

03064,  
2eje.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

INSTITUTO DE CIENCIAS DEL MAR Y LIMNOLOGIA

UNIDAD ACADEMICA DE LOS CICLOS PROFESIONAL Y DE  
POSGRADO DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES  
PROYECTO ACADEMICO ESPECIALIZACION, MAESTRIA  
Y DOCTORADO EN CIENCIAS DEL MAR.

"MODELO NUMERICO DE CIRCULACION PARA LA  
BAHIA DE CAMPECHE"

TESIS QUE PRESENTA

HABACUC VELASCO MENDOZA

PARA OPTAR POR EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS DEL MAR

(ESPECIALIDAD OCEANOGRAFIA FISICA)

ASESOR: DRA. MA. ADÉLA MONREAL GOMEZ

MEXICO, D. F.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

1994



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## MODELO NUMERICO DE CIRCULACION PARA LA BAHIA DE CAMPECHE

### RESUMEN

Se aplicó un modelo baroclínico de gravedad reducida con el fin de simular la circulación en la Bahía de Campeche, México. Las ecuaciones de dicho modelo son resueltas numéricamente sobre una malla uniforme del tipo Arakawa "C" modificada con 5 minutos de resolución. Se usó una frontera abierta del tipo especificada sobre el paralelo 21° N, con información de intercambio de masa para invierno y verano de 1987 y verano de 1988. Los resultados del modelo mostraron para el invierno de 1987 dos giros anticiclónicos al noroeste de la Bahía, aproximadamente a 120 y 287 km de la costa, frente a Tuxpan, y un ciclónico en el sureste, frente al Banco de Campeche. Este último, fué ligeramente intensificado por la influencia de los vientos promedios del norte. Para el verano del mismo año, en la parte noroeste de la Bahía, aproximadamente a 74, 213 y 342 km de la costa de Veracruz, se presentaron tres giros de forma alternada: anticiclónico, ciclónico y anticiclónico. En el sureste, al igual que en el invierno se presentó una circulación ciclónica, sólo que para dicho verano fué más intensa. En el verano de 1988, el giro anticiclónico costero se presentó aproximadamente 30 km más al suroeste que en el verano anterior, y la estructura ciclónica y anticiclónica fueron desplazadas hacia el oeste. Sin embargo, el giro ciclónico del sureste permaneció prácticamente en la misma posición. En todos los casos, la circulación anticiclónica en el noroeste fué más energizada que la ciclónica del sureste. La estructura ciclónica del sureste, fué causada por el intercambio de masa a través de la frontera abierta y su intensificación en veranos está intimamente relacionada con el menor espesor de la capa de mezcla y la máxima intrusión de la Corriente de Lazo.

Vo.Bo.

*Adela Monreal*  
Dra. María Adela Monreal Gómez

Asesor

## MODELO NUMERICO DE CIRCULACION PARA LA BAHIA DE CAMPECHE

Por: **Habacuc Velasco Mendoza**

A HIS PADRES

Por el constante apoyo y su gran comprensión

A HIS HERMANOS

Con todo mi cariño

A HIS AMIGOS

Que buscan la verdad sin descanso. A ¡Esos los  
Imprescindibles!. A los cansados?... ¡Perdón!.

Para mí?... ¡constituye todo el mundo! cubre la mayor parte del globo terrestre. Su aliento es puro y lleno de fuerza vital. En su infinito desierto uno no se siente abandonado, pues en su alrededor se percibe el pulso de la vida. En sus entrañas habitan extraordinarios seres fantásticos. El mar es un movimiento "Perpetuo", el amor y la vida eterna.

Julio Verne (En: Capitán Nemo)

## RECONOCIMIENTOS

A los integrantes del Comité Asesor: Dra. María Adela MONREAL GOMEZ, Dr. David Alberto SALAS DE LEON y Dr. Adolfo MOLINA CRUZ.

A los integrantes de mi Jurado: Dra. María Adela MONREAL GOMEZ, Dr. David Alberto SALAS DE LEON, H. en C. Miguel Angel ALATORRE HENDIETA, Dr. Adolfo MOLINA CRUZ y Dr. Adolfo GRACIA GASCA.

Muy especial a la Dra. María Adela MONREAL GOMEZ y al Dr. David Alberto SALAS DE LEON por la dirección y asesoría de este trabajo, y por su gran talento con sus estudiantes.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) y a la Dirección General de Asuntos del Personal Académico (DGAPA-UNAM) por el apoyo económico brindado durante la elaboración de este trabajo.

A la Dirección General de Servicios de Cómputo Académico (DGSCA-UNAM) por la infraestructura de cálculo brindada.

Al Centro Científico de IBM de México por su apoyo con equipo de cómputo especializado e interés en la animación de este trabajo.

Al apoyo en cómputo brindado por los matemáticos: Ignacio PALOHAR HORALES y María del Carmen RAMOS NAVA.

A todos aquellos que en forma indirecta hicieron posible este trabajo.

## CONTENIDO

RESUMEN

INTRODUCCION

1

### CAPITULO I: MARCO OCEANOGRAFICO

1.1 AREA DE ESTUDIO	4
1.2 ANTECEDENTES	5
1.2.1 CORRIENTES	6
1.2.2 CONDICIONES METEOROLOGICAS	9
1.2.3 HIDROGRAFIA	12
1.2.4 TIPOS Y ORIGEN DE LOS SEDIMENTOS	13
1.3 HIPOTESIS	15
1.4 OBJETIVO	16

### CAPITULO II: MODELO HIDRODINAMICO

2.1 ECUACION DE MOMENTUM	17
2.2 LAS FUERZAS QUE ACTUAN EN EL OCEANO	20
2.2.1 FUERZAS DE GRADIENTE DE PRESION	20
2.2.2 FUERZAS VISCOSAS	22
2.2.3 ESFUERZOS DE REYNOLDS	24
2.3 ESCALAS DE LOS MOVIMIENTOS EN LA BAHIA DE CAMPECHE	31
2.3.1 ESCALAS DE LOS MOVIMIENTOS HORIZONTALES	33
2.3.2 ESCALAS DE LOS MOVIMIENTOS VERTICALES	36
2.3.3 ESCALAS DE LA ECUACION DE CONTINUIDAD	39
2.4 INTEGRACION VERTICAL DE LA ECUACION DE MOMENTUM	39
2.4.1 INTEGRACION DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO HORIZONTAL	42
2.4.2 INTEGRACION DE LA ECUACION HIDROSTATICA	45
2.4.3 INTEGRACION DE LA ECUACION DE CONTINUIDAD	45
2.5 MODELO BAROCLINICO DE DOS CAPAS	48
2.6 MODELO DE GRAVEDAD REDUCIDA	54



### CAPITULO III: ESQUEMA NUMERICO

3.1	AREA DE INTEGRACION	57
3.1.1	FRONTERAS NATURALES	58
3.1.1.1	FRONTERA CERRADA	58
3.1.1.2	FRONTERA DE FONDO	59
3.1.2	FRONTERAS ARTIFICIALES	60
3.1.2.1	FRONTERA CINEMATICA	61
3.1.2.2	FRONTERAS ABIERTAS	66
3.1.2.2.1	FRONTERAS ESPECIFICADAS	67
3.1.2.2.2	CONDICIONES ESPONJAS Y TELESCOPICAS	69
3.2	DISCRETIZACION DE LAS ECUACIONES DEL MODELO DE GRAVEDAD REDUCIDA	69
3.2.1	APROXIMACION EN DIFERENCIAS FINITAS	70
3.2.2	DISCRETIZACION TEMPORAL	74
3.2.3	DISCRETIZACION ESPACIAL	76
3.3	CALCULO NUMERICO DEL TRANSPORTE Y ANOMALIA DE LA PICNOCLINA	79
3.3.1	PRIMER SUB-INCREMENTO TEMPORAL	80
3.3.2	SEGUNDO SUB-INCREMENTO TEMPORAL	85

### CAPITULO IV: CONSISTENCIA, ESTABILIDAD Y CONVERGENCIA DEL MODELO NUMERICO

4.1	ERROR TOTAL EN EL MODELO NUMERICO	88
4.1.1	ERROR DE TRUNCACION	88
4.1.2	ERROR DE DISCRETIZACION	92
4.1.3	ERROR DE REDONDEO	94
4.2	CONSISTENCIA	97
4.3	ESTABILIDAD Y CONVERGENCIA	98

### CAPITULO V: RESULTADOS Y DISCUSIONES

5.1	CIRCULACION INDUCIDA POR TRANSPORTE EN FA	114
5.2	CIRCULACION INDUCIDA POR ESFUERZO DE VIENTO	127
5.3	CIRCULACION INDUCIDA POR TRANSPORTE EN FA Y ESFUERZO DE VIENTO	133

**CONCLUSIONES**

**147**

*Bibliografía*

**149**

## RESUMEN

Se aplicó un modelo baroclinico de gravedad reducida con el fin de simular la circulación en la Bahía de Campeche, México. Las ecuaciones de dicho modelo son resueltas numéricamente sobre una malla uniforme del tipo Arakawa "C" modificada con 5 minutos de resolución. Se usó una frontera abierta del tipo especificada sobre el paralelo  $21^{\circ}$  N, con información de intercambio de masa para invierno y verano de 1987 y verano de 1988. Los resultados del modelo mostraron para el invierno de 1987 dos giros anticiclónicos al noroeste de la Bahía, aproximadamente a 120 y 287 km de la costa, frente a Tuxpan, y un ciclónico en el sureste, frente al Banco de Campeche. Este último, fué ligeramente intensificado por la influencia de los vientos promedios del norte. Para el verano del mismo año, en la parte noroeste de la Bahía, aproximadamente a 74, 213 y 342 km de la costa de Veracruz, se presentaron tres giros de forma alternada: anticiclónico, ciclónico y anticiclónico. En el sureste, al igual que en el invierno se presentó una circulación ciclónica, sólo que para dicho verano fué más intensa. En el verano de 1988, el giro anticiclónico costero se presentó aproximadamente 30 km más al suroeste que en el verano anterior, y la estructura ciclónica y anticiclónica fueron desplazadas hacia el oeste. Sin embargo, el giro ciclónico del sureste permaneció prácticamente en la misma posición. En todos los casos, la circulación anticiclónica en el noroeste fué más energizada que la ciclónica del sureste. La estructura ciclónica del sureste, fué causada por el intercambio de masa a través de la frontera abierta y su intensificación en veranos está intimamente relacionada con el menor espesor de la capa de mezcla y la máxima intrusión de la corriente de Lazo.

## INTRODUCCION

Cualquier sistema que presente la posibilidad de ser modelado numéricamente ofrece diversas alternativas experimentales, ya que dicho sistema puede ser analizado en laboratorio, reproduciendo en espacio y tiempo situaciones simultaneas de sus características y efectos. Estas características de los modelos hacen que su estudio sea de interés en casi todos los ámbitos de la investigación. En oceanografía e ingeniería oceánica, el estudio mediante la modelación ha sido dividido generalmente en tres clases: modelación hidrodinámica, modelación del transporte (difusión - dispersión) y modelación de las reacciones bioquímicas. Cuando dichos modelos son integrados en el estudio de un sistema se habla de diferentes etapas: una hidrodinámica (HD), otra de transporte-dispersión (TD) y la de calidad del agua (WQ). La etapa HD de un sistema es considerada como la base esencial para la construcción de las otras etapas (Abbott, 1988).

La etapa de modelación de este trabajo es la referente a la HD. En ella, se han tratado de desarrollar métodos numéricos que puedan ser usados para dar solución a los sistemas de ecuaciones o modelos matemáticos, elaborados para reproducir los procesos dinámicos observados, tales como: mareas, tormentas, surgencias, frentes y corrientes oceánicas en general. Los modelos (HD) se clasifican en dos tipos de acuerdo al campo de masa del fluido, si el campo de masa es barotrópico, el modelo será barotrópico y en forma similar si el campo de masa es baroclínico, el modelo deberá ser baroclínico. En un modelo barotrópico se considera la densidad

uniforme en toda la cuenca, mientras que en un baroclinico se especifica el gradiente vertical de densidad.

Una clasificación de las soluciones de estos modelos se hace con base en el método que se usa para resolver el sistema de ecuaciones en el tiempo, existiendo básicamente los métodos: explícito, implícito y sus híbridos. En el primer método, se trata de obtener el valor de una incógnita utilizando sólo valores conocidos del dominio computacional; mientras que en el método implícito, se resuelven algebraicamente ecuaciones simultáneas para varias incógnitas. En el caso de los híbridos, se tienen métodos que son una combinación de los ya descritos. A estos, se les denomina semi-implícito y semi-explicito, presentando numéricamente la posibilidad de usar un intervalo de integración temporal mayor que en el caso explícito puro. Una vez desarrollado el modelo, los resultados de la simulación son comparados con las observaciones. Si la comparación demuestra la validez de la teoría, estos modelos hidrodinámicos pueden ser utilizados para realizar pronósticos de procesos dinámicos y aplicaciones prácticas (Ramming y Kowalik., 1980), ya que de ellos se obtiene la información básica requerida para entender los procesos oceánicos en regiones y tiempos donde no se cuenta con observaciones. De manera que, los modelos numéricos son un apoyo para conocer los fenómenos oceánicos y las causas que los originan.

En este trabajo de tesis, el modelo que se ha desarrollado sobre el sistema marino de la Bahía de Campeche es de carácter

baroclínico, cuya solución es obtenida haciendo uso de un método semi-implícito.

## CAPITULO I: MARCO OCEANOGRAFICO

### 1.1 AREA DE ESTUDIO

El área donde se ha realizado la simulación numérica es conocida como Bahía de Campeche, ésta, considerada como una de las regiones de mayor actividad económica del Golfo de México, se encuentra localizada en la región suroeste del Golfo entre los  $18^{\circ} 8'$  y los  $21^{\circ}$  de latitud norte y los  $90^{\circ} 28'$  y los  $97^{\circ} 20'$  de longitud oeste (Fig.1.1).

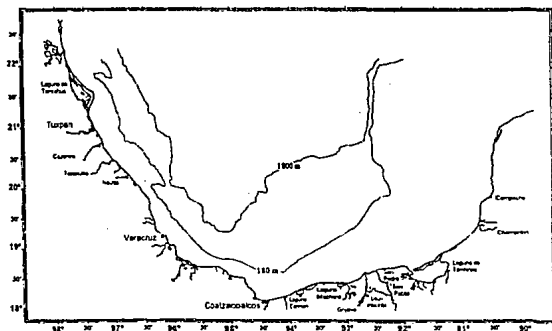


Fig.1.1 Localización geográfica y batimetría de la Bahía de Campeche

La importancia económica de la Bahía se centra principalmente en su parte este, en la 'Sonda de Campeche', donde las flotas pesqueras capturan todo tipo de especies pelágicas y bentónicas (Bessonov et al., 1968). A esto se suma la gran infraestructura petrolera, sobre todo en la Sonda de Campeche, calificada como una

de las mayores áreas de explotación encontradas en el hemisferio occidental; lo que genera una gran actividad dentro de sus aguas, haciendo de ellas las más transitadas de nuestro mar patrimonial (Vidal et al., 1989).

## 1.2 ANTECEDENTES

En general, el Golfo de México es una cuenca de forma elíptica-semicerrada (Fig.1.2), que se conecta con el Océano Atlántico y Mar Caribe por dos estrechos: el Canal de Yucatán y el

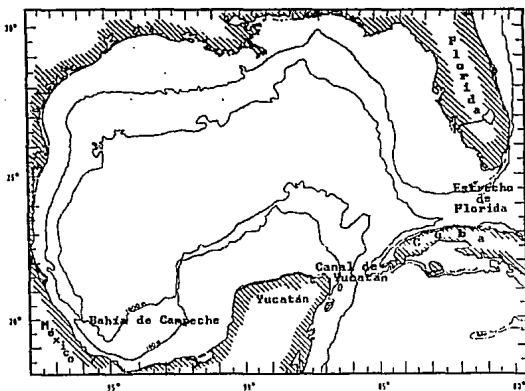


Fig.1.2 Golfo de México.

Estrecho de Florida. Sus profundidades sobrepasan los 3000 m, llegando a una profundidad máxima de 3685 m en la Fosa de Sigsbee.



En la Bahía de Campeche, las profundidades máximas son de 2743 m en los bordes de la Fosa de Sigsbee, su Plataforma Continental está caracterizada por ser ancha en su parte este (~ 218km) y angosta en el oeste (~ 30-55km). En la Bahía desembocan, además de otros, los ríos Papaloapan, Coatzacoalcos, Grijalva y el Usumacinta; representando éstos el mayor caudal de descarga de agua continental que tiene nuestro país. Estos ríos originan un complejo sistema de estuarios, frentes costeros, deltas y lagunas costeras, entre las cuales se destaca la Laguna de Términos.

### 1.2.1 CORRIENTES

La circulación de las aguas de la parte este del Golfo de México es dominada por una intensa corriente anticiclónica que se extiende desde el Canal de Yucatán hasta el Estrecho de Florida. Aunque este flujo es continuo, se ha dividido básicamente en tres porciones a las que se les han asignado diferentes nombres. Cuando esta corriente atraviesa el Canal de Yucatán, se le denomina Corriente de Yucatán, mientras que cuando se separa de forma intrusiva hacia el oeste, se le denomina Corriente de Lazo y finalmente cuando atraviesa el Estrecho de Florida, recibe el nombre de Corriente de Florida (Molinari y Morrison, 1988) (Fig.1.3).

Estudios realizados indican que en diciembre, la Corriente de Lazo presenta una intrusión, la que se desarrolla con un máximo hacia el norte en verano, seguida por una desviación hacia el oeste formando y desprendiendo giros anticiclónicos, para

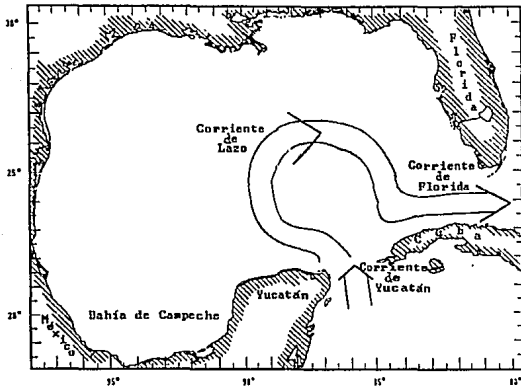


Fig.1.3 Circulación en el este del Golfo de México.

posteriormente caer en su intensidad mínima. Sin embargo, las escalas de tiempo específicas de las intrusiones varían (Sturges y Evans, 1983). Otro hecho importante, con respecto a esta corriente, es que aumenta el transporte superficial de la Corriente de Yucatán, a medida que ésta abarca mayor área de intrusión (Haul, 1977); generando a su vez una contracorriente en el talud oriental de Yucatán dirigida al Mar Caribe durante casi todo el año. Esta contracorriente se sitúa debajo de las aguas de la Corriente de Yucatán a una profundidad promedio de 100 m, paralela a las isóbatas, con velocidades máximas en el otoño que fluctúan entre 35 y 38 cm/s, mientras que para la primavera, disminuye su magnitud hasta un intervalo entre 13 y 17 cm/s. Se ha

supuesto que esta contracorriente es un desagüe que establece un balance geostrofico con la Corriente de Yucatán y que por lo tanto debe observarse paralela al talud continental de Yucatán (Bulanienkov y García, 1975). Lo antes mencionado establece que el régimen dinámico sobre la parte este de la Bahía, en el Banco de Campeche, es determinado por dos tipos de circulación: el primero corresponde a un aumento en la rapidez de la corriente de Yucatán, que se presenta generalmente en verano y otoño, y el segundo ocurre en las épocas de invierno y primavera, época en la que la rapidez toma valores relativamente menores (Bessonov et al., 1968).

El flujo de la Corriente de Lazo, desviado hacia el oeste, genera una corriente que penetra en la parte este de la Bahía de Campeche (Nowlin, 1972; Molinari et al., 1978; Merrell y Morrison, 1981). Estudios observacionales realizados por la Secretaría de Marina, el Instituto Nacional de Pesca, la Secretaría de Industria y Comercio de México y la Universidad de Texas A & M de Estados Unidos, han dado una imagen de la circulación general del Golfo de México, basada en la combinación de datos obtenidos de observaciones de varios cruceros efectuados entre 1970 y 1971. Estas observaciones muestran que en la parte sur de la Bahía de Campeche, existen manifestaciones de la presencia de un giro ciclónico, pero los datos de anomalía dinámica para esa época no alcanzan a mostrarlo completamente (Vázquez de la Cerda, 1979). Posteriormente, investigadores del Instituto de Ciencias del Mar y Limnología de la UNAM (Monreal Gómez y Salas de León, 1990)

lograron mostrar, mediante un estudio de simulación numérica de corrientes, que dentro de la Bahía de Campeche se presenta un giro ciclónico entre los meses de febrero a abril y de julio a diciembre. Dicho giro se forma en la parte oeste de la Península de Yucatán, dentro del Banco de Campeche y permanece confinado a la capa de mezcla superficial. La forma del giro mostrado por estos autores es elíptico, con una inclinación de su eje mayor respecto al ecuador que varía de mes a mes; este giro se desplaza hacia el oeste con velocidades de translación diferentes para cada mes, oscilando éstas entre 1.37 y 6.12 km/día (1.58 a 7.08 cm/s). Su radio se encuentra entre 49.7 y 184.38 km, mientras que la velocidad tangencial va de 1.87 a 13.28 cm/s (Velasco-Mendoza, 1989).

Un estudio sobre flujo geostrófico realizado recientemente sobre el paralelo 21° por Cázares-Cruz (1992), hace suponer la presencia de un sistema de giros en la parte oeste de la Bahía.

### 1.2.2 CONDICIONES METEOROLOGICAS

Se ha mencionado que la circulación oceánica de la Bahía de Campeche recibe una gran influencia de la Corriente de Lazo; sin embargo, es necesario recordar que su carácter depende en alto grado de los procesos atmosféricos que tienen lugar en el Hemisferio Norte (Océano Atlántico); es decir, de los sistemas atmosféricos globales que, aunados a los locales, influyen en el carácter de la dinámica de las aguas de la Bahía y del Golfo en general (Bulanienkov y García, 1975).

La circulación oceánica y la presencia de un giro anticiclónico en la parte oeste del Golfo, al norte del paralelo  $22^{\circ}$ , están íntimamente relacionadas con el rotacional negativo del esfuerzo del viento, infiriéndose de esto que; el alto valor negativo del rotacional del esfuerzo de viento, coincide con la circulación anticiclónica observada (Sturges y Blaha, 1976). A diferencia de eso, al sur del paralelo  $22^{\circ}$ , en la parte noroeste de la Bahía de Campeche, el rotacional del esfuerzo es positivo, lo que hace suponer una circulación ciclónica (Blaha y Sturges, 1981). Suposición justificada, primeramente mediante datos hidrográficos (Vázquez, 1975) y posteriormente mediante trabajos teóricos (Monreal Gómez y Salas de León, 1990). En general, el Golfo de México es influenciado por el intercambio de masas de aire frío y seco, provenientes del interior del continente (Estados Unidos y Canadá), y las masas de aire propias del Golfo, de origen marítimo y tropical (Panofsky, 1956). El intercambio entre masas de aire de diferentes características generan una fuerte Frontogénesis; principalmente entre los meses de octubre a abril (otoño e invierno). Estos vientos fríos de origen continental llamados "nortes", influyen en la circulación atmosférica de la Bahía de Campeche y su permanencia genera gradientes térmicos entre la cálida masa oceánica de la Bahía y el invierno continental. Dicha inestabilidad barométrica es equilibrada por la formación de frentes enomométricos, que inciden del norte (Vidal et al., 1989), lo que propicia, en la parte sur de la Bahía, sobre la franja relativamente costera, una

disminución de la temperatura y un aumento en el espesor de la capa de mezcla, llegando a ser ésta de 100 m en varias zonas (Shirasago, 1991).

Aunque en general, el Golfo de México es dominado por vientos del norte en épocas de invierno, la parte este de la Bahía, dentro de la Sonda de Campeche, es influenciada por el esfuerzo de viento que proviene del noreste (Velasco-Fuentes, 1988), fundamentalmente esto acontece para los meses de noviembre a marzo (Tapanes y Gonzales Coya, 1980), presentando magnitudes próximas a 21 m/s en los meses de diciembre y febrero (Salas de León et al., 1992). Sin embargo, este valor máximo registrado por estos autores es transitorio ya que el valor promedio representativo fué de 6.6 m/s

Para el verano, entre los meses de junio a agosto, los vientos que afectan a la Bahía, en particular a la Sonda de Campeche, provienen del sureste con magnitudes promedios de 6.1 m/s (Velasco-Fuentes, 1988). En este mismo periodo, las características del Golfo de México se hacen más tropicales con la influencia de los vientos alisios (Tapanes y Gonzales-Coya, 1980), ya que para esta época, los alisios actúan con relativa fuerza y constancia (Honsiño, 1964). Durante esta misma época, el Golfo de México se ve afectado por las tormentas tropicales; siendo esta región de nuestro plaheta una de las más afectada por los huracanes (Dunn y Miller, 1969; Bretschneider, 1967). En el sur de la Bahía, la capa de mezcla se presenta menos profunda que en invierno, llegando a tener un espesor de 50 m (Shirasago, 1991).

Para el otoño, entre los meses de septiembre a octubre, el

esfuerzo del viento que provenía del sureste, tiende a alinearse de este a oeste.

De acuerdo a la clasificación de frentes (Rodríguez *et al.*, 1975), la cual establece que los vientos débiles tienen magnitudes menores a 10 m/s, los moderados entre 10 y 15 m/s, los fuertes mayores a 15 m/s y los huracanados con vientos sostenidos mayores a 37 m/s, se concluye que en invierno los vientos característicos se encuentran normalmente entre débiles y moderados (DiMego *et al.*, 1976; Salas de León *et al.*, 1992). En cambio, para el verano se puede considerar que las intensidades características son más bien débiles y probablemente de forma transitoria moderados.

### 1.2.3 HIDROGRAFIA

La estratificación vertical de las aguas en la Bahía de Campeche depende principalmente de las condiciones meteorológicas y de las descargas de los ríos en la parte costera. Esto ha sido mostrado con resultados preliminares de las campañas oceanográficas OGMEX-I y OGMEX-II. La primera, fué realizada en invierno después del paso de un norte intenso y dos más de baja intensidad pero separados por intervalos cortos de tiempo; la segunda campaña coincide con la temporada de verano del mismo año (Alatorre *et al.*, 1987).

El análisis de la información obtenida en los cruceros mencionados establece que, para dicho invierno, la columna de agua en la parte costera (hasta 100 m de profundidad) estaba bien mezclada, en la mayoría de los casos la temperatura de la columna

fue de 22 a 24°C y la salinidad se encontró que tenía valores entre 33.7 y 37.0 o/oo. Las salinidades más bajas estaban ubicadas en regiones próximas a las desembocaduras de los ríos y las más altas en las zonas de alta evaporación, al noreste de la Laguna de Términos (Alatorre et al., 1987; Shirasago., 1991). Para esta misma época, las aguas sobre el paralelo 21° N se encontraron mezcladas hasta una profundidad de 100 m, presentando un gradiente vertical térmico significativo entre los 100 y 250 m. La termoclina se encontró a mayor profundidad cerca de la Plataforma Continental de Veracruz y más somera cerca de la Plataforma Continental de Campeche (Cázares-Cruz, 1992). Para verano, sobre la plataforma continental, en la mayoría de los casos el espesor de la capa superficial de mezcla disminuyó de 100 a 50 m, lo que propició una estructura de dos capas. Se ha pensado que ésta estratificación, no registrada en invierno, es causada por la descarga máxima de los ríos, la cual se presenta en verano (Shirasago, 1991). Para la misma época, pero en aguas profundas del paralelo 21°, prácticamente desapareció la capa de mezcla, presentándose el gradiente vertical térmico de mayor magnitud entre los primeros 80 m de profundidad.

#### 1.2.4 TIPOS Y ORIGEN DE LOS SEDIMENTOS

A lo largo de la zona costera de la Bahía de Campeche se han localizado áreas influenciadas en mayor o menor grado por sistemas fluviales, los cuales aportan al bentos una gran cantidad de sedimentos terrígenos y materia orgánica; incluyendo contaminantes



y desechos urbanos (Esparza, 1992). El efecto en la fauna local que puede causar este aporte de sedimentos es aún poco conocido, ya que se carece de información suficiente para evaluar, controlar y manejar su transporte. Las sustancias o materia orgánica aportada al océano pueden alterar de forma irreversible los sistemas biológicos adyacentes al continente.

La Bahía de Campeche se caracteriza por presentar dos grupos de sedimentos; los terrígenos, los cuales son transportados principalmente por los ríos y los carbonatados. Basándose en los cambios de dirección de la plataforma continental y en la parte central del Golfo de México, Antoine (1972) divide el Golfo de México en siete provincias, cuatro de las cuales abarcan la Bahía de Campeche (Fig.1.4). Cerca de la costa, en la mayor parte de la provincia localizada al este de la Bahía (4), se presenta una franja angosta de limos (Carranza y Aguayo, 1991). Más allá de esta franja, existe una zona de lodos terrígenos y a mayor profundidad arcillas de origen biógeno (De La Lanza, 1991). En la quinta provincia (5), incluida casi totalmente dentro de la Bahía de Campeche, se presenta una franja angosta cerca de la costa formada por grava, arena y limos de origen terrígeno. Esto ocurre sobre todo en ambos extremos de la desembocadura del río Grijalva, más allá de estas franjas, se han detectado franjas de arenas gruesas de origen terrígeno, zonas lodosas y el dominio de arcillas de origen biógeno (Bowma, 1972; Lecuanda y Ramos, 1985; Carranza y Aguayo, 1991). La sexta provincia (6) contrasta con las dos descritas, ya que sobre la costa, domina una franja

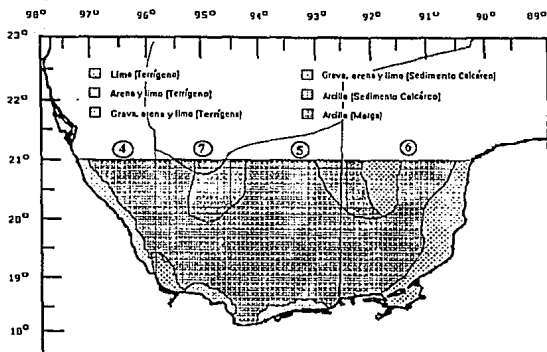


Fig. 1.4 Características sedimentológicas de la Bahía de Campeche, información tomada de la carta Sedimentología Marina de Carranza-Edwards y Aguayo-Camargo, 1991.

considerable de gravas, arenas y limos de origen calcáreo. Y a mayor profundidad, como en las provincias anteriores, existe un dominio de arcilla (De La Lanza, 1991; Carranza y Aguayo, 1991).

