador (o al revés, si se desea) son iguales. En consecuencia,

$$\frac{30,000}{114,000} = \frac{15,000}{57,000} = \frac{7,500}{28,500} = \ldots$$

Pregunta 13: ¿Por qué las razones anteriores son iguales?

Respuesta:

Por lo tanto, aún no sabiendo qué descuento corresponde a un costo de $ 100 , es fácil encontrarlo: la razón entre su descuento, y los 100 pesos, será igual a cualquiera de las razones anteriores, en particular a la primera.

Así, denominando por "X" el descuento que corresponde a 100 pesos, tenemos que:

$$\frac{30,000}{114,000} = \frac{X}{100} \quad ,$$

de donde,

$$X = \frac{30,000}{114,000} \times 100 \quad ,$$

o sea,

$$X = 26.3 \quad ,$$

que es la forma usual que has seguido para calcular un "por ciento".

Normalmente se dice que \$ 30,000 es el 26.3 % de \$ 114,000 .

Observa que la última tabla de esta ACTIVIDAD se construyó al revés de como se elaboró la primera de la ACTIVIDAD anterior, que para tu comodidad se reproduce, parcialmente, a continuación.

Número total de fábricas	Número de fábricas pequeñas
100	68.8
200	137.6
300	206.4
400	275.2
.	.
.	.
.	.
1400	963.2

Pregunta 14: ¿Por qué es invertido el procedimiento de construcción de las tablas?

Respuesta:

Cuestionario II-2-12

LAS FINANZAS Y EL NUMERO e

El mundo de las finanzas es un mundo complejo. Los contadores, los economistas y los actuarios que trabajan en él, identifican " muy bien " los problemas que abordan, crean un lenguaje propio e introducen una simbolización adecuada para referirse a ellos.

El problema que en seguida tratamos tiene que ver con las finanzas. Está en extremo simplificado. Su importancia radica en que permite la presentación de un número que desempeña un papel importantísimo no sólo en las Matemáticas, sino también en la Física, Química, Biología, etc.

La situación es la siguiente:

> Un hombre pobre invierte, en un plazo de "muchos" años, un peso, con un rendimiento del 100% anual. El plan de inversión estipula que los períodos de capitalización aumentan de uno en uno a medida que los años pasen. Recuerda que el período de capitalización es el tiempo que tiene que transcurrir para que la ganancia obtenida se convierta en capital.
>
> Una forma útil para visualizar lo que ocurre durante un período de capitalización es considerar a éste como "una máquina" que, con cuanto dinero que le llega, hace tres operaciones: primero le calcula un cierto porcentaje, luego, esta ganancia la suma a lo que llegó y, tercero, expulsa la cantidad total. El siguiente diagrama representa el proceso anterior

cantidad que entra	calcula un "por ciento"	la ganancia se suma a lo que entra	monto total
$\longrightarrow$			$\longrightarrow$

PROBLEMA. *En base a lo anterior, completar el siguiente cuadro, colocando en cada flecha lo que se obtiene de cada período de capitalización; adentro de los rectángulos los dos cálculos antes descritos y, en los últimos guiones, el monto total obtenido.*

No. de años de inversión	Cantidad inicial	Períodos de capitalización	Monto total
1			
2			
3			
4			

ACTIVIDAD II-2-22

GENERALIZACION DE LA FORMULA $\left[1 + \frac{1}{n}\right]^n$

En la ACTIVIDAD precedente se dedujo la expresión

$$\left[1 + \frac{1}{n}\right]^n$$

que genera la sucesión cuyo límite, cuando n se hace muy grande, es el irracional $e = 2.71828\ldots$ El propósito de la presente ACTIVIDAD es encontrar expresiones "parecidas" a la anterior que dan origen a sucesiones que convergen a alguna potencia de e e "inferir", qué de la fórmula encontrada será el exponente de e. Es necesario hacer una aclaración: en ningún caso se pretende, por ejemplo, demostrar que la sucesión

$$1 + \frac{2}{1},\ \left[1 + \frac{2}{2}\right]^2,\ \left[1 + \frac{2}{3}\right]^3,\ \left[1 + \frac{2}{4}\right]^4,\ \left[1 + \frac{2}{5}\right]^5,\ \ldots\ldots$$

o, en su forma equivalente

$$3,\ \frac{4^2}{2^2},\ \frac{5^3}{3^3},\ \frac{6^4}{4^4},\ \frac{7^5}{5^5},\ \frac{8^6}{6^6},\ \ldots\ldots$$

converge al número e^2. Lo más que se hará es ilustrar, mediante la presentación de unos pocos elementos de la sucesión, el hecho de que "p a r e c e" que la sucesión converge a "t a l v a l o r". El plan es el siguiente:

1. Se obtiene la expresión

   $$\left[1 + \frac{2}{n}\right]^n$$

   Esto es relativamente fácil, porque no es otra cosa que el monto total que se obtiene, al final de un año, de depositar un peso, al 200% anual, capitalizable n veces al año.

2. Con la ayuda de una calculadora de bolsillo, los alumnos obtienen, digamos , los 40 primeros términos de la sucesión. El término que está en el lugar 40 es, aproximadamente, 7. 0399 .

3. Interviene el profesor para señalar que si bien,

con lo hecho no se nota, la sucesión que se ha encontrado se aproxima cada vez más a e^2. Para ello, muestra que e^2 es, aproximadamente, 7.3890. . . . Por otro lado, aclara que la demostración rigurosa de la observación anterior no es posible realizarla en el curso.

En síntesis, se trata de presentar hechos y justificarlos, en la medida de lo posible, con los elementos que se tienen. Se reconoce que, en mucho, se apela a la "creencia" de los alumnos.

La ACTIVIDAD consta de dos partes. En la primera se realizan los puntos uno y dos del plan antes mencionado y para ello se utiliza el material titulado "GENERALIZACION DE LA FORMULA $\left[1 + \frac{1}{n}\right]^n$ ", que se reproduce en páginas posteriores y que los alumnos realizan individualmente.

En la seguna parte de esta ACTIVIDAD, se revisa, grupalmente, el resultado que se obtuvo de la primera parte. Hecha la revisión anterior, el profesor interviene para señalar los siguientes dos aspectos:

* Cada una de las sucesiones que se obtuvieron en la la primera parte de la ACTIVIDAD, son convergentes y el límite al que tienden es una potencia de e. Cada una de ellas tiende a e^2, e^3, e^4, $e^{1/2}$, $e^{1/4}$, respectivamente.

* Plantea al grupo la siguiente pregunta : ¿Qué parte de las expresiones a, b, c, d, y e, de la primera parte de esta ACTIVIDAD, determina el exponente del límite?

Contestada la pregunta anterior, el profesor remarca el hecho de que es el numerador de las fracciones

$$\frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \frac{4}{n}, \frac{.5}{n}, \frac{.25}{n},$$

el que determina el exponente del límite.

Cuestionario II-2-13

GENERALIZACION DE LA FORMULA

$$\left[1 + \frac{1}{n}\right]^n$$

Con anterioridad se encontró que el monto total, que al final de un año, recibe una persona por haber invertido un peso al 100% anual, capitalizable n veces al año, está dado por la expresión

$$\left[1 + \frac{1}{n}\right]^n$$

Pregunta 1. Obten una expresión equivalente a la anterior, para los casos siguientes y anótala en el espacio indicado:

a. Se deposita un peso, durante un año, al 200% anual, capitalizable n veces al año.

b. Se deposita un peso, durante un año, al 300% anual, capitalizable n veces al año.

c. Se deposita un peso, durante un año, al 400% anual, capitalizable n veces al año.

d. Se deposita un peso, durante un año, al 50% anual, capitalizable n veces al año.

e. Se deposita un peso, durante un año, al 25% anual, capitalizable n veces al año.

f. Se depositan \$ 1 000 000.00, durante un año, al 25% anual, capitalizable n veces al año.

Respuesta.

a. ________ c. ________ e. ________

b. ________ d. ________ f. ________

Pregunta 2. Cada una de las expresiones anteriores da origen a una sucesión. Con la ayuda de una calculadora de bolsillo, encuentra los primeros 40 términos de las sucesiones a, b, c, d, e, f.

Respuesta

a	b	c	d	e	f

ACTIVIDAD II-2-23 IMPORTANCIA DEL NUMERO e

El número e, es el límite de una sucesión. Así se ha presentado en lo que va del curso. Sin embargo, sucesiones con límite, tanto racional como irracional, las hay en número infinito. ¿Qué es lo que hace a e ser tan importante, en la Matemática, y fuera de ella?. Después del irracional π, tal vez el que sigue en popularidad es el número 2.7..... El propósito de esta ACTIVIDAD es mostrar la importancia de e, fuera de las matemáticas. No es que no sea interesante enseñar el papel relevante que e desempeña en las matemáticas. Lo que ocurre es que el curso es de aplicaciones de las matemáticas, fuera de las matemáticas. Además, una presentación de e, en la propia matemática, conlleva la necesidad de dedicarse a contenidos matemáticos que requieren una "infraestructura" que aún los estudiantes no poseen. Y proporcionarla sería muy tardado.

La ACTIVIDAD se realiza, fundamentalmente, por medio de "cátedra magistral" dictada por el profesor. En ella, el maestro presenta "situaciones" cuyo estudio, aún elemental, lleva a la aparición del número e. Las situaciones que se tratan son las siguientes:

a. Ahorro de cierta cantidad de dinero a un determinado interés compuesto.

b. Descomposición radiactiva.

c. Absorción de partículas por un medio.

d. Rapidez de enfriamiento de un cuerpo.

e. Variación de la presión atmosférica con la altura.

f. Descarga de una superficie electrizada.

g. Absorción de la luz por agua.

h. Movimiento de una partícula en un medio resistivo.

i. Disolución de compuestos químicos.

j. Crecimiento de una población.

Para cada situación anterior, el profesor realiza lo siguiente.

1. Describe, lo más claramente posible, en qué consiste.

2. Identifica la magnitud por "conocer".

3. Determina los elementos "fundamentales" de cada situación.

4. Hace explícitas las simplificaciones "más notables" que se están suponiendo.

5. Determina en qué "forma" los elementos fundamentales de la situación participan en la formulación cuantitativa del problema.

6. Encuentra la expresión matemática que relaciona los diferentes elementos fundamentales de la situación.

7. Señala en qué parte de la expresión matemática se muestra la presencia del número e.

ACTIVIDAD II-2-24 INTRODUCCION AL CONCEPTO DE FUNCION
2a. PARTE

Para la presentación del concepto de f u n c i ó n se pueden seguir, por lo menos, dos caminos : viéndola como un caso particular de relación y sirviéndose del lenguaje de los conjuntos ó seguir el camino más "viejito" de visualizarla como una magnitud que varía al variar otra. Ambos enfoques tienen sus particularidades. Sin embargo, por estar este trabajo orientado más a ver la matemática como "herramienta" que en sí misma, se juzga más adecuado el segundo camino.

Aclarado el sentido en el que se usará el término función, vemos, por ejemplo, que el libro de Granville de Cálculo Diferencial e Integral, dice: "Cuando dos magnitudes variables están relacionadas de tal manera que el valor de la primera queda determinado si se da un valor a la segunda, entonces se dice que la primera es función de la segunda". Y un poco antes afirma:"Una v a r i a b l e es una cantidad a la que se le puede asignar, durante el curso de un proceso de análisis un número ilimitado de valores". Lo que ya no dice Granville es en dónde o para qué se realiza un "proceso de análisis".

De acuerdo a esta línea de pensamiento, captar el concepto de función requiere varias cosas: reconocer que en algunas "situaciones" hay cantidades (o magnitudes); que tales magnitudes varían o cambian de valor y, por último, que las variaciones de las magnitudes no son independientes unas de otras, sino que están relacionadas.

Cuando se habla de "situaciones" se quiere hacer referencia a "resortes que se estiran por la acción de un peso que pende de él", a "cajas de cartón, madera o de lo que sea", "pelotas que caen libremente por acción de la gravedad", etc. En otras palabras, por "situación" se entiende un estado de cosas muy simple y aislado del resto de la realidad. Es el deseo o interés en "descubrir" o encontrar cómo ocurren las c o s a s , los sucesos, los acontecimientos o los fenómenos, lo que nos lleva a reparar en los aspectos cuantitativos, en las variaciones o relaciones que se presentan en una cierta situación. Un "hecho obvio" que se observa en algunos sectores de la realidad es que algunas magnitudes experimentan cambios en su valor. El concepto matemático de función aparece al momento en que se intenta relacionar la variación de una magnitud con la que experimenta otra u otras magnitudes. Sólo en ése momento se da.

Los propósitos de esta ACTIVIDAD son varios :

- Identificar, en situaciones simples, aspectos cuantitativos.
- Observar, en algunas situaciones, aspectos cuantitativos que se pueden variar.
- Formular posibles relaciones funcionales entre dos o más variables que se presentan.

La ACTIVIDAD se realiza en dos etapas. En la primera, los alumnos, en forma individual, contestan el cuestionario que se reproduce más adelante.

En la segunda parte de esta ACTIVIDAD se discuten, grupalmente, las respuestas que se dieron al cuestionario de la primera parte. Los fines de la discusión son :

1. Obtener las respuestas correctas a las preguntas formuladas.
2. Recordar los conceptos de función de una y varias variables; variable independiente y variable dependiente.
3. Revisar, con mucho detalle, la respuesta a la pregunta 13, porque servirá de base a la siguiente ACTIVIDAD, en donde se introducirá el concepto de función exponencial.
4. Aclarar las dudas que el texto de Granville, hubiese originado.

Cuestionario II-2-14

EL CONCEPTO DE FUNCION

El concepto de *función* es sumamente importante, tanto para las Matemáticas, como para la ciencia en general. En tus cursos de Matemáticas, en una forma u otra, lo has estudiado. En esta ACTIVIDAD, recordarás aspectos elementales de dicho concepto. Por ello, lee con cuidado las siguientes preguntas y contéstalas en el lugar indicado.

Pregunta 1. La cantidad de pan, por día, que una ciudad requiere, ¿ de qué depende ?

Respuesta.

Pregunta 2. La Sra. María teje suéteres, para ponerles precio, ¿ que elementos considera ?

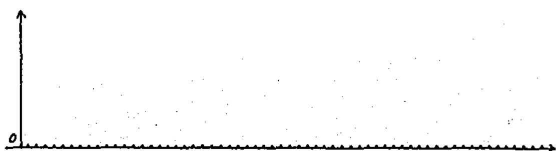
Respuesta.

Pregunta 3. Juan necesita fotocopias. ¿ Qué determina la cantidad de dinero que debe llevar ?

Respuesta.

Pregunta 4. Los ingresos de una familia consisten en los salarios del papá y de la mamá. A los dos les pagan el día último de cada mes. Dibuja una **gráfica** que represente el dinero que la familia posee en los días de dos meses consecutivos.

Respuesta.



Pregunta 5. Imagínate las siguientes situaciones:

a. Una niña meciéndose en un columpio.

b. Un niño resbalándose en una resbaladilla.

c. Un recipiente, con agua, colocado sobre una estufa encendida.

d. Una señora haciendo un pastel.

Para cada una de las situaciones anteriores, menciona algunos elementos que puedan expresarse numéricamente.

Respuesta.

a. c.

b. d.

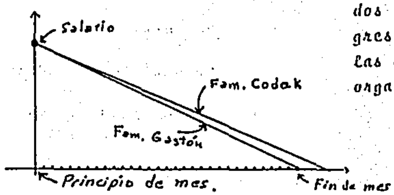
Pregunta 6. Normalmente, las ganacias de un chofer de "pesera" son de unos $ 60 000.00 diarios. Enumera algunos factores que podrían modificar sus ganancias.

Respuesta.

Pregunta 7. El crecimiento "sano" de una planta de jardín depende de muchos elementos. Señala, los más que puedas, que sea factible de expresar numéricamente.

Respuesta.

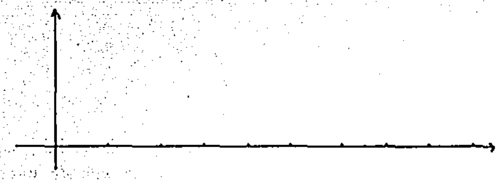
Pregunta 8. La gráfica de la izquierda corresponde a cómo dos familias gastan sus ingresos en un mes. ¿ Cuál de las dos familias es "más" organizada para gastar ?



Respuesta.

Pregunta 9. Cada domingo a Rocío le dan $ 10 000.00 para que vaya a la escuela durante la semana. Dibuja una gráfica que represente el ahorro semanal de Rocío, si en una semana no gasta nada de lo que le dan.

Respuesta.



Pregunta 10. Desde la escuela primaria nos enseñan fórmulas. Las conoces y las has utilizado. Recordando lo que sabes, completa lo siguiente:

El perímetro de un rectángulo DEPENDE de ....

....

El área de un círculo DEPENDE de ....

....

El área de un rectángulo DEPENDE de ....

....

El área de un cuadrado DEPENDE de ....

....

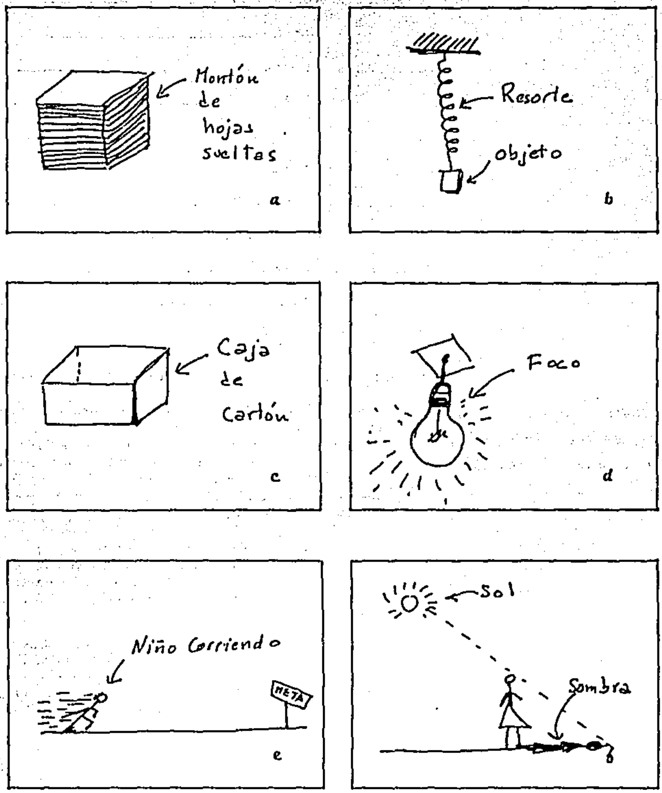
El perímetro de un triángulo DEPENDE de ....

....

El volumen de una caja de cerillos DEPENDE de ....

....

Pregunta 11. A continuación se intentan representar algunas situaciones en las cuales es posible variar alguna magnitud y, como consecuencia de esto, que alguna otra se modifique. Observa detenidamente la situación, piensa y completa lo siguiente



SITUACION

_______ Al variar _______________________

varía _______________________

_______ Al variar _______________________

varía _______________________

_______ Al variar _______________________

varía _______________________

_______ Al variar _______________________

varía _______________________

_______ Al variar _______________________

varía _______________________

_______ Al variar _______________________

varía _______________________

_______ Al variar _______________________

varía _______________________

_______ Al variar _______________________

varía _______________________

Pregunta 12. Lee con atención el siguiente TEXTO.

GRANVILLE, W.A., "*Cálculo Diferencial e Integral*", Ed. Limusa, México, 1984.

9. Funciones. Cuando dos variables están relacionadas de tal manera que el valor de la primera queda determinado si se da un valor a la segunda, entonces se dice que la primera es función de la segunda.

Casi todos los problemas científicos tratan con cantidades y relaciones de esta naturaleza, y en la experiencia de la vida diaria nos encontramos constantemente con situaciones en las que intervienen magnitudes dependientes unas de otras. Así, por ejemplo, el *peso* que un hombre puede levantar depende directamente, a igualdad de otras circunstancias, de su *fuerza*. Análogamente, se puede considerar que la *distancia* que un muchacho puede recorrer depende del *tiempo*. O también podemos decir que el *área* de un cuadrado es una función de la *longitud de su lado*, y que el *volumen* de una esfera es una función de su *diámetro*.

10. Variables independientes y dependientes. La segunda variable, a la cual se pueden asignar valores a voluntad dentro de límites que dependen del problema particular, se llama la *variable independiente* o el *argumento*. La primera variable, cuyo valor queda fijado cuando se asigna un valor a la variable independiente, se llama la *variable dependiente* o la *función*.

Frecuentemente, cuando se consideran dos variables ligadas entre sí, queda a nuestro arbitrio el elegir a una de ellas como variable independiente; pero una vez hecha esta elección, no es permitido cambiar de variable independiente sin tomar ciertas precauciones y hacer las transformaciones pertinentes. El área de un cuadrado, por ejemplo, es una función de la longitud del lado, y, recíprocamente, la longitud del lado es una función del área.

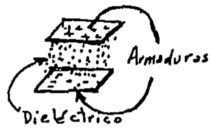
En base al contenido del TEXTO anterior, analiza las situaciones que a continuación se describen:

a. Si en una de las paredes o en el fondo de una vasija llena de un líquido se practica un orificio, el líquido sale al exterior con velocidad tanto mayor cuanto más bajo esté el orificio con respecto a la superficie de nivel.

b. Con dos espejos planos, dispuestos de manera que formen entre sí un ángulo α, se obtiene un número de imágenes dependiente de la medida del ángulo que hay entre los espejos.

c. Las variaciones en la longitud, determinadas por los cambios de temperatura, deben ser tenidas en cuenta en la construcción de puentes metálicos, en el tendido de vías férreas, en la construcción de los macizos de las calderas.

d. La capacidad de un condensador es tanto más grande, cuanto mayor es la superficie de las armaduras y menor la distancia entre ellas. Además, también depende del dieléctrico utilizado.



Para las cuatro situaciones anteriores, completa lo siguiente:

SITUACION

______ Al variar ______________________

varía ______________________

______ Al variar ______________________

varía ______________________

______ Al variar ______________________

varía ______________________

______ Al variar ______________________

varía ______________________

______ Al variar ______________________

varía ______________________

SITUACION

_________ Al variar _________________________

varía _________________________

_________ la variable independiente es _________________________

y la variable dependiente es _________________________

_________ la variable independiente es _________________________

y la variable dependiente es _________________________

_________ la variable independiente es _________________________

y la variable dependiente es _________________________

_________ la variable independiente es _________________________

y la variable dependiente es _________________________

_________ la variable independiente es _________________________

y la variable dependiente es _________________________

_________ la variable independiente es _________________________

y la variable dependiente es _________________________

Pregunta 13. En una de las ACTIVIDADES anteriores, se describieron, en el salón de clases, las siguientes situaciones:

a. Ahorro de una cierta cantidad de dinero, a interés compuesto.

b. Descomposición radiactiva.

c. Absorción de partículas por un medio.

d. Rapidez de enfriamiento de un cuerpo.

e. Variación de la presión atmosférica con la altura.

f. Descarga de una superficie electrizada.

g. Absorción de la luz por agua.

h. Movimiento de una partícula en un medio resistivo.

i. Disolución de compuestos químicos.

j. Crecimiento de una población.

Escoge alguna de ellas y :

a. Descríbela brevemente, pero en forma precisa.

Respuesta.

b. Para la situación escogida y descrita en el punto anterior, completa lo siguiente:

SITUACION

________ Al variar ______________________________
varía _________________________________

________ Al variar ______________________________
varía _________________________________

________ Al variar ______________________________
varía _________________________________

________ Al variar ______________________________
varía _________________________________

________ Al variar ______________________________
varía _________________________________

________ la variable independiente es ____________________
y la variable dependiente es ____________________

________ la variable independiente es ____________________
y la variable dependiente es ____________________

________ la variable independiente es ____________________
y la variable dependiente es ____________________

________ la variable independiente es ____________________
y la variable dependiente es ____________________

________ la variable independiente es ____________________
y la variable dependiente es ____________________

ACTIVIDAD II-2-25 FUNCION EXPONENCIAL

El propósito de esta ACTIVIDAD es introducir "explícitamente" la función exponencial. Se dice explícitamente porque, en esencia, en la ACTIVIDAD denominada "Importancia del número e ", lo que realmente se mostró fué la función exponencial, salvo que para un valor particular de la variable independiente, como a continuación se explica.

La expresión $\left[1 + \frac{1}{n}\right]^{n}$, para un valor fijo de n, permite conocer el monto total, al final de un año, de invertir un peso a una tasa de rendimiento del 100% y capitalizando las ganancias n veces por año. Si la inversión se realiza en las mismas condiciones durante cuatro años más, el monto total, al final de cada año sería

año	monto total
1	$\left[1 + \frac{1}{n}\right]^{n}$
2	$\left[1 + \frac{1}{n}\right]^{2n}$
3	$\left[1 + \frac{1}{n}\right]^{3n}$
4	$\left[1 + \frac{1}{n}\right]^{4n}$
5	$\left[1 + \frac{1}{n}\right]^{5n}$

Cuando, el período de capitalización se hace "infinitamente pequeño" ($n \to \infty$), el monto total en el primer año es e . En tales condiciones, la ganancia, en los cuatro siguientes años se transforma en :

año	1	2	3	4	5
monto total	e^1	e^2	e^3	e^4	e^5

Por lo tanto, de acuerdo a la primera tabla, una expresión como

$$\left[1 + \frac{1}{12}\right]^{12x}$$

significa : el monto total que se obtiene al final del año x, como resultado de invertir un peso, al 100% anual, capitalizable 12 veces por año. Con respecto a la segunda tabla, la expresión e^x, significaría, el monto total que se obtiene al final del año x, como resultado de invertir un peso al 100% anual, capitalizable instantáneamente.

Esta ACTIVIDAD la realiza, en su mayor parte, el profesor, mediante cátedra magistral. El plan a seguir es más o menos el siguiente:

El profesor retoma alguna de las diez situaciones que se estudiaron en la ACTIVIDAD titulada "IMPORTANCIA DEL NUMERO e " y que los alumnos recordaron en la que lleva por nombre "INTRODUCCION AL CONCEPTO DE FUNCION: 2a. PARTE" . Por ejemplo, supongamos que el profesor selecciona la denominada "Absorción de la luz por agua". El análisis que realiza de la situación anterior, es el siguiente :

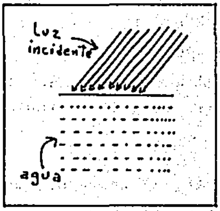
a. Introduce la situación. En este caso se puede valer de lo que ocurre en el océano: a grandes profundidades hay una perpetua obscuridad. Es recomendable que se explaye lo más que pueda en la presentación de la situación.

b. Aclara el problema que se plantea en la situación; en este caso, conocer la cantidad de luz que hay a diferentes profundidades.

c. Menciona el proceso de idealización

$$\boxed{\text{Situación real} \rightarrow \text{Situación bajo estudio}}$$

que media entre ir de la situación "real" a la situación "por estudiar". Ambas situaciones son distintas. La segunda es una super-simplificación de la primera. En este punto hay que hacer explícitos "la mayor parte" de los elementos, que estando presentes en la situación real, se dejan de lado, o no aparecen en la "situación bajo estudio" . Por otro lado, se menciona que lo más probable es que algunos de los elementos "influyan" en el problema planteado, pero que considerarlos complicaría en extremo el problema. Así mismo, se debe mencionar que hay "elementos" de la



situación que es imposible omitir (son los fundamentales) porque de lo contrario el problema planteado dejaría de existir. Al final de este inciso debe quedar claro que nuestra situación " ideal " estará formada únicamente por : agua pura en reposo a cierta temperatura y luz natural que incide sobre ella. En nuestro sistema a estudiar no hay peces, movimiento del agua, plantas acuáticas, agua con distinto grado de salinidad, ... etc. El diagrama de la izquierda pretende representar el sistema en estudio.

d. Determinación de los aspectos cuantitativos de la situación y que son importantes para el problema. El sistema sólo está formado de dos elementos : luz y agua. Cada uno de ellos tiene una gran diversidad de características que se pueden expresar cuantitativamente. El problema es determinar cuáles son las relevantes para el problema planteado. Habrá que mencionar muchas de ellas : volúmen, temperatura, ... Se debe llegar a concluir que, para nuestro problema -al nivel que se pretende estudiar- sólo requerimos cuatro : cantidad de luz que llega al agua; la distancia que recorre la luz en el agua y que es en la que ocurre la absorción; la cantidad de luz que llega al final del recorrido de la luz y una que es difícil detectar : un índice o parámetro que mida la capacidad particular que tiene el agua de absorber cierta cantidad de luz por unidad de longitud que ésta penetre en ella -diferentes líquidos tendrán diferente " absorbencia " hacia la luz que incide en ella-. Hay que ser muy explícitos en este punto y aclarar como un " coeficiente " análogo aparece en cada una de las nueve restantes situaciones que se mencionaron en la ACTIVIDAD " IMPORTANCIA DEL NUMERO e " . Por ejemplo, para el caso del interés compuesto, el papel de " parámetro " lo desempeña el " rendimiento porcentual por año ", y así, cada situación tendrá un índice específico.

e. Identificación intuitiva de la relación funcional entre los elementos cuantitativos identificados. Esto se realiza replanteando, e interpretando, el problema original : interesa conocer la cantidad de luz que llega a cierta distancia.

f. Se clasifican las cuatro cantidades identificadas en variables y en constantes (o mejor, parámetros) y se determina cuál es la variable independiente y cuál la dependiente.

Se recuerda el significado de los parámetros como aquellos que definen un sistema en particular. Si en lugar de agua se tuviese alcohol, o gasolina o aceite, el sistema sería distinto y por lo tanto, distintos sus parámetros. Por último, se introduce la simbolización para los parámetros y las variables : A, para la variable dependiente (la cantidad de luz que llega al final de recorrer "cierta" distancia); A_0, para la cantidad inicial de luz que incide en el agua y x para la variable independiente (distancia recorrida por la luz en el agua).

g. Se escribe el valor de la variable dependiente en términos de la independiente y de los parámetros. Esto lleva a encontrar el n-ésimo término de una sucesión, que en general, tendrá, para las diez situaciones enunciadas en la ACTIVIDAD " IMPORTANCIA DEL NUMERO e ", la siguiente forma:

$$A_0\left[1 \pm \frac{\mu x}{n}\right]^n$$

donde A_0 es la cantidad de luz original que incide en el agua, x representa la distancia a la que se quiere determinar la cantidad de luz que atraviesa el agua y μ la " absorbencia " del agua.

h. Se introduce un " cambio de variable ". Esto, que antes no se ha explicado, se hace detalladamente. El cambio es el siguiente:

$$\pm\frac{\mu x}{n} \rightarrow \frac{1}{m}, \quad m, \text{ número natural.}$$

De donde, $n = m\mu x$

Con este cambio, la expresión anterior, se transforma en:

$$A_0\left[1 + \frac{1}{m}\right]^{\pm m\mu x}$$

que, utilizando propiedades de los exponentes, se puede escribir como :

$$A_0\left[\left[1 + \frac{1}{m}\right]^m\right]^{\pm\mu x}.$$

El objeto del cambio de variable es poner, de manera clara, el término que después del proceso de límite es el número **e**.

i. **Explicar el proceso al límite cuando** $m \rightarrow \infty$. En virtud del proceso de límite, la expresión que se obtuvo en el inciso h nos conduce a la siguiente expresión

$$A_0 e^{\pm\mu x}$$

para la variable dependiente. En este inciso hay que pedirle a los estudiantes que acepten aquello que de momento no se puede justificar.

De esta manera se lleva a cabo la deducción de la relación funcional que existe entre la variable independiente x, los parámetros A_0 y μ con la variable dependiente A. Se ha pues, encontrado, un ejemplo de función exponencial :

$$A(x) = A_0 e^{\pm\mu x}$$

Hay puntos que lo más seguro es que queden oscuros a los estudiantes : el cambio de variable posiblemente les parezca un " acto de magia "; las propiedades de límites que se han utilizado; pero, sobre todo, el hecho de que la sucesión $(1 + \frac{1}{n})^n$ sea convergente y que sea, precisamente e su límite. La explicación a todas estas lagunas se haya en que suplirlas, llevaría demasiado tiempo.

j. Extender la función

$$A(x) = A_0 e^{\pm\mu x}$$

a las restantes nueve situaciones mencionadas. En este punto, el profesor interpreta A, x, A_0 y μ de acuerdo a las diferentes situaciones. En cada una de ellas, las magnitudes anteriores tienen significados diferentes. Para dejar en forma más explícita lo anterior, el profesor, ayudado por los alumnos, llena una tabla como la que se presenta a continuación:

	x	A	A_0	μ
Interés compuesto	Tiempo	Monto total	Inversión inicial	Interés anual
Descomposición radiactiva.	Tiempo	Material restante	Cantidad inicial de material	Cantidad de material por unidad de tiempo
⋮				

k. La " función exponencial ", un caso particular de funciones " exponenciales " . El profesor explica que la función

$$A(x) = A_0 e^{\pm \mu x} ,$$

es un caso particular de relaciones funcionales de la forma

$$F(x) = Y_0 a^{kx}$$

donde Y_0, a y k son constantes.

En este momento el profesor puede dar la relación generalizada, que se deriva de la leyenda del ajedrez,

$$y = 2^x,$$

como otro ejemplo de relación exponencial.

1. **La función $y = e^x$ y su gráfica.** Finalmente, el profesor presenta a la función

$$y = e^x$$

como un caso particular de la relación

$$y = e^{-kx}$$

e indica cómo construir su gráfica. Para esto último, el profesor recuerda a los alumnos cuatro cosas :

1. La construcción del Sistema de Coordenadas Cartesiano.
2. La obtención de una tabla de valores a partir de una ecuación.
3. La representación gráfica de una colección de parejas ordenadas en un Plano Cartesiano.
4. La obtención de la " gráfica " de una ecuación.

Los procedimientos para realizar las cuatro acciones anteriores se encuentran cuando el profesor formula una serie de preguntas, en forma oral; los alumnos las contestan y el grupo discute las respuestas dadas. Las preguntas que el profesor formula, una después de otra, son las siguientes:

1. ¿ Cómo se construye un Sistema de Coordenadas Cartesiano ?
2. ¿ Qué se entiende por " tabular " una ecuación ?
3. ¿ Cómo se realiza la " tabulación " de una ecuación ?
4. ¿ Qué son de una ecuación, cada una de las parejas de valores que resultan de su tabulación ?
5. ¿ Cómo se representa una " pareja de valores numéricos " en un Plano Cartesiano ?

6. ¿ Qué se tendría que hacer para obtener " más puntos " entre dos que se hayan graficado ?
7. ¿ Qué suposición se hace cuando los puntos que representan a las parejas de valores resultantes de una tabulación, se unen por una línea continua, para obtener la "gráfica " de la ecuación.

ACTIVIDAD II-2-26 **LA FUNCION EXPONENCIAL vs LA FUNCION POTENCIA**

Una de las características fundamentales de la **función exponencial** es la " rapidez " con la que crece : primero muy " lentamente ", y después muy " aprisa ". Sin embargo, la última expresión no dice nada o dice muy poco. Tiene más sentido cuando la función exponencial se " compara ", por ejemplo, con la **función " potencia "**.

Por sus cursos anteriores, los alumnos conocen, por un lado, funciones de la forma :

$$f(x) = x^n$$

y, por otro, el método de diferencias finitas. Este último lo utilizaron para encontrar la expresión polinomial asociada a un conjunto de datos numéricos.

Los propósitos de esta **ACTIVIDAD** son varios :

- Que el alumno reconozca las particularidades del crecimiento de la función exponencial, comparado con el de la función potencia.
- Que el alumno interprete geométricamente un valor de la variable independiente, un valor de la variable dependiente, una diferencia de valores de la variable independiente, una diferencia de valores de la variable dependiente.
- Que el alumno recuerde el significado algebraico de las coordenadas del punto donde dos gráficas se cortan.

- Que el alumno recuerde el procedimiento para tabular una expresión algebraica.

- Que el alumno recuerde la forma en la cual se grafica una tabla de valores.

- Que el alumno interprete geométricamente, la diferencia en valores que exhiban distintas relaciones funcionales para el mismo valor de la variable independiente.

- Que el alumno infiera, a partir de un conjunto de gráficas trazadas en el mismo Plano Cartesiano, la diferencia en magnitud que muestran las variables dependientes de las diferentes gráficas, para un intervalo de valores de la variable independiente.

Muchos de los aspectos que en esta ACTIVIDAD se abordan, se han presentado con anterioridad (en otros cursos) a los alumnos. Por tal razón, la ACTIVIDAD se lleva a cabo en dos partes. En la primera parte, los alumnos contestan, en forma individual, el CUESTIONARIO que a continuación se reproduce y, en la segunda parte, se discuten grupalmente las respuestas que los alumnos dieron al cuestionario. En esta discusión, el profesor plantea la pregunta, algún alumno la contesta y el grupo discute la respuesta hasta que se llega a la que es correcta. Las preguntas se abordan en orden, y no se presenta la siguiente hasta que no se responde correctamente la anterior.

Cuestionario II-2-15

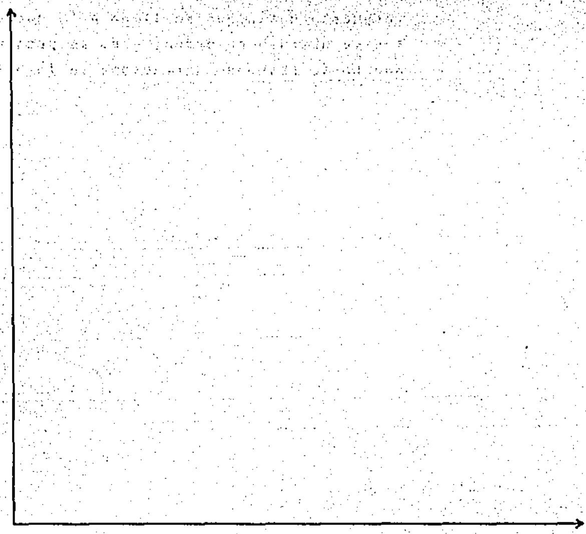
LA FUNCION EXPONENCIAL vs LA FUNCION POTENCIA

Pregunta 1. Completa la Tabla siguiente. Los números que aparecen en la primera hilera corresponden a los valores de la variable independiente.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x) = 12x$									
$g(x) = 6x^2$									
$h(x) = x^3$									

Pregunta 2. Construir las gráficas (hasta el valor $x = 6$) que se obtiene a partir de la tabla anterior. (Usar una escala mayor para la variable independiente que aquella usada para la variable dependiente)

Respuesta:



Pregunta 3. En la gráfica que corresponde a $g(x) = 6x^2$, haz la representación geométrica (utilizando un color rojo) de $x = 2$, $x = 5$.

Pregunta 4. En la gráfica que corresponde a $g(x) = 6x^2$, haz la representación geométrica (utilizando un color azul) de $g(x) = 2$, $g(x) = 3$.

Pregunta 5. En la gráfica que corresponde a $g(x) = 6x^2$, haz la representación geométrica (utilizando color amarillo) de $x_2 - x_1 = 2-1$, donde $x_2 = 2, x_1 = 1$ y de $x_2 - x_1 = 6 - 5$, donde $x_2 = 6$, $x_1 = 5$.

