10
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

NOTAS SOBRE EL DESARROLLO MATEMATICO DE LA TEORIA DEL EQUILIBRIO ECONOMICO

T E S I S

Q U E P R E S E N T A :

JOSE GERARDO FRANCISCO ESPINOZA VALENCIA

P A R A O B T E N E R E L T I T U L O D E

M A T E M A T I C O

DICIEMBRE 1993

P R E F A C I O :

El arte y la ciencia juegan el papel más importante en la vida del hombre. Sus dominios, aparentemente ajenos, han sido desde sus orígenes un espacio natural para el surgimiento de la matemática en sus recorridos por los caminos de la intuición, de la magia y de la filosofía junto a la creación artística hasta los linderos de la ciencia, en donde germinan, se multiplican y florecen, con la formalización de sus conceptos.

Son dos los tipos de experiencias que unen a la ciencia y al arte: el rigor y la belleza, los cuales constituyen el contenido y la forma de las expresiones intelectuales del espíritu.

En el devenir de la vida cotidiana pueden coincidir y, con frecuencia logran conjugarse para satisfacer generosamente a quienes evocan su apoyo; pero siempre conservan un espacio propio en donde libremente generan su fortaleza espiritual y multiplican sus riquezas. Es así como la matemática ha suscitado verdaderas revoluciones en el desarrollo de la tecnología y en las leyes del pensamiento, en donde brilla con luz propia por la fuerza y la belleza de su abstracción.

La complejidad del mundo actual exige a la matemática, como a todas las ciencias y las artes, su participación en la tarea de edificar nuevas estructuras para alcanzar horizontes más amplios, pero es en las ciencias sociales y particularmente en la economía, como lo fuera en la física durante los siglos anteriores, en donde surgen actualmente los retos que debe resolver la humanidad contemporánea para vivir mejor, armónicamente con la naturaleza y con sus semejantes.

S U M A R I O

CAPITULO II. EL EQUILIBRIO EN LA ECONOMIA.

CAPITULO III. EL EQUILIBRIO GENERAL COMPETITIVO.

INTRODUCCION.

El concepto de equilibrio en Economía se ha relacionado principalmente con el modelo de equilibrio general competitivo de León Walras (1834-1910) quien desarrolló entre 1870 y 1877 la teoría de la utilidad a través de un estudio de lo más "completo y riguroso" como lo califica Claudio Napoleoni[1] bajo un enfoque matemático que es representativo de la corriente marginalista en la que se distinguen tres Escuelas: la de Lausana, a la que pertenece Walras y Vilfredo Pareto (1835-1910); la Austriaca que incluye a Carl Menger (1840-1921), Friedrich von Wieser (1851-1926) y a Eugen von Bohn-Bawerk (1851-1914) y la Escuela Inglesa identificada con Alfred Marshall (1842-1924) y Francis Edgeworth (1845-1926), extendiéndose a Italia con M. Pantaleoni (1857-1924 y E. Barone (1859-1924); a Estados Unidos con J. B. Clark (1847-1938) e I. Fisher (1867-1947) y en Suecia se desarrolló con Knut Wicksell (1851-1926) y con G. Cassel (1866-1945).

La intención del presente trabajo es la de explorar en la Teoría del Equilibrio Económico General Walrasiano a partir de la obra de Cournot y observar el uso que se hace de la matemática para analizar los fenómenos sociales, principalmente económicos, bajo la hipótesis de que si en el período que abarcan los siglos XVI y XVII la matemática se desarrolló intensamente en relación con las ciencias de la naturaleza, es en los siglos XVIII y XIX en los que la creciente complejidad de las estructuras sociales, políticas y económicas hace necesaria la aplicación de técnicas en las que la matemática interviene en diversas formas para desarrollar un tipo de análisis apoyado en la matemática desarrollada alrededor de la Física.

[1] *Napoleoni, Claudio. Diccionario de Economía Política. Ed. Castilla. Madrid. 1962.*

Por tratarse de un campo de aplicación de la matemática, se hace notar una serie de preocupaciones que van desde la crítica sobre la validez de la utilización (tanto cualitativa como cuantitativa), del lenguaje matemático en el análisis del campo social, hasta las características que requiere la formación matemática del economista, ya que estos puntos de vista han creado dos grandes corrientes: Una es la de los que hacen teoría económica con matemáticas y otra la de los que rehuyen hacer uso de la matemática o tratan de evitar hasta el máximo, el verse ligados con ella.

En el primer caso encontramos opiniones que han contribuido a hacer más compleja (y por lo tanto más rica) la participación de la matemática en el área social, no solamente a través de los métodos cuantitativos que parecería ser un campo natural de los números en la actividad económica, sino en relación con el análisis cualitativo, lo que requiere de estructuras lógicas aplicables en las relaciones entre los factores de la economía. Estos métodos han dado sus frutos en la producción de modelos matemáticos y estadísticos, pero una aplicación más significativa es la que se refiere al análisis en la teoría económica y la economía política.

En este aspecto se establece otra gran diferencia entre quienes utilizan la matemática en la perspectiva de un quehacer científico comprometido socialmente y quienes invalidan a la matemática como instrumento de análisis sobre las teorías políticas, ya sea por no estar de acuerdo con las variables que se manejan, o por la discrepancia en la conceptualización de esas variables.

Es de notar en la década de los setentas en nuestro siglo, la aparición de una teoría social que recoge los fundamentos económicos y políticos del marxismo y que se dió a conocer como "marxismo analítico" apoyado en una afirmación atribuida a Marx: "Una ciencia se desarrolla solamente cuando se ve enriquecida con el punto de vista que le da el uso de la matemática" concepto, que a todas luces no fué generado por el filósofo alemán ya que este criterio tiene diversas fuentes, pero que ha servido para resaltar las diferencias fundamentales entre los marxistas analíticos y los marxistas que interpretan El Capital bajo un punto vista que se denominó como de "economía literaria", ya que el aspecto más importante es el análisis que se hace de los factores económicos que actúan como fuerzas sociales susceptibles de ser estudiadas matematicamente para observar sus repercusiones en el orden político y económico.

No obstante que la utilización del lenguaje matemático ha significado un punto de desacuerdo entre los economistas que la usan y los que no, podemos observar con optimismo que también ha significado un espacio en el que conviven y polemizan las ideologías contrapuestas, ya que la economía matemática del siglo XX incluye por igual los esfuerzos de economistas y matemáticos de todas las tendencias sociales y políticas.

Mas aún, la teoría económica actual no puede aspirar a una evolución sin tomar en cuenta los trabajos de los "marxistas analíticos", pero también, como herederos de la fuentes marginalista, fisiócrata y neo-clásica, se encuentran economistas como P.A. Samuelson, J.R. Hicks, J. Kenneth Arrow, Piero Sraffa, John M. Keynes, Joan Robinson, J. A. Schumpeter, etc., por mencionar solamente a algunos de un conjunto ya numeroso de economistas-matemáticos y de matemáticos-economistas, que han dado un cauce más profundo y más ancho al caudal de la economía como ciencia, que aspira en último caso, a mejorar la vida de los hombres con el uso más racional y eficiente de los recursos y de las relaciones más equitativas entre los agentes económicos y sociales.

La metodología seguida en el presente trabajo se plantea la necesidad de los economistas de observar el origen de la matemática utilizada en las ciencias sociales, para lo cual, en el primer capítulo se hace referencia a conceptos fundamentales que se relacionan con la física y que dieron lugar a la representación de las fuerzas, al desarrollo del algebra lineal y al de los espacios vectoriales, instrumentos que se utilizan en los modelos de Leontief, Sraffa y Von-Neumann con singular éxito para analizar los problemas de la producción, haciéndo alusión a los trabajos de Irving Fisher, Edgeworth y Pareto.

En el segundo capítulo se hace un estudio del Cálculo Diferencial e Integral utilizado por Cournot y Walras en el desarrollo de las funciones de oferta y demanda, enfatizando los conceptos de valor de cambio, utilidad y de los precios. En el tercer capítulo se hace una introducción del Equilibrio Económico General Walrasiano, bajo el enfoque del Teorema del Punto Fijo de Brouwer, con la demostración constructiva del mismo debida a Scarf, con lo cual se pretende dar un acercamiento a la evolución del concepto de equilibrio en la economía a través de la matemática desarrollada en la primera mitad del presente siglo. Se evitan, por el momento, demostraciones más formales de este teorema que se han generado recientemente con elementos de topología diferencial.

Podríamos afirmar que, siendo una tesis de matemática con un tema de economía, el objetivo es el de atraer la atención de los profesionales de ambos campos para unir intereses en una tarea que seguramente será benéfica y productiva para todos, básicamente para los estudiantes que se inician en las dos disciplinas.

CAPITULO I

I.1 EL EQUILIBRIO.

> *La parte de la física más antigua y más simple, y que por tanto es considerada como básica para la comprensión de muchas otras partes de esa ciencia, tiene por objeto el estudio del movimiento y del equilibrio de las masas, se llama mecánica.*
>
> ERNEST MACH.

¿Existe alguna relación entre la teoría del equilibrio económico y el concepto de equilibrio en la mecánica?

Antes de responder a esta pregunta debemos observar que la mecánica se expresa en el lenguaje de la matemática para describir y analizar los fenómenos que estudia, por lo que conviene atender a otra interrogante: ¿Es el lenguaje matemático un instrumento adecuado para el análisis de la economía?

Algunos economistas han dado a esta pregunta una respuesta afirmativa, por lo que es necesario abordar el asunto tratando de establecer las características y los elementos del equilibrio económico y los instrumentos matemáticos necesarios para su estudio. Pero, si bien el equilibrio en economía, como lo describe P. Samuelson (8. p. 8) "se entiende únicamente como los valores de las variables determinadas por un conjunto de condiciones y no los caracteres normativos que se vinculan al término" al ampliar la definición de su "método de estática comparativa" concluye que este método constituye una aplicación particular de uno más general que consiste en la "práctica de la deducción científica, en el cual se define el comportamiento de un sistema (probablemente a través del tiempo) en términos de un conjunto dado de ecuaciones funcionales y de condiciones iniciales".

Esta afirmación nos obliga a profundizar sobre el uso del instrumental matemático en el desarrollo de la mecánica que estudia los fenómenos bajo dos enfoques: el de la estática y el de la dinámica.

Ya en 1902, en el prefacio de su obra fundamental, Bertrand Russell (1872-1970) aludía a una de las motivaciones que tuvo para escribirla, refiriéndose a la filosofía de la dinámica en la que encontró una dificultad al observar que "cuando una partícula se haya sometida a varias fuerzas, en realidad no tiene lugar ninguna de las aceleraciones componentes, sino solamente la aceleración resultante, de la que no son parte", seguida de reflexiones particulares sobre el movimiento absoluto en una teoría relativa del espacio y otros problemas filosóficos del continuo, pero en cuanto a la dinámica, después de reconocer que su opinión personal pudiera ser mínima, apunta que los problemas de esta materia eran más bien de carácter empírico. Sin embargo, los problemas de la física, como fenómenos que se producen en una realidad inobjetable, alcanzan soluciones plausibles a través de una representación matemática "cuando se cuentan los objetos reales, o cuando se aplican la geometría o la dinámica al espacio o la materia reales, o cuando, de cualquier otro modo, el razonamiento que se emplea tiene una forma que no depende del que los objetos a los que se aplica sean justamente esos objetos particulares, sino solamente a que tienen ciertas propiedades generales". [8. p 20]

Al referirse B. Russell al problema de la comprobación sobre de si esas propiedades pertenecen o no al espacio real o al movimiento real, considera que "es un absurdo tratar de explicarlo por medio de la matemática pura, ya que se trata de una cuestión empírica que debe investigarse en el laboratorio o en el observatorio" [7. p. 21], por lo que, tal vez las ciencias sociales no pudieran disponer de estos recursos en la forma en que lo hacen las ciencias naturales.

Sin duda, los economistas que se han planteado esta dificultad en relación a los "objetos particulares", han descubierto que no es insalvable. Así, Walras en el año de 1900 se refería a los economistas que "sin saber matemáticas o incluso sin saber exactamente en que consisten las matemáticas ya han decidido que éstas no pueden servir para elucidar los principios económicos" y anotaba los argumentos esgrimidos por aquellos: "la libertad humana nunca podrá introducirse en ecuaciones" ó "los matemáticos hacen abstracción de los roces que lo son todo en las ciencias sociales". A estas afirmaciones Walras responde que **"no podrán impedir que la teoría de la determinación de los precios en libre competencia sea una teoría matemática", asegurando que ya en ese momento "la economía política, como la astronomía y la mecánica, es una ciencia tanto empírica como racional".**

"Si la Francia del Siglo XIX, que ha visto nacer esta nueva ciencia (Economía Política), la ha ignorado completamente, la falta se debe a una concepción de la cultura intelectual, de una estrechez de miras burguesa, que la divide en dos compartimientos separados: uno que produce calculistas desprovistos de conocimientos filosóficos, sociológicos, históricos y económicos, y otro donde florecen las letras sin noción alguna de (las) matemáticas." [10. p. 136].

Por su parte, Cournot en 1838 [2. p.17] también se enfrentó a las opiniones adversas al uso de las matemáticas en la economía señalando una razón fundamental para caracterizar a sus detractores: "por haberse formado una falsa idea acerca de la naturaleza de las aplicaciones del análisis matemático a la teoría de la riqueza". Y hace notar que "la obtención de números no es su ùnico objeto, [sino] que también se emplea para encontrar relaciones entre magnitudes que no pueden evaluarse numericamente entre "funciones" cuya ley no puede expresarse mediante símbolos matemáticos".

La sugerencia de Cournot para emplear los signos matemáticos como una forma natural que permitiera discutir relaciones entre magnitudes, señalaba la oposición de los economistas clásicos como Adam Smith (1723-1790) y J. B. Say (1826-1896) haciendo la observación de que por su parte David Ricardo (1772-1823) ya había intentado hacer uso de "cálculos aritméticos de una prolijidad fatigosa" de manera que se propone demostrar en su ensayo que "la solución de los problemas generales a que da lugar la teoría de la riqueza, depende esencialmente no del álgebra elemental, sino de aquella rama del análisis que tiene por objeto las funciones arbitrarias, sujetas solamente a satisfacer ciertas condiciones muy sencillas, (de modo que) las primeras nociones de cálculo diferencial e integral bastan para la comprensión de ese breve tratado" [2. p. 19].

Pero este uso de la matemática por la economía solamente plantea una relación formal de las dos ciencias, puesto que no considera los aspectos analíticos y formativos del método de las matemáticas y, ya que el que hacer de la ciencia se considera inmerso en el marco social de la economía, se afirma que la economía se refleja evidentemente en el orígen histórico de la ciencia, por lo tanto no es extraño que en un tratado de mecánica (me refiero al trabajo de Mach), se enfoque el trabajo científico como una tarea enmarcada en el contexto social y se considere como un objetivo económico. En tal condición se reconoce la categoría de la economía como ciencia y sus contenidos económicos son a la vez objetivos económicos.

"Al principio toda economía sólo tendió a la satisfacción de las necesidades corporales. Para el obrero, y aún más para el investigador, el conocimiento de una determinada clase de fenómenos naturales que se logre de manera más breve, más simple y exija el menor número de esfuerzos intelectuales, se convierte, por sí mismo, en un objetivo económico". [3.p.17]. Este objetivo económico sería el de obtener una concepción de los hechos, clara, lógica y fácil, siguiendo la aplicación que la ciencia natural hace al investigar lo que hay de constante en los fenómenos, cuales son sus elementos y cuál es la vinculación y dependencia mutua entre éstos.

Sobre el equilibrio como un objetivo económico, observamos que el término "equilibrio" ha significado una preocupación fundamental en las ciencias naturales: "Las más antiguas investigaciones mecánicas conocidas, las de los antiguos griegos, se refieren a la "estática" es decir, a la ciencia del equilibrio" [3.p.10] . Es, pues, en la mecánica en donde se encuentra una conceptualización formal del estado de equilibrio o de reposo que relaciona las fuerzas actuantes sobre un cuerpo material, sin embargo, no son las situaciones que se obtienen con mayor frecuencia, ya que el desequilibrio es la condición dinámica de la naturaleza que, estando expuesta a innumerables influencias, éstas están generando constantemente el movimiento.

Se puede aceptar con Samuelson que "el equilibrio no es algo definitivamente alcanzado, sino que es algo que si se alcanza pone de manifiesto ciertas propiedades", con lo cual no estamos observando el aspecto de la estabilidad del equilibrio, sino de las características que adquieren las variables en un momento dado y las causas externas o parámetros que las modifican, de tal forma que la economía plantea, como la física, una evolución de esos estados de equilibrio bajo un enfoque dinámico.

Al hablar de las ciencias, debemos convenir en que a pesar de que cada una de ellas tiene un objeto de estudio específico, estos forman parte de un estudio común, dirigido al conocimiento sobre la naturaleza y ésta se caracteriza por su unidad, como lo hace notar Poincaré [6.p.7] y la naturaleza sigue leyes precisas que sorprenden por la "simplicidad" y belleza de sus principios, a pesar de que al hombre le ha costado siglos de esfuerzos para lograr penetrar en ellos. Por lo tanto, no debe extrañarnos que un fenómeno como el equilibrio que se presenta cotidianamente y cuyo principio forma parte de ese conjunto de razonamientos fundamentales, halla servido para identificar un aspecto de las relaciones entre los agentes económicos. ya que el equilibrio se puede entender como una situación de equidad o de bienestar al que se llega por el efecto de las fuerzas que, en la economía, estarían representando los intereses que actúan sobre el cuerpo social.

Podemos entonces aceptar que el primer paso para acercarnos al equilibrio económico, es estudiando cómo, en sus orígenes, se da un acercamiento con la mecánica clásica.

1.2 EL EQUILIBRIO EN LA MECANICA.

1.2.1 Los pesos y el punto de apoyo.

Es Arquitas de Taranto (Siglo IV a.c.) un geómetra que hacía experimentos en la prehistoria de la mecánica a quien se reconoce como fundador de la teoría de la polea, pero es Arquímedes de Siracusa (287-212 a.c.) quien establece dos principios básicos como hipótesis que considera evidentes por sí mismos, en su tratado "De aequiponderatibus" [3.p.]

a) Pesos iguales, que están a igual distancia (del punto de apoyo) están en equilibrio.

b) Pesos iguales, que actúan a distancias desiguales (del punto de apoyo) no están en equilibrio, y el peso más alejado desciende.