### 1.3 HIPOTESIS

El patrón de distribución de transporte e intercambio de masa entre la Bahía de Campeche y el resto del Golfo de México en el paralelo 21° N, la existencia de un rotacional positivo en el esfuerzo del viento y valores mínimos en la topografía dinámica dentro de la Bahía, permiten formular la siguiente hipótesis "La región es dominada por una circulación ciclónica originada por el esfuerzo del viento, la cual permite el desarrollo de anillos

anticiclónicos de menor escala''.

#### 1.4 OBJETIVO

El objetivo de este trabajo de tesis es el de simular numéricamente los patrones de circulación dentro de la Bahía de Campeche y analizar los efectos que tuvieron en la Bahía, tanto el viento homogéneo promedio como el intercambio de transporte de masa, a través del paralelo  $21^{\circ}$  N, para las épocas de invierno y verano de 1987 y verano de 1988.

## CAPITULO 00: MODELO HIDRODINAMICO

### 2.1 ECUACION DE MOMENTUM

Los movimientos de las aguas oceánicas son descritas por la ecuación de momentum. Dicha expresión es simple para movimientos con referencia a un sistema inercial fijo, sin embargo, se complica al expresarla en un sistema no inercial.

En un sistema de referencia inercial fijo, la segunda ley de Newton puede ser escrita en forma simbólica como:

$$\frac{d}{dt} \vec{v}_I = \Sigma \vec{F}/m \quad (2.1)$$

Donde el lado izquierdo de la ecuación (2.1) representa la razón de cambio de la velocidad  $\vec{v}_I$  de una partícula en movimiento vista en el sistema inercial fijo, mientras que el lado derecho representa todas las fuerzas por unidad de masa que hacen posible su aceleración.

Si la trayectoria de dicha partícula es vista desde un sistema de referencia que rota con la velocidad angular terrestre, el movimiento resultante se ve afectado por fuerzas no observadas en el sistema de referencia inercial. A estas fuerzas se les denomina aparentes y deben ser incluidas para obtener una descripción más real del movimiento de las partículas. Para obtener estas fuerzas aparentes, la ecuación (2.1) se debe expresar en un sistema de referencia que esté rotando; para lo cual se considera la siguiente relación:

$$\frac{d_I \vec{A}}{dt} = \frac{d_r \vec{A}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{A} \quad (2.2)$$

La expresión anterior representa la relación que existe entre una variable de la partícula observada en un sistema inercial  $I$  y la misma relativa al sistema no inercial  $r$  que rota con una velocidad angular  $\vec{\Omega}$ .

La variación temporal de un vector de posición  $\vec{r}$  expresada en ambos sistemas, queda como:

$$\frac{d_I \vec{r}}{dt} = \frac{d_r \vec{r}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (2.3)$$

donde  $\vec{\Omega}$  es la velocidad angular terrestre, redefiniendo:

$$\frac{d_I \vec{r}}{dt} = \vec{v}_I \quad \text{y} \quad \frac{d_r \vec{r}}{dt} = \vec{v}$$

La ecuación (2.3) establece la relación que existe entre la velocidad  $\vec{v}_I$  de la partícula observada en un sistema inercial  $I$  y la misma velocidad  $\vec{v}$  relativa al sistema no inercial  $r$  que rota.

La ecuación (2.3) se puede escribir de la siguiente forma:

$$\vec{v}_I = \vec{v} + (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \quad (2.4)$$

Si a esta última ecuación se le aplica nuevamente la relación vectorial entre los dos sistemas de referencia, resulta:

$$\frac{d_I \vec{v}_I}{dt} = \frac{d_r \vec{v}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r} \quad (2.5)$$

Donde  $d_I \vec{v}_I / dt$  es la aceleración de la partícula observada desde el sistema inercial fijo, mientras que  $d_r \vec{v} / dt$  es la aceleración de la misma partícula observada desde el sistema de referencia que rota con la tierra.

Del resultado anterior se tiene que la diferencia entre la aceleración observada en los diferentes sistemas de referencia es igual a los tres últimos términos adicionales del lado derecho. Ellos son la aceleración de Coriolis  $2\vec{\Omega} \times \vec{v}$ , la aceleración centrípeta  $\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$  y la aceleración debida a la variación temporal de la rotación terrestre.

El último término de la ecuación (2.5) es de poca importancia para el estudio de los fenómenos oceánicos y atmosféricos de escalas no geológicas. Sin embargo, para estudios con escalas de tiempo geológico dicho término es importante (Pedlosky, 1979). Dado que las escalas en tiempo de los fenómenos que se pretenden estudiar en este trabajo son apenas del orden de meses,  $\vec{\Omega}$  puede ser considerada como constante.

Omitiendo el subíndice  $r$  del primer término del lado derecho de la ecuación (2.5) y considerando la velocidad angular de rotación como constante, la ecuación anterior se puede escribir con la ayuda de la ecuación (2.1) como:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = \Sigma F/m \quad (2.6)$$

La ecuación de conservación de momentum (2.6) es la forma de la segunda ley de movimiento de Newton expresada en un sistema de coordenadas rotando junto con la tierra. La suma del lado derecho de dicha ecuación representa las fuerzas reales que actúan sobre cualquier partícula. En nuestro caso, representa todas las fuerzas que hacen posible la aceleración de un elemento de fluido oceánico.

## 2.2 LAS FUERZAS QUE ACTUAN EN EL OCEANO

En esta parte del trabajo se esquematizan las fuerzas que generan los movimientos en los océanos. Cabe mencionar que, dependiendo de las características de los movimientos y de las escalas del sistema, algunas de las fuerzas aparecerán con menor influencia que otras, e inclusive en otros casos, la influencia de algunas serán casi despreciables comparadas con otras. En general, las fuerzas más importantes son: las del gradiente de presión, la fuerza de atracción gravitacional y las fuerzas de fricción.

### 2.2.1 FUERZA DE GRADIENTE DE PRESION

Los gradientes de presión presentan fuerzas que afectan la dinámica del océano y no pueden ser excluidas de la ecuación de movimiento. Para obtener la expresión matemática del término de gradiente de presión, basta imaginarse un elemento de volumen rectangular con lados  $dx$ ,  $dy$  y  $dz$  orientados con respecto a un sistema de coordenadas rectangulares. Dicho elemento de volumen, se encuentra inmerso en otro fluido de las mismas características,

el cual actúa de forma circundante sobre cada una de las caras del elemento. La fuerza en la dirección  $x$  sobre la cara izquierda del volumen causada por la presión del fluido circundante es  $P \cdot dy \cdot dz$  y por la ley de acción y reacción de Newton, en la cara derecha la fuerza en la dirección  $-x$  es  $-(P+\Delta P) \cdot dy \cdot dz$ , el signo menos indica la dirección contraria a la dirección positiva del eje de coordenadas. La expresión de la fuerza actuando sobre el lado derecho es representada mediante el desarrollo de la serie de Taylor hasta el término lineal. Al sumar estas fuerzas se deduce que la fuerza neta actuando en la dirección  $x$  es  $-\hat{i} \cdot (\partial P / \partial x) \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ . La fuerza por unidad de volumen es  $-\hat{i} \cdot (\partial P / \partial x)$ , y la fuerza por unidad de masa estará dada por  $-\hat{i} \cdot (\partial P / \partial x) / \rho$ .

Considerando la resultante de todas las componentes de la fuerza del gradiente de presión por unidad de masa que actúan en todas las caras del volumen, se obtiene la expresión siguiente:

$$-\frac{1}{\rho} \left( \hat{i} \frac{\partial P}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial P}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = -(1/\rho) \nabla P \quad (2.7)$$

donde  $\nabla$  es el operador nabla con vectores unitarios  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$  del sistema coordenado  $(x, y, z)$ .

La ecuación (2.7) establece que mientras exista un incremento de presión en determinada dirección sobre el elemento, actuará sobre éste, una fuerza neta de sentido contrario. Dichas fuerzas son muy comunes en el océano y son capaces de acelerar o desacelerar las partículas de agua.



### 2.2.2 FUERZAS VISCOSAS

Las fuerzas normales que actúan sobre una partícula inmersa en un fluido se han analizado en la sección anterior. Sin embargo, los fluidos son caracterizados por presentar además de estas fuerzas perpendiculares, esfuerzos tangenciales, expansiones y contracciones de carácter microscópico.

Las fuerzas viscosas son la manifestación macroscópica de las propiedades microscópicas del fluido (Cole, 1962). El equilibrio de los fluidos a nivel macroscópico es diferente al equilibrio microscópico, en donde las fuerzas entre las moléculas actúan de forma tal que restituyen y mantienen el equilibrio antes de romperse. El momentum transferido en el contacto microscópico entre las moléculas genera movimientos azarosos entre éstas, el cual se pierde mediante radiación térmica al medio que le rodea. Este proceso es descrito macroscópicamente en términos de la fricción interna, llamada viscosidad, la cual dentro de un fluido tiene sentido únicamente si se presentan movimientos relativos entre cada elemento de fluido. Si sus velocidades relativas son pequeñas, también los efectos viscosos serán pequeños.

Las fuerzas viscosas, dentro de un fluido en un punto, son proporcionales al gradiente de la velocidad en dicho punto. La expresión más general para las componentes del esfuerzo viscoso sobre un elemento de fluido, está dada por la siguiente expresión (e. g. Cole, 1962):

$$\sigma_{i,j} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{i,j} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{i,j} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \quad (2.8)$$

Donde  $\sigma_{i,j}$  representa el esfuerzo viscoso en la dirección  $j$  sobre una área unitaria perpendicular al eje  $i$ ,  $\delta_{i,j}$  es la delta de Kronecker, la cual se define como la unidad si  $i=j$  y como cero para las otras componentes ( $i \neq j$ ). Por otro lado, el coeficiente  $\mu$  está definido como la viscosidad tangencial por unidad de área y por unidad de gradiente de velocidad y el coeficiente  $\zeta$  está definido en términos de los esfuerzos perpendiculares, es decir en términos de la expansión o contracción neta de un elemento de fluido.

Para un fluido cuasi-incompresible ( $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ ), la ecuación (2.8) queda expresada de la siguiente forma:

$$\sigma_{i,j} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.9)$$

Esta última ecuación representa las fuerzas parciales o el flujo de momentum provocado por procesos irreversibles. Las fuerzas netas de tipo viscoso que actúan sobre dicho elemento, están dadas por la variación de la magnitud de éstas con respecto al espacio, de forma muy semejante a las fuerzas reversibles. Esto se puede escribir como:

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \sigma_{i,j}}{\partial x_j} \right) = \nu \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \right) = \nu \nabla^2 \vec{v} \quad (2.10)$$

donde  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ , es la viscosidad cinemática.

En la deducción de esta última ecuación se ha considerado la

condición de incompresibilidad.

### 2.2.3 ESFUERZO DE REYNOLDS

Incluyendo el término de la aceleración centrípeta en el término de la aceleración gravitacional y considerando las fuerzas dadas por las ecuaciones (2.7) y (2.10), la ecuación de momentum (2.6) se enuncia como:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{v} \quad (2.11)$$

La expresión anterior denota la ecuación vectorial que gobierna los movimientos instantáneos de las partículas de agua del océano. Esta incluye las tres componentes escalares en cada una de las direcciones del sistema de referencia representadas por:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) + 2\Omega \sin \phi v - 2\Omega \cos \phi w + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.12)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P}{\partial y} \right) - 2\Omega \sin \phi u + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.13)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right) + 2\Omega \cos \phi u - g + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.14)$$

Las tres últimas ecuaciones incluyen la influencia del

esfuerzo cortante resultado de la acción microscópica de las moléculas, sin embargo, el flujo turbulento está caracterizado por fluctuaciones a mayor escala en las propiedades del fluido y del flujo con respecto a la media, siendo esto más evidente cuando los efectos no lineales son considerables. Estas fluctuaciones se ven reflejadas con características físicas de fricción, la cual, al igual que la fricción molecular pero a diferente escala, genera una rápida distribución de momentum, calor y sal. A estos esfuerzos se les denomina esfuerzos de Reynolds.

En el flujo turbulento, los valores de las variables del flujo y del fluido cambian con el tiempo. Las variables instantáneas diferirán de su promedio tanto en magnitud como en dirección, un caso típico es la velocidad. Así, cualquier valor instantáneo de una variable puede ser representada por su valor medio más una fluctuación alrededor del valor medio, esto puede ser representado por:

$$\psi(x, y, z) = \bar{\psi}(x, y, z) + \psi'(x, y, z) \quad (2.15)$$

donde  $\psi$  es cualquier variable del fluido ó del flujo.

Introduciendo estas consideraciones en las ecuaciones (2.12) a (2.14), se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\bar{u}+u') + (\bar{u}+u')\frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}+u') + (\bar{v}+v')\frac{\partial}{\partial y}(\bar{u}+u') + (\bar{w}+w')\frac{\partial}{\partial z}(\bar{u}+u') = \\ - \frac{1}{\bar{\rho}+\rho'} \left( \frac{\partial}{\partial x}(\bar{F}+F') \right) + 2\Omega \sin \phi (\bar{v}+v') - 2\Omega \cos \phi (\bar{w}+w') + \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\bar{u}+u') + \right. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\bar{u}+u') + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\bar{u}+u') \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\bar{v}+v') + (\bar{u}+u')\frac{\partial}{\partial x}(\bar{v}+v') + (\bar{v}+v')\frac{\partial}{\partial y}(\bar{v}+v') + (\bar{w}+w')\frac{\partial}{\partial z}(\bar{v}+v') = \\ & - \frac{1}{\bar{\rho}+\rho'} \left( \frac{\partial}{\partial y}(\bar{F}+F') \right) - 2\Omega \sin \phi (\bar{u}+u') + \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\bar{v}+v') + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\bar{v}+v') + \right. \\ & \left. \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\bar{v}+v') \right) \quad (2.17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\bar{w}+w') + (\bar{u}+u')\frac{\partial}{\partial x}(\bar{w}+w') + (\bar{v}+v')\frac{\partial}{\partial y}(\bar{w}+w') + (\bar{w}+w')\frac{\partial}{\partial z}(\bar{w}+w') = \\ & - \frac{1}{\bar{\rho}+\rho'} \left( \frac{\partial}{\partial z}(\bar{F}+F') \right) + 2\Omega \cos \phi (\bar{u}+u') - g + \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\bar{w}+w') + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\bar{w}+w') \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\bar{w}+w') \right) \quad (2.18) \end{aligned}$$

Las ecuaciones (2.16) a (2.18), representan las componentes de la ecuación de movimiento instantáneo en cada una de las direcciones del sistema cartesiano. Cada componente muestra, explícitamente, una parte media y una parte fluctuante en sus variables. La naturaleza del movimiento turbulento descrito por este sistema de ecuaciones, no es práctico para ser resuelto, lo conveniente es promediar en tiempo cada una de las componentes.

Los promedios de los términos del lado derecho de la componente instantánea en la dirección x son:

$$\overline{(\bar{\alpha} + \alpha') \frac{\partial}{\partial x} (\bar{P} + P')} = \bar{\alpha} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} \quad (2.19)$$

donde  $\alpha = \frac{1}{\rho}$  es el volumen específico.

$$\overline{2\Omega \sin \phi (\bar{v} + v')} = f \bar{v} \quad (2.20)$$

$$\overline{2\Omega \cos \phi (\bar{w} + w')} = 2\Omega \cos \phi \bar{w} \quad (2.21)$$

$$\overline{\nu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\bar{u} + u') + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\bar{u} + u') + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\bar{u} + u') \right)} = \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{u} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \bar{u} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \bar{u} \right) \quad (2.22)$$

En la obtención del promedio, se consideró el hecho de que el promedio de una constante es ella misma, el de un promedio es él mismo y de que el promedio de una fluctuación es cero. Con estas consideraciones, se obtuvieron las ecuaciones (2.19) a (2.22), las cuales representan las fuerzas externas promediadas, éstas tienen la misma forma que en el movimiento instantáneo dado por la ecuación (2.16). Esto también es cierto para los términos correspondientes en las componentes de las direcciones y y z.

Tomando como base los principios establecidos anteriormente y dado que el promedio de los términos no lineales es diferente de cero, el promedio de los términos no-lineales de la ecuación (2.16) se expresan como:

$$\overline{(\bar{u} + u') \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} + u')} + \overline{(\bar{v} + v') \frac{\partial}{\partial y} (\bar{u} + u')} + \overline{(\bar{w} + w') \frac{\partial}{\partial z} (\bar{u} + u')} = \left( \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \bar{u} + \right.$$

$$\bar{v} \frac{\partial}{\partial y} \bar{u} + \bar{w} \frac{\partial}{\partial z} \bar{u} + \overline{(u' \frac{\partial}{\partial x} u' + v' \frac{\partial}{\partial y} u' + w' \frac{\partial}{\partial z} u')} \quad (2.23)$$

Desde el punto de vista del análisis hidrodinámico, el agua de mar puede ser considerada como incompresible ( $\nabla \cdot \vec{v}' = 0$ ) y el segundo término del lado derecho de la ecuación (2.23) (sumándole  $u'(\nabla \cdot \vec{v}')$ ) toma la forma:

$$\begin{aligned} (u' \frac{\partial}{\partial x} u' + v' \frac{\partial}{\partial y} u' + w' \frac{\partial}{\partial z} u') + u'(\nabla \cdot \vec{v}') &= \frac{\partial}{\partial x} u' u' + \\ \frac{\partial}{\partial y} u' v' + \frac{\partial}{\partial z} u' w' &\quad (2.24) \end{aligned}$$

y promediando se obtiene:

$$\overline{(u' \frac{\partial}{\partial x} u' + v' \frac{\partial}{\partial y} u' + w' \frac{\partial}{\partial z} u')} = \frac{\partial}{\partial x} \overline{u' u'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{u' v'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{u' w'} \quad (2.25)$$

La ecuación (2.16) promediada queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{dt} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f\bar{v} - 2\Omega \cos \phi \bar{w} + \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{u} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \bar{u} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \bar{u} \right) - \\ \frac{\partial}{\partial x} \overline{u' u'} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{u' v'} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{u' w'} &\quad (2.26) \end{aligned}$$

Los esfuerzos provocados por los movimientos turbulentos están expresados por;  $\overline{u' u'}$ ,  $\overline{u' v'}$  y  $\overline{u' w'}$ . Estos son representados por  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{xy}$  y  $\tau_{xz}$  los cuales de forma semejante a los esfuerzos

viscosos ( $\sigma_{i,j}$ ),  $\tau_{i,j}$  representan los esfuerzos turbulentos en la dirección  $j$  sobre un área unitaria perpendicular al eje  $i$ . Por similitud con el modelo de fricción molecular, los esfuerzos turbulentos son representados por los gradientes de velocidad media, de la siguiente forma:

$$-\rho \overline{u'v'} = A_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \tau_{xx} \quad (2.27)$$

$$-\rho \overline{v'v'} = A_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2.28)$$

$$-\rho \overline{w'w'} = A_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad (2.29)$$

Donde los coeficiente  $A_x$ ,  $A_y$  y  $A_z$  ( $A_x = k_x \rho$ ,  $A_y = k_y \rho$  y  $A_z = k_z \rho$ ) para cada una de las direcciones, se les denomina coeficientes dinámicos de viscosidad turbulenta, y a  $k_x$ ,  $k_y$  y  $k_z$  se les llama coeficientes cinemáticos de viscosidad turbulenta.

En este desarrollo, únicamente se han mostrado cinco componentes del esfuerzo turbulento (2.27), (2.28) y (2.29); sin embargo, en total existen nueve componentes; seis tangenciales y tres normales, los cuales actúan de forma semejante a los esfuerzos viscosos.

Sustituyendo las ecuaciones por unidad de masa (2.27) a (2.29) en (2.26), y eliminando las barras que representan flujos medios, la expresión para la ecuación de flujo medio en la dirección  $x$  es:



$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + fv - 2\Omega \cos \phi w + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) +$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (k_x \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_y \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (k_z \frac{\partial u}{\partial z}) \quad (2.30)$$

Si en la ecuación anterior, los cambio espaciales de  $k_x$ ,  $k_y$  y  $k_z$  son menos importantes que los de  $u$ , e introduciendo el laplaciano, se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)u - fv + 2\Omega \cos \phi w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \nabla^2 u + k_H \nabla_H^2 u +$$

$$k_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2.31)$$

donde  $k_H \equiv k_x \equiv k_y$  y  $k_v \equiv k_z$  y  $\nabla_H^2$  es la componente horizontal del laplaciano.

De manera semejante en que se ha realizado el promedio con la ecuación de movimiento en la dirección  $x$ , se realiza para las direcciones  $y$ ,  $z$  y para la ecuación de continuidad; resultando el siguiente sistema:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)u - fv + 2\Omega \cos \phi w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \nabla^2 u + k_H \nabla_H^2 u +$$

$$k_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)v + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \nabla^2 v + k_H \nabla_H^2 v + k_v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)w - 2\Omega \cos \phi u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g + \nu \nabla^2 w + k_H \nabla_H^2 w + k_v \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.35)$$

La influencia de la turbulencia sobre el movimiento medio está dado por los dos últimos términos del lado derecho de las ecuaciones (2.32) a (2.34). Así, los efectos friccionales sobre el movimiento medio están íntimamente relacionados con la naturaleza no-lineal de las ecuaciones y sus efectos turbulentos.

### 2.3 ESCALAS DE LOS MOVIMIENTOS EN LA BAHÍA DE CAMPECHE

Las ecuaciones (2.32) a (2.34) incluyen todas las fuerzas presentes en un océano cuasi-incompresible. Sin embargo, la dificultad que se presenta al solucionar dicho sistema es tan grande que es necesario introducir simplificaciones, las cuales se hacen con base en el análisis de escala para cada uno de los términos y su importancia relativa. Esto transforma el sistema general a un sistema de ecuaciones, que, desde el punto de vista matemático, es relativamente más simple.

Para realizar el análisis antes mencionado, se consideran los valores típicos de las variables presentes en los fenómenos comunes de la Bahía de Campeche. En el caso de esta zona, los valores típicos de profundidad y longitud son  $H \ll 100 \text{ m} \approx 10^4 \text{ cm}$ ,  $L \ll 100 \text{ km} = 10^7 \text{ cm}$ . El promedio de la magnitud absoluta de la

velocidad, a través del paralelo  $21^\circ$  de latitud norte, presenta para el invierno y verano de 1987, 6.54 cm/s y 17.56 cm/s y de 15.36 cm/s para el verano de 1988. De estos resultados se deduce que la escala típica de la velocidad horizontal  $v_t$  es  $O(10 \text{ cm/s})$ . Los valores del coeficiente de viscosidad turbulenta vertical  $k_v$  están entre  $10^{-1}$  y  $10^3 \text{ cm}^2/\text{s}$  y los del coeficiente  $k_H$  entre  $10^5$  y  $10^6 \text{ cm}^2/\text{s}$ , dichos valores dependen principalmente de las propiedades del flujo (Pond y Pickard, 1978). Para nuestras escalas se usó  $k_v \text{ } O(10^2 \text{ cm}^2/\text{s})$  y  $k_H \text{ } O(10^5 \text{ cm}^2/\text{s})$ . El coeficiente cinemático de viscosidad molecular ( $\nu$ ) es  $O(10^{-2} \text{ cm}^2/\text{s})$  (Streeter, 1961).

Sustituyendo los valores típicos en la ecuación (2.32), quedan los órdenes de magnitud como sigue:

A) Término de Coriolis:

$$fv_t \sim O(10^{-4} \text{ cm/s}^2) \quad (2.36)$$

B) Tiempo Característico:

El tiempo que le toma a un elemento de fluido con rapidez  $v_t$  recorrer la distancia  $L$  es:

$$T = \frac{L}{v_t} \quad (2.37)$$

Si el tiempo característico es mucho menor que el período de rotación terrestre, entonces, el efecto rotacional sobre los movimientos es baja. Es decir, la rotación terrestre sólo influye sobre los movimientos si  $L / v_t \geq \Omega^{-1}$  o equivalentemente si el

número de Rossby  $R \leq 1$  ( $R = v_t / 2\Omega L$ ). En nuestra área de estudio se obtuvo que la escala típica en tiempo de los fenómenos observados es:

$$T \sim \propto 10^6 \text{ s} \quad (2.38)$$

El valor típico del número de Rossby para el área en estudio es  $\sim 0$  ( $10^{-8}$ ), de esto esperamos que los movimientos con las escalas mencionadas presenten una influencia importante de la rotación terrestre.

### C) Rapidez típica vertical:

Para obtener la rapidez típica vertical se considera la ecuación de continuidad, de la cual se obtiene:

$$w_t \cong H \left( 2 \frac{v_t}{L} \right) \sim \propto 10^{-2} \text{ cm/s} \quad (2.39)$$

La magnitud típica de la velocidad vertical en nuestra área de estudio es apenas del orden de centésimas comparada con la magnitud típica horizontal, esto es apenas 0.1 % de la magnitud horizontal.

### 2.3.1 ESCALAS DE LOS MOVIMIENTOS HORIZONTALES

Cada uno de los órdenes de magnitud de los términos que involucren  $u, x, z, t$  son semejantes a los que involucran  $v, y, z, t$ ; esto es por la consideración de que las escalas características horizontales son del mismo orden. A continuación se analizan los

órdenes de magnitud de cada uno de los términos de las ecuaciones de movimiento en las direcciones  $x$ ,  $y$ . Iniciando con los términos de la ecuación (2.32), se obtiene lo siguiente:

A) Término no-lineal:

Si se supone que la escala típica de velocidad es igual tanto en la dirección  $x$  como  $y$ , entonces se tiene que:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = 2 \frac{v_l^2}{L} \sim \mathcal{O}(10^{-5} \text{ cm/s}^2) \quad (2.40)$$

y

$$w \frac{\partial u}{\partial z} \cong \frac{w_l v_l}{H} \sim \mathcal{O}(10^{-5} \text{ cm/s}^2) \quad (2.41)$$

De donde se deduce que los términos no lineales son  $\sim \mathcal{O}(10^{-5} \text{ cm/s}^2)$ .

B) Gradiente de presión horizontal:

Es difícil obtener medidas directas del cambio horizontal de presión, sin embargo, mediante forma indirecta para las mismas escalas se ha estimado (Monreal Gómez y Salas de León, 1990) que:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \sim \mathcal{O}(10^{-4} \text{ cm/s}^2) \quad (2.42)$$

C) Fricción molecular:

Para obtener el orden de magnitud del término de fricción molecular, se mantiene la misma suposición de que la velocidad y longitud típica en la dirección  $x$  y  $y$  son del mismo orden, de esto se obtiene la siguiente expresión.

$$\nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \cong \nu \left( \frac{v}{L^2} + \frac{v}{L^2} \right) \sim \alpha 10^{-15} \text{ cm/s}^2 \quad (2.43)$$

y para la vertical

$$\nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \cong \nu \left( \frac{v}{H^2} \right) \sim \alpha 10^{-9} \text{ cm/s}^2 \quad (2.44)$$

#### D) Fricción Turbulenta :

El orden de magnitud del esfuerzo horizontal es:

$$k_H \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \cong k_H \left( \frac{v}{L^2} + \frac{v}{L^2} \right) \sim \alpha 10^{-7} \text{ cm/s}^2 \quad (2.45)$$

y el vertical es:

$$k_V \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \cong k_V \left( \frac{v}{H^2} \right) \sim \alpha 10^{-6} \text{ cm/s}^2 \quad (2.46)$$

La magnitud de los cambios temporales de la velocidad horizontal y vertical son aproximadamente del orden de  $10^{-5}$  y  $10^{-8}$   $\text{cm/s}^2$ , mientras que los términos  $2\Omega \cos \phi u$  y  $2\Omega \cos \phi v$  son  $10^{-6}$  y  $10^{-8}$   $\text{cm/s}^2$  respectivamente.

La ecuación (2.32) en términos de órdenes de magnitud es:

$$10^{-5} + 10^{-5} - 10^{-4} + 10^{-6} = -10^{-4} + 10^{-9} + 10^{-7} + 10^{-6} \quad (2.47)$$

De los últimos valores obtenidos, se deduce que los

movimientos, con las escalas establecidas, son dominados por los cambios de presión horizontal y el efecto de coriolis. La influencia más pequeña está dada por el intercambio de momentum molecular. Ordenes de magnitud semejantes son obtenidos para la dirección y. El análisis desarrollado muestra que, para dichas escalas de movimiento, los términos, producto del esfuerzo molecular, pueden ser considerados como despreciable.

### 2.3.2 ESCALAS DE LOS MOVIMIENTOS VERTICALES

Para obtener las magnitudes características de los términos de la ecuación de movimiento en la dirección z, se consideran las expresiones (2.38), (2.39) y las escalas utilizadas anteriormente.

#### A) Variación Temporal de la Velocidad:

$$\frac{\partial w}{\partial t} \cong \frac{w}{T} \sim \alpha 10^{-8} \text{ cm/s}^2 \quad (2.48)$$

#### B) Términos no-lineales:

El orden de los términos no lineales en la horizontal son:

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} \cong 2 \left( \frac{v}{L} \frac{w}{t} \right) \sim \alpha 10^{-8} \text{ cm/s}^2 \quad (2.49)$$

y la vertical

$$w \frac{\partial w}{\partial z} \cong \frac{w^2}{H} \sim \alpha 10^{-8} \text{ cm/s}^2 \quad (2.50)$$

C) Término de Coriolis:

$$2\Omega \cos \phi u \sim \alpha 10^{-3} \text{ cm/s}^2 \quad (2.51)$$

D) Gradiente de presión:

La presión a la profundidad característica es  $\alpha 10^7 \text{ dyn/cm}^2$  y  $\rho$  es  $\alpha 1 \text{ g/cm}^3$ , de éstos valores se obtiene que:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \sim \alpha 10^3 \text{ cm/s}^2 \quad (2.52)$$

E) Fricción Molecular:

El orden de magnitud para la viscosidad molecular horizontal está representado por la siguiente magnitud:

$$\nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cong \nu \left( \frac{w}{L^2} + \frac{w}{L^2} \right) \sim \alpha 10^{-18} \text{ cm/s}^2 \quad (2.53)$$

y para la vertical:

$$\nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \cong \nu \left( \frac{w}{H^2} \right) \sim \alpha 10^{-12} \text{ cm/s}^2 \quad (2.54)$$

F) Fricción Turbulenta:

El orden para los esfuerzos turbulentos en la ecuación de movimiento en la dirección z es:

$$k_H \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cong k_H \left( \frac{w}{L^2} + \frac{w}{L^2} \right) \sim \alpha 10^{-10} \text{ cm/s}^2 \quad (2.55)$$



Mientras que los verticales son del orden de:

$$k_v \left( \frac{\partial w}{\partial z^2} \right) \cong k_v \left( \frac{w_l}{H^2} \right) \sim \alpha 10^{-8} \text{ cm/s}^2 \quad (2.56)$$

De los resultados de (2.48) a (2.56), se obtiene que la ecuación (2.34), en términos de órdenes de magnitud, se expresa como:

$$10^{-8} + 10^{-8} - 10^{-8} = -10^9 + 10^9 + 10^{-12} + 10^{-10} + 10^{-8} \quad (2.57)$$

La relación anterior muestra que, los términos de magnitud dominante son el gradiente de presión y la gravedad. La magnitud de los demás términos es por lo menos  $10^6$  veces más pequeños que los dominantes.