Pregunta 6. En la gráfica que corresponde a $g(x) = 6x^2$, haz la representación geométrica (utilizando un color verde) de $g(1) - g(0)$, $g(2) - g(1)$, $g(3) - g(2)$, $g(4) - g(3)$, $g(5) - g(4)$, $g(6) - g(5)$.

Pregunta 7. ¿ Qué coordenadas tiene el punto donde $f(x)$ corta a $g(x)$?

Respuesta :

Pregunta 8. ¿ Qué coordenadas tiene el punto donde $f(x)$ corta a $h(x)$?

Respuesta :

Pregunta 9. ¿ Qué coordenadas tiene el punto donde $g(x)$ corta a $h(x)$?

Respuesta :

Pregunta 10. Observa las gráficas en el intervalo de 0 a 2 para la variable independiente. ¿ Qué gráfica es "mayor", cuál "menor" y cuál es "intermedia"?

Respuesta :

Pregunta 11. Observa las gráficas en el intervalo de

2 a 3.46 para la variable independiente. ¿ Qué gráfica es "mayor", cuál "menor" y cuál "intermedia" ?.

Respuesta :

Pregunta 12. Efectuar lo mismo que la pregunta anterior, pero ahora para el intervalo de 3.6 a 6 .

Respuesta :

Pregunta 13. Realizar lo mismo que la pregunta anterior, pero ahora para el intervalo de 6 a $+\infty$.

Respuesta :

Pregunta 14. ¿ Qué significan, algebraicamente, las coordenadas del punto donde dos gráficas se cortan ?

Respuesta :

Pregunta 15. Para cada una de las funciones $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, encontrar la diferencia entre valores consecutivos de las funciones, y después la "diferencia" de las "diferencias" y así sucesivamente.

Respuesta :

$f(x)$

$f(0)$ = ____

$f(1)$ = ____

$f(2)$ = ____

$f(3)$ = ____

$f(4)$ = ____

$f(5)$ = ____

$f(6)$ = ____

$f(7)$ = ____

$g(x)$

$g(1)$ = ____

$g(2)$ = ____

$g(3)$ = ____

$g(4)$ = ____

$g(5)$ = ____

$g(6)$ = ____

$g(7)$ = ____

$h(x)$

$h(1)$ = ____

$h(2)$ = ____

$h(3)$ = ____

$h(4)$ = ____

$h(5)$ = ____

$h(6)$ = ____

$h(7)$ = ____

Pregunta 16. ¿ Cuál es el "significado" de las "diferencias" y de las "diferencias" de las "diferencias", etc. ?

Respuesta :

Pregunta 17. Completar la siguiente TABLA. Los números que aparecen en la primera columna representan los valores asignados a la variable independiente. Los encabezados de las otras cuatro columnas, son funciones diferentes.

x	$f(x) = x$	$g(x) = x^2$	$h(x) = x^3$	$j(x) = 2^x$
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				

x	$f(x) = x$	$g(x) = x^2$	$h(x) = x^3$	$j(x) = 2^x$
9				
10				
11				
12				

Pregunta 18. En base a la TABLA anterior, completar lo siguiente:

Las coordenadas de los puntos donde la gráfica de $f(x)$ corta a la de $g(x)$ son: ____________________

Las coordenadas de los puntos donde la gráfica de $f(x)$ corta a la de $h(x)$ son: ____________________

Las coordenadas de los puntos donde la gráfica de $f(x)$ corta a la de $j(x)$ son: ____________________

Las coordenadas de los puntos donde la gráfica de $g(x)$ corta a la de $h(x)$ son: ____________________

Las coordenadas de los puntos donde la gráfica de $g(x)$ corta a la de $j(x)$ son: ____________________

Las coordenadas de los puntos donde la gráfica de $h(x)$ corta a la de $j(x)$ son: ____________________

Pregunta 19. Observa la TABLA de las tabulaciones. Al comparar los valores de las funciones $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x^3$, para valores de x mayores que uno; ¿ qué función, de las tres, tiene los valores más grandes ?, ¿ qué función, de las tres, tiene los valores más pequeños ?, ¿ qué función, de las tres, tiene valores "intermedios" ?

Respuesta : ____________________

____

____

Pregunta 20. En base a la TABLA de tabulaciones, completar lo siguiente, de tal forma que la afirmación que resulte sea verdadera :

A partir de $x =$ ____, la función $g(x)$ es mayor que $f(x)$.

A partir de $x =$ ____, la función $h(x)$ es mayor que $f(x)$.

A partir de x = ____, la función $h(x)$ es mayor que $g(x)$.

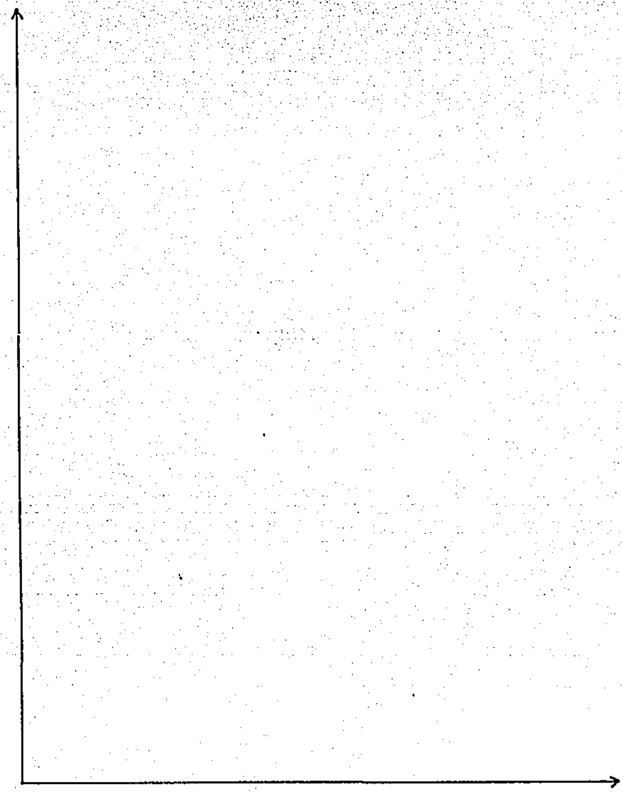
A partir de x = ____, la función $f(x)$ es mayor que $f(x)$.

A partir de x = ____, la función $f(x)$ es mayor que $g(x)$.

A partir de x = ____, la función $f(x)$ es mayor que $h(x)$.

Pregunta 21. Construir las gráficas correspondientes a la TABLA de tabulaciones de la Pregunta 17.

Respuesta :



Pregunta 22. *Construir las diferencias, hasta donde sea posible, para cada una de las funciones tabuladas en la TABLA de la Pregunta 17.*

Respuesta :

$f(x)$

$g(x)$

$h(x)$

$j(x)$

Pregunta 23. ¿ Cómo se relacionan las " diferencias " encontradas, con las gráficas de las funciones ?

Respuesta :

Pregunta 24. ¿ Qué particularidad exhiben las "diferencias" para la función exponencial ?

Respuesta :

Pregunta 25. ¿ Qué se puede decir, en cuanto al "crecimiento" que muestra la función exponencial, comparado con el de las otras funciones ?

Respuesta :

ACTIVIDAD II-2-27 PERIODO DE DUPLICACION EN LA FUNCION EXPONENCIAL

Una función exponencial tiene la propiedad de duplicar el valor de la variable dependiente en períodos constantes de la independiente. No es posible, en el curso, probar este hecho. Se requiere "saber" logaritmos y cómo desarrollar en series una función, en particular la logarítmica. Aplicando estos conocimientos se llega a la conclusión de que para una exponencial cualquiera, el período de duplicación es igual a 70 dividido entre el "índice de crecimiento de la función".

No obstante lo anterior, para la " situación concreta " que más adelante se abordará, es muy importante conocer tal concepto. Por tal razón, el propósito de esta ACTIVIDAD es mostrarlo de manera muy simple.

La ACTIVIDAD se desarrolla en dos partes. En la primera, los alumnos contestan el CUESTIONARIO que se reproduce en la siguiente página. En la segunda parte se realiza lo siguiente :

* Se discuten grupalmente las respuestas que los alumnos dieron al CUESTIONARIO y se llega a la siguiente conclusión :

  + De las funciones mostradas, solamente la exponencial tiene un período de duplicación constante.

* El profesor explica el por qué el período de duplicación es igual a $\frac{70}{\mu}$. Para ello, deriva el resultado anterior, pero deja muy claro lo que aún no comprenden los estudiantes.

Cuestionario II-2-16

PERIODO DE DUPLICACION EN LA FUNCION EXPONENCIAL

La función exponencial presenta una propiedad que otras funciones no tienen : el valor de la variable dependiente se duplica a intervalos constantes de la independiente. Para que tengas una idea de lo anterior, lee con atención las siguientes preguntas y contéstalas, en el espacio indicado.

Pregunta 1. *La función $y = 2x + 1$, en $x = 2$, adquiere el valor $y = 5$; en $x = 4$, $y = 9$ y en $x = 10$, $y = 21$. ¿Para qué valores de x, el valor de la función será el doble de los anteriores ?*

Respuesta :

Pregunta 2. *La TABLA siguiente registra algunos valores de la función $y = x^2$, para otros tantos valores de la variable independiente,*

x	1	3	5	7
$y = x^2$	1	9	25	49

completa la siguiente TABLA encontrando para qué valores de x, la función adquiere el doble de los valores anotados anteriormente:

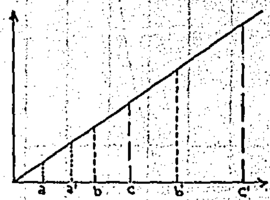
x				
$y = x^2$	2	18	50	98

Pregunta 3. *Las siguientes dos tabulaciones corresponden a las funciones $y = 2x + 3$, $y = 2x^2$. Observa que en cada TABLA los datos están encerrados en cuadros, por parejas. En cada pareja la segunda ordenada es el doble que la primera. Encuentra la diferencia entre la segunda abscisa y la primera para cada par y anótalo en el espacio indicado.*

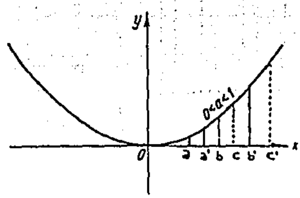
Diferencia entre abscisas	x	$f(x) = 2x + 3$
	1	5
	3.5	10
	3	9
	7.5	18
	2	7
	5.5	14
	4	11
	9.5	22

Diferencia entre abscisas	x	$f(x) = 2x^2$
	1	2
	1.4	4
	2	8
	2.8	16
	4	32
	5.7	64
	3	18
	4.2	36

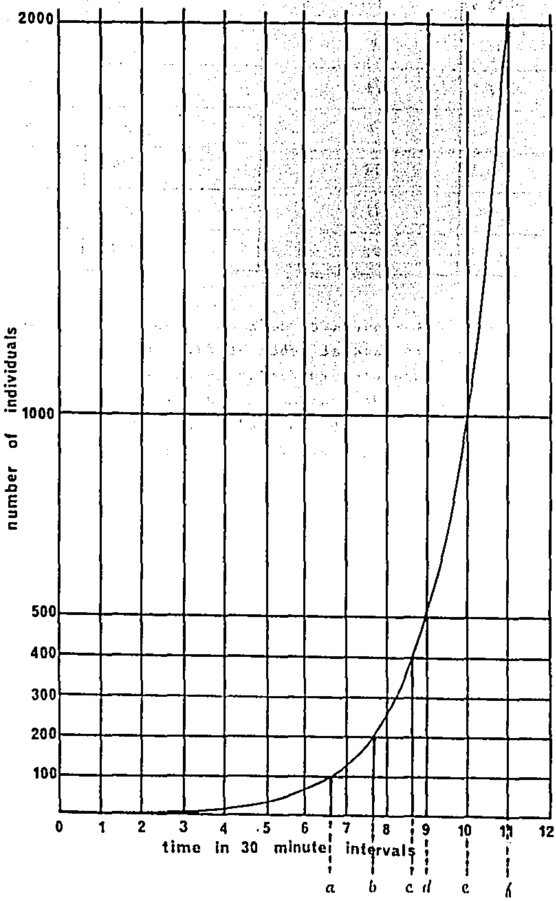
Problema 4. En las siguientes gráficas, las ordenadas de a', b', c' son el doble de las ordenadas de a, b, c. Encuentra la distancia entre las abscisas que corresponden a las parejas de ordenadas: a con a', b con b', c con c'. Escribe tu resultado, en el lugar indicado:



Distancia aa' ______
Distancia bb' ______
Distancia cc' ______



Distancia aa' ______
Distancia bb' ______
Distancia cc' ______



"Teacher's resource book and guide", part 1, physics, Second Edition, PHYSICAL SCIENCE STUDY COMMITTEE, D.C.HEATH AND COMPANY, 1965.

Duración del intervalo:

ab ________

bc ________

de ________

ef ________

ACTIVIDAD II-2-28 COMBINACION DE EXPONENCIALES ENTRE SI Y CON OTRO TIPO DE FUNCIONES

La función

$$y = \frac{1}{1 + x^2}$$

se puede pensar como el cociente de dos funciones. A la vez, el denominador como una suma.

Al combinar funciones "elementales", mediante las operaciones de suma, resta, ... etc., la función resultante posee características muy distintas a las originales.

Lo que sucede con las funciones polinomiales se presenta, también, con las exponenciales. Por tal razón, el propósito de esta ACTIVIDAD es que los estudiantes, a través del trazado de gráficas, se den cuenta como el comportamiento de la gráfica que resulta de una combinación de exponenciales, es completamente diferente al que exhiben en forma individual.

La ACTIVIDAD se divide en dos partes. En la primera, los alumnos trabajan individualmente, en el material que en la siguiente página se reproduce y, en la segunda, se discuten grupalmente los resultados obtenidos, hasta llegar a las respuestas correctas.

Cuestionario II-2-17

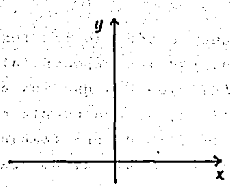
COMBINACION DE EXPONENCIALES ENTRE SI Y CON OTRO TIPO DE FUNCIONES

Problema 1. La función

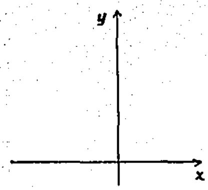
$$y = \frac{1}{1 + x^2}$$

se puede pensar como el cociente de dos funciones: la función constante 1 y la parábola $1 + x^2$. "Bosqueja", es decir, haz un dibujo aproximado, de las gráficas de la función constante 1 y de la parábola $1 + x^2$, en los siguientes sistemas de coordenadas :

Respuesta :



Gráfica de la función constante $y=1$



Gráfica de la parábola $y = 1 + x^2$

Problema 2. Completa la siguiente tabulación para la función

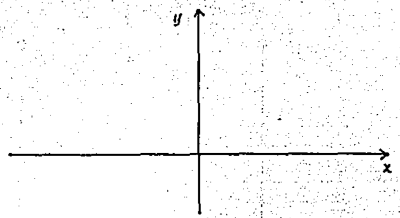
$$y = \frac{1}{1 + x^2}$$

x	0	1	2	3	4	-1	-2	-3	-4
y									

Observa que al realizar la tabulación en la "última" operación que se hace se divide la ordenada de la función constante uno, entre la ordenada de la parábola $y = 1 + x^2$.

Problema 3. Construye la gráfica que corresponde a la tabulación anterior.

Respuesta :



Problema 4. Completa las TABLAS siguientes en las que se realiza, paso a paso, la tabulación de la función

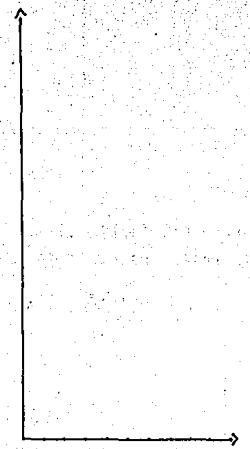
$$y = \frac{10 \cdot 2^x}{1 + 2^x} - 5$$

Respuesta :

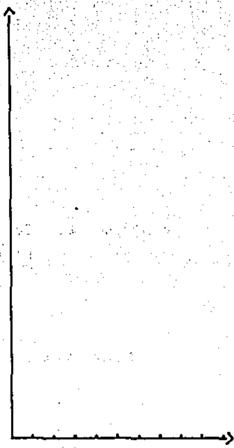
x	2^x	$10 \cdot 2^x$	$1 + 2^x$	$\frac{10 \cdot 2^x}{1 + 2^x}$	$y = \frac{10 \cdot 2^x}{1 + 2^x} - 5$
0					
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

Problema 5. "Bosqueja", en los siguientes sistemas de coordenadas, las gráficas de las funciones 2^x, $10 \cdot 2^x$, $1 + 2^x$.

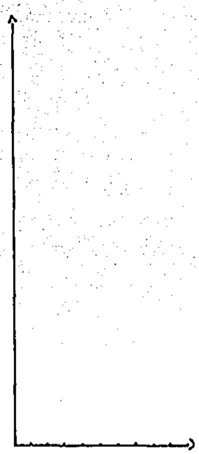
Respuesta :



Gráfica de 2^x



Gráfica de $10 \cdot 2^x$

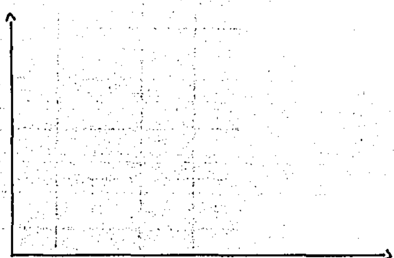


Gráfica de $1 + 2^x$

Problema 6. Traza la gráfica, utilizando los resultados del Problema 4, que corresponde a la función

$$y = \frac{10 \cdot 2^x}{1 + 2^x} - 5$$

Respuesta :



ACTIVIDAD II-2-29 MODELOS MATEMATICOS : PRIMERA PARTE

El término "modelo" se utiliza en muchos contextos, para designar cosas de lo más variadas : persona cuya fotografía ilustra revistas o calendarios; individuo digno de imitarse; prenda de vestir muy usada en cierta época; ... etc . Por otro lado, normalmente se utiliza acompañada de un calificativo : modelo material, modelo mental, modelo formal, ...etc .

Para las " matemáticas aplicadas " el concepto modelo matemático es central. En él se incluyen toda la gama de ecuaciones a las cuales es posible encontrar alguna "interpretación", a los números que contienen, así como a las relaciones que establecen. También se habla de modelos geométricos : en la escuela primaria nos hacen construir algunos, con cartón y goma.

El propósito de esta ACTIVIDAD es "recuperar" el concepto que los estudiantes tienen de lo que es un "modelo". Una vez que ellos "muestren" lo que entienden por "modelo", habrá que propiciar una transformación de esta idea, de suerte que logren "reconstruir" su concepto para llegar a tener el de modelo matemático, que es el importante para nosotros.

La ACTIVIDAD está dividida en dos partes. En la primera, los estudiantes, en forma individual, contestan el cuestionario que se reproduce en la página siguiente. En la segunda parte se discuten grupalmente los resultados obtenidos. Para esta parte se sugiere que primero se identifiquen y describan la mayor cantidad posible de situaciones en donde se utilice el concepto de modelo y después se intente una caracterización elemental de éste.

Cuestionario II-2-18

CONCEPTO DE "MODELO"

El término "modelo" con seguridad lo has escuchado y muy probablemente lo hayas utilizado. El propósito de esta ACTIVIDAD es que recuerdes en qué circunstancias, en dónde, en qué situaciones se utiliza, correctamente, el término. Recuerda: los nuevos conocimientos que uno adquiere se construyen tomando como punto de partida los que ya poseemos. Con tal fin, lee con atención las siguientes preguntas y contéstalas en el lugar indicado.

Pregunta 1. Enumera, las más que puedas, situaciones, personas u objetos, en las cuales se utiliza el concepto "modelo".

Respuesta :

Pregunta 2. Explica el significado que tenga para tí el término "modelo".

Respuesta :

ACTIVIDAD II-2-30 MODELOS MATEMATICOS : SEGUNDA PARTE.

Esta ACTIVIDAD está dedicada a realizar una serie de cinco lecturas, tanto en forma individual como grupal, con el propósito de que los alumnos se familiaricen con los siguientes aspectos relacionados con lo "modelos" -en general- y con los matemáticos, en particular:

* Objeto de un modelo.
* Modelo, en el sentido de tipo o diseño.
* Modelo, en el sentido de algo "ejemplar".
* Modelo a escala de :
    + Objetos materiales, ya sea reales o imaginarios.
    + Experimentos que desaceleran artificialmente procesos químicos o biológicos.
    + Procesos sociales.
* Características de modelos a escala:
    + ... es siempre modelo de algo.
    + ... se realiza para servir a cierta finalidad.
    + ... es una representación de la cosa, real o imaginaria.
    + El uso de un modelo a escala consiste en que "se lean" en él propiedades del original a partir de las propiedades del modelo directamente observables.
    + En un modelo a escala, algunos de sus rasgos carecen de importancia, en tanto que otros son esenciales para la representación.
    + En un modelo a escala existen convenciones de interpretación, esto es, maneras propias de "leer lo que dice" el modelo.
    + Las convenciones de interpretación descansan en la identidad parcial de propiedades unidas con la invarianza de proporcionalidad.
* Modelos analógicos.
    + Semejanzas y diferencias entre modelos a escala y modelos analógicos.
* Modelos matemáticos.
    + Características.
    + Procedimiento que se sigue, teóricamente, para su construcción.
* Modelo verbal y modelo formal.

Las LECTURAS que se realizan, en el orden en que se hacen, se reproducen a continuación.

LECTURA 11-2-3

La formulación de modelos

El 12 de diciembre de 1966, en una campaña publicitaria, el *Scientific American* puso un gran anuncio en *The New York Times* convocando la Primera Competencia Internacional de Aviones de Papel. El anuncio, medio en serio medio en broma, comparaba el diseño de los aviones supersónicos con la creación de aviones de papel; invocaba a Leonardo da Vinci como santo patrón de los aviones de papel y ofrecía premios (trofeos llamados El Leonardo) a los ganadores de cuatro categorías: tiempo de vuelo, distancia volada, acrobática y papiroflexia. Se inició la competencia. En unas horas las oficinas de la revista estaban atestadas de periodistas. Al cabo de tres días el *Chronicle* de San Francisco le dedicaba la primera plana al concurso; después de 15 días aparecían artículos editoriales en los que se encomiaba el concurso en más de cien periódicos norteamericanos. El día de los últimos vuelos, los registrados en el Salón de la Ciencia de Nueva York, el 21 de febrero de 1967, eran 11.851 aviones de papel, procedentes de 28 países, incluyendo Liberia y Suiza. Entre los fabricantes de esos aeroplanos había niños de escuela, científicos y hasta ingenieros aeronáuticos. El avión más pequeño medía 2 × 0,0007 mm., mientras que el mayor medía 3 metros de largo. Muchos de ellos eran modelos ingeniosos, bien pensados y raros.

Aquel concurso, con todo lo que traía de sorpresa y de respuesta entusiasta, constituyó una paradoja reveladora de cómo piensan los científicos y los técnicos. Primer elemento de la paradoja: la fabricación de modelos es una respuesta profunda e instintiva del hombre para captar el mundo. Todo el mundo ha hecho aviones de papel, sin duda alguna. Pero todos fabricamos modelos de muchas clases en todo momento. Los niños hacen modelos del mundo físico y técnico que conocen, construyendo y reconstruyendo con arcilla, barro y agua, ladrillos y bloques. Los niños modelan el mundo *social* que los rodea y se autoenseñan a entenderlo, experimentando y explorando sin riesgo, jugando con muñecas. Este proceso es tan trascendental para el desarrollo del niño, que una de las herramientas más importantes de la psiquiatría infantil, cuando se advierte que algo no funciona en el ajuste de un niño a su mundo social, es la observación de cerca del modelo de su vida que el niño brinda al jugar con una familia de muñecas. Los adolescentes pasan incontables horas llenas de paciencia construyendo modelos históricos o funcionales, de madera, papel o cuerdas y es precisamente entonces cuando aparece la vocación científica. De igual manera, en la vida adulta la gente realiza modelos, aunque a menudo lo hace de forma que no son obvios de inmediato. Aquí los científicos y los tecnólogos son una excepción porque ellos realizan los modelos con una seriedad formal y deliberada como instrumentos profesionales.

El segundo elemento de la paradoja, el modelado, por serio que sea, contiene cierto elemento de juego. Al observar al niño este dato se invierte: para el niño, absorto en su juego, el modelado tiene un aspecto esencial de seriedad, es un modo de captar cómo son las cosas. Para el científico o el ingeniero, por el contrario, la seriedad del modelado supone algo del entretenimiento juvenil. Los científicos no dejan de decirse unos a otros: «Juguemos a esto», y el modelado equivale a la quintaesencia del juego con el modo como podrían funcionar y como podrían ser las cosas. Juego y seriedad: su fusión genera la energía que la competencia de aviones de papel del *Scientific American* supo aprovechar. Desde luego, aquella competencia obtuvo una respuesta entusiasta. Pensándolo bien, aquella competencia invitó a los participantes a que se divirtieran modelando modelos.

Nicolás II, zar de todas las Rusias, cada año para Pascua de Resurrección, le obsequiaba a su esposa un huevo decorado. Hasta hoy los rusos tienen la costumbre de regalarse por Pascua Florida huevos de madera (simples artesanías campesinas). La familia del emperador mandaba fabricar *sus* huevos de Pascua a los joyeros de la corte, Fabergé —fabulosos trabajos del arte de los miniaturistas—. En la Pascua de 1901 Nicolás dio a su esposa un huevo de oro, plata, piedras preciosas y esmaltes, de 25 centímetros de alto, con una bisagra de oro. Dentro había un modelo de un tren expreso del ferrocarril transiberiano: locomotora, ténder, cinco vagones de pasajeros con una iglesia viajante; el juguete se podía sacar y ponerlo a funcionar dándole cuerda. Los cuerpos eran de platino y oro y la ingeniería con un acabado perfecto hasta su último detalle: puertas que se abrían, ventanas cortadas de cristal de roca, los interiores de los vagones completamente amueblados, y hasta con los letreros de «No fumar» en uno de ellos, con letras tan diminutas que sólo se podían leer con la ayuda de un microscopio.

Si se escucha a los científicos hablar sobre su trabajo, cualquiera que sea el campo —física teórica, ingeniería química, ecología, psicología social, economía— hablarán de sus modelos. Emplean la formulación de modelos en muchos sentidos que se superponen. Pero nunca se refieren a algo completo en todos los detalles posibles, como el tren de juguete del zar Nicolás. En ciencia e ingeniería lo que siempre se da a entender es que el modelo hace a un lado los detalles triviales y se concentra en las características importantes útiles y trascendentales de la cosa modelada, los hechos que realmente marcan la diferencia. Escúchese cómo hablan los científicos que ganan el Premio Nobel al explicar su trabajo. Como parte de las ceremonias del Nobel en Estocolmo, en diciembre de cada año todos los ganadores del premio hacen una alocución sobre su obra y hay un sorprendente número de esas alocuciones que han versado sobre la formulación de modelos. «El arte de la construcción de modelos es la exclusión de partes reales pero insignificantes del problema», dijo Philip Anderson, físico del estado sólido, de los *Bell Telephone Laboratories*, en su alocución para el Nobel de 1977. La explicación que dio Anderson constituía también un aviso: «La construcción de modelos comporta peligros para el constructor y para el lector —dijo—. El constructor puede pasar por alto algo que sea realmente de importancia, mientras que el lector, producto de una computación demasiado precisa, puede tomar literalmente un modelo esquemático, cuya meta principal sea sólo la demostración de una posibilidad.»

En la física de Anderson el modelo se expresa como un conjunto de ecuaciones, apenas una página de relaciones simbolizadas. En el otro extremo Ralph Nelson, fisiólogo de la Clínica Mayo de Minnesota, nos dijo: «Pienso que el oso aletargado es un modelo perfecto para estudiar el problema de cómo el ser humano metaboliza grasas y proteínas, porque el oso se aletarga sin que baje su temperatura y puede pasar cinco meses sin quemar sus proteínas, lo que no pueden hacer los seres humanos, ni siquiera durante cinco días.» De un conjunto de ecuaciones, a un animal viviente: sin embargo, ambos pueden ser modelos de otra cosa, en el sentido en el que los científicos y los ingenieros hablan de modelos, porque cada uno, a su manera, aisla los hechos de aquello que va a ser formulado como modelo que marcan la diferencia. Empleando los términos del capítulo 3, sobre el cambio, cabe decir que lo que se modela en ciencia y tecnología son *parámetros*. La construcción de modelos, por lo tanto, puede ser un modo de realizar un experimento. Curiosamente, la construcción de modelos puede constituir un modo de crear una teoría.

La función de los objetos; el comportamiento de los sistemas complicados; una especie de construcción de teorías. El modelado actúa a esos tres niveles.

¿Volará? El avión de papel es el prototipo de un modelo que se emplea para predecir la función de un objeto. El primer túnel aerodinámico fue construido en 1871 por dos ingenieros británicos que lo emplearon para experimentar la forma de las alas. Los hermanos Wright, antes de su primer vuelo con motor, construyeron planeadores en su taller de bicicletas de Dayton, Ohio, y los experimentaron con los vientos constantes del océano, en las dunas de Kitty Hawk, en Carolina del Norte. El planeador de los Wright, construido en 1901, resultó inestable y difícil de controlar. Al reconstruirlo aprendieron que los datos de que disponían sobre la función aerodinámica de las superficies aladas y de las cometas estaban peligrosamente equivocados. (El hombre que había compilado las tablas murió al chocar su aeroplano del que iba colgado.) De regreso en Dayton, los Wright construyeron un pequeño túnel aerodinámico: con estabilizadores construidos a base de radios de ruedas de bicicleta, midieron las fuerzas que la corriente de aire ejercía sobre más de 60 modelos de alas de diferentes formas y grosores. Partiendo de sus propios datos, diseñaron un nuevo planeador en 1902. Tenía una envergadura de 9,75 metros, la mitad de la envergadura del avión construido el año anterior y pesaba más de 45 kilogramos. Era el aeroplano más grande que jamás había volado. También diseñaron aletas verticales de control, las primeras que se hicieron. Aquella temporada en Kitty Hawk los Wright rompieron todas las marcas de permanencia en el aire. El éxito de aquel diseño y la pericia que habían adquirido para volar un planeador, con equilibrio dinámico —como en una bicicleta cuando no se pedalea—, permitió al año siguiente el primer vuelo con motor.

Los Wright no eran sólo unos inspirados mecánicos de bicicletas. La función de la superficie de un ala depende de cuatro parámetros: peso, empuje, sustentación y roce. Un túnel aerodinámico permite medir dos de esos parámetros, la sustentación y el roce. Sustentación y roce dependen ambos de la forma del ala —su área superficial, arriba y abajo, su curvatura, su grosor y la relación entre longitud y anchura— y el ángulo de ataque contra la corriente de aire. Un ingeniero actual mediría la sustentación y el roce directamente en un modelo del ala con medidores sensibles a pequeñas variantes de las fuerzas que operan sobre el modelo: luego procedería a una escala mayor. Los Wright midieron la sustentación y el roce directamente. Sus estabilizadores de radios de rueda de bicicleta les permitieron averiguar las fuerzas en su relación recíproca y respecto de una superficie plana, en el túnel aerodinámico, para ser comparadas con mediciones que habían efectuado en una superficie plana de tamaño natural en viento constante en Kitty Hawk. Las innovaciones aerodinámicas de los Wright fueron recientemente revisadas por un ingeniero e inventor norteamericano, Frederick Hooven. (Resulta que Hooven fue el ganador en categoría de duración en la Primera Competencia Internacional de Aviones de Papel.) Hooven llegó a la conclusión de que los Wright, por su buen sentido intuitivo en el diseño de sus dispositivos de medición, «evitaron las peores fallas de las pruebas de modelos a pequeña escala: la dificultad de medir fuerzas pequeñas y probablemente inestables y los efectos de escala resultantes de la viscosidad del aire (de lo que quizá los Wright ni se percataron)».

Las ventajas de usar modelos para determinar la función de un objeto son obvias: los modelos son medios de proceder sobre la base de prueba y error, lo que no deja de ser un modo de cometer errores sin grandes costos y con cierta seguridad. Las pruebas que se realizan en tanques con modelos de cascos de yates nuevos a escala de un octavo, para el campeonato de la Copa Americana —modelo que no llega a tener 1,8 metros de eslora sobre la línea de flotación—, puede costar hasta 80 000 dólares; pero el yate de tamaño natural costará un millón de dólares, sin aparejos. Además, existen objetos que han de funcionar bien desde la primera vez y sólo se pueden probar con algún modelo. En el *Jet Propulsion Laboratory* de Pasadena, California, James Blyn, que es a la par ingeniero aeroespacial y especialista en computadoras, colocaba modelos del *Voyager* —la nave espacial no tripulada diseñada para viajar hasta Júpiter y Saturno y más allá— en la computadora del laboratorio. La computadora tomaba primero el modelo como una serie de números; luego Blyn programaba una visualización animada, de manera que la computadora proyectaba sobre una pantalla un dibujo del *Voyager*, que se podía hacer girar; se podía examinar desde cualquier ángulo, simular su actuación e intentar cambios. «El uso de modelos que se hace por computadora permite manipular los objetos en el espacio, como si se tratara de cosas reales o potencialmente reales —dijo Blyn recientemente—. Esto da una idea de lo que parecerán realmente: es mucho más interpretable que una lista de números y desde luego es de mucho mayor interés. La animación hace que el programa interactúe con el ingeniero; es mucho más vivo por el hecho de que se le pueden imponer cambios al modelo con mucha mayor rapidez y ver aparecer los resultados de los cambios con mayor celeridad en la pantalla.» El programa de computación de Blyn lanzó luego el modelo del *Voyager* a través de un modelo del sistema solar, más allá de un modelo de Júpiter. «Imaginamos la perspectiva que el *Voyager* obtendrá al mirar a Júpiter y sus lunas cuando pasemos... y una cosa que esto nos ha permitido hacer fue captar algunos de los problemas que se habrían presentado, como el hecho de que algunas partes del aparato se interpusieran ante el campo de la cámara en ciertos ángulos para captar cosas rápidamente y ajustar los comandos para ubicar la cámara que debíamos enviar.»

Los problemas de la formulación de modelos son menos obvios que sus usos..., hasta que se recuerda el efecto de escala. Aquel modelo de avión de papel, inscrito en la competición, que medía 2 × 0,0007 mm., era una broma desde luego, pero lo que se habían propuesto al fabricarlo era competir en duración, reduciendo el avión a la relación superficie-peso de un vilano o de una mota de polvo. (Pero no ganó.) Peso, empuje, sustentación y roce... pero los dos parámetros que se miden en los túneles aerodinámicos se relacionan exclusivamente con la superficie del modelo. Sin embargo, los ingenieros hallaron pronto que los resultados de hacer funcionar los modelos en túneles aerodinámicos no se equiparaban con lo que ocurría con el avión de tamaño normal.

La razón era una especie distinta de efecto de escala. En 1920 Max Munk, en el *Langley Research Center*, de Virginia, postuló que dado que el modelo que se coloca en el túnel aerodinámico es una reducción del modelo real, las características del flujo de aire también serán diferentes, a menos que se realice un ajuste en el propio aire. Si el modelo fuera, digamos, un veinteavo del tamaño real, se debería probar en un flujo de aire que tuviera veinte veces la densidad normal. Munk estaba invocando observaciones hechas por Osborne Reynolds, ingeniero inglés, en 1883. Mediante experimentos con líquidos en tuberías, Reynolds se había percatado de que la suavidad o turbulencia de una corriente de agua —por ejemplo, al pasar por un obstáculo— depende de varios factores. La turbulencia aumenta con la velocidad del flujo: una roca en el cauce de una corriente presenta más remolinos cuando el agua se mueve con mayor rapidez. La turbulencia aumenta asimismo con el tamaño del objeto que se introduce en la corriente: una roca perturba más una corriente que un guijarro. La turbulencia aumenta con la densidad del material que hay en la corriente. Un fluido «más ralo» no es perturbado tanto por la roca. Pero la turbulencia disminuye con la viscosidad —la tendencia de «pegarse a sí mismo»— de los fluidos: la miel fluiría en torno a la roca con mayor suavidad que el agua*. Y la suavidad o turbulencia del flujo del aire afecta radicalmente a la función de un ala. Así, dijo Munk, la pequeñez del modelo comportaba una reducción en la turbulencia, que podría ser restablecida al construir un túnel cerrado donde el aire se reciclara bajo presión para aumentar la densidad de la corriente de aire. El primer túnel aerodinámico de densidad variable fue construido en Langley en 1923, por el *National Advisory Committee for Aeronautics*, que en 1958 se convirtió en la *National Aeronautics and Space Administration* (NASA). Munk tenía razón.

Modelar vuelos supersónicos exige cálculos excepcionales. Hay pruebas en las que el aire se enfría mediante nitrógeno líquido a −148º C, con lo que se reduce la viscosidad —el cuarto de los factores de Reynolds— hasta tal punto que la turbulencia correspondiente a velocidades supersónicas se puede alcanzar a una velocidad inferior y, por tanto, a un costo relativamente menor de energía al impulsar la corriente de aire. Al probar modelos de barcos en tanques se encuentran problemas de escala similares. Para reducir a escala la resistencia del líquido a la superficie del casco del modelo se le pegan a la proa tiras de papel de lija o por debajo de la línea de agua se le clavan agujas. En el diseño de maquetas, para saber cómo se puede lograr una ventilación eficiente, los arquitectos modelan los movimientos del aire a través de las pequeñas habitaciones, no con aire, sino con una tabla de flujo en una corriente de agua. Los ingenieros que modelan una nueva represa lidian con los mismos problemas del flujo de los líquidos; pero aquí Reynolds se complementa con Galileo puesto que un embalse, lo mismo que una catedral o un rascacielos, presenta también el peligro más común de que la masa de sus materiales aumenta con el volumen —aumenta al cubo— a medida que el modelo se agranda hasta alcanzar la estructura real. El ingeniero carga el modelo de la presa con sacos de arena; simula la presión del fondo del lago que se forma detrás del muro de contención echando mercurio en vez de agua.

El mapa es una especie de modelo. La idea que el niño tiene de un mapa es la de que el mejor será el que esté hecho a mayor escala, el mapa que más muestre, no sólo la calle donde vive sino incluso su casa. Si esa idea se llevara a su conclusión absurda, el mapa se volvería tan grande y detallado como el propio territorio; pero mucho antes perdería su utilidad. En otros casos es fácil hacer que el mapa se ajuste al terreno: «Con la nueva computadora —dice el gerente de ventas— puedo ver el desempeño de

---

* La turbulencia como una relación entre esos cuatro factores se expresa a menudo multiplicando los tres primeros: el tamaño del obstáculo, la velocidad del fluido y la densidad del mismo

$$S \cdot V \cdot D$$

y luego dividiendo ese producto por el cuarto factor, la viscosidad del fluido, factor con el que la turbulencia varía no directa sino inversamente. El resultado es la medida de la turbulencia:

$$T = \frac{S \cdot V \cdot D}{v}$$

Este resultado se llama número de Reynolds. El hecho útil es que las características del flujo en cualquiera de los dos sistemas, independientemente de su tamaño y composición, será semejante si sus números de Reynolds son similares. Para obtener resultados que funcionen en el túnel aerodinámico hay que ajustar los factores de manera que el número de Reynolds se adecue a una situación de tamaño natural.

cada vendedor con cada artículo de la lista la última semana de cada mes.» Y la computadora cortésmente entrega tablas que alcanzan un grosor de un metro y medio.