De estas dos hipótesis, deduce el siguiente

TEOREMA:

"Pesos conmensurables están en equilibrio cuando son inversamente proporcionales a sus distancias (al punto de apoyo)".

Salomón Bochner [1.p.175] no concede a los griegos que hubieran tenido la noción formal de este equilibrio llamado el "momento estático" en mecánica, ya que si definimos como P y P' los pesos, y L y L' las longitudes o distancias al punto de apoyo, se podían establecer proporciones del tipo $P : P' = L' : L$ entre cantidades de la misma clase, pero la igualdad $P \quad L = P' \quad L'$ no podía verificarse porque no poseían el concepto de número real que representara el producto PL de dos cantidades heterogéneas como pesos y distancias.

De este problema se ocuparon Leonardo (1452-1519), Galileo (1542-1624), Simón Stevin (1548-1620), Daniel Bernoulli (1700-1782), Lagrange (1736-1813), Christian Huygens (1629-1695), etc., y como menciona Mach, que tácitamente o en forma más o menos oculta, la hipótesis de que "**el efecto de un peso a la distancia L del eje, está medido por el producto PL llamado el momento estático**" es la clave que explica la conexión de todos los hechos que concluyen con la formalización de la palanca y que se define como "el producto de una fuerza por la perpendicular a su dirección trazada desde un eje". [3. p.30]

1.2.2 Las fuerzas y el momento estático.

Considerando los tipos de movimiento enunciados por Galileo, el torno simple también se rige por el mismo principio, ya que las circunstancias que determinan el movimiento son, no sólo los pesos que tienden los hilos, sino también las perpendiculares trazadas desde el centro de rotación a las direcciones de esos hilos, es decir, los productos que representan los momentos estáticos.

Ahora, es importante reconocer como se relacionan esas fuerzas, observando que el principio de la composición de dos o más de ellas se basa en el TEOREMA DEL PARALELOGRAMO DE LAS FUERZAS, cuyo principio fué conocido por Stevin, pero fué Newton (1642-1727) en sus "Principios de Filosofía Natural" y principalmente Pierre Varignon (1654-1722) quien enunció este teorema, como aplicación de un teorema geométrico, en un trabajo presentado a la Academia de Paris, en la forma que sigue:

TEOREMA: <u>Si desde un punto m en el plano (fig 1.a) del paralelogramo, exterior al ángulo formado por los lados p y q, que contiene la resultante r, se trazan los segmentos normales a esas direcciones, que llamaremos u, v, w, se tiene que:</u>

$$pu + qv = rw$$

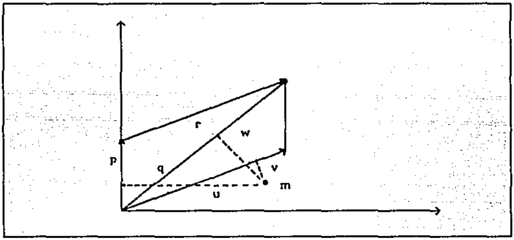

Fig. 1.a

La demostración se sigue de los productos de las longitudes anotadas que son los lados de triángulos, cuyas áreas son la mitad de esos productos. Cuando m se encuentra en el interior del ángulo (fig. 1.b), pero a una distancia w de la diagonal r, la ecuación es

$$pu - qv = rw$$

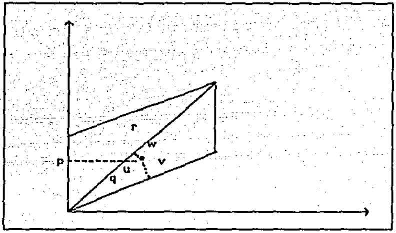

Fig. 1.b

Finalmente, si m se encuentra en el interior del ángulo formado por p y q, (con m sobre la diagonal r) y se trazan las perpendiculares, nos encontramos con que la distancia de m a r es igual con cero (Fig. 1.c)

$$pu - qv = 0$$

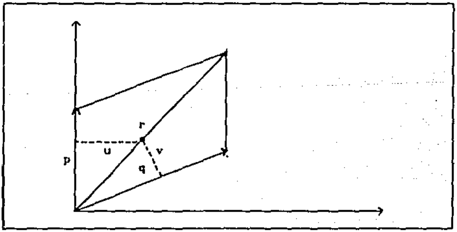

Fig. 1.c

Demostración analítica: (Fig.2).

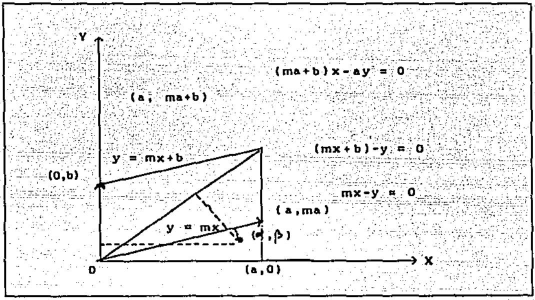

Fig. 2

Por demostrar: $|p||u| + |q||v| = |r||w|$, en donde p, q, r, u, v, w son vectores en $\mathbb{R}^2$.

Sean: $M = (\alpha, \beta)$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $a, b \in \mathbb{R}$.

$$|p| = b;$$

$$|q| = \sqrt{a^2 + (ma)^2}$$

$$|r| = \sqrt{a^2 + (ma + b)^2}$$

$$|u| = \alpha$$

$$|v| = \frac{m\alpha - \beta}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

$$|w| = \frac{(ma + b)\alpha - a\beta}{\sqrt{(ma + b)^2 + a^2}}$$

Sustituyendo, se tiene:

$$b\alpha + \sqrt{a^2 + (ma)^2} \left[\frac{m\alpha - \beta}{\sqrt{m^2 + 1}} \right] =$$

$$= \sqrt{a^2 + (ma + b)^2} \left[\frac{(ma + b)\alpha - a\beta}{\sqrt{(a^2 + (ma + b)^2}} \right]$$

$$b\alpha + a\sqrt{m^2 + 1} \left[\frac{m\alpha - \beta}{\sqrt{m^2 + 1}} \right] = (ma + b)\alpha - a\beta$$

$$b\alpha + a(m\alpha - \beta) = (ma + b)\alpha - a\beta$$

$$b\alpha + am\alpha - a\beta = b\alpha + am\alpha - a\beta \qquad \text{LQQD.}$$

Daniel Bernoulli opinaba, según Mach, que "el teorema del paralelogramo de las fuerzas era una verdad GEOMETRICA (independientemente de las fuerzas físicas que representa) [3. p.44], sin embargo la composición de las fuerzas y la composición de los movimientos fueron deducidos por Varignon observando que las fuerzas son proporcionales a los movimientos que ellas producen en tiempos iguales.

1.2.3 La fuerza resultante.

Si en los paralelogramos anteriores p y q representan las fuerzas componentes y r la fuerza que sustituye a ambas, que es la resultante, los productos pu, qv y rw se llaman momentos de esas fuerzas respecto del punto m, y cuando m está sobre la resultante, ambos momentos pu y qv son iguales entre sí.

Para Varignon la estática se funda sobre bases dinámicas, siendo aquella un caso particular de la dinámica a la que dedica varios de sus teoremas que forman actualmente la mayoría de los que aparecen en los tratados elementales de estática y que sirvieron para deducir la ley de la palanca que involucran el principio del equilibrio.

1.2.4 La fuerza oponente.

Convengamos en representar las fuerzas por medio de flechas ancladas en el origen de un plano cartesiano. Consideremos entonces un número cualquiera de fuerzas iguales que concurren en el origen, sean tracciones o compresiones, y que forman entre sí ángulos iguales. Se afirma que estas fuerzas están en equilibrio.

Veamos el caso para 3 fuerzas iguales que forman entre sí ángulos de 120 . (fig. 3)

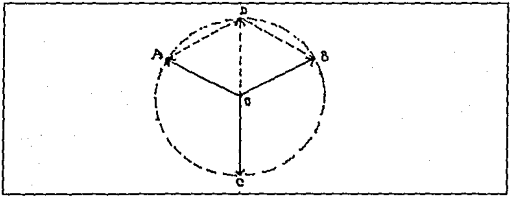

Fig. 3

Construímos la resultante OD tomando como componentes a OA y OB. Es evidente que esta flecha equilibra a la flecha OC que es la opuesta en sentido, (tiene la misma dirección y la misma magnitud), ya que cada flecha es un radio de la circunferencia que tiene como centro O, que es el punto de aplicación de todas las flechas. A esta fuerza OD se le llama "oponente".

1.3 COMO SE RELACIONAN LAS FUERZAS.

Si consideramos que tanto Newton y Varignon presentan el teorema del paralelogramo de las fuerzas como un teorema experimental, podemos observar que un punto al que se le aplican dos fuerzas está sometido a dos movimientos independientes y el efecto de las fuerzas se reconoce a través de las aceleraciones[2] que serán proporcionales a esas fuerzas, en lo que se comprueba que la suma de esas dos fuerzas será igual a su resultante y la resultante, a su vez, podrá descomponerse siempre en dos fuerzas componentes. Estas dos componentes no son únicas, ya que una fuerza puede ser la suma de cualquier número de fuerzas que cumplan ciertas condiciones, por lo que es conveniente que veamos como se relacionan las fuerzas:

CASO 1. FUERZAS DE IGUAL MAGNITUD.

1.a) Dos fuerzas iguales P y P', cuyas direcciones son perpendiculares entre sí y que actúan en un punto, equivalen a una resultante R que es la bisectriz del ángulo formado por P y P', y cuya magnitud es la de la diagonal del cuadrado construído con P = P' como lados. (fig. 5)

[2] *La aceleración es una variación de la velocidad en el tiempo. Es inversamente proporcional a la masa del cuerpo y directamente proporcional a la fuerza.*

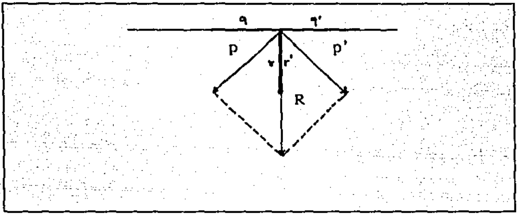

Fig. 5

Por el teorema del paralelogramo tanto P como P' podrán descomponerse en la suma de dos fuerzas. Sean estas fuerzas perpendiculares entre sí, entonces tenemos:

$$P = q + r$$
$$P' = q' + r'$$

a) Por construcción P = P' y P $\perp$ P', así P y P' son las diagonales de los respectivos cuadrados cuyos lados son sus componentes.

1o. Los cuadrados formados por las componentes son iguales.
2o. q = q', de igual dirección, pero de sentidos opuestos.
3o. r = r', de igual dirección y del mismo sentido.

b) Como las fuerzas q y q' son de sentidos opuestos, se equilibran anulándose. Por su parte, r y r' que son del mismo sentido, se suman, de manera que su suma es R.

c) Dado que r = r', entonces R = r + r' = 2r.

1.b) Conservando la igualdad de P y P', hacemos el ángulo A mayor que 90. Observamos que a medida que A tiende a dos rectos (180°) la resultante sigue siendo la bisectriz, pero su magnitud decrece, ya que el paralelogramo tiende a parecerse más a un rombo cuya diagonal mayor está formada por las fuerzas que se anulan y cuya diagonal menor es la suma de las componentes que actúan en el mismo sentido. (fig. 6)

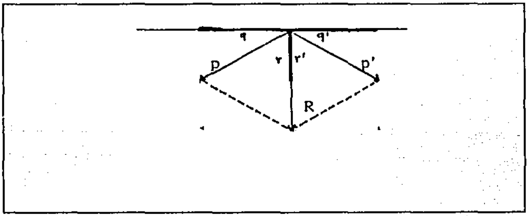

Fig. 6

1.c) Sea el ángulo A menor que un recto, pero mayor que 0 ; con P = P'. En este caso las fuerzas componentes que se oponen y se anulan son cada vez más pequeñas. Por el contrario,las componentes que se suman se parecen más a las fuerzas originales, así, cuando el ángulo A = 0, P y P' son dos fuerzas que actúan en el mismo sentido y sus magnitudes se suman para formar la resultante R = P + P' = 2P. (fig. 7)

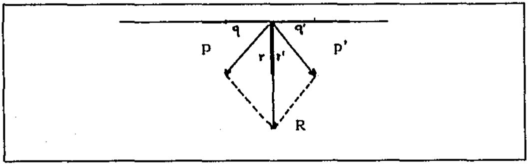

Fig. 7

CASO 2. FUERZAS DESIGUALES.

2.a) Sean dos fuerzas P y P', perpendiculares y de magnitudes diferentes. (fig. 8)

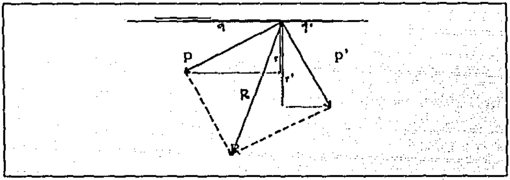

Fig. 8

Sea como en el caso 1.a) P = q + r, P' = q' + r'; q r, q' r' formando dos cuadrados de diferentes medidas.

a) Como q = q', con la misma dirección pero con sentidos opuestos, la fuerza mayor q' no se equilibra con q por lo que su suma algebraica es: q' - q = 0.

b) Las fuerzas r y r' son perpendiculares a (q' - q) y se suman por tener la misma dirección y el mismo sentido. Su resultante es (r = r').

c) Traslademos (r = r') al punto en que termina (q' - q) y tendremos R = P = p" representadas por la suma de la suma de sus componentes: R = [(q' - q) + (r + r')].

OBSERVACIONES:

1. La situación del caso 2.a) subsiste cuando el ángulo A es mayor o menor que 90°.

2. Cuando el ángulo es mayor que dos rectos, pero menor que cuatro rectos, la situación de las componentes horizontales se generaliza y, tanto las fuerzas horizontales como las verticales se suman o se restan conforme sean de igual sentido o de sentidos opuestos. (fig. 9)

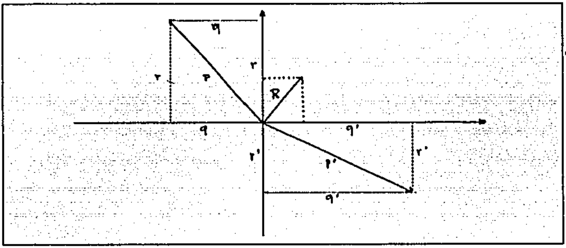

Fig. 9

3. Al punto de aplicación de la resultante R de un sistema de fuerzas, se le llama el "centro de gravedad" del sistema.

1.4 METODOS PARA SUMAR FUERZAS:

Existen varios métodos para sumar un número arbitrario de fuerzas representadas en un plano cartesiano, pero todos ellos tienen como base el teorema del paralelogramo:

METODO 1: Descomponiendo cada fuerza en dos componentes perpendiculares paralelas a los ejes del plano. (fig. 10)

Cada una de las fuerzas Pi se descompone en qi y ri conservando las componentes los signos correspondientes a las direcciones de los ejes del plano, entonces la resultante R será la sumatoria de las componentes horizontales más la sumatoria de las componentes verticales:

$$R = \sum q_i + r_i$$

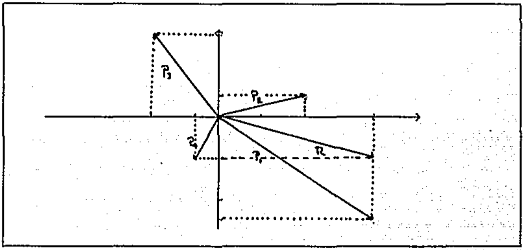

Fig. 10

METODO 2: Trasladando las flechas que representan las fuerzas, una a continuación de otra. (fig. 11)

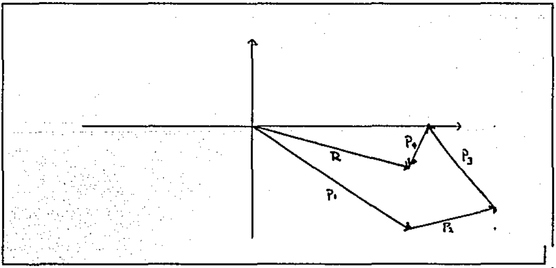

Fig. 11

Siguiendo este procedimiento se forma un polígono, llamado el "Polígono de fuerzas", cuyos lados son las fuerzas que queremos sumar, de manera que si seguimos el orden de i, Pi termina en el punto en que arranca Pi+1, así sucesivamente hasta n. La resultante es la fuerza que, partiendo del origen, termina en el punto en que termina la última flecha del polígono. Si utilizamos el teorema del paralelogramo para dos fuerzas cada vez, se obtiene exactamente el mismo resultado.

I.5 EL CENTRO DE GRAVEDAD.

Existe una fuerza que es familiar para nosotros en relación a los cuerpos. Esta es el "peso" del cuerpo, que es la fuerza con la que el cuerpo es atraído por la tierra.

Si tomamos en cuenta que un cuerpo está formado por partículas y que cada partícula tiene un peso, el peso del cuerpo será la suma de los pesos de todas sus partículas, y esta fuerza resultante está aplicada en un punto llamado el "centro de gravedad" del cuerpo. Se puede decir que el peso de un cuerpo está concentrado en ese punto, en el que actúa la fuerza de gravedad de la tierra, por lo que el peso de ese cuerpo se representa por la fuerza con la que es atraído hacia la tierra y que actúa en ese punto.

Cabe preguntar: ¿En dónde estará situado el centro de gravedad de un grupo de cuerpos?

Si en una balsa hay muchas personas, el equilibrio de la balsa depende de la posición del centro de gravedad común, es decir, este centro de gravedad es el punto de aplicación de la suma de las fuerzas de gravedad de todos los cuerpos del grupo de personas que ocupan la balsa.

No obstante que Arquímedes realizó importantes descubrimientos, es el "Eureka" la expresión que lo identifica; sin embargo se cuenta que Arquímedes escribió al rey de Siracusa lo siguiente: "Si hubiera otra tierra, yo pasaría a ella y movería la nuestra", o también: "dadme una palanca y un punto de apoyo y moveré al mundo".