### 2.3.3 ESCALAS DE LA ECUACION DE CONTINUIDAD

Las magnitudes de los términos de la ecuación de conservación de masa también son analizados, quedando como sigue:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \cong \frac{v_l}{L} + \frac{v_l}{L} \sim \alpha 10^{-6} \text{ s} \quad (2.58)$$

y

$$\frac{\partial w}{\partial z} \cong \frac{w_l}{H} \sim \alpha 10^{-6} \text{ s} \quad (2.59)$$

Dado que los términos de la ecuación de continuidad son del mismo orden, permanece intacta. Las ecuaciones de movimiento

promedio para x, y y z y la ecuación de continuidad, pueden ser escritas como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)u - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + k_H \nabla_H^2 u + k_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2.60)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)v + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + k_H \nabla_H^2 v + k_V \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (2.61)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.63)$$

Las ecuaciones (2.60) a (2.62) describen movimientos promedios con velocidades grandes en la horizontal y despreciables en la vertical. Aún cuando las velocidades en la vertical son pequeñas, no necesariamente todo término que contenga la velocidad vertical se puede omitir; debe evaluarse si es despreciable o no, comparado con los otros términos de la ecuación. La ecuación (2.63) muestra un ejemplo donde el término que contiene a w no puede ser despreciado, ya que es del mismo orden de magnitud que los otros términos involucrados, es decir, el gradiente vertical de w es igualmente importante que  $\partial u/\partial x$  y  $\partial v/\partial y$ , aún cuando  $u, v \gg v$ .

#### 2.4 INTEGRACION VERTICAL DE LA ECUACION DE MOMENTUM

Un modelo hidrodinámico bidimensional para movimientos promedios puede ser deducido de las ecuaciones (2.60) a (2.63),

Dicho modelo es representativo si los movimientos promedios de cada uno de los elementos de fluido son fundamentalmente horizontales. Si éste es el caso, para considerar una columna de agua, basta con integrar en la vertical el sistema de ecuaciones (2.60) a (2.63). Cabe mencionar que, si se tratara de un modelo hidrodinámico para movimientos instantáneos (2.16) a (2.18), y además si éste fuera bidimensional, la integración vertical de la columna involucraría la integración de una fluctuación, la que en ocasiones puede ser considerada pequeña comparada con la intergración del promedio.

En nuestro caso, suponemos que los movimientos medios en la Bahía de Campeche son prácticamente horizontales, por lo que nuestro objetivo en esta parte del trabajo estará enfocado en la integración vertical del sistema de ecuaciones (2.60) a (2.63).

El transporte horizontal ( $\vec{v}_H$ ) en una columna de agua de espesor instantáneo  $h$  está dado por:

$$\vec{v}_H = \int_d^{\zeta} \vec{v}_H dz \quad (2.64)$$

donde  $\vec{v}_H(u\hat{i} + v\hat{j})$  es el vector velocidad horizontal

La integración de las ecuaciones (2.60) a (2.63) sobre una columna de agua  $h$ , se puede realizar usando la Regla de Leibnitz, la cual se expresa como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_d^{\xi} R dz = \int_d^{\xi} \frac{\partial R}{\partial t} dz + R(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial t} - R(d) \frac{\partial d}{\partial t} \quad (2.65)$$

Donde  $R=R(x,y,z,t)$  es una función cualquiera, de forma que  $R(\xi)=R(x,y,\xi,t)$  y  $R(d)=R(x,y,d,t)$  son definidas en la superficie libre y en el fondo de la columna que se integra.

Con la ayuda de la ecuación (2.65), se realiza la integración vertical sobre toda la capa de espesor  $h$  para cada uno de los términos de la ecuación de movimiento en la dirección  $x$ . Dicha capa no es uniforme, ya que depende de su límite inferior, que para este caso es el fondo oceánico  $d(x,y,t)$  y del superior, que es la superficie libre  $\xi(x,y,t)$ . Estas fronteras de la columna son función del espacio y del tiempo, generando por ende cambios espaciales y temporales en  $h$ .

De todo lo anterior, al espesor  $h$  se le puede definir en función de  $\xi$  y  $d$  de la siguiente forma:

$$h = h(\xi, d) \quad (2.66)$$

o de forma explícita por:

$$h = \xi - d \quad (2.67)$$

Las funciones  $\xi$  y  $d$  se encuentran definidas con respecto a un sistema de referencia situado en la parte más profunda de la cuenca (el punto más profundo de la Bahía de Campeche).

### 2.4.1 INTEGRACION DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO HORIZONTAL

A continuación se integran cada uno de los términos de la ecuación de movimiento horizontal sobre la profundidad  $h$ .

#### A) Término de Cambio Local:

El primer término que se habrá de integrar es el término que contiene la variación temporal de la velocidad, es decir  $\frac{\partial u}{\partial t}$ . Utilizando la regla de Leibnitz y la ecuación de transporte horizontal (2.64), la expresión de Leibnitz toma la siguiente forma.

$$\int_d^{\zeta} \frac{\partial u}{\partial t} dz = \frac{\partial U}{\partial t} - u_{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u_d \frac{\partial d}{\partial t} \quad (2.68)$$

El último término del lado derecho de la ecuación anterior incluye la variación temporal del relieve submarino causada por erosión o depositación, que en el presente trabajo no se considera, ya que en la escala temporal que nos interesa, la variación del fondo de la Bahía de Campeche es prácticamente despreciable. A ésta condición, se le denominará relieve estacionario. De ahí que en la ecuación (2.68) el último término sea cero.

#### B) Términos Advectivos:

Tomando en cuenta la condición de incompresibilidad y la regla de Leibnitz, los términos advectivos integrados en la vertical, se expresan como:

$$\int_d^{\zeta} (\vec{v} \cdot \nabla) u \, dz = \int_d^{\zeta} \left[ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + u \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] dz \quad (2.69)$$

$$\int_d^{\zeta} (\vec{v} \cdot \nabla) u \, dz = \int_d^{\zeta} \left( \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} \right) dz \quad (2.70)$$

$$\int_d^{\zeta} (\vec{v} \cdot \nabla) u \, dz = \frac{\partial}{\partial x} (uuh) + \frac{\partial}{\partial y} (uvh) + \frac{\partial}{\partial z} (uwh) + u_{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} - u_d \frac{\partial d}{\partial t} \quad (2.71)$$

Incluyendo el transporte horizontal en los dos últimos términos del lado derecho de la ecuación anterior e introduciendo la condición de relieve estacionario, queda:

$$\int_d^{\zeta} (\vec{v} \cdot \nabla) u \, dz = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{UU}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{UV}{h} \right) + u_{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (2.72)$$

### C) Término de Coriolis:

Dado que  $f$  no depende de la profundidad, el término de Coriolis queda integrado como :

$$\int_d^{\zeta} f v \, dz = f \int_d^{\zeta} v \, dz = fV \quad (2.73)$$

### D) Término de presión:

Si la densidad se considera uniforme en toda la capa de espesor  $h$ , tal como lo especifica la aproximación de Boussinesq, la variable densidad puede salir de la integral, y si además se considera la Regla de Leibnitz, la integración del término de

presión queda como:

$$\frac{1}{\rho} \int_d^{\zeta} \frac{\partial p}{\partial x} dz = -\frac{h}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.74)$$

### E) Término de Friccións:

Suponiendo que el coeficiente de viscosidad turbulenta horizontal  $k_H$  es uniforme en la vertical de la capa con espesor  $h$ , el esfuerzo turbulento horizontal integrado se expresa como:

$$\int_d^{\zeta} k_H \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dz = k_H h \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.75)$$

(O'Brian y Hurlburt, 1972)

e introduciendo  $h$  en la derivada, se tiene que:

$$\int_d^{\zeta} k_H \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dz = k_H \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.76)$$

De forma semejante que en el caso anterior, si el coeficiente de viscosidad vertical  $k_v$  se considera uniforme en toda la capa  $h$ , la integración del esfuerzo turbulento vertical se expresa como:

$$\int_d^{\zeta} k_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz = k_v \left( \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{\zeta} - \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_d \right) \quad (2.77)$$

De la ecuación (2.29), se obtiene la siguiente expresión

$$\int_d^{\zeta} k_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz = (\tau_{\zeta,x} - \tau_{d,x}) / \rho \quad (2.78)$$

La integración del término turbulento en la vertical involucra, como muestra la ecuación (2.78), el esfuerzo tangencial a la superficie libre del océano y en el fondo, en la dirección  $x$  respectivamente.

La integración sobre toda la columna de espesor  $h$  de la ecuación de movimiento en la dirección  $y$ , es similar a la realizada con la ecuación en la dirección  $x$ .

#### 2.4.2 INTEGRACION DE LA ECUACION HIDROSTATICA

Considerando densidad uniforme en toda la capa de agua  $h$ , la integración vertical de la ecuación hidrostática (2.62) sobre la columna, queda de la siguiente manera:

$$\frac{1}{\rho} \int_d^{\zeta} \frac{\partial P}{\partial z} dz = - \int_d^{\zeta} g dz \quad (2.79)$$

o que es lo mismo

$$P_d = P_{\zeta} + \rho gh \quad (2.80)$$

La expresión (2.80), representa la presión que se ejerce sobre la parte inferior de la columna  $h$  y  $P_{\zeta}$  representa la presión atmosférica ejercida sobre la superficie del mar.

#### 2.4.3 INTEGRACION DE LA ECUACION DE CONTINUIDAD

La linealidad de la ecuación de continuidad hace que su integración vertical sobre la columna  $h$  sea relativamente fácil,



quedando de la siguiente forma:

$$\int_d^{\zeta} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz + \int_d^{\zeta} \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0 \quad (2.81)$$

La integración del último término de la ecuación anterior representa la diferencia entre la velocidad vertical en la superficie libre y en el fondo de la capa h.

Utilizando la regla de Leibnitz, los términos que involucran velocidades horizontales en la ecuación (2.81) se pueden expresar como:

$$\int_d^{\zeta} \frac{\partial u}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_d^{\zeta} u dz - u(\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + u(d) \frac{\partial d}{\partial x} \quad (2.82)$$

$$\int_d^{\zeta} \frac{\partial v}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_d^{\zeta} v dz - v(\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial y} + v(d) \frac{\partial d}{\partial y} \quad (2.83)$$

donde

$$\frac{d\zeta}{dt} = w_{\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u_{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v_{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad (2.84)$$

y

$$\frac{dd}{dt} = w_d = u_d \frac{\partial d}{\partial x} + v_d \frac{\partial d}{\partial y} \quad (2.85)$$

De las dos últimas expresiones se pueden deducir condiciones de frontera cinemática y de fondo tales como la de superficie rígida ( $d\zeta/dt=0$ ) y la de impermeabilidad de fondo ( $dd/dt=0$ ) respectivamente.

Sustituyendo las ecuaciones (2.82) y (2.83) en (2.81), y el resultado de esto, junto con las ecuaciones (2.84) y (2.85), y además incluyendo la expresión para el transporte horizontal, se obtiene que, la integración de la ecuación de continuidad está dada por:

$$\int_d^{\xi} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0 \quad (2.86)$$

Finalmente, el sistema de ecuaciones de movimiento promedio para un océano formado por una capa de agua de espesor  $h$  es:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{UU}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{UV}{h} \right) - fV = - \frac{h}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + k_H \nabla^2_H U + \frac{1}{\rho} (\tau_{\xi,x} - \tau_{d,x}) \quad (2.87)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{UV}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{VV}{h} \right) + fU = - \frac{h}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + k_H \nabla^2_H V + \frac{1}{\rho} (\tau_{\xi,y} - \tau_{d,y}) \quad (2.88)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (2.89)$$

donde  $\partial \xi / \partial t = \partial h / \partial t$

Las ecuaciones (2.87) a (2.89) representan las ecuaciones de movimiento integradas en la vertical sobre la columna de agua con espesor  $h$  en las direcciones  $x$ ,  $y$ , y la ecuación de continuidad respectivamente. En la ecuación de continuidad se ha considerado

la condición de relieve estacionario, por lo que la variación temporal de la columna  $h$  está dada básicamente por la fluctuación temporal de  $\zeta$ , ecuación (2.67). Nótese también de la ecuación (2.89) que, cuando la divergencia horizontal del transporte es positiva o negativa, es balanceada por un decremento o incremento respectivo del espesor  $h$ .

## 2.5 MODELO BAROCLINICO DE DOS CAPAS

En la sección anterior se mostró el modelo matemático que representa a un océano barotrópico. Sin embargo, los océanos en general presentan condiciones baroclinicas; es decir, las superficies isobáricas e isopichnas no son paralelas entre sí. La distribución de densidad depende de la salinidad, temperatura y presión y como consecuencia de esto, a diferencia del campo barotrópico, no puede permanecer estático.

En un campo baroclínico, las inclinaciones del campo de presión y por consiguiente sus gradientes, dependen de la profundidad, tornando a ser independientes sólo a grandes profundidades; cuando, para el caso geostrófico, la diferencia en las alturas dinámicas de dos puntos del océano con respecto a una geopotencial tienden a cero. De esto último, se puede pensar que el campo baroclínico tiende a la barotropicidad con la profundidad.

El campo baroclínico puede ser representado por un conjunto de campos barotrópicos, el cual, al considerar las variables hidrodinámicas promediadas en cada capa, constituye un modelo

baroclínico.

Es sabido que la capa superficial o capa de mezcla, donde la estructura térmica fluctúa para cada estación del año, es separada de la capa de aguas profundas por una interfase a la que generalmente se le denomina termoclina permanente. En ésta, la estructura térmica presenta un alto gradiente vertical, coincidiendo, en la mayoría de los casos, con la pycnoclina permanente.

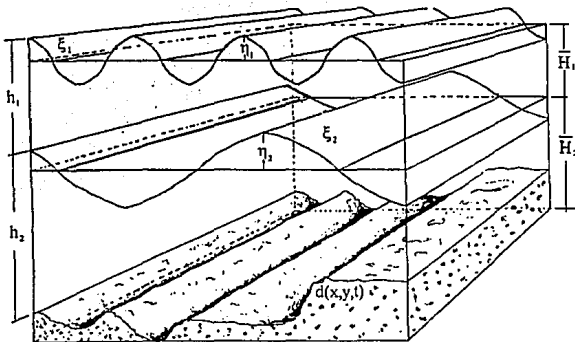


Fig.2.1 Representación de un modelo baroclínico.

En la Bahía de Campeche, el grado de baroclinicidad varía para diferentes épocas del año; presentando, en la parte costera,

mayor estratificación en verano que en invierno (Cázares-Cruz, 1992). Para fines de estudio, la Bahía de Campeche puede ser representada por dos capas de diferente densidad. Este modelo está esquematizado en la figura 2.1, donde se muestra un océano con su superficie libre e interfase perturbadas, deduciéndose las siguientes funciones;  $\zeta_1 = \zeta_1(x,y,t)$  y  $\zeta_2 = \zeta_2(x,y,t)$  representan la superficie libre y la interfase respecto al datum,  $h_1 = h_1(\zeta_1, \zeta_2)$  y  $h_2 = h_2(\zeta_2, d)$  representan el espesor de la capa superior e inferior respectivamente, las cuales como se puede observar, están en función del espacio  $(x,y)$  y el tiempo  $t$ . En esta esquematización del océano,  $d$  representa el relieve submarino respecto al datum y su forma funcional es  $d = d(x,y,t)$ .

El espesor instantáneo de cada una de las capas consideradas en este modelo pueden ser expresadas como:

$$h_1(x,y,t) = \zeta_1(x,y,t) - \zeta_2(x,y,t) \quad (2.90)$$

$$h_2(x,y,t) = \zeta_2(x,y,t) - d(x,y,t) \quad (2.91)$$

El nivel de la superficie libre sin perturbaciones estará dado por:

$$\bar{H} = \bar{H}_1 + \bar{H}_2 \quad (2.92)$$

Donde  $\bar{H}_1$  y  $\bar{H}_2$  son el espesor no perturbado e independiente del espacio y tiempo de la capa superior e inferior

respectivamente. Las oscilaciones superficiales e internas de la columna baroclinica son medidas con respecto a  $\bar{H}$  y  $\bar{H}_2$ . Dichas oscilaciones pueden ser expresadas como:

$$\eta_1(x, y, t) = h_1(x, y, t) + h_2(x, y, t) + d(x, y, t) - \bar{H} \quad (2.93)$$

$$\eta_2(x, y, t) = h_2(x, y, t) + d(x, y, t) - \bar{H}_2 \quad (2.94)$$

También se puede deducir de la figura 2.1, que la presión en un punto dentro de cada una de las capas puede ser representada por:

$$P_1 = P_{\zeta} + \rho_1 g (h_1 + h_2 + d - z) \quad (2.95)$$

$$P_2 = P_{\zeta} + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g (h_2 + d - z) \quad (2.96)$$

Considerando a la presión atmosférica uniforme, de las dos últimas expresiones se deduce que los gradientes horizontales en puntos internos en cada capa están dados por:

$$\frac{\nabla P}{\rho_1} = g \nabla_H (h_1 + h_2 + d) \quad (2.97)$$

$$\frac{\nabla P}{\rho_2} = -g' \nabla_H h_1 + \frac{\nabla P}{\rho_1} \quad (2.98)$$

Donde a  $g'$  se le denomina gravedad reducida; su existencia es

causada por la pycnoclina, marcando la diferencia entre la densidad de la capa superior y la inferior, ésta se define por:

$$g' = \left( \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \right) g \quad (2.99)$$

Incluyendo las ecuaciones (2.93) y (2.94) en (2.97) y (2.98), los gradientes en función de las amplitudes de las ondas de superficie e internas, queda:

$$\frac{\nabla_H P}{\rho_1} = g \nabla_H (\eta_1) \quad (2.100)$$

$$\frac{\nabla_H P}{\rho_2} = -g' \nabla_H (\eta_1 - \eta_2) + g \nabla_H (\eta_1) \quad (2.101)$$

El sistema de ecuaciones que gobierna a un campo baroclinico de dos capas acopladas está dado por las siguientes ecuaciones.

#### A) Primera Capa:

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U_1 U_1}{h_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{U_1 V_1}{h_1} \right) - f V_1 = -g h_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + k_H \nabla_H^2 U_1 + \frac{1}{\rho_1} (\tau_{\zeta_1, x} - \tau_{\zeta_2, x}) \quad (2.102)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U_1 V_1}{h_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{V_1 V_1}{h_1} \right) + f U_1 = -g h_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial y} + k_H \nabla_H^2 V_1 +$$

$$\frac{1}{\rho_1} (\tau_{\xi_1, y} - \tau_{\xi_2, y}) \quad (2.103)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\eta_1 - \eta_2) + \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} = 0 \quad (2.104)$$

B) Segunda Capa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U_2 U_2}{h_2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{U_2 V_2}{h_2} \right) - fV_2 = -gh_2 (\epsilon_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + \epsilon_2 \frac{\partial \eta_2}{\partial x}) + \\ k_H \nabla^2 U_2 + \frac{1}{\rho_2} (\tau_{\xi_2, x} - \tau_{d, x}) \end{aligned} \quad (2.105)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U_2 V_2}{h_2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{V_2 V_2}{h_2} \right) + fU_2 = -gh_2 (\epsilon_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial y} + \epsilon_2 \frac{\partial \eta_2}{\partial y}) + \\ k_H \nabla^2 V_2 + \frac{1}{\rho_2} (\tau_{\xi_2, y} - \tau_{d, y}) \end{aligned} \quad (2.106)$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t} + \frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} = 0 \quad (2.107)$$

donde  $\epsilon_1 = \rho_1 / \rho_2$  y  $\epsilon_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}$

Las últimas seis ecuaciones describen en forma acoplada los movimientos y oscilaciones presentes correspondientes a un océano estratificado de dos capas.



Los modos de oscilación que se propagan en un océano baroclinico en dos capas adyacentes son dependientes entre sí, ya que su presencia depende fundamentalmente de la estratificación y de la divergencia del transporte en cada capa.

## 2.6 MODELO DE GRAVEDAD REDUCIDA

Se ha mencionado que la estructura baroclinica puede ser representada como un conjunto de capas de distinta densidad con características barotrópicas; es decir, con gradientes horizontales de presión independientes de la profundidad dentro de éstas. Este hecho hace que el gradiente horizontal de presión en la primera capa sea el causante de las oscilaciones espaciales de la superficie libre del mar (ecuación 2.100), ya que su inexistencia indicaría un mar totalmente en calma ( $\eta_1$  uniforme); con superficie libre totalmente horizontal. Si esta situación estuviera presente, la segunda capa tendría un gradiente horizontal de presión de la forma:

$$\frac{\nabla_H P}{\rho_2} = g' \nabla_H (\eta_2) \quad (2.108)$$

Fisicamente hablando, esta última ecuación representa a una oscilación en la interfase sin lograr alterar la superficie libre del mar. Es evidente que esta situación sólo puede ocurrir en altas latitudes, siendo incongruente con la situación física de nuestra área de estudio. Sin embargo, lo que sí se ha comprobado

es que  $\eta_1 \ll \eta_2$ , entonces, de la ecuación (2.101) se puede obtener el siguiente resultado:

$$\frac{\nabla_H^2 P}{\rho_2} = g' \nabla_H (\eta_2) + g \nabla_H (\eta_1) \quad (2.109)$$

En aguas profundas, es decir en la capa inferior, el gradiente horizontal de presión tiende a cero, por lo que se puede realizar la siguiente aproximación:

$$g \nabla_H (\eta_1) \cong -g' \nabla_H (\eta_2) \quad (2.110)$$

Considerando esto último, las ecuaciones (2.102) a (2.104) se transforman en:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U_1 U_1}{h_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{U_1 V_1}{h_1} \right) - f V_1 = g' h_1 \frac{\partial \eta_2}{\partial x} + k_H \nabla_H^2 U_1 + \\ \frac{1}{\rho_1} (\tau_{\xi_1, x} - \tau_{\xi_2, x}) \end{aligned} \quad (2.111)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U_1 V_1}{h_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{V_1 V_1}{h_1} \right) + f U_1 = g' h_1 \frac{\partial \eta_2}{\partial y} + k_H \nabla_H^2 V_1 + \\ \frac{1}{\rho_1} (\tau_{\xi_1, y} - \tau_{\xi_2, y}) \end{aligned} \quad (2.112)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\eta_2) + \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} = 0 \quad (2.113)$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales involucra las variables independientes  $x$ ,  $y$ ,  $t$  y las variables que se desean conocer  $U_1$ ,  $V_1$  y  $\eta_2$ . A este modelo hidrodinámico se le denomina de gravedad reducida y ha sido usado para estudiar el océano con dos capas contrastantes, así como para analizar la influencia del esfuerzo de viento (García-Ladona y Djenidi, 1991). De hecho, dicho modelo es una simplificación del modelo de dos capas, diseñado con una capa superior dinámicamente activa y una inferior infinitamente profunda e inactiva. La pycnoclina ( $\rho_2$ ) actúa como una interface impermeable entre las dos capas. En lo sucesivo, se omitirán los subíndices, en el entendido que  $U$  y  $V$  representarán el transporte horizontal en la capa superior,  $\eta$  la anomalía de la pycnoclina y  $h$  el espesor instantáneo de la capa en movimiento.

## CAPITULO III: ESQUEMA NUMERICO

### 3.1 AREA DE INTEGRACION

Para modelar un sistema marino, lo primero que se requiere es definir el dominio sin ambigüedad, separándolo de su entorno e identificando perfectamente el tipo de interacción con éste. La definición del sistema implica en primer lugar la especificación de sus fronteras con sus características propias (Nihoul, 1975).

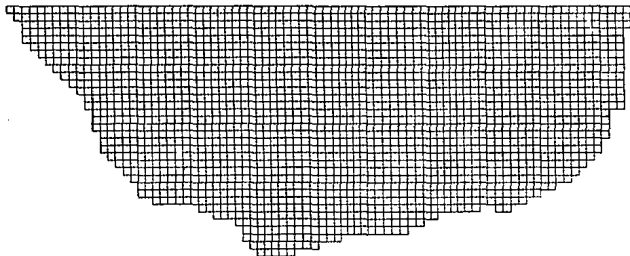


Fig. 3.1 Area de integración para la Bahía de Campeche.

El área sobre la cual se realiza la solución numérica de las ecuaciones hidrodinámicas o de movimiento es denominada dominio computacional o área de integración figura 3.1. Este término fue introducido por Charney *et al.* (1950), y probablemente fue quien por primera vez consideró seriamente los tipos de condiciones que debían ser impuestas en las fronteras donde la malla numérica finaliza en mar abierto o en obstáculos físicos. Estos límites del dominio computacional son llamadas fronteras computacionales y son

divididas de acuerdo a sus diferentes características, ya sean naturales o artificiales.

### 3.1.1 FRONTERAS NATURALES

Una frontera natural es una frontera donde el movimiento del fluido es restringido por obstáculos físicos, existiendo dos tipos de éstas; las fronteras cerradas y de fondo. Las condiciones que deben cumplir estas fronteras están dadas por los procesos físicos que aparecen en ellas.

#### 3.1.1.1 FRONTERA CERRADA

La frontera computacional, relativamente menos ambigua del área de integración de un modelo, es la costa; denominada frontera cerrada, la cual es la superficie que limita el sistema marino con la parte continental que lo rodea. Las condiciones que se establezcan en esta frontera son cruciales para la solución del sistema de ecuaciones hidrodinámicas.

En las fronteras cerradas de la Bahía de Campeche se han establecido condiciones de impermeabilidad, es decir se han considerado únicamente las componentes del vector transporte paralelas a la costa. Esta condición se expresa como:

$$\vec{v}_n \cdot \hat{n} = 0 \quad (3.1)$$

donde  $\hat{n}$  y  $\vec{v}_n$  son vectores unitario y de velocidad perpendiculares a la costa respectivamente.

### 3.1.1.2 FRONTERA DE FONDO

La frontera que tiene la columna de agua con el fondo oceánico comúnmente se le denomina frontera de fondo. Esta frontera que en forma simple podría pensarse como una superficie bien definida y fija, varía con el tiempo. Su variación o concentración está en función de la depositación y suspensión de sedimentos. Esto por supuesto, dependerá de que el área de estudio sea costera u oceánica. Otro factor importante es el esfuerzo ejercido por los movimientos del fluido sobre el fondo, influyendo de forma considerable en la erosión y depositación de sedimentos. Todo lo anterior muestra que se debe tener cuidado al establecer alguna frontera de transición agua-sólido. Lo más conveniente es tomar límites, que a criterio de cierta concentración, sea la más adecuada.

La existencia de la superficie de fondo  $d(x,y,t)$ , tal como fue definida en la sección 2.4, da origen a una fricción que puede ser calculada mediante la teoría de Prandtl-Von Karman, de forma muy semejante al cálculo de esfuerzo sobre la interface aire-mar. Para este caso, la fricción será una función de la velocidad de la capa hidrodinámica adyacente al fondo expresada como:

$$\tau_d = \rho_2 C_d |\vec{v}_2| \vec{v}_2 \quad (3.2)$$

y en términos de transporte es:

$$\vec{\tau}_d = \frac{\rho_z C_d}{h_z^2} |\vec{V}_z| \vec{V}_z \quad (3.3)$$

Donde  $C_d$  representa un coeficiente adimensional de fricción con el fondo.

Las consideraciones que se establecen para la modelación de la circulación en la Bahía de Campeche en esta frontera, son del tipo impermeable y rígida, ésto en forma matemática puede ser expresado como:

$$w_d = 0 \quad (3.4)$$

$$u_d \frac{\partial d}{\partial x} + v_d \frac{\partial d}{\partial y} = 0 \quad (3.5)$$

La estacionaridad de la superficie de fondo  $d(x,y,t)$  se basa en el hecho de no considerar influencia de ríos y a los cortos periodos de tiempo característicos.

### 3.1.2 FRONTERAS ARTIFICIALES

Las fronteras artificiales se presentan generalmente cuando el área de integración finaliza en mar abierto o con la atmósfera. Pueden ser elegidas arbitrariamente para limitar el sistema que se desea estudiar del resto de cuerpos o sistemas de agua adyacentes. Dichas fronteras pueden restringir o no el movimiento del fluido, dentro de estas fronteras se consideran las fronteras abiertas y la interface aire-mar o frontera cinemática.

### 3.1.2.1 FRONTERA CINEMATICA

Se le denomina frontera cinemática a la interface entre el aire y el mar, uno desearía que ésta estuviera horizontalmente bien definida, pero desafortunadamente esta frontera no es una frontera rígida; por lo que es difícil posicionar la zona de transición entre la atmósfera y el mar. La fluctuación de esta frontera está en función de las ondas de superficie provocadas por el esfuerzo del viento local e instantáneo y de la interacción entre ondas de diferente frecuencia (Nihoul., 1975), provocando una transferencia de momentum entre la atmósfera y el océano, pasando a la columna por diferentes mecanismos (Krauss, 1977). Los flujos de calor y de vapor de agua, a través de ésta frontera dependen principalmente de la velocidad del viento y de la estratificación del aire. La parametrización y estimación de esos flujos es muy compleja.

Mediante la comparación del transporte de momento de un gas real y el del gas ideal, Prandtl (1925) propone su teoría denominada "Longitud de mezcla". Dicha teoría establece que el esfuerzo en la capa límite, entre la atmósfera y la superficie libre del mar, está dado en función de la longitud de mezcla ( $l$ ) mediante la siguiente expresión:

$$\tau_{z,x} = \rho_a l^2 (\partial w_x / \partial z)^2 \quad (3.6)$$

Donde  $w_x$  representa la velocidad del viento en la dirección  $x$  sobre la capa límite y  $\rho_a$  la densidad del aire. Comparando la



ecuación (3.6) con la ecuación (2.29) se deduce que el coeficiente dinámico de viscosidad turbulenta vertical para la expresión de Prandtl es:

$$A_z = \rho_a l^2 (\partial w_x / \partial z) \quad (3.7)$$

Posteriormente Karman (1930), apoyado en las suposiciones de Prandtl, propone un modelo de capa límite estableciendo que la longitud de mezcla ( $l$ ) es un valor finito, proporcional a la altura ( $Z$ ) y dependiente de la rugosidad de la interface aire-mar (McClellan, 1975). Esta condición la expresó como:

$$l = K_0 (Z + Z_0) \quad (3.8)$$

donde  $K_0$  es la constante adimensional de Karman ( $K_0 = 0.4$ ) también llamada "Constante Universal de Turbulencia" y  $Z_0$  es la longitud de rugosidad de la interface aire-mar.