Quizá los casos más finos, generalmente conocidos, de mapas donde «se excluyen partes reales pero intrascendentes del problema» obedecen a la prescripción, dada por Philip Anderson, sobre la construcción de modelos y son los del sistema del metro de Nueva York y de Londres. Las deliberadas distorsiones de la geografía real hechas por los topógrafos —simplificaciones extremas de los espacios reales de las estaciones y de las curvas de los túneles— producen en cada uno de esos mapas un bello perfil que excluye todo, salvo las relaciones y directrices como las paradas, las líneas y las intersecciones. En el proceso, Manhattan tiene la extensión de una pala de ping-pong; los meandros del Támesis aparecen estilizados; se excluyen los signos de circulación y el resultado es que cada uno de ellos es un plano, no de una topografía, sino de una red con sus nudos: una topología. Y los mapas de los antiguos, con los monstruos y los animales fabulosos en los límites de lo que conocía el cartógrafo, son modelos trazados también de acuerdo con una regla que es la inversa de la de Anderson; esto es, por inclusión de partes irreales pero psicológicamente importantes del problema.

Un modelo del comportamiento de un sistema complicado —el segundo nivel donde la construcción de modelos es esencial para la ciencia y la tecnología— comienza con un mapa. Los datos complejos cuyas interacciones no se entienden del todo se seleccionan y se correlacionan en una forma más o menos tentativa. Luego se «enchufa» el mapa, por así decirlo, y se pone en movimiento: se introducen cambios en ciertos parámetros y se siguen sus interacciones. Donde el modelo de un objeto trata de predecir la función, el modelo de un sistema complejo trata de predecir el *resultado*.

Al suroeste del archipiélago de Japón se encuentra una fisura de 480 kilómetros, que separa la isla principal de Honshu de las más pequeñas de Kyushu y

Shikoku. Esa fisura es el Mar Interior del Japón. Sus salidas están constituidas por tres estrechos. Las tres islas que los limitan son montañosas, surcadas por muchos ríos y sus litorales son muy irregulares. La historia de Japón comenzó en torno al Mar Interior. En sus bordes viven ahora 14 millones de personas. Por todo ese mar hay desperdigadas 3.000 islas e islotes que dividen el mar en mares más pequeños y en bahías, en parte cerradas. Es un mar poco profundo. Hasta mucho después de la Segunda Guerra Mundial sus aguas abundaban en peces. Ahora hay largos trechos de costa plagados de industrias —acererías, astilleros, instalaciones petroquímicas—, mientras que otras partes se conservan como parques nacionales silvestres para siempre. En 1971 se vio que el problema de la contaminación del Mar Interior era grave. Se fundó un instituto para investigar el problema. Los científicos comenzaron trazando un modelo hidráulico del Mar Interior a una escala de 1 a 2.000, reproducción que mide 7.163 metros cuadrados, lo que equivale a todo un hangar de aviación. Para simular el complejo movimiento de las olas se bombea agua al modelo. La acción de las mareas de un día toma en el modelo nueve minutos. Para simular el curso de los contaminantes que llegan de la costa se sueltan tintes o pequeños discos coloreados que flotan. El modelo se observa desde unas pasarelas que hay sobre él y cada variación, cada experimento, es fotografiado. Surgen interrelaciones. Se inventan y se prueban pasos para prevenir o remediar situaciones y se estima su viabilidad, su eficacia en relación con su costo.

Los dos sistemas más complejos para los que se construyen ahora modelos son el tiempo meteorológico y la economía. Las dificultades de predecir una cosa y otra con precisión son notorias y las razones de tales dificultades son semejantes. Es sencillo, aunque laborioso, acumular y cartografiar vastas cantidades de datos sobre lo que sucede en determinados puntos de cada sistema, realizar estadísticas sobre estaciones meteorológicas en Groenlandia, las Bermudas, Cayo Hueso, etc., o sobre las tasas de interés, el optimismo de los consumidores, las compras de máquinas-herramientas... Al medir repetidamente, quizá cada hora cuando se trata del tiempo y cada trimestre en el caso de la economía, se puede graficar la tasa de cambio en cada punto del mapa. Pero determinar cómo interactúan entre sí los cambios que ocurren en los diferentes puntos es algo a todas luces complicado. Ir más allá, ver cómo varían las tasas de cambio y cómo interactúan esas variantes de manera que todo el sistema aminora su marcha, se detiene, se dirige en otra dirección es inmensamente más complicado aún. Sin embargo, algo que fuera menos sofisticado de nada serviría.

Los modelos, por lo tanto, son indispensables. La predicción del curso de un huracán de la costa este de Norteamérica sólo pudo ser posible el día en que Benjamín Franklin, en 1760, se dio cuenta, por un intercambio de cartas entre Filadelfia y un amigo que vivía en Boston, sobre el paso de una reciente tormenta destructiva, de que si bien los vientos del huracán habían azotado cada ciudad desde el noreste, la tormenta entera se había movido en la dirección opuesta, desde el suroeste hacia el noreste. Franklin tenía el principio del modelo que, a partir de la Segunda Guerra Mundial, ha hecho que sea posible, por lo menos, prevenir y evitar catástrofes como la de aquel huracán de principios de septiembre de 1936 que mató a más de 200 personas desde las Carolinas hasta Islandia y Terranova. De manera semejante los economistas necesitan disponer al menos de un modelo rudimentario del sistema económico mundial para predecir el grado de inflación, como la que resultó cuando la Organización de Países Exportadores de Petróleo (OPEP) cuadruplicó los precios del crudo a finales de 1973, con toda la serie de alzas consiguientes. Para pasar más allá del vaticinio de inminentes y grandes desastres, se trate del servicio meteorológico o de la economía, se requiere de modelos más complicados y de mayor tamaño, que sólo son posibles gracias a la computadora.

Todo universitario que ha pasado por la fase de jugar al Monopolio obsesivamente durante unas semanas ha buscado alguna versión del juego económico que se asemejara a la realidad. Cuando yo era universitario, después del primer año el juego del Monopolio se volvió tan insípido que mis amigos y yo ideamos un nuevo juego con Bolsa de Valores, formación de compañías que también aparecían sobre el tablero como jugadores, etc. Lo jugamos una vez, pero abandonamos el intento puesto que al cabo de 14 horas de juego no se perfilaba ningún ganador. Las tiradas requerían demasiado tiempo, las negociaciones entre las movidas eran aún más largas, no podían guardarse secretos ni tener ignorancia parcial y faltaba la emoción de lo inesperado. Para jugar aquel juego se necesitaba de una computadora. Actualmente, al menos existen una docena de modelos de la economía norteamericana que funcionan con computadora. Se está construyendo un modelo de la economía mundial. Esos modelos se iniciaron en los años 50 con el tipo de juego con computadoras como el que ideamos mis amigos y yo y que los jóvenes economistas también empiezan a explorar. En efecto, un libro de gran repercusión entonces fue *Theory of Games and Economic Behavior (Teoría de los juegos y del comportamiento económico),* de John von Neumann, quien poseía una inteligencia profundamente original sobre teoría de información y uso de computadoras, y Oskar Morgenstern, economista. Los modelos económicos actuales ingieren increíbles cantidades de datos; mediante comparaciones repetidas y múltiples de las tendencias determinan qué datos reflejan meramente los cambios más fundamentales y cuáles parecen penetrar más estrechamente en los parámetros de control. Esos modelos permiten entonces que las predicciones se puedan cotejar con lo que realmente acontece para corregir y refinar el modelo. Esos modelos se llaman econométricos. Su desarrollo constituirá sin duda el cambio más importante en la manera en que el género humano maneja los problemas que veremos en este siglo.

Es en alto grado deseable un modelo que permita controlar y ajustar el funcionamiento de la economía nacional y quizá de la mundial. Una computadora que diera esos mismos datos para un mayor control de las personas sería pernicioso. Se han hecho propuestas, una y otra vez, para estructurar una copia computadorizada de la economía, donde se incluya toda transacción —todo cheque que entra a cualquier cuenta bancaria, todo billete cambiado, todo valor o bono comercializado— no sólo para basar las previsiones sobre datos más completos, sino para supervisar fraudes, eliminar evasiones al fisco, etc. Sin embargo, el intento de hacer que el mapa de la economía corresponda al tamaño natural puede ser autodestructivo. Por principio de cuentas, lo que se denomina la «economía alternativa» —los servicios que se pagan al contado, los trabajos extra que también se pagan al contado, los clubes de intercambio de servicios, donde doctores, abogados, pintores de brocha gorda intercambian servicios con otros miembros, no por dinero sino de acuerdo con tablas de intercambio— se han ido desarrollando vigorosamente en el último decenio y se van a multiplicar mucho más a medida que los controles oficiales presionen más. De manera más fundamental, la duplicación de las transacciones de toda la economía en una computadora no sería propiamente un modelo. Los parámetros —y también su utilidad— zozobrarían en sus meras consecuencias, quedarían ahogados, como Philip Anderson previno, en lo «real pero intrascendente».

Donde un modelo de un objeto permite ensayos baratos y errores sin riesgo, un modelo de un sistema complejo puede convertirse en un ejercicio de teorización. En efecto, ese juego incesante entre la predicción y la corrección del modelo es la característica principal de toda teorización en ciencia. Sin embargo, hay modelos que son teorías en todos los sentidos y a pesar de todo son mucho más sencillos que la predicción del tiempo o de la economía mundial por computadora.

En la primavera de 1948 Linus Pauling realizó un modelo que comprendía los resultados de la labor y de la reflexión que había llevado a cabo durante más de 10 años. Su modelo era una teoría sobre un aspecto importante de la naturaleza de la vida misma y sin embargo era algo tan simple como un avión de papel. En aquella época se encontraba en Oxford, dando una serie de conferencias sobre los enlaces que mantienen unidos a los átomos formando moléculas de una u otra determinada sustancia química. Se resfrió y tuvo que guardar cama. Pauling era la autoridad mundial sobre la naturaleza del enlace químico y de las estructuras físicas de las moléculas. Llevaba más de 10 años intrigado por las estructuras de las moléculas de proteínas que son las mayores, las más complejas y las más interesantes de las moléculas de los organismos vivientes y que incluyen las enzimas, los anticuerpos y muchas de las hormonas, así como a las portadoras del oxígeno de la sangre, la hemoglobina. En 1948 se sabía bien que cualquier molécula proteínica está constituida por una larga cadena cuyos eslabones son una secuencia de moléculas componentes, los veintitantos aminoácidos, que son semejantes aunque no idénticos. El laboratorio de Pauling, en el Instituto Tecnológico de California, había acumulado datos en extremo precisos sobre los enlaces químicos dentro de los aminoácidos y entre ellos. Son dimensiones diminutas, casi inimaginables. La longitud del enlace que une dos aminoácidos, por ejemplo, es de 5.000 millonésimas de pulgada. Sin embargo, por la técnica llamada cristalografía con rayos X es posible proyectar los espacios que hay entre las repetidas capas de átomos que se unen dentro de un cristal de una sustancia, agrandados, como un patrón de puntos que quedan plasmados en una película. Los espaciamientos e intensidades de los puntos se pueden leer de nuevo en el cristal: con el patrón y bastantes matemáticas se puede determinar la ubicación tridimensional de cada átomo dentro de la estructura. De esta manera, Pauling y sus colegas habían logrado el espaciamiento exacto de los aminoácidos y las longitudes y los ángulos de los enlaces entre ellos a lo largo de la columna vertebral de la cadena proteínica.

«En Oxford, estando en cama resfriado, me aburrí de leer novelas policíacas —dijo en una conversación en el otoño de 1948, y prosiguió—: Pensé, ¿por qué no reflexiono sobre la estructura de las proteínas? Así que tomé una hoja de papel y dibujé con cuidado una cadena de aminoácidos donde aparecían correctamente las longitudes y los ángulos de los enlaces.» Mientras decía esto le quitó el capuchón a la pluma y trazó una línea en zigzag sobre un papel cualquiera para mostrar más o menos cómo lo había hecho. Aquel zigzag representaba la columna vertebral de la cadena de proteínas. Cada aminoácido componente se extendía formando tres átomos a lo largo de la columna vertebral: zigzag y luego otra vez zigzag. En cada enlace donde se unían, como Pauling sabía en 1948, los átomos que había a cada lado tenían que caer en el mismo plano. Esto quería decir que la cadena sólo podía doblarse cada tercer átomo, donde había un átomo de carbono llamado carbono alfa, el cual se encontraba en la columna vertebral. Mientras charlaba, concluyó el esbozo, lo tomó y lo plegó por uno de los carbonos alfa, como lo había hecho en Oxford hacía 30 años. «Plegué el papel por el átomo de carbono alfa, aquí. Repetí la doblez en paralelo al primero varias veces a través de otros carbonos alfa.» Había tratado de buscar la manera de enroscar la cadena, haciéndola girar por los carbonos alfa, procurando que se formaran enlaces entre los átomos varias veces antes de cerrar el anillo. Por fin, hallé cómo plegar de manera que el átomo de hidrógeno que caía encima del de nitrógeno, aquí, apuntara directamente hacia el átomo de oxígeno que sale del otro átomo de carbono —no en el carbono alfa— en el cuarto residuo de aminoácido removido. Era aquí donde se formaba el enlace.»

Con un colega en Caltech, Robert Corey, Pauling construyó modelos atómicos tridimensionales de la hélice alfa. Efectuaron los modelos con un sistema de componentes que habían inventado empleando perillas y bolas de colores brillantes que representaban los átomos que funcionaban casi como una computadora análoga para prevenir errores. Las formas y tamaños de las perillas eran exactas hasta una milésima de centímetro para representar con precisión los tamaños a los cuales los átomos empiezan a disponerse de otras maneras en las diversas combinaciones: las uniones, a través de las cuales encajan, tenían ángulos y distancias correctas. «Si se tiene el modelo, uno sabe cuáles son las estructuras permisibles —me dijo Pauling—. Los modelos le permiten a uno desechar gran número de estructuras que de otra forma se habrían juzgado posibles. Pero, además, pienso que el máximo valor de los modelos estriba en que contribuyen al proceso de originar nuevas ideas.» ¿Era el modelado una forma de construir teorías? «Sí, así lo creo —dijo Pauling—. Recuerde aquel profesor de matemáticas a quien un colega le preguntó si un alumno debía estudiar matemáticas o una lengua y que repuso: las matemáticas *son* un lenguaje. Y yo diría que los modelos constituyen también un lenguaje. Contienen información y la comunican. Además, la construcción del modelo puede representar el desarrollo de una teoría y con un modelo la teoría será precisa. Si se tienen ideas vagas, confusas, no se podrá construir el modelo porque el modelo ha de ser preciso.»

A finales de aquel invierno de 1950-51 Pauling anunciaba la estructura que había encontrado en las proteínas y le dio el nombre de hélice alfa. Aquel modelo que había empezado como una línea en zigzag en una hoja de papel plegada formando un tubo fue uno de los descubrimientos que le valieron a Pauling el Premio Nobel de Química de 1954.

LECTURA 11-2-4

3. MODELOS

El modelo es una formulación que imita un fenómeno del mundo real y por medio del cual podemos efectuar predicciones. En su forma más sencilla, los modelos pueden ser verbales o gráficos (esto es, libres). En último término, sin embargo, si las predicciones cuantitativas han de ser razonablemente buenas, los modelos han de ser estadísticos y matemáticos (esto es, formales). Por ejemplo, la formulación matemática que refleja los cambios que tienen lugar en una población de insectos, y mediante la cual pudieran predecirse cifras de la población en un momento determinado, se consideraría como un modelo biológicamente útil.

Y si la población en cuestión es una especie pestífera, el modelo podría resultar además económicamente importante.

Las operaciones de los modelos con computadora permiten predecir resultados probables a medida que se cambian parámetros en el modelo, se añaden nuevos o se quitan los anteriores. En otros términos: la formulación matemática puede a menudo "sintonizarse" mediante operaciones de computadora, de modo que resulte mejorada la "adaptación" al fenómeno del mundo real. Y ante todo, los modelos son extraordinariamente útiles como resúmenes de lo que comprendemos acerca del modelado de la situación y sirven, por consiguiente, para delimitar aspectos que necesitan nuevos o mejores datos o principios nuevos. Cuando un modelo no funciona, esto es, cuando proporciona un reflejo deficiente del mundo real, las operaciones de computadora pueden suministrar a menudo indicios acerca de las mejoras o los cambios necesarios. Una vez que el modelo ha demostrado ser un buen reflejo, las oportunidades de experimentación son ilimitadas, puesto que podemos introducir nuevos factores o perturbaciones y ver cómo afectarían el sistema.

Contrariamente a lo que suponen muchos escépticos, cuando se trata de modelar una naturaleza complicada, la información acerca de sólo un número relativamente pequeño de variables constituye a menudo una base suficiente para modelos eficaces, porque es el caso que los "factores clave" o los "factores integrantes" (como los que se examinaron en la sección 2 de este capítulo introductor) dominan o controlan con frecuencia un porcentaje importante de la actividad. Watt, por ejemplo, dice en 1963: "No necesitamos en modo alguno una enorme cantidad de información acerca de muchísimas variables para construir modelos matemáticos reveladores de la dinámica de una población." Cuando subimos al nivel de la naturaleza conjunta, o del ecosistema, este principio debería seguir siendo válido, a condición que las formulaciones utilizadas en el modelo se transporten asimismo a dicho nivel. En resumen, no se supone que los modelos sean copias exactas del mundo real, sino simplificaciones que revelen los procesos clave necesarios para la predicción.

En los capítulos que siguen en la Parte 1 de este libro, los parágrafos encabezados por la palabra *"Enunciado"* son efectivamente modelos "verbales" del principio ecológico en cuestión. En muchos casos presentaremos también modelos gráficos o de circuito y, en algunos, se incluyen formulaciones matemáticas simplificadas para aclarar relaciones cuantitativas. Una introducción a los procedimientos empleados en el modelado matemático se presenta como capítulo final de la Parte 1 bajo el título de "Ecología de Sistemas". La mayor parte de lo que este texto intenta proporcionar son los principios, las simplificaciones y las abstracciones que debemos deducir del mundo real de la naturaleza antes de poder siquiera empezar a construir un modelo matemático del mismo.

1. EL CARACTER DE LOS MODELOS MATEMATICOS

Enunciado

Los símbolos matemáticos proporcionan una taquigrafía útil para describir sistemas ecológicos complejos, y las ecuaciones, por su parte, permiten enunciados formales acerca de cómo propenden los componentes del ecosistema a actuar recíprocamente entre sí. El proceso consistente en traducir conceptos físicos y biológicos de cualquier sistema en un conjunto de relaciones matemáticas y la manipulación de los sistemas matemáticos así obtenidos, esto se designa como análisis de sistemas. El sistema matemático se designa como modelo y constituye una representación abstracta e imperfecta del mundo real.

Explicación

Si bien pensamos a menudo en "modelos" en términos de ecuaciones y computadoras, cabe definirlos también de modo más general como cualesquiera representaciones físicas o abstractas de la estructura y la función de sistemas reales. En todo el presente texto se hace un empleo extenso de "reproducciones" y modelos "verbales" como auxiliares para la comprensión de procesos ecológicos complicados. Si se describieran con todo detalle sin el beneficio de algún marco o esbozo, los sistemas biológicos se presentarían como desesperadamente complejos. El análisis de sistemas se ocupa del reconocimiento explícito y de la manipulación de la complejidad en el desarrollo de modelos abstractos: el análisis de sistemas es simplemente un instrumento para la comprensión. Una excelente introducción al empleo del análisis de sistemas en ecología ha sido publicada por Dale (1970).

La posibilidad de describir y predecir la conducta de sistemas ecológicos mediante el empleo de modelos depende en gran parte de un principio de todos los sistemas, esto es, del principio de la *organización jerárquica* (o principio de los niveles integradores). Este principio, examinado en el capítulo 1, proclama simplemente que no es necesaria comprender precisamente de qué modo el componente de un sistema es estructurado a partir de subcomponentes más simples para predecir cómo se comportará. Así, por ejemplo, no se necesita tener una comprensión cabal de la bioquímica para describir la fisiología de las células, ni es tampoco necesario comprender la fisiología por completo para describir la dinámica de las poblaciones animales. El concepto de la organización jerárquica se ilustra en la figura 10-1 en términos de "casillas negras". En el estudio de los sistemas, la *comprensión* se concibe como la capacidad de ver cómo está organizado un componente del sistema a partir de partes más simples. El grado de subdivisión jerárquica empleado en el desarrollo de un modelo matemático particular depende del objeto con miras al cual el modelo se desarrolla, más bien que de la capacidad de reconocer subdivisiones naturales del sistema. Si bien los modelos son abstracciones imperfectas de sistemas reales, representan para el ecólogo instrumentos poderosos, con todo, porque es el caso que las respuestas y las predicciones provisionales acerca de cuestiones importantes pesan más, a la larga, que el tratamiento preciso de detalles sin importancia.

2. LOS OBJETOS DE LA CONSTRUCCION DE MODELOS

Enunciado

Cabe construir los modelos por una diversidad de razones. En efecto, al proporcionar una *descripción* abstracta y simplificada de

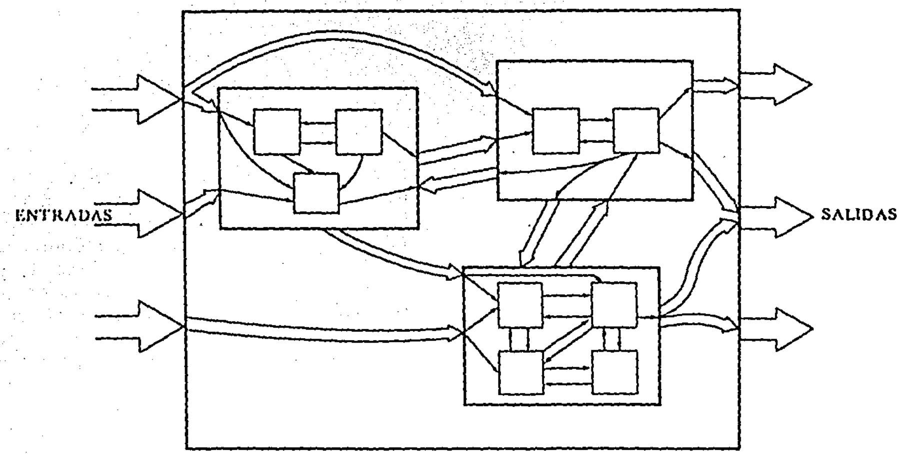


FIG. 10-1. Los procesos y las estructuras de los ecosistemas pueden concebirse como "casillas negras", formados de simples cajas negras, en una jerarquía de complicación. Este diagrama muestra tres niveles de organización. Observando la relación de entrada y salida para cualquier casilla, estaremos acaso en condiciones de predecir su comportamiento, aun sin comprender cómo está formada a partir de componentes más sencillos.

algún sistema, se los puede utilizar simplemente para dirigir esfuerzos de investigación o definir un problema para su estudio más detallado. Con mayor frecuencia, los modelos matemáticos se desarrollan para la *predicción* de cambio dinámico con el tiempo. El fracaso de un modelo en cuanto a predecir el cambio es útil en sí mismo, porque señalará acaso fallas en el marco conceptual a partir del cual el modelo se desarrolló. Los modelos pueden valorarse en términos de tres propiedades u objetivos, esto es: de *realismo*, *precisión* y *generalidad*. El realismo se refiere al grado en que los enunciados matemáticos del modelo corresponden, al traducirse en palabras, a los conceptos biológicos que se suponen representar. La precisión es la capacidad del modelo de predecir cambio numérico y de imitar los datos en que se basa. Y la generalidad se refiere a la amplitud de aplicabilidad del modelo (esto es, al número de situaciones distintas en las que se lo podrá aplicar).

Explicación

Hasta hace poco, los modelos matemáticos se desarrollaban ante todo en las ciencias físicas, en psicología y en campos aplicados, como la logística militar y la administración de pesquerías. En estos casos, los sistemas objeto de estudio se dejan definir claramente, y los modelos se construyen para responder a preguntas específicas. En cambio, los sistemas ecológicos resultan a menudo difíciles de describir en el espacio y el tiempo y pueden caracterizarse en modelos mediante una multitud de "medidas de realización" (energía, elementos nutritivos, volumen de poblaciones, etc.); además, las preguntas que se plantean a los modelos ecológicos son a menudo complejas y se basan en problemas tan vagos como los de "estabilidad" y "eficacia trófica". Debido a que los ecosistemas tienen entradas altamente fortuitas, como la del tiempo meteorológico, ha parecido poco razonable construir modelos de alta capacidad predictora, cuando las entradas básicas no pueden con frecuencia medirse o predecirse. Así, pues, a los modelos ecológicos se los juzga a menudo en términos de generalidad y capacidad para orientar el esfuerzo de investigación, más bien que en relación con su capacidad predictora (precisión). Considerando la complejidad inmensa de la acción recíproca entre

LECTURA 11-2-5

INTRODUCCIÓN

El progreso científico-técnico y las matemáticas

Una de las particularidades características de nuestra época es la amplia utilización de los métodos matemáticos y de los ordenadores en las esferas más diversas de la actividad humana. «El ordenador diagnostica», «Conutor del constructor» — tales títulos se pueden ver con frecuencia en los periódicos de hoy día. El impetuoso proceso de matematización de la ciencia, la técnica y la economía nacional comenzó, en la década de los cincuenta, después de la aparición y el rápido perfeccionamiento de las máquinas computadoras electrónicas, lo que estimuló la formación de las matemáticas aplicadas contemporáneas, que incluyen una serie de problemas relacionados con la aplicación de los métodos matemáticos y de la técnica de cálculo. En las resoluciones del XXIV y XXV congresos del PCUS se prestó una gran atención a esta tendencia científica. Una de las tareas más importantes planteadas por el XXV congreso ante la ciencia soviética se formula de la siguiente manera: «Ampliar las investigaciones en la esfera de las matemáticas aplicadas y teóricas. Desarrollar los trabajos científicos, dirigidos a la creación y aplicación eficaz de la técnica de cálculo electrónica en la economía nacional».

El objetivo de este libro es hablar de una forma sencilla a un amplio círculo de lectores y ante todo a la juventud estudiantil sobre las matemáticas aplicadas, las ideas, métodos, dificultades de las investigaciones relacionadas con la aplicación de los métodos matemáticos y la técnica de cálculo al estudio de las leyes de la naturaleza y a su utilización en la actividad práctica de la humanidad.

Las matemáticas son de las ciencias más antiguas, nacidas en la aurora de la civilización humana bajo la influencia de las necesidades prácticas. La construcción, la medición de las áreas de terrenos, la navegación, los cálculos comerciales, la dirección del estado requerían gran habilidad para efectuar cómputos aritméticos y ciertos conocimientos geométricos. En lo sucesivo las matemáticas se desarrollaron en un armonioso sistema lógico como parte integrante de un complejo general de conocimientos científicos. Las necesidades de las ciencias naturales, de la técnica, de toda la actividad práctica humana siempre planteaban ante las matemáticas nuevos problemas y estimulaban su desarrollo. El progreso de las matemáticas convertía a su vez más eficaces los métodos matemáticos, ampliaba la esfera de su aplicación y contribuía con esto al progreso científico-técnico general.

El papel de las matemáticas fue muy diferente en distintas esferas de la actividad humana y en distintas épocas. Se formó, históricamente, bajo una influencia considerable de dos factores: el nivel de desarrollo del aparato matemático y el grado de madurez de los conocimientos del objeto en estudio, la posibilidad de describir sus rasgos y propiedades más importantes en un lenguaje de nociones y ecuaciones matemáticas o, como se ha acostumbrado a decir actualmente, la posibilidad de construir un modelo matemático del objeto a estudiar.

El modelo matemático, basado en una cierta simplificación, idealización, no es idéntico al objeto, sino su reflejo aproximado. Sin embargo, gracias a la sustitución de un objeto real por el modelo correspondiente, aparece la posibilidad de formular su estudio como un problema matemático y valerse para su análisis del aparato matemático universal, que no depende de la naturaleza concreta del objeto. Las matemáticas permiten describir uniformemente un amplio círculo de hechos y observaciones, realizar su análisis cuantitativo detallado, predecir cómo se comportará el objeto en diferentes condiciones, es decir, pronosticar los resultados de las futuras observaciones. Hay que tener en cuenta que el pronóstico siempre es una tarea muy difícil y los pronósticos confirmados son objetos de un orgullo especial de cualquier ciencia.

La complicación en la construcción o investigación de un modelo matemático depende considerablemente de la complejidad del objeto estudiado. Los métodos matemáticos se aplican desde hace tiempo y con éxito en la mecánica, física, astronomía, es decir, en las ciencias, que estudian las formas más simples del movimiento de la materia. Las matemáticas se convirtieron en el lenguaje de estas ciencias, pertenecientes a la categoría de ciencias «exactas». Las matemáticas desempeñaron un papel considerable en la técnica. Pero hasta no hace mucho tiempo la esfera de la amplia utilización de los métodos matemáticos no iba más allá. La situación cambió bruscamente, al aparecer los ordenadores.

La causa es la siguiente. En las matemáticas se presentan con frecuencia problemas para los cuales no se logra obtener la solución en forma de una fórmula que relacione las magnitudes buscadas con las dadas. Sobre tales problemas se dice, que no se resuelven en forma explícita. Para su solución se trata de hallar algún proceso infinito convergente al resultado buscado. Si tal proceso está indicado, al hacer cierto número de pasos e interrumpir luego los cálculos (no es posible continuarlos infinitamente), obtendremos una solución aproximada del problema. Este procedimiento está ligado a la realización de los cálculos según un sistema de reglas estrictamente definido, que determina el carácter del proceso y se denomina algoritmo.

Este enfoque de la solución de los problemas matemáticos se conocía ya antes de la aparición de los ordenadores, pero se utilizaba rara vez, puesto que la ejecución de estos problemas era voluminosa y requería mucho trabajo. Cuando Laverrier «descubrió», sentado ante su escritorio, «en la punta de su pluma» un nuevo planeta (Neptuno), habiendo calculado su trayectoria a partir de las perturbaciones de la trayectoria del planeta Urano, realizó una hazaña científica que se inscribió para siempre en los anales de la Historia de la ciencia. Pero en la mayoría de los casos los investigadores trataban de evitar grandes cálculos. Por eso los modelos matemáticos complejos, para los cuales no se lograba obtener el resultado en forma de fórmulas, generalmente no se consideraban o se simplificaban mediante unos supuestos complementos. La simplificación del modelo disminuía su grado de correspondencia al objeto estudiado, hacía que los resultados de la investigación fueran menos exactos y, por consiguiente, menos interesantes, y a veces conducía a errores.

Un calculista experimentado, para efectuar una operación aritmética, consumía por término medio cerca de medio minuto. Los ordenadores modernos efectúan millones de operaciones por segundo. Así pues, en un breve lapso de tiempo, unos treinta años, gracias a los ordenadores, la velocidad de efectuación de los cálculos aumentó en unos 100 millones de veces. En toda la historia de la humanidad no se observó un salto igual en ninguna de las esferas de la actividad del hombre.

La aplicación de los métodos numéricos mediante ordenadores amplió considerablemente la cantidad de problemas matemáticos que permiten un análisis completo. Hoy día el investigador, al construir el modelo matemático de algún objeto, ya no se ve obligado a recurrir a simplificaciones, antes necesarias para obtener el resultado en forma explícita. Su atención se dirige, ante todo, a tomar en consideración las particularidades sustanciales del objeto en estudio y reflejarlas en el modelo matemático. Después de construido el modelo, se plantea la tarea de elaborar el algoritmo para la resolución del problema matemático correspondiente y llevar esta a cabo mediante un ordenador. De esta manera los ordenadores cambiaron el enfoque de aplicación de las matemáticas como método de investigación. Provocaron la reorientación de muchas ramas de las matemáticas ya formadas y el desarrollo de una serie de ramas nuevas. Actualmente los ordenadores son uno de los factores determinantes del progreso científico-técnico. Su utilización contribuye al aceleramiento del desarrollo de las ramas principales de la economía nacional, abren unas posibilidades nuevas en principio de proyección de sistemas complejos, disminuyendo considerablemente los plazos de elaboración y puesta en producción, garantiza la selección de los regímenes óptimos de los procesos tecnológicos y de producción, crea las condiciones necesarias para el perfeccionamiento de la dirección y el aumento de la productividad del trabajo. Si las máquinas ordinarias se encargaban de cumplir funciones físicas del hombre en la producción, le hacían más fuerte, los ordenadores ayudan al hombre en su actividad intelectual, le hacen más inteligente. Son uno de los factores más importantes de la transformación de la ciencia en una fuerza productiva directa de nuestra sociedad. Sin los ordenadores no se podrían desarrollar los grandes proyectos científico-técnicos de nuestros días (investigaciones cósmicas, energética atómica, aviación ultrasónica, etc.).

Gracias a los ordenadores se desarrolla intensivamente no sólo el proceso de matematización de las ciencias naturales y técnicas, sino también el de las ciencias sociales. Gran importancia adquirió la aplicación de los métodos matemáticos en la economía. El modelo matemático comienza a utilizarse ampliamente en la química, geología, biología, medicina, psicología, lingüística. Se presta gran atención a la preparación de cuadros de alta calificación, capaces de aprovechar las enormes posibilidades que nos abre la utilización eficaz de los ordenadores.

En muchas universidades y escuelas superiores se han creado facultades de matemáticas aplicadas y cálculo. Se confirma el punto de vista de C. Marx que, según P. Lafargue, consideraba que «la ciencia alcanza su perfección solamente cuando logra utilizar las matemáticas».

Por último nos detendremos brevemente en el contenido del libro. Los primeros tres capítulos están dedicados a tres elementos fundamentales de las matemáticas aplicadas: modelos matemáticos, algoritmos de cálculo y ordenadores. Estos capítulos dan una noción general sobre las matemáticas aplicadas contemporáneas.

Los siguientes capítulos tienen un carácter más especial. En ellos se examinan diferentes problemas típicos de las matemáticas aplicadas y los métodos de resolución de los mismos. Prácticamente estos capítulos no dependen unos de otros y se pueden leer desordenadamente (pero obligatoriamente después de los tres primeros capítulos). Sin embargo, nosotros consideramos que el orden presentado en el libro, sometido, en particular, al principio de aumento de la complejidad, es el más natural.

La exposición del material en cada capítulo comienza por cuestiones contenidas en mayor o menor grado en el programa de la escuela secundaria y son conocidas para el lector. Pero se exponen bajo un punto de vista tal que resulta más fácil dar el siguiente paso: pasar de las cuestiones escolares a los problemas reales de las matemáticas aplicadas.

El libro no abarca, desde luego, todas las partes de las matemáticas aplicadas modernas, debido a su pequeño volumen y a que está destinado a lectores que ya conocen las matemáticas a nivel de la escuela secundaria. Al seleccionar el material, jugó cierto papel el factor subjetivo, relacionado con los intereses de los autores. En particular, el libro trata muy brevemente de los ordenadores, prácticamente no se tocaron los problemas de programación. Estos temas podrían ser objeto de un libro especial.

Esperamos que el libro despierte un mayor interés por las matemáticas y sus múltiples aplicaciones, les ayude a mirar con otros ojos la amplia serie de ideas y conceptos matemáticos, que se estudia actualmente en la escuela, les enseñe a utilizar mejor estos conocimientos en la práctica. Contamos también con despertar en algunos lectores el deseo de hacerse especialistas en esta esfera tan interesante. Pues bien, la facultad de matemáticas de cálculo y cibernética de la Universidad Estatal Lomonósov de Moscú y muchas facultades análogas de otras escuelas de enseñanza superior los esperan. ¡Bienvenidos!

LECTURAS 11-2-6

XIII
Modelos y arquetipos*

Los hombres de ciencia hablan frecuentemente de usar modelos, pero rara vez se detienen a considerar los supuestos previos y las implicaciones que lleva consigo su acostumbrada utilización. Será conveniente que distingamos entre cierto número de operaciones —que van desde las familiares y triviales hasta las desmesuradas, aunque importantes— a todas las cuales se llama a veces «uso de modelos»; y espero que incluso este breve recorrido y reconocimiento de un vasto territorio permita un veredicto bien fundado sobre el valor del recurso a los modelos cognoscitivos.

Hablar de «modelos» en relación con una teoría científica tiene ya cierto sabor de metáfora: si se nos pidiera presentar un ejemplo perfectamente claro e indiscutible de modelo, en el sentido literal de esta palabra, ninguno de nosotros, según me parece, pensaría en hablar del modelo atómico de Bohr, ni del keynesiano de un sistema económico.

Los ejemplos típicos de modelo en el sentido literal de esta palabra incluirían: el barco expuesto en el escaparate de una agencia de

* Leído en la Universidad de Pennsylvania el 9 de diciembre de 1958. Publicado por primera vez en *Both Human and Humane*, ed. de C. E. Boewe (Filadelfia, University of Pennsylvania Press, 1960).

Para una concepción distinta de los modelos, el lector puede consultar PATRICK SUPPES, «A Comparison of the Meaning and Uses of Models in Mathematics and the Empirical Sciences», *Synthèse*, 12 (1960), 287-301; Suppes basa su estudio en una definición de «modelo» debida a Alfred Tarski: «Llamamos modelo de una teoría T a una realización posible en la que se satisfagan todas las oraciones válidas de T» (*Undecidible Theories*, ed. de A. Tarski [Amsterdam, North-Holland, Publishing Co., 1953], 11). Véase también A. TARSKI, «Contributions to the Theory of Models», *Indagationes Mathematicae*, 16 [1954], 572-588, y 17 [1955], 56-64.

No puedo estar de acuerdo con Suppes en que «el significado del concepto de modelo es el mismo en matemáticas y en las ciencias empíricas» (*op. cit.*, pág. 289) —aunque, como este autor tiene en cuenta «usos» distintos de este concepto, la diferencia que hay entre nosotros puede ser verbal.

viajes («un modelo del *Queen Mary*»), el aeroplano que surge de una caja de construcciones infantil, la aldea neolítica del Museo de Historia Natural. Es decir, los casos típicos son miniaturas tridimensionales, más o menos «a escala reducida», de algún objeto material existente o imaginario; y será cómodo llamar *original* del modelo a la cosa real o imaginaria representada por él.

También utilizamos la palabra «modelo» para designar un tipo o diseño (los «modelos de primavera» del dibujante de vestidos, el modelo Ford 1959) o para aludir a algo ejemplar (un marido modelo, una solución modelo de una ecuación). En todo lo que sigue podremos dejar de lado, por lo general, las acepciones de modelo que aluden a un tipo de diseño, así como, por otro lado, las referentes a algo digno de imitación.

Parece arbitrario restringir la idea de modelo a algo *más pequeño* que el original: la admisión de ampliaciones —como la imagen de un mosquito a escala mayor que la natural— constituye una extensión nada violenta, y otra residiría en aceptar un cambio proporcional de escala de *cualquier* dimensión pertinente, tal como el tiempo.

En todos estos casos he de hablar de *modelos a escala*, marbete que abarcará todos los simulacros de objetos materiales, ya reales como imaginarios, que conserven las proporciones relativas; y en ellos se incluirán los experimentos en que se deceleren artificialmente procesos químicos o biológicos («experimentos a ritmo lento») y aquellos en los que se pretenda imitar, en miniatura, procesos sociales.