Este punto de apoyo es el origen desde el cual se mide la distancia al punto en que se aplica cada una de las fuerzas.se le asigna a esa distancia el nombre de "brazo de palanca", cuyo producto por la magnitud de la fuerza recibe el nombre de "momento de la fuerza", de manera que el momento estático es el equilibrio de las fuerzas y de sus momentos.

Por el teorema de Arquímedes: "pesos conmensurables están en equilibrio cuando son inversamente proporcionales a sus distancias (del punto de apoyo)" concluímos que, además del equilibrio que se establece entre la resultante con su oponente, la **segunda condición necesaria para el reposo o la rotación uniforme de un cuerpo sólido al que se aplica un sistema de fuerzas, es el equilibrio de los momentos..**

1.6 LA PALANCA.

Teóricamente la palanca ideal es una máquina simple que consiste en una barra rígida en la que pudieramos fijar los puntos de aplicación de las fuerzas y el punto de apoyo. Se reconocen tres géneros de palancas conforme la colocación del punto de apoyo A y las fuerzas llamadas de potencia P y de resistencia R.

1er. Género: P A R

2o. Género: P R A

3er. Género: R P A

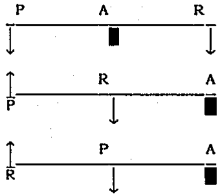

Fig.12

Considerando el plano que contiene la recta que representa a la barra, en el primer género ambas fuerzas tienen el mismo sentido, no así en las de segundo y tercer géneros, en que las fuerzas tienen sentidos opuestos.

Si en la palanca de primer género las fuerzas tuvieran sentidos contrarios darían lugar a un movimiento de rotación alrededor del punto de apoyo y se les identifica como un "par de fuerzas". El mismo efecto se produce si las fuerzas colocadas a un mismo lado del punto de apoyo tuvieran el mismo sentido (Fig. 13)

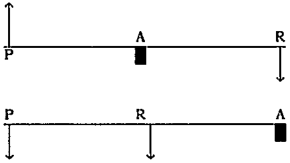

Fig. 13

En tal caso, podemos encontrar una fuerza cuyo momento sea equivalente a la suma de los momentos.

1.6.1 Las componentes de una fuerza. Su producto.

Hemos expresado una fuerza resultante como la suma de dos fuerzas. A su vez, la fuerza resultante se puede descomponer siempre como la suma de dos fuerzas (que no son necesariamente únicas), de manera que estas dos fuerzas pueden ser las que tengan como dirección la de los ejes cartesianos ortogonales. (Fig. 10).

Sean, entonces, n fuerzas en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Sus componentes como hemos dicho se identificarán por el nombre de los ejes X y Y, y su expresión estará dada como sigue:

$$P_i = x_i + y_i$$

Como estas componentes son ortogonales y les podemos asignar el número real que corresponde al valor de su longitud medida sobre el eje correspondiente a partir del origen "0" del plano cartesiano, podemos efectuar su producto $x_i y_i$. es decir, su momento estático. Aquí hemos considerado la x_i como el brazo de palanca de la fuerza y a la y_i como el peso o intensidad de la misma.

Hagamos ahora la suma de los momentos estáticos de las fuerzas del sistema y el resultado dividámoslo entre la suma de los pesos o intensidades de las mismas:

$$\frac{\sum x_i y_i}{\sum y_i} = C$$

Hemos obtenido el punto C como un producto de números reales, por lo tanto es un número real que nos indica el centro de gravedad de nuestro sistema de fuerzas.

Traslademos el eje Y sobre la recta X hasta el valor obtenido C, con lo que los valores de las componentes y_i no se habrán alterado, pero las componentes x_i se verán afectadas por ± C, de manera que necesitamos expresar estos nuevos valores con una $x'_i = (x_i \mp C)$.

Con lo anterior el nuevo sistema estará anclado en su centro de gravedad en C, con lo que $\sum x'_i y_i = 0$ y por lo tanto, se encuentra en equilibrio

1.6.2 El cálculo de la media aritmética y la media ponderada.

El cálculo del centro de gravedad de la mecánica tiene un cúmulo de aplicaciones (aparentemente sencillas), pero que son de la mayor relevancia para los fundamentos de la estadística, la programación, etc. Proponemos enseguida un ejemplo por demás simple, pero que seguramente será atractivo:

Sean los pesos P = 30, R = 20, con AP = 8 y AR = 15, cuyos productos o momentos son:

$$MP = 30 \times 8 = 240, \text{ y}$$
$$MR = 20 \times 15 = 300$$

La suma de los productos:

$$MP + MR = 240 + 300 = 540$$

y la suma de sus pesos:

$$P + R = 30 + 20 = 50$$

Si dividimos 540 entre 50, obtendremos 10.8 que será el valor C, a partir del cual tomaremos los nuevos brazos de palanca de ambas fuerzas. Esto es:

$$CP = 10.8 - 8 = 2.8$$
$$CR = 15 - 10.8 = 4.2$$

Ahora bien, calculando sus nuevos momentos, tendremos:

$$CP \times P = 2.8 \times 30 = 84$$
$$CR \times R = 4.2 \times 20 = 84$$

Con lo cual los momentos están en equilibrio. Además se comprueba que el momento de la suma de las dos fuerzas por el brazo de palanca en el punto de equilibrio es el centro de gravedad del sistema:

$$(P + R) \times C = 50 \times 10.8 = 540.$$

Por último:

$$(PR \times P) - (CR \times R) = 0.$$

Si los pesos fueran iguales, tendríamos:

$$8\ P + 15\ P = 23\ P$$

$$P + P = 2\ P$$

$$23\ P / 2P = 23/2 = 11.5$$

Observemos que este valor corresponde al valor medio de 8 y de 15 ya que los pesos son iguales y se cancelan en ambas sumas, y en el primer caso, cuando las fuerzas (pesos) son diferentes, se obtiene con este procedimiento el cálculo de la media ponderada, que es un elemento de análisis sumamente usado en problemas de diversa índole, de manera especial en aplicaciones de estadística.

1.7 REPRESENTACION VECTORIAL DE LAS FUERZAS.

La representación vectorial de las fuerzas se le adjudica a Giusto Bellavitis (1803-1880) quien en 1837 sustituye la notación PQ del vector con origen en el punto P y final en el punto Q, por la de Q - P, sin embargo el nombre de VECTOR, (que se deriva del latín vehere = transportar) fué introducido en 1845 por Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) que lo represento por una sóla letra y H. G. Grassmann (1809-1877) en 1844 considera el vector como una forma geométrica particular de primera especie y la designa con el nombre de "Strcke" que se traduce como "segmento".

1.8 LA ECONOMIA Y LA FISICA. IRVING FISHER.

Apoyados en el concepto de campo y de espacio vectorial, Grassman e independientemente el inglés Cayley (1821-1895) hicieron la exposición sistemática de una geometría multidimensional que permitió a la economía representar por medio de vectores los factores de la producción y de la demanda y desarrollar un análisis del comportamiento de los mercados por medio de sistemas multiecuacionales, siendo Irving Fisher (1867-1947) en su tesis doctoral presentada en 1892, quien introdujo esta caracterización vectorial de una economía, lo cual se explica fácilmente, tomando en cuenta que su trabajo fué asesorado por el físico norteamericano Josiah Willard Gibbs, creador de teorías importantes en termodinámica.

Para conluir este esbozo del concepto de equilibrio en economía y su relación con el mismo concepto en la mecánica, anotaremos la comparación que hizo Fisher de esos dos cuerpos del conocimiento, en un trabajo publicado por Yale University Press, New Haven en 1926, con el título "Mathematical Investigations into the Theory of Value and Prices": [4.P.224-5]

MECANICA	ECONOMIA
Una partícula	Un individuo
El espacio	La mercadería
La fuerza	La utilidad marginal o desutilidad
La energía	La utilidad
El trabajo de energía = fuerza X espacio	La utilidad = utilidad marginal X mercaderías
La fuerza es un vector	La utilidad marginal es un vector
Las fuerzas son sumadas como vectores	Las utilidades marginales son sumadas como vectores
El trabajo y la energía son escalares	La desutilidad y la utilidad son escalares
La energía total puede ser como la integral con respecto a las fuerzas que la inducen	La utilidad total disfrutada definida por el individuo es como la integral con respecto a las utilidades marginales
El equilibrio estará en donde la energía neta (energía menos trabajo) es máxima; ó donde la fuerzas de inducción y resistencia por cada eje sean iguales	El equilibrio estará en donde la ganancia (utilidad menos desutilidad) es máxima; ó donde la utilidad marginal y la desutilidad marginal por cada eje sean iguales
Si la energía total es sustraída del trabajo total, en lugar de viceversa, la diferencia es el "potencial" y es un mínimo.	Si la utilidad total es sustraída de la desutilidad total, en lugar de viceversa, la diferencia puede ser llamada la "pérdida" y es mínima.
La fuerza componente por un eje en equilibrio	El precio de una mercancía por un eje en equilibrio
La energía cinética	El gasto total
El desplazamiento	La unidad incrementada de mercancías
La conservación de la energía	La conservación de la utilidad más el gasto.

Indudablemente esta correlación de conceptos, que pudiera entenderse como la búsqueda de un isomorfismo entre dos campos aparentemente lejanos o fundamentalmente ajenos, ha estado en continua discusion en la que se han hecho notar los argumentos que por, por principio, conducen a una aceptación de ciertos elementos básicos y que, en la actualidad han adquirido mayor solidez con las posibilidades que abre el uso del análisis vectorial , por lo que es un estudio abierto tanto en las matemáticas como en la física, así como en la economía, en donde se han hecho importantes aplicaciones con el algebra y la programación lineales.

1.9 EL MODELO DE LEONTIEF.

El modelo de Leontief es un mecanismo con algebra lineal que consta del registro de las necesidades de una economía para efectuar la producción y que permite determinar el nivel de la producción para satisfacer cada nueva demanda y como instrumento de complemento y control de estudios de contabilidad nacional. Su estructura incluye dos conceptos:

I. Cantidades físicas de los bienes: Sean la matriz de insumos (q_{ij}) que representa la cantidad de la mercancía i necesaria para la producción del bien j; Q_i la cantidad total de la mercancía i.

Características:

Las cantidades físicas de las mercancías se relacionan como sigue:

I. $(q_{ij}) \geq 0.$

II. $\sum_{j=1}^{n} q_{ij} = Q_i.$

III. $\frac{q_{ij}}{Q_j} = a_{ij}$. Es la cantidad del bien i necesaria para producir una unidad del bien j (coeficientes técnicos de la producción); $(a_{ij}) = A.$

$$\therefore q_{ij} = a_{ij}Q_j \Rightarrow$$

$$\sum a_{ij}Q_j = Q_j; \sum a_{ij} = 1.$$

En cuanto a los precios, sea $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ el vector de los precios de las n mercancías, entonces:

IV. $p\ (q_{ij}) = pQ$ será el valor de la producción que se expresa con $[p(q_{ij})]^T$.

Utilizando la matriz A, tenemos: $Ap = p$ y $Aq = Q$, dos sistemas perfectamente simétricos para los precios y para la producción total.

Con estas matrices Leontief construye dos modelos, el cerrado y el abierto, cuyas diferencias son como sigue:

$$(A - I)Q = 0$$

El modelo cerrado: Contiene n bienes y n empresas (incluyendo los bienes el vector "trabajo", y las empresas contienen la columna de la demanda final con idéntico tratamiento que el de las empresas). La demanda final se considera como una industria que requiere una serie de insumos y ofrece un output constituido por una serie de servicios (trabajo y recursos productivos) a los que corresponde una remuneración global (valor añadido) que comprende salarios, sueldos, beneficios y rentas. Formalmente constituyen dos sistemas lineales y homogéneos. Las soluciones triviales no son de interés económico y las soluciones positivas exigen que $|(A-I)| = 0$ y $|(A-I)|^{-1} = 0$, i.e.

1. Al menos una columna de la matriz de coeficientes será linealmente dependiente de las otras. Ya que sabemos que las primeras (n-1) columnas corresponden a los coeficientes de producción de los procesos productivos, no es factible que las n-1 columnas tengan una columna como combinación lineal de las restantes. La columna de la demanda final no es un dato técnico y es la que se da como dependiente de las demás en el sistema estacionario. El argumento que la sustenta es el de que la demanda final no puede ser superior a las posibilidades técnicas de producción, pero tampoco puede ser inferior a ellas. Esto diría que la suma de los productos de cada industria sería menor que la suma de los insumos: La acumulación de "stocks" (capacidad productiva ociosa) y/o la suma total de las necesidades del trabajo, inferior a la fuerza de trabajo disponible (desocupación). Este argumento se avala por la condición de Keynes: **El volumen de la demanda final debe igualar la capacidad productiva del sistema, si se desea ocupación plena.**

2. La matriz A se considera una matriz productiva si existe un vector columna $\bar{X}$, tal que $\bar{X} > A\bar{X}$. De aquí que podamos obtener un vector $\bar{Y} = \bar{X} - A\bar{X} > 0$.

La interpretación económica es la siguiente:

(1). El sistema de precios determina sólo los precios relativos, pero no su nivel absoluto. $r(A-I) = n-1$.

(2). El sistema determina las cantidades relativas o proporciones en las que se han producido los bienes, pero no su nivel absoluto de producción. Determina la estructura del sistema pero no su escala de activación, siempre bajo la hipótesis de rendimientos a escala constantes.

(3). El trabajo Q_n no es una variable ajena al sistema (exógena). Si así fuera, caeríamos en el modelo abierto: n-1 renglones de insumos.

El modelo abierto se expresa por $(I-A)Q = Y$ con una matriz A que no es la original, ya que le falta un renglón, de tal manera que $r(A) = n-1$. La solución del sistema es $(I-A)^{-1}Y = Q$.

OBSERVACION:Como $r(I-A) = n-1$, entonces existe una solución no negativa, como hemos determinado en el sistema.

CARACTERISTICAS:

a). $\bar{Y} \geq \vec{0}$; $A \geq \bar{0}$.

(b) Las soluciones dependen tanto de $\bar{Y}$ como de A.

(c) Si $(I-A)^{-1} \geq 0 \Rightarrow Q \geq 0$.

Es necesario tener en cuenta que $(I-A)^{-1} \subset \{(\mu I-A)^{-1}\}$ $\mu=1$ Estas matrices se analizan a través del teorema de Perrón-Frobenius en donde se hace notar la importancia del auto-valor máximo de los sistemas económicos: $\lambda_m < 1$, cuyas características técnicas deben permitir que la producción de al menos una mercancía supere las necesidades de reemplazamiento del sistema productivo, lo cual determina las características de las matrices.

1.10 EDGEWORTH, PARETO, HICKS Y ALLEN.

Tratándose del estudio de los fenómenos inherentes a la existencia del hombre, la economía se ha visto también relacionada con la psicología en el estudio del comportamiento de los individuos respecto a las preferencias que hacen de los bienes que satisfacen sus necesidades. Esta teoría neoclásica de la utilidad aparece con Francis Edgeworth (1845-1926), cuyos métodos recogen las experiencias de los economistas del marginalismo y las teorías de la optimalidad construídas en esta misma época, rehaciendo la conceptualización de las relaciones de intercambio y el consumo bajo una teoría general de la elección, que se expresa en un método ilustrado con gráficas originales y las llamadas "curvas de indiferencia" como una especie de mapas que permiten observar el comportamiento de los agentes económicos en el mercado. Estas observaciones se complementan con la teoría de optimalidad debida a Pareto.

Es alrededor de los años treinta de nuestro siglo que Sir John R. Hicks (Premio Nobel 1972), y R.G.D. Allen revolucionaron el análisis microeconómico utilizando la curva de indiferencia de Edgeworth. Hicks publicó en 1939 su libro "Valor y Capital" que produjo una amplia aceptación de la idea, recibiendo un fuerte impulso en el rescate de la teoría neoclásica de la utilidad en la London School of Economics, con el libro de Lord Robbins "Ensayo sobre la naturaleza y significación de la Ciencia Económica" [11.p.54], pero fué hasta 1951 cuando se encuentra una explicación completa de la teoría de la elección en términos de relaciones de orden, en la primera edición del libro de Kenneth Arrow "Social Choice and Individual Values".

BIBLIOGRAFIA DEL CAPITULO I.

[1]. BOCHNER, SALOMON.
El papel de la matemática en el desarrollo de la ciencia. (Versión española por Mariano Martínez Pérez) Alianza Universidad. Madrid. 1991. 348 p.

[2]. COURNOT, AUGUSTIN.
Investigación acerca de los principios matemáticos de la Teoría de las Riquezas. (Trad. Juan Carlos Zapatero). Alianza Editorial. Madrid. 1969. 265 p.

[3]. MACH, ERNEST.
Desarrollo histórico-crítico de la mecánica. (Versión en español de la 7a. ed. alemana Trad. José Babini). Espasa Calpe. Argentina. 1949. 433 p.

[4]. MIROWSKY, PHILIP.
More heat than light. Economics as social physics: Physics as nature's economics. Cambridge University Press. USA. 1989. 450 p.

[5]. NAPOLEONI, CLAUDIO
Diccionario de Economía Política. Ed. Castilla. Madrid. 1962. 1004 p.

[6]. POINCARE, HENRY.
La valeur de la science. Flammarion. París. 1911. 278 p.

[7]. ROLL, ERIC
Historia de las Doctrinas Económicas. (Trad. Florentino M. Tornes) F.C.E. 6a. Reimp. México. 1987. 613 p.

[8]. RUSSELL, BERTRAND.
Los principios de la matemática. (Trad. del inglés Juan Carlos Grimberg). Espasa Calpe. 3ed. Madrid. 1977. 619 p.

[9]. SAMUELSON, PAUL ANTHONY
Fundamentos del análisis económico. 4a. ed. El Ateneo. 1977. 461 p.

[10] WALRAS, LEON.
Elementos de Economía Política Pura (o Teoría de la Riqueza Social). (Ed. y Trad. Julio Segura). Alianza Universidad. Madrid. 1987. 818 p.

[11] WALSH, VIVIAN CHARLES.
Introducción a la microeconomía comtemporánea. Trad. Eugenia Salvador Menceré. 1a. ed. Vicens-vives. España. 1974. 358 p.