Las proposiciones de Karman modifican la ecuación (3.6), de forma que la nueva ecuación del esfuerzo actuando en la dirección  $x$  sobre cierta posición  $Z$  de la columna está expresada por:

$$\tau_{z,x} = \rho_a K_0^2 (Z + Z_0)^2 (\partial w_x / \partial z)^2 \quad (3.9)$$

Por otro lado se define la velocidad de fricción como:

$$w_{*x} = \sqrt{\tau_{z,x} / \rho_a} \quad (3.10)$$

El gradiente vertical de la componente  $x$  de la velocidad del

viento se obtiene al despejar después de haber sustituido la ecuación (3.10) en (3.9), su expresión es:

$$\partial W_x / \partial Z = W_* / K_0 (Z + Z_0) \quad (3.11)$$

Si en esta última ecuación se supone que la velocidad de fricción  $W_*$  es constante en toda la columna de aire considerada, e integrando sobre ésta, de la ecuación (3.11) se obtiene:

$$W_{2,x} - W_{1,x} = \frac{W_*}{K_0} \ln \left( \frac{Z_2 + Z_0}{Z_1 + Z_0} \right) \quad (3.12)$$

donde  $W_{2,x}$  y  $W_{1,x}$  representan los valores de la velocidad del viento en la dirección  $x$  en la posición  $Z=1$  y  $Z=2$ . Además, si la velocidad del viento en  $Z_1 = 0$  es nula ( $W_{1,x} = 0$ ) y suprimiendo los sub-índices, se obtiene que:

$$W_x = \frac{W_*}{K_0} \ln \left( \frac{Z + Z_0}{Z_0} \right) \quad (3.13)$$

Esta última ecuación describe la distribución vertical de velocidad del viento actuando en la dirección  $x$  en toda la columna de aire desde, la superficie rugosa aire-mar de amplitud  $Z_0$  hasta la altura  $Z$  medida con respecto a  $Z_0$ .

Considerando las ecuaciones (3.10) y (3.13), se obtiene que el esfuerzo en la dirección  $x$  sobre una área unitaria perpendicular al eje  $z$  es:

$$\tau_{z,x} = \rho_a [K_o / \ln \left( \frac{Z + Z_o}{Z_o} \right)]^2 W_x^2 \quad (3.14)$$

La ecuación (3.14) generalmente se expresa como:

$$\tau_{z,x} = \rho_a C_a W_x^2 \quad (3.15)$$

Donde  $C_a$  es sin dimensiones y se le denomina coeficiente de resistencia o coeficiente de arrastre. Este, relaciona el esfuerzo en cada punto de la capa límite con su velocidad de viento respectiva.

Dado que el esfuerzo provocado, entre las capas aerodinámica e hidrodinámica, es de tipo vectorial, la expresión (3.15) se expresa de la siguiente forma:

$$\vec{\tau}_z = \rho_a C_a |\vec{W}| \vec{W} \quad (3.16)$$

De modo que para una  $Z$  estándar de 10 m sobre la superficie libre del mar, como generalmente es usada, la ecuación (3.16) queda expresada como:

$$\vec{\tau}_{10} = \rho_a C_a |\vec{W}_{10}| \vec{W}_{10} \quad (3.17)$$

Kondo (1975) (Citado por Kraus, 1977) sugiere que la rugosidad presente en la superficie oceánica está íntimamente

relacionada con el número de rugosidad de Reynolds  $Z_0 W_M / \nu$ , donde  $Z_0$  representa las irregularidades de la superficie libre del mar asociadas con las ondas de alta frecuencia,  $W_M$  representa la velocidad friccional sobre la superficie rugosa y  $\nu$  la viscosidad cinemática. Todo esto implica que el esfuerzo sobre la superficie libre del mar estará en función de la estratificación de la capa aerodinámica adyacente. Este hecho es parametrizado mediante un coeficiente de arrastre de la siguiente forma (Smith, 1980):

$$C_a = \begin{cases} 1 \times 10^{-3} (0.61 + 0.063 W_{10}) & \text{si } 8 \text{ ms}^{-1} < W_{10} < 22 \text{ ms}^{-1} \\ 1.1 \times 10^{-3} & \text{si } W_{10} < 8 \text{ ms}^{-1} \end{cases} \quad (3.18)$$

Las capas aerodinámica e hidrodinámica, están dinámicamente acopladas mediante el esfuerzo provocado por las diferencias de velocidad entre éstas. Este esfuerzo es continuo en la interface; es decir, el esfuerzo en el fondo de la capa aerodinámica es el mismo que en la parte superior de la capa hidrodinámica, de modo que  $\vec{\tau}_{z_0} = \vec{\tau}_\zeta$ . Tal como se ha mencionado, la tensión  $\vec{\tau}$  en la interface entre  $Z_0$  y  $\zeta$  es una función de la diferencia de velocidades entre las dos capas adyacentes. Basados en esta hipótesis, O'Brien y Hulburt (1972) proponen la siguiente relación para  $\vec{\tau}$  en la interface:

$$\vec{\tau}_\zeta = \rho C_f \left( \frac{|\vec{v}_1| + |\vec{v}_2|}{2} \right) (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \quad (3.19)$$

Comparando la ecuación (3.19) para la componente de velocidad en  $x$ , con la ecuación (2.29), y considerando la velocidad y profundidad características para la Bahía de Campeche, se tiene que el coeficiente de fricción en la interface  $C_f$  está dado por:

$$C_f = \frac{k_z}{Hv_t} \quad (3.20)$$

Donde  $k_z$  representa el coeficiente de viscosidad cinemática turbulenta;  $H$ , la profundidad característica y  $v_t$ , la velocidad característica en la dirección  $x$ . El valor numérico de dicho coeficiente es  $\sim (10^{-2})$ .

Las fluctuaciones espacio-temporales de la superficie libre del mar están dadas por la siguiente expresión.

$$\frac{d\zeta}{dt} + u_d \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v_d \frac{\partial \zeta}{\partial y} = w \quad (3.21)$$

### 3.1.2.2 FRONTERAS ABIERTAS

Las fronteras abiertas son aquellas en las que finaliza el área de integración de interés, sin que se presente una frontera natural de obstáculo físico. Es decir, es una frontera convencional que limita el área de integración en aguas oceánicas. El éxito o fracaso que se obtiene al considerar una frontera de este tipo está en base a los objetivos planteados, los cuales generan criterios para elegir y localizar una frontera abierta apropiada. Las condiciones que deben cumplir estas fronteras, deben ser tales

que la perturbación sobre la respuesta interna del área de integración no aumente sin límite, manteniendo de esta forma la estabilidad. De ahí que, para evitar las reflexiones o perturbaciones creadas por su existencia, las aproximaciones en ésta deben ser adecuadas en comparación con el esquema interior, de forma tal que las variables dependientes del modelo en la frontera y cerca de ésta evolucionen en armonía con su contraparte interna. Miller y Thorpe, 1981 y Chapman, 1985 presentan un análisis de las ventajas y desventajas al utilizar diferentes técnicas sobre una misma área de integración. Entre las técnicas más comunes están: fronteras especificadas, esponjas y telescópicas. De hecho, éstas técnicas también son aplicadas a fronteras naturales. La técnica aplicada en este trabajo fué la de frontera especificada.

### 3.1.2.2.1 FRONTERAS ESPECIFICADAS

En estas fronteras una o varias variables dependientes del modelo son a priori descritas, independientemente de la evolución de éstas en el interior del área de integración, por lo que su influencia deberá ser significativa sobre la respuesta interior. Este tipo de frontera es utilizada sobre el paralelo  $21^{\circ}$  N, sin embargo, se debe tener mucho cuidado al especificar variables a lo largo de las fronteras abiertas basadas en observaciones, ya que es difícil distinguir, en el dominio interior de integración, los efectos introducidos por las fronteras y los errores en las cantidades especificadas (Chapman, 1985).

Gracias a un estudio reciente de circulación geostrófica a través del paralelo  $21^{\circ}$  N realizado por Cázares-Cruz (1992), fue posible establecer, mediante interpolación con funciones parabólicas, las características del flujo en esta frontera del dominio computacional. En lo sucesivo, esta frontera será representada por FA.

Las funciones parabólicas utilizadas en la interpolación de la velocidad en FA son de la forma:

$$v = v_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{x - L/2}{L/2} \right)^2 \right] \quad (3.22)$$

En la ecuación anterior,  $L$  y  $v_{\max}$  representan el ancho y la velocidad máxima en el vértice de la parábola. Además, el promedio horizontal de la velocidad puede ser expresado como:

$$\bar{v} = \frac{1}{L} \int_0^L v dx \quad (3.23)$$

Partiendo de la ecuación (3.22), se obtiene que el transporte puede ser representado de forma parabólica por:

$$V = v_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{x - L/2}{L/2} \right)^2 \right] h_1 \quad (3.24)$$

El vértice de cada parábola oscilará estando en la parte positiva o negativa del eje  $z$ , dependiendo si el transporte sale o entra al dominio computacional. Los vértices de las parábolas fueron calculados de las corrientes geostróficas existentes del

paralelo  $21^{\circ}$  N para las campañas oceanográficas OGMEX-I, OGMEX-II, y OGMEX-V. El primero realizado en invierno de 1987 y los otros dos en verano de 1987 y 1988 respectivamente.

### 3.1.2.2 CONDICIONES ESPONJAS Y TELESCOPICAS

Estas técnicas utilizadas para tratar fronteras naturales o artificiales son de reciente aplicación. De hecho, las esponjas y telescópicas trabajan de forma muy semejante. Las esponjas, generalmente son implementadas extendiendo el área de integración de modo que incluya un área fuera del dominio computacional de interés, en donde algún parámetro friccional es incrementado para amortiguar la perturbación generada por la frontera. Algunas veces estas áreas son naturales (por ejemplo ondas golpeando en playas arenosas) pero en otras, es simplemente artificial. De forma semejante, en lo que se refiere a la extensión del área de integración, las condiciones telescópicas tienden a hacer más simples los procesos físicos o numéricos, suavizando la topografía y fuerzas externas en el caso físico o expandiendo el tamaño de las celdas de la malla numérica. La elección en las condiciones descritas, deberá basarse en la naturaleza física del área del modelo extendido (Roed y Cooper, 1986).

### 3.2 DISCRETIZACION DE LAS ECUACIONES DEL MODELO DE GRAVEDAD REDUCIDA

La solución del sistema de ecuaciones que gobiernan los



movimientos baroclinicos debe satisfacer el sistema diferencial en toda el área de integración; tanto en las fronteras como en su interior. La solución analítica del sistema de ecuaciones diferenciales de movimiento, sólo se ha realizado para casos especiales en los que se han introducido varias simplificaciones y linealización (Ramming y Kowalik, 1980). En general, la solución analítica para sistemas naturales no se ha realizado, ya que las fronteras; tal como las costas y topografía del fondo, no pueden ser en su totalidad representadas por alguna expresión funcional continua.

Varias técnicas numéricas han sido desarrolladas para resolver este sistema de ecuaciones diferenciales. El principio de estos métodos, se basa en la discretización del sistema natural y de sus ecuaciones que lo describen; reemplazando las variables dependientes e independientes continuas por sus respectivas variables discretas (Rosenberg, 1969). Este reemplazo, permite establecer el sistema de ecuaciones diferenciales parciales en forma discreta. Las que a fin de cuenta, constituyen un sistema algebraico de ecuaciones lineales posibles de solucionar numéricamente, mediante el uso de computadoras.

### 3.2.1 APROXIMACION EN DIFERENCIAS FINITAS

El modelo matemático continuo, establecido para la Bahía de Campeche, fué discretizado utilizando el método de diferencias finitas, el cual consiste en reemplazar esas variables continuas con variables discretas. En nuestro caso, las variables

discretizadas fueron las componentes horizontales del transporte  $U(x,y,t)$ ,  $V(x,y,t)$  y la función  $\eta(x,y,t)$ , la cual, representa la amplitud de las oscilaciones de la pycnoclina, llamada comúnmente anomalía de la pycnoclina. Dado que estas funciones son continuas en el plano  $x$ - $y$ , en el punto  $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ , fueron representadas mediante un desarrollo en series de Taylor:

$$U(x+\Delta x) = U(x) + \frac{dU}{dx}(x)\Delta x + \frac{d^2U}{dx^2}(x)\frac{(\Delta x)^2}{2!} + \frac{d^3U}{dx^3}(x)\frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots + \quad (3.25)$$

$$V(y+\Delta y) = V(y) + \frac{dV}{dy}(y)\Delta y + \frac{d^2V}{dy^2}(y)\frac{(\Delta y)^2}{2!} + \frac{d^3V}{dy^3}(y)\frac{(\Delta y)^3}{3!} + \dots + \quad (3.26)$$

Una representación semejante se realizó sobre las variables independientes  $y$ ,  $t$ . De forma análoga, la función  $\eta(x,y,t)$  puede ser desarrollada con respecto a cualquier variable independiente,

Las variables independientes discretas son distribuidas en un número de puntos finitos en el espacio y el tiempo, este hecho se denota por:

$$x_I = I(\Delta x) \quad (3.27)$$

$$y_J = J(\Delta y) \quad (3.28)$$

$$t_n = n(\Delta t) \quad (3.29)$$

Donde  $I = 1 \dots Q+1$ ,  $J = 1 \dots R+1$ ,  $n = 0 \dots Q$  tal que  $Q$ ,  $R$  y  $Q$  son el número total de incrementos  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  y  $\Delta t$  respectivamente, en los que el espacio y el tiempo fueron divididos. Es decir, un

incremento o decremento con respecto al punto  $I, J, n$ , se expresa como:

$$\begin{aligned}
 x_{I+1} &= x_I + \Delta x \\
 x_{I-1} &= x_I - \Delta x \\
 y_{J+1} &= y_J + \Delta y \\
 y_{J-1} &= y_J - \Delta y \\
 t_{n+1} &= t_n + \Delta t \\
 t_{n-1} &= t_n - \Delta t
 \end{aligned}
 \tag{3.30}$$

De lo anterior se tiene que el transporte en la dirección  $x$  en los puntos  $x_{I-1}$  y  $x_{I+1}$ , en series de Taylor, se expresa como:

$$U_{I-1} = U_I - \left(\frac{dU}{dx}\right)_I \Delta x + \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_I \frac{(\Delta x)^2}{2!} - \left(\frac{d^3U}{dx^3}\right)_I \frac{(\Delta x)^3}{3!} - \dots \tag{3.31}$$

$$U_{I+1} = U_I + \left(\frac{dU}{dx}\right)_I \Delta x + \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_I \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \left(\frac{d^3U}{dx^3}\right)_I \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots \tag{3.32}$$

La representación del transporte en la dirección  $y$  en los puntos  $y_{J-1}$ ,  $y_{J+1}$  es muy semejante a las expresiones (3.31) y (3.32). De éstas, se obtiene que la primera derivada de  $U$  en el punto  $x_I$  puede tomar las siguientes formas:

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)_I = \frac{U_{I+1} - U_I}{\Delta x} - \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_I \frac{(\Delta x)}{2!} - \left(\frac{d^3U}{dx^3}\right)_I \frac{(\Delta x)^2}{3!} - \dots \tag{3.33}$$

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)_I = \frac{U_I - U_{I-1}}{\Delta x} + \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_I \frac{(\Delta x)}{2!} - \left(\frac{d^3U}{dx^3}\right)_I \frac{(\Delta x)^2}{3!} - \dots \tag{3.34}$$

Al restar de (3.31) la ecuación (3.32), se obtiene una tercera forma de la primera derivada de  $U$  en el punto  $x_i$ :

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)_i = \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2\Delta x} - \left(\frac{d^3U}{dx^3}\right)_i \frac{(\Delta x)^2}{3!} - \dots \quad (3.35)$$

El primer término de la derecha de cada una de las ecuaciones (3.33) a (3.35) son una diferencia finita, análoga a la primera derivada, con un error de truncación de primer, primer y segundo orden respectivamente. A las dos representaciones de la primera derivada con error de truncación de primer orden, se les denomina diferencia adelantada y diferencia atrasada respectivamente; mientras que a la tercera representación, se le denomina diferencia centrada. La mejor aproximación de la primera derivada está dada por las diferencias centradas, ya que la pendiente de la función discretizada en el punto  $x_i$  coincide con la pendiente de la función continua.

De manera similar, al sumar las series (3.31) y (3.32), se obtiene la forma análoga para la segunda derivada:

$$\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_i = \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{(\Delta x)^2} - \left(\frac{d^4U}{dx^4}\right)_i \frac{(\Delta x)^2}{12} - \dots \quad (3.36)$$

El primer término de la derecha de la ecuación anterior, es una diferencia finita análoga a la segunda derivada con un error de truncación de segundo orden.

Así como se ha realizado la discretización en la variable transporte horizontal, se realiza para cada una de las variables involucradas en el sistema de ecuaciones. A este tipo de modelos discretos se les denomina modelos-FD (Jamari y Oser, 1987). En ocasiones, para realizar un compactamiento de las representaciones finitas de las derivadas, las diferencias suelen expresarse mediante los operadores  $\Delta_p^g$ ,  $\nabla_p^g$  y  $\delta_p^g$ , que representan diferencias adelantadas, atrasadas y centradas respectivamente de grado  $g$  en la dirección  $p$ . De modo que, aplicados a  $U$  en la dirección  $x$  queda:

$$\Delta_x U_{I,J} = U_{I+1,J} - U_{I,J} \quad (3.37)$$

$$\nabla_x U_{I,J} = U_{I,J} - U_{I-1,J} \quad (3.38)$$

$$\delta_x U_{I,J} = U_{I+1/2,J} - U_{I-1/2,J} \quad (3.39)$$

y para  $V$  en dirección  $y$ :

$$\Delta_y V_{I,J} = V_{I,J+1} - V_{I,J} \quad (3.40)$$

$$\nabla_y V_{I,J} = V_{I,J} - V_{I,J-1} \quad (3.41)$$

$$\delta_y V_{I,J} = V_{I,J+1/2} - V_{I,J-1/2} \quad (3.42)$$

### 3.2.2 DISCRETIZACION TEMPORAL

La discretización temporal considerada en este trabajo, está diseñada de forma tal que, el incremento de tiempo  $\Delta t$  es dividido en dos sub-incrementos. De hecho entonces, al evolucionar un incremento normal de  $t_n$  a  $t_{n+1}$ , tendrá que pasar por  $t_{n+1/2}$  y por  $t_{n+3/2}$  al pasar de  $t_{n+1}$  a  $t_{n+2}$ . A este esquema de integración se la

llama "Lap frog" (Fig. 3.2)

Las formas aproximadas de las derivadas temporales en diferencias finitas de las ecuaciones (2.111) a (2.113) son realizadas mediante diferencias adelantadas, quedando:

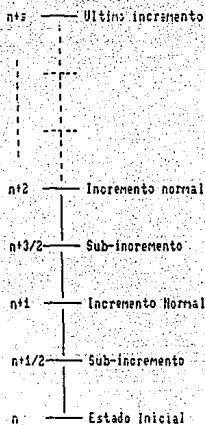


Fig.3.2 Discretización en el tiempo.

a) Evolución de  $t_n \rightarrow t_{n+1/2}$

$$\frac{\partial U}{\partial t} \approx \frac{U^{n+1/2} - U^n}{\Delta t/2} \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} \approx \frac{V^{n+1/2} - V^n}{\Delta t/2} \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} \cong \frac{\eta^{n+1/2} - \eta^n}{\Delta t/2} \quad (3.45)$$

b) Evolución de  $t_{n+1/2} + t_{n+1}$

$$\frac{\partial U}{\partial t} \cong \frac{U^{n+1} - U^{n+1/2}}{\Delta t/2} \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} \cong \frac{V^{n+1} - V^{n+1/2}}{\Delta t/2} \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} \cong \frac{\eta^{n+1} - \eta^{n+1/2}}{\Delta t/2} \quad (3.48)$$

### 3.2.3 DISCRETIZACION ESPACIAL

La malla espacial que fué utilizada en la discretización de las variables U, V y  $\eta$  es del tipo Arakawa "C", donde U, V y  $\eta$  están distribuidas como se muestra en la figura 3.3. Esta malla es establecida sobre toda la Bahía de Campeche, utilizando para éello, una carta marina en Proyección Mercator. La longitud de la malla hacia el este en minutos geográficos fué de 430' (1' = 1853.25 m) y hacia el norte de 180'. Los incrementos de la malla en las direcciones respectivas es de 5' geográficos con un número total de Q=86 y R=37 respectivamente (Fig. 3.1). Las latitudes medias de la Bahía, hacen suponer que la variación de  $\Delta x$  con la latitud es despreciable, por lo el parámetro de coriolis sobre el área de estudio puede ser muy bien representado en un plano- $\beta$ . Estas características de la malla geográfica, hacen que el área de estudio sea dividida por celdas homogéneas y uniformes  $\Delta x = \Delta y = 5'$ ,

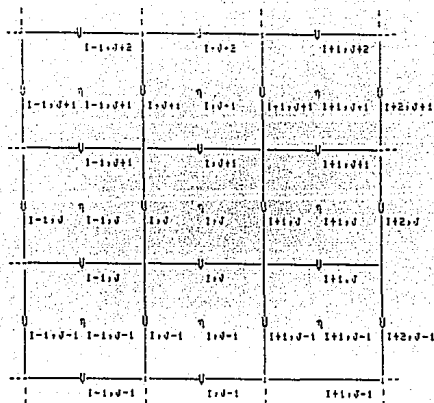


Fig.3.3 Distribución de las variables  $U, V$  y  $\eta$  en una malla del tipo Arakawa "C".

en la que cada una de las posiciones de sus nodos pueden ser representadas por un sistema de coordenadas rectangulares.

Las formas aproximadas de las derivadas espaciales del sistema de ecuaciones, que gobierna los movimientos baroclinicos, son realizadas utilizando los métodos de diferencias adelantadas, atrasadas y centradas, con la excepción de los términos advectivos, los cuales son aproximados mediante diferencias del tipo Upstream (Roache, 1982).

Las derivadas espaciales involucradas en el sistema de ecuaciones (2.111) a (2.113), quedan aproximadas en el pivote  $I, J$  como:



a) Componente en la dirección x

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U}{h} \right) \Big|_{i,j} \cong \frac{1}{2\Delta x} \left[ \left( \frac{U}{h} + \left| \frac{U}{h} \right| \right)_{i,j} \nabla_x U_{i,j} + \left( \frac{U}{h} - \left| \frac{U}{h} \right| \right)_{i,j} \Delta_x U_{i,j} \right] \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{UV}{h} \right) \Big|_{i,j} \cong \frac{1}{2\Delta y} \left[ \left( \frac{V}{h} + \left| \frac{V}{h} \right| \right)_{i,j} \nabla_y U_{i,j} + \left( \frac{V}{h} - \left| \frac{V}{h} \right| \right)_{i,j} \Delta_y U_{i,j} \right] \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_{i,j} \cong \nabla_x \eta_{i,j} / \Delta x \quad (3.51)$$

$$k_H \nabla^2 U \Big|_{i,j} \cong \frac{k_H}{(\Delta x)^2} \delta_x^2 U_{i,j} + \frac{k_H}{(\Delta y)^2} \delta_y^2 U_{i,j} \quad (3.52)$$

b) Componente en la dirección y

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{UV}{h} \right) \Big|_{i,j} \cong \frac{1}{2\Delta x} \left[ \left( \frac{U}{h} + \left| \frac{U}{h} \right| \right)_{i,j} \nabla_x V_{i,j} + \left( \frac{U}{h} - \left| \frac{U}{h} \right| \right)_{i,j} \Delta_x V_{i,j} \right] \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{VV}{h} \right) \Big|_{i,j} \cong \frac{1}{2\Delta y} \left[ \left( \frac{V}{h} + \left| \frac{V}{h} \right| \right)_{i,j} \nabla_y V_{i,j} + \left( \frac{V}{h} - \left| \frac{V}{h} \right| \right)_{i,j} \Delta_y V_{i,j} \right] \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} \Big|_{i,j} \cong \nabla_y \eta_{i,j} / \Delta y \quad (3.55)$$

$$k_H \nabla^2 V|_{I,J} \cong \frac{k_H}{(\Delta x)^2} \delta_x^2 V_{I,J} + \frac{k_H}{(\Delta y)^2} \delta_y^2 V_{I,J} \quad (3.56)$$

c) Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial U}{\partial x}|_{I,J} \cong \Delta_x U_{I,J} / \Delta x \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}|_{I,J} \cong \Delta_y V_{I,J} / \Delta y \quad (3.58)$$

En todas las expresiones anteriores, se han introducido los operadores definidos en la sección 3.2.1.

### 3.3 CALCULO NUMERICO DEL TRANSPORTE Y ANOMALIA DE LA PIGNOCLINA

El cálculo del transporte horizontal ( $\vec{V}$ ) en el área de estudio, con las mallas espacial y temporal consideradas anteriormente, se realizó de la siguiente manera: para el sub-incremento de tiempo  $n + 1/2$ , se calculó el transporte en la dirección y (hacia el norte del área de estudio), mediante un procedimiento explícito. El transporte en la dirección x (hacia el este del área de estudio), en éste mismo sub-incremento, se calculó en forma implícita. Mientras que la variable  $\eta$ , en ese sub-incremento, se calculó usando los valores del transporte en las direcciones x, y calculados en  $n+1/2$  y  $n$  respectivamente. Los cálculos son invertidos en el sub-incremento  $n+1$ , es decir, el cálculo de transporte en la dirección y es realizado en forma implícita y en la dirección x en forma explícita, y la evaluación

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

de  $\eta$  considera los valores de transporte en  $x$  y  $y$  calculados en los incrementos  $n+1/2$  y  $n+1$  respectivamente. Cabe mencionar que el esquema es del tipo ADI, ya que se alternan el método explícito e implícito en cada sub-incremento de tiempo.

### 3.3.1 PRIMER SUB-INCREMENTO TEMPORAL

El cálculo del transporte en la dirección  $y$ , para el sub-incremento  $n+1/2$ , se realizó en forma explícita en términos de variables conocidas en  $n$ , las cuales fueron especificadas por las condiciones iniciales. Su cálculo se realizó mediante la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 v_{I,J}^{n+1/2} = & v_{I,J}^n - \frac{\Delta t}{4\Delta x} \left[ \left( \frac{U}{h} + \left| \frac{U}{h} \right| \right)_{cv}^n \nabla_x v_{I,J}^n + \left( \frac{U}{h} - \left| \frac{U}{h} \right| \right)_{cv}^n \Delta_x v_{I,J}^n \right] \\
 & - \frac{\Delta t}{4\Delta y} \left[ \left( \frac{V}{h} + \left| \frac{V}{h} \right| \right)_{cv}^n \nabla_y v_{I,J}^n + \left( \frac{V}{h} - \left| \frac{V}{h} \right| \right)_{cv}^n \Delta_y v_{I,J}^n \right] - \frac{\Delta t}{2} f_{cv}^n \\
 & - \frac{g' \Delta t}{2\Delta y} h_{cv}^n (\nabla_y \eta_{I,J}^n) + \frac{k_H \Delta t}{2(\Delta x)^2} (\delta_x^2 v_{I,J}^n) + \frac{k_H \Delta t}{2(\Delta y)^2} (\delta_y^2 v_{I,J}^n) + \\
 & \frac{\Delta t}{2\rho} \tau_{z,y} \Big|_{I,J}^n - \frac{\Delta t}{2} \frac{C_d \left| \frac{V_{I,J}^n}{h_{cv}^n} \right| V_{I,J}^n}{(h_{cv}^n)^2}
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

Donde:

$$f = f_o + \beta_o \Delta y \tag{3.60}$$

$$\left( \frac{U}{h} \right)_{cv}^n = \frac{(U_{I,J}^n + U_{I+1,J}^n + U_{I+1,J-1}^n + U_{I,J-1}^n) / 2}{2H_{cv} + \eta_{I,J}^n + \eta_{I,J-1}^n} \tag{3.61}$$

$$\left(\frac{v}{h}\right)_{cv}^n = \frac{v_{l,j}^n}{2h_{cv} + \eta_{i,j}^n + \eta_{i,j-1}^n} \quad (3.62)$$

$$U_{cv}^n = \frac{(U_{i,j}^n + U_{i+1,j}^n + U_{i+1,j-1}^n + U_{i,j-1}^n)}{4} \quad (3.63)$$

Por otro lado, el cálculo del transporte en la dirección  $x$  en el mismo sub-incremento, se realizó en forma implícita mediante la solución algebraica de la siguiente expresión de  $U$ :

$$\begin{aligned} U_{i,j}^{n+1/2} = & U_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{4\Delta x} \left[ \left(\frac{U}{h} + \left|\frac{U}{h}\right|\right)_{cu}^n \nabla_x U_{i,j}^{n+1/2} + \left(\frac{U}{h} - \left|\frac{U}{h}\right|\right)_{cu}^n \Delta_x U_{i,j}^{n+1/2} \right] \\ & - \frac{\Delta t}{4\Delta y} \left[ \left(\frac{v}{h} + \left|\frac{v}{h}\right|\right)_{cu}^n \nabla_y U_{i,j}^n + \left(\frac{v}{h} - \left|\frac{v}{h}\right|\right)_{cu}^n \Delta_y U_{i,j}^n \right] + \frac{\Delta t}{2} \Gamma_{cu}^{n+1/2} \\ & - \frac{g' \Delta t}{2\Delta x} h_{cu}^n (\nabla_x \eta_{i,j}^{n+1/2}) + \frac{k_H \Delta t}{2(\Delta x)^2} (\delta_x^2 U_{i,j}^{n+1/2}) + \frac{k_H \Delta t}{2(\Delta y)^2} (\delta_y^2 U_{i,j}^n) + \\ & \frac{\Delta t}{2\rho \tau_{x,x}} \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{2} \frac{C_d \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{i,j}^{n+1/2}}{(h_{cu}^n)^2} \end{aligned} \quad (3.64)$$

Donde:

$$\left(\frac{U}{h}\right)_{cu}^n = \frac{U_{l,j}^n}{2h + \eta_{i,j}^n + \eta_{i-1,j}^n} \quad (3.65)$$

$$\left(\frac{v}{h}\right)_{cu}^n = \frac{(v_{i,j}^n + v_{i,j+1}^n + v_{i-1,j+1}^n + v_{i-1,j}^n)/2}{2h_{cu} + \eta_{i,j}^n + \eta_{i-1,j}^n} \quad (3.66)$$

$$U_{cu}^{n+1/2} = \frac{(v_{i,j}^{n+1/2} + v_{i-1,j}^{n+1/2} + v_{i-1,j+1}^{n+1/2} + v_{i,j+1}^{n+1/2})}{4} \quad (3.67)$$

El cálculo de la oscilación del espesor de la capa superior en  $n+1/2$  es realizado usando la siguiente expresión:

$$\eta_{I,J}^{n+1/2} = \eta_{I,J}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\Delta_x U_{I,J}^{n+1/2}) - \frac{\Delta t}{2\Delta y} (\Delta_y V_{I,J}^n) \quad (3.68)$$

Como se puede observar de la ecuación anterior, la variación de la capa superior está en función de los valores del transporte horizontal  $V$  y  $U$  en los sub-incrementos  $n$  y  $n+1/2$  respectivamente. El transporte  $V^n$  es conocido de las condiciones de frontera o calculado explícitamente, mientras que  $U^{n+1/2}$  es obtenido al resolver el sistema de ecuaciones lineales generado al incluir (3.68) en (3.64), el cual se expresa como:

$$a_{I,J} U_{I-1/2,J}^{n+1/2} + b_{I,J} U_{I,J}^{n+1/2} + c_{I,J} U_{I+1/2,J}^{n+1/2} = d_{I,J} \quad (3.69)$$

Donde los coeficientes de las incógnitas están dados por:

$$a_{I,J} = -\frac{\Delta t}{4\Delta x} \left( \frac{U}{h} + \left| \frac{U}{h} \right| \right)_{CU}^n - \frac{g' \Delta t^2}{4\Delta x^2} h_{CU}^n - \frac{k_H \Delta t}{2(\Delta x)^2} \quad (3.70)$$

$$b_{I,J} = 1 + \frac{\Delta t}{4\Delta x} \left[ \left( \frac{U}{h} + \left| \frac{U}{h} \right| \right)_{CU}^n - \left( \frac{U}{h} - \left| \frac{U}{h} \right| \right)_{CU}^n \right] + \frac{g' \Delta t^2}{2\Delta x^2} h_{CU}^n + \frac{k_H \Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t C_d |V_{CU}^n|}{2(h_{CU}^n)^2} \quad (3.71)$$

$$c_{I,J} = \frac{\Delta t}{4\Delta x} \left( \frac{U}{h} - \left| \frac{U}{h} \right| \right)_{CU}^n - \frac{g' \Delta t^2}{4\Delta x^2} h_{CU}^n - \frac{k_H \Delta t}{2(\Delta x)^2} \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned}
 d_{1,j} = & \frac{U_{1,j}^n}{\Delta y} - \frac{\Delta t}{2\Delta y} \left[ \left( \frac{V}{h} + \left| \frac{V}{h} \right| \right)_{cu}^n \nabla_y U_{1,j}^n + \left( \frac{V}{h} - \left| \frac{V}{h} \right| \right)_{cu}^n \Delta_y U_{1,j}^n \right] + \\
 & \frac{\Delta t}{2} r_{cu}^{n+1/2} - \frac{g' \Delta t}{2\Delta x} h_{cu}^n \left[ \nabla_x \eta_{1,j}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta y} \nabla_x (V_{1,j+1}^n - V_{1,j}^n) \right] + \\
 & \frac{k_H \Delta t}{2(\Delta y)^2} (\delta_y^2 U_{1,j}^n) + \frac{\Delta t}{2\rho} \tau_{\xi, x} \Big|_{1,j}^n
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

En general, para el instante  $n+1/2$ , la expresión (3.69) representa un sistema de  $Q-1$  ecuaciones lineales simultáneas para cada una de las  $R+1$  filas de la malla. De esto se deduce que, para obtener el transporte  $U$  en todo el dominio computacional, es necesario resolver en total  $(Q-1)(R+1)$  ecuaciones lineales.