Parecen indiscutibles los siguientes puntos referentes a modelos a escala:

1. El modelo a escala es siempre modelo *de* algo: su noción es relacional y, además, lo es asimétricamente —si *A* es un modelo a escala de *B*, éste no lo es de *A*.

2. El modelo a escala se realiza para servir cierta finalidad, para ser medio para un fin: ha de hacer ver qué aspecto presenta el barco, cómo funciona la máquina o qué leyes rigen el juego mutuo de las distintas partes del original; y sólo tendrá la pretensión de valer por sí mismo en el caso límite de que el aficionado se entregue a un innocuo fetichismo.

3. El modelo a escala es una representación de la cosa real o imaginaria a la que sustituya: su uso consiste en que «se lean» en él propiedades del original a partir de las propiedades del modelo directamente observables.

4. De ello se sigue que algunos rasgos del modelo no hacen al caso o carecen de importancia, en tanto que otros son pertinentes y esenciales para la representación en cuestión. No existe un modelo perfectamente fiel: sólo por ser infiel en *algunos* respectos puede representar el modelo al original.

5. Como sucede con todas las representaciones, existen unas convenciones subyacentes de interpretación, esto es, maneras debidas de «leer lo que dice» el modelo.

6. Las convenciones de interpretación descansan en la identidad parcial de propiedades conjugadas con la invariancia de proporcionalidad: al hacer un modelo, tratamos, por una parte, que se parezca al original, y por ello reproducimos algunas de sus características (el color del casco del buque, la forma y rigidez de las alas), y, por otra, que se conserven las proporciones *relativas* entre las magnitudes pertinentes. En la terminología de Peirce, el modelo es un *icono*, que incorpora literalmente los rasgos del original que se consideren de interés[1]; es algo así como si dijera: «*Así* es como es el original».

Al realizar modelos a escala tenemos el propósito de reproducir, incorporados en algo relativamente manejable o accesible, unos rasgos seleccionados del «original»: queremos ver qué aspecto tendrá la nueva casa, averiguar qué tal volará el nuevo aeroplano o darnos cuenta de cómo se producen los cambios de los cromosomas. Pretendemos acercar lo remoto y lo desconocido a nuestro propio nivel de existencia en los tamaños medios[2].

Esta finalidad, sin embargo, lleva en sí algo autodestructor, puesto que el cambio de escala tiene que introducir cosas no pertinentes y distorsiones. Así, nos vemos obligados a remplazar los tejidos vivos por algún sustituto inadecuado, y el simple cambio de tamaño puede trastornar el equilibrio de factores existentes en el original: un modelo demasiado pequeño de una bomba de uranio no llegará a hacer explosión, una reproducción demasiado grande de la mosca doméstica no despegará nunca del suelo, y no podemos esperar que el sistema solar tenga el mismo aspecto que su modelo de un *planetarium*. Las inferencias desde el modelo a escala al original son, pues, intrínsecamente precarias, y necesitan una validación y corrección suplementarias.

Detengámonos ahora en los modelos que entrañan un *cambio de medio* (estoy pensando en ejemplos tales como los modelos hidráulicos de sistemas económicos, o el uso de corrientes eléctricas en las calculadoras): propongo que en tales casos hablemos de *modelos analógicos*.

Un modelo analógico es cualquier objeto material, sistema o proceso destinado a reproducir de la manera más fiel posible, en otro medio, la *estructura* o trama de relaciones del original. Muchos de los comentarios que hemos hecho antes acerca de los modelos a escala son aplicables también a este nuevo caso: el modelo analógico, como el mo-

---

[1] «Un icono es un signo que se refiere al objeto que denote meramente por virtud de sus caracteres propios, que posee exactamente del mismo modo ya exista o no aquel objeto... Toda cosa, en absoluto, ... es icono de algo en cuanto que se parezca a esto y se lo use como signo suyo». *Collected Papers of Charles Sanders Peirce* (Cambridge, Mass., 1931-35), II, 247.

[2] En el artículo de VICTOR P. STARR «The General Circulation of the Atmosphere», *Scientific American*, CXCV (diciembre de 1956), 40-45, se describe un buen ejemplo del uso experimental de modelos: la atmósfera de un hemisferio está representada por el agua contenida en una aplastada cubeta giratoria, a la que se añade un colorante para hacer visible el movimiento. Cuando se calienta la periferia de la cubeta, las configuraciones que se obtienen confirman las predicciones efectuadas por medio de las teorías recientes acerca de la atmósfera.

delo a escala, está sujeto a reglas de interpretación para que sea posible realizar inferencias precisas a partir de los rasgos pertinentes del modelo.

La diferencia crucial entre los dos tipos de modelos se encuentra en los métodos correspondientes de interpretación. Según hemos visto, los que están a escala se apoyan ostensiblemente en la identidad: su finalidad consiste en imitar al original, excepto en la medida en que la necesidad de que sean manejables obligue a apartarse de la simple reproducción (y, cuando esto ocurre, se mantiene la desviación en el valor mínimo, como si dijéramos: las magnitudes geométricas del original se siguen *reproduciendo*, si bien modificadas en una relación constante); por el contrario, la realización de los modelos analógicos está guiada por la finalidad, más abstracta, de reproducir la *estructura* del original.

Un modelo analógico adecuado manifestará una correspondencia biunívoca entre las relaciones incorporadas *en él* y las existentes en el original: cuanto suceda a una relación de éste tiene que encontrar su eco en algo correspondiente que suceda en la relación del modelo coordinada a aquélla. Por expresarlo de otro modo: tiene que haber reglas de traducción de la terminología aplicable al modelo de modo que se conserven los valores veritativos.

Así pues, el principio rector del modelo analógico es lo que los matemáticos llaman «isomorfismo»[3]. Podemos, si así nos place, considerar este modelo como icónico de su original, como hicimos en el caso del modelo a escala, pero si obramos así tenemos que recordar que aquél sería «icónico» de un modo más abstracto que éste: el modelo analógico comparte con su original no ningún conjunto de rasgos ni una proporcionalidad idéntica de magnitudes, sino, en forma más abstracta, la misma estructura o configuración de relaciones. Ahora bien, la identidad de estructura es compatible con la variación más grande de contenido, y de aquí que las posibilidades de construir modelos analógicos sean infinitas.

El notable hecho de que sea posible incorporar la misma configuración de relaciones —la misma estructura— en una variedad inacabable de medios distintos hace que el modelo analógico sea algo sumamente poderoso y peligroso: los riesgos de interferencias falaces procedentes de aspectos no pertinentes y de distorsiones del modelo están ahora presentes en medida muy agravada; y todo uso que pretenda ser científico de un modelo de esta índole exige confirmaciones independientes. Los modelos analógicos proporcionan hipótesis plausibles, no demostraciones.

Voy a hacer ahora una digresión para ocuparme de los «modelos matemáticos»[4]. Esta expresión se ha hecho muy popular entre los científicos sociales, que hablan, de un modo característico, de la «aplicación» [«*mapping*»] de un «sistema de objetos» sobre uno u otro de cierto número de «sistemas o modelos matemáticos».

Cuando la palabra «modelo» se usa en tales contextos sin darle demasiada importancia no suele ser sino un sustituto pretencioso de «teoría» o de «formulación matemática». Corrientemente, sin embargo, se sugieren por añadidura otras tres cosas, al menos: se considera el campo original «proyectado» sobre el abstracto domino de funciones, conjuntos, o lo que sea, de que se ocupe la teoría matemática con la que se lo coordine (así, se dice que las fuerzas sociales «tienen por modelo» relaciones entre entidades matemáticas); se concibe al «modelo» como algo *más sencillo* y *abstracto* que el original, y es frecuente que se insinúe que el modelo es una especie de modelo analógico etéreo, como si las ecuaciones matemáticas se refiriesen a un mecanismo invisible cuyo funcionamiento ejemplificase —o, incluso, explicase en parte— el del sistema social original que se investigue (sugerencia, esta última, que es preciso rechazar como ilusoria).

El proceder que se sigue cuando se utiliza un «modelo matemático» parece ser el siguiente:

1. En un campo determinado de investigación se identifica cierto número de variables pertinentes, ya sea basándose en el sentido común, ya en virtud de consideraciones teoréticas más alambicadas. (Por ejemplo, para estudiar el crecimiento de la población podemos decidir que su variación con el tiempo depende del número de individuos que nazca en el momento correspondiente, el número de los que muera, el de quienes entren en la región en estudio y el número de los que la abandonen [5]. Supongo que la elección de estas variables se efectúa al nivel del sentido común.)

2. Se forman hipótesis empíricas concernientes a las relaciones imputadas entre las variables elegidas. (En la teoría de la población, el sentido común, apoyado por la estadística, sugiere que el número de nacimientos y el de defunciones durante un período temporal cualquiera breve son proporcionales tanto a la duración del mismo como al tamaño inicial de la población.)

3. Se introducen simplificaciones, a menudo drásticas, con objeto de facilitar la formulación y la manipulación matemáticas de las variables. (Se consideran los cambios de una población como si fuesen continuos; se adoptan las ecuaciones diferenciales más sencillas que condigan con los datos empíricos que se tengan.)

4. Se hace un esfuerzo por resolver las ecuaciones matemáticas resultantes, o, en caso de que ello fracase, por estudiar los rasgos *globales* de los sistemas matemáticos así construidos. Las ecuaciones matemáticas de la teoría de la población proporcionan la llamada «función logística», cuyas propiedades cabe especificar completamente. Más co-

---

[3] Para una exposición más acabada del isomorfismo véase, por ejemplo, RUDOLF CARNAP, *Introduction to Symbolic Logic and Its Applications* (Nueva York, 1958), página 75.

[4] Hoy existe una bibliografía considerable sobre este asunto. Véase KENNETH J. ARROW, «Mathematical Models in the Social Sciences», en D. Lerner, ed., *The Policy Sciences* (Stanford, Calif., 1951), págs. 129-154.

[5] Pueden verse cómodamente más detalles en V. A. KOSTITSYN, *Mathematical Biology* (Londres, 1939).

rriente es que el tratamiento matemático de los datos sociales lleve, en el mejor de los casos, a una «topología plausible» —por emplear la feliz frase de Kenneth Boulding [6]—, esto es, a conclusiones cualitativas acerca de las distribuciones de los máximos, los mínimos, etc. Este resultado está vinculado al hecho de que los datos originales son, en la mayoría de las ocasiones, a lo más, de carácter *ordinal.*

5. Se intentan extrapolar las consecuencias susceptibles de contrastación al campo original. (Así, puede hacerse la predicción de que una población aislada tiende hacia un tamaño límite independientemente de su tamaño inicial.)

6. La eliminación de algunas de las restricciones impuestas en beneficio de la sencillez sobre las funciones componentes (por ejemplo, su linealidad) puede conducir a cierto aumento de la generalidad de la teoría.

Las ventajas que concede el proceder anterior son las que se encuentran ordinariamente al introducir el análisis matemático en un dominio cualquiera de investigaciones empíricas, entre ellas la precisión en la formulación de relaciones, la facilidad con que se efectúan las inferencias a través del cálculo matemático y la captación intuitiva de las estructuras así descubiertas (verbigracia, la aparición de la «función logística» como recurso organizador y mnemotécnico).

Los peligros que acechan son igualmente obvios. Las drásticas simplificaciones que se requieren para que pueda llevarse a cabo con éxito el análisis matemático involucran un grave riesgo de confundir la exactitud de las matemáticas con la fuerza de la verificación empírica en el campo original. Tiene especial importancia recordar que el tratamiento matemático no proporciona *explicaciones:* lo único que puede esperarse de las matemáticas es que saquen consecuencias de las asunciones empíricas iniciales (si las funciones y ecuaciones son de formas conocidas puede haber un acervo de investigaciones puramente matemáticas fácilmente aplicables al caso entre manos); podemos decir, si queremos, que las matemáticas puras nos ofrecen la *forma* de una explicación, al hacernos ver qué *tipos* de función podrían ajustarse aproximadamente a los datos conocidos; pero es preciso buscar por otro lado las explicaciones *causales.* Por su incapacidad para proponer explicaciones, los «modelos matemáticos» difieren marcadamente de los modelos teoréticos que vamos a estudiar ahora [7].

---

[6] «Economics as a Social Science», en *The Social Sciences at Mid-Century: Essays in Honor of Guy Stanton Ford* (Minneapolis, 1952), pág. 73.

[7] Tal sea digno de advertencia que hoy los lógicos usan «modelo» en lugar de «interpretación» o «realización» de un sistema axiomático formal. Véase John G. Kemeny, «Models of Logical Systems», *Journal of Symbolic Logic,* XIII (marzo de 1948), 16-30.

ACTIVIDAD II-2-31 **UN EJEMPLO DE MODELO MATEMATICO**

En esta ACTIVIDAD, el profesor desarrolla un ejemplo de modelo matemático. Se ha escogido un ejemplo relacionado con la "dinámica de poblaciones". En él, una especie, llamada predadora, se alimenta de otras especies, llamadas presas.

El modelo matemático "presa-predador", es un sistema de dos ecuaciones diferenciales,

$$\frac{dx}{dt} = a \cdot x - b \cdot xy$$

$$\frac{dy}{dt} = c \cdot xy - ey$$

no lineales, para las cuales no existe solución exacta.

Al presentar este modelo, no se intenta que los alumnos, de b a c h i l l e r a t o, comprendan los detalles matemáticos involucrados. El propósito es, más bien, que visualicen el proceso que lleva a su formación : los elementos del problema real, los aspectos relevantes que se consideran, las simplificaciones que se hacen, la formulación verbal del problema y la matematización del mismo.

La realización de la ACTIVIDAD es mediante "cátedra magistral", impartida por el profesor. Al efectuarla, el profesor relata el problema que dió origen al modelo y describirá ejemplos reales en donde, por el desconocimiento de sus consecuencias, se han observado resultados catastróficos.

ACTIVIDAD II-2-32 LOS MODELOS MATEMATICOS Y LA COMPUTACION

Es innegable el papel que la computadora desempeña en el tratamiento matemático de sistemas reales de complejidad considerable. Sin su ayuda, sería casi imposible abordarlos.

Aunque la computación, y lo que tiene que ver con computadoras, está de moda, y no se quisiera hacer un ditirambo en su honor, es necesario mostrar el papel que desempeña, máxime si se piensa que el problema central que se estudia en el curso, se aborda con computación.

Por tal motivo, el propósito de esta ACTIVIDAD es mostrar el papel que la computadora desempeña en el trabajo con modelos matemáticos. Para ello se ha elegido el modelo desarrollado en la ACTIVIDAD anterior. Es factible simular en computadora el comportamiento, en el tiempo, del sistema predador-presa.

Esta ACTIVIDAD, al igual que la anterior, la realiza el profesor. Para ello, el profesor describe el proceso que se sigue a partir de las ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = a\cdot x - b\cdot xy$$

$$\frac{dy}{dt} = c\cdot xy - e\cdot y$$

hasta obtener el modelo de simulación en la computadora.

De nuevo, no es propósito que los alumnos comprendan los detalles, tanto matemáticos (aproximación lineal), como computacionales (lenguajes), sino más bien que capten, a grandes rasgos, el proceso que se sigue, pero, sobre todo, vislumbren la importancia que la computación tiene en este tipo de trabajos.

Un aspecto que se explicará es el hecho de que simular algo permite examinar los efectos que sobre el modelo tienen, tanto factores externos, como el mismo medio ambiente que rodea al sistema en estudio.

ACTIVIDAD II-2-33

EL CRECIMIENTO DE LAS POBLACIONES O UNA BREVE INTRODUCCION A LA DEMOGRAFIA

El propósito de esta ACTIVIDAD es hacer una breve introducción al estudio de la población humana. En este tipo de estudios generalmente se formulan, al principio, consideraciones referentes a su crecimiento, abordándose las situaciones que determinan su lentitud o rapidez. El tratamiento que de estas cuestiones hagamos, tendrá que ser elemental. No puede ser de otra forma. En él, se pondrán de relieve aspectos como :

+ La ecuación demográfica :

  $P_2 = P_1$ + nacimientos - muertes + migración neta .

+ Tasa de crecimiento de una población.
+ Tasa de natalidad.
+ Tasa de mortalidad.
+ Promedio mundial.
+ Esperanza de vida.
+ Crecimiento de la población mundial.
+ Crecimiento de la población en México.

La actividad se desarrolla por medio de lectura grupal. El material que se utiliza se reproduce más adelante.

ACTIVIDAD II-2-34

CONTAMINACION

La contaminación es un TEMA de mucha actualidad, especialmente para un habitante de la Ciudad de México. Diariamente aparecen en los periódicos reportes acerca de la calidad del aire en la llamada, hace algunos años, LA REGION MAS TRANSPARENTE DEL AIRE.

La contaminación, como TEMA de estudio científico, da origen a problemas extremadamente complejos. El abordarla en esta ACTIVIDAD, tiene como propósito que los estudiantes recuerden aspectos generales que de ella conocen. No se aborda ningún tipo de contaminación en especial : se hace un recuento de los distintos tipos que existen.

La ACTIVIDAD se desarrolla mediante una lectura grupal. El material que se utiliza, se reproduce un poco más adelante.

ACTIVIDAD II-2-35 **RECURSOS NATURALES**

El propósito de esta ACTIVIDAD es que los estudiantes recuerden aspectos generales relacionados con los recursos naturales. Este es un TEMA que ellos han tratado en todos los niveles de su educación. En particular se hace énfasis en el peligro a que han estado expuestos los recursos naturales. La ACTIVIDAD se realiza mediante lectura grupal de los TEXTOS que más adelante sse reproducen.

ACTIVIDAD II-2-36 **ALIMENTOS**

El propósito de esta ACTIVIDAD es que los alumnos recuerden los diferentes tipos de alimentos que el hombre necesita, su producción y los rezagos que de ella existe en numerosas partes del mundo. Gran parte de lo que este apartado reclama, ha sido objeto de estudio, por parte del alumno, en sus cursos anteriores.

La ACTIVIDAD consiste en una lectura grupal basada en TEXTOS reproducidos en las páginas siguientes.

ACTIVIDAD II-2-37 **INDUSTRIALIZACION**

El propósito fundamental de esta ACTIVIDAD es que los estudiantes conozcan algunos conceptos pertinentes a la Ciencia Económica y que son de utilidad en el problema que ocupa el curso. Algunos de ellos son los siguientes :

+ Insumo
+ Bienes de consumo.
+ Capital industrial.
+ Inversión.
+ Depreciación.
+ Producto industrial.
+ Tasa de crecimiento económico "per cápita".
+ Tasa de crecimiento económico.
+ Producto Nacional Bruto (PNB) "per cápita".
+ Nivel de riqueza.
+ Oferta.
+ Demanda.

La ACTIVIDAD consiste en una serie de lecturas colectivas en donde aparecen los conceptos anteriores. El contenido de los TEXTOS se reproduce a continuación.

LECTURA II-2-7

LA POBLACION MUNDIAL HA CRECIDO EN 50 AÑOS DE 2,500 A 6,000 MILLONES

JACQUES COSTEAU

Los seres humanos —y el planeta— tienen sus límites. En Tailandia, precisamente en aguas cercanas a la isla Ko Born, nuestros buceadores presenciaron un ritual muy rara vez filmado: la reproducción del calamar. Cada hembra entraba en un reducido hueco en el arrecife que hacía las veces de "guardería comunal" y depositaba sus huevos en el techo. Luego, la hembra salía nuevamente y se alejaba, dejando a sus crías sin atención alguna. Varias sobrevivirían, mientras que otras serían destruidas por las fuerzas de los océanos y los depredadores.

La escena era hipnotizante: podían ver cómo diminutos glóbulos luminosos colgaban en racimos, como linternas en el mar.

Uno de los aspectos más peligrosos de nuestro ambiente es el proceso de procreación, inexorable ciclo mediante el cual los organismos se reproducen, programado por la naturaleza para perpetuar las especies. La biología de la reproducción, no cabe duda, es impresionante.

En el caso de los seres humanos, sin embargo, la reproducción también inspira preocupación. El crecimiento geométrico de la población actualmente nos está planteando desafíos ambientales mundiales que nos resultaban desconocidos antes de la Segunda Guerra Mundial.

Mi padre y yo dedicamos esta edición del Calypso Log a la amenaza más grande que enfrenta nuestro planeta: el incremento de la población de una especie a expensas de todas las demás y de los procesos vitales, generadores de vida, que mantienen habitable nuestro oasis en el espacio.

Admitimos que hay muchos enfoques para este problema tan complejo, ante el cual nos jactamos de tener todas las respuestas. Pero sí nos sentimos moralmente obligados a aportar todos nuestros esfuerzos a debatir este tema crítico y hacer todo lo que está a nuestro alcance para alentar la búsqueda de soluciones.

Para el año 2000, la población mundial, que en la actualidad sobrepasa de 5,000 millones de seres humanos, ascenderá a 6,000 millones, lo cual es aproximadamente equivalente a añadir otra China en tan sólo 10 años.

En la década de los 50, la población mundial era de 2,500 millones. Esto indica que se necesitó el paso de cientos de miles de años para que se llegara a esa cifra. Desde entonces, hemos añadido más personas que cualquier generación desde la aparición inicial de los seres humanos en el planeta.

Este asombroso crecimiento en la población humana ha ocurrido al mismo tiempo que una creciente industrialización y la mejoría en el nivel de vida de algunos pueblos. En consecuencia, hoy existe mayor número de gente y, ésta hace un uso mayor de energía como nunca antes se había hecho.

En opinión del doctor Nathan Kayfitz, hacia el año 2025 habrá una operación cuatro veces más de automóviles de los 500 millones de vehículos motorizados que circulan actualmente en la Tierra, y ello significa que, en términos de calentamiento global, la calidad del aire y el consumo de energéticos serán aterradores.

De manera que cuando hoy en día se habla de sobrepoblación, no se trata de decir únicamente que hay demasiada gente, sino que debemos tomar conciencia y pensar en lo que vamos a hacer para obtener recursos que puedan garantizar una calidad aceptable de vida, y de que los recursos aún no explotados pueden ser conservados para las generaciones venideras.

En países típicos, por ejemplo, los seres humanos destruyen bosques que tardaron siglos para surgir y desarrollarse. De hecho, incluso en China, donde el control demográfico es prioridad gubernamental, según el doctor Paul Ehrlich, autor de "La explosión demográfica", el consumo anual de madera para papel sigue siendo 50 por ciento más elevado que el crecimiento de este recurso, pese a los serios esfuerzos de reforestación.

Y la destrucción de los bosques es sólo un ejemplo de las múltiples formas en que los seres humanos están poniendo a prueba la capacidad del planeta. Hubo un tiempo en que la protección ambiental significaba el mantenimiento de grandes espacios abiertos, paisajes bellos, y fauna y flora silvestres. Posteriormente, con una comprensión más compleja, protección ambiental sólo ha permitido conservar en cierta medida los delicados mecanismos de aire, mar, agua dulce y suelo que hacen posible la vida en la Tierra.

Hoy día, sin embargo, el ambientalismo no puede ya excluir la dinámica de la población humana, porque indefectiblemente son los seres humanos —y nuestros hábitos— los que a la postre determinarán si lo que tratamos de salvar puede realmente ser rescatado.

Si bien debemos admirar y reverenciar el exquisito milagro de la reproducción, seríamos unos necios si dejamos que esa reverencia erosione nuestra responsabilidad en cuanto a traer a nuestros hijos a un mundo adecuado para recibirlos, mantenerlos y ayudarlos a prosperar.

A diferencia de los calamares invertebrados, nuestros hijos, los niños que aseguramos amar, no deben quedar librados a su suerte. Ignorar los vínculos entre la población y el ambiente es hacer justamente eso: amar la vida en la Tierra.

LECTURA 11-2-8

La Jornada

HOY DOMINGO 7
DE JULIO DE 1991

■ Pretende el gobierno reducir la tasa de 2.1% a 1% para el año 2000

Aumento demográfico, riesgo para el desarrollo: Conapo

El proyecto económico y el desarrollo de México estarán en riesgo si la explosión demográfica no se reduce y se equilibra con el crecimiento del país, alertó ayer el secretario general del Consejo Nacional de Población (Conapo), Manuel Urbina Fuentes.

El funcionario indicó que persiste la emigración del campo y ciudades pequeñas, mientras el Distrito Federal, receptor de las mayores corrientes humanas, está en riesgo de alcanzar entre 23 y 25 millones de habitantes para fin de siglo, diez millones más que ahora.

En la actualidad, precisó el funcionario de la Secretaría de Gobernación (SG), la tasa de crecimiento poblacional "se mantiene en 2.1 por ciento al año y, aunque la tendencia es decreciente, el ritmo a la baja no garantiza que la nación alcance situaciones de equilibrio en fecha próxima".

Con ese índice, explicó, la población mexicana se duplicaría cada 33 años. Es, en términos de propósitos, un lapso muy breve, pues la intención oficial es llegar al año 2000 con tasa de uno por ciento, lo que implicaría doblar la población en 60 años.

Los tiempos son importantes, insistió, porque con el crecimiento de uno por ciento sería posible atender las demandas sociales —empleo, educación, vivienda, agua potable, drenaje y mejor calidad del medio ambiente— que plantea el país.

En cifras de población absoluta, especificó, México ocupa el undécimo lugar mundial y el tercero en el continente, precedido por Estados Unidos y Brasil. Es decir, hay más de 81 millones de mexicanos, casi seis veces la población que tenía el país al comenzar el siglo.

Urbina Fuentes insistió en que hay avances. Por ejemplo, ahora las parejas tienen tres hijos en promedio, por más de seis que alcanzaban hace 30 años. Esto se debe, asentó, a la aplicación de políticas poblacionales y a la disponibilidad gratuita de la planificación familiar.

De hecho, comentó, los proyectos descansan sobre las mujeres. Ahora hay 7.5 millones de usuarias de métodos anticonceptivos, de las cuales 2.7 millones optaron por la operación —ligadura de trompas—, mientras sólo 102 mil hombres han aceptado la vasectomía.

Sin embargo, hay dificultades serias. El funcionario citó que la población entre 15 y 20 años registra medio millón de embarazos al año. Y una cifra más preocupante: se embarazan 21.9 por ciento de las mujeres en el lustro 15-20 que carecen de escolaridad.

HOY LUNES 14
DE OCTUBRE DE 1991

El crecimiento, amenazado por la tasa demográfica, advierte Conapo

■ Conapo

Más de 100 millones de mexicanos al iniciar el siglo XXI

Alberto Espinosa, corresponsal, *Querétaro, Qro., 13 de octubre* □ Según el secretario general del Consejo Nacional de Población (Conapo), Manuel Urbina Fuentes, México contará a principios del siglo entrante con poco más de cien millones de habitantes, y un gran reto será reducir la tasa de crecimiento poblacional de 2.1 a uno por ciento anual.

Luego de clausurar el Taller Nacional de Programación y Evaluación en Población, donde quedó de manifiesto que cada año hay 2.4 millones de habitantes más en el país, el funcionario destacó que la tasa de crecimiento poblacional anual ha descendido de 3.2 a 2.1 por ciento.

Dijo que para alcanzar la tasa prevista se necesitará una cobertura adecuada de servicios y educación; crear conciencia del problema de los embarazos no deseados, que son medio millón anual entre adolescentes de 15 a 19 años, y una mejor distribución de nacimientos entre la población, mediante el desarrollo urbano y regional.

Indicó que el control ha disminuido los índices de fecundidad: de seis hijos en promedio que tenía la mujer mexicana, actualmente la cifra es de 3.5, "aunque lo óptimo siguen siendo dos por pareja".

Indicó que con dos hijos por pareja se bajaría con el tiempo de 21 millones de matrículas en educación primaria a 12 millones, o se reduciría la demanda de 1.4 millones de empleos por año a 600 mil. Sin embargo, indicó, los hombres siguen siendo apáticos a los métodos de planificación familiar: de los ocho millones de parejas que recurren a ellos, sólo en cinco por ciento los hombres toman parte activa.

Por otra parte, estimó que los más de cien millones de habitantes en México estarán agrupados principalmente en zonas urbanas, las cuales crecerán 75 por ciento, si bien las grandes áreas metropolitanas han dejado de expandirse; crecerán más las ciudades de entre cien mil y un millón de habitantes.

Tasa bruta de natalidad en algunos países y períodos seleccionados
(Nacimientos por cada 1.000 habitantes)

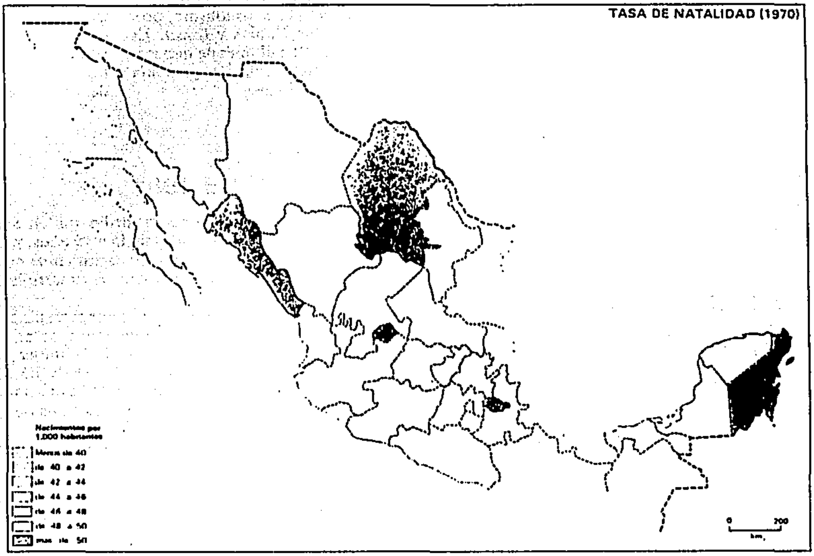
País	1960-1964		1950-1954		1940-1944	
El Salvador	48,6		49,0		43,3	
Guatemala	47,4		51,3		47,2	
Ecuador	47,2		45,9		46,2	
Costa Rica	44,8		49,1		44,9	
México	44,4		45,1		44,6	
México (corregido)	44,9	(1960)	46,3	(1950)	48,1	(1940)
India	38,4		41,7		39,9	
Chile	34,8		33,7		36,4	
Canadá	25,2		27,7		23,2	
Uruguay	24,6		18,8		18,7	
Estados Unidos	22,4		24,5		19,9	
Argentina	22,4		27,7		23,2	
España	21,6		20,3		22,0	
Italia	18,9		18,3		20,7	
Francia	18,0		19,5		14,7	
Bélgica	17,0		16,7		13,8	
Suecia	14,5		15,5		17,7	

Fuente: *Dinámica de la población de México*, pág. 50.

reciente que cobra cada vez mayor importancia en la planificación económica y social de los pueblos. La demografía es la parte de la geografía humana que estudia y explica los fenómenos de población.

En el estudio de la población humana –como en el de otras especies animales– generalmente se formulan al principio consideraciones referentes a su crecimiento, estudiándose las situaciones que determinan su lentitud o rapidez. En las poblaciones humanas, a diferencia de las especies animales –cuyo crecimiento se rige por relaciones de supervivencia que se establecen entre ellas y el medio natural en el que se desarrollan–, las situaciones, que modulan la velocidad del crecimiento, tienen su origen fundamentalmente en las formas de organización social y actividad económica y en los aspectos culturales tradicionales. El estudio y comprensión de las causas que determinan el crecimiento

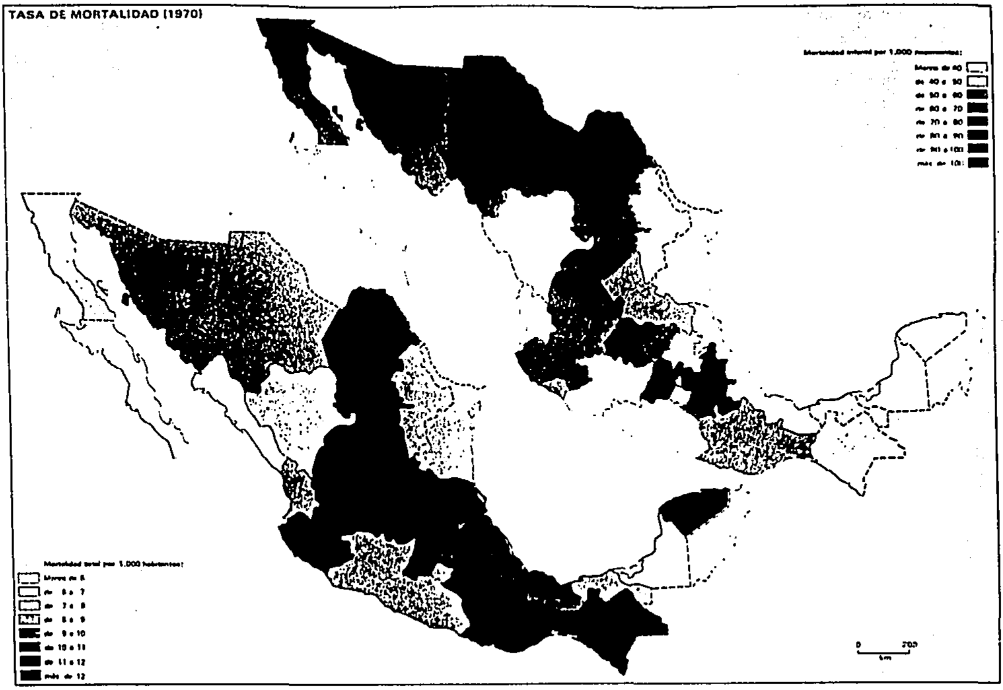
LA POBLACION
POR
AGUSTIN PORRAS



Introducción

A pesar de que el estudio de la población humana tiene orígenes muy remotos, el abordarlo en forma sistemática, como instrumento científico de conocimiento de la sociedad para transformarla y mejorarla, es un hecho es fundamental, pero el estudio de la población humana requiere también analizar por razones obvias los efectos que sobre la sociedad tiene el crecimiento acelerado o lento de su población.

Comparando el volumen de población de una área determinada en dos fechas consecu-



tivas se obtiene en números absolutos el cambio que experimenta dicha población; la explicación primaria del cambio se establece a partir de lo que se denominan "procesos demográficos", es decir, mortalidad, fecundidad y migración, según la siguiente *ecuación demográfica:*

$$P_2 = P_1 + \text{nacimientos} - \text{muertes} + \text{migración neta}$$

En esta ecuación P_2 representa el volumen de población del área en cuestión en una fecha posterior; P_1, el volumen de la misma en una fecha inicial; nacimientos debe reflejar el número de éstos entre las dos fechas, siendo este número producto del comportamiento reproductivo de la población o ley de fecundidad experimentada; muertes representa el total de defunciones ocurridas en el mismo período, producto a su vez del comportamiento diferente de la muerte ante la edad y el sexo, o sea su ley de mortalidad; la migración neta representa la diferencia entre el total de individuos que pasaron a residir fuera del área y el total de aquellos que llegaron a la misma durante el período considerado.

A través de esta ecuación se calcula la tasa de crecimiento de la población (velocidad o ritmo de crecimiento), la cual se explica por medio de las variaciones experimentadas en los procesos demográficos. La ley de fecundidad se visualiza en una primera aproximación a través de la frecuencia de nacimientos ocurridos en el período, o tasa de natalidad; también la ley de mortalidad se percibe primeramente con las frecuencias de muertes totales experimentadas en la población entre las dos fechas consecutivas. Una forma de cálculo de la tasa de crecimiento de la población se obtiene dividiendo la diferencia $(P_2 - P_1)$ entre la semisuma $(P_2 + P_1) : 2$ y el resultado se divide por el número de períodos o intervalos que se consideran; por ejemplo, si se tuvieran los volúmenes en dos fechas consecutivas con diez años de diferencia el número de períodos sería diez si se quisiera obtener un incremento medio anual o tasa anual de crecimiento. Dividiendo los nacimientos, las muertes y la migración entre la semisuma mencionada se obtienen: la tasa bruta de natalidad, la tasa bruta de mortalidad y la tasa de migración; entonces la tasa de crecimiento de la población sería:

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{P_2-P_1}{\frac{P_2+P_1}{2}} = \frac{1}{n} - \frac{(\text{nacimientos})}{\frac{P_2+P_1}{2}} - \frac{(\text{muertes})}{\frac{P_2+P_1}{2}}\cdot\frac{1}{n} + \frac{(\text{saldo neto migratorio})}{\frac{P_2+P_1}{2}}\cdot\frac{1}{n}$$

o sea, la suma algebraica de las tasas de nacimientos, muertes y migración. Es decir, que r = T.B.N. − T.B.M. + T.M.; en donde, r es la tasa de crecimiento de la población; T.B.N., la tasa bruta de natalidad; T.B.M., la tasa bruta de mortalidad; T.M., la tasa de migración, y n, el número de períodos que se consideran para el cálculo de la tasa entre dos fechas consecutivas.

A la diferencia T.B.N. − T.B.M. se le llama tasa de crecimiento natural.

Ocurre muy a menudo que un país no recibe un volumen suficientemente grande de inmigrantes y a su vez los nacionales que van a residir fuera del territorio forman un número reducido, en cuyo caso la tasa de migración es muy cercana a cero; entonces, el crecimiento total de esa población refleja su crecimiento natural, o sea, que dicho crecimiento se debe básicamente a los cambios habidos en las tasas de natalidad y mortalidad.

El número de años requerido por una población para duplicar su volumen se obtiene a partir de la tasa anual de crecimiento; así, una población que crece al 0,5 % anual duplica su volumen en 139 años, al 1 % lo duplica en 70 años, al 2 % en 35 años, al 3 % en 23 años y al 3,5 % en sólo 20 años. En algunos países de América latina la población crece un 3,5 % anual; como región, la población de América latina crece un 2,8 %; la de Europa, un 0,9 %; la de Asia, un 2 %; la de Africa, un 2,3 %, y la del mundo considerado globalmente crece un 1,9 %.

El demógrafo necesita contar para su análisis con una información que permita construir la *ecuación demográfica*. En los censos de población, que los países generalmente realizan cada diez años, se obtienen los volúmenes de población; en los registros civiles se obtienen las estadísticas correspondientes a nacimientos y defunciones, calculándose a partir de estos elementos los movimientos migratorios ocurridos en el período.

Los censos contienen información sobre ciertas características o atributos de la población, como la edad, el sexo, la ocupación, el lugar de residencia, la escolaridad, el estado civil, etc., características que definen una situación o estado de la población en un momento determinado (fecha del censo); a este estado se le denomina composición de la población según la características de que se trate; por ejemplo, la distribución relativa de la población en grupos de edad se denomina composición de la población por edad. El demógrafo no sólo se preocupa de estudiar la composición según atributos demográficos propiamente dichos, como la edad y el sexo –relacionados biológicamente con la fecundidad y la mortalidad–, sino también según los socialmente definidos, como el estado civil, lugar de residencia, ocupación, escolaridad, etcétera. Los procesos demográficos en su íntima relación con la composición de la población constituyen el objeto fundamental en el estudio de la población humana. La *ecuación demográfica* plantea preguntas sobre aquellas situaciones sociales, económicas y culturales que condicionan el comportamiento en los procesos demográficos: mortalidad, fecundidad y migración; en seguida se determina el efecto de este comportamiento en la tasa de crecimiento y en la composición por atributos de la población; por último, se estudian las consecuencias que sobre la sociedad ejercen la velocidad del crecimiento y la composición de la población.