CAPITULO II

2.1 LA REVOLUCION NEWTONIANA Y EL METODO.

Es necesario reconocer la capacidad creadora de Newton en una época en la que, sólo con la intuición que señalaba Descartes y acicateados por la urgencia de esclarecer un cúmulo de ideas metafísicas, los hombres del siglo XVII y XVIII forjaron los eslabones que unieron la filosofía de la ciencia natural con las matemáticas. Las ciencias de la naturaleza, apoyadas en la observación y en el laboratorio, recibieron de manos de Newton y de Leibniz el instrumento del cálculo infinitesimal que despertó críticas preñadas de ironía como la del obispo Berkeley "El analista, discurso dirigido a los matemáticos incrédulos", que tuvo el efecto de estimular la formalización de los conceptos básicos de la nueva ciencia, como la había llamado Galileo.

La ruptura que establece esa nueva ciencia con el paradigma aristotélico se fué gestando durante la edad media y se nutrió con los descubrimientos y con las invenciones de la revolución newtoniana y la transformación de las ideas científicas. Un ejemplo: el cálculo diferencial es el instrumento que permite a Urbain León Joseph Leverrier (1811-1877) predecir en 1846 la existencia del planeta Neptuno y señalar cual debería ser su posición en el firmamento, aunque no se contara con un telescopio capáz de corroborar sus deducciones, ya que el éxito de su razonamiento se debió, desde luego, al uso de las ecuaciones diferenciales, pero, de manera fundamental, su trabajo se cimenta en el método que Newton expone en su cuestión 31 de los Principia Matemática.

El análisis nos permite - señala Newton - "pasar de los compuestos a sus ingredientes y de los movimientos a las causas y de estas causas particulares a las más generales, hasta que el argumento termine en la más general" [5. p. 31].

Cournot utiliza este método y el cálculo diferencial, y hace notar en la exposición de las primeras nociones acerca de las consecuencias del concurso de productores, ciertas relaciones "bastante curiosas", haciendo énfasis en que, **desde un punto de vista puramente abstracto, existe una total independencia entre el análisis y las aplicaciones empíricas.** [6. p. 20].

Siguiendo esta generación de ideas, es la lectura de las "Recherches" de Cournot lo que impulsa a Walras, a los 18 años, a dedicarse a la construcción de la economía política científica, con la cual se propone, **como un paso previo a la aplicación de una economía social**, el desarrollo del análisis de la economía política pura, proporcionando una solución al problema de la distribución de la riqueza.

¿Cual es la ventaja de la definición de riqueza social y de la clasificación de sus elementos realizada por Walras? - se pregunta Julio Segura en "La obra de Walras al cabo de un siglo" [12. p.41].

La principal es: **proporcionar un criterio que permite detectar todos los componentes de lo que hoy día es el producto nacional**, y el segundo: **es el hecho de que todos los componentes de la riqueza social son demandados y ofrecidos en mercados que en realidad operan en forma simultánea, y, por tanto, influyen unos sobre otros.** Se descubre en esta idea la importancia fundamental en el estudio científico de la riqueza social, ya que Walras se propone como objetivo de la economía política pura "**el análisis sistemático de la determinación de las demandas y de las ofertas de todos los**

elementos de la producción, y la consiguiente determinación de los precios de equilibrio", que constituyen las tres partes fundamentales de sus "Elementos".

2.2 LA FORMACION DE LOS PRECIOS.

Walras propone denominar como "precios" en general a las relaciones entre valores de cambio, o valores de cambio relativos, de los bienes intercambiados en un mercado. El valor de cambio es la propiedad que tienen ciertas cosas de no ser obtenidas o cedidas gratuitamente, sino de ser compradas o vendidas, recibidas o entregadas en proporciones cuantitativas determinadas a cambio de otras. El comprador de una cosa es el vendedor de aquella que da a cambio. El vendedor de una cosa es el comprador de aquella cosa que recibe a cambio. En otras palabras, todo cambio de dos cosas entre sí se compone de una doble venta y de una doble compra. [12.p.18].

Cournot define esta relación de precios entre varios mercados, pero Walras nos da un ejemplo para ilustrar esta definición a través de un mercado al que concurren dos mercancías (A y B), las cuales se relacionan por una ecuación de intercambio: $m\ va = n\ vb$ en donde m significa la cantidad del bien A que se intercambia por n unidades del bien B, llamando v_a al valor de cambio de la unidad del bien A y v_b al valor de cambio de una unidad del bien B.

De esta manera, los precios p_a de A y p_b de B se establecen en términos de A y de B respectivamente, utilizando la ecuación precedente para expresar los precios en la forma:

$$p_b = \frac{v_b}{v_a} = \frac{m}{n} =$$

$$p_a = \frac{v_a}{v_b} = \frac{n}{m} = \frac{1}{\quad}$$

Por tanto, los precios o las proporciones entre los valores de cambio de dos mercancías, son iguales a las proporciones inversas de las cantidades de mercancías intercambiadas.

Esto quiere decir que los precios (de A en términos de B y de B en términos de A) son recíprocos entre sí. [12. p. 185].

Pero esta forma de valor está apoyada en el concepto de "**valor de cambio**" que aparece como un atributo, dentro de las relaciones comerciales, que se asigna a las cosas que son susceptibles de intercambiarse y que, por ello, representan la riqueza [6. p. 23] a la que Cournot se refiere como una palabra usada con demasiada ambiguedad, tomando ésto como "la causa de la oposición entre las escuelas de la economía, y de la guerra que se hacen los teóricos y los prácticos." [6. p.25] ya que "se produce una confusión entre el valor de cambio de una cosa, con su utilidad." Por lo tanto, desarrollando la idea de Cournot, diremos que **la riqueza sólo se concretiza en el intercambio de los objetos a los que se les atribuye un valor de cambio,** los cuales no podrían coincidir en la cantidad de ese valor de cambio asignado a cada uno de ellos, por lo cual es necesario recurrir a un mecanismo (el momento estático de la palanca que hemos tratado en el primer capítulo) para poder relacionar los valores de cambio de ambas mercancías y definir su precio.

2.3 LA TEORIA DEL VALOR DE CAMBIO Y LA LEY DE LA DEMANDA.

Cournot invoca una hipótesis, (la llama también axioma) para establecer los fundamentos de la teoría del valor de cambio: **"Que cada hombre intenta extraer el máximo valor posible de sus bienes o de su trabajo"** de la cual deriva la definición siguiente:

El precio de las cosas está en razón inversa de la cantidad ofrecida y en razón directa de la cantidad demandada". [6. p. 67] y se pregunta: ¿Quiere decir que, en caso de que se ponga a la venta una cantidad doble de un bien, el precio descenderá a la mitad?, por lo tanto habría que explicar esta relación con mayor sencillez y limitarse a decir que: **"el precio está en razón inversa de la cantidad ofrecida"** y concluye que: **Un bien es tanto más demandado cuanto menos caro es, con lo cual desplaza su atención hacia la demanda como una función inversa del precio.**

Si convenimos que la demanda D es una función particular F(p) del precio p de cada mercancía, debemos observar que es una función decreciente y estará dependiendo básicamente "del bien de que se trate, de la naturaleza de los servicios que puede proporcionar ó de las satisfacciones que procura, de los hábitos y costumbres de cada sociedad, de la riqueza media y de la escala con arreglo a la cual está repartida la riqueza". [6. p. 70]

2.4 LA FUNCION DEMANDA.

Sea p el precio medio anual de una mercancía y una función F(p) que designará la media de todas las funciones que representan la demanda en diversas épocas del año. Sea F(p) continua, definida en el ortante positivo $\mathbb{R}^n_+$ ya que los precios son no negativos, por lo tanto, una nueva función pF(p) que expresa el valor total de la cantidad de mercancías vendidas anualmente, también será continua.

OBSERVACION: Siendo los precios no negativos, $pF(p) = 0 \Longleftrightarrow F(p) = 0$ ó/y $p = 0$.

Ahora bien, siendo la función pF(p) continua, debemos pedir que sea también diferenciable y su derivada (notación de Lagrange) será la siguiente:

$$\frac{d\ pF(p)}{dp} = F(p) + pF'(p) \qquad \text{--------- (1)}$$

Observando su comportamiento, vemos que pF(p) crece cuando p crece, existe un punto en donde es máximo y luego empieza a decrecer, por lo tanto, cuando pF(p) es máximo, entonces

$$F(p) + pF'(p) = 0 \qquad \text{--------- (2)}$$

Este máximo está representado por el área del rectángulo bajo la gráfica de F(p) cuyos lados son p y F(p), cuando su producto pF(p) es máximo.

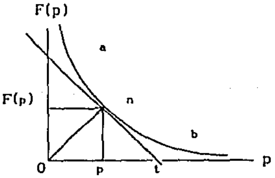

Fig. 1

De (1) se obtiene $p = -\dfrac{F(p)}{F'(p)}$ en donde F'(p) es la pendiente de la tangente a la curva anb en el punto n = (p,F(p)), esto es:

$$F'(p) = -\frac{np}{pt}$$

Sustituyendo F(p) y F'(p)

$$p = \frac{np}{np/pt} = pt \qquad \text{--------} \ (3)$$

De lo anterior, podemos conluir que: **cuando Op = pt entonces el área del rectángulo "OF(p)np" es máxima.**

Cournot utiliza el criterio de la segunda derivada para demostrar que se trata de un valor máximo, derivando (1):

$$\frac{d^2pF(p)}{dp^2} = F'(p) + F'(p) + p\,F''(p)$$

$$\left(pF(p)\right)'' = 2\,F'(p) + pF''(p)$$

Sustituyendo el valor de $p = -\dfrac{F(p)}{F'(p)}$:

$$\left(pF(p)\right)'' = 2\,F'(p) - \frac{F''(p)\,F(p)}{F'(p)}$$

$$= \frac{2\left(F'(p)\right)^2 - F''(p)\,F(p)}{F'(p)} \qquad \text{--------}(4)$$

OBSERVACION: **Teniendo en cuenta el signo esencialmente negativo de F'(p),** la raíz de F(p) + pF'(p) = 0 corresponderá a un mínimo o a un máximo, dependiendo de que:

$$2[F'(p)]^2 - F''(P)\,F(p) > \text{ó} < 0".$$

Ya que Cournot hace hincapié en que: **"cuando F"(p) es negativo, o cuando la curva D = F(p) es cóncava con respecto al eje de abcisas, no es posible que haya un mínimo, ni más de un máximo. En el caso contrario, la existencia de varios mínimos y máximos no se ha demostrado que sea imposible"**, hagamos la siguiente

OBSERVACION: Cournot ha partido de definir a F(p) como una función decreciente, convexa y, por supuesto, siempre positiva, de manera que fuera conforme con la definición que se hizo de la ley de la demanda, pero su afirmación abre la posibilidad de que F(p) no siga siempre esa ley y entonces no correspondería a las características que se le han asignado, pues F"(p) será negativa sólo cuando F(p) sea una función cóncava con la conclusión que obtiene respecto a sus valores extremos. Además, no descarta la posibilidad de que exista una función pF(p) que pasara por varios mínimos y máximos, lo cual estaría reflejando una demanda que estaría "fuera de la ley", lo que no ocasiona ningún problema si consideramos únicamente su comportamiento **"dentro de los límites de oscilación de p, para valores crecientes de p"** [6. p. 80].

Esta conceptualización de la demanda es natural ahora para los economistas, pero como expresa Mark Blaug respecto a Cournot: "Para probar la existencia y la unicidad de este máximo, empleó las pruebas familiares del cálculo: la primera derivada de la función de beneficio debe igualarse a cero, y la segunda derivada debe ser negativa .¡Todo esto en 1838! [4. p. 402]

No obstante que la teoría de la demanda de Cournot no se apoya en el concepto de la utilidad, servirá a Walras para desarrollar la relación entre la oferta y la demanda, por lo que es conveniente conocer la opinión de Robert B. Ekelund en relación a la importancia que tiene la obra de Cournot en el desarrollo matemático de la economía política:

"Uno de los grandes logros de Cournot fué haber descubierto la ley de la demanda (loi de debit). Como la mayoría de los estudiantes sabe, la ley de la demanda afirma que la cantidad demandada es un función del precio, D = F(p). La cantidad demandada se refiere, por supuesto, a una serie de otras variables (renta, riqueza y otras por el estilo), pero se supone que éstas son constantes cuando se determina la lista de la demanda individual. Cuando una de las variables distintas del precio se modifica, se desplaza toda la curva de demanda, lo que conlleva una variación de la demanda. Un cambio en la cantidad demandada se produce cuando cambia el precio, permaneciendo constantes todas las demás determinantes. Cournot comprendió perfectamente el valor del análisis bajo el supuesto de ceteris paribus, es decir, "permaneciendo igual todo lo demás..."

"La ley de la demanda descansa esencialmente sobre la población, la distribución de la riqueza, el bien general, los gustos, los hábitos de consumo de la población, la multiplicación de los mercados, la extensión del mercado resultante de las mejoras del transporte. Todas estas condiciones relativas a la demanda permanecen iguales; si suponemos que cambian las condiciones de la producción (es decir, que los costos aumentan o disminuyen), que los monopolios se restringen o se suprimen, que los impuestos aumentan o se reducen, que la competencia extranjera se prohibe o se permite), los precios variarán y las correspondientes variaciones en la demanda, suponiendo que los precios de hecho hayan subido, servirán para la construcción de nuestras tablas empíricas. Si, por el contrario, los precios cambian porque ha cambiado la propia ley de la demanda, debido a un cambio en las causas que ya no tienen influencia en la producción, sino en el consumo, la construcción de nuestras tablas será imposible, porque ellas tienen que mostrar como cambia la demanda en virtud de un cambio en el precio y no en virtud de otras causas".

Esta aportación trasciende con amplitud su valor histórico por la permanencia del análisis, ya que "*es evidente que Cournot identificaba la ley de la demanda con la concepción moderna de una función de demanda; asimismo, su cambio en la "demanda" corresponde al empleo moderno de un cambio en la "cantidad demandada". Este método de análisis es tan común en la actualidad que al teórico moderno no se le ocurriría expresar ideas complejas sólo en forma de palabras, pero Cournot introdujo los planteamientos matemáticos y gráficos cuando la expresión puramente verbal era el instrumento del teórico*".

Puede plantearse una cuestión adicional, enteramente legítima: ¿Qué clase de teoría intentaba desarrollar Cournot con instrumentos matemáticos? ¿Era la teoría que él consideraba, quimérica o desconectada de la realidad, como tantos argumentan respecto a la teoría económica en la actualidad? La respuesta a estas preguntas revela la naturaleza brillantemente dual de la aproximación metodológica de Cournot. El consideraba que un análisis económico tenía que <u>basarse en la observación empírica</u> *y en los hechos. Este punto puede ilustrarse volviendo al concepto innovador de la ley de la demanda de Cournot*".

"Habiendo rechazado la utilidad como fundamento de su función de demanda, Cournot presentó lo que era básicamente una aproximación empírica de la demanda. El título del capítulo sobre la demanda en el original de las Recherches, "De la loi du debit" ("Ley de las ventas" en la traducción inglesa [N.delT.]) o "De la ley de la demanda" insinúa su planteamiento empírico, y Cournot dió entera y explícitamente a su función de demanda una definición empírica. Observó: "La venta, o la demanda (ya que para nosotros estas dos palabras son sinónimas y no vemos la razón por la que la teoría deba considerar una demanda no seguida de una venta) crece

en general cuando el precio desciende". El admitía que los precios y la ley de la demanda podían fluctuar en el período de un año, y definió su curva en relación con un precio medio anual "p", *siendo F(p), "la cantidad vendida anualmente en el ámbito del país o del mercado que se considera". De ahí que D = F(p) sea una curva que relaciona series de datos temporales de ventas y precios a los que se han realizado dichas ventas."*

"Así pues, la especificación teórica de la demanda que lleva a cabo Cournot (continua y con pendiente negativa) se deduce de su propia observación y de simplificaciones y observaciones de las relaciones entre precio y cantidad." [9. p. 308-9]

Se señala, además, que Cournot hizo servir este método para la creación de numerosos modelos de comportamiento de la empresa, basados en la curva de la demanda y, puesto que la teoría del equilibrio general fija su atención principalmente en el vector de los precios y en la demanda de exceso relacionada con ese vector, seguiremos la idea de Cournot, de investigar las leyes con arreglo a las cuales se establecen los precios.

2.5 LA FUNCION DE OFERTA.

Una práctica entre los economistas actuales es tratar de calcular los valores de la demanda y de la oferta de un bien, para los cuales coinciden las cantidades y los precios, a lo cual se le llama un "equilibrio del mercado para ese bien". Este resultado, que se ilustra exhibiendo en el plano cartesiano la intersección de las gráficas de la función de demanda con la de oferta, representa una imagen sencilla de cómo interpretar matemáticamente la noción de equilibrio de una economía en la que no se considera a ese bien relacionado con otros bienes, ya que el precio se considera absoluto por estar relacionado con el numerario dinero, por lo que es necesario recordar ahora lo expuesto en el apartado 2.2 (p.38), sobre la formación de los precios a través del intercambio de dos bienes, de tal manera que, al establecerse un intercambio, la demanda de uno representa la oferta del otro y viceversa.