La representación matricial del sistema dado por la ecuación (3.69) puede escribirse como:

$$A[U]^{n+1/2} = [D]^{n+1/2} \tag{3.74}$$

donde las matrices  $A$ ,  $U$  y  $D$  están definidas por:

$$A = \begin{bmatrix}
 a_{2,j} & b_{2,j} & c_{2,j} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & a_{3,j} & b_{3,j} & c_{3,j} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & a_{4,j} & b_{4,j} & c_{4,j} & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & a_{q-2,j} & b_{q-2,j} & c_{q-2,j} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & a_{q-1,j} & b_{q-1,j} & c_{q-1,j} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{q,j} & b_{q,j} & c_{q,j}
 \end{bmatrix} \tag{3.75}$$

$$U = \begin{bmatrix} U_{1,J} \\ U_{2,J} \\ U_{3,J} \\ U_{4,J} \\ \vdots \\ U_{Q-1,J} \\ U_{Q,J} \\ U_{Q+1,J} \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

$$D = \begin{bmatrix} d_{2,J} \\ d_{3,J} \\ d_{4,J} \\ d_{5,J} \\ \vdots \\ d_{Q-2,J} \\ d_{Q-1,J} \\ d_{Q,J} \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

Como se puede observar, la matriz banda (3.75) tiene un ancho de 3 y además, se puede probar que es estrictamente dominante diagonalmente y por ende no-singular; ya que satisface la siguiente relación:

$$|b_{I,J}| > |a_{I,J}| + |c_{I,J}| \quad (3.78)$$

para cada  $I = 2, \dots, Q$  y  $J = 1, \dots, R+1$ .

Existen diversas técnicas para resolver el sistema de

ecuaciones (3.74). En nuestro caso, fué aplicado el algoritmo para matrices tridiagonales de Thomas (Rosenberg, 1969).

### 3.3.2 SEGUNDO SUB-INCREMENTO TEMPORAL

El cálculo del transporte en la dirección  $x$  para el sub-incremento  $n+1$  se realiza en forma explícita, ya que se calcula dicha variable en términos de variables conocidas en  $n+1/2$ , las cuales han sido calculadas en el primer sub-incremento temporal. Su cálculo se realiza mediante la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 U_{I,J}^{n+1} = & U_{I,J}^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{4\Delta x} \left[ \left( \frac{U}{h} + \left| \frac{U}{h} \right| \right)_{cu}^{n+1/2} \nabla_x U_{I,J}^{n+1/2} + \left( \frac{U}{h} - \right. \right. \\
 & \left. \left. \left| \frac{U}{h} \right| \right)_{cu}^{n+1/2} \Delta_x U_{I,J}^{n+1/2} \right] - \frac{\Delta t}{4\Delta y} \left[ \left( \frac{V}{h} + \left| \frac{V}{h} \right| \right)_{cu}^{n+1/2} \nabla_y U_{I,J}^{n+1/2} + \left( \frac{V}{h} - \right. \right. \\
 & \left. \left. \left| \frac{V}{h} \right| \right)_{cu}^{n+1/2} \Delta_y U_{I,J}^{n+1/2} \right] + \frac{\Delta t}{2} \tau_{cu}^{n+1/2} - \frac{g' \Delta t}{2\Delta x} h_{cu}^{n+1/2} (\nabla_x \eta_{I,J}^{n+1/2}) + \\
 & \frac{k_{H\Delta t}}{2(\Delta x)^2} (\delta_x^2 U_{I,J}^{n+1/2}) + \frac{k_{H\Delta t}}{2(\Delta y)^2} (\delta_y^2 U_{I,J}^{n+1/2}) + \frac{\Delta t}{2\rho} \tau_{\xi,x} \Big|_{I,J}^n - \\
 & \frac{\Delta t}{2} \frac{C_d \left| \frac{V}{cu} \right|^{n+1/2} \left| \frac{U}{cu} \right|^{n+1/2}}{\left( h_{cu}^{n+1/2} \right)^2} \quad (3.78)
 \end{aligned}$$

Para el cálculo implícito del transporte en la dirección  $y$ , se utiliza la siguiente expresión:

$$V_{I,J}^{n+1} = V_{I,J}^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{4\Delta x} \left[ \left( \frac{U}{h} + \left| \frac{U}{h} \right| \right)_{cv}^{n+1/2} \nabla_x V_{I,J}^{n+1/2} + \left( \frac{U}{h} - \right. \right.$$



$$\begin{aligned}
& \left| \frac{U}{h} \right|_{cv}^{n+1/2} \Delta_x V_{I,J}^{n+1/2} \Big] - \frac{\Delta t}{4\Delta y} \left[ \left( \frac{V}{h} + \left| \frac{V}{h} \right|_{cv}^{n+1/2} \nabla_y V_{I,J}^{n+1} + \left( \frac{V}{h} - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left| \frac{V}{h} \right|_{cv}^{n+1/2} \Delta_y V_{I,J}^{n+1} \right) - \frac{\Delta t}{2} r U_{cv}^{n+1} - \frac{g' \Delta t}{2\Delta y} h_{cv}^{n+1/2} (\nabla_y \eta_{I,J}^{n+1}) + \right. \\
& \left. \frac{k_{H\Delta t}}{2(\Delta x)^2} (\sigma_x^2 V_{I,J}^{n+1/2}) + \frac{k_{H\Delta t}}{2(\Delta y)^2} (\sigma_y^2 V_{I,J}^{n+1}) + \frac{\Delta t}{2\rho} \tau_{\xi,y} \Big|_{I,J}^{n+1/2} - \right. \\
& \left. \frac{\Delta t}{2} \frac{D \left| \frac{V}{cv} \right|_{I,J}^{n+1/2} \left| \frac{V}{I,J} \right|^{n+1}}{(h_{cv}^{n+1/2})^2} \right] \quad (3.80)
\end{aligned}$$

De forma similar al primer sub-incremento, la anomalía en la capa superficial es calculada de la siguiente ecuación:

$$\eta_{I,J}^{n+1} = \eta_{I,J}^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\Delta_x U_{I,J}^{n+1/2}) - \frac{\Delta t}{2\Delta y} (\Delta_y V_{I,J}^{n+1}) \quad (3.81)$$

Como en el primer sub-incremento, antes de resolver para  $\eta$  se debe resolver para  $U$  y  $V$  en dicho sub-incremento. Esto se realiza al incluir (3.81) en (3.80), lo cual genera un sistema de ecuaciones lineales para  $V$  semejante al sistema (3.69), de la forma:

$$a'_{I,J} V_{I,J-1}^{n+1} + b'_{I,J} V_{I,J}^{n+1} + c'_{I,J} V_{I,J+1}^{n+1} = d'_{I,J} \quad (3.82)$$

De forma semejante a (3.69), la expresión (3.82) representa un sistema de  $R-1$  ecuaciones lineales simultáneas para cada una de las  $Q+1$  columnas de la malla en el instante  $n+1$ . Al igual que en

el primer sub-incremento,  $(Q+1)(R-1)$  es el número total de ecuaciones para  $V$  que deben ser resueltas en éste sub-incremento.

La técnica utilizada para resolver el sistema lineal (3.82), es la misma que se usó en el cálculo implícito de  $U$  en  $n+1/2$ .

## CAPITULO IV: CONSISTENCIA, ESTABILIDAD Y CONVERGENCIA DEL MODELO NUMERICO

Esta parte del trabajo está relacionada con las condiciones que se deben cumplir para asegurar que la solución numérica del sistema de ecuaciones hidrodinámicas discretas, sea una solución real y precisa del sistema de ecuaciones hidrodinámicas continuas. Dichas condiciones, están asociadas con la consistencia, la estabilidad y la convergencia del modelo numérico. Estos tres problemas diferentes pero interrelacionados, son trascendentales para una óptima solución del sistema de ecuaciones diferenciales.

### 4.1 ERROR TOTAL EN EL MODELO NUMERICO

#### 4.1.1 ERROR DE TRUNCACION

El error de truncación está definido por la diferencia local entre la aproximación en diferencias finitas del sistema de ecuaciones diferenciales y su representación en series de Taylor de sus variables continuas en cada punto de la malla (O'Brien, 1985). Para la obtención del error de truncación, se supondrá que las soluciones exactas (sin error de redondeo) del sistema de ecuaciones discretas están representadas por  $\tilde{U}$ ,  $\tilde{V}$  y  $\tilde{\eta}$  y las soluciones exactas (solución analítica) del sistema de ecuaciones diferenciales continuas por  $U^*$ ,  $V^*$  y  $\eta^*$ . Con el fin de obtener el error local de truncación, se introducen los operadores  $L_x$ ,  $L_y$  y  $L_\eta$  con los cuales, las ecuaciones (2.111) a (2.113) se expresan como:

$$L_x(U_{i,j}^{*n}, V_{i,j}^{*n}, \eta_{i,j}^{*n}) = 0 \quad (4.1)$$

$$L_y(U_{i,j}^{*n}, V_{i,j}^{*n}, \eta_{i,j}^{*n}) = 0 \quad (4.2)$$

$$L_\eta(U_{i,j}^{*n}, V_{i,j}^{*n}, \eta_{i,j}^{*n}) = 0 \quad (4.3)$$

Cada uno de los términos de las ecuaciones (2.111) a (2.113) fué representado por series de Taylor infinitas atrasadas, adelantadas y centradas. Para obtener el sistema de ecuaciones diferenciales aproximado a un sistema en diferencias finitas, todas las series fueron truncadas (sección 3.2.1) y el sistema de ecuaciones aproximadas, en diferencias finitas, puede ser representado por:

$$F_x(\tilde{U}_{i,j}^n, \tilde{V}_{i,j}^n, \tilde{\eta}_{i,j}^n) = 0 \quad (4.4)$$

$$F_y(\tilde{U}_{i,j}^n, \tilde{V}_{i,j}^n, \tilde{\eta}_{i,j}^n) = 0 \quad (4.5)$$

$$F_\eta(\tilde{U}_{i,j}^n, \tilde{V}_{i,j}^n, \tilde{\eta}_{i,j}^n) = 0 \quad (4.6)$$

donde F es un operador que actúa para generar el nuevo sistema aproximado.

Las cantidades, por lo que las soluciones exactas  $U^*$ ,  $V^*$  y  $\eta^*$  no satisfacen el sistema de ecuaciones en diferencias (4.4) a (4.6) en los puntos  $(I, J, n)$ , están dadas por:

$$\epsilon_{x I,J}^n = F_x(U_{i,j}^{*n}, V_{i,j}^{*n}, \eta_{i,j}^{*n}) = \left[ \left( \frac{d^2 U^*}{dt^2} \right)_{I,J}^n \frac{(\Delta t/2)}{2!} + \left( \frac{d^3 U^*}{dt^3} \right)_{I,J}^n \frac{(\Delta t/2)^2}{3!} + \dots \right] + \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{U^*}{h} + \left| \frac{U^*}{\eta} \right| \right)_{I,J}^n \left( \frac{d^2 U^*}{dx^2} \right)_{I,J}^{n+1/2} \frac{(\Delta x)}{2!} \right]$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} \left( \frac{U^*}{h} + \left| \frac{U^*}{h} \right| \right)_{i,j}^n \left( \frac{d^2 U^*}{dx^2} \right)_{i,j}^{n+1/2} \frac{(\Delta x)^2}{3!} + \dots \Big] + \\
& \left[ - \frac{1}{2} \left( \frac{U^*}{h} - \left| \frac{U^*}{h} \right| \right)_{i,j}^n \left( \frac{d^2 U^*}{dx^2} \right)_{i,j}^{n+1/2} \frac{(\Delta x)^2}{2!} \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \left( \frac{U^*}{h} - \left| \frac{U^*}{h} \right| \right)_{i,j}^n \left( \frac{d^3 U^*}{dx^3} \right)_{i,j}^{n+1/2} \frac{(\Delta x)^2}{3!} + \dots \right] \\
& + \left[ + \frac{1}{2} \left( \frac{U^*}{h} + \left| \frac{U^*}{h} \right| \right)_{i,j}^n \left( \frac{d^2 V^*}{dy^2} \right)_{i,j}^n \frac{(\Delta y)}{2!} \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \left( \frac{U^*}{h} + \left| \frac{U^*}{h} \right| \right)_{i,j}^n \left( \frac{d^3 V^*}{dy^3} \right)_{i,j}^n \frac{(\Delta y)^2}{3!} + \dots \right] \\
& + \left[ - \frac{1}{2} \left( \frac{U^*}{h} - \left| \frac{U^*}{h} \right| \right)_{i,j}^n \left( \frac{d^2 V^*}{dy^2} \right)_{i,j}^n \frac{(\Delta y)}{2!} \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \left( \frac{U^*}{h} - \left| \frac{U^*}{h} \right| \right)_{i,j}^n \left( \frac{d^3 V^*}{dy^3} \right)_{i,j}^n \frac{(\Delta y)^2}{3!} + \dots \right] \\
& + \left[ -g \cdot h \left( \frac{d^2 \eta^*}{dx^2} \right)_{i,j}^{n+1/2} \frac{(\Delta y)}{2!} + g \cdot h \left( \frac{d^3 \eta^*}{dx^3} \right)_{i,j}^{n+1/2} \frac{(\Delta y)^2}{3!} + \dots \right] \\
& + \left[ \left( \frac{d^4 U^*}{dx^4} \right)_{i,j}^{n+1/2} \frac{(\Delta x)^2}{12} + \dots \right] + \left[ \left( \frac{d^4 U^*}{dy^4} \right)_{i,j}^n \frac{(\Delta y)^2}{12} + \dots \right] \quad (4.7)
\end{aligned}$$

$$e_{y,i,j}^n = F_y(U_{i,j}^{*n}, V_{i,j}^{*n}, \eta_{i,j}^{*n}) =$$

$$\left[ \left( \frac{d^2 V^*}{dt^2} \right)_{i,j}^n \frac{(\Delta t/2)}{2!} + \left( \frac{d^3 V^*}{dt^3} \right)_{i,j}^n \frac{(\Delta t/2)^2}{3!} + \dots \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{U^*}{h} + \left| \frac{U^*}{h} \right| \right)_{i,j}^n \left( \frac{d^2 V^*}{dx^2} \right)_{i,j}^n \frac{(\Delta x)^2}{2!} \right. \\
& - \frac{1}{2} \left( \frac{U^*}{h} + \left| \frac{U^*}{h} \right| \right)_{i,j}^n \left( \frac{d^3 V^*}{dx^3} \right)_{i,j}^n \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots \left. \right] \\
& + \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{U^*}{h} - \left| \frac{U^*}{h} \right| \right)_{i,j}^n \left( \frac{d^2 V^*}{dx^2} \right)_{i,j}^n \frac{(\Delta x)^2}{2!} \right. \\
& - \frac{1}{2} \left( \frac{U^*}{h} - \left| \frac{U^*}{h} \right| \right)_{i,j}^n \left( \frac{d^3 V^*}{dx^3} \right)_{i,j}^n \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots \left. \right] \\
& + \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{V^*}{h} + \left| \frac{V^*}{h} \right| \right)_{i,j}^n \left( \frac{d^2 V^*}{dy^2} \right)_{i,j}^n \frac{(\Delta y)^2}{2!} \right. \\
& - \frac{1}{2} \left( \frac{V^*}{h} + \left| \frac{V^*}{h} \right| \right)_{i,j}^n \left( \frac{d^3 V^*}{dy^3} \right)_{i,j}^n \frac{(\Delta y)^3}{3!} + \dots \left. \right] \\
& + \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{V^*}{h} - \left| \frac{V^*}{h} \right| \right)_{i,j}^n \left( \frac{d^2 V^*}{dy^2} \right)_{i,j}^n \frac{(\Delta y)^2}{2!} - \right. \\
& \left. \frac{1}{2} \left( \frac{V^*}{h} - \left| \frac{V^*}{h} \right| \right)_{i,j}^n \left( \frac{d^3 V^*}{dy^3} \right)_{i,j}^n \frac{(\Delta y)^3}{3!} + \dots \right] + \left[ -g \cdot h \left( \frac{d^2 \eta^*}{dy^2} \right)_{i,j}^n \frac{(\Delta y)^2}{2!} \right. \\
& + g \cdot h \left( \frac{d^3 \eta^*}{dy^3} \right)_{i,j}^n \frac{(\Delta y)^3}{3!} + \dots \left. \right] + \left[ \left( \frac{d^4 V^*}{dx^4} \right)_{i,j}^n \frac{(\Delta x)^4}{4!} + \dots \right] \\
& + \left[ \left( \frac{d^4 V^*}{dy^4} \right)_{i,j}^n \frac{(\Delta y)^4}{4!} + \dots \right] \tag{4.8}
\end{aligned}$$

$$e_{\eta}^n = F_{\eta} (U_{i,j}^{*n}, V_{i,j}^{*n}, \eta_{i,j}^{*n}) =$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( \frac{d^2 \eta^*}{dt^2} \right)_{I,J}^n \frac{(\Delta t/2)^n}{2!} + \left( \frac{d^3 \eta^*}{dt^3} \right)_{I,J}^n \frac{(\Delta t/2)^2}{3!} + \dots \right] \\
& + \left[ - \left( \frac{d^2 U^*}{dx^2} \right)_{I,J}^{n+1/2} \frac{(\Delta x)^n}{2!} - \left( \frac{d^3 U^*}{dx^3} \right)_{I,J}^{n+1/2} \frac{(\Delta x)^2}{3!} + \dots \right] \\
& + \left[ - \left( \frac{d^2 V^*}{dy^2} \right)_{I,J}^n \frac{(\Delta y)^n}{2!} - \left( \frac{d^3 V^*}{dy^3} \right)_{I,J}^n \frac{(\Delta y)^2}{3!} + \dots \right] \quad (4.8)
\end{aligned}$$

A las cantidades (4.7) a (4.9), se les denomina error local de truncación, de hecho presenta características vectoriales, ya que se incluye una magnitud para cada una de las componentes del movimiento. Si se suman los errores de truncación en el lado izquierdo de las ecuaciones (4.4) a (4.6) o en el lado derecho de las ecuaciones (3.59), (3.64) y (3.68), las soluciones  $U^*$ ,  $V^*$  y  $\eta^*$  satisfacen perfectamente el sistema en diferencias finitas.

#### 4.1.2 ERROR DE DISCRETIZACION

A las diferencias entre las soluciones exactas  $V^*$ ,  $U^*$ ,  $\eta^*$  de las ecuaciones diferenciales y las respectivas soluciones exactas  $\tilde{V}$ ,  $\tilde{U}$  y  $\tilde{\eta}$  de las ecuaciones discretas, en el mismo punto, se les denomina error de discretización local. De la ecuación (3.59) se obtiene que:

$$2(V_{I,J}^{n+1/2} - V_{I,J}^n) / \Delta t = 2(\tilde{V}_{I,J}^{n+1/2} - \tilde{V}_{I,J}^n) / \Delta t + \epsilon_y |_{I,J}^n \quad (4.10)$$

y el error de discretización en  $(I, J, n+1/2)$  y  $(I, J, n)$  están dados por:

$$E_{y \ I, J}^{n+1/2} = V_{I, J}^{*n+1/2} - \tilde{V}_{I, J}^{n+1/2} \quad \text{y} \quad E_{y \ I, J}^n = V_{I, J}^{*n} - \tilde{V}_{I, J}^n \quad (4.11)$$

y la ecuación (4.10) se transforma en:

$$E_{y \ I, J}^{n+1/2} = E_{y \ I, J}^n + (\Delta t \ \epsilon_{y \ I, J}^n) / 2 \quad (4.12)$$

Y de forma semejante para U y  $\eta$  se tiene:

$$E_{x \ I, J}^{n+1/2} = E_{x \ I, J}^n + (\Delta t \ \epsilon_{x \ I, J}^{n, n+1/2}) / 2 \quad (4.13)$$

$$E_{\eta \ I, J}^{n+1/2} = E_{\eta \ I, J}^n + (\Delta t \ \epsilon_{\eta \ I, J}^{n, n+1/2}) / 2 \quad (4.14)$$

Las ecuaciones anteriores muestran que en general, cuando las diferencias finitas son aplicadas a las variables sin errores de redondeo (producido por las características específicas de la computadora utilizada), el error de discretización está en función de su valor en el nivel de tiempo anterior y de su error de truncación. En el estado inicial, el error de truncación local en el punto  $(I, J, n)$ , es una medida del error local de discretización para el punto  $(I, J, n+1/2)$ . De hecho, el error de discretización puede ser controlado si se controla los segundos términos del lado derecho de las ecuaciones (4.12), (4.13) y (4.14), los cuales dependen no únicamente de  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  y  $\Delta t$ , sino también del número de términos considerados en la serie de Taylo.

De las ecuaciones (4.12), (4.13) y (4.14) se deduce que existen tres formas de disminuir el error de discretización; la



primera se consigue al aumentar el número de términos de la serie, sin embargo, presenta la desventaja de ir aumentando el número de pivotes. La segunda alternativa se basa en disminuir los incrementos  $\Delta x$  y  $\Delta y$  de la malla espacial, por supuesto que esto es limitado, ya que incrementa el número de sus nodos y por tanto el número de ecuaciones a resolver y como consecuencia aumenta el costo computacional. La tercera opción se basa en disminuir únicamente los incrementos  $\Delta t$ ; esto generaría un mayor número de iteraciones, pero mantiene constante el número de pivotes y el número de ecuaciones algebraicas por resolver para la malla espacial en cada sub-nivel. Utilizando esta última opción, se dividió el incremento  $\Delta t$  en dos partes cada uno de  $\Delta t/2$ , como ya se ha mencionado en la sección 3.2.2. Nótese de las ecuaciones (4.12) a (4.14), que de no haber utilizado sub-incrementos  $\Delta t/2$ , el error de discretización habría sido el doble que con el incremento normal  $\Delta t$ .

#### 4.1.3 ERROR DE REDONDEO

Si el error de discretización fuera totalmente controlado, el sistema de ecuaciones algebraicas generado por la discretización tendría una solución convergente a la solución exacta del sistema de ecuaciones diferenciales. Esto sería cierto si fuera posible realizar todos los cálculos con un número infinito de decimales para los valores discretos iniciales. Sin embargo, en la práctica esto es imposible, ya que la aritmética realizada por las computadoras, involucra números con sólo un número finito de

dígitos; teniendo como resultado que muchos cálculos se realicen con representaciones aproximadas de los números verdaderos, llevando cada cálculo su propio error de redondeo (Burden y Faires, 1985), el cual depende de cada computadora (Smith, 1978). Esto trae como consecuencia que la solución obtenida al resolver el sistema de ecuaciones algebraicas, sea una solución numérica  $U, V, \eta$  que difiere de la solución exacta  $U^*, V^*, \eta^*$ . A la diferencia respectiva de éstas en un punto  $(I, J, n)$  de la malla espacio-temporal, se le denomina error de redondeo. Este difiere del error de discretización en el sentido de que no puede tender a cero al hacer la malla espacio-temporal más fina. Al contrario, mallas finas involucran mayor número de operaciones aritméticas y por ende una amplificación del error de redondeo.

El error total en un punto  $(I, J, n+1/2)$  puede ser representado por:

$$V_{I,J}^{*n+1/2} - V_{I,J}^{n+1/2} = (V_{I,J}^{*n+1/2} - \tilde{V}_{I,J}^{n+1/2}) + (\tilde{V}_{I,J}^{n+1/2} - V_{I,J}^{n+1/2}) \quad (4.15)$$

$$U_{I,J}^{*n+1/2} - U_{I,J}^{n+1/2} = (U_{I,J}^{*n+1/2} - \tilde{U}_{I,J}^{n+1/2}) + (\tilde{U}_{I,J}^{n+1/2} - U_{I,J}^{n+1/2}) \quad (4.16)$$

$$\eta_{I,J}^{*n+1/2} - \eta_{I,J}^{n+1/2} = (\eta_{I,J}^{*n+1/2} - \tilde{\eta}_{I,J}^{n+1/2}) + (\tilde{\eta}_{I,J}^{n+1/2} - \eta_{I,J}^{n+1/2}) \quad (4.17)$$

o que es lo mismo

$$V_{I,J}^{*n+1/2} - V_{I,J}^{n+1/2} = E_{y \ I,J}^{n+1/2} + (\tilde{V}_{I,J}^{n+1/2} - V_{I,J}^{n+1/2}) \quad (4.18)$$

$$U_{I,J}^{*n+1/2} - U_{I,J}^{n+1/2} = E_x^{n+1/2} + (\tilde{U}_{I,J}^{n+1/2} - U_{I,J}^{n+1/2}) \quad (4.19)$$

$$\eta_{I,J}^{*n+1/2} - \eta_{I,J}^{n+1/2} = E_\eta^{n+1/2} + (\tilde{\eta}_{I,J}^{n+1/2} - \eta_{I,J}^{n+1/2}) \quad (4.20)$$

El error total cometido al resolver un sistema de ecuaciones diferenciales en un punto  $(I,J,n+1/2)$  de forma numérica, está dado por la suma de los errores de discretización y de redondeo, tal como lo muestran las ecuaciones (4.18) a (4.20). Además, dichas ecuaciones establecen que si los errores de discretización y de redondeo llegan a un límite, a medida que  $n$  se incrementa, entonces también el error total y, por consecuencia, la solución numérica  $V_{I,J}$ ,  $U_{I,J}$  y  $\eta_{I,J}$ , lo hará, ya que la aritmética operacional involucrada entre ellas es la misma. Afortunadamente, el error de redondeo individual introducido por las supercomputadoras son extremadamente pequeños y se ha comprobado mediante estudios numéricos que éstos son más pequeños que los de discretización (Smith, 1978). De modo que, las ecuaciones anteriores pueden aproximarse por:

$$V_{I,J}^{*n+1/2} - V_{I,J}^{n+1/2} \cong E_y^{n+1/2} \quad (4.21)$$

$$U_{I,J}^{*n+1/2} - U_{I,J}^{n+1/2} \cong E_x^{n+1/2} \quad (4.22)$$

$$\eta_{I,J}^{*n+1/2} - \eta_{I,J}^{n+1/2} \cong E_\eta^{n+1/2} \quad (4.23)$$

#### 4.2 CONSISTENCIA

Se dice que el sistema de ecuaciones discretas es consistente, si éstas son equivalentes al sistema de ecuaciones diferenciales continuas en el límite, en el que los incrementos de la malla espacio-temporal  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  y  $\Delta t$  tienden a cero. En caso contrario, se dice que es inconsistente y la solución exacta del sistema discreto es totalmente ajena a la solución real del sistema continuo. Así que, para obtener una solución real del sistema de ecuaciones hidrodinámicas, es necesario que su discretización sea consistente. Sin embargo, únicamente es una condición necesaria pero no suficiente, ya que un sistema discreto de ecuaciones puede ser equivalente al sistema continuo de ecuaciones diferenciales, pero su solución diferir de la solución analítica de éste (Fletcher, 1991).