Una mujer que se casara joven, apta para la procreación, que viviera junto a su marido durante el período de posibilidad de embarazo (de 15 a 49 años de edad), que no hiciera intentos para evitar o restringir la concepción o viabilidad del nacimiento y dando el pecho a sus hijos, llegaría a los 49 años de edad habiendo dado a luz diez nacimientos vivos aproximadamente.

EL HOMBRE, CAUSA PRINCIPAL DEL DETERIORO AMBIENTAL

ELOINA AGUILAR DE PAZ

El grave deterioro de nuestro entorno natural y urbano ha originado que diversos sectores de la sociedad estén cada día más atentos a los problemas del entorno ecológico. La crisis ambiental, producto principalmente del cómo nos hemos desarrollado, ha dejado a nuestro país, entre otras calamidades, suelos erosionados en más de la mitad del territorio; vegetación natural en sólo 30 por ciento de la superficie, altos índices de contaminación en 11 de las principales cuencas y una lista de especies en peligro de extinción la cual se incrementa día con día.

La conciencia que se tiene sobre estos problemas no es igual en los diversos sectores que integran a la sociedad. Existen grandes brechas en cuanto al entendimiento de los problemas entre gobernantes, científicos, comunicadores, miembros de asociaciones civiles, defensores del medio ambiente y el público en general.

A pesar de que en nuestro país los medios masivos de comunicación se han constituido en las principales fuentes de información, así como de formación de criterios y valores, su participación en la problemática ambiental es todavía escasa.

Además de dar a conocer los problemas ambientales cotidianamente, los medios informativos pueden establecer un importante vínculo entre los respectivos sectores de la sociedad, en virtud de que poseen un potencial educativo y transformador que debe ser tomado en cuenta.

Con la reciente aceleración de la crisis ambiental, que afecta a los habitantes de las zonas rurales y urbanas, el término "ecología", originalmente nombre que se le daba sólo a una ciencia, empezó a denotar muchos otros aspectos.

El vocablo abandonó claustros universitarios y apareció en boca de políticos, periodistas, amas de casa, etcétera, extendiéndose enormemente, al grado de que ahora hay dietas "ecológicas", parques "ecológicos", psicoanálisis "ecológicos", motores "ecológicos", y a casi cualquier cosa se le puede añadir el calificativo de "ecológico", sobre todo si se quiere vender o promover, comercial o políticamente.

El hombre se aprovecha de —o interfiere en— todos los niveles de la jerarquía ecológica. En nuestro país, la problemática estrictamente ecológica (la de los medios silvestres o poco transformados por el hombre), así como la de los ámbitos urbanos o agrícolas muy transformados, es sumamente grave y amenaza seriamente el futuro cercano de amplias capas de la población.

LA CONTAMINACION PONE EN RIESGO LA SALUD

La contaminación de aire, agua y suelo afecta ya seriamente la salud humana. La creciente erosión y el agotamiento de mantos acuíferos pone en riesgo la base de la producción primaria.

La destrucción de bosques y selvas, el comercio ilegal de flora y fauna y la explotación irracional de especies acaba con una inmensa riqueza cultural, científica y económica, y aun pudiera causar el colapso o la transformación brusca de procesos indispensables para el ser humano, como es el caso de los cambios globales que nuestra nación sufrirá junto con las del resto del mundo, en el siglo venidero.

La complejidad y gravedad de estos problemas requiere de un esfuerzo serio e integrado de todos los sectores sociales. Entre otras acciones es imperativo formar recursos humanos, desde investigadores hasta técnicos, incluidos comunicadores a todo nivel, plantear alternativas de desarrollo agropecuario que permitan aprovechar sostenidamente la diversidad ecológica del país, promover una política demográfica equilibrada, hacer explícitos los costos ambientales de las acciones de los correspondientes grupos sociales y responsabilizar de su pago a los causantes.

En fin, es necesario acelerar la marcha hacia un desarrollo ecológico en que el medio ambiente aparezca como uno de los componentes esenciales de cualquier escenario futuro, y no como hasta ahora, cual si fuera el dueño de la casa, al que no invitamos a la fiesta.

LECTURA II-2-11

EXCELSIOR 16-B Sábado 2 de Marzo de 1974

El Desierto de las Vasijas Rotas

El Redescubrimiento de Shahr-I-Sokhta: Ciudad que se Acabó por el Abuso de la Naturaleza

TEHERAN, 1o. de marzo. ANSA)—Un vasto desierto, situado entre Irán y Afganistán, a mil metros sobre el nivel del mar, se veía en su aridez cubierto de platos, vasijas y ánforas rotas. ¿Cómo se encontraba en esta zona despoblada y desamparada todo este curioso material arqueológico? El "desierto de las vasijas rotas" había sido descubierto en 1916 por el arqueólogo inglés Aurelio Stein. Después otros arqueólogos, venidos de todas partes del mundo, trataron de arrancar a las arenas su secreto. Ahora una misión arqueológica italiana, que trabajó allí de 1968 hasta fines de 1973, ha resuelto el problema.

Tras largo y duro trabajo de excavación, los arqueólogos italianos devolvieron a luz estructuras de una antigua ciudad que, al decir de eminentes expertos como Renata de Paolis y Sergio Maggioli, "totalmente parecida a las ciudades modernas, con grandes edificios y amplias calles, con su cementerio ubicado lejos del centro habitado, y con una zona destinada a vaciadero de basuras". El nombre de esta ciudad era Shahr-I-Sokhta. Fue fundada y se desarrolló en una época en que el desierto no era desierto, sino una inmensa llanura verde, regada por un río. Y, al igual que las ciudades modernas, Shahr-I-Sokhta tenía sus industrias distribuidas en barrios apartados o centros satélites, donde existieron más de treinta fábricas de cerámicas, cuyos productos daban vida a un floreciente comercio interior y exterior.

¿Cómo fue que la fértil zona se convirtió en desierto y la ciudad quedó sepultada en las arenas? Los arqueólogos hablan de una especie de desastre ecológico. Según los estudiosos de la misión italiana, la vida de Shahr-I-Sokhta se desarrolló en cuatro periodos. El primero se inició hace unos 5,000 años; el último data, probablemente, de la época en que vivió Jesucristo. Se ha comprobado que los edificios nuevos siempre se construyeron sobre los cimientos de los viejos y que también se usaron los fragmentos de los objetos de cerámica como materiales de construcción. El último estrato, correspondiente al último periodo, es el que ha dejado a la vista, mezclados con la arena y unidos por una costra salina, los fragmentos de platos, vasijas y ánforas.

Parece que la destrucción de la ciudad debe atribuirse a la inexperiencia de sus habitantes en materia de ambiente, los cuales no se limitaron a utilizar el agua del río, sino que, después de haber logrado regar cien mil hectáreas, quisieron extender el riego a toda la región. Y resultó que la vasta red de canales y acequias agotaron el caudal del río, pues se le quitó más agua de la que su nacimiento y sus afluentes podían proveerle. El agotamiento del río parece haber sido la causa de la catástrofe. Bruscamente se alteró el equilibrio hombre-naturaleza, el caudal del río disminuyó irremediablemente, la agricultura quedó afectada hasta el punto de desaparecer totalmente. Hoy se diría que fue un desastre ecológico. Podemos imaginar lo que sucedió en los largos periodos de carestía: hambre, muerte, destrucción. Y, para colmo, las escasas aguas del río se volvieron saladas y fueron cubriendo con una capa salina las ruinas de la ciudad. El viento, que en esta zona a veces sopla a 150 kilómetros por hora, destruyó con su poder erosivo los muros de la ciudad, llevándoselos a lo largo de milenios bajo forma de polvo, y dejando en el desierto solamente esta gran cantidad de fragmentos de cerámicas.

LECTURA 11-2-12

Contaminación e higiene ambiental

La contaminación es un cambio perjudicial en las características físicas, químicas o biológicas de nuestro aire, nuestra tierra o nuestra agua, que puede afectar o afectará nocivamente la vida humana o la de especies beneficiosas, nuestros procesos industriales, nuestras condiciones de vida y nuestro acervo cultural, o que puede malgastar y deteriorar, o malgastará y deteriorará, nuestros recursos de materias primas. Los elementos de contaminación son los residuos de cosas que hacemos, utilizamos y arrojamos. La contaminación aumenta no sólo porque, a medida que la gente se multiplica, el espacio disponible para cada persona se hace más pequeño, sino también porque las demandas por persona crecen continuamente, de modo que aumenta con cada año lo que cada una de ellas desecha. A medida que la gente se va amontonando en la tierra, ya no hay "escapatoria" posible. El bote de la basura de una persona es el espacio vital de otra.*

(A los elementos de contaminación de "desecho" debemos añadir los que son producto secundario del transporte, la industria y la agricultura: al extenderse estas actividades humanas lo hace también la contaminación.)

* De la introducción a *"Waste Management and Control"*, informe del Committee on Pollution, National Academy of Sciences, 1966.

Hemos insistido ya mucho en la afirmación de que la contaminación constituye actualmente el factor limitativo más importante para el hombre (véanse especialmente las páginas 37, 447 y 467). Los esfuerzos que habrán de dedicarse ahora a la reducción y la prevención de la contaminación proporcionarán tal vez la retroalimentación negativa que impedirá que el hombre saquee por completo los recursos de la tierra destruyéndose con ello a sí mismo. El problema sólo difiere, en el mundo estrictamente dividido del hombre, en cuanto al aspecto; en efecto, en los países subdesarrollados (el 70 por 100 de la población del mundo), la escasez de alimentos y recursos disponibles va acompañada de contaminación y enfermedad crónicas causadas por los desechos humanos y animales, en tanto que en los países ricos o desarrollados (30 por 100 de la población mundial), la contaminación química agroindustrial es actualmente más grave que la contaminación orgánica. Además, la contaminación global del aire y el agua, que proviene en su mayor parte de los países desarrollados, amenaza a todo el mundo (véase Singer, 1969). En todos los capítulos de la parte 1 de este texto se ha señalado la importancia de los principios ecológicos en relación tanto con las causas cuanto con los remedios de determinados problemas particulares de la contaminación. Puesto que para enfrentarse a la contaminación, tanto en la escala local como en la global, el modo de enfoque ecosistemático u holístico es necesario, vamos a tratar, en este capítulo, de presentar una visión de conjunto de la cuestión, seguida de un breve resumen de algunas de las áreas de problemas que están atrayendo la atención pública de modo muy general. Las reformas y soluciones en estas áreas particularmente críticas señalarían acaso el camino de la solución total.

Los mejores libros de texto sobre la población son indudablemente, con mucho, el informe de comisión preparado por la Academia Nacional de Ciencias o por el Comité Asesor del Presidente en Cuestiones Científicas, como, por ejemplo, el informe Tukey (1965), *"Restoring the Quality of Our Environment"*, el informe Spillhaus (1966) *"Waste Management and Control"*, el informe Daddario (1966), *"Environmental Pollution"*, y el informe de Miller (1967), *"Applied Science and Technological Progress"*. Estos y otros informes que indudablemente se irán publicando pueden obtenerse, a un costo muy moderado, del Superintendente de Documentos de la Academia Nacional de Ciencias, de Washington, D. C. Un breve resumen en edición de bolsillo de las diversas clases de contaminación y su supresión la proporciona Bernarde (1970), al paso que introducciones al estudio de la contaminación del aire las proporcionan Hynes (1960), Hawkes (1963) y Warren (1971). Otras referencias se irán indicando en las secciones que siguen.

1. EL COSTO DE LA CONTAMINACION

El costo de la contaminación se mide en tres formas, todas las cuales no hacen más que agravar todavía la terrible carga, cada

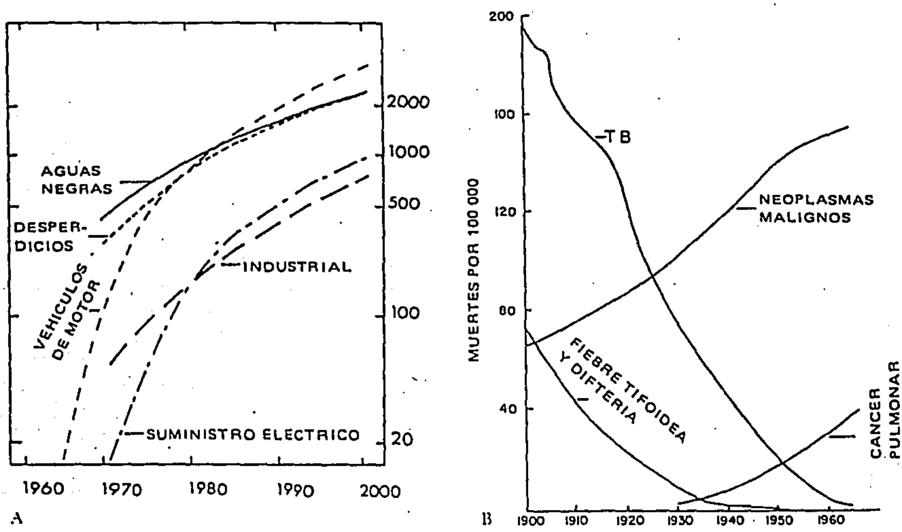


FIG. 16-1. El costo de la contaminación. *A*, Presupuesto de costos para el consumidor, en millones de dólares, del control de los contaminantes primarios en la Cuenca del Río Delaware. Obsérvese que las agua negras y los desperdicios (desechos sólidos) absorbieron la parte principal de los impuestos de 1970, pero que el costo del control de la contaminación del desarrollo industrial, de los vehículos de motor y de la producción de energía aumentará de 10 a 100 veces para el año 2000, a menos que la expansión futura se planifique y controle. (Gráfica preparada con datos de *"Waste Management and Control"*, National Academy of Sciences, véase Spilhaus, 1966.) *B*, El descenso impresionante de la mortalidad debida a enfermedades infecciosas (tuberculosis, fiebre tifoidea y difteria), acompañado del ascenso igualmente impresionante de dolencias malignas, que se supone relacionadas con la contaminación. (Datos de los Informes de U. S. Public Health de 1966.)

vez más intolerable, que pesa sobre la sociedad humana, a saber: 1) La pérdida de recursos a causa de una explotación innecesariamente antieconómica, ya que, según la expresión del informe de la Academia Nacional, la "contaminación es a menudo un recurso fuera de lugar". 2) El costo de la supresión y el control de la contaminación, un proyecto de muestra del cual se muestra en la figura 16-1, *A;* obsérvese que mientras la limpieza de las aguas negras y los desechos (desperdicios) es actualmente la más cara, el costo de la supresión de los desechos mucho más venenosos de los vehículos de motor y la producción de energía se calcula que se multiplicará por 100 en los próximos 30 años (suponiendo la continuación de la clase de desarrollo urbano que se examinó en la sección 8 del capítulo anterior). 3) El costo en salud humana. Es probable que el reconocimiento de este aspecto del costo de la contaminación contribuirá más a alarmar al individuo humano, egoísta y centrado en sí mismo, con respecto al peligro creciente, que cualquier otra clase de costos, los que se dejan esconder demasiado bien por manipulaciones a breve plazo de "costos y beneficios" al nivel local. La figura 16-1, *B* es un modelo impresionante de lo que está ocurriendo en el sector de la sanidad pública de Estados Unidos. En efecto, mientras la mortalidad humana por causa de enfermedades infecciosas muestra un descenso precipitoso, la mortalidad y las enfermedades debidas a afecciones respiratorias y cáncer, relacionadas con el medio, muestran un ascenso igualmente escarpado. En un estudio reciente del costo de la contaminación en salud humana, Lave y Seskin (1970) calculan que una reducción del 50 por 100 de la contaminación del aire en las solas áreas urbanas podría ahorrar dos mil millones de dólares anuales en el costo conjunto de atención médica y horas de trabajo perdidas por causa de enfermedad, y aun esto no incluye el "costo" de miseria humana y muerte o incapacidad causadas por los accidentes industriales y de automóvil. Estos autores documentan una relación estricta entre todas las enfermedades respiratorias y la contaminación del aire. A medida que las presiones sobre el cuerpo humano vayan aumentando, muchos científicos médicos temen un "revés" en materia de enfermedades infecciosas, no sólo a causa de la resistencia física reducida, sino también porque los virus (que en opinión de la mayoría se relacionan con el cáncer) y otros organismos patógenos se deslizarán cada vez en mayor número a través de las plantas de tratamiento del agua y de elaboración de alimentos a medida que la calidad del agua y de los alimentos se vayan deteriorando a la entrada. El tratamiento del agua y el tratamiento de los desechos (que hasta aquí se han tratado como problemas separados) han de enlazarse en un sistema de "recirculación", según se examinará brevemente en la sección 3 (véase también página 95). Las consecuencias behaviorales del hacinamiento y la quiebra de la estructura social que acompaña todo descenso en la calidad del medio ya se han señalado (véase pág. 278). En otro informe de la Academia Nacional, Maurice Visscher (1967) declara que la salud mental constituye probablemente en la actualidad la causa principal de enfermedad e incapacidad humana.

2. LAS CLASES DE CONTAMINACION

Clasificar la contaminación puede resultar tan difícil como clasificar los lagos u otros fenómenos naturales (véase capítulo 11, página 344). Por supuesto, las clasificaciones según el medio (aire, agua, suelo, etc.) y según el elemento contaminante (plomo, bióxido de carbono, desechos sólidos, etc.) son métodos de empleo muy generalizado. Cabe escribir y se escribirán, sin duda, voluminosos libros acerca de cada uno de estos componentes. Sin embargo, desde el punto de vista de la totalidad de la supresión de la contaminación (esto es, desde el punto de vista del ecosistema), importa que reconozcamos primero dos tipos básicos de contaminación.

Tenemos primero los *contaminantes no degradables,* esto es, los materiales y venenos, como los botes de aluminio, las sales mercuriales, las substancias químicas fenólicas de cadena larga y el DDT que o no se degradan o lo hacen sólo muy lentamente en el medio natural; en otros términos, substancias para las que no existe proceso de tratamiento natural alguno desarrollado que sea susceptible de compensar la intensidad de suministro del hombre al ecosistema. Estos contaminantes no degradables no sólo se acumulan, sino que además resultan a menudo "magnificados biológicamente" a medida que circulan por los ciclos biogeoquímicos y a lo largo de las cadenas de alimentos (véase en la página 81 la explicación del concepto de "magnificación biológica"). Además, se combinan con frecuencia con otras substancias del medio para producir toxinas complementarias. Para esta clase de contaminantes, la única "supresión" posible es la eliminación o la extracción, costosas, del sistema ambiental en que se apoya la vida. Si bien esto es posible en un pequeño navío espacial transitorio (véase cap. 20), la eliminación de estos contaminantes de la biosfera sería virtualmente imposible (¿cómo podríamos eliminar el plomo del aire que respiramos a menos de obligar a 200 mil millones de individuos a llevar máscaras antigas?). La solución obvia y razonable (pero es más fácil definir que llevar a la práctica) está en prohibir el derrame de tales materiales en el medio general (o, al menos, en controlar la intensidad de la entrada, con objeto de evitar la acumulación tóxica) o en dejar por completo de producirlos (esto es, en encontrarles substitutivos más degradables).

En segundo lugar hay los *contaminantes biodegradables*, como las aguas negras domésticas, que se dejan descomponer rápidamente por medio de procesos naturales o en sistemas de ingeniería (como la planta municipal de tratamiento de aguas negras), que refuerza la gran capacidad de la naturaleza para descomponer y poner nuevamente en circulación. En otros términos, esta categoría incluye aquellas substancias para las que existen mecanismos naturales de tratamiento de desechos. El calor, o la contaminación térmica, puede considerarse como perteneciente a esta categoría, puesto que es dispersable por medios naturales, al menos dentro de los límites impuestos por el equilibrio calórico total de la biosfera (véase cap. 3, sec. 1).

Surgen problemas, con el tipo de contaminación degradable, cuando la aportación al medio excede de la capacidad de descomposición o dispersión. Los problemas corrientes de los desechos de aguas negras resultan las más de las veces del hecho de que las ciudades han crecido más rápidamente que sus servicios de tratamiento. A diferencia de los materiales tóxicos no degradables, la contaminación por materiales degradables se deja resolver técnicamente mediante una combinación de tratamiento mecánico y biológico en parques seminaturales de eliminación de desechos (este concepto se ampliará en la sección 4). Una vez más, también aquí hay límites a la cantidad total de materia orgánica que puede descomponerse en un área determinada, así como un límite general de la cantidad de CO_2 liberada hacia el aire (véanse págs. 34 y 107). Si queremos evitar rebasar los límites de la biosfera, hemos de reservar algo por el estilo de 1.5 a dos hectáreas de espacio de tierra y agua dulce biológicamente productivo por persona (más los mares), según se sugirió en la sección 8 del capítulo precedente.

El contraste entre los efectos de las dos clases básicas de contaminación sobre la energía de los sistemas se muestra en el modelo gráfico de la figura 16-2. Los contaminantes degradables que pueden proporcionar energía (materia orgánica) o elementos nutritivos (fosfatos, carbonatos, etc.) aumentarán la productividad del ecosistema proporcionando un subsidio (véanse págs. 47 y 321) cuando la intensidad de entrada es moderada (gráfica superior, fig. 16-2). A altas velocidades de entrada se alcanza un margen crítico que se caracteriza a menudo por fuertes oscilaciones (los "auge y quiebra" de las floraciones algales, por ejemplo). Una entrada complementaria arriba de dicho nivel se convierte en presión, y el sistema resulta esencialmente envenenado por "demasiado de una cosa buena". La rapidez con que una situación no controlada puede cambiar de buena a mala contribuye a la dificultad de apreciar la contaminación y actuar sobre ella (lo que equivale a decir que la curva de intensidad, en forma de joroba, propende a tener un ápice muy agudo). Hasta qué punto este modelo sea aplicable (si substituimos "contaminación" por "población"), esto lo veremos en el capítulo 21. Como puede verse en la gráfica inferior de la figura 16-2, los materiales tóxicos presionan desde el principio; reducen cada vez más la productividad a medida que la cantidad aumenta, pero, también aquí podrá ocurrir que, a niveles bajos o crónicos, el efecto resulte difícil de descubrir.

LECTURA II-2-13

OBSOLETO, EL SISTEMA HIDRAULICO EN LA ZONA METROPOLITANA

ELOINA AGUILAR DE PAZ

Por su configuración geográfica, en vista de estar ubicada en una cuenca cerrada, sin salidas naturales para los escurrimientos, y a una altitud de 2,240 metros, sobre el nivel del mar, el sistema hidráulico de la ciudad de México es extremadamente complejo, pues además de controlar las frecuentes inundaciones en épocas lluviosas, se busca mantener el equilibrio mediante políticas adecuadas de saneamiento, control de la contaminación y uso racional del agua.

Con base en estadísticas de la UNAM, la ciudad consume en promedio 66 m^3 de agua por segundo, de los cuales, 80 por ciento (54 m^3/s) se extraen de la propia cuenca, y el resto (12 m^3/s) se importa de las cuencas del río Lerma y del río Cutzamala. Para su distribución, se dispone de más de 13,000 kilómetros de tuberías que forman una compleja red, misma que muchas veces tiene fugas que provocan pérdidas por alrededor de 20 por ciento del total del agua que consume el DF, y que bien podría abastecer a una población de casi 4.000,000 de habitantes.

El servicio de alcantarillado, señala Francisco Flores, de la Dirección General de Construcción y Operación Hidráulica del DDF, es proporcionado a 74 por ciento de la población. La que carece del servicio (26 por ciento), se ubica en la periferia de la ciudad, donde las colonias y poblados localizados en las partes más altas de la cuenca descargan sus aguas residuales en cauces y barrancas. Los también 13,000 kilómetros de cañerías que extraen alrededor de 40 metros cúbicos por segundo de aguas, derivan a través del tajo de Nochistongo y del portal de salida del Drenaje Profundo en el norte de la macrourbe.

Debido a la antigüedad del sistema, a la falta de mantenimiento adecuado y al hundimiento diferencial del terreno, se propician fugas y a la vez la entrada de aguas freáticas. Aunque es de suponer un escurrimiento al acuífero, la formación geológica en la área urbanizada ha protegido suficientemente las aguas, ya que los análisis del vital líquido proveniente de pozos no señalan evidencias de contaminación. La constante migración de los habitantes del interior de la República a la ciudad ha propiciado la invasión de tierras y los asentamientos irregulares en las partes altas de la cuenca, y provocado la deforestación; consecuentemente, el arrastre de sólidos por la erosión de los suelos; de ahí que las aguas broncas del poniente depositen en los colectores grandes cantidades de material sedimental, materia orgánica y otros desechos, lo cual impide su aprovechamiento.

El desarrollo industrial ha impuesto otro reto en la utilización de las aguas residuales por la aportación de desechos conteniendo altas concentraciones de materia orgánica, nutriente, metales pesados y contaminantes orgánicos sintéticos, entre otros.

DEGRADACION DEL ACUIFERO DE LA CIUDAD

Respecto del agua que se extrae del acuífero de la ciudad, cabe señalar como factores que han propiciado su degradación, la sobreexplotación y la infiltración de aguas contaminadas al extraer mayor volumen de agua de la que se infiltra. Asimismo, en las aguas pluviales se han detectado algunos metales pésados, y se sospecha la presencia de hidrocarburos y otras sustancias resultantes de la contaminación ambiental.

En las aguas superficiales del río Magdalena, una de las corrientes que se aprovechan actualmente, resulta alterada en tiempo de lluvias por materiales producto de la erosión de los suelos que le imparten turbiedad y color, además de cierta contaminación bacteriológica; de igual manera sucede con estas aguas en el poniente de la ciudad, donde se descubrieron alteraciones provocadas por los asentamientos humanos localizados alrededor, o aún dentro de los vasos de almacenamiento.

De acuerdo con los mismos estudios, la calidad de las aguas residuales varía en función de su localización geográfica. Dentro del Distrito Federal, en la porción norte, se encuentra alta influencia industrial y disminuye conforme avanza hacia el sur, donde se cuenta con aguas residuales básicamente domésticas. Acerca de las aguas subterráneas, el análisis estadístico de la calidad del agua proveniente del acuífero del Valle de México indica los siguiente resultados: 93 por ciento de las muestras cumplen las normas y los criterios que sancionan la calidad del agua, para fines de bebida; 93 por ciento en aspectos foto-químicos, 88 por ciento en químico-inorgánicos, 89 por ciento en químico-orgánicos, 93 por ciento en virus, 99 por ciento en parásitos y 96 por ciento en mutágenos, de lo cual se induce que las aguas residuales alcanzan los mayores índices de contaminación. Les siguen en importancia las superficiales, antes de su captación en el drenaje, y finalmente las pluviales y las existentes en el acuífero.

A la fecha se han definido criterios para doce usos potenciales del agua, que incluyen desde el consumo humano hasta el agropecuario, pasando por el municipal, industrial y para la recarga del acuífero. Sin embargo, es necesario construir una planta de gran capacidad que permita implantar tecnología necesaria para el control automático de los procesos de tratamiento y la metodología para la medición en tiempo real de la calidad del agua.

La salud de los usuarios es el fin que se procura lograr en los servicios de agua potable y alcantarillado, razón por la cual se recomienda la implantación de un sistema de vigilancia epidemiológico que permita localizar cualquier cambio indeseable al respecto, además de cambiar las estructuras de administración, a manera de que se constituyan en sistemas autofinanciables.

LECTURA 11-2-14

Aumentó en un año la producción petrolera en 200 mil barriles diarios

■ La cuota actual, la más alta registrada en la historia del país ■ Estados Unidos se ha mantenido como el principal comprador de crudo mexicano en la última década

Emilio Lomas M. □ De julio de 1990 al mismo mes de este año la plataforma petrolera de producción del país aumentó 200 mil barriles diarios en promedio, al pasar de 2 millones 479 mil a 2 millones 679 mil barriles por día.

Precisamente, cuando se inició la crisis en el Pérsico, México aumentó el bombeo de hidrocarburos en 100 mil barriles por día para incrementar los envíos de petróleo hacia Estados Unidos y, posteriormente, entre los últimos dos meses de 1990 y los primeros seis de 1991 extrajo 100 mil barriles más.

El secretario de Energía, Minas e Industria Paraestatal, Fernando Hiriart, comentó escuetamente a este respecto que "mientras la explotación de crudo se esté realizando en condiciones técnicamente adecuadas, no hay ningún riesgo".

Así, aunque la cuota actual de producción es la más alta registrada en la historia del país, el secretario de Energía considera que no se están sobrexplotando los yacimientos de crudo.

En julio de 1990 la plataforma petrolera de producción se ubicó en 2 millones 479 mil barriles diarios. Al mes siguiente pasó a 2 millones 540 mil y en septiembre llegó a 2 millones 620 mil barriles diarios.

Entre los meses de octubre, noviembre y diciembre la plataforma de extracción de hidrocarburos fue de 2 millones 638 mil, 2 millones 659 mil y 2 millones 658 mil barriles por día, respectivamente. Ya para el primer semestre del año la extracción promedio de crudo se ubicó en 2 millones 679 mil barriles.

Según los Indicadores Petroleros de los primeros seis meses del año y los últimos dos Anuarios Estadísticos de la paraestatal, en el primer semestre la plataforma de producción de hidrocarburos se ubicó en 2 millones 679 mil barriles por día.

De este monto, 71.9 por ciento provino de la zona marina de Campeche —1 millón 905 mil barriles diarios—; del Mesozoico Chiapas Tabasco se extrajo 21.9 por ciento —587 mil barriles—, y el restante 7 por ciento, unos 187 mil barriles, de las zonas norte, centro y sur del país.

Según la información consultada, en los últimos diez años Pemex se ha consolidado como una de las principales empresas del mundo, al optimizar la utilización de su capacidad instalada en producción, refinación y exportación de hidrocarburos y sus derivados.

Tan solo al cierre del primer bimestre de 1991 la plataforma de exportación del país aumentó en 79 mil barriles diarios al pasar de 1 millón 277 mil —promedio anualizado de 1989 y 1990—, a 1 millón 356 mil barriles diarios. En el primer semestre del año se enviaron al llamado Sistema Nacional de Refinación de Pemex 1 millón 383 mil barriles por día, y el resto de la cuota de producción se destinó al mercado externo.

Estados Unidos, a su vez, en ese decenio se ha mantenido como el principal comprador de crudo mexicano. Tan solo en febrero de 1991 las empresas estadunidenses adquirieron 59 por ciento del total de los envíos de petróleo crudo hacia el exterior del país, es decir, 800 mil barriles en promedio diario.

Esta cifra fue superada en 1983, cuando esas empresas petroleras y el gobierno estadunidense —para su Reserva Estratégica— adquirieron conjuntamente 823 mil barriles de un total exportado de 1 millón 537 mil barriles por día. En febrero de este año se enviaron 116 mil barriles más hacia el vecino país.

En este esfuerzo, se explica, mucho han tenido que ver las labores de exploración de yacimientos petroleros realizadas por los técnicos mexicanos. Durante 1990 prácticamente se duplicaron estos trabajos, aunque las reservas del país tanto de petróleo crudo como de gas natural decayeron.

Pemex precisa que en 1990 se hallaron siete yacimientos petrolíferos, tres de gas natural y un pozo —a mayor profundidad— en un campo ya conocido, elevando la producción del país en 1.4 por ciento hasta llevarla a 2 millones 548 mil barriles diarios, mientras que las reservas de petróleo y gas descendieron en un promedio de 2 por ciento.

Precisa que se han realizado grandes esfuerzos por aumentar la eficiencia de los pozos petroleros, aunque las reservas probadas de petróleo pasaron de 45 mil 300 millones de barriles a 44 mil 600 millones entre 1989 y 1990, mientras que las reservas de gas natural pasaron en ese mismo periodo de 72 mil 700 billones a 71 mil 500 billones de pies cúbicos. Así, las reservas totales del país se ubicaron al cierre de 1990 en 65 mil 500 millones de barriles, cifra 1.4 por ciento inferior a la registrada un año antes.

Así, los indicadores de la industria señalan que la plataforma petrolera de exportación del país aumentó en 11 por ciento entre febrero de 1990 y el mismo mes de este año. Especifica que entre 1980 y 1990 se le vendieron a Estados Unidos 545, 533.3, 726.7, 823.2, 750.9, 751.5, 625.3, 639.5, 684.5, 725.5 y 721 mil barriles, en ese orden, mientras que el promedio del primer bimestre de este año pasó a 739 mil barriles —en enero fueron 684 y en febrero 800.

Pemex está perforando más pozos y a mayor profundidad, lo que ha elevado notablemente sus costos. En 1990 perforó 132 que, comparados con los 82 de 1989 reflejan un incremento de 50 pozos. La actividad exploratorio de México incluyó ese último año 51 pozos de exploración y 81 de desarrollo y la mayor parte de la actividad se efectuó en el distrito de Villahermosa, mientras que ocho de exploración y 28 de desarrollo fueron perforados en el golfo de Campeche.

Petróleos Mexicanos informó por su parte que destinó para este año un presupuesto de alrededor de 2 billones de pesos para realizar sus labores de perforación y estudios de geología superficial y de subsuelo.

La Jornada
VIERNES 30 DE AGOSTO DE 1991

LECTURA 11-2-15

Recursos

1. CONSERVACION DE LOS RECURSOS NATURALES EN GENERAL

La conservación en el sentido más amplio es probablemente la aplicación más importante de la ecología. Por desgracia, el término "conservación" sugiere la idea de "atesoramiento", como si se tratara simplemente de racionar unas provisiones limitadas de tal modo que quedara algo para el futuro. Al público en general, el "conservador" se le presenta con demasiada frecuencia como la persona antisocial que es contraria a toda clase de "progreso". Pero aquello contra lo cual está el conservador verdadero es *el progreso no planeado que vulnera las leyes tanto ecológicas como humanas*. El verdadero objeto de la conservación es, por consiguiente, doble, a saber: 1) asegurar la preservación de un medio ambiente de calidad que cultive tanto las necesidades estéticas y de recreo como las de productos, y 2) asegurar un rendimiento continuo de plantas, animales y materiales útiles, estableciendo un ciclo equilibrado de cosecha y renovación. Así, pues, una señal de "prohibido pescar" en un estanque podrá no constituir acaso una conservación tan buena como un plan de administración que permita la extracción de varios centenares de Kg de pescado por área año tras año. Por otra parte, si el estanque proporciona el suministro de agua a una ciudad, entonces algunas restricciones impuestas a la pesca podrán constituir acaso un procedimiento deseable de conservación. Los inconvenientes de la política ampliamente invocada del uso múltiple y las ventajas de un plan de "compartimiento" para conseguir el equilibrio deseado entre la producción y la protección se examinaron ya en detalle en el capítulo 9, sección 3.

Los recursos naturales se dividen en dos: renovables y no renovables. Los depósitos de carbón mineral, hierro y petróleo no son renovables, como lo son los bosques o los peces; las fuentes de nitrógeno, hierro y energía son renovables, igual que los recursos vivos. El hombre nunca carecería de materiales vitales, con tal que quisiera adaptar el volumen de su población y de su demanda de recursos al nivel, o por debajo del nivel, que permite a los ciclos biogeoquímicos funcionar de modo que tanto los materiales como los organismos "vuelvan a reunirse" tan rápidamente como se "dispersan" (véase cap. 4, sec. 1).

Aunque el "atesoramiento" no constituya tal vez a largo plazo un objetivo de buena conservación, hay casos, con todo, en los cuales una restricción total del uso sí constituye una buena medida de conservación. El poner de lado áreas naturales para el estudio y el goce estético constituye un ejemplo de ello. Con el aumento de la población humana, se hace cada vez más importante reunir muestras adecuadas de las comunidades naturales principales, para conservarlas inalteradas en vista del estudio y el goce de las mismas por el hombre. Toda vez que el hombre establece su civilización y sus cadenas alimenticias modificando los ecosistemas naturales (y no creando sistemas totalmente nuevos), importa que tengamos muestras de comunidades no alteradas, para el estudio; únicamente con estos "controles" pueden juzgarse adecuadamente los efectos de las modificaciones producidas por el hombre, evitándose prácticas nocivas. A ningún científico de laboratorio se le ocurrirá emprender un experimento sin un control adecuado y, sin embargo, el ecólogo práctico se ve a menudo llamado a apreciar los efectos de los experimentos del hombre sin disponer de control alguno.

Según ya se indicó, el paso de la "conservación de interés especial" a la "conservación del ecosistema total" contribuye a afirmar el hecho, en la mente del público en general, de que el hombre es parte de un medio ambiente complejo que debe estudiarse, tratarse y modificarse como un todo, y no sobre la base de "proyectos" aislados. Para destacar una vez más este punto, no sabríamos hacer nada mejor que citar un pasaje de las obras del finado Aldo Leopold. Este fue el elemento más destacado de América entre los iniciadores de la ecología aplicada. Se trata del pasaje siguiente, escrito hace 30 años (Leopold, 1941), en el que se expresa muy bien la necesidad de una filosofía y una comprensión sólidas del principio del ecosistema.

"El hombre mecanizado ha rehecho el paisaje, y está remodelando ahora las aguas. El ciudadano prudente, que nunca confiaría su reloj o su automóvil a un aficionado chapucero, somete libremente sus lagos a drenajes, rellenos, dragados, contaminaciones, estabilizaciones, control de mosquitos, control de algas, control de comezón del nadador, y además, la introducción en ellos de cualquier pez capaz de nadar. Y lo mismo ocurre con los ríos. Los forzamos entre terraplenes y diques, y luego los dejamos correr con dragados, canalizaciones y cieno procedente de un cultivo inapropiado.

"La buena disposición del público en cuanto a aceptar y pagar por estas intromisiones contradictorias en el orden natural proviene, creo yo, de cuando menos tres falacias del pensamiento. Primero, cada una de estas intervenciones se considera como un proyecto separado, porque es llevado a cabo por una oficina o una profesión separadas, y como ejecutado pericialmente, porque los que las proponen son gente preparada y especializada en sus respectivos campos limitados. El público no sabe que las oficinas y las profesiones pueden anularse en ocasiones una a otra, y que la pericia puede anular la comprensión. En segundo lugar, se supone que cualquier mecanismo construido es superior al mecanismo natural. Sin duda, el acero y el hormigón han creado mucho bienestar; por consiguiente, cualquier cosa construida por ellos parece deber ser buena. En tercer lugar, sólo percibimos el comportamiento orgánico en aquellos organismos que hemos creado nosotros mismos. Sabemos que los gobiernos y los motores son organismos, y que modificar alguno de ellos puede afectar el conjunto. Pero no sabemos, en cambio, que esto es así también por lo que se refiere a los suelos y al agua.

"Así, pues, la gente, demasiado prudente para permitir un remiendo precipitado de nuestra constitución política, acepta, sin embargo, sin chistar la enmienda más radical de nuestra constitución biótica."