En consecuencia, al decir que se demanda una cantidad D_a de un bien A al precio p_a, se está implicando que, al mismo tiempo se está ofreciendo una cantidad O_b del bien B igual al precio $D_a \cdot p_a$ con el cual se realiza el intercambio. Aquí exhibimos la ecuación que establece Walras [12. p. 185]:

$$O_b = D_a \times p_a \qquad \text{---------------} \ (5)$$

De igual forma, decir que se ofrece la cantidad O_a del bien A al precio p_a, se estará diciendo que existe una demanda del bien B, D_b al precio p_b, que cubrirá esa oferta:

$$O_a = D_b \times p_b \qquad \text{---------------} \ (6)$$

De (5) despejamos la demanda de A sustituyendo el precio de B, que es $1/p_a$, por p_b (2.2), y tendremos lo mismo para D_b:

$$D_a = O_b \times p_b \qquad \text{---------------} \ (7)$$

$$D_b = O_a \times p_a \qquad \text{---------------} \ (8)$$

Walras propone el siguiente enunciado, como un

TEOREMA I: **La demanda o la oferta efectivas de una mercancía que se intercambia con la otra, es igual a la oferta o a la demanda efectivas de esta última, multiplicada por su precio en términos de la primera.**

A manera de demostración, justifica el enunciado de la siguiente manera: "*En efecto, en el fenómeno del intercambio en especie entre dos mercancías, la demanda debe considerarse como el fenómeno principal, y la oferta como un fenómeno accesorio. No se ofrece por ofrecer;* se ofrece tan sólo porque no se puede demandar sin ofrecer; *la oferta no es más que la consecuencia de la demanda. Nos contentaremos consiguientemente por ahora, con la relación indirecta entre la oferta y el precio, y no investigaremos más relación directa que la existente entre demanda y precio.*"[12.p.186]

TEOREMA 2: **Dadas dos mercancías, la relación entre la demanda efectiva de una y su oferta efectiva, es igual a la relación entre la oferta efectiva de la otra y su demanda efectiva.** [12.p.187]

La demostración: multiplicando (5) y (6) ó (7) y (8), y tomando en cuenta que $p_a \times p_b = 1$, se obtiene:

$$D_a \times D_b = O_a \times O_b \qquad \text{------------} \; (9)$$

$$\frac{D_a}{O_a} = \frac{O_b}{D_b} = \alpha \qquad \text{------------} \; (10)$$

Esta razón inversa de las demandas y de las ofertas de las dos mercancías es de gran importancia. Por ahora, observemos que efectos se producen con los valores que podría tomar α:

$$D_a = \alpha\, O_a$$
$$O_b = \alpha\, D_b \qquad \text{------------} \; (10a)$$

Suponiendo que $\alpha = 1$, entonces $D_a = O_a$ y $D_b = O_b$, lo que nos indica que las cantidades respectivamente demandadas y ofrecidas de ambas mercancías a los precios relativos $p_a = 1/\mu$ y $p_b = \mu$, son iguales; "**cada comprador y vendedor encuentra exactamente su contrapartida en un vendedor o en un comprador y se**

da el equilibrio en el mercado. A los precios de equilibrio $1/\mu$ y μ, la cantidad Da = Oa de A se intercambia por la cantidad Ob = Bb de B y, cuando el mercado cierra, los poseedores de mercancías se van cada uno por su lado."

Pero lo más probable es que $\alpha \neq 1$, por lo que tendríamos que: si $\alpha < 1$ ó $\alpha > 1$, entonces $D_a < O_a$ y $O_b < D_b$ ó $D_a > O_a$ y $O_b > D_b$. Esto nos obliga a investigar cómo alcanzar el valor de $\alpha = 1$ ó, lo que es lo mismo, la igualdad entre la oferta y la demanda de cada una de ambas mercancías.

Observemos el mercado del maíz y del frijol a manera de ejemplo: Sea el maíz la mercancía A y sea la mercancía B el frijol.

Si consideramos los valores de cambio de estas mercancías en relación a la unidad dineraria en uso, podemos establecer los precios relativos, como sigue: $v_a = 1800$; $v_b = 5000$. En esta forma, la relación de intercambio se obtiene calculando el precio de A en términos del precio de B, al que debe intercambiarse una tonelada de maíz por una cantidad de frijol, al precio del frijol en términos del precio del maíz, y que sean equivalentes.

$$D_a\ 1500 = O_b\ 5000$$
$$D_a = O_b\ 5000/1800$$

Entonces, si la demanda de A fuera de la unidad (una tonelada), la oferta de B debería corresponder a 18/50 de tonelada, es decir: $\underline{O_b \equiv 360}$ <u>kgs.</u>; por lo que ahora debemos representar la demanda de B en términos de A:

$$D_b\ 5000 = O_a\ 1800$$
$$D_b = O_a\ 1800/5000$$

Por lo consiguiente: El equivalente para el intercambio de una tonelada de frijol, vendría a ser 50/18 de tonelada de maíz; i.e. $O_a \equiv$ 2.777 toneladas de maíz por una tonelada de frijol.

Bajo esta relación, supongamos que el productor de maíz se presenta en el mercado con 1,000 toneladas y el productor de frijol ofrece 360 toneladas. El intercambio se produce a los precios establecidos y el producto del intercambio es como sigue:

1,000 Ton. de Maíz x 1,800.oo = 1'800,000.oo
360 Ton. Frijol x 5,000.oo = 1'800.000.oo

con lo cual, por un lado la oferta del maíz se equipara a la del frijol y ambas demandas son iguales, y, por el otro, la oferta y la demanda de cada uno de los productos es la misma.

2.6 LOS PLANES DE INTERCAMBIO.

Se debe entender que todo poseedor de una mercancía acude al mercado para cambiar una determinada cantidad de ella contra cierta cantidad de otra mercancía, por lo que se podría decir que existen tantos **planes de intercambio** como agentes económicos acuden al mercado, en forma tal que cada uno cumplirá con esta ecuación:

$$D_a v_a = O_b v_b \qquad \text{------------} \quad (11)$$

Se implica entonces que: si se ofrece la mercancía "b" y se realiza su venta, se obtendrá a cambio de ella la cantidad d_a

de la mercancía demandada "a" y, suponiendo que al acudir al mercado llevaba consigo una cantidad Q_b de la mercancía "b", al retirarse después de realizadas sus operaciones, éstas quedarán reflejadas en la siguiente ecuación:

$$
\begin{aligned}
Y_b &= Q_b - O_b \\
&= Q_b - D_a\,(v_a/v_b) \\
&= Q_b - D_a\,(p_a)
\end{aligned}
$$

Por lo que la cantidad original Q_b se representa como la suma de la cantidad Y_b no vendida del bien "b" más la cantidad adquirida del bien "a" (demanda de "a"), que equivale a la oferta realizada del bien "b", como dice Walras: "para demandar, es necesario tener qué ofrecer":

$$Q_b = Y_b + D_a\, p_a \qquad \text{-------------} \quad (12)$$

Pero, como los precios de las mercancías no se conocen hasta acudir al mercado, quiere decir, que la relación de intercambio estará determinando los precios y los precios, a su vez, determinarán el nivel de la demanda; por lo que los planes de intercambio estarán sujetos a esa determinación, y la demanda que se genere en cada uno de esos valores dibujará la gráfica (Fig.1) en la que el eje horizontal contiene los precios y el eje vertical representa la demanda efectiva.

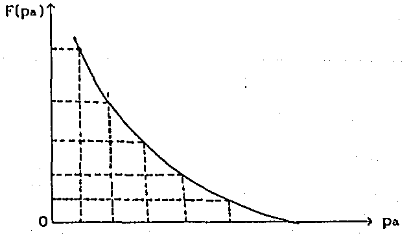

Fig. 2

Como esto mismo sucede con la otra mercancía, es necesario observar en términos de nuestro TEOREMAS 1 y 2 cómo determinar los precios para cada una de las mercancías para los cuales, las cantidades intercambiadas de los bienes representan un equilibrio. De las ecuaciones (5) y (6) tenemos que $O_a = D_b \times p_b$ y $O_b = D_a \times p_a$ en donde $D_b = F_b(p_b)$ así como $D_a = F_a(p_a)$.

TEOREMA 1(a): **La demanda (la oferta) efectiva de una mercancía que se intercambia con la otra, es igual a la oferta (o a la demanda) efectiva de esta última, multiplicada por su precio en términos de la primera.**

El planteamiento geométrico que propone Walras consiste en "inscribir en las dos curvas A_dA_p y B_dB_p (Fig. 3), dos rectángulos de bases recíprocas, OD_aAp_a y OD_bBp_b, tales que la altura del primero, OD_a sea igual al área del segundo, OD_b, x Op_b, y que, inversamente, la altura del segundo, OD_b, sea igual al área del primero, OD_a x Op_a.

Las bases de los dos rectángulos, Op_a y Op_b, representarán los precios de equilibrio, ya que, a dichos precios, la demanda de "a", representada por la altura OD_a, será igual a la oferta de "a", que estará representada por el área OD_b x Op_b, y la demanda de "b", representada por la altura OD_b, será igual a la oferta de "b", representada por el área Od_a x Op_a.

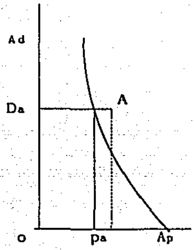

Fig. 3(a)

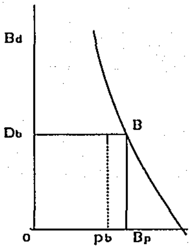

Fig. 3(b)

El planteamiento geométrico afirma que la altura de cada rectángulo debe contener la unidad tantas veces en longitud, como la superficie del otro la contiene en superficie. De lo anterior se concluye que las bases de ambos rectágulos son inversamente proporcionales a sus alturas.

Algebraicamente, el problema consiste en hallar las dos raíces del par de ecuaciones:

$$F_a(p_a) = F_b(p_b)p_b$$

recordemos que $p_a \times p_b = 1$, entonces

$$F_a(p_a)p_a = F_b(p_b)$$

En cuanto a la oferta y a la demanda de cada uno de los bienes, el equilibrio se logra cuando existe el precio de equilibrio que hace que ambas se igualen. Por lo tanto, si $D_a = O_a$ y $D_b = O_b$, entonces, del parágrafo 2.5 (p.41) y de la relación de los precios, tendremos:

$$F_a(p_a) = F_b(1/p_a)(1/p_a)$$
$$\therefore \quad F_a(p_a)p_a = F_b(1/p_a)$$

$$y \quad F_b(p_b) = F_a(1/p_b)(1/p_b)$$
$$\therefore \quad F_b(p_b)p_b = F_a(1/p_b)$$

en las cuales tenemos expresadas las funciones de oferta y demanda para los precios correspondientes a cada bien, lo cual se puede representar geométricamente como funciones en el mismo plano para cada una de las mercancías (Fig. 4):

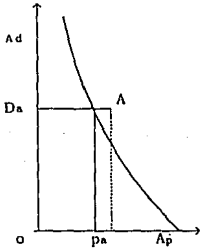

Fig. 4(a)

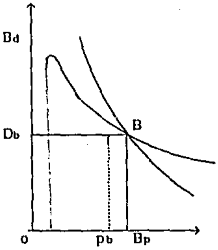

Fig. 4(b)

Tratándose de una función empírica, pondremos como ejemplo de la función de Demanda para la mercancía "a" un ejemplo y construiremos su función de Oferta en términos del precio respectivo.

Sean $F_a(p_a) = -3(p_a) + 9;$ --------- (I)

$$O_a = F_b(p_b)p_b$$

$$O_a p_a = F_b(p_b) \qquad \text{----------} \ (II)$$

Como $D_a = O_a$, sustituyendo (I) en (II)

$$F_b(p_b) = [-3(p_a) + 9]\ p_a$$

$$F_b(p_b) = -3(p_a)^2 + 9(p_a) \qquad \text{----------}(III)$$

Sustituyendo p_a por su equivalente $1/p_b$, tendremos:

$$F_b(p_b) = -3(1/p_b)^2 + 9(1/p_b)$$

Para obtener el máximo de (III), diferenciando, tenemos:

$$F'_b(p_b) = -6(1/p_b) + 9 = 0$$
$$1/p_b = 9/6 = 3/2$$
$$\therefore \quad p_a = 3/2$$
$$y \quad p_b = 2/3$$

con lo cual hemos obtenido los precios de equilibrio para el intercambio de dos mercancías con una función empírica, de tal modo que el equilibrio se obtiene conforme a la Ley de la Demanda y la Oferta, cuya tendencia a crecer o disminuir está en función de los precios.

Podemos hablar ahora de todos los agentes económicos (i) dispuestos a demandar el bien "a", para los cuales también existirá una gráfica particular de la función de demanda $F_i(p_a)$ respecto de este bien. Si identificamos la demanda $F_i(p_a)$ que se genera para cada uno de los niveles de precios, la suma de todas ellas nos dará la demanda total del bien "a" para cada valor de p_a, la que estará acotada, obviamente, por Q_a, cantidad disponible del bien "a" en el mercado. Esto es:

$$F_a(p_a) = \sum_{i=1}^{n} F_i(p_a) \leq Q_a$$

Como esto mismo sucede para el poseedor del bien "b', quien acude al mercado con la cantidad Q_b de esta mercancía, Q_b estará representada como la suma de O_b (es decir, la oferta del bien "b") y la cantidad Y_b de este bien que no ha sido vendida. Observamos también que Q_b será la cota de la suma de todas las demandas $F_i(p_b)$ del bien "b".

Consideremos ahora las funciones $F_i(p_k)$, en donde p_k representa el precio de cada uno de los bienes que acuden al mercado y la i nos indica la demanda particular del poseedor de cualquier otro bien $i \neq k$, con lo cual estaremos en condiciones de abordar el caso general que plantea la Teoría del Equilibrio Económico de Walras para el intercambio de n mercancías en m mercados y la relación entre ellas a través de los precios, lo cual implica una conceptualiación más amplia y profunda de los elementos económicos que no están considerados en el presente trabajo, como lo menciona Walras: "**estamos estudiando el problema del intercambio en general, y la concepción simple y pura de las curvas de intercambio nos es, suficiente e indispensable**" [12. p. 205].

Sin embargo, lo anterior nos obliga a plantearnos un problema que hemos intuído en la búsqueda del equilibrio entre la oferta y la demanda y cuya solución se considera fundamental para el análisis del equilibrio económico, esto es: ¿Cómo construír las funciones de demanda?

2.7 LA FUNCION UTILIDAD.

La función de la utilidad ya había sido propuesta por Daniel Bernoulli (1700-1882) en términos matemáticos, estableciendo una relación entre la cantidad poseída de un bien y la utilidad que podía representar una unidad adicional de este bien, por medio de la ecuación:

$$U(x+1) - U(x) = k\ 1/x \qquad \text{----------(14)}$$

Si hacemos un pequeño cambio respecto al incremento de la variable independiente, tal que, en lugar de incrementar 1 unidad incrementemos una cantidad h (tan pequeña como se quiera), respecto al bien, y dividimos la diferencia [U(x+h) - U(x)] entre el incremento "h", obtendremos un cociente, cuyo límite cuando la h tiende a cero, es la derivada de la función U(x) con respecto de x, de manera que la ecuación (11) podría representarse como:

$$U'(x) = k\ 1/x$$

integrando ambos términos:

$$\int U'(x)dx = k \int 1/x dx$$

$$U(x) = k\ \ln(x) + c$$

cuya constante de integración podemos ignorar para plantearnos el problema de optimizar la función $U(x) = k\ \ln(x)$, lo cual nos conduce a un estudio más detallado de su importancia dentro de la economía.

Hasta ahora hemos considerado únicamente la determinación de la demanda a través de los precios relativos de cada uno de los bienes bajo un régimen de intercambio que continúa el análisis de Cournot, pero Walras recoge este concepto de utilidad, fundamental para el análisis subsecuente de la economía por la diversidad de los enfoques bajo los cuales se le ha considerado, y que se debe a economistas anteriores a Walras, como Jevons, Gossen, Menger y Marshall, entre los ingleses, y otros más como Pareto y Dupuit quien, siendo contemporáneo de Cournot no tuvo contacto con él ni noticias de su obra, abordó el estudio de la utilidad de manera empírica.

He preferido tener a la mano la definición textual de Walras para evitar hacer una interpretación subjetiva de este concepto, ya que supone: "**que existe un patrón de medida de la intensidad de las necesidades o de la utilidad intensiva, común no sólo a unidades similares de una misma especie de riqueza social, sino también a unidades distintas de tipos diferentes de riqueza**", haciendo una distinción más del tipo de la utilidad, para lo cual es conveniente analizar la Fig. 5.

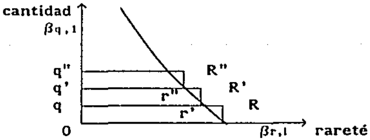

Fig. 5

Las distancias Oq, Oq', Oq"... representan las cantidades del bien que el individuo "1" consumiría en cierto período de tiempo, en tanto que $O\beta r,1$, qr', q'r"...representan las **utilidades**

intensivas de cada unidad. En cuanto a la curva que se origina en $\beta_{r,1}$ y termina en $\beta_{q,1}$ es llamada la **curva de utilidad o curva de necesidad de las mercancías.** [12. p. 218].

i) La utilidad extensiva ($O\beta_{q,1}$)es la capacidad que posee el tipo de riqueza analizado, de satisfacer necesidades más o menos generalizadas o numerosas. Se considera simple y absoluto ya que la utilidad extensiva de A no influye más que en las curvas de demanda de A y se puede afirmar que: **<<siendo la utilidad extensiva, por definición, "la cantidad demandada a un precio nulo", es una magnitud susceptible de medición>>.**

ii) La utilidad intensiva consiste en la capacidad que posee el tipo de riqueza analizado, de satisfacer necesidades más o menos intensas o urgentes según que persistan, pese a su carestía, en mayor o menor número de personas en forma tal, que estén dispuestas a adquirirla. Gráficamente se representa por la inclinación de las curvas de demanda tanto de una como de la otra mercancía en el proceso de intercambio, ya que están relacionadas por los precios relativos de ambas, que influyen en cada una de las demandas como funciones de los precios. Además de los precios, debemos considerar la cantidad inicial de ambas mercancías. De esta manera, la inclinación de las curvas de demanda se determina matemáticamente como el **<<límite del cociente entre la disminución de la demanda y el aumento del precio>>**

iii) Nos encontramos con otro atributo de la utilidad definido por Walras como **<<utilidad virtual>>**, que significa (para un mismo individuo) «la suma de las necesidades, tanto intensivas como extensivas, respecto a las mercancías» y está representada por el área $O\beta_{q,1}\beta_{r,1}$ limitada por los ejes y por la curva $\beta_{q,1}\beta_{,1}$.

iv) La curva $\beta_{q,1}\beta_{r,1}$ (que limita la utilidad virtual) estará representando la "**curva de utilidad o de necesidad**". En este caso, se denomina « **curva de utilidad efectiva** » como función de la cantidad del bien consumida por nuestro individuo.

Respecto al concepto de *rareté* que introduce Walras como un homenaje a su padre a quien se debe la utilización de esta palabra para significar escasez, veamos cómo se interpreta.

DEFINICION: Walras denominó como "rareté" a la **intensidad de la última necesidad satisfecha por una cantidad consumida de la mercancía**, por lo tanto, la curva $\beta_{r,1}\beta_{q,1}$ será la curva de rareté en función de la cantidad consumida de B por el mismo individuo. De esta manera, podemos llamar también a los ejes de las coordenadas para las funciones de utilidad, **eje de cantidades y eje de raretés.**

OBSERVACION: Para una cantidad consumida q_b, que en la gráfica 3(b) estará representada por la distancia Oq_b, la rareté como función de q_b se representa por la distancia $q_b = O\rho_b$. En esta gráfica se hace un cambio en los ejes (iniciado por Marshall) respecto a las variables dependiente e independiente.