El análisis de consistencia de una o un sistema discreto de ecuaciones se realiza mediante el análisis del error de truncación, si éste tiende a cero, a medida que los incrementos de la malla espacio-temporal  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  y  $\Delta t$  tienden a cero, se dice que el sistema discreto es consistente o inconsistente en caso contrario (O'Brien, 1986).

De las ecuaciones (4.7) a (4.9) se deduce que el modelo discreto planteado en este trabajo es consistente, ya que el error de truncación tiende a cero a medida que los incrementos de la malla espacio-temporal  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  y  $\Delta t$  tienden a cero.

### 4.3 ESTABILIDAD Y CONVERGENCIA

Se dice que el sistema de ecuaciones discretizadas es estable, si su error total no se incrementa indefinidamente con el incremento de los niveles de tiempo. De ahí que la estabilidad estará basada en la búsqueda de ciertas características de la malla de modo que presente un límite a los errores de discretización y redondeo; ésto se obtiene al encontrar una relación funcional entre  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  y  $\Delta t$ , la cual, dadas las características aritméticas semejantes, es la misma para ambos tipos de errores. Entre otras técnicas, para investigar el límite del error total en un sistema de ecuaciones algebraicas, existe una que usa una serie finita de Fourier para representar las soluciones; en la cual se establece el criterio de Von Neumann. Desafortunadamente, dicho método no considera la no-linealidad, por lo tanto, debe ser usado únicamente para establecer condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad con problemas de valores iniciales lineales con coeficientes constantes. Es decir, establece una muy buena condición de estabilidad únicamente en el interior del dominio computacional (Fletcher, 1991), sin considerar los valores de frontera de carácter no-lineal, o fronteras abiertas, ya que éstas últimas, aún cuando las aproximaciones en diferencias sean estables, pueden introducir modos locales inestables (Miller y Thorpe, 1981). Para problemas más generales en los que se involucran coeficientes variables, no lineales, el método de Von Neumann solamente provee una condición necesaria pero no suficiente para la estabilidad.

El método de Von Neumann consiste en expresar los errores distribuidos en cada nodo de la malla espacial, en un nivel de tiempo  $n$ , mediante una serie finita de Fourier. Definiendo la estabilidad o inestabilidad del algoritmo computacional por el decaimiento o amplificación de los coeficientes de Fourier a medida que se incrementan los niveles de tiempo.

Se sabe que el método de variables separables permite reducir una ecuación diferencial parcial a varias ecuaciones diferenciales ordinarias, aplicando este hecho, la solución particular para el error puede ser expresada como:

$$E_{i,j}^n = X(I\Delta x)Y(J\Delta y)T(n\Delta t) \quad (4.24)$$

Donde cada una de las funciones  $X(I\Delta x)$ ,  $Y(J\Delta y)$  y  $T(n\Delta t)$  son resultado de las tres ecuaciones diferenciales ordinarias, las cuales, como es sabido, pueden ser expresadas en función de senos y cosenos o en forma compleja como:

$$X(I\Delta x) = \sum_{m_1=1}^{Q+1} C_{m_1} e^{i[k_x I\Delta x]} \quad (4.25)$$

$$Y(J\Delta y) = \sum_{m_2=1}^{R+1} C_{m_2} e^{i[k_y J\Delta y]} \quad (4.26)$$

$$T(n\Delta t) = \sum_{m_3=0}^S C_{m_3} e^{i[\omega_{o,m_3} n\Delta t]} \quad (4.27)$$

donde  $K_x = m_1 \pi / (Q+1)\Delta x$  y  $K_y = m_2 \pi / (R+1)\Delta y$

A la componente senusoidal de frecuencia  $\omega_{m_3} = m_3 \omega_0$  se le denomina  $m_3$ -ésima armónica de la función periódica. La primera armónica comúnmente se conoce como la componente fundamental o frecuencia angular fundamental  $\omega_0 = 2\pi/T$ . Los coeficientes  $C_{m_1}$ ,  $C_{m_2}$  y  $C_{m_3}$  son constantes que para un punto (I, J) de la malla pueden ser calculados de las condiciones de frontera y de forma similar  $C_{m_3}$  puede ser calculado del estado inicial.

Considerando las ecuaciones anteriores, la ecuación (4.24) se expresa como:

$$E_{I,J}^n = \sum_{m_1=1}^{Q+1} \sum_{m_2=1}^{R+1} \sum_{m_3=0}^S C_{m_1, m_2, m_3} e^{i[k_x I \Delta x + k_y J \Delta y + \omega_{m_3} n \Delta t]} \quad (4.28)$$

Donde nuevamente  $C_{m_1, m_2, m_3}$  en un punto (I, J, n) sigue siendo una constante calculable y si se considera que la ecuación anterior es solución de una ecuación lineal, por el principio de superposición, se obtiene que:

$$E_{I,J}^n = C_{m_1, m_2, m_3} e^{i[k_x I \Delta x + k_y J \Delta y + \omega_{m_3} n \Delta t]} \quad (4.29)$$

Por otro lado, en el estado inicial, en cualquier punto de la malla existen de antemano errores de entrada independientes entre cada punto. Estos errores son puramente de redondeo, ya que los

errores de discretización empiezan a aparecer en el momento de aproximar el sistema diferencial continuo. De ahí que el error en el estado inicial sea expresado como:

$$E_{I,J}^0 = C_{m_1, m_2, m_3} e^{i[I\theta_1 + J\theta_2]} \quad (4.30)$$

Donde  $\theta_1 = k_x \Delta x$  y  $\theta_2 = k_y \Delta y$ , la ecuación (4.29) queda como:

$$E_{I,J}^n = E_{I,J}^0 e^{i[\omega_{m_3} n \Delta t]} \quad (4.31)$$

En la ecuación anterior se muestra la forma en que se propaga el error a medida que se incrementan los niveles de integración temporal. Este, como se muestra, está en términos del error inicial. La aritmética involucrada en la propagación del error es la misma que la involucrada en la propagación de las soluciones numéricas. De hecho entonces, si las propagaciones de los errores llegan a un límite, implicará también un límite en las soluciones numéricas.

De ahora en adelante, por facilidad matemática, se considerará a  $n$  como el nivel inicial y  $n+s/2$  será la representación de los sub-incrementos; de hecho entonces,  $s = 1$  representa el primer sub-incremento,  $s = 2$  representará el primer incremento normal, y así para los siguientes valores de  $s$  ( $1 \leq s \leq 2S$ ). Todo lo anterior muestra que las soluciones numéricas pueden tomar la siguiente forma:



$$U_{I,J}^{n+s/2} = U_{I,J}^n e^{i\omega_{m_s} (n+s/2)\Delta t} \quad (4.32)$$

$$V_{I,J}^{n+s/2} = V_{I,J}^n e^{i\omega_{m_s} (n+s/2)\Delta t} \quad (4.33)$$

$$\eta_{I,J}^{n+s/2} = \eta_{I,J}^n e^{i\omega_{m_s} (n+s/2)\Delta t} \quad (4.34)$$

En el estado inicial  $e^{i\omega_{m_s} n\Delta t} = 1$  y las tres expresiones anteriores se escriben como:

$$U_{I,J}^{n+s/2} = U_{I,J}^n e^{i\omega_{m_s} s\Delta t/2} \quad (4.35)$$

$$V_{I,J}^{n+s/2} = V_{I,J}^n e^{i\omega_{m_s} s\Delta t/2} \quad (4.36)$$

$$\eta_{I,J}^{n+s/2} = \eta_{I,J}^n e^{i\omega_{m_s} s\Delta t/2} \quad (4.37)$$

Si se define  $\gamma = e^{i\omega_{m_s} \Delta t/2}$ , las ecuaciones (4.35) a (4.37) toman la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} V \\ U \\ \eta \end{bmatrix}_{I,J}^{n+s/2} = \begin{bmatrix} V \\ U \\ \eta \end{bmatrix}_{I,J}^n \gamma^s \quad (4.38)$$

La expresión matricial anterior muestra que, al evolucionar un sub-incremento en tiempo, el error o las variables se ven amplificadas por el factor  $\gamma^s$  con respecto al valor inicial en el tiempo  $n$ . Dicho factor es de gran importancia en lo que a estabilidad se refiere. Con el fin de analizarlo, se representa a

la sucesión de vectores  $\vec{x}_{I,J}^{(n+s/2)}$  en  $R^3$  como:

$$\vec{x}_{I,J}^{(n+s/2)} = (V_{I,J}^{(n+s/2)}, U_{I,J}^{(n+s/2)}, \eta_{I,J}^{(n+s/2)})^{trans} \quad (4.39)$$

Incluyendo (4.38) en la última ecuación, se tiene:

$$\vec{x}_{I,J}^{(n+s/2)} = (V_{I,J}^n \gamma^s, U_{I,J}^n \gamma^s, \eta_{I,J}^n \gamma^s)^{trans} \quad (4.40)$$

Como se puede observar, en el límite en que  $s \rightarrow \infty$ , en general la solución  $\vec{x}_{I,J}^{(n+s/2)}$  tiende a infinito. Esta tendencia, sólo puede ser evitada si  $\gamma$  está definida entre  $-1$  y  $1$ , es decir  $|\gamma| \leq 1$ . Dicha restricción de  $\gamma$  es la condición necesaria de Von Neumann para la estabilidad numérica, los valores que no la cumplan hacen que la sucesión de vectores tienda a infinito y el sistema presenta una inestabilidad numérica.

Considerando únicamente los términos lineales en las ecuaciones (2.111) a (2.113) y centrándolas en  $V$ , en  $U$  y en  $\eta$  respectivamente, se tiene que para el primer sub-incremento  $s = 1$ , dichas ecuaciones toman la forma:

$$\begin{aligned} V_{I,J}^{n+1/2} = & V_{I,J}^n - \frac{g' \Delta t}{2\Delta y} h_{CV}^n (\eta_{I,J+1/2} - \eta_{I,J-1/2})^n + \\ & \frac{k H \Delta t}{2(\Delta x)^2} (V_{I+1,J} - 2V_{I,J} + V_{I-1,J})^n + \frac{k H \Delta t}{2(\Delta y)^2} (V_{I,J+1} - 2V_{I,J} + \\ & V_{I,J-1})^n \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned}
 U_{I,J}^{n+1/2} = & U_{I,J}^n - \frac{g' \Delta t}{2 \Delta x} h_{cu}^n (\eta_{I+1/2,J} - \eta_{I-1/2,J})^{n+1/2} + \\
 & \frac{k_{H\Delta t}}{2(\Delta x)^2} (U_{I+1,J} - 2U_{I,J} + U_{I-1,J})^{n+1/2} + \frac{k_{H\Delta t}}{2(\Delta y)^2} (U_{I,J+1} - 2U_{I,J} \\
 & + U_{I,J-1})^n
 \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned}
 \eta_{I,J}^{n+1/2} = & \eta_{I,J}^n - \frac{\Delta t}{2 \Delta x} (U_{I+1/2,J} - U_{I-1/2,J})^{n+1/2} - \\
 & \frac{\Delta t}{2 \Delta y} (V_{I,J+1/2} - V_{I,J-1/2})^n
 \end{aligned} \quad (4.43)$$

Incluyendo la representación (4.38) en las ecuaciones (4.41) a (4.43) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \gamma U_{I,J}^n = & V_{I,J}^n - \frac{g' \Delta t}{2 \Delta y} h_{cu}^n (e^{i\theta_2/2} - e^{-i\theta_2/2}) \eta_{I,J}^n + \\
 & \frac{k_{H\Delta t}}{2(\Delta x)^2} (e^{i\theta_1} - 2 + e^{-i\theta_1}) V_{I,J}^n + \frac{k_{H\Delta t}}{2(\Delta y)^2} (e^{i\theta_2} - 2 + e^{-i\theta_2}) U_{I,J}^n
 \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned}
 \gamma U_{I,J}^n = & U_{I,J}^n - \frac{g' \Delta t}{2 \Delta x} h_{cu}^n (e^{i\theta_1/2} - e^{-i\theta_1/2}) \eta_{I,J}^{n+1/2} + \\
 & \frac{k_{H\Delta t}}{2(\Delta x)^2} (e^{i\theta_1} - 2 + e^{-i\theta_1}) U_{I,J}^{n+1/2} + \frac{k_{H\Delta t}}{2(\Delta y)^2} (e^{i\theta_2} - 2 + e^{-i\theta_2}) U_{I,J}^n
 \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\gamma \eta_{I,J}^n = \eta_{I,J}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (e^{i\theta_1/2} - e^{-i\theta_1/2}) U_{I,J}^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{2\Delta y} (e^{i\theta_2/2} - e^{-i\theta_2/2}) V_{I,J}^n \quad (4.46)$$

Las ecuaciones anteriores toman la siguiente forma:

$$\gamma U_{I,J}^n = U_{I,J}^n - 2ia_1 \alpha_1 \gamma \eta_{I,J}^n + \beta_1 \gamma U_{I,J}^n + \beta_2 U_{I,J}^n \quad (4.47)$$

$$\gamma V_{I,J}^n = V_{I,J}^n - 2ia_2 \alpha_2 \eta_{I,J}^n + \beta_1 V_{I,J}^n + \beta_2 V_{I,J}^n \quad (4.48)$$

$$\gamma \eta_{I,J}^n = \eta_{I,J}^n - 2ic_1 \alpha_1 \gamma U_{I,J}^n - 2ic_2 \alpha_2 V_{I,J}^n \quad (4.49)$$

Donde

$$a_1 = \frac{g' \Delta t}{2\Delta x} h_{cu} \quad (4.50)$$

$$a_2 = \frac{g' \Delta t}{2\Delta y} h_{cv} \quad (4.51)$$

$$b_1 = \frac{k}{2\Delta x^2} \frac{H\Delta t}{2} \quad (4.52)$$

$$b_2 = \frac{k}{2\Delta y^2} \frac{H\Delta t}{2} \quad (4.53)$$

$$c_1 = \frac{\Delta t}{2\Delta x} \quad (4.54)$$

$$c_2 = \frac{\Delta t}{2\Delta y} \quad (4.55)$$

$$\alpha_1 = \text{sen}(\theta_1/2) \quad (4.56)$$

$$\alpha_2 = \text{sen}(\theta_2/2) \quad (4.57)$$

$$\beta_1 = 2b_1 (\cos\theta_1 - 1) \quad (4.58)$$

$$\beta_2 = 2b_2 (\cos\theta_2 - 1) \quad (4.59)$$

En forma matricial, las ecuaciones (4.47) a (4.49) se

expresan como:

$$\begin{bmatrix} \gamma(1-\beta_1)-(1+\beta_2) & 0 & 2ia_1\alpha_1\gamma \\ 0 & (\gamma-1)-(\beta_1+\beta_2) & 2ia_2\alpha_2 \\ 2ic_1\alpha_1\gamma & 2ic_2\alpha_2 & \gamma-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

La matriz del lado izquierdo involucra al factor amplificador  $\gamma$ , el cual limita la amplificación de las variables y el error únicamente cuando  $|\gamma| \leq 1$ . En este intervalo de  $\gamma$ , como ya se ha mencionado, el sistema deberá por consecuencia ser estable.

Las soluciones no triviales para  $U$ ,  $V$  y  $\eta$  en el estado inicial existen, si y sólo si, el determinante de los coeficientes es cero. De dicha condición se obtiene un polinomio de tercer grado para  $\gamma$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & (\gamma(1-\beta_1)-(1+\beta_2))[(\gamma-1)-(\beta_1+\beta_2)] + 4a_2c_2\alpha_2^2 + \\ & 4a_1c_1\alpha_1^2\gamma^2[(\gamma-1)-(\beta_1+\beta_2)] = 0 \end{aligned} \quad (4.61)$$

Es común resolver con facilidad un polinomio de tercer grado con coeficientes simples, sin embargo en este caso particular, sus coeficientes representan funciones, por lo que se opta por un método al absurdo, es decir, en lugar de resolver para  $\gamma$  y aplicar la condición de Von Neumann, se parte de la suposición de que

existe un valor de  $\gamma$  para el cual la estabilidad es condicional. Este hecho, restringe a los coeficientes del polinomio (4.61) a cumplir necesariamente alguna condición. Con este fin, se analizan tres casos extremos y críticos:

Caso 1  $\gamma = -1$

Para este caso, el polinomio (4.61) queda de la siguiente forma:

$$(-2+\beta_1-\beta_2)(4+2(\beta_1+\beta_2)+4a_2c_2\alpha_2^2)-4a_1c_1\alpha_1^2[2+(\beta_1+\beta_2)]=0 \quad (4.62)$$

Necesariamente se deben cumplir las siguientes relaciones:

$$4+2(\beta_1+\beta_2)+4a_2c_2\alpha_2^2=0 \quad (4.63)$$

y

$$2+(\beta_1+\beta_2)=0 \quad (4.64)$$

Para que la ecuación (4.63) sea cierta, la suma de los dos primeros términos tienen que ser menores o igual a cero, ya que el último término es siempre positivo o cero, de ahí que:

$$4+2(\beta_1+\beta_2) \leq 0 \quad (4.65)$$

Esto conduce a la siguiente restricción para  $\Delta t$ :

$$\Delta t \leq -1/\left(\frac{k_H}{2\Delta x^2}(\cos\theta_1-1) + \frac{k_H}{2\Delta y^2}(\cos\theta_2-1)\right) \quad (4.66)$$

De forma semejante, de la ecuación (4.64) se tiene que cumplir la siguiente relación:

$$(\beta_1 + \beta_2) = -2 \quad (4.67)$$

Esta última ecuación también sugiere una restricción para  $\Delta t$  de la forma:

$$\Delta t = -1 / \left( \frac{k_H}{2\Delta x^2} (\cos\theta_1 - 1) + \frac{k_H}{2\Delta y^2} (\cos\theta_2 - 1) \right) \quad (4.68)$$

Esta restricción está incluida en la restricción más general dada por la ecuación (4.66).

De todo lo anterior, podemos concluir que, para  $\gamma = -1$ , los coeficientes del polinomio (4.62) deben cumplir necesariamente la restricción (4.66).

Para la longitud de onda mínima de observarse en la malla espacial ( $\lambda_1 = 2\Delta x$  y  $\lambda_2 = 2\Delta y$ ), de las relaciones  $\theta_1 = k_1\Delta x$ ,  $\theta_2 = k_2\Delta y$  y de la ecuación (4.66), se obtiene:

$$\Delta t \leq 1 / \left( \frac{k_H}{\Delta x^2} + \frac{k_H}{\Delta y^2} \right) \quad (4.69)$$

Y más aún, cuando la malla es uniforme ( $\Delta x = \Delta y$ ), esta última relación se reduce a:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2k_H} \quad (4.70)$$

Esta ecuación establece una restricción para los incrementos de tiempo, en función del coeficiente de viscosidad turbulenta horizontal y tamaño de celda de malla.

Caso  $\gamma=0$

Para este caso, el polinomio (4.61) toma la siguiente forma:

$$(-1-\beta_2)([1+(\beta_1+\beta_2)]+4a_2c_2\alpha_2^2) = 0 \quad (4.71)$$

Para que (4.71) se cumpla, se tienen las siguientes condiciones:

$$-1-\beta_2 = 0 \quad (4.72)$$

ó bien

$$1+(\beta_1+\beta_2)+4a_2c_2\alpha_2^2 = 0 \quad (4.73)$$

De la ecuación (4.72) se deduce la siguiente función entre  $\Delta t$  y  $\Delta y$ :

$$-\frac{k_H \Delta t}{\Delta y^2} (\cos \theta_2 - 1) = 1 \quad (4.74)$$

La relación anterior presenta una condición de estabilidad



limitada únicamente a una dimensión.

Por otro lado, los dos primeros términos de la izquierda de la ecuación (4.73) tendrán que ser menor o igual a cero para sumarse con el último término que siempre es positivo o cero. Esto se escribe como:

$$1 + \beta_1 + \beta_2 \leq 0 \quad (4.75)$$

Esta condición conduce a la siguiente restricción para  $\Delta t$ :

$$\Delta t \leq -1 / \left( \frac{k_H}{\Delta x^2} (\cos\theta_1 - 1) + \frac{k_H}{\Delta y^2} (\cos\theta_2 - 1) \right) \quad (4.76)$$

La restricción de  $\Delta t$  más general, para el caso  $\gamma = 0$ , está dada por la ecuación anterior y la ecuación (4.74) es sólo un caso particular restringido al caso unidimensional. Para el caso de longitud de onda mínima observable en la malla espacial uniforme ( $\lambda_1 = 2\Delta x$  y  $\lambda_2 = 2\Delta y$ ), se obtiene de la ecuación (4.76) la siguiente expresión:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{4k_H} \quad (4.77)$$

Nótese la diferencia entre la restricción de  $\Delta t$  para  $\gamma = -1$  y  $\gamma = 0$ . Los incrementos del segundo caso son  $1/2$  más pequeños que los del primero.

Caso  $\gamma = 1$ :

Para este caso, el polinomio (4.61) queda reducido a la siguiente expresión:

$$-(\beta_1 + \beta_2)(4a_2 c_2 \alpha_2^2) - 4a_1 c_1 \alpha_1^2 (\beta_1 + \beta_2) = 0 \quad (4.78)$$

En esta última expresión, se debe cumplir necesariamente la siguiente condición:

$$\beta_1 + \beta_2 = 0 \quad (4.79)$$

Esta última relación establece estabilidad incondicional, es decir, no establece restricción alguna en los incrementos de tiempo y espacio. Por supuesto que esta flexibilidad en el valor de los incrementos  $\Delta t$ ,  $\Delta x$  y  $\Delta y$ , para  $\gamma = 1$ , sólo es cierta en el límite en que  $\Delta t \rightarrow 0$ . En general, en la práctica  $\Delta t$  siempre es diferente de cero y necesariamente deberá estar restringido al intervalo que satisface las desigualdades dadas por las ecuaciones (4.70) y (4.77), el cual es:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{4k_H} \quad (4.80)$$

Esta última condición para  $\Delta t$  establece la estabilidad del modelo numérico desarrollado en éste trabajo. Dicha relación

sugiere, que cuando la malla espacial ha sido establecida de antemano, variar el  $\Delta t$  para lograr que se cumpla dicha relación. En ocasiones, existe la necesidad de variar también el coeficiente de viscosidad turbulenta horizontal, por supuesto que la viscosidad final deberá ser coherente con la física del fluido y con las características numéricas.

Se ha mostrado que el modelo numérico establecido para la Bahía de Campeche es consistente y condicionalmente estable (ecuación 4.80) esto hace que, con las restricciones establecidas, las soluciones numéricas sean convergentes a las analíticas en un punto (Teorema de equivalencia de Lax).

## CAPITULO V: RESULTADOS Y DISCUSIONES

En este capítulo se muestran los resultados de los diferentes experimentos realizados en la Bahía de Campeche. Estos cubrieron las estaciones de invierno y verano de 1987 y verano de 1988. La simulación de la circulación dentro del área de integración, se analizó primeramente al ser inducida únicamente por el intercambio de masa a través de FA. Posteriormente, se simuló la circulación inducida únicamente por esfuerzos típicos del viento, los cuales fueron considerados uniformes; del norte y del sureste para invierno y veranos respectivamente. Finalmente, se simuló la circulación generada por el efecto conjunto de ambos mecanismos, viento y transporte impuesto en FA. En todos los experimentos realizados, se partió del reposo y se impuso la pycnoclina uniforme a 150 y 80 m de profundidad para invierno y veranos. La viscosidad turbulenta usada en todos los experimentos fué de  $800 \text{ m}^2/\text{s}$ , con un paso de malla de 5 minutos, lo cual, en base al criterio usado para la estabilidad numérica, permitió un paso de integración de 2000 s. La estabilidad estadística del modelo se analizó mediante la evolución de la energía potencial, cinética y total.

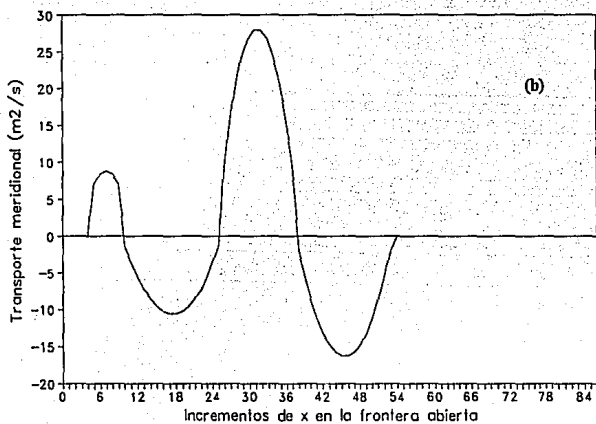
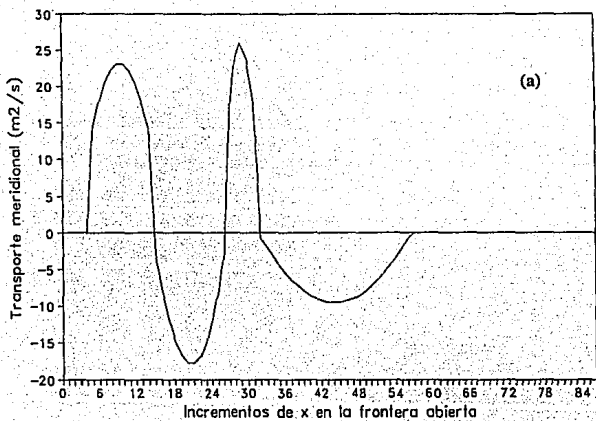
La energía potencial por unidad de área causada por el primer modo baroclínico fué calculada por  $E_p = (\rho g' \eta^2) / 2$ , la cual depende básicamente de la anomalía de la pycnoclina. Por otro lado, ya que la energía cinética depende de la velocidad de la corriente en la capa superficial, ésta fué estimada por unidad de área de la siguiente relación  $E_c = \rho h (u^2 + v^2) / 2$ . Cuando el modelo inicia con

las características propias de cada experimento, la energía aumenta bruscamente y a medida que la solución evoluciona, la energía presenta oscilaciones tendiendo hacia la horizontalidad, indicando con ésto que se ha obtenido la solución estacionaria.

### 5.1 CIRCULACION INDUCIDA POR TRANSPORTE EN FA

Con el fin de obtener la circulación inducida sólo por el intercambio de masa en FA, se realizaron tres experimentos, para los cuales en el estado inicial ( $t=0$ ), las variables desconocidas ( $U$ ,  $V$  y  $\eta$ ) son cero en el interior del dominio; en FA se especificó el transporte meridional constante, el cual es mostrado en la figura 5.1.

El transporte en FA muestra diferencias no solamente entre invierno y verano, sino también entre un verano y otro, principalmente en cuanto a la extensión de las zonas de flujos hacia el norte y hacia el sur. En invierno de 1987, en el lado oeste se observó una región de 105 km con flujo hacia el norte con un transporte máximo de  $23 \text{ m}^2/\text{s}$  (velocidad de 15 cm/s), una región similar de flujo hacia el sur con  $17.5 \text{ m}^2/\text{s}$  de transporte máximo (velocidad de 12 cm/s), seguida por una zona de 56 km de ancho con un transporte máximo hacia el norte de  $26 \text{ m}^2/\text{s}$  (velocidad de 17 cm/s) y finalmente una ancha zona de 235 km de flujo hacia el sur con  $9 \text{ m}^2/\text{s}$  de transporte máximo (6 cm/s de velocidad) como se muestra en la figura 5.1a. En los veranos también se presentan cuatro zonas de flujo alternado con diferentes extensiones. El verano de 1987 presentó una estrecha zona de 56 km con flujo



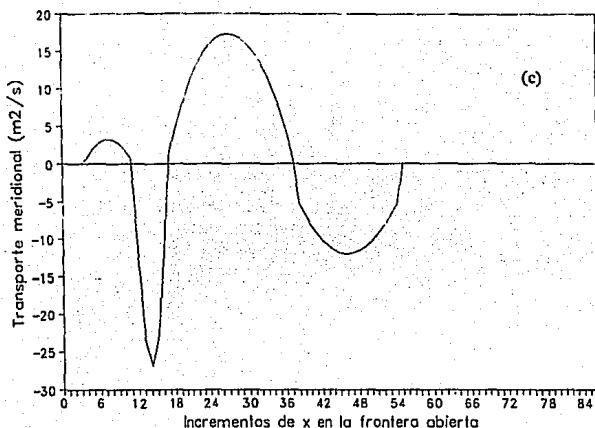


Fig. 5.1 Transporte a través del paralelo 21° N para (a) Invierno de 1987, (b) Verano de 1987 y (c) Verano de 1988.

máximo de  $8 \text{ m}^2/\text{s}$  de transporte (velocidad de  $10 \text{ cm/s}$ ) hacia el norte, seguida de una región de  $130 \text{ km}$  con transporte horizontal hacia el sur con valor máximo de  $11 \text{ m}^2/\text{s}$  (velocidad de  $14 \text{ cm/s}$ ), una tercera zona de flujo hacia el norte con transporte máximo de  $28 \text{ m}^2/\text{s}$  (velocidad de  $35 \text{ cm/s}$ ) con una extensión de  $120 \text{ km}$ , terminando con un flujo hacia el sur de  $16 \text{ m}^2/\text{s}$  y con extensión de  $148 \text{ km}$  (Fig. 5.1b). En verano de 1988, se observan las cuatro zonas de  $74$ ,  $46$ ,  $185$  y  $158 \text{ km}$  de extensión respectivamente (Fig. 5.1c) con flujos alternados iniciando con transporte hacia el norte, cercano a la costa de Veracruz, con valores máximos de  $4$ ,  $26$ ,  $17$  y  $12 \text{ m}^2/\text{s}$  respectivamente con velocidades correspondientes a  $5$ ,  $32$ ,

21 y 15 cm/s. Cabe señalar que en las épocas estudiadas, la máxima velocidad se encontró en los veranos, siendo ésta de aproximadamente 35 cm/s. Mientras que en invierno, la máxima velocidad es apenas de 17 cm/s.