A Leopold no le hubiera sorprendido lo que ahora se ha convenido en llamar *reveses ecológicos* o *bumerangs ecológicos*. Podemos definir el revés ecológico como una consecuencia perjudicial imprevista de una modificación del medio, que anula la ganancia perseguida o inclusive, como sucede con tanta frecuencia, crea más problemas que los que resuelve. La razón de que las consecuencias perjudiciales sean "imprevistas" proviene tanto de ideas erróneas del público cuanto, como tan bien se expresa en la cita precedente, de estudios y cálculos previos inapropiados del efecto de la tecnología sobre el medio y sobre la gente, cuyas vidas se desbaratan de modo tan perentorio. Farvar y Milton (1969) y Cahn (1968) describen cierto número de graves reveses ecológicos al nivel internacional, y éstos y otros casos se documentarán en un libro a punto de salir (está en prensa), de Milton. La construcción de enormes diques en países tropicales subdesarrollados constituye tal vez un buen ejemplo. Uno de estos diques es el del Río Zambezi, en Africa.

Construido ante todo con el propósito de producir energía hidroeléctrica, produce al propio tiempo toda una serie de problemas "imprevistos". La pesca no ha compensado la pérdida de tierras de pasto y de cultivo, como lo habían "predicho" los promotores del proyecto (pero no, en cambio, los ecólogos de lago, que tienen mayores conocimientos, pero no fueron consultados; véase pág. 344). La amplia orilla del lago aumentó el hábitat de las moscas tsetsé, con un brote grave de enfermedad en el ganado (y también en el hombre, en el caso de los diques del Nilo). El desplazamiento de gente y cultivos ha creado erosión del suelo y también solevantamientos sociales, al ser trasladada aquélla a tierras menos buenas o a ciudades que no estaban preparadas para acogerla. Por otra parte, la "corriente regulada", río abajo del dique, resultó ser más perjudicial que la inundación normal, que anteriormente enriquecía año tras año, sin costo alguno, las tierras del fondo (véase el concepto del "ecosistema de nivel de agua fluctuante", cap. 9, pág. 297). A medida que la fertilidad de estas tierras disminuye, hay que importar fertilizantes caros, que la gente no puede ahora pagarse. Transcurrirán muchos años antes de que se lleguen a conocer los efectos totales. Otras clases de reveses, producto de los pesticidas y de la agricultura industrializada en general se comentarán en la sección 3 del capítulo 16.

Al paso que algunos de los reveses ecológicos más sobresalientes son fomentados en los países subdesarrollados por los tecnócratas de los países desarrollados, aumenta también la preocupación, en éstos, por lo que está aconteciendo en ellos. En Estados Unidos, por ejemplo, es absolutamente necesario que los ciudadanos encuentren la manera de romper el círculo vicioso de la "política del favoritismo provincial", que fomenta una serie al parecer interminable de dragados, canalizaciones de ríos y diques, que van mucho más allá de cualquiera necesidad real. Ocurre con demasiada frecuencia que medios que están en buen estado y se utilizan con provecho por el hombre, se "reorganicen", con graves costos a cargo del contribuyente, por razones extemporáneas; por ejemplo, el control de inundaciones allí donde no se necesita, o la construcción de canales interiores para barcos de carga, allí donde los transportes por ferrocarril o por camión existentes están en quiebra por falta de negocios. Ya es hora de que inclusive las naciones opulentas se den cuenta de que no pueden seguir permitiéndose gastar el dinero de los contribuyentes reestructurando un medio que está ya en buen estado, cuando este dinero se necesita urgentemente para reconstruir ciudades y sociedades humanas que se encuentran en un estado angustioso. Todo esto no significa que el hombre debiera cesar de modificar la naturaleza, sino solamente que un estudio y una planificación cuidadosos han de preceder a las modificaciones proyectadas, para asegurarse que resultará de ellas un beneficio neto para aquél, y no simplemente un beneficio económico pasajero para un interés creado.

2. LOS RECURSOS MINERALES

Hasta no hace mucho, poca atención se prestaba a la conservación de los recursos minerales, porque se suponía que los había suficientes para varios siglos y que nada podía hacerse para protegerlos. *Está ahora claro, en cambio, que ambos supuestos son profundamente erróneos.* Cloud (1968, 1969 y 1970) ha practicado un inventario de las reservas y ha examinado las perspectivas. Introduce (en su trabajo de 1969) dos conceptos que resultan útiles para apreciar la situación. El primero es el *cociente demográfico*, que designaremos como "Q":

$$Q = \frac{\text{recursos totales disponibles}}{\text{densidad de población} \times \text{consumo per capita}}$$

A medida que este cociente baja, lo hace también la calidad de la vida moderna; y ahora baja a una velocidad espantosa, porque los recursos disponibles no pueden hacer más que bajar (o acabarán por hacerlo) a medida que aumenta el consumo. Aun si los recursos disponibles pudieran mantenerse constantes por nueva circulación y otros medios, aun así la situación empeoraría si la población, y especialmente el consumo per capita, aumenta a una velocidad rápida. Así, por ejemplo, en Estados Unidos, el crecimiento económico y tecnológico basado en la explotación de los recursos naturales aumenta a razón del 10 por 100 anualmente (el tiempo de duplicación es de unos 7 años) y el crecimiento urbano aumenta a razón del 6 por 100 anual, mientras que el aumento de la población es solamente de un 1 por 100 más o menos. Si el mundo subdesarrollado, con sus enormes poblaciones, aumentara su empleo per capita de minerales (y de los combustibles fósiles necesarios para extraerlos y utilizarlos) a un nivel aproximado siquiera del de Estados Unidos, graves carestías se producirían mañana mismo. En los países desarrollados, las demandas per capita de un metal relativamente escaso como el cobre habrán triplicado, se calcula, para el año 2 000 (!). El aluminio es citado por Cloud como ejemplo de la situación general, porque no se trata, en sentido relativo, de un metal escaso. Antes de 1945, Estados Unidos producía la mayor parte de la mena (la bauxita) que utilizaban, pero, para 1960, dicho país importaba tres veces más mineral del que extraía de sus propios yacimientos. Resulta obvio, pues, que no podemos permitirnos por más tiempo los botes de cerveza y de refrescos de aluminio utilizables "una sola vez" (ni, por lo demás, otros usos que excluyen la nueva circulación), sino que necesitamos substituirlos o reintegrarlos al ciclo, o hacer ambas cosas a la vez. Por regla general, los países industrializados ya no se bastan a sí mismos ni en minerales ni en combustibles fósiles: dependen cada vez más de la explotación de estos recursos naturales de la parte subdesarrollada del globo, en donde, por supuesto, la reserva no es ilimitada, ni puede aumentarse y, por consiguiente disminuirá a medida que estos países empiecen a servirse de sus propios recursos.

El otro concepto introducido por Cloud es el modelo gráfico de las *curvas de vaciamiento*, que pueden verse en la figura 15-1. Con la práctica corriente del "extráigase, utilícese y tírese", se prevén unos grandes auge y quiebra, como lo muestra la curva *A*. El cálculo del tiempo es incierto, porque faltan datos, pero la "quiebra" podría iniciarse en este siglo, con todo, porque es el caso que ciertos metales clave, como zinc, estaño, plomo (que se necesita para el automóvil eléctrico), cobre y otros metales, podrían agotarse en 20 años por lo que se refiere a los recursos de explotación cómoda. Y en forma análoga, los combustibles como el uranio-235 y el gas natural podrían asimismo haber desaparecido para entonces. Si se iniciara ahora un programa de conservación de minerales, que implicara restricciones, substituciones (el empleo menor,

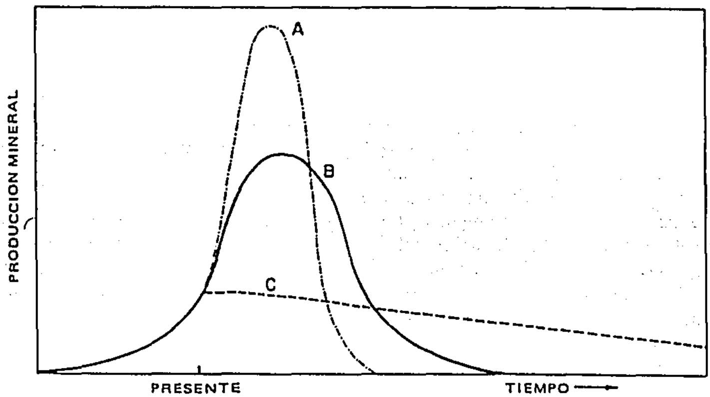


FIG. 15-1. Esquemas alternos de agotamiento de recursos minerales. *A*, Esquema de extracción rápida y del agotamiento de minerales (o de otras materias primas no renovables) que se producirá siguiendo la práctica actual de "aprovechamiento, empleo y desecho" irrestricta. Algunos metales básicos se habrán "agotado" antes del año 2 000, si este tipo de explotación se prosigue. *B*, El tiempo de agotamiento puede prolongarse mediante recirculación parcial y un uso de menor derroche. *C*, Una recirculación eficiente, combinada con conservación y substituciones estrictas, puede extender las curvas de agotamiento indefinidamente. (Diagrama adaptado de Cloud, 1969.)

siempre que fuera posible, de minerales escasos) y una nueva puesta en circulación parcial, la curva de agotamiento podría aplanarse, tal como se muestra en la curva *B*. Al paso que una nueva circulación eficaz combinada con una conservación y una reducción estrictas en el empleo per capita (un "frenaje" por parte de los países desarrollados) podría prolongar la curva de agotamiento por mucho tiempo, como puede verse en la curva *C*. Debe observarse que aun con una nueva circulación perfecta el agotamiento se produciría de todos modos. Así, por ejemplo, si estuviéramos en condiciones de recuperar y poner nuevamente en circulación 60 millones de toneladas anuales, aun así se necesitaría aproximadamente medio millón de toneladas al año para reemplazar la pérdida inevitable debida a fricción, oxidación, etc.

Los inventarios y las perspectivas relativas a los combustibles minerales tienen una base sólida y, por regla general, se está de acuerdo al respecto. Como se verá en el próximo capítulo, la contaminación, más bien que el suministro, constituirá el factor limitativo por lo que se refiere a la energía industrial. Según acabamos de indicar, el gas natural y el uranio habrán desaparecido a no tardar mucho, pero el carbón y el petróleo durarán más. Entre tanto, reactores "regeneradores" y, posiblemente, el desarrollo de energía atómica de fusión deberían llenar la laguna en materia de energía. Así, pues, los recursos bióticos y minerales son más críticos, al menos por el instante, que la energía misma, y debería poderse esperar, en consecuencia, que estas limitaciones impedirán efectivamente al hombre tratar de aumentar el empleo de energía al punto de quemar, literalmente, el mundo.

Se recomienda al respecto la lectura del pequeño pero documentado libro *Resources and Man*, publicado en 1969 como informe resumido de la Academia Nacional de Ciencias (presidente Preston Cloud). El informe recomienda precaución en cuanto a confiar en las perspectivas optimistas de algunos tecnólogos con respecto a: 1) el mar como depósito de abastecimiento inagotable; 2) la extracción de metal de minerales pobres, con el auxilio de grandes cantidades de energía atómica barata. Según lo hicimos observar ya en el capítulo 12 (véase pág. 357), la mayor parte de la riqueza mineral (y de los alimentos explotables) está situada cerca de la costa y no proporciona más, por mucho que forcemos la imaginación, que un complemento de los abastecimientos continentales. El empleo de grandes cantidades de energía atómica para beneficiar minerales de bajo contenido convertiría el mundo en una gigantesca mina de depuración y crearía un material peligroso y costoso de desecho, así como problemas de contaminación, de los que esperamos que no tengamos jamás que haber de evaluar (!). El informe de la Academia Nacional termina con 26 recomendaciones, que se dejan reducir a un postulado doble, a saber: *Tanto el control de la población humana como una mejor administración de los recursos que incluya su recirculación se necesitan* AHORA. Otras buenas referencias relativas a los recursos naturales comprenden los libros publicados por Jarrett (1966) y Ciriacy-Wantrup y Parsons (1967), y no digamos ya el libro clásico anterior publicado por Thomas (1956). La vanguardia de lo que había de llegar a ser una importante publicación de libros sobre la aplicación del análisis de sistemas (véase cap. 10) a la administración de recursos la constituyen los libros de Watt (1968), Van Dyne (dir.) (1969), Patton (dir.) (1971, vol. 2) y H. T. Odum (1971).

LECTURA 11-2-16

Utilización de la producción primaria por el hombre

La producción primaria en términos de alimentos para el hombre se halla resumida en los cuadros 3-9 y 3-10. Los rendimientos y la producción primaria neta calculada de las mayores cosechas de alimentos en los países "desarrollados" y los "subdesarrollados" se comparan con los promedios mundiales en el cuadro 3-9. El país desarrollado se define como el que cuenta con un producto nacional bruto (PNB) per capita de más de $600.00 y, por lo regular, más de $1 000.00 anuales (véase Revelle, 1966). Aproximadamente el 30 por 100 de todos los seres humanos viven en países de estos, los que suelen tener asimismo un aumento de población bajo (aproximadamente de 1 por 100 al año). En contraste con esto, 65 por 100 de todos los seres humanos viven en países subdesarrollados, que tienen un PNB per capita de menos de $300.00 y, por regla general, de menos de $100.00 y también un aumento mayor de población (más de 2 por 100 al año). Según ya se señaló, los países

Cuadro 3-9

RENDIMIENTOS ANUALES DE ALIMENTOS COMESTIBLES Y PRODUCCIÓN PRIMARIA NETA CALCULADA DE LOS PRINCIPALES CULTIVOS DE ALIMENTOS EN TRES NIVELES: 1) AGRICULTURA SUBSIDIADA CON COMBUSTIBLE (EE.UU., CANADÁ, EUROPA O JAPÓN); 2) SUBSIDIO DE COMBUSTIBLE ESCASO O NULO (INDIA, BRASIL, INDONESIA O CUBA), Y 3) PROMEDIO MUNDIAL.

	PORCIONES COMESTIBLES		PRODUCCIÓN PRIMARIA CALCULADA	
	*Peso de la recolección (Kg/ha)**	*Contenido calórico (Kcal/m²/día)†*	*Producción de materia seca (Kcal/m²/día)‡*	*Intensidad de cultivo durante la estación de desarrollo (Kcal/m²/día)§*
Trigo—Países Bajos	4 400	1 450	4 400	24.4
India	900	5.0	900	300
Promedio mundial	1 300	430	1 300	7.2
Maíz—EE.UU.	4 300	1 510	4 500	25.0
India	1 000	350	1 100	6.1
Promedio mundial	2 300	810	2 400	13.3
Arroz—Japón	5 100	1 840	5 500	30.6
Brasil	1 600	580	1 700	9.4
Promedio mundial	2 100	760	2 300	12.8
Patata blanca—EE.UU.	22 700	2 040	4 100	22.8
India	7 700	700	1 400	7.8
Promedio mundial	12 100	1 090	2 200	12.2
Patata dulce y batata—Japón	20 000	1 800	3 600	20.0
Indonesia	6 300	570	1 100	6.1
Promedio mundial	8 300	750	1 500	8.3
Soya—Canadá	2 000	800	2 400	13.3
Indonesia	640	260	780	4.3
Promedio mundial	1 200	480	1 400	7.8
Azúcar—Hawai (de caña)	11 000	4 070	12 200	67.8
Países Bajos (de remolacha)	6 600	2 440	7 300	40.6
Cuba (de caña)	3 300	1 220	3 700	20.6
Promedio mundial (todo el azúcar: caña y remolacha)	3 300	1 220	—	—

* Valor promedio de 1962 a 1966, compilado de *Production Yearbook*, vol. 21 (1966). Organización para los Alimentos y la Agricultura, Naciones Unidas.

† La conversión de Kcal/g en peso cosechado, como sigue: trigo, 3.3; maíz, 3.5; arroz, 3.6; soya, 4.0; patatas, 0.9, y azúcar crudo, 3.7 (véase *Agriculture Handbook*, del D. de A. de los EE.UU., núm. 8, 1963).

‡ Calculado sobre la base de tres veces la porción comestible para los granos, 2 veces para las patatas (véase la explicación en el texto).

§ Calculada como de seis meses (180 días) excepto para la caña de azúcar, en que los rendimientos se han calculado para una estación de desarrollo de 12 meses (365 días).

subdesarrollados tienen una producción de alimentos por hectárea baja, porque son demasiado pobres para practicar los subsidios de energía. La división entre estas dos masas de humanidad es muy pronunciada (o sea que la distribución del PNB es fuertemente bimodal), ya que sólo 5 por 100 de la población vive en los que podrían llamarse "países en transición", con un PNB per capita que oscila entre $300.00 y $600.00 (véase el cuadro 1 en Revelle, 1966). El hecho serio que hay que afrontar es que la producción mundial media de cosechas está mucho más cerca del límite inferior que del superior, y que en los países en vías de desarrollo los rendimientos no crecen tan aprisa como la población. Por otra parte, se admite ahora de modo general, que son más bien las proteínas que las calorías las que tienden a limitar la dieta en el mundo subdesarrollado. En condiciones equivalentes, el rendimiento de un cultivo rico en proteína, como la soya, ha de ser siempre necesariamente inferior (en términos de calorías totales) al del de hidratos de carbono, como la caña de azúcar (compárense las medianas de estos dos cultivos en el cuadro 3-9). Bajo este aspecto, es interesante que la caña de azúcar se cite a menudo como el productor "campeón" de materia seca entre las plantas cultivadas. Y efectivamente, se han registrado rendimientos anuales de hasta 75 toneladas de materia orgánica por hectárea y año (unas 26 000 Kcal por m² y año) en Hawai, donde la caña se cultiva en un ciclo de ocho años, con tres zafras antes de replantar (Burr y col., 1957). El crecimiento constante durante el año entero, a partir de un rizoma perenne, es una de las razones de tan altos rendimientos, y la baja cualidad nutritiva del producto es otra. Las cosechas anuales de alto contenido de proteína no podrían alcanzar de ningún modo un "volumen" tal de productividad. Según señalamos ya, la producción primaria neta diaria suele ser menor (y el contenido de proteína tiende a reducirse) en los climas cálidos, pero unas sesiones más largas de desarrollo podrían compensar esto con creces. Parecería, pues, ser conforme al "sentido co-

Cuadro 3-10

RENDIMIENTO DE ALIMENTOS (PRODUCCIÓN) POR INDIVIDUO

A) PORCIÓN COMESTIBLE DE PRODUCCIÓN PRIMARIA NETA POR UNIDAD DE SUPERFICIE

Nivel de la agricultura	*Kg de materia seca por ha y por año*	*Kcal/m²/año*
Cultivo de recolección de alimentos	0.4-20	0.2-10
Agricultura sin subsidio (combustible) de energía	50-2 000	25-1 000
Agricultura de granos* con subsidio de energía	2 000-20 000	1 000-10 000
Cultivo teórico de algas con subsidio de energía	20 000-80 000	10 000-40 000

B) TOTAL DE LA BIOSFERA, EN 1967 (× 10¹² KCAL/AÑO †)

	Mar	*Tierra*	*Total*
Plantas	0.06	4 200	4 200.06
Animales	59.20	1 094	1 153.20
Totales	59.26	5 294 ‡	5 353.26

* Corriente de energía activa auxiliar de combustible fósil (o cualquier otro suministro exterior) igual, al menos, al rendimiento calórico de la cosecha (véase H. T. Odum, 1967*a* y Giles, 1967).

† Cifras basadas en Emery e Iselin (1967). Sus "millones de toneladas de peso húmedo" convertidas en 10^{12} Kcal multiplicando por 2 (1 g de peso húmedo = aproximadamente a 2 Kcal; véase cuadro 3-1).

‡ Puesto que aproximadamente 10 por 100 de la superficie terrestre de la biosfera es tierra de cultivo, 4.2×10^{15} Kcal proviene de aproximadamente 14×10^{12} m² de tierra cultivada, o aproximadamente 300 Kcal/m²/año. Puesto que aproximadamente 30 por 100 de la tierra es tierra de cultivo y pasto, 5.3×10^{15} proviene de 40×10^{12} m² de tierra de agricultura total, a aproximadamente 140 Kcal/m²/año, una quinta parte de la cual, aproximadamente, es producción secundaria (de origen animal).

mún ecológico" utilizar en la agricultura tropical plantas perennes, y esto por dos razones: primero, estas plantas pueden aprovechar mejor las estaciones largas, y su cultivo evita por otra parte la lixiviación excesiva que tiene lugar como resultado del arado y la replantación frecuentes, que son necesarios para los anuales cultivos tradicionales "en sucesión". Los rendimientos sostenidos de cosechas anuales en los trópicos requieren la inversión de una gran cantidad de energía de trabajo para mantener la fertilidad de la tierra, según lo ha aprendido el hombre por experiencia en el antiguo arte del cultivo del arroz.

El cuadro 3-10, *A*, representa un modelo más generalizado (véase también figura 2, cap. 15) de producción de alimento a los tres niveles que existen actualmente y, además, a un nivel teórico, que podría obtenerse con un cultivo de algas apoyado por subsidios masivos de energía y dinero. La razón de que semejantes rendimientos sean teóricamente posibles con algas, y no lo sean tal vez con plantas mayores, es la de que las plantas microscópicas requieren probablemente una parte menor de la producción bruta para su propia respiración. Sin embargo, el costo de maquinaria y combustible para mantener un sistema tal de algas es tan elevado, que resulta dudoso que dicha agricultura presente algún valor neto, excepto, tal vez, en un grado limitado, en las áreas de gran aglomeración urbana, donde no hay lugar para cultivos regulares.

Para el año 1967 había en el mundo una población que se calculaba en 3.5×10^9 personas, cada una de las cuales requería aproximadamente 10^6 Kcal al año, o un total de 4.5×10^{15} Kcal de energía alimenticia necesarios para soportar la "biomasa" humana. El origen de las 5.3×10^{15} Kcal de alimentos que se calculó haber sido cosechados para el consumo humano en 1967 se expone en el cuadro 3-10, *B*. Esta recolección representa aproximadamente el 1 por 100 de la producción primaria bruta, o el 0.5 por 100 de la producción primaria neta de la biósfera (según se la calcula en el cuadro 3-7). Pese a que pueda parecer que el hombre no está haciendo todavía un hueco muy grande en la capacidad fotosintética de la tierra, son muchas más, con todo, las cosas que hay que considerar además de la simple absorción de alimentos por aquél. Por ejemplo, ¿qué decir de las necesidades de alimentos de la cuantiosa población de animales domésticos (vacas, cerdos, caballos, aves de corral, corderos, etc.), la mayoría de los cuales son consumidores directos de producción primaria no sólo de las tierras laborables, sino también de las "incultas" (praderas, bosques, etc.). La reserva permanente de ganado en el mundo entero es igual a cinco veces la de los seres humanos en cuanto a necesidades de alimento (véase en Borgstrom, 1965, una explicación del "equivalente de la población ganadera"). Así, pues, el hombre y sus animales domésticos consumen ya al menos 6 por ciento de la producción neta de la biósfera conjunta, o al menos 12 por 100 de la que se produce en la tierra. El hombre consume asimismo grandes cantidades de producción primaria en forma de fibras (madera, papel, algodón, etc.), de modo que es en realidad muy pequeña la superficie de la tierra de la que el hombre no coseche algo, siquiera un pescado ocasional o un bastón de madera.

Según Bergstrom (1965), la relación entre la "población equivalente" de ganado y el hombre varía de 43 a 1 en Nueva Zelandia a 0.6 a 1 en Japón, donde el pescado sustituye en gran parte la carne terrestre en la dieta. Cabría decir que la ecología general del paisaje, y no digamos ya de la cultura y de la economía, está caracterizada por el pescado en el Japón y por los carneros en Nueva Zelandia.*

Si consideramos la acción del hombre sobre la biosfera en otra forma, su densidad es actualmente de cerca de una persona por cuatro hectáreas (diez acres) de tierra (esto es, de 3.5×10^9 personas en 14.0×10^9 hectáreas de tierra).

Si también añadimos los animales domésticos, la densidad es de un equivalente de población por aproximadamente 0.7 hectáreas (esto es, 18.2×10^9 equivalentes de población en 14.0×10^9 hectáreas de tierra). Esto representa menos de 0.7 de ha por cada individuo y por cada animal doméstico consumidor del tamaño de un hombre! Si la población se duplica en el siglo próximo y si deseamos seguir comiendo animales y sirviéndonos de ellos, sólo habrá aproximadamente 0.4 ha para satisfacer todas las necesidades (agua, oxígeno, minerales, fibras, espacio vital y alimentos) ¡de cada 50 Kg de consumidor, sin incluir los animales mimados y la caza, que tanto contribuyen a la calidad de la vida humana!

* En grandes áreas de los EE.UU. la ecología del paisaje está caracterizada por el ganado bovino.

La base ecológica de la crisis actual de los alimentos y la población mundiales se volverá a examinar en la parte 3, pero es el caso que la situación se está haciendo rápidamente tan crítica, que merece una apreciación preliminar en relación con los principios y los datos expuestos en este capítulo.

Merecen seria e inmediata consideración los puntos siguientes:

1) El público y también muchos especialistas profesionales han sido inducidos en error por una contabilidad agrícola incompleta que dejaba de tener en cuenta el costo de los subsidios de energía y el costo, para la sociedad, de la contaminación ambiental que ha de acompañar necesariamente el empleo en grande de maquinaria, fertilizantes, pesticidas, herbicidas y otros productos químicos activos (véase figura 15-2).

2) No más del 24 por 100 de la tierra es verdaderamente laborable, en el sentido de que se presta efectivamente para la agricultura intensa (véase el informe sobre *The World Food Problem* citado más abajo). La irrigación de abundantes áreas de tierras secas y el cultivo del mar requerirían grandes inversiones de dinero y tendrían efectos de gran alcance sobre los equilibrios del clima y la atmósfera, sin garantía alguna de que uno u otro de dichos efectos no fuera desastroso.

3) El efecto global de las necesidades de los animales domésticos y del hombre en materia de proteínas animales han sido subestimados.

4) Según lo señalan Ehrlich y Ehrlich (1970), las naciones subdesarrolladas se convertirán en las naciones "que nunca llegarán a desarrollarse", a menos que el crecimiento de la población se haga considerablemente más lento. Por otra parte, la calidad de la vida se ve amenazada en los países desarrollados por un bienestar excesivo que conduce a la contaminación, al crimen y a una población creciente de gente "subdesarrollada" y miserable dentro de sus propias fronteras. Así, pues, debe haber una estrategia global simultánea encaminada a nivelar el crecimiento de la población en el mundo entero, pero especialmente en el mundo subdesarrollado, y al propio tiempo a nivelar el consumo per capita y a dirigir una mayor parte del PNB a la renovación de los ciclos de recursos y a otras tácticas que mantienen la calidad del ambiente en el mundo desarrollado.

5) Se está haciendo cada vez más evidente que la densidad óptima de población para el hombre debería *adaptarse a la calidad del espacio vital (esto es, al Lebensraum)*, y no a las calorías alimenticias. En efecto, el mundo puede alimentar bastantes "cuerpos calientes" más de lo que puede sostener seres humanos de calidad con una oportunidad razonable de libertad y felicidad. Un economista, Kenneth Boulding (1966), ha formulado lo que consideramos constituir un excelente enunciado ecológico de la situación como sigue: "La medida principal de éxito de la economía no está en absoluto en la producción y el consumo, sino en el carácter, la extensión, la calidad y la complejidad del capital total, incluido en este el estado del cuerpo y la mente humanos comprendidos en el sistema." Así, pues, ¿no debería acaso perseguir el hombre el grado máximo de calidad y diversidad de la "biomasa", en lugar del grado máximo de productividad y de consumo como tales?

Tres libros y monografías se recomiendan especialmente por su análisis profundo, de sentido ecológico, de la acción real del hombre sobre la biósfera, a saber: *The Hungry Planet*, de Borgstrom (1965), *The World Food Problem*, informe de 3 tomos del Grupo del Suministro Mundial de Alimentos, del Comité Asesor Científico del Presidente, la Casa Blanca (1967) (que puede obtenerse del superintendente de Documentos, Washington, D. C.), y *Population Resources and Enviroment; Issues in Human Ecology*, de Ehrlich y Ehrlich (1970).

Medición de la productividad primaria

A causa de su gran importancia habría que prestar siquiera poca atención a los métodos de medición de la productividad en los sistemas ecológicos, aunque el examen detallado de los métodos no entra en el objeto de este texto. Como ya se indicó, la forma ideal de medir la productividad consistiría en medir el paso de energía a través del sistema, pero esto se ha revelado como difícil de conseguir. La mayoría de las mediciones se han basado en alguna cantidad indirecta, como, por ejemplo, la cantidad de substancia producida, la cantidad de materia prima utilizada, o la cantidad de producto secundario liberado. Un punto que hay que destacar es que no hay dos de los diversos métodos que se enumeran a continuación que midan exactamente el mismo aspecto del proceso complejo del metabolismo autotrófico-heterotrófico. La ecuación simplificada de la fotosíntesis del capítulo 1 da la reacción conjunta que tiene lugar durante la producción de hidratos de carbono a partir de materias primas, como resultado de la acción de la energía de la luz a través de la clorofila. Toda vez que la mayor parte de las clases de producción se traducen, en la naturaleza, en nuevo protoplasma, una ecuación más comprensiva de la productividad es la siguiente:

1 300 000 cal de energía radiante + 106 CO_2 + 90 H_2O + 16 NO_3 + 1 PO_4 + elementos minerales es igual a

13 000 cal de energía potencial en

3 258 g de protoplasma (106 C, 180 H, 46 O, 16 N, 1 P, 815 g de ceniza mineral) + 154 O_2 + 1 287 000 cal de energía calórica dispersada (99 por 100)

Esta ecuación está basada en las proporciones de elementos contenidos en el protoplasma del plancton y el contenido de energía del mismo (Sverdrup y col., 1942; Clarke, 1948). Es obvio que la productividad puede medirse, al menos teóricamente, averiguando la cantidad de cualquiera de los elementos indicados durante el periodo de tiempo en que la productividad se mide. Las ecuaciones de esta clase pueden servir para convertir (y comprobar una con otra) las mediciones de productividad entre unidades de utilización de energía, bióxido de carbono, nitrato o fósforo, de peso de protoplasma (o la cantidad de carbono puesta en forma de alimento) y de la cantidad de oxígeno empleada. Esto en teoría, pero veamos ahora la práctica de la medición.

Una de las mayores dificultades en la investigación de la productividad de un sistema ecológico cualquiera es la que consiste en averiguar si el sistema se encuentra o no en equilibrio dinámico o en un *estado estable*. En el "estado estable", las entradas compensan las salidas de material y energía. La intensidad de la producción está en equilibrio con el suministro o la velocidad de entrada del constituyente limitador mínimo (en otros términos, se aplica la ley del mínimo, véase cap. 5). Por ejemplo, supongamos que el bióxido de carbono era en un lago el factor limitador máximo, y que la productividad estaba por consiguiente en equilibrio con la intensidad de suministro de bióxido de carbono proveniente de la putrefacción de materia orgánica. Habremos de suponer que luz, nitrógeno, fósforo, etc., estaban disponibles, en este equilibrio de estado estable, en cantidad mayor de la necesaria (y no constituían, por consiguiente, factores limitativos en dicho momento). Si una tempestad llevara al lago más bióxido de carbono, la intensidad de producción cambiaría, pero seguiría dependiendo lo mismo, también, de los demás factores. Mientras la intensidad cambia, no hay estado estable ni constituyente mínimo alguno; en lugar de ello, la reacción depende de la concentración de *todos* los constituyentes presentes, la cual, en este periodo transitorio, difiere de la intensidad a la que se va añadiendo el menos abundante de ellos. La intensidad de producción cambiaría rápidamente, a medida que se fueran utilizando constituyentes diversos, hasta que alguno de ellos, tal vez el bióxido de carbono nuevamente, se hiciera limitativo, en cuyo momento el sistema del lago volvería a operar a la intensidad regida por la ley del mínimo. En la mayoría de los sistemas naturales, la intensidad de producción pasa de un equilibrio de estado estable temporal a otro, a causa de los cambios impuestos al sistema desde fuera.

Algunos de los métodos efectivamente empleados para medir la productividad se pueden resumir como sigue:

1. *El método de la cosecha.* En situaciones en las que los animales herbívoros no son importantes y en que el estado estable no se alcanza nunca, puede emplearse el método de la cosecha. Esta es la situación corriente por lo que se refiere a las plantas de cultivo que comprenden especies anuales, toda vez que se hacen esfuerzos para evitar que insectos u otros animales se lleven material y que, por otra parte, el ritmo de producción va de cero, en el momento de la siembra, al máximo, que se alcanza en el momento de la recolección. El indagar el aumento de peso adquirido por las plantas cultivadas y averiguar el valor calórico de la cosecha constituye un método directo: la productividad de los cultivos, tal como se indica en el cuadro 3-9, se averiguó en esta forma. El método de la cosecha puede emplearse asimismo en situaciones terrestres sin cultivo, en las que predominan las plantas anuales como en un campo de ambrosía, u otras fases tempranas de nueva vegetación de campos abandonados, o en donde las plantas

62

son poco consumidas antes de haber alcanzado el desarrollo normal. En tales casos es preferible tomar muestras del cultivo a intervalos, durante la estación, a confiar en averiguar el resultado de la sola cosecha final, porque, por regla general, habrá una sucesión de especies anuales que lleguen a madurez durante la estación de desarrollo (véase Penfound, 1956, E. P. Odum, 1960). Pueden utilizarse cultivos individuales para acercarse a la producción neta en bosques jóvenes o en plantaciones de bosque a la manera de cultivo (véase Ovington, 1957, 1962). Los métodos de recolección no podrán emplearse allí donde el alimento producido se va llevando a medida que se va produciendo, como ocurre en muchas comunidades naturales. Si los consumidores son animales grandes, de vida larga, cabría averiguar la productividad, en estos casos, recogiendo a los consumidores que se llevan el alimento a un ritmo constante y calculando así la productividad primaria a partir de la secundaria. Por supuesto, un método de esta clase es el que utilizan con frecuencia los granjeros o los ganaderos. La productividad de una extensión de terreno de pasto invernal, por ejemplo, podrá expresarse en términos del número de cabezas de ganado susceptible de ser soportado por su número de hectáreas (o número de hectáreas por "unidad de animal"). Las fuentes de error posibles de este método se han insinuado ya. Toda vez que el alimento empleado por las plantas mismas y los microorganismos y los animales asociados no se incluye, el método de la cosecha mide siempre la *producción neta de la comunidad*. Si el consumo por los animales se deja calcular, cabe añadir una corrección a la *producción primaria neta* calculada (véase Woodwell y Whittaker, 1968).

LECTURA 11-2-17

DESCONOCIMIENTO TECNOLOGICO SOBRE DESECHOS INDUSTRIALES: IPN

A pesar de que en México se utilizan técnicas modernas para apoyar las demandas del desarrollo tecnológico en rubros tan importantes como la petroquímica, la industria de las pinturas, resinas, polímeros, alimentaria, farmacéutica, textil, metalúrgica, entre otros, el nivel de operación de los equipos que se utilizan es considerablemente bajo. De ahí que aunque se disponga de instrumentos apropiados, éstos no operarán nunca al máximo de su capacidad y su diseño, ya que se desconoce la capacidad de utilidad.

Por tales motivos, Lilia Palacios Lazcano y Germán Navarro, investigadores del Instituto Politécnico Nacional, se impusieron la tarea de estudiar no sólo el control analítico de una extensa variedad de materias, productos en proceso y terminados sino los efectos que causan en el ambiente y que finalmente redundan en daños nocivos para la salud del ser humano, la flora, la fauna y las obras de arte legadas por nuestros antepasados.

Con tan loables propósitos se han efectuado profundos estudios en relación a las técnicas modernas de análisis, como la **espectrofotometría ultravioleta visible**, la infrarroja y la de **absorción atómica**, así como la **cromatografía de gases**.

La primera, se aplica especialmente a elementos contaminantes como el benceno, xileno, tolueuno en residuos de aguas de desecho, determinación de solventes tóxicos, alcoholes, cetonas, aldehídos utilizados en las industrias que manejan pinturas, resinas, polímeros, etc. Determinación de metales pesados en aguas residuales provenientes de industrias metalúrgicas y mineras.

Respecto de la **espectrofotometría infrarroja**, ésta tiene aplicaciones en el campo de la química orgánica, desechos de hidrocarburos en aguas provenientes de industrias petroquímicas. Determinación de grasas y aceites animales y vegetales. Solventes de industrias que fabriquen polímeros y acabados textiles, contaminantes atmosféricos como los derivados fluroclorados utilizados en una gran variedad de productos que usan propelentes en los atomizadores.

La de absorción atómica, es quizá la técnica más universal como apoyo de control de contaminantes metálicos que se hallan en residuos orgánicos e inorgánicos que desechan las industrias metalúrgicas, mineras, electroquímicas y todas aquellas que en su proceso arrastran y que se encuentran en aguas residuales.

Por último, la cromatografía de gases es un método analítico que se fundamenta en la separación de dos o más componentes y resulta de gran apoyo para las otras técnicas, ya que la mayoría de los productos que se analizan son muestras complejas que contienen desde dos hasta cientos de componentes. Este proceso entraña una técnica altamente sensible para detectar la cantidad y composición de los gases atmosféricos, así como para determinar plaguicidas, solventes y una inmensa variedad de sustancias altamente contaminantes.

Tanto las técnicas espectroscópicas como la cromatografía se apoyan mutuamente para completar el estudio, tanto en su aspecto cualitativo como cuantitativo. Así, mientras que en un cromatógrafo se realiza la separación de los componentes de una muestra, éstos se dirigen hacia los espectrofotómetros para su detección y cuantificación.

TECNICAS ANALITICAS

Los trabajos desarrollados —señalan los investigadores del Politécnico— se enfocan principalmente al aspecto tóxico que los contaminantes causan en el individuo y, en general, en todos los seres vivos provocando serias enfermedades a causa de elementos como: plomo, mercurio, arsénico, pesticidas y plaguisidas encontrados en frutas, verduras y semillas atribuidas al riego con aguas negras.

A continuación se citan algunas aplicaciones específicas que poseen las técnicas analíticas que actualmente se manejan para control de residuos contaminantes:

- Determinación de cromo en aguas de desecho de las industrias metalmecánica, electroquímica, curtiduría, etc.
- Plomo en gasolina.
- Metales en aceites lubricantes y de corte, analizados como residuos en aguas.
- Metales en general contenidos en aguas potables, afluentes, lagos y lagunas.
- Diesel y petróleo que se usan como base de los aceites lubricantes, también como desechos contaminantes.
- Hidrocarburos clorados.
- Detergentes en aguas residuales.
- Contenido de gases atmosféricos
- La gama de solventes utilizados en la industria de polímeros, pinturas, resinas y las materias primas usadas en el proceso de insdustrialización.

Entretanto, los convenios que la Sedue tiene suscritos con las 1,550 industrias grandes y medianas para el control de contaminantes será instalar equipos de control para que sus emisiones no rebasen las normas técnicas pertinentes. Si las empresas no están en posibilidades de cumplir la normatividad vigente serán clausuradas temporal o definitivamente.

TERCER ACERCAMIENTO

INTRODUCCION

Como se ha dicho antes, el Tercer Acercamiento, tiene por finalidad lograr una mayor integración de una serie de aprendizajes presentados un tanto desconectados entre sí. El elemento integrador lo constituye el estudio de una situación problemática que requiere, para su comprensión, en forma fundamental, de los aprendizajes antes alcanzados.

En esencia, la premisa de que se parte es: diferentes conocimientos, provenientes de distintas racionalidades, se estructuran, mediante relaciones entre ellas, para lograr el análisis racional de alguna situación concreta real.