Las ecuaciones de la utilidad (u) y de la rareté (r), quedarán expresadas en la forma siguiente:

$$u = \Phi(q)$$

$$r = \phi(q)$$

tanto $\Phi(q)$ como $\phi(q)$ son funciones continuas y diferenciables, bajo determinadas condiciones típicas en los problemas económicos en relación con el tipo de mercancía, y su relación es como sigue:

$$\Phi(q) = \int_0^q \phi(q)dq$$

$$\Phi'(q) = \phi(q)$$

2.8 UTILIDADES EN EL INTERCAMBIO DE DOS BIENES.

Sea el problema: Dadas dos mercancías (A) y (B) y las curvas de utilidad o necesidad de ambas para cada uno de los participantes en el intercambio, así como la cantidad inicial poseída por cada uno de ellos, determinar las curvas de demanda.

Para observar en detalle el comportamiento de la función de cada uno de los participantes, construyamos sus gráficas, Fig.6:

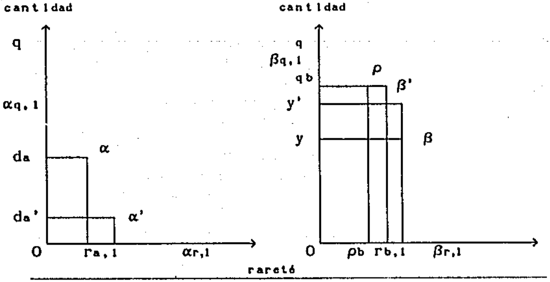

Fig. 6(a) **Fig. 6(b)**

Una vez establecido lo anterior, si la utilidad extensiva e intensiva de (A) para el poseedor de la mercancía (B) se representa geométricamente por la curva continua $(\alpha_{r.1}-\alpha_{q.1})$ y algebraicamente por la ecuación de dicha curva $r = \phi_{a.1}(q)$; si la utilidad extensiva e intensiva de (B), para este individuo, se expresa geométricamente por la curva continua $(\beta_{r.1}-\beta_{q.1})$ y algebraicamente por la ecuación de dicha curva $r = \phi_{b.1}(q)$; si, por otra parte, la cantidad q_b, representada por la distancia Oq_b, es la cantidad de (B) poseída inicialmente, nuestro problema es: ¿Cual será la demanda de (A) para cualquier precio?

Es conveniente insistir en que las curvas de la Fig. 6 son llamadas también "curvas de necesidad", ya que si el poseedor del bien (B) guardara para consumirlas en su totalidad las q_b unidades de su mercancía, la suma total de las necesidades satisfechas estaría representada por el área $Oq_b\rho\beta_{r,1}$.. Pero esa situación anularía la posibilidad de intercambio, ya que podrá satisfacer una mayor suma de necesidades si consume solamente una parte de su mercancía y el excedente lo cambia por una cantidad del

bien (A) que le represente mayor utilidad, por lo que el problema se reduce a comparar las áreas que representan las necesidades satisfechas por cada una de las mercancías (A) y (B).

Si, por ejemplo, al precio p_a guarda "y" unidades de (B) representadas en la Fig. 6(b) por Oy y cambia el resto ($O_b = q_b-y$), representado por yq_b, por d_a unidades de (A) representadas en la Fig.6(a) por Od_a, podrá satisfacer la cantidad total de necesidades representadas por la suma de las áreas $Oy\beta\beta_{r,1}$ y $Od_a\alpha\alpha_{r,1}$, la cual deberá ser mayor que el área de las necesidades cubiertas por la cantidad total (q_b) del bien (B). Podemos convenir, entonces, que el intercambio deberá llevarse a cabo cuando la suma de esas dos áreas sea máxima, con lo cual se determinará la demanda de (A) (d_a)

al precio p_a, que estará determinado por la proporción entre las intensidades $r_{a,1}$ y $r_{b,1}$ de las últimas necesidades satisfechas por las cantidades "y" y "d_a". Dicho de otra forma: que la proporción entre las "raretés" después del intercambio, sea igual al precio p_a, es decir:

$$r_{a,1} = p_a \times r_{b,1}$$

y ya que $O_b = d_a \times p_a$, eliminando p_a nos queda:

$$d_a \times r_{a,1} = O_b \times r_{b,1} \quad \text{-----------(18)}$$

Ahora bien, si sustituimos los productos expresados en (18) por los valores en la gráfica, tendremos las áreas:

$$Od_a \times d_a\alpha = q_b y \times y\beta$$

de lo cual se concluye que:

$$\text{área } Od\alpha\alpha_{r,1} > \text{área } yq_b\rho\beta$$

Es evidente, por tanto, que el intercambio de una cantidad O_b de (B) por una cantidad d_a de (A) es ventajoso para el poseedor de (B), ya que si disminuyera la rareté de (A) y aumentara la de (B) por otro cambio cualquiera, o viceversa, tendríamos la desigualdad:

$$r_{a,1} \neq p_a \times r_{b,1}$$

Ya que la oferta de B se ha expresado como la diferencia entre la cantidad inicial del bien (B) y el excedente conservado por su poseedor después del intercambio nos propondremos ahora, con las funciones de utilidad y de rareté del parágrafo 2.8, expresar las funciones de demanda:

Sean: $O_b = d_a p_a$

$$\therefore \quad q_b = d_a p_a + (q_b - O_b) \text{ ---------- } (19)$$

$$u_a = \Phi_{a,1}(d_a) \quad y \quad u_b = \Phi_{b,1}(q_b - O_b)$$

las funciones que representan la cantidad total del bien (B) y las utilidades efectivas de ambos bienes, de lo cual se concluye que el objetivo a alcanzar es la maximización de esa utilidad efectiva total, i.e. Por la regla de la cadena, se tiene:

$$\Phi'_{a,1}(d_a)dd_a + \Phi'_{b,1}(q_b - O_b)d(q_b - O_b) = 0 \text{ ----- } (20)$$

Observemos que estas derivadas (que son las funciones de raretés como ya se ha visto) son esencialmente decrecientes, por lo que el máximo buscado se alcanzará cuando la suma algebraica de los incrementos diferenciales de utilidad, respecto a las cantidades consumidas de cada uno de los bienes, sea nula ya que, si se supone que estos incrementos son distintos y de signo opuesto, será ventajoso demandar mayor o menor cantidad de la mercancía cuyo incremento diferencial sea respectivamente mayor o menor, y ofrecer mayor o menor cantidad de aquella que lo tenga respectivamente menor o mayor.

De aquí que, la suma algebraica de los productos de los precios de las mercancías (en términos de una de ellas) por las diferenciales de las cantidades consumidas es nula, en virtud de la ecuación (19):

$$p_a dd_a + d(q_b - O_b) = 0$$

y de la ecuación (20), ya que la relación entre las funciones de utilidad y de raretė están dadas como:

$$\Phi_{a,1} = \int_0^{d_a} \phi_{a,1}(q)dq \quad \text{y} \quad \Phi_{b,1} = \int_0^{q_b - d_a p_a} \phi_{b,1}(q)dq \text{ ----- (21)}$$

se obtiene la derivada como:

$$\phi_{a,1}(d_a) - p_a\phi_{b,1}(q_b - d_a p_a) = 0$$

$$\therefore \quad \phi_{a,1}(d_a) = p_a\phi_{b,1}(q_b - d_a p_a)$$

De aquí se concluye que la raíz de esta ecuación siempre corresponde a un máximo, porque siendo las funciones de raretć decrecientes por definición, la segunda derivada:

$$\phi'_{a,1}(d_a) = p_a^2 \ \phi'_{b,1}(q_b - d_a p_a)$$

es, por consiguiente, negativa.

En esta forma, la demanda "d_a" que le proporcionará la máxima satisfacción al poseedor del bien (B) estará determinada simultáneamente por las dos desigualdades:

$$\text{(I)\ldots\ldots} \quad \int_{q_b - d_a p_a}^{q_b - (d_a - 1)p_a} \phi_{b,1}(q)\, dq < r_{d_a}$$

$$\text{(II)\ldots\ldots} \quad \int_{q_b - (d_a + 1)p_a}^{q_b - d_a p_a} \phi_{b,1}(q)\, dq < r_{d_a+1}$$

2.9 LA TEORIA DE LA UTILIDAD.

La primera definición de utilidad que tuvo curso en la ciencia económica se debe a Bentham: *"Por utilidad se entiende aquella propiedad de un objeto en virtud de la cual éste tiende a procurar una ventaja, un placer, una cantidad de bien o felicidad, o lo que es lo mismo, a impedir que se produzca un esfuerzo, un mal, un daño a aquello cuyo interés se persigue"* [10. p. 1547]. No obstante, otros economistas del siglo XIX, como Senior, Jevons y Pareto entre ellos, son quienes sintetizan su significado como **un "quid" que se origina de una particular relación que se establece entre los objetos y el hombre"**. Por su parte, Say ya había dicho esto mismo de manera más coloquial: **"es la facultad que poseen las cosas de poder servir al hombre de un modo cualquiera".**

Considerando a la utilidad como una magnitud variable, la primera consecuencia a que da lugar es a la posibilidad de su medición, y la segunda es a la forma de medirla, lo que ha suscitado divergencias fundamentales en cuanto al concepto mismo. Pero, de una u otra forma, el problema se sitúa en el ámbito matemático y, para ser breves, mencionaremos en primer lugar a los que hacen uso del Cálculo infinitesimal como Jevons, Walras, Marshall, Edgeworth, Fisher, etc., y enseguida a los que utilizan términos simplemente aritméticos entre los que destacan los economistas de la escuela Austriaca, como Menger y Von Wieser.

2.9.1 La Utilidad vista desde el Cálculo infinitesimal.

Como se vió en el parágrafo anterior, en el primer caso se plantean algunas hipótesis necesarias: que la utilidad sea una función creciente, continua y derivable cuantas veces se quiera, es decir, de clase $\mathbb{C}^n$, correspondiente a la cantidad del bien o de los bienes. Sea pues, la función de utilidad de un bien que se utiliza aisladamente y llamémosle el bien "b" , de tal modo que su función de utilidad total U se expresaría:

$$U = f(b)$$

y la primera derivada se define como la utilidad marginal:

$$U' \equiv f'(b)$$

¿Cómo son estas funciones?

Para los valores de b, tales que no se consiga la total saturación de la necesidad, la utilidad marginal U' es positiva, es siempre decreciente y se anula para los valores que representan la total satisfacción de la necesidad, en tal caso el bien ha dejado de ser económico. Si U' sigue decreciendo y llega a ser negativa, entenderíamos que el bien llega a ser perjudicial, por lo tanto solamente consideraremos a U' positiva.

Si el agente económico hace uso de varios bienes (b_i), U estará en función de las cantidades de todos y cada uno de ellos y utilizaremos la expresión:

$$U = f(b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$$

En este caso, la utilidad marginal de cada uno de estos bienes se define como:

$$f_i \equiv \frac{\partial U}{\partial b_i} ; \qquad [i = 1, 2, \dots, n] \qquad \text{---------} \ (23)$$

debiendo ser siempre positiva y, además:

$$f_{ii} \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial b_i \ \partial b_i} < 0; \qquad [i = 1, 2, \dots, n] \qquad \text{--------- (24)}$$

quedando entendido que la utilidad marginal de un bien debe ser decreciente en función de la cantidad de ese bien.

Tratándose de dos bienes distintos, se dice que el bien h es independiente con respecto del bien k, cuando se verifica:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial b_h \ \partial b_k} = 0 \qquad \text{------------- (25)}$$

i.e. cuando la utilidad de un bien es constante respecto del otro bien.

Se puede observar de inmediato que ambos bienes son independientes entre sí, ya que:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial b_h \ \partial b_k} = \frac{\partial^2 U}{\partial b_k \ \partial b_h}.$$

y esto queda generalizado para todo h y para todo k, [con $h \neq k$; $1 \leq h \geq n$; $1 \leq k \geq n$], con lo que, teniendo sus segundas derivadas mixtas iguales a cero, la función $U = f(b_1, b_2, b_3, \dots b_n)$, se puede expresar como:

$$U = {}^1f\ (b_1) + {}^2f\ (b_2) + \dots + {}^3f\ (b_n)$$

de modo que las utilidades marginales se expresarían por la derivada de cada una de las funciones particulares:

$$ {}^{1}f'(b_1);\ {}^{2}f'(b_2);\ \ldots\ ;\ {}^{n}f'(b_n) $$

De aquí se concluye, como era previsible, que cuando los bienes son independientes entre sí, la utilidad total del conjunto de bienes es igual a la suma de las utilidades totales de todos los bienes, consideradas separadamente.

Es importante considerar el caso de no independencia entre dos o mas bienes, i.e.

$$ \frac{\partial^2 U}{\partial b_h\ \partial b_k} \neq 0 \qquad \text{------------ (26)} $$

cuando los dos bienes son dependientes entre sí, lo cual en economía se interpreta como la definición de **bienes fungibles o sustituibles**. Si esto sucede para todos los bienes tomados de dos en dos, se dirá simplemente que los bienes son **complementarios**.

2.9.2 Las curvas de indiferencia.

Si suponemos la utilidad U en función de dos variables únicamente, es posible observar gráficamente su comportamiento con la técnica de las curvas de nivel, que son las proyecciones sobre el plano Ob_1Ob_2 de las secciones paralelas a dicho plano, correspondientes a la superficie de utilidad y son llamadas <u>curvas</u>

de indiferencia, porque las coordenadas de todos los puntos de cada curva representan combinaciones de los dos bienes, que proporcionan la misma utilidad. Este concepto se debe a Edgeworth y siguiendo la misma notación que hemos utilizado para la utilidad total, se expresa en la forma siguiente (Fig. 7):

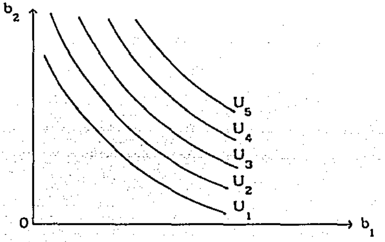

Fig. 7

$$\bar{U}_1 = f(b_1, b_2) \qquad \text{------------------} \quad (27)$$

en donde $\bar{U}_1$ es una constante . Como la relación funcional para cada una de las variables representa una función implícita con respecto a la otra, por lo consiguiente, cumplen la siguiente relación:

$$\frac{db_2}{db_1} = - \frac{f_1}{f_2}$$

y ya que hemos supuesto que las f_1 son positivas, si el segundo miembro es negativo, el primero también lo es, lo que significa que las curvas de indiferencia tienen pendiente negativa.

En cuanto a la relación entre los bienes representados por las curvas, es necesario observar sus propiedades:

$$\frac{d^2 b_2}{d(b_1)^2} = -\frac{d}{db_1}\left(\frac{f_1}{f_2}\right)$$

$$= -\frac{1}{f_2^{\,3}}\left[f_{11}f_2^{\,2} - 2f_{12}\,f_1f_2 + f_{22}f_1^2\right] \qquad \text{-------} \; (29)$$

De las ecuaciones (23) y (24) sabemos que las derivadas parciales de primer orden son siempre positivas y las derivadas parciales de segundo orden y no mixtas son siempre negativas, por lo tanto:

a) $f_2^{\,3} > 0$

b) $f_{11}\, f_2^{\,2} < 0$

c) $f_{22}\, f_1^{\,2} < 0$

De aquí que:

I.- Si los bienes son **independientes:**

d.1) $2f_{12}f_1f_2 = 0$

de lo que se concluye que (29) es positivo, lo que significa que la pendiente de la curva decrece en valor absoluto y, por lo tanto, **la gráfica es convexa.**

II.- Si los bienes son **complementarios:**

$$\text{d.2)}\quad 2f_{12}f_1f_2 > 0$$

manteniéndose (29) positivo y, por lo consiguiente también la **gráfica es convexa.**

III.- Si los bienes son **sustitutivos:**

$$\text{d.3)}\quad 2f_{12}f_1f_2 < 0$$

lo que implica que el signo de (29) queda indeterminado. Lo anterior significa que la gráfica puede ser **convexa ó cóncava.** Más aún, puede tener la posición límite entre la convexidad y la concavidad con respecto al origen, esto es: podría representar **una línea recta.**

OBSERVACION: Cuando las curvas de indiferencia son cóncavas o rectas, siendo que la gráfica cortaría los ejes coordenados, los bienes ó los servicios que representan podrían considerarse **idénticos desde el punto de vista económico, siempre que fuesen** perfectamente sustituíbles, o sea cuando el sujeto económico pudiese conseguir la misma utilidad consumiendo uno u otro. Esto da lugar a que se consideren siempre dos bienes realmente distintos, con lo que las curvas de indiferencia serían generalmente convexas y la expresión (29) positiva.

2.9.3 La máxima utilidad posible.

En el análisis económico se plantea el problema central de la utilidad en relación al comportamiento que debe seguir un consumidor para obtener la máxima utilidad total posible, bajo las siguientes condiciones:

Sea un conjunto de n bienes: $N = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ y sus correspondientes precios: $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$; sea una función de utilidad de un individuo:

$$U = f(b_1, b_2, \ldots, b_n) \qquad \text{--------(30)}$$

y sea, finalmente, la renta monetaria de este individuo lo que constituye su ingreso, con lo que él puede adquirir cierta cantidad de cada uno de los los bienes disponibles a los precios corrientes:

$$M = p_1 b_1 + p_2 v_2 + \ldots + p_n b_n. \qquad \text{-------(31)}$$

El problema consiste, entonces, en maximizar U, bajo la restricción del ingreso M constante. El método que se utiliza es el de los multiplicadores de Lagrange y la condición necesaria para obtener U máxima es la siguiente:

$$\frac{f_1}{p_1} = \frac{f_2}{p_2} = \ldots = \frac{f_n}{p_n} = \lambda \qquad \text{---------(32)}$$

que se interpreta como la **igualdad de las utilidades marginales ponderadas** para todos los bienes, quedando pendiente de resolver el sistema cuya solución es el vector de demanda..

Para el caso particular de dos bienes, el análisis que hemos hecho de la expresión (29) se establece por medio de la matríz orlada:

$$\begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} > 0$$

cuyo desarrollo es:

$$2f_{12}f_1f_2 - f_{11}f_2^{\,2} - f_{22}f_1^{\,2} > 0$$

con la interpretación económica que ya hemos visto.