Para el primer experimento de invierno de 1987, la solución estacionaria se obtuvo a las 3000 iteraciones (Fig.5.2a). La influencia energética del transporte, se vió reflejada de forma significativa en la anomalía de la pycnoclina (Fig.5.2b) y en los campos de transporte y velocidad horizontal (Fig.5.3). La pycnoclina presentó dos hundimientos localizados sobre el paralelo 21°N, aproximadamente a 120 y 280 km de la costa oeste con circulación de carácter anticiclónico. Adyacente a esta circulación, al sureste, aproximadamente en 19° 50' N y 93° 45' W se presentó un ligero afloramiento de la pycnoclina (de escasos metros) con una circulación relativamente más débil y de carácter ciclónica. A este primer experimento, se le anexó una prueba con el fin de analizar el efecto de la viscosidad turbulenta sobre la solución numérica, es decir analizar la diferencia en la solución con viscosidad constante y variable, utilizando por un lado, una viscosidad turbulenta constante de 800 m<sup>2</sup>/s (Fig.5.2a) y por otro lado una viscosidad mayor con valor de 10000 m<sup>2</sup>/s, la cual disminuye conforme la solución evoluciona, tomando finalmente el valor del primer caso. Los resultados muestran que en el segundo caso (Fig.5.4a), la energía tiende más rápidamente hacia la horizontalidad, indicando que la solución estacionaria se obtuvo en aproximadamente 2000 iteraciones. Sin embargo, tanto la



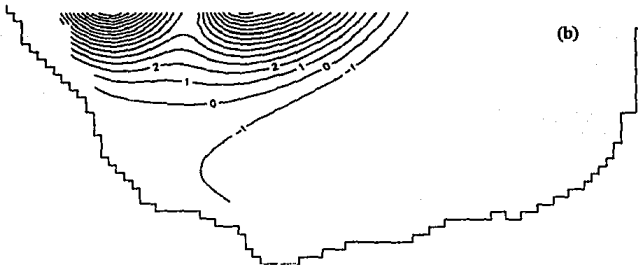
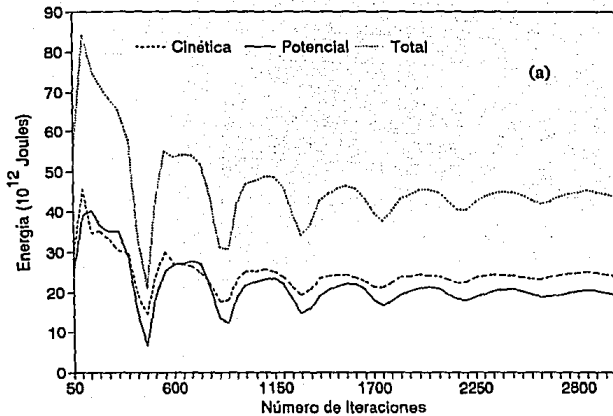
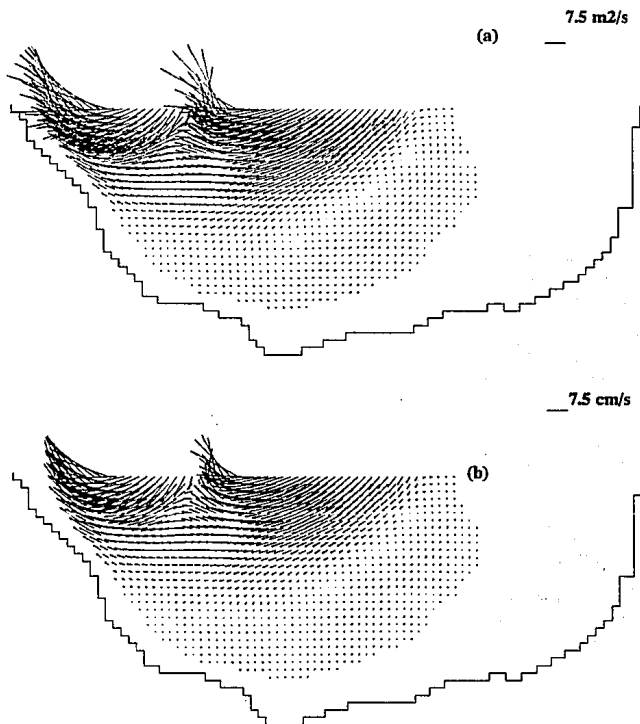
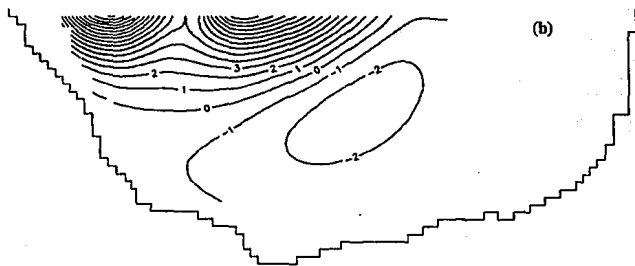
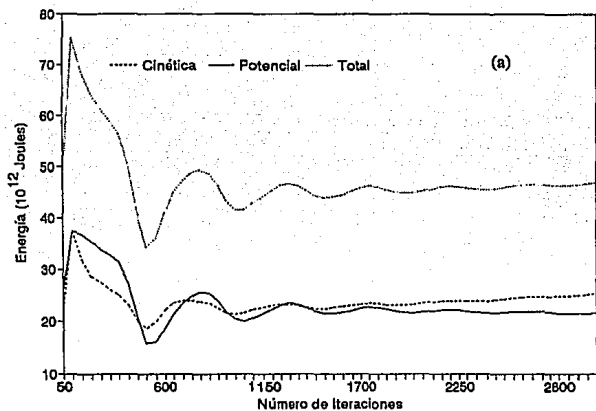


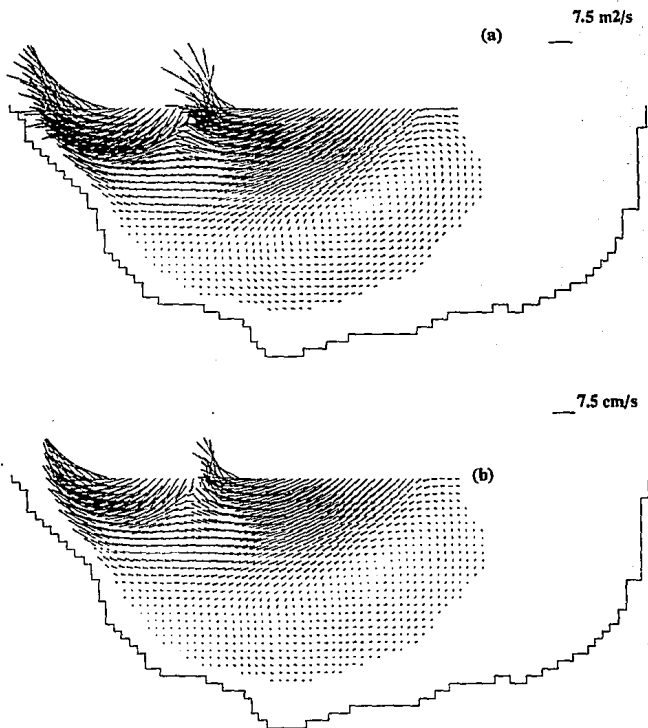
Fig.5.2 Invierno de 1987, simulado con transporte a través del paralelo 21° N (a) Evolución de energía, (b) Anomalia de la pincloclina (m)



**Fig.5.3** Invierno de 1987, simulado con transporte a través del paralelo  $21^\circ \text{ N}$  (a) Transporte, (b) Velocidad.



**Fig.5.4** Invierno de 1987, simulado con transporte a través del paralelo 21° N y viscosidad variable. (a) Evolución de energía, (b) Anomalia de la pícnocline (m)



**Fig.5.5** Invierno de 1987, simulado con transporte a través del paralelo  $21^\circ \text{ N}$  y viscosidad variable. Transporte, (b) Velocidad.

anomalía de la pycnoclina (Fig. 5.4b) como los campos de transporte y velocidad (Fig. 5.5), presentaron prácticamente el mismo comportamiento que cuando se usó viscosidad constante. Lo anterior permite iniciar con una viscosidad mayor para llegar más rápidamente a la estabilidad estadística, siempre y cuando las iteraciones finales se realicen con la misma viscosidad física.

El segundo experimento fué realizado para el verano de 1987, en el cual, la influencia del transporte sobre FA indujo, a diferencia del invierno de 1987, cuatro puntos críticos en la anomalía de la pycnoclina (Fig. 5.6b) con un hundimiento de 7m cerca de la costa oeste alternando hacia el este con un afloramiento de la pycnoclina hasta de 13 m seguida de una zona de hundimiento de 25 m, sobre los cuales se presentó una circulación alternada siendo anticiclónica en la parte más costera, ciclónica y anticiclónica respectivamente (Fig. 5.7). Estas estructuras dinámicas se presentaron principalmente en el noroeste de la Bahía, mientras que en el sureste, aproximadamente en  $19^{\circ} 58' N$  y  $93^{\circ} 37' W$  frente al Banco de Campeche, se localizó una clara circulación ciclónica; estructura presentada en invierno del mismo año, sólo que en verano ésta es de mayor intensidad.

El tercer experimento realizado, usando sólo transporte en FA, fué para verano de 1988. El comportamiento del sistema es muy similar a su homólogo del año anterior, sobre todo en la localización del giro ciclónico cerca de  $19^{\circ} 57' N$  y  $93^{\circ} 20' W$ . Sin embargo, el giro anticiclónico costero que se había presentado en el verano anterior, es desplazado aproximadamente 30 km al

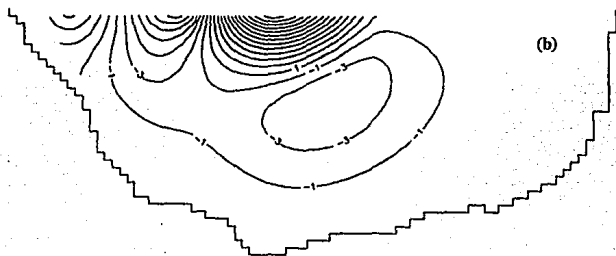
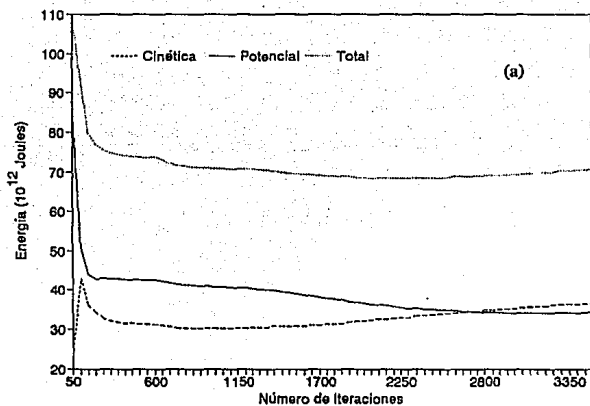


Fig.5.6 Verano de 1987, simulado con transporte a través del paralelo 21° N .  
 (a) Evolución de energía, (b) Anomalía de la piconclina (m).

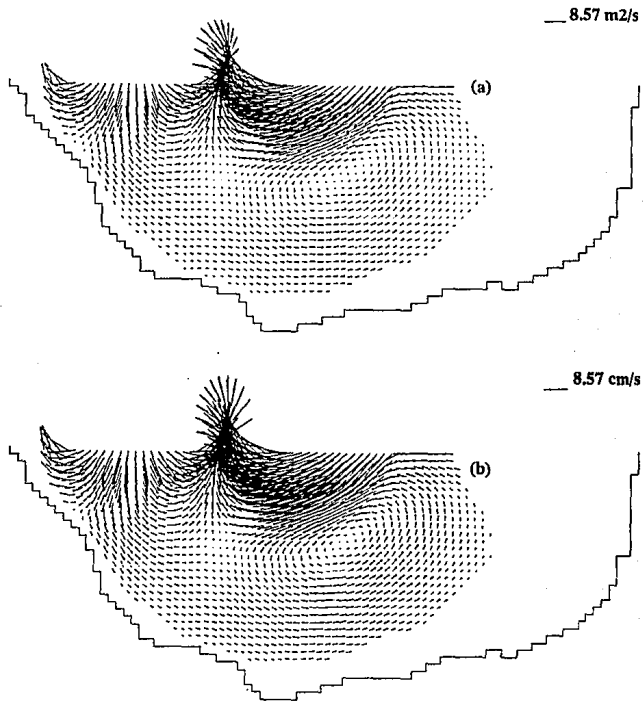


Fig. 5.7 Verano de 1987, simulado con transporte a través del paralelo 21° N. (a), Transporte, (b) Velocidad.

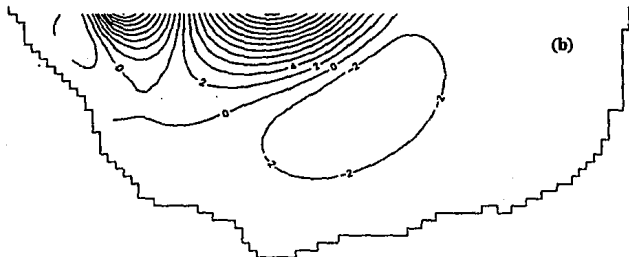
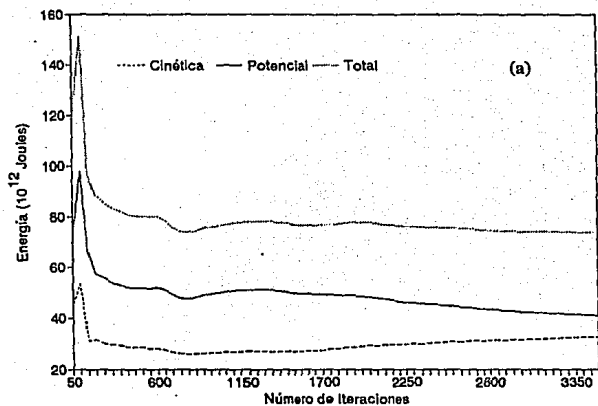


Fig.5.8 Verano de 1988, simulado con transporte a través del paralelo 21° N. (a) Evolución de energía, (b) Anomalia de la pycnoclina (m).



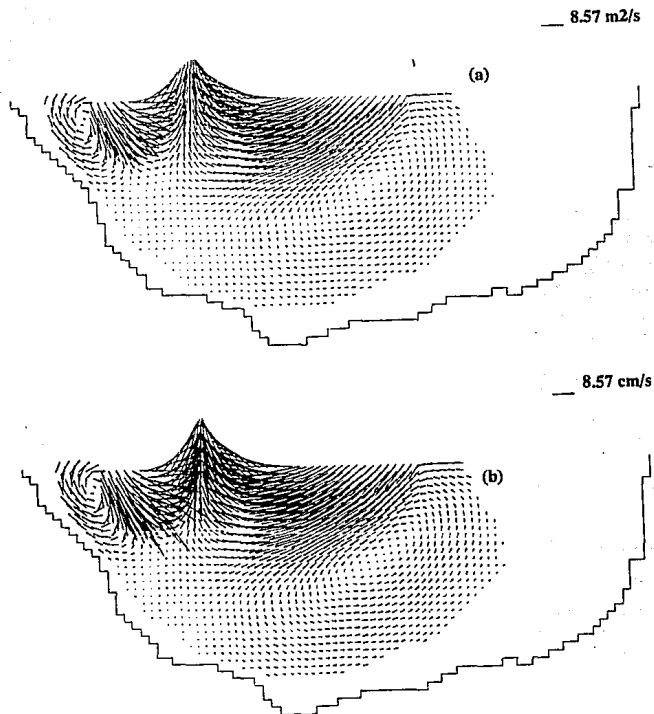


Fig.5.9 Verano de 1988, simulado con transporte a través del paralelo 21° N. (a) Transporte, (b) Velocidad.

sureste, quedando frente a la desembocadura del río Cazonés. Las otras dos estructuras sobre el paralelo  $21^{\circ}$  N son ligeramente desplazadas hacia el oeste (Fig. 5.8b).

Es notoria la permanencia de una estructura ciclónica en la parte sureste, frente a la plataforma continental de Campeche. Dicha estructura fue detectada tanto en invierno (Fig. 5.3) como en los veranos simulados (Fig. 5.7 y Fig. 5.9). Sin embargo, fue más intensa en veranos que invierno. La tabla 1 muestra, para el estado estacionario, los ascensos y descensos máximos que sufrió la pycnoclina al ser alterada por intercambio de masa a través de FA para las épocas analizadas.

Tabla 1  
Valores extremos en la anomalía de la pycnoclina con transporte a través del paralelo  $21^{\circ}$  N

Epoca	Descenso max. (m)	Ascenso max. (m)
Invierno (1987)	15.83	1.75
Verano (1987)	25.98	13.33
Verano (1988)	24.15	18.06

## 5.2 CIRCULACION INDUCIDA POR ESFUERZO DE VIENTO

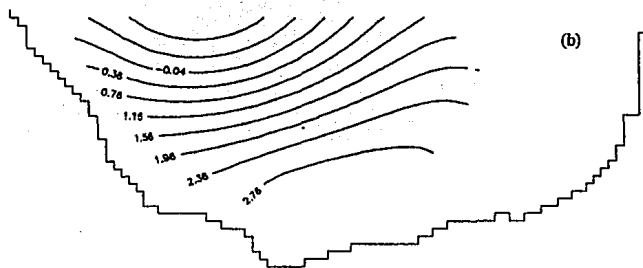
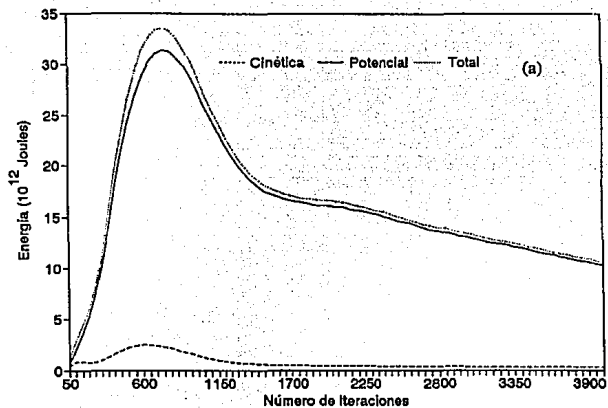
Con el fin de determinar los patrones de circulación inducidos a la capa activa, por el esfuerzo de viento, se realizaron las simulaciones para invierno y verano. De acuerdo a la literatura, en el primer caso se impuso un esfuerzo de viento del norte con rapidez promedio de 6.6 m/s y en el segundo caso, un esfuerzo de viento del sureste con rapidez promedio de 6.1 m/s. En ambos casos, el forzamiento fue considerado constante y uniforme

sobre el dominio de integración.

Los resultados para invierno (Fig.5.10a) mostraron menor energización en la dinámica y un amortiguamiento en las oscilaciones de la energía comparada con las presentes en el caso simulado con transporte a través de FA. La solución estacionaria muestra dos inflexiones en la anomalía de la pycnoclina, la primera localizada sobre el paralelo  $21^{\circ}$  N aproximadamente a 222 km de la costa oeste con una elevación y la segunda en el sureste, cerca de la plataforma continental de Veracruz y Tabasco, con un hundimiento (Fig.5.10b). El movimiento de las aguas que rodea a la primera inflexión es de carácter ciclónico, mientras que el de la segunda es anticiclónico (Fig.5.11).

En verano con vientos del sureste (Fig.5.12a), al igual que en el invierno, las oscilaciones de la energía sufrieron un amortiguamiento comparadas con las generadas por el transporte en FA. Además, el esfuerzo establecido en dicho verano provocó una elevación de la pycnoclina en el sureste y un hundimiento en el noroeste de la Bahía (Fig.5.12b). Dominando una circulación anticiclónica en casi toda el área (Fig.5.13).

Los resultados de las simulaciones de invierno y verano con esfuerzo de viento contrastaron con los obtenidos para las mismas épocas con intercambio de masa en FA; ya que los esfuerzos de los vientos establecidos transmiten menor energía que el intercambio de transporte. Este hecho es reflejado en la magnitud y amortiguamiento de las oscilaciones de la energía de la cuenca y su rápida estacionaridad.



**Fig.5.10** Invierno simulado con viento promedio del norte. (a) Evolución de energía, (b) Anomalia de la piconclina (m).

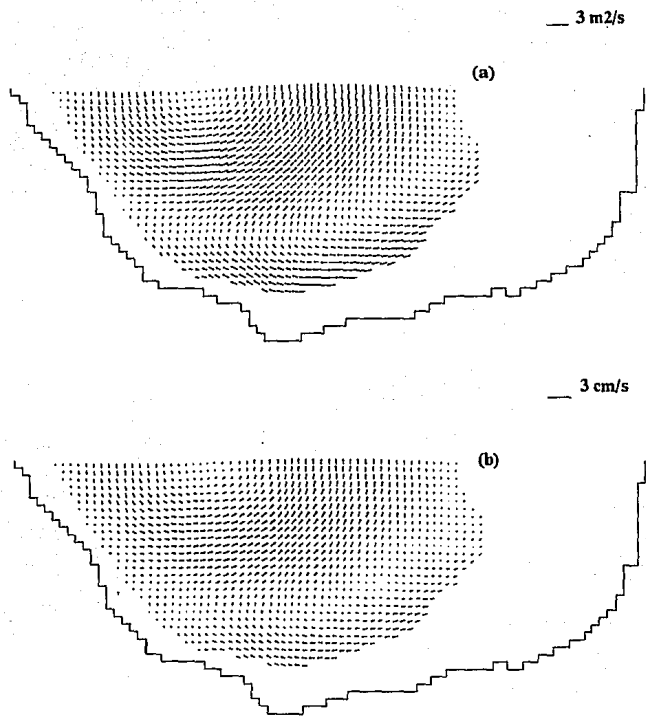


Fig.5.11 Invierno simulado con viento promedio del norte. (a) Transporte, (b) Velocidad

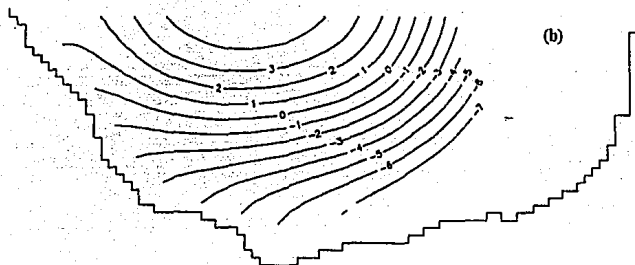
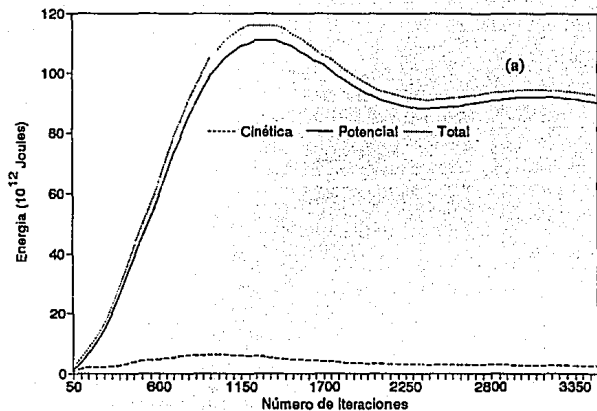
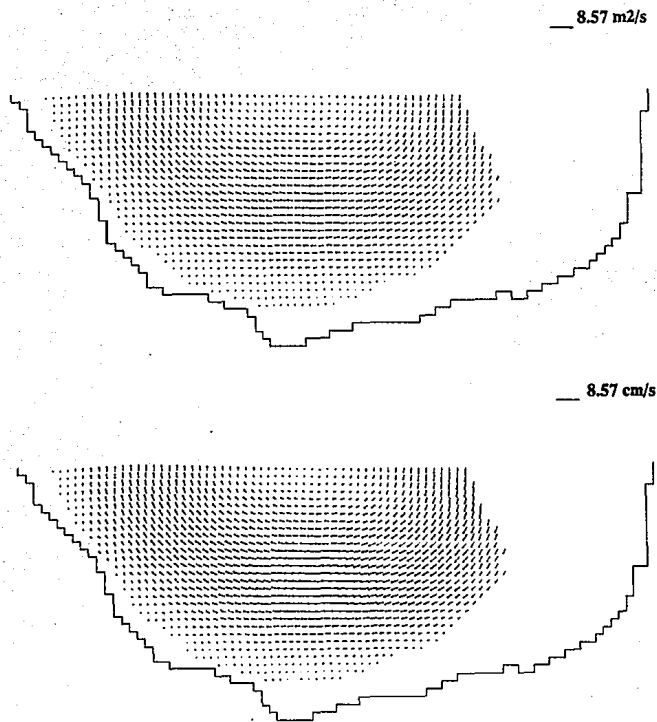


Fig.5.12 Verano simulado con viento promedio del sureste. (a) Evolución de energía, (b) Anomalia de la pycnoclina (m).



**Fig.5.13 Verano simulado con viento promedio del sureste. (a) Transporte, (b) Velocidad.**

La tabla 2 presenta, los descensos y ascensos máximos de la picnoclina para el estado estacionario.

Tabla 2  
Valores extremos en la anomalía de la picnoclina con vientos del norte (N) y sureste (SE)

Viento	Descenso max. (m)	Ascenso max. (m)
norte promedio	3.09	1.24
sureste promedio	4.92	8.1

### 5.3 CIRCULACION INDUCIDA POR TRANSPORTE EN FA Y ESFUERZO DE VIENTO

En esta parte del trabajo se presentan las simulaciones para invierno y verano de 1987 y verano de 1988 con ambos mecanismos, es decir, se impuso tanto el esfuerzo de viento típico constante y uniforme sobre toda el área de integración como el intercambio de masa en FA.

El primer experimento (Fig.5.14), efectuado con viento promedio del norte y transporte en FA, fué realizado para invierno de 1987. Las características del transporte meridional y del esfuerzo de viento son las mismas que se usaron en forma separada. Los resultados muestran patrones de circulación similares a los obtenidos únicamente con transporte a través de FA (Fig.5.5). Sin embargo, la circulación ciclónica localizada frente al Banco de Campeche es ligeramente intensificada por el viento.

La segunda simulación realizada fué para el verano de 1987. A este experimento numérico se le impuso viento promedio del sureste y flujo a través de FA, con las características usadas en forma



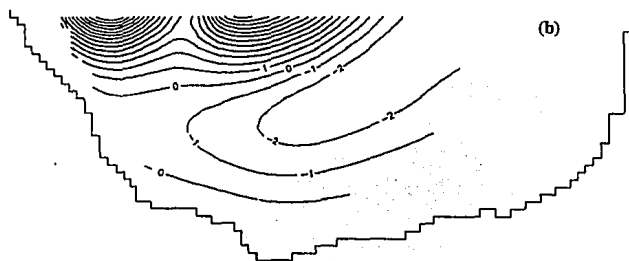
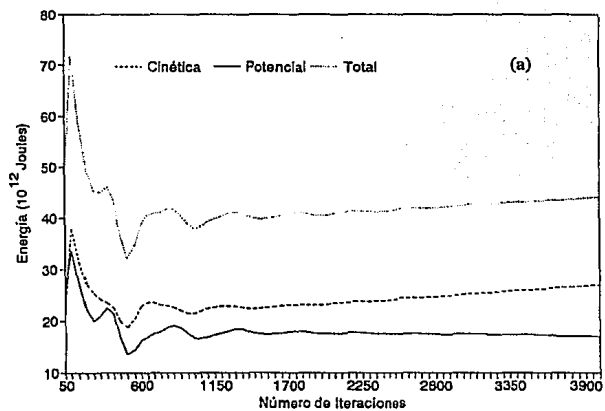
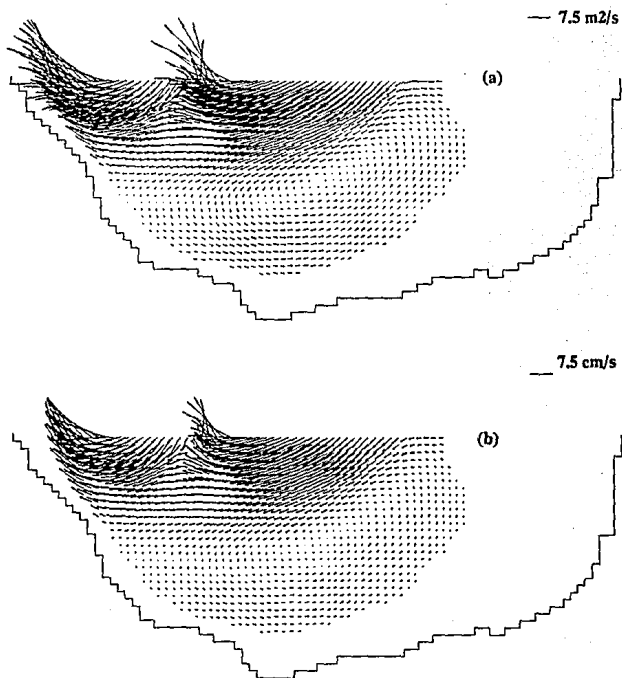


Fig.5.14 Invierno de 1987, simulado con transporte a través del paralelo 21° N y Viento promedio del norte. (a) Evolución de energía, (b) Anomalia de la pycnoclina.



**Fig.5.15 Invierno de 1987, simulado con transporte a través del paralelo 21° N y Viento promedio del norte. (a) Transporte, (b) Velocidad**

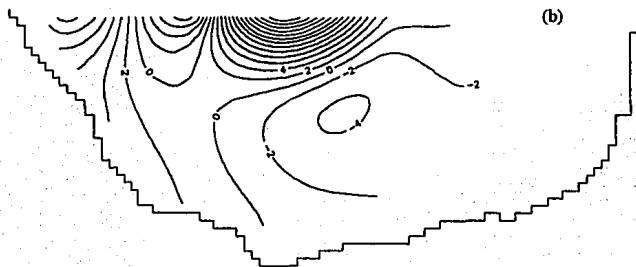
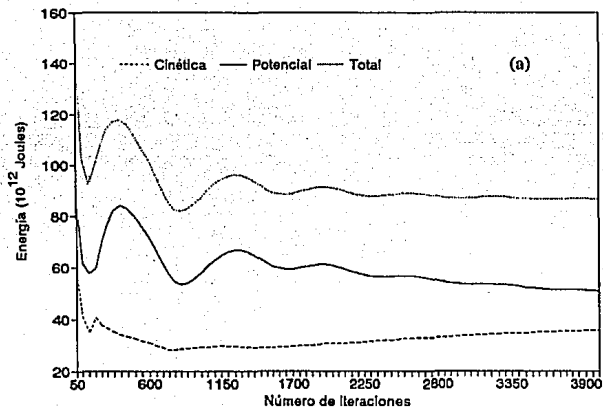


Fig.5.16 Verano de 1987, simulado con transporte a través del paralelo 21° N y viento promedio del sureste. (a) Evolución de energía, (b) Anomalia de la pincoclina (m).