Uno de los problemas centrales que en este trabajo se pretendió abordar fue el encontrar la relación cuantitativa, que describa la forma en la cual muchas poblaciones humanas se encuentran evolucionando con el tiempo. En este sentido se ha puesto de manifiesto que la gran mayoría de ellas se encuentran en la etapa denominada **crecimiento exponencial**. Para llegar a obtener tal relación cuantitativa se tuvieron que desarrollar un número no pequeño de contenidos matemáticos. Por otro lado, y como quedó de manifiesto desde el PRIMER ACERCAMIENTO, hay toda una serie de hechos muy estrechamente relacionados (por sus implicaciones que sobre ellos tiene), con la forma en que crezca una población humana. En especial, y por considerar que son los de mayor relevancia, siempre se estuvo hablando de cuatro de ellos: demanda de alimentos, producción industrial, contaminación y necesidad de recursos naturales. En diversos momentos se trataron, tanto individualmente, como en sus relaciones mutuas.

La situación concreta real, cuyo estudio permite la reestructuración integradora de lo tratado en el Segundo Acercamiento es, como se dijo al inicio de este trabajo, la siguiente:

> ¿Que ocurrriría si se mantiene el objetivo del sistema mundial de producir más gente con más (alimentos, bienes materiales, aire puro y agua) para cada persona?

Tres son las ACTIVIDADES que se realizan en este acercamiento: una discusión colectiva, una lectura (también colectiva) y un resumen individual. La discusión tiene como objetivo retomar y aclarar la situación que se estudiará; la lectura está encaminada al análisis de la situación y en el resumen se intenta, estructurar, los contenidos cognitivos que dan respuesta a la pregunta planteada.

La lectura que se ha seleccionado para este Tercer Acercamiento es el segundo Capítulo del libro **Los Límites del Crecimiento** (D. L. Meados et al., FCE, 1988), en el cual se da respuesta a la pregunta planteada. Este libro, que fue la fuente que inspiró todo el trabajo, cuando se publicó en el año de 1972, originó mucha polémica, creando corrientes de opinión a favor y en contra, en virtud de que muchos vieron en él una visión apocalíptica y alarmista de lo que le podía esperar a la humanidad. Uno puede estar a favor o en contra de las conclusiones a las que llega el estudio, inclusive podría coincidir o no con sus planteamientos políticos e ideológicos, pero lo que si no se puede negar es que constituye un bello ejemplo de metodología en el estudio de un hecho social, que además debía inquietarnos a todos.

ACTIVIDAD II-3-1 DISCUSION GRUPAL

Por lo visto en los dos acercamientos anteriores los alumnos han llegado a conocer lo que significa, desde el punto de vista matemático, la expresión: "crecimiento exponencial". Por otro lado, ahí mismo han podido darse cuenta de la estrecha relación que existe entre la forma de este crecimiento y la cantidad de alimentos, recursos naturales e industrialización que se requieren si se desea satisfacer plenamente sus necesidades. Además, se han dado cuenta que a medida que el nivel de industrialización crece exponencialmente, así lo hacen el grado de contaminantes que se arrojan al medio ambiente y la proporción en que se consumen los recursos naturales. Sin embargo estos últimos son finitos, es decir, contamos con una cantidad fija de ellos, y hasta el momento no se sabe con exactitud, cuánto resistirá el medio ambiente de que se le siga contaminando sin dar lugar a un colapso en el equilibrio ecológico que tenga consecuencias funestas para la humanidad. Son estos dos factores los que de manera principal marcan un límite al crecimiento continuo de la población en forma exponencial.

El propósito de la discusión grupal es plantear con claridad como por un lado, el hecho de que los recursos naturales sean finitos, y por el otro, el creciente nivel de contaminación, son los elementos que pareciera ser conducen a la humanidad a un colapso si se sigue comportando el crecimiento de la población tal como lo hace hasta la fecha y se continúan consumiendo los recursos naturales en la forma como actualmente se hace.

Las preguntas fundamentales que guían la discusión, son las siguientes:

* ¿Cuántos tipos de recursos naturales hay?

* ¿A qué se le llaman recursos naturales renovables?

* ¿Cuáles son los recursos naturales no-renovables?

* Dar ejemplos de recursos renovables y no-renovables.

* ¿Cuál es la diferencia fundamental entre los llamados recursos renovables y los no-renovables?

* ¿Qué relación existe entre el crecimiento industrial con la cantidad de recursos naturales que se necesitan para mantenerlo?

* ¿A qué conduce, irremediablemente, el consumo sin límite de un recurso no-renovable?

* A partir de este momento se decide no explotar ni utilizar nuestras reservas probadas de aluminio natural. ¿Cómo se representa gráficamente la cantidad de aluminio natural con que contará nuestro país en el futuro?

* Se ha encontrado que en este momento la cantidad de un cierto recurso natural no-renovable es C y que se consumirá en el futuro a partir de este momento, siguiendo un patrón exponencial. Representar gráficamente tal comportamiento y señalar el punto que indica el momento en que tal recurso se agota.

ACTIVIDAD II-3-2

L E C T U R A

"LOS LIMITES DEL CRECIMIENTO EXPONENCIAL"

Cuando los alumnos han comprendido que hay factores que limitan el crecimiento ilimitado en forma exponencial, se pasa a realizar la lectura del Capítulo II del libro "Los Límites del Crecimiento", con el propósito de que ellos tengan acceso a los conceptos, métodos y algoritmos que integran la respuesta a la pregunta planteada.

La lectura será de carácter grupal y para ella se empleará todo el tiempo que fuese necesario, haciendo las pausas pertinentes con el propósito de explicar, aclarar o acotar los aspectos que así lo requiriesen.

Al llevar a cabo la lectura, los aspectos en los que habría que reparar con especial cuidado son los siguientes:

- Los conceptos, y las áreas a que pertenecen, que se utilizan en el estudio de la situación.

- Las matemáticas que se utilizan en el estudio de la situación.

- Las relaciones entre las distintas áreas del conocimiento que se establecen al estudiar la situación.

A partir de la página siguiente se reproduce el texto que leerán los estudiantes en esta actividad.

cimiento real de la economía y de la población dependerán de factores como la paz y la estabilidad social, la educación y el empleo y el desarrollo tecnológico sostenido; y es mucho más difícil evaluar o predecir estos factores. Este libro no puede tratarlos explícitamente, como tampoco puede hacerlo nuestro modelo mundial en su actual grado de desarrollo, salvo en la medida en que nuestra información acerca de la cantidad y distribución de las reservas físicas pueda señalar posibles problemas sociales futuros.

Los alimentos, los recursos naturales y un medio ambiente saludable son condiciones necesarias pero no suficientes del desarrollo. Estos elementos pueden ser abundantes, pero aun así los problemas sociales pueden detener el desarrollo. No obstante, supongamos por el momento que prevalecerán las mejores condiciones sociales. En ese caso ¿cuánto crecimiento podrá sostener el sistema físico? Con la respuesta que obtengamos podremos estimar los límites del crecimiento de la población y del capital, pero no la prueba contundente de que el crecimiento alcanzará realmente esos niveles.

LECTURA 11-3-1

II. LOS LÍMITES DEL CRECIMIENTO EXPONENCIAL

> Porque ¿quién de vosotros que quiere construir una torre, no se sienta primero y calcula los gastos, a ver si tiene lo que necesita para acabarla?
>
> San Lucas 14:28

¿Qué será necesario para mantener el crecimiento económico y demográfico hasta el año 2 000, y aun después? La lista de los elementos que ello exige es muy larga, pero a grandes rasgos puede ser dividida en dos categorías principales.

La primera de ellas incluye las necesidades *físicas* que sirven de apoyo a cualquier actividad fisiológica e industrial —alimentos, materias primas, combustibles nucleares y orgánicos y los sistemas ecológicos del planeta que absorben desechos y reincorporan al ciclo industrial sustancias químicas básicas. Estos elementos son en principio objetos tangibles, contables, como la tierra cultivable, el agua, los metales, los bosques y los océanos. En este capítulo evaluaremos las reservas mundiales de estos recursos, puesto que ellos son los que, en última instancia, determinan los límites del crecimiento mundial.

La segunda categoría de elementos consiste en las necesidades *sociales*. Aun cuando los sistemas físicos del planeta son capaces de sostener una población mayor, más desarrollada en términos económicos, el cre-

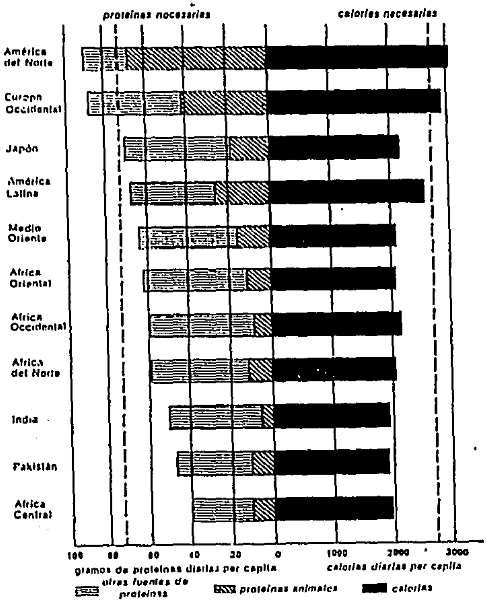
Alimentos

> En Zambia, Africa, de cada mil niños que nacen 260 mueren antes de cumplir un año. En India y Pakistán la proporción es de 140 por cada 1 000; en Colombia es de 82. Muchos más mueren antes de cumplir la edad escolar, otros durante los primeros años escolares.
>
> En los países pobres en donde se expiden certificados de defunción de los niños en edad pre-escolar, por lo general las causas de la muerte se atribuyen al sarampión, la pulmonía, la disentería o a cualquier otra enfermedad. De hecho, lo más probable es que estos niños hayan sido víctimas de la desnutrición.[4]

Nadie sabe con exactitud cuántas personas están subalimentadas, pero existe consenso general en cuanto a que el número es muy grande, tal vez del 50 al 60 % de la población de los países no industrializados,[5] lo cual significa un tercio de la población mundial. Las estimaciones de la Organización de las Naciones Unidas para la Alimentación y la Agricultura (FAO) indican que en la mayoría de los países en desarrollo no se satisfacen las necesidades calóricas básicas, y en particular las proteínicas (véase la gráfica 8). Más aún, aunque la producción agrícola mundial va en aumento, la de alimentos *per capita* en los países no industrializados apenas se mantiene constante en el inadecuado nivel en el que se halla (véase la gráfica 9). ¿Significan estas estadísticas más bien desoladoras que ya hemos alcanzado los límites de la producción mundial de alimentos?

El principal recurso necesario para la producción de alimentos es la tierra. Estudios recientes indican que en el mundo hay, cuando mucho, 3 200 millones de hectáreas de tierra potencialmente cultivable.[6] En la

Gráfica 8. *Consumo de proteínas y de calorías*



En gran parte del mundo no se satisfacen las necesidades diarias de proteínas y de calorías. Existe desigualdad en la distribución no sólo entre regiones, según se ve aquí, sino también dentro de las mismas regiones. Según la Organización de las Naciones Unidas para la Alimentación y la Agricultura (FAO), las áreas donde la escasez es mayor incluyen "los países andinos, las extensiones semiáridas de África y el Medio Oriente y algunos países densamente poblados de Asia". Las líneas que indican las calorías y las proteínas necesarias son estimaciones para Estados Unidos. Se ha formulado la hipótesis de que si en otras regiones la dieta permitiera a las personas alcanzar su peso corporal potencial, las necesidades serían las mismas en todas partes.

Fuente: Organización de las Naciones Unidas para la Alimentación y la Agricultura, *Provisional Indicative World Plan for Agricultural Development*, Roma, FAO, 1970.

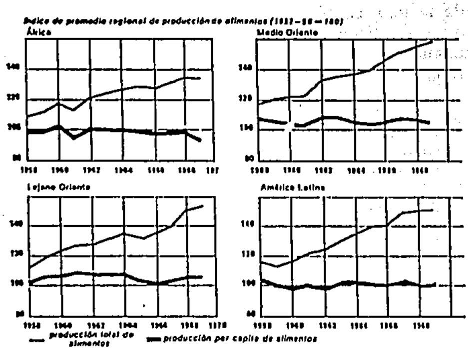
actualidad se cultiva aproximadamente la mitad más rica y accesible de esa tierra. La otra mitad exigirá inmensos insumos de capital para extenderla, limpiarla, irrigarla y fertilizarla para hacerla productiva. Los costos de la explotación de nuevas tierras se estiman desde 215 a 5 275 dólares por hectárea.[7] Según un informe de la FAO, en términos económicos es imposible dedicar más tierra al cultivo, a pesar de la necesidad apremiante de alimentos que existe actualmente en el mundo:

> En el sur de Asia . . .en algunos países del Lejano Oriente, en el Medio Oriente, en el norte de África y en algunas partes de América Latina y de África . . .casi no hay espacio para extender el área cultivable. . . En las regiones más áridas hasta sería necesario convertir en pastizales permanentes la tierra marginal o submarginal para el cultivo. En gran parte de América Latina y de África al sur del Sahara existen todavía posibilidades considerables para extender el área cultivable; sin embargo, los costos de la explotación son muy elevados y a menudo será más económico intensificar la utilización de las áreas ya cultivadas.[8]

Si el mundo decidiera pagar los elevados costos de capital que representa explotar toda la tierra cultivable y producir toda la cantidad de alimentos que fuera posible, ¿cuánta gente podría ser alimentada en teoría?

En la gráfica 10 la curva inferior representa la cantidad de tierra necesaria para alimentar a la creciente población mundial, suponiendo que el promedio mundial de 0.4 hectáreas por persona sea suficiente. (Para alimentar a toda la población mundial conforme a los niveles que actualmente prevalecen en Estados Unidos, serían necesarias 0.9 hectáreas por persona.) La curva superior representa la cantidad real de tierra cultivable disponible en el tiempo. Esta línea desciende porque cada persona adicional exige una determinada cantidad de tierra (las 0.08 hectáreas que hemos supuesto)* para la construcción de vivienda, carreteras, depósitos de basura, líneas de transmisión de electricidad y otros usos que "pavimentan" esencialmente la tierra cultivable y la inutilizan para la producción de alimentos. La gráfica no muestra la pérdida de tierra por la erosión, aunque no por ello debamos desconocerla; en cambio, señala que, aun partiendo de la hipótesis optimista de que se utiliza toda la tierra posible, antes del año 2 000 habrá una grave escasez de tierra si la necesidad *per capita* de este elemento y las tasas de crecimiento de la población siguen siendo las mismas que han sido hasta ahora.

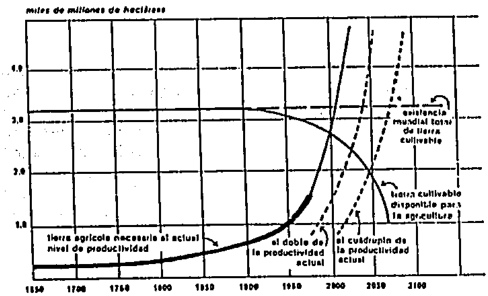
Gráfica 9. *Producción de alimentos*



La tasa de crecimiento de la producción total de alimentos en las regiones no industrializadas del mundo es casi la misma que la de la población. Así pues, el bajo nivel de la producción de alimentos *per capita* ha permanecido casi constante.

Fuente: Organización de las Naciones Unidas para la Alimentación y la Agricultura, *State of Food and Agriculture 1970*, Roma, fao, 1970.

Gráfica 10. *Tierra cultivable*



El total de tierra cultivable que existe en el mundo es de unas 3 200 millones de hectáreas. La productividad actual exige 0.4 hectáreas de tierra cultivable por persona. De esta manera la curva de la tierra necesaria refleja la curva del crecimiento de la población. La línea fina de la curva después de 1970 muestra la necesidad proyectada de tierra, suponiendo que la población mundial sostenga su actual tasa de crecimiento. La tierra cultivable disponible disminuye porque a medida que la población crece se utiliza con fines urbano-industriales. Las curvas punteadas representan la tierra necesaria en caso de que la productividad actual se duplicara o se cuadruplicara.

La gráfica 10 también ilustra algunos hechos generales muy importantes acerca del crecimiento exponencial en un espacio limitado. Muestra primero cómo en pocos años puede pasarse de una situación de abundancia a otra de escasez. Siempre ha habido un exceso abrumador de tierra potencialmente cultivable, y ahora, en el curso de 30 años (el tiempo de duplicación de la población) puede darse una súbita y grave escasez. Puede que la Humanidad tenga muy poco tiempo para reaccionar ante una crisis resultante del crecimiento exponencial dentro de un espacio finito, como en nuestro ejemplo del propietario del estanque del capítulo i.

Una segunda enseñanza de la gráfica 10 es que las hipótesis numéricas precisas acerca de los límites carecen de importancia cuando se consideran en contraposición al progreso inexorable del crecimiento exponencial. Por ejemplo, podemos suponer que la tierra cultivable no se ocupa en la construcción de ciudades, de carreteras o de cualquier otro uso no agrícola; en ese caso la cantidad de tierra cultivable permanece constante, tal y como lo representa la línea horizontal discontinua. El punto en el que se cruzan las dos líneas tiene un rezago de sólo diez años. O podemos suponer que es posible duplicar y aun cuadruplicar la productividad de la tierra a través de los avances de la tecnología agrícola y de inversiones de capital como tractores, fertilizantes y sistemas de regadío. Las líneas punteadas representan los efectos de dos hipótesis diferentes en cuanto a un incremento de la productividad. Cada duplicación de la productividad da un margen adicional de casi 30 años, o sea menos que el tiempo de duplicación de una población.

Desde luego que la sociedad no se verá súbitamente sorprendida por el "punto crítico" en el que la cantidad de tierra necesaria sea mayor a la cantidad de tierra disponible. Los síntomas de la crisis empezarán a manifestarse mucho antes de que se alcance dicho punto. Los precios de los alimentos serán tan altos que algunas personas morirán de hambre; otras se verán forzadas a disminuir la cantidad efectiva de tierra que utilizan y a optar por dietas de menor calidad. Estos síntomas se manifiestan ya en muchas partes del mundo. Aunque actualmente sólo se cultiva la mitad de la tierra que representa la gráfica 10, tal vez de 10 a 20 millones de defunciones anuales puedan atribuirse directa o indirectamente a la desnutrición.[10]

Es evidente que muchas de estas muertes se deben más a las limitaciones sociales del mundo que a sus limitaciones físicas. No obstante, en el sistema de producción de alimentos existe un vínculo muy grande entre estos dos tipos de limitaciones. Si todavía fuera posible hallar con alguna facilidad tierra fértil y cultivarla no habría ningún obstáculo económico para alimentar a quienes padecen hambre, ni tampoco habría que hacer difíciles elecciones de carácter social. Sin embargo, la mejor mitad de la tierra potencialmente cultivable del mundo ya está siendo aprovechada, y el abrir nuevas tierras al cultivo resulta tan costoso que ha sido considerado "antieconómico". Aquí nos enfrentamos a un problema social exacerbado por una limitación física.

Aun cuando la sociedad decidiera pagar los costos necesarios para ganar nuevas tierras, o incrementar la productividad de la tierra ya cultivada, la gráfica 10 muestra con cuánta rapidez el crecimiento de la población provocaría otro "punto crítico". Y cada vez resultará más costoso superar los sucesivos puntos críticos, dado que cada duplicación será más cara que la anterior. Podemos llamar a este fenómeno la ley de los costos crecientes. El mejor ejemplo, y también el más realista, de esa ley se deriva de una evaluación del costo de los beneficios agrícolas hasta ahora conocidos. De 1951 a 1966, para alcanzar un aumento del 34 % en la producción mundial de alimentos los agricultores aumentaron 63 % sus gastos anuales en tractores, 146 % la inversión anual en fertilizantes y 300 % en el uso anual de plaguicidas.[11] El próximo aumento del 34 % exigirá insumos aún mayores de capital y de recursos.

¿Cuántas personas pueden ser alimentadas en el mundo? Desde luego que la respuesta a esta pregunta no es sencilla. Depende de la elección que haga la sociedad entre las diversas alternativas que se le presentan. Existe una relación directa de sacrificio entre la producción de más alimentos y la de otros bienes y servicios que desea la Humanidad. La demanda de estos bienes y servicios aumenta al mismo tiempo que crece la población, y por eso el sacrificio es cada vez más aparente y la elección más difícil de resolver. No obstante, aun cuando la elección constantemente prioritaria fuera la producción de alimentos, el crecimiento continuo de la población y la ley de los costos crecientes podrían llevar el sistema aceleradamente al punto en el que todos los recursos disponibles se dedicaran a la producción de alimentos, sin ninguna otra posibilidad de expansión.

Hasta ahora sólo hemos examinado uno de los límites posibles a la producción de alimentos —la tierra cultivable. Existen otros, pero la extensión de este estudio no nos permite examinarlos detalladamente. El más evidente, segundo en importancia después de la tierra, es la disponibilidad de agua. Existe un límite para el agua que cada año fluye en la superficie de tierra del mundo, y también existe una demanda de esa agua que aumenta exponencialmente. Podríamos dibujar una gráfica análoga a la gráfica 10 para demostrar el acercamiento de la curva creciente de la demanda de agua a su oferta promedio constante. En algunas áreas del mundo se alcanzará ese límite mucho antes de que aparezca el límite de tierra cultivable.

También es posible evitar o extender estos límites a través de los avances tecnológicos que eliminan el tener que depender de la tierra (alimentos sintéticos), o que crean nuevas fuentes de agua (desalinación del agua de mar). Más adelante, en el capítulo IV, examinaremos estas innovaciones. Por el momento nos basta con saber que ninguna nueva tecnología es espontánea o gratuita. Las fábricas y las materias primas que exige la producción de alimentos sintéticos, el equipo y la energía indispensables para la purificación del agua de mar, derivan necesariamente del sistema físico mundial.

El crecimiento exponencial de la *demanda* de alimentos es un resultado directo del circuito positivo de retroalimentación que en este momento está determinando el crecimiento demográfico. La *oferta* de alimentos que se espera en el futuro depende de la tierra y del agua, y también del capital dedicado a la agricultura, que a su vez depende de otro circuito positivo de retroalimentación predominante en el sistema —el circuito de inversión de capital. El abrir nuevas tierras al cultivo, explotar el mar o ampliar el uso de fertilizantes y de pesticidas exigirá un aumento del acervo de capital dedicado a la producción de alimentos. Los recursos que permiten el crecimiento de esas reservas tienden a no ser recursos renovables, como la tierra y el agua, sino más bien recursos no renovables como los metales y los combustibles. Así, la expansión de la producción de alimentos en el futuro depende en gran parte de la disponibilidad de recursos no renovables. ¿Existen límites a la oferta mundial de estos recursos?

Recursos no renovables

> Aun cuando consideráramos factores económicos como el aumento de los precios y la disminución de la disponibilidad de los recursos, actualmente parecería que las cantidades de platino, oro, zinc y plomo no satisfacen la demanda. Si la demanda de plata, estaño y uranio mantiene su actual tasa de expansión, es posible que estos productos escaseen a fines de este siglo aun a precios muy elevados. Para el año 2 050 pueden agotarse muchos otros minerales si se mantiene su actual tasa de consumo.
>
> A pesar de los hallazgos espectaculares que se han hecho recientemente, el número de lugares donde todavía pueden explorarse estos minerales es muy limitado. Los geólogos discrepan en cuanto a las perspectivas de nuevos yacimientos minerales más ricos y más amplios. A largo plazo resultaría una imprudencia confiar en esos descubrimientos.[12]

El cuadro 4 enumera los recursos minerales y combustibles más importantes —materias primas vitales para los principales procesos industriales. En la columna 3 del mismo cuadro se incluye el índice estático de reservas, o el número de años que durarán las reservas hasta ahora conocidas (columna 2) de ese recurso, si se mantiene su tasa *actual* de uso. Este índice estático es la medida que normalmente se utiliza para expresar la futura disponibilidad de recursos. Varias hipótesis sustentan el índice estático; una de ellas es que la tasa de uso permanecerá constante.

Pero en el mismo cuadro la columna 4 muestra que la tasa mundial de uso de cualquier recurso natural está creciendo exponencialmente. En muchos casos esa tasa crece aún con mayor rapidez que la población, lo cual indica que más gente consume más recursos anualmente y también que el consumo promedio por persona crece todos los años. En otras palabras, la curva de crecimiento exponencial del consumo de recursos está siendo impulsada por los circuitos positivos de retroalimentación del crecimiento demográfico y del crecimiento de capital.

En la gráfica 10 hemos visto que un aumento exponencial en el uso de la tierra puede contraponerse rápidamente a la cantidad fija de tierra disponible. Del mismo modo un aumento exponencial en el consumo de recursos puede disminuir con gran rapidez una reserva fija de recursos. La gráfica 11, que es muy similar a la anterior, ilustra el efecto de incrementar exponencialmente el consumo de una cantidad inicial dada de un recurso no renovable. En este caso el ejemplo es el cromo, que hemos elegido porque, de entre todos los recursos enumerados en el cuadro 4, acusa uno de los índices estáticos de reservas más prolongado. Podríamos dibujar una gráfica similar para cada uno de los recursos que aparecen en la lista. Las escalas de tiempo para cada uno de ellos variarían, pero la forma general de las curvas sería la misma.

Las reservas mundiales de cromo son de cerca de 775 millones de toneladas métricas, de las cuales se extraen anualmente 1.85 millones.[13] Así pues, con la tasa actual de uso las reservas durarán unos 420 años. La línea discontinua de la gráfica 11 ilustra el agotamiento lineal de las reservas de cromo, previsible a partir de la hipótesis de que el uso se mantiene constante. No obstante, el consumo real de cromo aumenta a una tasa anual del 2.6 %. Las curvas continuas de la misma gráfica muestran cómo esa tasa de crecimiento, si se mantiene constante, agotará los recursos, no en 420 años como lo indica la hipótesis lineal, sino únicamente en 95 años. Si suponemos que las reservas hasta ahora desconocidas pudieran quintuplicar las que ya conocemos, como lo muestra la línea punteada, ese aumento quíntuple únicamente ampliaría la duración de las reservas de 95 a 154 años. Aun cuando a partir de 1970 fuera posible reciclar el 100 % del cromo (la línea horizontal), y de esa manera poder mantener las reservas iniciales, en 235 años la demanda excedería a la oferta.

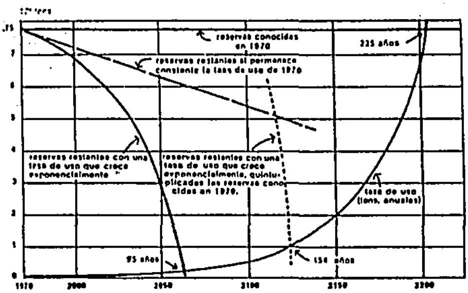
La gráfica 11 muestra que si el consumo de recursos registra un crecimiento exponencial, el índice estático de reservas (420 años para el cromo) es una medida más bien equívoca de la disponibilidad de los mismos. Podemos definir un nuevo índice, un "índice exponencial de reservas", que nos proporcione la probable duración de cada recurso suponiendo que se mantenga constante la actual *tasa* de crecimiento del consumo. Este índice aparece en la columna 5 del cuadro 4. También hemos calculado un índice exponencial con base en la hipótesis de que nuevos hallazgos puedan quintuplicar las reservas actuales de cada recurso. Este índice aparece en la columna 6. El efecto del crecimiento exponencial consiste en reducir el periodo probable de disponibilidad del aluminio, por ejemplo, de 100 a 31 años (con un aumento quíntuple de las reservas, el periodo sería de 55 años). El cobre, que tiene una duración de 36 años a la actual tasa de uso, de hecho durará sólo 21 años si mantiene su actual tasa de crecimiento, y 48 si las reservas se quintuplican. Es obvio que las actuales tasas de consumo exponcial reducen en gran medida el tiempo durante el cual el crecimiento económico en gran escala podría basarse en estas materias primas.

Por supuesto que la disponibilidad real de los recursos no renovables en los próximos decenios estará determinada por factores mucho más complicados que los que pueden expresar el simple índice estático de reservas o el índice exponencial de las mismas. Este problema lo hemos estudiado con un modelo muy detallado que examina las muchas interrelaciones que existen entre factores tales como los grados variables de pureza del metal, los costos de producción, la nueva tecnología minera, la elasticidad de la demanda del consumo y la sustitución de otros recursos.* A continuación ilustramos las conclusiones generales de este modelo.

La gráfica 12, realizada por una computadora, indica la futura disponibilidad de un recurso que en 1970 tiene un índice estático de reservas de 400 años, por ejemplo, el cromo. El eje horizontal representa el tiempo en años; el eje vertical indica diversas cantidades, incluidos el monto de las reservas restantes (RESERVAS), el monto utilizado cada año (TASA DE USO), el costo de extracción por unidad (COSTO REAL), el avance de la tecnología de extracción minera y de refinación (representado por T) y la fracción del uso original del recurso que ha sido trasladada a un recurso sucedáneo (F).

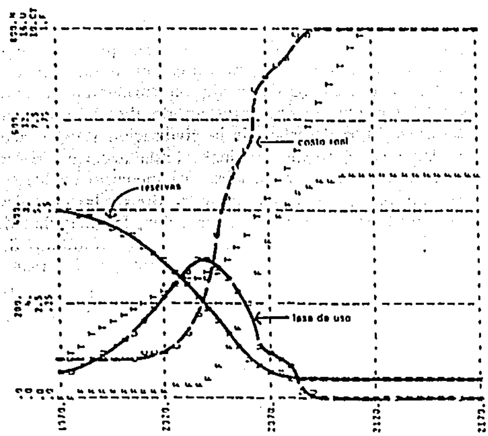
En un principio, el consumo anual del cromo crece exponencialmente, y el acervo del recurso se agota rápidamente. El precio del cromo se mantiene bajo y constante porque nuevos desarrollos en la tecnología minera permiten un uso eficiente de grados cada vez menores de pureza del metal. No obstante, la demanda sigue en aumento, de manera que el avance de la tecnología no es lo bastante acelerado como para contrarrestar los costos de descubrimiento, extracción, procesamiento y distribución. El precio empieza a elevarse, primero con lentitud y después muy rápidamente. Este precio más elevado induce a los consumidores a utilizar el cromo con más eficiencia y a reemplazarlo por otros metales siempre que sea posible. Al cabo de 125 años el cromo restante, cerca del 5 % del

GRÁFICA 11. *Reservas de cromo*



La duración de las reservas conocidas de cromo depende de la futura tasa de uso del cromo. Si el uso permanece constante las reservas se agotarán linealmente (línea discontinua) y durarán 420 años. Si el uso aumenta exponencialmente a su actual tasa de crecimiento del 2.6 % anual, las reservas se agotarán en 95 años. Si las reservas actuales se quintuplican, se dispondrá de cromo durante 154 años (línea punteada), suponiendo que el uso crezca exponencialmente. Aun cuando se pudiera reciclar todo el cromo a partir de 1970, la demanda, que también crece exponencialmente, excederá a la oferta al cabo de 235 años (línea horizontal).

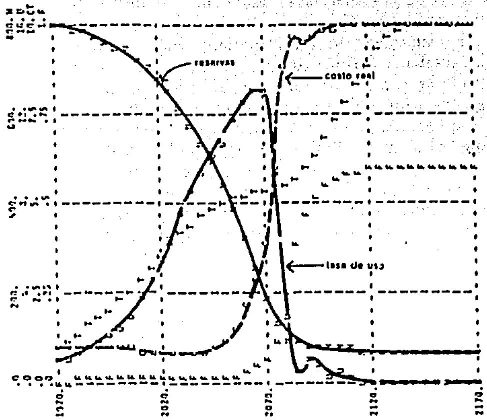
GRÁFICA 12. *Disponibilidad de cromo*



Esta gráfica representa un cálculo de computadora de los factores económicos que intervienen en la disponibilidad de un recurso (cromo) que muestra un índice estático de reservas de 400 años. El crecimiento exponencial del consumo se ve eventualmente frenado por los costos crecientes, en la medida en que se agotan las reservas iniciales, aun cuando la tecnología extractiva y de beneficio también aumenten exponencialmente. La tasa de uso cae hasta cero al cabo de 125 años; en ese punto otro recurso sustituye al cromo en el 60 % de los usos originales.

FUENTE: William W. Behrens III, *The Dynamics of Natural Resource Utilization*, trabajo presentado a la Conferencia sobre Simulación de Computadoras, 1971. Boston, Massachusetts, julio de 1971.

GRÁFICA 13. *Disponibilidad de cromo con el doble de las reservas conocidas*



Si en 1970 un hallazgo duplica las reservas conocidas del recurso (siendo 800 años el índice estático de reservas) el crecimiento exponencial de la tasa de uso se prolonga, y esta última alcanza un valor muy elevado. No obstante, las reservas se agotan muy rápidamente durante el periodo de máxima tasa de uso del metal. Este agotamiento rápido lleva a que el efecto de la duplicación de las reservas no implique una duplicación en la duración del recurso, sino que únicamente la prolongue de 125 a 145 años.

FUENTE: William W. Behrens III, *The Dynamics of Natural Resource Utilization*, *op. cit.*

acervo inicial, es obtenible sólo a un precio prohibitivo, y la explotación de nuevos yacimientos ha caído prácticamente hasta cero.

Esta hipótesis dinámica, más realista, acerca del uso futuro del cromo sugiere una duración probable de 125 años, periodo considerablemente más reducido que el de la duración calculada a partir de la hipótesis estática (400 años), pero mayor que el de la duración calculada a partir de la hipótesis del crecimiento exponencial constante (95 años). En el modelo dinámico, la tasa de uso ni es constante ni crece continuamente, sino que sigue una curva en forma de campana con una fase de crecimiento y una fase de disminución.

La "corrida" o secuencia de la computadora representada en la gráfica 13 ilustra el efecto de un hallazgo que *duplica* las reservas conocidas de cromo restantes en 1970. El índice estático de reservas para 1970 pasa de 400 a 800 años. Como resultado de este nuevo descubrimiento los costos permanecerán bajos durante algún tiempo, de manera que el crecimiento exponencial puede mantenerse durante más tiempo que en la gráfica 12. El periodo durante el cual el uso de ese recurso es factible en términos económicos aumenta de 125 a 145 años. En otras palabras, una *duplicación* de las reservas aumenta sólo 20 años el periodo real de uso.

La superficie terrestre contiene amplia cantidad de las materias primas que el hombre ha aprendido a explotar y a transformar en cosas útiles. Sin embargo, a pesar de su amplitud estas cantidades no son infinitas. Ahora que hemos visto la precipitación con que alcanza su límite una cantidad que crece exponencialmente, el siguiente enunciado es una consecuencia lógica: *Dadas las actuales tasas de consumo de los recursos y el aumento proyectado de estas tasas, la gran mayoría de los recursos no renovables hoy importantes tendrán costos extremadamente elevados dentro de 100 años.* Mientras la demanda de recursos siga aumentando exponencialmente, este enunciado será cierto no obstante se formulen las hipótesis más optimistas acerca de reservas por descubrir, avances tecnológicos, sustitución o reciclaje. Los precios de los recursos cuyos índices estáticos son los más bajos han empezado ya a elevarse. Por ejemplo, en los últimos veinte años el precio del mercurio ha aumentado 500 %, y en treinta años el precio del plomo ha aumentado 300 por ciento.[14]

Las conclusiones simples que hemos derivado al considerar el total de las reservas mundiales de recursos se complican ante el hecho de que ni las reservas de recursos ni su consumo están distribuidos en forma pareja alrededor del mundo. Las últimas cuatro columnas del cuadro 4 muestran claramente que los países consumidores industrializados dependen mucho de toda una red de acuerdos internacionales con los países productores para el abastecimiento de las materias primas que su base industrial exige. Además del problema económico que representa el destino de diversas industrias a medida que el precio de un recurso tras otro se hace cada vez más prohibitivo, está el problema político imponderable de las relaciones entre países productores y países consumidores a medida que los recursos restantes se concentran en áreas geográficas más limitadas. La reciente nacionalización de las minas sudamericanas y las presiones en el Medio Oriente dirigidas hacia la elevación de los precios del petróleo, sugieren que el problema político ha de suscitarse mucho antes que el económico.

¿Existen recursos suficientes para que pueda llevarse a cabo el desarrollo económico de los 7 000 millones de habitantes que se prevé que tendrá el mundo en el año 2 000, a un nivel de vida razonablemente elevado? Una vez más la respuesta a esta pregunta está condicionada. Depende de la manera como las principales sociedades consumidoras de recursos traten algunas de las decisiones más importantes que afrontan. Podrían seguir aumentando el consumo de recursos conforme a la tendencia actual. Podrían aprender a recuperar y reciclar materiales desechados. Podrían desarrollar nuevos diseños para aumentar la durabilidad de productos derivados de recursos escasos. Podrían fomentar patrones económicos y sociales que satisficieran las necesidades de una persona, a la vez que minimizaran, en lugar de maximizar, las sustancias irremplazables que esa persona posea y desgaste.

Todas estas posibilidades implican sacrificios que son particularmente difíciles en este caso porque conllevan la elección entre beneficios presentes y futuros. Para garantizar la disponibilidad futura de recursos adecuados deben adoptarse políticas que disminuyan el uso actual de los recursos. La mayoría de estas políticas opera a través de la elevación de los costos de los recursos. El reciclaje y el mejoramiento del diseño de los productos son costosos, de tal manera que actualmente se consideran "antieconómicos" en la mayor parte del mundo. No obstante, aun cuando estas políticas fueran efectivamente instituidas, mientras los circuitos de retroalimentación que regulan la población y el crecimiento industrial sigan generando más habitantes y una mayor demanda de recursos *per capita*, el sistema se ve empujado a sus límites —el agotamiento de los recursos mundiales no renovables.

¿Qué sucede con los metales y con los combustibles extraídos una vez que han sido utilizados y desechados? En cierto sentido nunca se pierden. Los átomos que los constituyen encuentran un reacomodo y eventualmente se dispersan en una forma diluida e inutilizable en el aire, el suelo y las aguas del planeta. Los sistemas ecológicos naturales pueden absorber muchas de las emanaciones de la actividad humana, volver a procesarlas y convertirlas en sustancias que son útiles, o al menos inofensivas, para otras formas de vida. Sin embargo, cuando se libera alguna emanación en gran escala, los mecanismos naturales de absorción pueden saturarse. Los desechos de la civilización pueden acumularse en el medio ambiente hasta hacerse visibles, estorbosos y aun perjudiciales. El mercurio en los peces, las partículas de plomo en el aire de las ciudades, las montañas de basura de las urbes, las manchas de petróleo en las playas, todo ello es el resultado del flujo creciente de recursos que pasan por las manos del hombre. Por lo tanto, no debe extrañar que la contaminación sea otra cantidad que crece exponencialmente en el sistema mundial.

La contaminación

> Son muchos quienes concluyen, con base en pruebas objetivas, que el periodo de la vida de la biosfera, en tanto que región habitable para organismos vivos, ha de medirse en decenios más que en cientos de miles de años. Nuestra propia especie es culpable por entero de esta situación.[15]

El interés del hombre por el efecto de sus actividades sobre el medio ambiente es apenas reciente. Todavía más recientes e incompletos son los intentos científicos de medir este efecto. Desde luego que en la actualidad no somos capaces de llegar a una conclusión final acerca de la capacidad del mundo para absorber la contaminación. Sin embargo, en esta parte del libro podemos señalar cuatro puntos básicos que ilustran desde una perspectiva global y dinámica lo difícil que será entender y controlar el estado futuro de nuestros sistemas ecológicos. Estos puntos son:

1) Los pocos tipos de contaminación que realmente han podido ser medidos en el tiempo parecen acusar crecimiento exponencial.