Para obtener la gráfica de esta utilidad máxima, en el caso de dos bienes, es suficiente con expresar la función del ingreso $M = p_1b_1 + p_2b_2$, como la recta:

$$b_2 = -\frac{p_1}{p_2}b_1 + \frac{M}{p_2} \qquad \text{-------------(33)}$$

con la gráfica que se puede observar en la Fig. 8

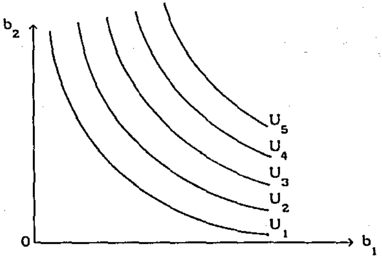

Fig. 8

Visto así, el máximo de U se obtiene cuando la pendiente de una U_1 en un punto común, es igual a la pendiente de la recta (31), y si esto sucede, entonces la recta es tangente a la curva de indiferencia U_1 en el nivel de máxima utilidad para un ingreso determinado representado por M.

Como esta relación se establece entre todas y cada una de las mercancías, es necesario observar la relación que se produce con un bien tomado como base para todos los intercambios, es decir: el dinero.

2.9.4. La utilidad marginal del dinero.

El dinero visto como un bien, no posee utilidad directa, sino que procura de manera mediata la utilidad en cuanto puede servir para la adquisición de cualquier otro bien.

¿Cual sería su relación con ese otro bien?

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el dinero solamente puede adquirir un único bien Z, cuyo precio p_z está dado y cuya función de utilidad $U = f(z)$ sea conocida. Sea, pues, M la cantidad de dinero, con lo que se obtiene la cantidad de z, como sigue:

$$z = M / p_z$$

Por lo consiguiente U es función de M, y se puede expresar como $U = \phi(M)$, con lo que derivando U, obtenemos:

$$\frac{dU}{dM} = \frac{dU}{dz}\,\frac{dz}{dM} = \frac{1}{p_z}\,\frac{dU}{dz} \text{-------}(34)$$

Por lo tanto: **"La utilidad marginal del dinero es igual a la utilidad marginal del bien, dividida por el precio de ese bien"**, o, de manera compacta: La utilidad marginal del dinero, respecto a un bien, es igual a la utilidad marginal ponderada del bien.

2.9.5. La función índice de utilidad.

En diferentes momentos hemos hecho alusión a que la utilidad es un concepto que ha recibido diversas interpretaciones a través del tiempo y aún desde su origen, ya que solamente algunos economistas estuvieron de acuerdo con la hipótesis de su mensurabilidad. Hasta aquí, nosotros hemos seguido la concepción de Edgeworth de las curvas de indiferencia, como curvas de nivel que se obtienen de la superficie de utilidad, lo cual representa a la utilidad como una **funcion cardinal.**

Alternativamente el concepto de utilidad que no puede ser objeto de medida sino unicamente de comparación, da origen al concepto de utilidad como una **funcion ordinal**, esto es, se puede decir que es mayor o menor, pero **no es posible decir en qué medida es mayor o menor.** Este punto de vista fué adoptado por Pareto en su *Manuel d'Economie Politique* y más adelante por Hicks y Allen. Pareto llega al concepto de curva de indiferencia de una manera directa, observando cual es la combinación que representa cada uno de los puntos del plano (en el caso de dos bienes) de tal manera que a cada combinación se le puede hacer corresponder un índice, que es precisamente el que corresponde a aquella curva de indiferencia sobre la que se encuentra el punto de coordenadas (x,y), a lo que Pareto llamó **función índice de utilidad.**.

Puesto que a toda combinación (x,y) corresponde un determinado índice de utilidad, el sistema de todos estos índices puede considerarse como una función de x e y, que puede obtenerse en un número infinito de formas, manteniendo siempre la relación entre la cantidad de ambos bienes. Esto es, estando determinado un diagrama de curvas de indiferencia, si el sujeto económico posee una determinada cantidad y de Y y x de X, si x disminuye en una determinada cantidad Δx, se precisará que y aumente Δy a fín de que la utilidad se mantenga constante. Hay que observar que la relación $\Delta x/\Delta y$ estará dependiendo de los valores iniciales de x y de y.

Podemos suponer a Δx y a Δy como infinitésimos en cuanto a la variación que sufren las cantidades iniciales, por lo que se pueden representar con los símbolos comunes dx y dy, lo cual da lugar a interpretarlos como una función $R(x,y)dx + dy = 0$, o bien:

$$\frac{dy}{dx} = - R(x,y) \qquad \text{----------} (35)$$

que fué llamada por Hicks y Allen: **relación marginal de sustitución entre Y y X**, observándose que por la forma en que ha sido definida, es siempre positiva y que la relación marginal de sustitución entre X y Y se define, consecuentemente, como $1/R$.

A partir de esta relación marginal de sustitución, que podemos verla como una función diferencial, es posible definir una función (x,y), continua y derivable, tal que:

$$R(x,y) = - \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

y de manera que integrando obtendríamos $F\,[\,(x,y)] = \text{constante}$, como la integral general de la ecuación diferencial. Siendo esta F una función arbitraria, podemos suponerla siempre creciente, por lo tanto F'( ) sería siempre positiva, con lo cual podemos expresar la **funcion índice de utilidad "u":**

$$u = F\,[\,(x,y)] \qquad \text{--------------(36)}$$

Es necesario establecer las diferencias entre la función de utilidad U y la función índice de utilidad u. Esto es, mientras U puede medir la utilidad correspondiente a una combinación (x,y) de dos bienes como una función con valores reales y operar con esos valores, ya que tienen una representación cardinal, u sólo puede establecer una comparación entre dos de esos índices, que se han obtenido como clases de un conjunto de valores, en los que se ha definido solamente una relación ordinal.

Analíticamente, podemos establecer otra diferencia sustancial, ya que no obstante de que, tanto U como u, están definidas de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^{n+1}$, la gráfica de U da lugar a una superficie en la cual está determinada la utilidad de cada punto, en tanto que la u como función índice engendra una familia de hiperplanos, entre los cuales no se definen los valores individuales de cada punto como utilidad, sino que están constituidos por los valores de la clase a la que corresponde cada punto, es decir: su índice, ya que el interés radica únicamente en su característica común. El diagrama de curvas de nivel es el mismo para todas los hiperplanos, (tanto como el complejo de curvas de que se ha partido), pero, puesto que la única condición que se ha exigido a la función F, induce la sucesión creciente de los índices, es indiferente, para los fines de comparación de los índices. elegir una u otra de estas superficies.

Ya que con esta formulación las derivadas parciales de la función no poseen un significado económico determinado, el problema de obtener una utilidad máxima para el agente económico se plantea a través de las utilidades marginales ponderadas, esto es: <u>la igualdad entre las relaciones marginales de sustitución entre Y y X y la relación entre el precio de X y el de Y.</u>

$$R(x, y) = \frac{x}{y} = \frac{p_x}{p_y} \quad \text{------------(37)}$$

En todo caso, alcanzar el máximo de utilidad significa alcanzar la curva de indiferencia de índice máximo, condicionada a cierta renta, i.e.

$$\text{Maximizar } u = F\,[\,(x,y)],$$

$$\text{s.a.} \qquad M \geq p_x x + p_y y.$$

con lo cual se expresa que no es posible gastar mayor cantidad de la que se dispone con un ingreso M.

2.9.6. Los Multiplicadores de Lagrange.

Generalizando el problema de la maximización para las funciones de utilidad U y u (índice de utilidad), tenemos que el método de los multiplicadores de Lagrange, que mencionamos en el inciso 2.9.3 (pág.68) esuno de los más utilizados en economía, así

$$L(b,\lambda) = U(b) - \lambda\left[\sum_{i=1}^{n} p_i b_i - M\right] \quad \text{-----------(38)}$$

Para obtener el punto crítico de la función de Lagrange debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L(b,\lambda)}{\partial b_i} &= \frac{\partial U(b)}{\partial b_i} - \lambda p_i \quad 0; \quad i = 1,2,\ldots,n \\ \frac{\partial L(b,\lambda)}{\partial \lambda} &- \sum_{i=1}^{n} p_i b_i + M = 0; \quad i = 1,2,\ldots,n \end{aligned}\right\} \text{-----(39)}$$

Observando (39) tenemos un sistema con (n + 1) ecuaciones y con (n + 1) incógnitas. Si resolvemos este sistema, la solución será el vector $b^* = b^*(p_1, p_2, \ldots, p_n, \lambda)$ que representa **la demanda de todos y cada uno de los bienes en función de los precios**, como nos lo habíamos propuesto.

i) Del sistema propuesto podemos obtener otra información despejando λ en cualquiera de las primeras n ecuaciones, y quedaría en función de cada una de las primeras derivadas parciales de U y del precio respectivo. Como en la expresión (32), en relación con el dinero, aquí tendremos la **utilidad marginal ponderada** de cada uno de los n bienes:

$$\lambda = \frac{U_i}{p_i} \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

ii) Diferenciando (30) y (31), obtenemos:

$$dU = \sum_{i=1}^{n} f_i db_i \qquad \text{--------(40)}$$

$$dM = \sum_{i=1}^{n} p_i db_i \qquad \text{--------(41)}$$

y como de (32) tenemos que: $f_i = p_i\lambda$, sustituyendo en (40) nos queda:

$$dU = \lambda \sum_{i=1}^{n} p_i db_i \qquad \text{------(42)}$$

De aquí que, dividiendo (42) entre (41), obtenemos:

$$\frac{dU}{dM} = \frac{\lambda \sum_{i=1}^{n} p_i db_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i db_i} = \lambda \qquad \text{------(43)}$$

entonces λ es igual a la derivada de la utilidad del dinero, que toma el nombre de **utilidad marginal del dinero.** Se ve, por tanto, que la utilidad marginal de una cantidad de dinero M es el valor común que deben adoptar las utilidades marginales ponderadas de los bienes en cuestión para que se consiga una utilidad total máxima condicionada a dicha cantidad M. [10. p. 1555]

Debo expresar que no se ha planteado con mayor amplitud el problema de la formación de los precios, sino que, para facilitar el análisis de la utilidad y la demanda, se ha seguido el enfoque de Walras en relación con adoptar un bien específico como numerario, en este caso el dinero, bajo la observación de que en el mercado los n (n-1) precios de n mercancías en el intercambio se determinan reduciéndose a (n-1)(n-1) precios de las restantes mercancías entre sí, con lo que se toman como los cocientes de los precios de las mismas (en términos del numerario, pero relativos respecto a cada uno de ellos) **conforme a la condición de equilibrio general,** [12. p. 298] lo cual se refleja en la relación de oferta y demanda, te tal modo que siendo diferentes, el precio de cada mercancía en términos del numerario, estará modificándose, subiendo o bajando, conforme la demanda o la oferta sean superiores con la tendencia a encontrar un punto de igualación, concepto central en la teoría del equilibrio económico.

BIBLIOGRAFIA DEL CAPITULO II.

[1]. APOSTOL, TOM M.

Calculus. (Trad. Francisco Vélez Cantarell). Ed. Reverté. Barcelona. 1979. v.1. 813 p.(QA300.A65).

[2]. ARROW, KENNETH JOSEPH.

Ensayos sobre economía del bienestar. F.C.E. México. 1974.

[3]. ARROW, KENNETH JOSEPH.

Equilibrio Económico. Enciclopedia de Ciencias Sociales. Ed. Aguilar. Madrid. 1974. T.IV. p. 316-326.

[4]. BLAUG, MARK.

Teoría Económica en Retrospección. (Trad. Eduardo L. Suárez). F.C.E. México. 1985. 856 p.

[5]. COHEN, I. BERNARD.

La revolución newtoniana y las transformaciones de las ideas científicas. (Vers. esp. Carlos Solís Santos). Alianza Universidad, 360. Madrid. 1983. 404 p. (QC7.C3618).

[6]. COURNOT, AUGUSTIN.

Investigación acerca de los principios matemáticos de la Teoría de las Riquezas. (Trad. Juan Carlos Zapatero). Alianza Editorial. Madrid. 1969. 265 p.

[7]. DESCARTES, RENE.

Dos Opúsculos: Reglas para la dirección del espíritu. Investigación de la verdad. (Introd. de Luis Villoro). UNAM. Nuestros Clásicos, 10. México, 1959. 208 p. (B1868.R45V5).

[8]. EDGEWORTH, M. A.

Mathematical Psychics. An essay on application of mathematics to the moral sciences. C. Kegan Paul & Co. London. 1881. 150 p.

[9]. EKELAND. J.R., ROBERT B. Y ROBERT F. HEBERT.
Historia de la Teoría Económica y de su método. Mc Graw-Hill. 3a. ed. México. 1992. 731 p.

[10] NAPOLEONI, CLAUDIO.
Diccionario de Economía Política. Ed. Castilla. Madrid. 1962. 1004 p.

[11] PASINETTI, LUIGI.
Lecciones de Teoría de la Producción. (Trad. Luis Tormo). F.C.E. México, 1984. 373 p.

[12] WALRAS, LEON.
Elementos de Economía Política Pura (o Teoría de la Riqueza Social). (Ed. y Trad. Julio Segura). Alianza Universidad. Madrid. 1987. 815 p.

CAPITULO III.

3.1 LA EXISTENCIA DEL EQUILIBRIO ECONOMICO GENERAL.

Con todas las limitaciones que se han hecho evidentes en la teoría del equilibrio económico desarrollada en la segunda mitad del presente siglo, debemos reconocer el esfuerzo acumulado que recoge los conceptos walrasianos y que asegura la posibilidad de calcular los precios con los cuales se establece el equilibrio en una economía de mercado de competencia perfecta. En otras palabras, se trata de alcanzar un vector de precios en una economía de mercado, tal que, a partir de un vector inicial de precios dados, la oferta y la demanda globales se igualen, de manera que las acciones deseadas de los agentes económicos sean todas compatibles y puedan desarrollarse en forma simultánea.

El principio de competencia perfecta afirma que ninguno de los agentes económicos puede influír sobre los precios con su decisión individual.

Inicialmente, es indispensable conocer la Ley de establecimiento de los precios de equilibrio:

"Dadas varias mercancías y haciéndose el intercambio con intervención del numerario, para que exista equilibrio en el mercado, o precios estacionarios de todas las mercancías en términos del numerario, es necesario y **suficiente que a dichos precios la demanda efectiva de cada mercancía sea igual a su oferta efectiva.** Cuando esta igualdad no se cumple, es preciso, para alcanzar los precios de equilibrio, un alza en el precio de las mercancías cuya demanda efectiva es mayor que la oferta efectiva, y una reducción en el precio de aquellas cuya oferta efectiva es mayor que la demanda efectiva." [10. p. 302]

Nuestro problema, entonces, se reduce a encontrar una función Z(p), $Z : \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}^n_+$ continua y derivable, a la que llamaremos **función de exceso de demanda ó función de demanda excedente**, tal que satisfaga algunas condiciones funcionales y la Ley de Walras que presupone un vector de precios p en un simplejo S, tal que cumpla la relación: $pZ(p) = 0$.

La función Z(p) juega el papel principal en la teoría del equilibrio económico general, por lo que es necesario establecer sus características económicas y matemáticas.

Definamos un espacio m-dimensional cuyos vectores representan el conjunto de los precios de los m bienes y servicios que van a ser demandados por dos tipos de agentes económicos: Las unidades familiares y las empresas.

Debemos hacer una distinción fundamental en este sistema económico, y es la de que cada unidad familiar posee un conjunto de recursos iniciales "endowment", bienes útiles en la producción o el consumo, en donde se incluyen las diversas clases de trabajo o de mano de obra. En consecuencia, cada unidad familiar tiene un ingreso derivado de la venta de sus recursos, y con este ingreso, puede escoger entre todos los conjuntos alternativos de bienes de consumo cuyo costo, a los precios dados, no supere el ingreso de la unidad familiar. Así pues, la demanda de cualquier bien de consumo estará en función de los precios de los bienes de consumo y de los recursos.

Por su parte, las empresas requieren de recursos que reciben el nombre de "insumos" para su producción, en donde el proceso se considera de rendimientos constantes a escala, lo que se entiende como supuesto de coeficientes de producción fijos, que equivale a igualar la oferta y la demanda en los mercados de recursos para cada ciclo, cuando los precios satisfacen la condición de beneficios iguales a cero para todas las empresas. El trabajo posterior de Walras, J.B. Clark, Wicksteed y otros, generalizó los supuestos relativos a la producción para incluir métodos alternativos, expresados en una función de producción.

La existencia de un conjunto de precios de equilibrio se propone en base de la igualdad en el número de precios por determinar con el número de ecuaciones que expresan la igualdad de la oferta y la demanda en todos los mercados. Ambos son iguales al número de bienes, digamos m. En este cálculo Walras reconoció que había dos complicaciones: a) Sólo los precios relativos afectan el comportamiento de las unidades familiares y las empresas; por lo tanto, el sistema de ecuaciones tiene solamente m-1 variables, lo que Walras expresó seleccionando un bien para que sirviera de "numerario", mientras que los precios de todos los bienes se medían en relación con el precio de este numerario. b) El equilibrio del presupuesto de cada unidad familiar entre el ingreso y el valor del consumo, y la condición de beneficio nulo de las empresas, implican en conjunto lo que ha dado en llamarse la ley de Walras: **"El VALOR de mercado de la oferta es igual al de la demanda para cualquier conjunto de precios, no sólo para el conjunto de equilibrio"**; lo que afirma la interdependencia de la oferta y la demanda, que permite afirmar que si ambas se igualan en m-1 mercados, la igualdad debe exitir también en el mercado m.

Lo anterior engloba el comportamiento de cada uno de los agentes económicos individuales, i.e : "Si el consumidor no gasta todo su dinero disponible, entonces le sobra dinero para pagar un vector que le de más placer".