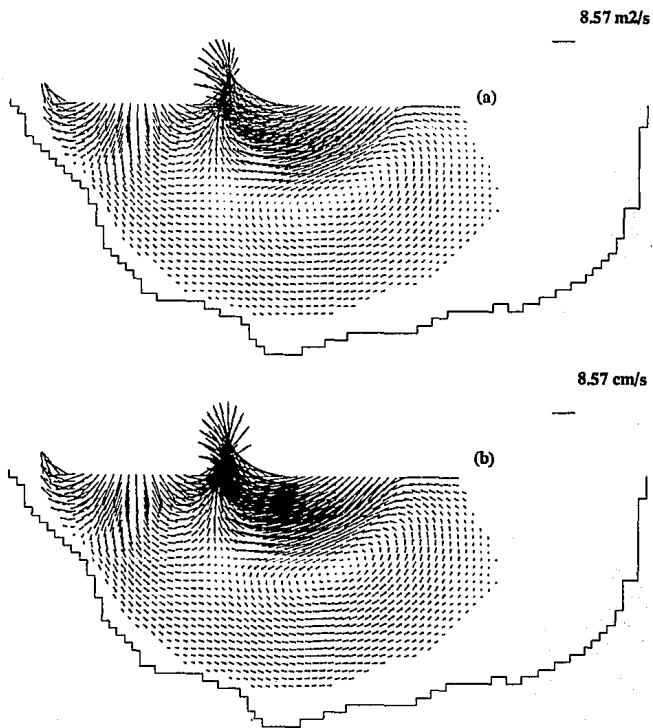
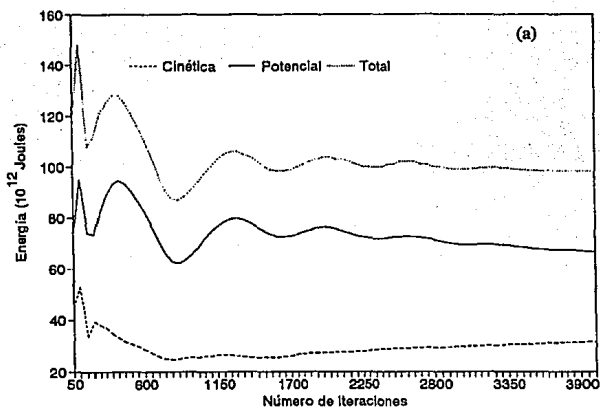


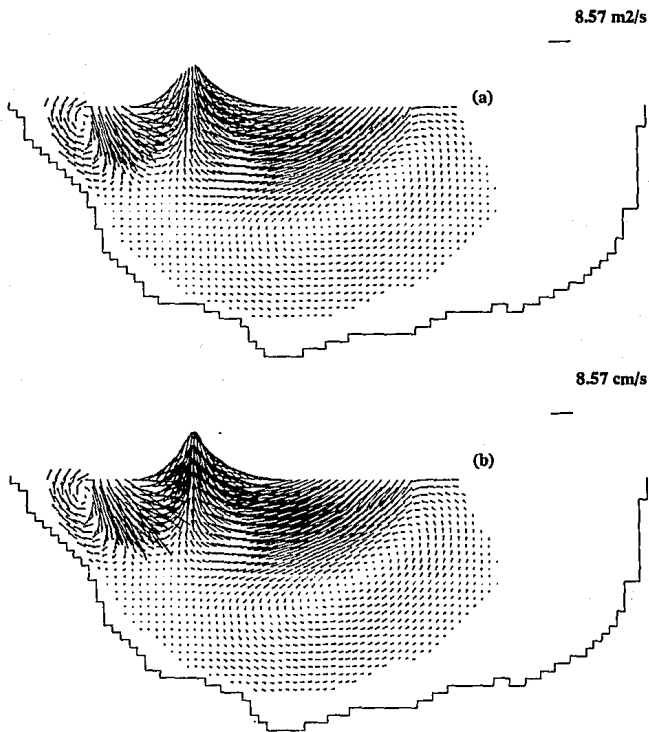
Fig.5.17 Verano de 1987, simulado con transporte a través del paralelo  $21^\circ \text{N}$  y viento promedio del sureste. (a) Transporte, (b) Velocidad.



(b)



**Fig.5.18** Verano de 1988, simulado con transporte a través del paralelo  $21^{\circ}$  N y viento promedio del sureste. (a) Evolución de energía, (b) Anomalia de la picroclina (m).



**Fig.5.19** Verano de 1988, simulado con transporte a través del paralelo 21° N y viento promedio del sureste. (a) Transporte, (b) Velocidad.

independiente. Para este caso (Figs. 5.16 y 5.17), al igual que en el anterior, los patrones de circulación y de la anomalía de la pycnoclina fueron dominados por el transporte en FA (Figs. 5.6 y 5.7). No obstante, el giro ciclónico próximo al Banco de Campeche fué ligeramente desplazado hacia el sureste por efecto del viento. Las diferencias más notables están dadas por el comportamiento de la energía, la cual es más oscilante con la influencia de ambos mecanismos.

La última simulación fué realizada para el verano de 1988, en este caso, se volvió a imponer un viento promedio del sureste y transporte meridional en FA. Las características de las magnitudes impuestas son las que se usaron en forma independiente. Los resultados de dicho experimento (Figs. 5.18 y 5.19) muestran una distribución de la anomalía de la pycnoclina y transporte horizontal muy similar a la inducida por transporte en FA (Figs. 5.8 y 5.9) y como en el caso anterior, existe una notable diferencia en el comportamiento de la energía, que al igual que en el verano anterior, es más oscilante con la influencia de ambos mecanismos. El eje de rotación del giro ciclónico del sureste de la Bahía, es desplazado hacia el oeste por efecto del viento.

Tabla 3  
Valores extremos en la anomalía de la pycnoclina con transporte a través del paralelo 21 N y esfuerzo de viento.

Epoca	Descenso max. (m)	Ascenso max. (m)
Invierno (1987) con norte promedio	14.95	2.71
Verano (1987) con sureste promedio	27.84	8.61
Verano (1988) con sureste promedio	26.23	11.61

La tabla 3 muestra, para el estado estacionario, los descensos y ascensos máximos de la pycnoclina presentes en dichos experimentos.

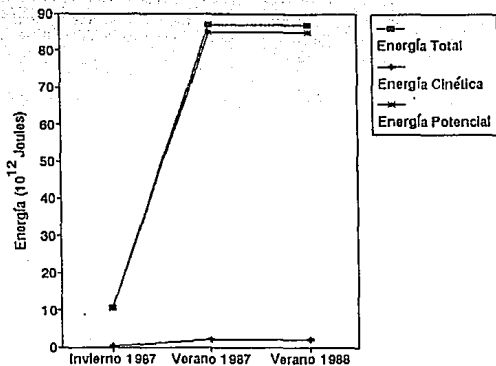


Fig.5.20 Energetización de la Bahía de Campeche con viento promedio.

Cuando el esfuerzo del viento promedio es el único mecanismo generador de la circulación, la Bahía de Campeche se ve más energetizada con vientos del sureste (verano) que con los vientos del norte (invierno) (Fig.5.20). En general, para todos los experimentos en invierno (Figs.5.21 y 5.22), la cuenca fué menos energetizada que en veranos.

Al comparar los resultados para invierno de 1987 únicamente con intercambio de masa a través de FA y su similar con ambos



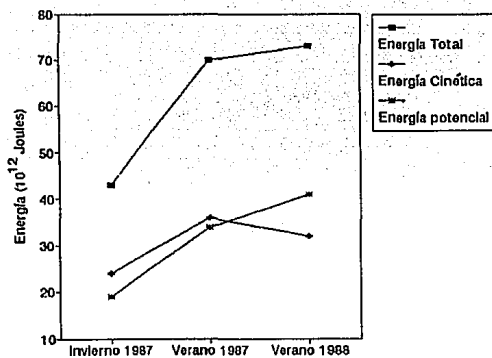


Fig.5.21 Energetización de la Bahía de Campeche con transporte a través del paralelo 21° N.

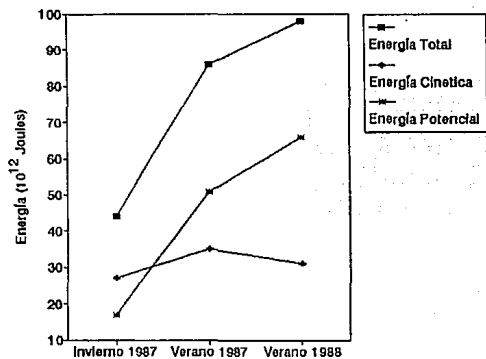


Fig. 5.22 Energetización de la Bahía de Campeche con transporte a través del paralelo 21° N y vientos promedio.

mecanismos, se observa que la energía total en el estado estacionario en ambos casos son similares (Fig. 5.21) y (Fig. 5.22), sin embargo en este último caso, la energía cinética sufre un ligero aumento y por consecuencia existe una ligera disminución en la energía potencial. Este hecho es reflejado por el aumento en la magnitud de velocidad del giro ciclónico presente en el sureste y la disminución de las amplitudes de la anomalía en el noroeste de la Bahía. Por otro lado, al comparar los resultados obtenidos para el verano de 1987 con transporte a través de FA (Fig. 5.21), con los obtenidos tomando en cuenta ambos mecanismos (Fig. 5.22), se obtiene que la energía total en el estado estacionario para el segundo caso es mayor que para el primero, y aunque la energía cinética casi mantiene su valor, con tendencia a disminuir, el aumento en la energía total es causado básicamente por un acumulamiento de energía potencial, la cual separa los giros ciclónicos del noroeste y sureste. Manteniendo no obstante la similitud en los patrones de circulación para ambos casos.

Para el verano de 1988, la energía total en el estado estacionario, con ambos mecanismos (Fig. 5.22), es mayor que con transporte a través de FA (Fig. 5.21). Este aumento es básicamente generado por un incremento de la energía potencial, mientras que la energía cinética se mantiene casi invariable. El aumento en la energía potencial de la cuenca establece el mismo efecto que causó en el verano anterior.

En general, el comportamiento de la energía en la cuenca marca una gran diferencia entre invierno y veranos, siendo más

energetizada en estos últimos. No obstante, aún entre veranos se presentan notables diferencias en la energía.

La comparación de la circulación obtenida de la simulación con la inferida de datos observacionales se hace necesaria para darle validez al modelo. Durante las campañas OGMEX, utilizadas para fijar las condiciones de frontera a través del paralelo  $21^{\circ}$  N, se obtuvieron datos hidrográficos sobre la plataforma continental. Sin embargo, la corroboración se imposibilita dado que en este trabajo se analiza el primer modo baroclinico en la zona profunda, limitada por las isóbatas de 150 y 80 m. No obstante, instituciones mexicanas como; la Secretaría de Marina y el Instituto de Investigaciones Eléctricas, han realizado una serie de campañas oceanográficas con el fin de inferir la circulación existente en la Bahía. Dichos resultados son utilizados para comparar la circulación obtenida de la simulación. *Vázquez de la Cerda (1993)* calculó la altura dinámica de la superficie del mar, utilizando datos obtenidos de varias campañas oceanográficas que cubrieron diferentes estaciones de diferentes años. Sus resultados indican la presencia de celdas de circulación ciclónica bien definidas de carácter semi-permanente y que en su mayoría se presentan en la región sur del paralelo  $21^{\circ}$  N, con diámetros entre 100 y 200 km, lo cual coincide con el patrón obtenido en el sureste, frente al Banco de Campeche. Por otro lado, estudios hidrográficos llevados a cabo en el Golfo de México por *Vidal et al. (1989, 1992)*, durante enero de 1984 y octubre-noviembre de 1986, indican que a la altura de Tamiahua se

bifurca el campo de velocidad en dirección norte-sur, con mayor intensidad hacia el norte. Esto coincide con la estructura obtenida por la simulación, sólo que en esta última, la bifurcación se localiza más al sur. La dinámica adyacente al paralelo  $21^{\circ}$  N, obtenida por el modelo para veranos, presenta gran similitud con la distribución de altura dinámica reportada por Vidal *et al.* (1990) para octubre-noviembre de 1986.

Una de las características de la dinámica del Golfo de México es la intensificación de la corriente en el lado oeste, frente a la costa de Tamaulipas (Monreal-Gómez, 1986), debida al efecto de la variación en la vorticidad planetaria o efecto  $\beta$ . Sin embargo, más al sur dicha intensificación no es muy evidente, lo cual indica que tal efecto no se manifiesta de esa manera. No obstante, la estructura anticiclónica costera de verano es desplazada hacia el oeste o suroeste por el ascenso de la piconclina aproximadamente a 213 ó 198 km de la costa de Veracruz, sobre el paralelo  $21^{\circ}$  N. Esto ocurrió para ambos veranos.

Existen diversas hipótesis sobre la formación de giros ciclónicos en el Golfo de México y en particular dentro de la Bahía de Campeche. Entre otras, se encuentran las formuladas por Merrell y Vázquez (1983) y Vázquez (1993), quienes suponen que la circulación ciclónica es forzada por el rotacional ciclónico del esfuerzo del viento, el cual tiene un ciclo estacional muy marcado. Mientras que en otros casos, los núcleos fríos o giros ciclónicos presentes sobre la plataforma continental del Golfo de México, han sido asociados al movimiento hacia el oeste del gran

giro anticiclónico (Elliott, 1982) desprendido de la Corriente de Lazo. Otra hipótesis sugerida por Smith y O'Brien (1986) asocia la circulación ciclónica en el noroeste del Golfo de México, a la dispersión de ondas topográficas de Rossby generadas por el choque del anticiclón sobre la plataforma continental.

En este trabajo se muestra que aún en ausencia de viento y en diferentes épocas, la estructura ciclónica en el sureste de la Bahía es presente. Lo cual indica que por lo menos dentro del área de estudio, el viento no es el mecanismo principal que la origina, sólo la intensifica e impulsa ligeramente hacia el oeste, sobre todo en veranos. De modo que a manera de hipótesis se propone que las características morfológicas en la parte este de la Bahía; juegan un papel importante en la permanencia de la circulación ciclónica. Mientras que la circulación ciclónica sobre FA está más relacionada con las hipótesis propuestas por Elliott (1982), Smith y O'Brien (1986).

### CONCLUSIONES

De los resultados obtenidos en el presente trabajo se puede concluir que:

Las dos estructuras anticiclónicas observadas en invierno de 1987 no fueron dependientes de los esfuerzos del viento promedio del norte. Dichos vientos sólo afectaron ligeramente la circulación ciclónica del sureste.

En verano de 1987 y 1988, la dinámica en la Bahía, a diferencia del invierno de 1987, presentó un giro ciclónico entre los dos anticiclónicos. En el sureste, al igual que en invierno, estuvo presente la estructura ciclónica, sólo que en éstas épocas fué más intensa y con su eje de rotación ligeramente desplazado hacia el oeste por efecto de los vientos promedios del sureste.

En general, en las épocas estudiadas, el esfuerzo del viento promedio sólo alteró ligeramente la circulación de la capa de mezcla, sobre todo en veranos.

En todos los casos, la circulación anticiclónica en el noroeste fué más energétizada que la ciclónica del sureste.

La estructura ciclónica que se presentó en el sureste de la Bahía, es causada por el intercambio de masa a través de FA y su intensificación en veranos está íntimamente relacionada con el menor espesor de la capa de mezcla y la máxima intrusión de la Corriente de Lazo.

Es posible que el origen del giro ciclónico, en el paralelo  $21^{\circ}$  N, esté relacionado con la energía dispersiva generada por la colisión, sobre la costa oeste del Golfo de México, de anillos

anticiclónicos desprendidos de la corriente de Lazo.

## Bibliografía

- ABBOT M.B., 1988: Specifications for two-and three-dimensional Model for Environmental Applications. Computer Modelling in Ocean Engineering, Schrefler and Zienkiewicz (Eds.) 3-15 pp.
- ALATORRE-MENDIETA M.A., F. RUIZ y D. A. SALAS de LEON, 1987: Efectos del Paso de Frentes Fríos Atmosféricos sobre la Bahía de Campeche. Memorias de la Reunión Anual, 1987. Unión Geofísica Mexicana A. C., 186-193 pp.
- ANTOINE, J. 1972: Structure of the Gulf of México. In Contribution on the Geological and Geophysical Oceanography of the Gulf of México. Rezak & Henry, (Eds.), Houston, Texas. 3:1-34.
- BEHRINGER, D.W.; R.L. MOLINARI and J.F. FESTA, 1977: The Variability of Anticyclonic Current Patterns in The Gulf of Mexico. J. Geophys. Res., 82 (34), 5469-5476.
- BESSONOV, N.; O. GONZALES y A. ELIZAROV, 1968: Resultados de las Investigaciones Cubano-Soviéticas en el Banco de Campeche. (FAO), I Simposium sobre el Caribe y Regiones Adyacentes. 317-325. pp.
- BLAHA J.P. and W. STURGES, 1981: Evidence for Wind Forced Circulation in The Gulf of Mexico. J. Mar. Res. 39(4): 711-734.
- BOUMA, H.A., 1972: Distribution of sediments and sedimentary structures in the Golfo of Mexico. En: Coloquios sobre Investigaciones de recursos del Mar Caribe y regiones adyacentes. UNESCO, FAO e ICCRA. 221 pp.
- BRYAN, K., 1989: Oceanic Circulation Models: Combining Data and Dynamics, edited by D.L.T. Anderson and J. Willebrand, Kluwer Academic Publisher, Netherland, 605 pp.
- BULANIENKOV, S.K. y C. GARCIA, 1975: Influencia de los Procesos Atmosféricos en el Afloramiento del Banco de Campeche. Rev. Invest., I.N.P. Cuba, 1(2):99-140.
- BURDEN R.L. y J.D. FAIRES, 1985: Análisis Numérico, Grupo Editorial Iberoamérica, E.U, 721 pp.
- CAMPOS, C.J. 1981: Contribución a la sedimentología y morfología de la plataforma continental frente a las costas de Campeche, México. Primera parte. Dirección General de Oceanografía. Secretaría de Marina. Inv. Ocean. G-81-01 y 02: 11-41
- CARRANZA-EDWARDS Y J.E. AGUAYO-CAMARGO, 1991: Carta de Sedimentología Marina en la Zona Económica Exclusiva Mexicana,



Esc. 1:12 000 000, V.9.5, Instituto de Geografía, UNAM.

CAZARES-CRUZ L. A., 1992: Variabilidad de Parámetros Hidrográficos y Flujos a Través del Paralelo 21. Tesis de Licenciatura, Universidad Veracruzana. 70 pp.

CHAPMAN, D.C., 1985: Numerical treatment of cross-shelf open boundaries in a barotropic coastal ocean model, *J. Phys. Oceanogr.*, 15, 1060-1075.

CHARNEY, J.G., R. FJØRTOFT, And J. VON NEUMANN, 1950: Numerical integration of the barotropic vorticity equation. *Tellus*, 2, 237-254.

COLE, G.H.A., 1962: *Fluid Dynamics*. John Wiley & Sons Inc., Great Britain, 230 pp.

CONACYT, 1980: *El Petroleo en México y en el Mundo*. México, 168 pp.

CUSHMAN-ROISIN, B.; G. G. SUTYRIN and BENYANG TANG, 1992: Two Layer Geostrophic Dynamics. Part I: Governing Equations. *J. Phys. Oceanogr.*, 22, 117-127.

DE LA LANZA-ESPINO G., 1991: *Oceanografía de Mares Mexicanos*, AGT EDITOR, S.A., 569 pp.

DIMEGO et al., 1976:

ELLIOTT, B.A., 1979: *Anticlonic Rings and The Energetics of The Circulation of The Gulf of Mexico*. Ph.D. Dissertation, Texas A & M Univ., College Station, Texas, 188 pp.

ELLIOT, B.A., 1982: *Anticyclonic rings in the Gulf of Mexico*. *J. Phys. Oceanogr.*, 12 1292-1309.

ESPARZA-CASTILLO L., 1992: *Variación Estacional de la Microfauna de Ostracodos de la Zona de Plataformas Petroleras del Sur del Golfo de México*. Tesis de Licenciatura. Universidad Nacional Autónoma de México. 92 pp.

FLETCHER, C.A.C., 1991: *Computational Techniques for Fluid Dynamics, Volumen I*. Springer-Verlag, Germany. 401 pp.

GERRITSEN, H., and A.C. BIJLSHA, 1988: *Modelling of Tidal and Winddriven Flow: The Dutch Continental Shelf Model*. SCHREFLER, B.A. and O.C. ZIENKIEWICZE (Eds), 1988: *Computer Modelling in Ocean Engineering*. International Network of Centres of Computer Applications, Netherlands. 727 pp.

GILL, A.E., 1982: *Atmosphere-Ocean Dynamics*. Volume 30, International Geophysics Series-Academic Press, 662 pp.

GOMEZ, J.A., 1976: *Corrientes y Algunos Aspectos del Régimen Hidrológico de la Zona sur del Banco de Campeche*. Revista de Investigación, Instituto Nacional de Pesca. Cuba, 2(1):66-84 pp.

Isaacson, E.; and H. B. Keller, 1966: *Analysis of Numerical Methods*. John Wiley and Sons. New York, 541 pp.

JAMART, B. and J. OZER, 1987: *Real And Boundary Layer Effects in Three-Dimensional Hydrodynamical Models*. Edited by NIHOUL. J.C.J and B. JAMART, 1987: *Three-Dimensional Models of Marine And Estuarine Dynamics*. Elsevier Science Publishers B.V. Amsterdam, 629 pp.

KRAUS, E.B., 1977: *Modelling and Prediction of The Upper Layers of The Ocean*. Pergamon Press Ltd, Great Britain. 325 pp.

LECUANDA, C.R y L.F. RAMOS, 1985: *Distribución de sedimentos en la parte sur del Golfo de México*. Informe técnico No.2. Lab. de sedimentología. Inst. de Cienc. del Mar y Limn. UNAM. 1-23.

LEIPPER, D.F., 1970: *A Sequence of Current Patterns in The Gulf of México*. J. Geophys. Res., 75, 637-657.

MAUL, G.A., 1977: *The Annual Cycle of The Gulf Loop Current Part I: Observations During a One-Year Time Series*. J. Mar. Res., 35(1), 29-47.

McLELLAN, H.J., 1975: *Elements of Physical Oceanography*. Pergamon Press Inc. New York, 151 pp.

MERRELL W.J. AND J.M. MORRINSON, 1981: *On the Circulation of the Western Gulf of Mexico With Observations From April 1978*. J. Geophys. Res., 86, 4181-4185.

MERRELL W.J., Jr AND VAZQUEZ, 1983: *Observations of changing mesoscale circulation patterns in the western Gulf of Mexico*. J. Geophys. Res., 88, 7721-7723.

MESINGER, F., AND A. ARAKAWA, 1978: *Numerical Methods Used in Atmospheric Models*. GARP Publication Series, No. 17, World Meteorol. Organization, Geneva, 64 pp.

MILLER H.J., AND A.J. THORPE, 1981: *Radiation Conditions for The Lateral Boundaries of Limited-Area Numerical Models*. Quart. J. R. Met. Soc. 107, 615-629 pp.

MOLINARI, L.R., J.F. FESTA AND BEHRINGER, 1978: *The Circulations in the Gulf of Mexico derived from estimated dynamic height fields*. J. Phys. Oceanogr., 8, 987-996.

MOLINARI, L.R. AND J. MORRISON, 1988: *The Separation of the Yucatan Current from the Campeche Bank and the intrusion of the*

Loop Current Into the Gulf of Mexico. *J. Geophys. Res.* Vol. 93(c9): 10645-10654 pp.

HONREAL-GOMEZ, M. A. y D. A. SALAS DE LEON, 1990: Simulación de la Circulación en la Bahía de Campeche. *Geofísica Internacional*. Vol. 29, num. 2. 101-111 pp.

HONSINO, A. P., 1964: Meteorología Marítima de la Costa Sur de México. *Anales del Instituto de Geofísica. Univ. Nac. Auton. Mex.* Vol. 10. 17-24 pp.

NIHOUL, J.C.J., 1975: *Modelling of Marine Systems*. Elsevier Scientific Publishing Company. Amsterdam. Vol 10, 272 pp.

NOWLIN, W.D., 1972: Winter circulation patterns and property distribution. Contributions on the physical oceanography of the Gulf of Mexico, L. R. A. Capurro and J.L. Reid, Eds., Gulf Publ. Co., 3-15.

O'BRIEN, J.J., 1986: *Some Useful Mathematical Preliminaries*. Edited by O'BRIEN J.J., 1986: *Advanced Physical Oceanographic Numerical Modelling*. D. Reidel Publishing Company. Dordrecht, Holland. 608 pp.

O'BRIEN, J.J. y H. E. HURLBURT, 1972: A Numerical Model of Coastal Upwelling. *J. Phys. Oceanogr.*, 2, 14-26.

PANOFSKY, H., 1956: *Climatología Física*. Centro Intern. de Adiestramiento. Aviación Civil. México. 133 pp.

PEDLOSKY, J., 1979: *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer-Verlag. USA, 624 pp.

POND S. AND G.L. PICKARD, 1978: *Introductory Dynamic Oceanography*. Pergamon International Library. Great Britain. 241 pp.

PRANDTL, L., 1925: Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz. *Zeitschr. angew. Math. Mech.* 5, 136.

RAMMING H. AND Z. KOWALIK, 1980: *Numerical Modelling of Marine Hydrodynamics*. Elsevier Scientific Publishing Company. Amsterdam. 368 pp.

ROACHE, P.J., 1982: *Computational Fluid Dynamics*. Hermosa Publishers, U.S.A. 446 pp.

RODRIGUEZ, R. M.; C. GONZALES y Q.R. VALDES, 1975: *Cronología de los Frentes Fríos que han Entrado en Cuba, 1916-1970*. Inst. Meteorología. Acad. Ciencias de Cuba, 4pp.

ROED L.P. and C.K. COOPER, 1986: *Open Boundary Conditions In*

Numerical Ocean Models. Edited by O'BRIEN J.J., 1986: *Advanced Physical Oceanographic Numerical Modelling*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland. 608 pp.

ROSENBERG, D.U.V., 1980: *Methods For The Numerical Solution of Partial Differential Equations*. American Elsevier Publishing Company, New York, U.S.A. 128 pp.

SAINT-GUILY, B., 1978: *Propriétés Caractéristiques des Onde Planétaires dans L'Océan (Ondes de Seconde Classe)*. *Oceanol. Acta*, 1, 119-126.

SALAS DE LEON D.A.; M.A. MONREAL GOMEZ y ALDECO RAHIREZ, 1992: *Periodos Característicos en las Oscilaciones de Parámetros Meteorológicos en Cayo Arcas, México*. *Atmósfera* 5, pp 193-205.

SANTOYO H. y M. SIGNORET, 1975: *Variación Nictimeral del Fitoplancton en la Bahía de Campeche*. México. *Rev. Lat-amer. vol.17*, 161-167 pp.

SCHREFLER B.A. and O.C. ZIENKIEWICZ, 1988: *Computer Modelling in Ocean Engineering*. Netherlands. 727 pp.

SEITNER A.J., 1986: *History and Methodology of Modelling The circulation of The World Ocean*. Edited by O'BRIEN J.J., 1986: *Advanced Physical Oceanographic Numerical Modelling*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland. 608 pp.

SEITNER, A.J. and Y. HINTZ, 1977: *Numerical Simulation of The Gulf Stream and Mid-Ocean Eddies*. *J. Phys. Oceanogr.*, 7, 208-230

SHIRASAGO G.B., 1991: *Hidrografía y Análisis Frontogénico en el Sur de la Bahía de Campeche*.  *tesis de Maestría, Universidad Nacional Autónoma de México*, 180 pp.

SMITH, G.D., 1978: *Numerical Solution of Partial Differential Equations*. Oxford University Press, Great Britain. 304 pp.

SMITH, D.C. IV, 1986: *A numerical study of loop current eddy interaction with topography in the western Gulf of Mexico*. *J. Phys. Oceanogr.*, 16, 1260-1272.

SMITH, S.D., 1980: *Wind Stress and Heat Flux over the Ocean in Gale Force Winds*, *J. Phys. Oceanogr.*, 10, 706-726.

STREETER, V.L., 1961: *Handbook of Fluid Dynamics*. McGraw-Hill Book Company, U.S.A. 1190 pp.

STURGES, W. and J.P. BLAHA, 1976: *A Western Boundary Current in The Gulf of Mexico*. *Science*, 192, 366-369.

STURGES, W. and J.C. EVANS, 1983: *On The Variability of The*

*Loop Current in The Gulf of Mexico. J. Mar. Res. 41(4), 639-653.*

TAPANES, J. J. y F. GONZALES-COYA, 1980: *Hidrometeorología del Golfo de México y Banco de Campeche. Geofísica Internacional. México. Vol. 19(4). 335-354 pp.*

VAZQUEZ DE LA CERDA, A.M., 1975: *Currents and Waters of The Upper 1200 m. of The Southwestern Gulf of Mexico. M.S. Thesis, Texas A & M. Univ., College Station, Texas, 99 pp.*

VAZQUEZ DE LA CERDA A.M., 1979: *Circulación del Agua en el Suroeste del Golfo de México. Secretaría de Marina, Dirección General de Oceanografía. México. 26 pp.*

VAZQUEZ DE LA CERDA A.M., 1993: *Bay of Campeche Cyclone. PhD dissertation, Texas A & M University, 91 pp.*

VELASCO-FUENTES, O.U., 1988: *Esfuerzo Superficial del Viento, Dos métodos para su Cálculo Aplicados en el Golfo de México. Tesis Profesional. Instituto Politécnico Nacional 76 pp.*

VELASCO-MENDOZA, H., 1989: *Los Giros de Mesoescala en la Bahía de Campeche. Tesis de Licenciatura. Universidad Veracruzana. 118 pp.*

VIDAL, V.M.V.; F.V. VIDAL y J.M. PEREZ MOLERO, 1989: *Atlas Oceanográfico del Golfo de México. Vol.I. Instituto de Investigaciones Eléctricas. Grupo de Estudios Oceanográficos. Cuernavaca, Mor., México. 415 pp.*

VIDAL, V.M.V.; F.V. VIDAL y A.F. HERNANDEZ O., 1989: *Atlas Oceanográfico del Golfo de México. Vol.II. Instituto de Investigaciones Eléctricas. Grupo de Estudios Oceanográficos. Cuernavaca, Mor., México. 707 pp.*

VUKOVICH, F.M.; B.W. CRISSHAN; H. BUSHNELL and W.J. KING, 1979: *Some Aspects of The Oceanography of The Gulf of Mexico Using Satellite and In Situ Data. J. Geophys. Res., 84 (C12), 7749-7768.*

WAJSOWICZ, R.C., 1986: *Free Planetary Waves in Finite-Difference Numerical Models. Submitted to J. Phys. Oceanogr.*