2) Prácticamente desconocemos cuáles sean los límites superiores de las curvas de crecimiento de la contaminación.

3) La presencia de rezagos naturales en los procesos ecológicos aumenta las probabilidades de que se subestimen las medidas necesarias de control, y por lo tanto, de que se alcancen, de manera casi inadvertida, esos límites.

4) Muchos de los elementos contaminadores están distribuidos globalmente y sus efectos perjudiciales aparecen en lugares muy alejados de los puntos donde se generan.

Es imposible ilustrar cada uno de estos puntos para cada tipo de agente contaminante, tanto por las limitaciones de espacio de este libro como por las limitaciones que nos imponen los datos disponibles. Por eso examinaremos cada punto tomando como ejemplos los contaminantes que más han podido ser estudiados hasta ahora, aunque esto no implica necesariamente que los contaminantes mencionados sean los de mayor interés (todos son de algún interés), sino que son los que mejor conocemos.

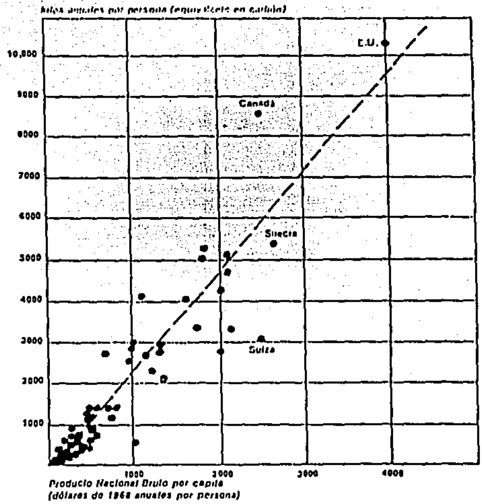
El crecimiento exponencial de la contaminación

Casi todos los elementos contaminantes que han sido medidos como función del tiempo muestran un crecimiento exponencial. Las tasas de aumento de los diversos ejemplos que se presentan varían mucho, pero la mayoría de ellas son superiores a la de la población. Es claro que algunos contaminantes se relacionan directamente con el crecimiento demográfico (o con la actividad agrícola que también se relaciona con este último).

Otros están vinculados de manera más íntima al crecimiento de la industria y a los avances tecnológicos. La mayoría de los contaminantes que actúan en el complicado sistema mundial reciben de alguna manera la influencia *tanto* del circuito positivo de retroalimentación de la población *como* del de la industrialización.

Primero examinaremos los contaminantes relacionados con el uso creciente de la energía. El desarrollo económico es de hecho el proceso de utilización de mayor cantidad de energía para incrementar la productividad y la eficiencia del trabajo humano. Uno de los mejores indicadores de la riqueza de la población es el monto de la energía que consume cada persona (véase la gráfica 14). El consumo mundial de energía *per capita* aumenta a una tasa del 1.3 % anual,[16] lo cual significa un aumento total, incluido el crecimiento demográfico, del 3.4 % anual.

Gráfica 14. *Consumo de energía y Producto Nacional Bruto* per capita

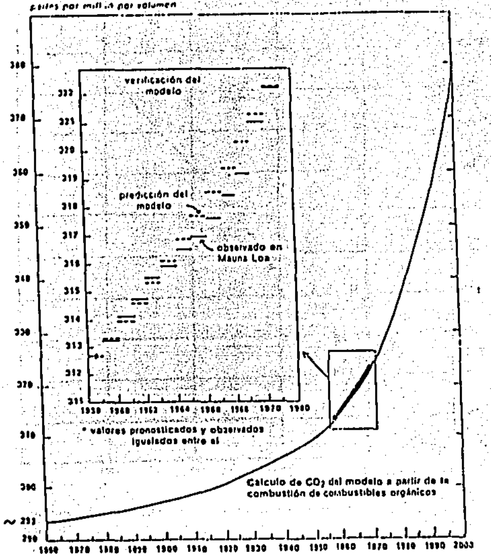


Aunque los países consumen cantidades variables de energía *per capita*, el consumo de energía se correlaciona bastante bien con el producto total *per capita* (PNB *per capita*). Generalmente la relación es lineal; la dispersión de los puntos se debe a diferencias de clima, de precios locales de los combustibles y a la incidencia de la industria pesada.

Fuentes: Los datos sobre el consumo de energía provienen de Naciones Unidas, Departamento de Asuntos Económicos y Sociales, *Statistical Yearbook* 1969, Nueva York, 1970 El PNB *per capita* se tomó del *World Bank Atlas*, Washington, D. C., Banco Internacional de Reconstrucción y Fomento, 1970.

Actualmente, casi el 97 % de la producción industrial de energía proviene de combustibles orgánicos (carbón, petróleo y gas natural)[17] que cuando se queman liberan en la atmósfera, entre otras sustancias, bióxido de carbono (CO_2). Por lo general, la combustión anual de combustibles orgánicos libera cerca de 20 000 millones de toneladas de CO_2.[18] Como lo muestra la gráfica 15, el monto calculado de CO_2 en la atmósfera aumenta exponencialmente, al parecer a una tasa del 0.2 % anual. Se estima que apenas la mitad del CO_2 que libera la utilización de los combustibles orgánicos ha aparecido realmente en la atmósfera —la otra mitad parece haber sido absorbida, principalmente por el agua de la superficie del mar.[19]

GRÁFICA 15. *Concentración de bióxido de carbono en la atmósfera*



La concentración del CO_2 en la atmósfera, observada desde 1968 en Mauna Loa, Hawai, ha aumentado constantemente. En la actualidad, el aumento medio es de 1.5 partes por millón (ppm) anualmente. Cálculos que incluyen los intercambios de CO_2 que se registran entre la atmósfera, la biosfera y los océanos, predicen que la concentración de CO_2 alcanzará 380 ppm anuales en el año 2000 —aumento de casi el 30 % de su valor probable en 1860. La creciente utilización de combustibles orgánicos es la fuente de este aumento exponencial del CO_2 en la atmósfera.

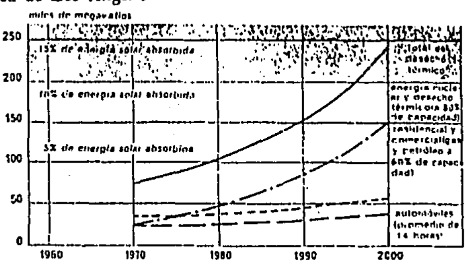
FUENTE: Lester Machta, "The Role of the Ocean and Biosphere in the Carbon Dioxide Cycle", trabajo presentado ante el Simposium Nobel 20, "The Changing Chemistry of the Oceans", Göteborg, Suecia, agosto de 1971.

Si algún día la energía nuclear sustituyera a los combustibles orgánicos en la satisfacción de las necesidades humanas de energía, el aumento del co_2 atmosférico llegará a detenerse; esperemos que esto suceda antes de que ejerza efectos ecológicos o climatológicos apreciables.

Sin embargo, el uso de energía tiene otro efecto paralelo, independiente de la fuente del combustible. En virtud de las leyes de la termodinámica, esencialmente toda la energía utilizada por el hombre debe disiparse en última instancia como calor. Si la fuente de energía no es exclusivamente energía solar incidente (esto es, combustibles orgánicos o energía atómica), ese calor elevará la temperatura de la atmósfera directamente, o bien indirectamente a través de la radiación proveniente del agua utilizada con propósitos de enfriamiento. Localmente el desecho de calor, o "contaminación térmica", en los arroyos provoca un rompimiento del equilibrio de la vida acuática.[20] El desecho atmosférico de calor cerca de las ciudades provoca la formación de "islotes urbanos de calor", dentro de los cuales se registran muchas anomalías meteorológicas.[21] Si la contaminación térmica llega a constituir una fracción importante de la energía solar normalmente absorbida por la tierra y proveniente del sol, puede tener efectos graves sobre el clima a escala mundial.[22] En la gráfica 16, el nivel de la contaminación térmica proyectado para una gran ciudad está representado como una fracción de la energía solar incidente.

Además, la energía nuclear producirá otro tipo de agente contaminante —los desechos radiactivos. Como actualmente este tipo de energía proporciona apenas una fracción muy pequeña de la energía que utiliza el hombre, el posible efecto de los desechos vertidos por los reactores nucleares en el medio ambiente no es más que una conjetura. No obstante, podemos desprender algunas ideas a partir de las descargas exis-

GRÁFICA 16. *Generación de desechos térmicos en la cuenca de Los Ángeles*



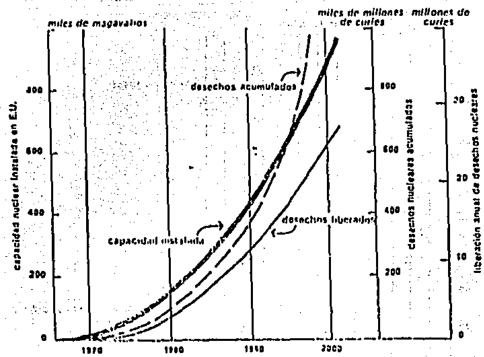
El desecho térmico liberado sobre el área de 4 000 millas cuadradas de la cuenca de Los Ángeles constituye en la actualidad casi el 5 % del total de la energía solar absorbida a nivel del suelo. A la tasa actual de incremento, la descarga térmica alcanzará el 18 % de la energía solar recibida en el año 2 000. Este calor, resultado de todos los procesos de generación y consumo de energía, está afectando ya el clima local.

FUENTE: L. Lees, en *Man's Impact on the Global Environment, Report of the Study of Critical Environmental Problems*, Cambridge, Mass., MIT Press, 1970.

tentes y las previstas de isótopos radiactivos de las plantas de energía actualmente en construcción en Estados Unidos. Una lista parcial de la descarga anual previsible que recibirá el medio ambiente de una planta de 1.6 millones de kilovatios actualmente en construcción en Estados Unidos incluye 42 800 curies* de

* Un curie es el equivalente radiactivo de un gramo de radio. Ésta es una cantidad tan grande que las concentraciones en el medio ambiente se expresan por lo general en microcuries (millonésimas de curie).

Gráfica 17. *Desechos nucleares*



Se espera que la capacidad de generación nuclear instalada en Estados Unidos aumente de 11 000 megavatios en 1970 a más de 900 000 el año 2 000. El monto total de los desechos nucleares acumulados, subproductos radiactivos de la generación de energía, probablemente excederá ese año de un billón de curies. La descarga anual de desechos nucleares, gran parte en gas kryptón y tricio en el agua de enfriamiento, alcanzará 25 millones de curies si se mantienen vigentes las actuales normas de descarga.

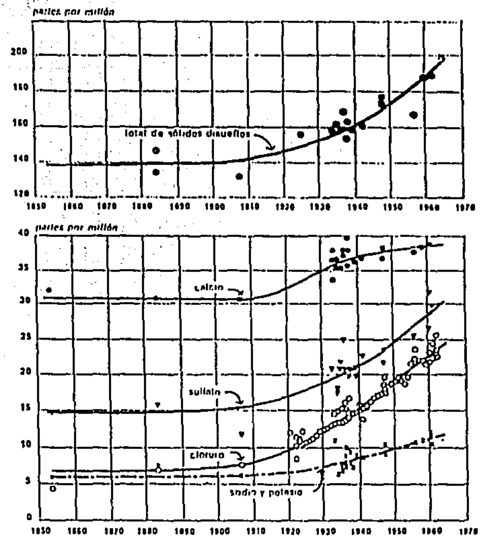
Fuentes: Para la capacidad instalada en 1985, U. S. Atomic Energy Commission, *Forecast of Growth of Nuclear Power*, Washington, D. C., Government Printing Office, 1971. Para la capacidad instalada en el año 2 000, Chauncey Starr, "Energy and Power", *Scientific American*, septiembre de 1971. Para los desechos nucleares acumulados, J. A. Snow, "Radioactive Waste from Reactors", *Scientist and Citizen* 9, 1967. La descarga anual de desechos nucleares fue calculada a partir de las especificaciones realizadas para la planta de 1 600 megavatios en Calvert Cliffs, Maryland.

kryptón radiactivo (su media-vida va de unas cuantas horas a 9.4 años, dependiendo del isótopo) en el cúmulo de gases, y 2 910 curies de tricio (cuya media-vida es de 12.5 años) en el desecho de agua.[23] La gráfica 17 muestra el aumento que se prevé en la capacidad de generación nuclear de Estados Unidos desde ahora hasta el año 2 000. La gráfica incluye también una estimación de los desechos radiactivos que liberan anualmente estas plantas de energía nuclear y de los desechos acumulados (de combustibles de reactores ya consumidos) que tendrán que ser almacenados.

El bióxido de carbono, la energía térmica y los desechos radiactivos son sólo tres de las muchas perturbaciones que el hombre introduce en el medio ambiente a una tasa que crece exponencialmente. Las gráficas 18 a 21 presentan otros ejemplos.

La gráfica 18 muestra los cambios químicos que se registran en un gran lago de América del Norte en virtud de la acumulación de desechos solubles industriales, agrícolas y municipales. También indica la disminución de la producción comercial de pescado. La gráfica 19 ilustra por qué el aumento de los desechos orgánicos tiene efectos tan catastróficos sobre la vida acuática. También señala la cantidad de oxígeno disuelto (que el pez "respira") en el Mar Báltico como función del tiempo. A medida que mayores cantidades de desechos penetran en el agua y degeneran, el oxígeno disuelto se agota. En el caso de algunas partes del Báltico, el nivel del oxígeno es prácticamente cero.

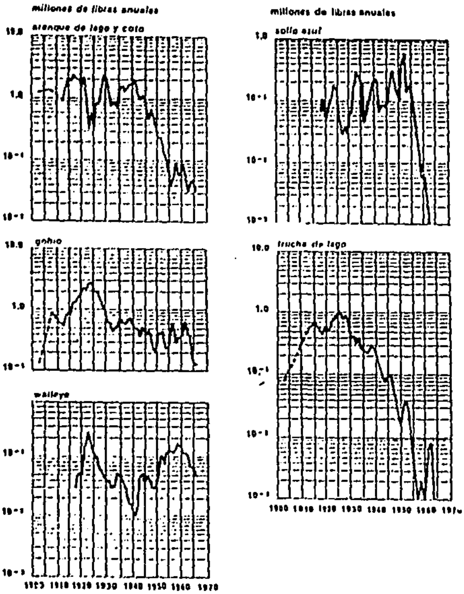
Gráfica 18. *Cambios en las características químicas y producción comercial de pescado en el lago Ontario*



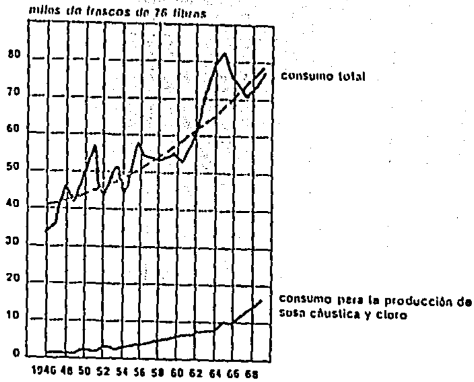
Como resultado de fuertes vertimientos de desechos municipales, industriales y agrícolas en el lago Ontario, las concentraciones de numerosas sales han estado creciendo exponencialmente. Los cambios químicos en el lago han provocado disminuciones agudas de la pesca más valiosa en términos comerciales. Debe notarse que la escala de la gráfica es logarítmica, por lo que la pesca de la mayoría de las especies ha disminuido por factores de 100 a 1 000.

Fuente: A. M. Beeton, *Statement on Pollution and Eutrophication of the Great Lakes*, The University of Wisconsin Center for Great Lakes Studies, Special Report núm. 11, Milwaukee, Wisconsin, Universidad de Wisconsin, 1970.

Los automóviles, los incineradores, los procesos industriales y los plaguicidas agrícolas liberan plomo y mercurio, ambos metales tóxicos, en las vías acuáticas y en la atmósfera. La gráfica 20 muestra el aumento exponencial del consumo de mercurio en Estados Uni-



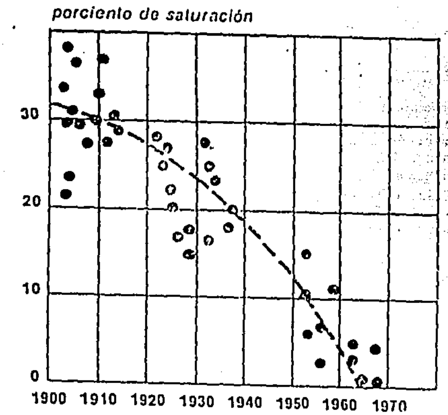
Gráfica 20. *Consumo de mercurio en Estados Unidos*



El consumo de mercurio en Estados Unidos muestra una tendencia exponencial, a la que se superponen las fluctuaciones del mercado a corto plazo. Una gran parte del mercurio se utiliza sólo para la producción de sosa cáustica y de cloro. La gráfica no incluye el monto creciente de mercurio que la combustión de combustibles orgánicos libera en la atmósfera.

Fuente: Barry Commoner, Michael Carr y Paul J. Stamler, "The Causes of Pollution", *Environment*, abril de 1971.

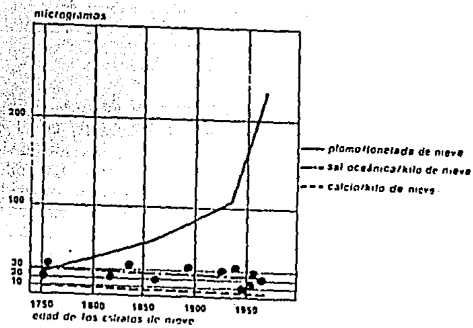
Gráfica 19. *Contenido de oxígeno del mar Báltico*



La creciente acumulación de desechos orgánicos en el Mar Báltico, donde la circulación del agua es mínima, ha resultado en una disminución constante de la concentración de oxígeno en el agua. En algunas áreas, especialmente en las aguas más profundas, la concentración de oxígeno es igual a cero, y por lo tanto, no pueden albergar casi ninguna forma de vida.

Fuente: Stig H. Fonselius, "Stagnant Sea", *Environment*, julio/agosto de 1970.

Gráfica 21. *Plomo en la cubierta de hielo de Groenlandia.*



Muestras profundas de nieve de la superficie helada de Groenlandia presentan grandes depósitos de plomo que aumentan con el tiempo. Como punto de referencia también se midieron las concentraciones de calcio y de sal oceánica. La presencia del plomo refleja el uso creciente que el mundo hace del metal, incluida la descarga directa de los escapes de los automóviles en la atmósfera.

Fuente: C. C. Patterson y J. D. Salvia, "Lead in the Modern Environment-How Much is Natural?" *Scientist and Citizen*, abril de 1968.

dos de 1964 a 1968. Sólo el 18 % de este mercurio puede recuperarse y reciclarse.[21] La extracción de muestras sucesivamente más profundas de la cubierta de hielo de Groenlandia ha permitido detectar el aumento exponencial de los depósitos de plomo en el aire, como aparece en la gráfica 21.

Límites superiores desconocidos

Todas estas curvas exponenciales de los distintos tipos de contaminación pueden extrapolarse en el futuro, como hemos extrapolado las necesidades de tierra en la gráfica 10 y el uso de recursos en la gráfica 11. En ambos casos la curva de crecimiento exponencial llega a alcanzar un límite —el monto total de tierra cultivable o los recursos mundiales económicamente disponibles. No obstante, no se han fijado los límites superiores de las curvas de crecimiento exponencial de los contaminantes en las gráficas 15 a 21 porque no sabemos qué tanto podemos perturbar el equilibrio ecológico natural del mundo sin provocar consecuencias graves. Se desconoce cuánto CO_2 o cuánta contaminación térmica pueda liberarse sin que esto provoque cambios irreversibles en el clima del planeta o cuánta radiactividad, plomo, mercurio o plaguicidas puedan absorber las plantas, los peces o los seres humanos antes de que los procesos vitales se vean gravemente interrumpidos.

Rezagos naturales en los procesos ecológicos

La ignorancia que prevalece en torno a los límites de la capacidad del planeta para absorber contaminantes debería ser una razón suficiente para tomar precauciones en cuanto a la descarga de las sustancias contaminantes. El peligro que se corre de alcanzar esos límites es especialmente grande porque entre la liberación de un contaminante en el medio ambiente y la aparición de su efecto negativo en el sistema ecológico suele haber un prolongado rezago. La huella del DDT en el medio ambiente, después de haber sido utilizado como insecticida, puede ilustrar las implicaciones dinámicas de ese efecto rezagado. Los resultados que presentamos más abajo han sido tomados de un estudio detallado* de dinámica de sistemas que utiliza las constantes numéricas que corresponden al DDT. La conclusión general es aplicable (con algunos cambios en los números exactos que se incluyan) a cualquier sustancia duradera como el mercurio, el plomo, el cadmio, otros plaguicidas, el policlorobifenil (PCB) y los desechos radiactivos.

El DDT es una sustancia química orgánica elaborada por el hombre, que se aplica en el medio ambiente para que desempeñe las funciones de plaguicida, a razón de casi 100 000 toneladas anuales.[25] Después de que se rocía, parte de él se evapora y el aire lo transporta a grandes distancias antes de que termine por precipitarse en la tierra o en el mar. En el mar, parte del DDT se incorpora al plancton, parte de ese plancton sirve de alimento a los peces y, por último, con algunos de esos peces se alimenta el hombre. En cada paso de este proceso el DDT puede degenerar en sustancias inofensivas, puede volver al mar o puede concentrarse en los tejidos de organismos vivos. Existe un rezago en cada una de estas etapas. Todas estas vías alternativas han sido analizadas por una computadora, que obtuvo los resultados que aparecen en la gráfica 22.

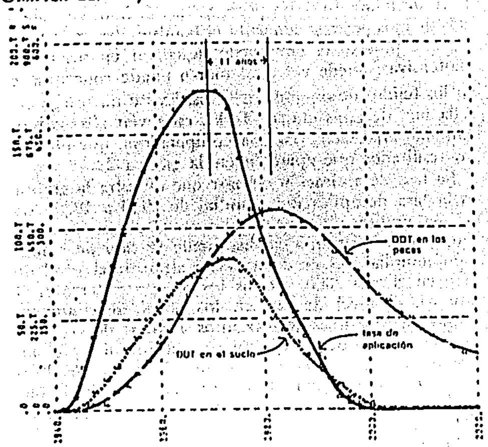
La tasa de aplicación del DDT que muestra la gráfica es la tasa de aplicación mundial de 1940 a 1970. La misma gráfica muestra lo que sucedería si en 1970 empezara a disminuir gradualmente la tasa de aplicación mundial del producto hasta alcanzar el nivel de cero en el año 2000. Dados los rezagos inherentes al sistema, el nivel de DDT en los peces sigue aumentando durante más de diez años a partir de la fecha en que el uso del DDT empiece a disminuir, y el nivel en los peces *no vuelve a ser el mismo de 1970 sino hasta 1995* —más de veinte años después de que se haya tomado la decisión de reducir la aplicación del DDT.

Siempre que se registre un rezago prolongado entre el momento en que se libera un contaminante y aquel en que reaparece bajo una forma dañina, sabemos que habrá un rezago igualmente prolongado entre el momento en que se *controla* ese contaminante y aquel en que por fin disminuye su efecto perjudicial. En otras palabras, cualquier intento de control de la contaminación basado en la institución de controles cuando ya se han podido detectar sus efectos perjudiciales es una prueba de que el problema probablemente empeorará antes de que mejore. Los sistemas de este tipo son sumamente difíciles de controlar, porque exigen que las acciones que se emprendan en ese momento estén basadas en resultados previsibles en un futuro lejano.

Distribución global de los contaminantes

Actualmente sólo los países desarrollados están seriamente interesados en el problema de la contaminación ambiental. Sin embargo, una de las características más desafortunadas de muchos tipos de contaminación es que con el tiempo se distribuyen ampliamente por todo el mundo. Aun cuando Groenlandia está muy alejada de cualquier fuente de contaminación atmosférica de plomo, el monto de esa sustancia depositado en el hielo de la región ha aumentado, a partir del año 1940, en 300 %.[26] El DDT se ha acumulado en la grasa del cuerpo humano en todas partes del mundo, desde los esquimales de Alaska hasta los habitantes de Nueva Delhi, como aparece en el cuadro 5.

GRÁFICA 22. *Flujos de DDT en el medio ambiente*



El cálculo de la huella del DDT en el medio ambiente muestra el posible resultado de que la tasa de aplicación mundial empezara a disminuir en 1970. El DDT aparece en el suelo poco después de que empiece a disminuir la tasa de aplicación, pero en los peces sigue aumentando durante 11 años y no vuelve al nivel de 1970 hasta 1995. El DDT en los animales que se alimentan de pescado, como los pájaros, y en el hombre, tardaría aún más en responder a la disminución de la tasa de aplicación.

FUENTE: Jørgen Randers y Dennis L. Meadows, *System Simulation to Test Environmental Policy, I: A Sample Study of* DDT *Movement in the Environment*, Cambridge, Mass., Instituto Tecnológico de Massachusetts, 1971.

CUADRO 5. DDT *en la Grasa del Cuerpo Humano*

Población	*Año*	*Número de personas en la muestra*	*Concentración de* DDT *y productos tóxicos que aparecen en la grasa del cuerpo humano (partes por millón)*
Alaska (esquimales)	1960	20	3.0
Alemania	1958-59	60	2.3
Canadá	1959-60	62	4.9
Estados Unidos (Kentucky)	1942	10	0
Estados Unidos (Georgia, Kentucky, Arizona, Washington)	1961-62	130	12.7
Estados Unidos (todo)	1964	64	7.6
Francia	1961	10	5.2
Hungría	1960	48	12.4
India (Delhi)	1964	67	26.0
Inglaterra	1961-62	131	2.2
Inglaterra	1964	100	3.9
Israel	1963-64	254	19.2

FUENTE: Wayland J. Hayes, Jr., "Monitoring Food and People for Pesticide Content", *Scientific Aspects of Pest Control*, Washington, D. C., National Academy of Sciences —National Research Council, 1966.

LOS LÍMITES DE LA CONTAMINACIÓN

Dado que la generación de contaminación es función complicada de la población, la industrialización y los desarrollos tecnológicos específicos, es difícil estimar con exactitud la velocidad con que se eleva la curva exponencial de la descarga total de contaminación. Podemos calcular que si los 7 000 millones de habitantes que tendrá el mundo en el año 2 000 alcanzan a tener un producto nacional bruto *per capita* paralelo al de los norteamericanos actualmente, la carga total de contaminación en el medio ambiente será por lo menos diez veces mayor a la actual. ¿Pueden los sistemas naturales del planeta soportar una intrusión de esa magnitud? No sabemos. Algunos creen que el hombre ya ha degradado tanto el medio ambiente que los grandes sistemas naturales han sufrido daños irremediables. No sabemos con precisión cuál es el límite superior de la capacidad del planeta para absorber un tipo determinado de contaminación, mucho menos la combinación de todos los tipos de contaminación que existen. No obstante, sabemos que *existe* un límite superior que en muchos medios locales ya ha sido rebasado. La manera más segura de alcanzar globalmente ese límite es aumentando exponencialmente tanto el número de habitantes como las actividades de cada persona que implican contaminación.

Las disyuntivas que plantea el sector ambiental del sistema mundial son tan difíciles de resolver como los del sector agrícola y los del sector de recursos naturales. Por lo general, los beneficios de las actividades que generan contaminación están muy alejados de los costos en tiempo y espacio. Por lo tanto, para tomar decisiones justas hay que considerar los factores tiempo y espacio. Si los desechos se depositan aguas arriba ¿quién sufrirá aguas abajo?; si sustancias fungicidas elaboradas a base de mercurio se utilizan ahora, ¿en qué medida, cuándo y dónde aparecerá el mercurio en los peces de los océanos?; si fábricas que generan contaminación se establecen en áreas remotas para "aislar" los contaminadores ¿dónde estarán esos contaminantes dentro de diez o veinte años?

Es posible que los avances tecnológicos permitan la expansión de la industria con disminución de la contaminación, pero sólo a un costo muy elevado. El Consejo Norteamericano para la Calidad Ambiental ha pedido 105 000 millones de dólares de presupuesto desde ahora hasta 1975 (42 % sería pagado por la industria) sólo para llevar a cabo en Estados Unidos una limpia parcial del aire, el agua y de la contaminación provocada por desechos sólidos.[27] Cualquier país puede aplazar el pago de esos costos para aumentar la actual tasa de crecimiento de su planta de capital, pero únicamente a expensas de una futura degeneración ambiental que sólo puede ser reversible a un costo muy elevado.

Un mundo finito

En este capítulo hemos hablado de muchas disyuntivas difíciles en la producción de alimentos, en el consumo de recursos y en la generación y limpieza de la contaminación. Hasta aquí debe quedar bien claro que todas estas disyuntivas se derivan de un simple hecho —que la tierra es finita. Mientras más cercana esté una actividad humana al límite de la capacidad del planeta para mantener esa actividad, más aparentes e insolubles se hacen esas disyuntivas. Cuando hay suficiente tierra cultivable que no ha sido utilizada, puede haber más gente y también más alimentos por persona. Cuando toda la tierra está siendo utilizada, la alternativa entre más gente y más alimentos por persona se convierte en una elección entre absolutos.

En general, la sociedad contemporánea no ha aprendido a reconocer estas disyuntivas y a enfrentarse a ellas. El objetivo ostensible del sistema mundial es producir más gente con más (alimentos, bienes materiales, aire puro y agua) para cada persona. En este capítulo hemos señalado que si los esfuerzos de la sociedad siguen orientándose en ese mismo sentido, se alcanzarán algunas de las muchas limitaciones del planeta. Como veremos en el siguiente capítulo, no es posible predecir con exactitud cuál será la limitación que se presentará primero o cuáles serán sus consecuencias, porque existen muchas respuestas humanas concebibles e impredecibles a tal situación. No obstante, es posible investigar las condiciones y los cambios en el sistema mundial que pueden llevar a la sociedad a un enfrentamiento o a un acomodo con los límites del crecimiento en un mundo finito.

REFERENCIAS

[4] Lester R. Brown, *Seeds of Change*, Nueva York, Praeger Publishers, 1970, p. 135.

[5] President's Science Advisory Panel on the World Food Supply, *The World Food Problem*, Washington, D. C., Government Printing Office, 1967, 2: 5.

[6] *Ibid.*, 2: 423.

[7] *Ibid.*, 2: 460-469.

[8] Naciones Unidas, FAO, *Provisional Indicative World Plan for Agricultural Development*, Roma, FAO, 1970, 1: 41. (Hay edición en español.)

[a] Reconocimientos aéreos de 44 condados del oeste de Estados Unidos, realizados de 1950 a 1960, indican que el terreno construido va de .008 a .174 hectáreas por persona.[9]

[9] Datos de una encuesta del Economic Research Service, presentados por Rodney J. Arkley en *Urbanization of Agricultural Land in California*, mimeografiado, Berkeley, Calif., Universidad de California, 1970.

[10] Paul R. Ehrlich y Anne H. Ehrlich, *Population, Resources, Environment*, San Francisco, Calif., W. H. Freeman and Company, 1970, p. 72.

[11] *Man's Impact on the Global Environment*, Report of the Study of Critical Environmental Problems, Cambridge, Mass., MIT Press, 1970, p. 118.

[12] *First Annual Report of the Council on Environmental Quality*, Washington, D. C., Government Printing Office, 1970, p. 158.

[13] US Bureau of Mines, *Mineral Facts and Problems, 1970*, Washington, D. C., Government Printing Office, 1970, p. 247.

[14] Datos sobre el mercurio del US Bureau of Mines, *Minerals Yearbook*, Washington, D. C., Government Printing Office, 1967, 1(2), p. 724 y US Bureau of Mines, *Commodity Data Summary*, Washington, D. C., Government Printing Office, enero de 1971, p. 90. Los datos sobre el plomo fueron tomados de *Metal Statistics*, Somerset, N. J., American Metal Market Company, 1970, p. 215.

[15] G. Evelyn Hutchinson, "The Biosphere", *Scientific American*, septiembre de 1970, p. 53.

[16] Chauncey Starr, "Energy and Power", *Scientific American*, septiembre de 1971, p. 42.

[17] Naciones Unidas, Departamento de Asuntos Económicos y Sociales, *Statistical Yearbook 1969*, Nueva York, Naciones Unidas, 1970, p. 40.

[18] Bert Bolin, "The Carbon Cycle", *Scientific American*, septiembre de 1970, p. 131.

[19] *Inadvertent Climate Modification*, Report of the Study of Man's Impact on Climate, Cambridge, Mass., MIT Press, 1971, p. 234.

[20] John R. Clark, "Thermal Pollution and Aquatic Life", *Scientific American*, marzo de 1969, p. 18.

[21] *Inadvertent Climate Modification*, pp. 151-154.

[22] John P. Holdren, "Global Thermal Pollution", en *Global Ecology*, John P. Holdren y Paul R. Ehrlich (eds.), Nueva York, Harcourt Brace Jovanovich, 1971, p. 85.

[23] Baltimore Gas and Electric Company, "Preliminary Safety Analysis Report", citado en E. P. Ranford *et al.*, "Statement of Concern", *Environment*, septiembre de 1969, p. 22.

[24] R. A. Wallace, W. Fulkerson, W. D. Shults y W. S. Lyons, *Mercury in the Environment*, Oak Ridge, Tenn., Oak Ridge Laboratory, 1971.

[25] *Man's Impact on the Global Environment*, p. 131.

[26] C. C. Patterson y J. D. Salvia, "Lead in the Modern Environment", *Scientist and Citizen*, abril de 1968, p. 66.

[27] *Second Annual Report of the Council on Environmental Quality*, Washington, D. C., Government Printing Office, 1971, pp. 110-111.

ACTIVIDAD II-3-3

RESUMEN DE LA LECTURA

"LOS LIMITES DEL CRECIMIENTO EXPONENCIAL"

Realizada la lectura del material, los alumnos, en forma individual, elaboran un resumen del texto que contenga los siguientes aspectos:

- Planteamiento claro de la situación que aborda.
- Conceptos utilizados clasificados por áreas del conocimiento.
- Métodos matemáticos y no matemáticos empleados.
- Relaciones cuantitativas que aparecen.
- Relaciones causales que se formulan.
- Respuesta concreta que se da a la pregunta central planteada.
- Forma en la cual aparece utilizada la matemática.
- Explicitación de la forma en la cual se estructuran los contenidos de diferentes racionalidades.

CONCLUSIONES

En el Prefacio a este trabajo se puntualizó en que consistiría. Ahí se dijo: este trabajo es una Propuesta Educativa que se propone enseñar, a alumnos del bachillerato, la forma en la cual se han utilizado conceptos, relaciones, métodos y algoritmos, provenientes de diferentes áreas del conocimiento, en el estudio científico de una situación concreta real, como puede ser un hecho social o un fenómeno de la naturaleza.

Después de haber desarrollado sus distintas partes, que fundamentalmente fueron dos: Marco Teórico Conceptual y diseño del Curso (Programa, actividades enseñanza-aprendizaje y materiales didácticos), es posible formular algunas conclusiones que se derivan del desarrollo del propio trabajo.

1. Desde un principio se puso de manifiesto que tratar problemas como el acá desarrollado, en el salón de clases, entraña dificultades, algunas de las cuales se han puesto de manifiesto en el transcurso de la elaboración de este trabajo y que son las siguientes:

   i. Se necesita que el profesor recuerde sus conocimientos sobre distintas áreas del saber, al menos a nivel de secundaria y preparatoria y, posiblemente, haya necesidad de que aprenda otras.

   ii. El diseño de las actividades de enseñanza-aprendizaje requiere de materiales adecuados, los cuales no son de fácil elaboración y además precisan de una bibliografía conveniente que depende del nivel al que se aborde la situación.

2. Tratar situaciones concretas como la desarrollada en estas páginas, tiene sus riesgos y peligros. Entre éstos podemos anotar los siguientes:

   i. Puede dar lugar a la dispersión. Al ser muchos y variados los conocimientos que posiblemente sea necesario desarrollar en el segundo acercamiento, se corre el peligro de perder la orientación del problema original.

ii. Puesto que tradicionalmente, para un estudiante, aprender Matemáticas es aprender algoritmos, puede suceder que al estudiar situaciones concretas considere, sienta y aprecie que no está aprendiendo Matemáticas.

3. En un curso tradicional de Matemáticas donde sólo se atiende su estructura lógica, no tienen cabida contenidos de otras racionalidades y los tiempos disponibles son a lo más suficientes para desarrollar los puros contenidos matemáticos, no es posible incluir aplicaciones de esta Ciencia en la línea de pensamiento seguida en este trabajo.

4. Cualquier situación concreta (fenómeno de la naturaleza o hecho social) es factible de abordarse para su estudio según el método expuesto en estas páginas.

5. Entre más áreas del conocimiento concurran en el estudio de la situación concreta, mayor será su potencial integrador; pero a la vez será más difícil de abordarse en el salón de clase.

6. Para ubicar situaciones concretas suceptibles de presentarse como aplicaciones de

las Matemáticas, se puede recurrir a periódicos, revistas, literatura de divulgación científica y libros dedicados a temas científicos y tecnológicos.

7. Se debe tener cuidado de que la situación seleccionada sea presentada y estudiada a nivel adecuado al grado de conocimientos de los estudiantes.

8. Para abordar el estudio de alguna situación concreta, el alumno, por un lado, recuerda lo que sabe y por otro, construye nuevos conocimientos; la proporción entre unos y otros depende del nivel escolar en que se presente la situación y es un indicador de la factibilidad de abordarse en un Curso particular de Matemáticas tomando en consideración el tiempo de que se dispone para su estudio.

9. Si partimos del supuesto de que para realizar el estudio de alguna situación concreta o se recuerda o se construye lo que se necesita, entonces cualquier situación "adecuada" para el bachillerato puede presentarse en cualquier momento de éste. En estas condiciones lo que ocurrirá es que el tiempo que se invierta en su desarrollo será directamente proporcional a lo que se tenga que construir.

10. Presentar, en un curso curricular de Matemáticas, para su estudio, situaciones

concretas como la ilustrada en este trabajo, es posible siempre y cuando, un amplio porcentaje de los contenidos necesarios ya sean del conocimiento de los alumnos.

11. Presentar situaciones concretas como la ejemplificada en este trabajo, requiere romper con la estructura tradicional del Curso, reconocer la importancia que tienen áreas del conocimiento diferentes a las Matemáticas y modificar la estructura de la clase.

12. Presentar aplicaciones de las Matemáticas con el enfoque mostrado en estas páginas, reclama de un tiempo mucho mayor del utilizado cuando esto mismo se hace pero en forma descontextualizada y sin prestarles la atención necesaria a los elementos no-matemáticos que concurren en ella.

13. Si bien la propuesta didáctica (a partir de tres acercamientos) que se presenta en este trabajo, se ha hecho para un tipo particular de problema (aplicación de las Matemáticas), es posible que esta misma didáctica sea extensiva a cualquier tipo de problema que enfrente un estudiante.