Una consideración necesaria sobre la idea de Walras, es la de que no se supone literalmente que los mercados alcancen el equilibrio en algún orden definido. Más bien, se podría aceptar la opinión de Arrow, en el sentido de que es a través de la historia como se podría encontrar una forma conveniente de exposición del modo en que el sistema de mercado podría resolver en realidad el sistema de las relaciones de equilibrio; esto es, con un "sistema dinámico en donde los precios cambien conforme a las fuerzas de la oferta y la demanda, debiendo suponerse también que los cambios ocurren en forma simultánea en los diversos mercados." [1. p. 18]

Debemos reconocer que Walras buscaba un objetivo todavía más elevado con su análisis del equilibrio general: quería estudiar lo que ahora se llama *estática comparativa*, esto es: las leyes de variación de los precios y cantidades de equilibrio al variar los datos básicos (recursos, condiciones de producción o funciones de utilidad); sin embargo, este objetivo no se ha alcanzado totalmente.

3.2 UNA ECONOMIA WALRASIANA CON PRODUCCION.

Es un modelo matemático de producción, con una matriz de insumos unitarios y una matriz de capitales fijos unitarios que sigue el modelo de Von Newmann, en el que los agentes económicos, (empresas y unidades familiares), se caracterizan:

a) Las empresas, por el conjunto de sus conocimientos tecnológicos.

b) Los consumidores, por la utilidad, expresada por funciones de Bernoulli: $U(x_0, x_1, \ldots, x_m) = \Sigma_0^m a_i \log (x_i + b_i)$; $a_i, b_i > 0$; $\Sigma a_i = 1$
o pseudo funciones de Bernoulli:

$[U(x_0, x_1, \ldots, x_m) = \Sigma_0^m a_i \log (x_i); \quad a_i > 0 \text{ y } \Sigma_0^m a_i = 1]$

Se trata de funciones fáciles de manejar , de las que se pueden obtener primeras aproximaciones de manera sencilla.

Una economía Walrasiana con producción puede entenderse como un objeto matemático que consta de 7 componentes:

1. Un conjunto finito de bienes y servicios, $M = (1, 2, \ldots, m)$.

2. Un conjunto finito de consumidores $N = (1, 2, \ldots, N)$.

3. Un conjunto finito de empresas $E = (1, 2, \ldots, M)$.

4. Una función de utilidad U, tal que para cada consumidor $\nu \in N$, $\exists$ u^{ν}.

5. Un vector de recursos iniciales W^{ν} para cada consumidor $\nu \in N$, expresado como: $W^{\nu} = (w_0^{\nu}, w_1^{\nu}, \ldots, w_m^{\nu})$.

6. Un par de matrices de Von Newmann para cada $\mu \in E$, definidas como: $\mathbb{L}^{\mu}$ y $\mathbb{M}^{\mu}$, que representan el conjunto de conocimientos tecnológicos de cada empresa. Cada una de las empresas tiene un catálogo de planes de producción que llamaremos por simplicidad T^{μ} que contiene todos los planes $(\mathbb{U},\mathbb{V})$ a los que puede tener acceso, en donde $\mathbb{U} = (u_0, u_1, \ldots, u_m)$ es el vector de insumos (demanda de la empresa) y $\mathbb{V} = (v_0, v_1, \ldots, v_m)$, es el vector que representa la producción de μ, es decir: su oferta..

7. Una relación de propiedad entre empresas y consumidores, los que a su vez, pueden participar de las utilidades de las empresas que se expresan por un número real $\theta^{\nu,\mu}$ $\forall$ $\mu \in E$ y $\nu \in N$, de tal modo que se cumplen dos propiedades:

1. $\theta^{\nu,\mu} \geq 0, \forall\ \nu \in N$ y $\forall\ \mu \in E.$

2. $\sum_{\nu=1}^{n} \theta^{\nu,\mu} = 1 \quad \forall\ \mu \in E.$

OBSERVACION: La parte de empresa μ que posee el "consumidor" ν, es lo que nos define una Economía Walrasiana con Producción.

Para esto, debemos contemplar el funcionamiento de las empresas. Alrededor de ellas se establecen tres elementos básicos de la teoría de la producción bajo condiciones de competencia perfecta, los cuales son:

I. Organización en empresas separadas;
II. La delimitación de las posibilidades de producción de cada empresa, y
III. La elección entre estas posibilidades mediante el principio de la elevación al máximo del beneficio, sujeto a cada vector de precios.

Así, el primer elemento se representa por la componente 3 de nuestra Economía Walrasiana de Producción (EWP) en la que se consideran M empresas diferentes. El elemento II nos indica que las posibilidades de producción para todas y cada una de las empresas implica la utilización de un conjunto de insumos para producir uno o varios productos, para lo cual se determinan las cantidades por medio de los llamados **coeficientes unitarios de la producción como elementos de la matriz de coeficientes técnicos o matriz de insumos unitarios.**

DEFINICIONES:

1. Llamaremos "actividad" a toda especificación de posibles relaciones entre insumos y productos.

2. Llamaremos "conjunto de posibilidades de producción" ó "tecnologías" al conjunto de actividades a disposición de las empresas. Esta disponibilidad se refiere a los procesos y no a los recursos ó insumos que ya se suponen viables, ya que el conjunto de posibilidades de la producción T^{μ} describe el estado de los conocimientos de la empresa acerca de la transformación que ha de dar a los bienes utilizados como insumos.

3. "Nivel de despliegue de una tecnología o de una posibilidad de producción" es la cantidad de cada uno de los productos obtenida respecto a la tecnología empleada.

La elección de los planes de producción y el nivel de despliegue están considerados en la componente 6 de la EWP en donde se diferencian los concepto de "utilidad" que sirve para describir el grado de satisfacción que reciben los consumidores y para las empresas utilizamos el término "ganancia" o "beneficio", que describen el exceso de los valores de sus productos sobre el valor de los insumos. El supuesto de competencia perfecta implica que para cada vector de precios dado, cada empresa elige una actividad que le reditúe, por lo menos, la misma cantidad de beneficio que le daría cualquier otra actividad posible.

3.2.1 Simulación del Regateo.

Dado el vector de precios $p = (p_0, p_1, \ldots, p_m)$, en el cual cada p_i es el precio de la unidad de la mercancía tipo i, primero actúan las empresas. Sea $\mu \in E$ la que elige entre los vectores "y" de niveles de despliegue para la producción, (que ella conoce) el que maximice su ganancia, lo cual representa un problema de maximización, i.e:

$$y^{\mu} = \begin{pmatrix} y_1^{\mu} \\ y_2^{\mu} \\ \vdots \\ y_m^{\mu} \end{pmatrix} \geq \bar{0}; \quad \text{t.q. } p(\mathbb{M}^{\mu} - \mathbb{L}^{\mu})y^{\mu} \geq p(\mathbb{M}^{\mu} - \mathbb{L}^{\mu})\bar{y}.$$

para todo posible $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots y_m) \geq 0$, sin perder de vista que cada vector de precios p producirá una respectiva ganancia:

$$g^{\mu}(p) = p(\mathbb{M}^{\mu} - \mathbb{L}^{\mu})y^{\mu} \geq \bar{0}.$$

Esta ganancia llegará a ser máxima si se cumple el objetivo de maximizar $(p_0v_0 + p_1v_1 + \ldots + p_mv_m)$ s.a. $(U,V) \in T^{\mu}$; y $(\hat{U},\hat{V})$ es la tecnología en T^{μ} que es la solución del problema, sin perder de vista que todos los planes $(\mathbb{U},\mathbb{V})$ dependen de p, i.e:

$$g^{\mu}(p) = (p_0\hat{v}_0 + p_1\hat{v}_1 + \ldots + p_m\hat{v}_m) - (p_0\hat{u}_0 + p_1\hat{u}_1 + \ldots + p_m\hat{u}_m)$$

3.2.2 Los recursos de las unidades familiares.

Los ingresos de las unidades familiares se consideran en relación a los recursos iniciales de que disponen (componente 5: W^{ν}) y a su participación en el proceso productivo de las ganancias de las empresas, i.e:

$$I^{\nu}(p) = r^{\nu} + \sum_{\mu=1}^{m} \theta^{\nu,\mu} g^{\mu}; \quad \left[I^{\nu} = I^{\nu}(p)\right]$$

en donde:

$$\Gamma^{\nu}(p,W) = (p_0 w_0^{\nu} + p_1 w_1^{\nu} + \dots + p_m w_m^{\nu})$$

y la participación θ de ν, con respecto a la empresa μ, es la parte que le corresponde de la ganancia de cada empresa.

Por otra parte, las unidades familiares juegan un papel de consumidores en el mercado, en donde pueden encontrar un conjunto Ω de "planes de descanso-consumo" $A^1 = (x_0, x_1, \dots, x_m)$, de los cuales se deciden por el que les cause mayor satisfacción y que sea factible para ellos, de acuerdo con su ingreso. Así para el consumidor ν, tenemos:

$$A^{\nu} = \{(x_0, x_1, \dots, x_m) \in \Omega^{m+1} \mid p_0 x_0 + p_1 x_1 + \dots + p_m x_m \leq I^{\nu}\}$$

De acuerdo con su interés, el consumidor se plantea su problema de optimización de los recursos que puede obtener dentro del conjunto de los planes de descanso-consumo, esto es:

$$\hat{x}^{\nu} \in A^{\nu} \text{ tal que } \hat{x}^{\nu} \geq x^{\nu} \quad \forall \quad x^{\nu} \in A^{\nu}$$

Es así como el consumidor ha definido tanto su oferta W^{ν} como su demanda $\hat{x}^{\nu}$, de tal forma que nos es posible conocer la oferta agregada y la demanda agregada de todos los consumidores. En la misma forma se conocen las ofertas y las demandas de las empresas, por consiguiente se conoce la oferta y la demanda agregadas de todo el mercado:

$$O(p) = \sum_{\mu=1}^{M} \hat{V}^{\mu} + \sum_{\nu=1}^{N} W^{\nu}$$

$$D(p) = \sum_{\mu=1}^{M} \hat{U}^{\mu} + \sum_{\nu=1}^{N} \hat{x}^{\nu}$$

3.3 LA FUNCION DEMANDA DE EXCESO O EXCESO DE DEMANDA.

Se ha dicho que la demanda de exceso Z es a la Teoría del Equilibrio Económico General como la ley de gravedad es a la Mecánica Celeste, lo cual podría aparecer como un desatino ya que la teoría del equilibrio económico se encuentra aún en una etapa de afirmación, pero, guardando las proporciones que da la perspectiva del tiempo, es conveniente esperar que fructifique la investigación en este terreno.

DEFINICIONES:

Sean:

1. $S_m \subset \mathbb{R}^n_+$, en el ortante positivo de un espacio real que contiene los vectores de precios $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ $p_i \geq 0 \ \forall \ i = 1,2,\ldots,m; \ \Sigma p_i = 1$.

2. $Z(p) = \sum_{i=0}^{n} D_i(p) - \sum_{i=0}^{n} O_i(p)$

3. Si $Z_i(p^*) < 0$, entonces $p_i = 0$. Quiere decir que el bien i es un bien libre (dependiendo de las tecnologías de las empresas o de las preferencias de los consumidores), i.e: $O_i > D_i$ a un precio nulo.

4. $Z_i(p) = Z_i(\lambda p)$; para una $\lambda > 0$ arbitraria.

Hagamos algunas observaciones en relación de las implicaciones matemáticas y el significado económico que están implícitos en estas definiciones: Debemos exigir de la función Z las siguientes restricciones de suficiencia para que exista una solución:

1o. Que sea continua.

Esta condición se cumplirá en cuanto las funciones de demanda y oferta, (D_i y O_i) sean continuas, lo cual se ha exigido implícitamente.

2o. Que se cumpla la Ley de Walras.

Considerando un sistema de precios p, tal que la diferencia entre la demanda agregada $D_i(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ y su correspondiente oferta agregada, para todas las $i = 1,2,\ldots m$, sea nula, tendremos un sistema homogéneo de (m x m) en donde, por comodidad, tomaremos las ecuaciones lineales.

3o. Que sea homogénea de grado cero.

En este caso, si la economía está en equilibrio para p^*, (un vector de precios de equilibrio), se sigue que para un vector λp^*, también estará en equilibrio. Por lo tanto, todos los múltiplos de p^* serán vectores de precios de equilibrio, con lo que los precios estarán indeterminados.

Esta situación nos obliga a observar que los precios que se han definido no son precios absolutos, sino que estaremos en todo momento manejando precios relativos sujetos a la definición (1), pertenecientes al simplejo S_m, expresados en términos del bien escogido como numerario.

3.4 LOS PRECIOS DE EQUILIBRIO.

Seguiremos un desarrollo en tres etapas para obtener el vector de los precios de equilibrio p^*, con la aplicación del teorema del punto fijo de Brouwer:

1a. Etapa: Transformaremos las funciones Z en funciones F(Z) que cumplan con las condiciones de aplicación del teorema de Walras:

$$Z(p) \Rightarrow F(p)$$

2a. Etapa: El teorema del punto fijo de Brouwer.

3a. Etapa: Mostrar que el punto fijo de la función F(p) es un equilibrio económico, i.e: $Z_i(p^*) \leq 0$.

1a. Etapa:

Sea una función $f_i(p) = P_i + m_i(p) \geq 0 \ \forall \ m_i(p)$, con $f(p)$: $\mathbb{R}^m_+ \longrightarrow \mathbb{R}^m_+$, con Sm convexo y compacto, para lo cual debemos definir $m_i(p)$ continua, tal que:

$$m_i(p) > 0 \Leftrightarrow Z_i(p) > 0$$

$$m_i(p) = 0 \text{ si } Z_i(p) = 0$$

$$m_i(p) = \text{máx } (0, k_i Z_i(p))$$

con k_i que expresa una relación de numerario/cantidades, entonces:

$$f_i(p) = p_i + \text{máx } (0, k_i Z_i(p))$$

y la función vectorial $f(p) = (p_1 + \text{máx } (0, k_1 Z_1(p),$

$p_2 + \text{máx } (0, k_2 Z_2(p),$

....

$p_m + \text{máx } (0, k_m Z_m(p)),$

Siendo $\Sigma\ p_i = 1$, no garantiza que $f(p) = \Sigma f(p_i) = 1$, luego entonces $f(p) \notin$ Sm.

Puedo definir, entonces, otra función:

$$F_i(p) = \frac{p_i + \text{máx } (0, k_i Z_i(p))}{[\Sigma p_i + \Sigma \text{ máx } (0, k_i Z_i(p))]}$$

2a. Etapa.

DEFINICION 1: Un **simplex** es la envoltura convexa de un conjunto finito de vectores linealmente independientes.

El simplex fundamental en el espacio n-dimensional es el conjunto de n vectores y se expresa

$$S_n = \left\{ x \,|\, x \geq 0; \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$$

podemos verificar que S_n es la envoltura convexa de los n vectores unitarios e^i ($i = 1, 2, \dots, n$).

TEOREMA: (Teorema del Punto Fijo de Brouwer).

> Si f(x) es una proyección continua del simplex fundamental S_n, en sí mismo, entonces existe $x^* \in S_n$ tal que $f(x^*) = x^*$.

Propongamos una demostración constructiva debida a Scarf:

Sea m > n y sea Y un conjunto de m elementos de vectores de n dimensiones. (Entenderemos que Y incluye los n vectores e^i).

Si tomamos un vector cualquiera $b \geq 0$, nos interesa la siguiente solución fundamental:

$$\sum_{y \in Y} yw(y) = b; \quad w(y) \geq 0. \quad \text{---------(1)}$$

OBSERVACIONES:

(i) En Y hay por lo menos un subconjunto, B (una base) de n vectores linealmente independientes, tal que (1) se cumple con $w(y) = 0$ para $y \in Y - B$. Es fácil de observar con $B = I$.

(ii) Sea $y' \neq y$, tal que $y' \in [Y - B]$, para alguna base B. Nos pregutaremos si $\exists$ B' tal que $y' \in B'$ y todos los elementos de B menos uno (sea y"), de manera que (1) pueda satisfacerse siempre y cuando $w(y) = 0$, para todo $y \in [Y - B']$. Observemos que $[B - \{y''\}] = [B' - \{y'\}]$, con $\{y''\} = \{B - B'\}$.

DEFINICION 2: Decimos que B' es la inserción de y' en B si B y B' son ambos conjuntos bases posibles de (1) y $\{B - B'\} = \{y'\}$

Por la definición de B, $\exists$ r(y) tal que

$$y' = \sum_{y \in B} yr(y) \quad \text{------------ (2)}$$

Sea $Q \geq 0$ un escalar, de manera que podemos reescribir (1) como:

$$\sum_{y \in B} yw(y) - Qy' + Qy' = b \quad \text{------------- (1')}$$

Sustituyendo (2) en (1'):

$$\sum_{y \in B} y[w(y) - Qr(y)] + Qy' = b \quad \text{---------} \; (1'')$$

$$\text{Sea entonces, } w(y,Q) = \begin{cases} w(y) - Qr(y) & \text{para } y \in B \\ Q & \text{para } y = y \\ 0 & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Supongamos ahora $r(y) \leq 0$, $\forall\ y \in B$; ahora, si $w(y) = w(y,\ \ )$, entonces, (1) se satisfaría para Q arbitrariamente grande, pero debemos excluír esta posibilidad ya que el conjunto de soluciones de (1) está limitado, de modo que tendremos: $r(y) > 0$ para algún $y \in B$.

$$\text{Sea } Q^* = \min_{\substack{y \in B \\ r(y) > 0}} \frac{w(y)}{r(y)} = \frac{w(y'')}{r(y'')}$$

Si este mínimo es único con $w(y) > 0$, entonces haciendo $= Q^*$,y sustituyendo en (1"), obtendremos una solución nueva de (1):

$$\sum_{y \in B} yw'(y) = b$$

con $w'(y) = w(y) - \ ^*r(y)$; $y \in B$, $w(y') = \ ^*$.

Si el mínimo no es único *y/o* $w(y) = 0$, se dice que hay **degeneración.**

(iii) Para tratar esta degeneración digamos que el vector w^1 es lexicográficamente mayor que el vector w^2, si $w^1_j > w^2_j$, cuando $j = \min \{i |\ w^1_j \neq w^2_j\}$. Esto lo denotaremos $w^1 >_L w^2$.

Sea ahora que w(y) tenga (n+1) dimensiones con sus coordenadas numeradas (o, 1,..., n), y propongamos la ecuación y las desigualdades siguientes:

$$\sum_{y \in B} y w(y) = (b, I); \qquad \text{con } w(y) >_L \ \forall\, y \in B. \qquad \text{-------} \ (3)$$

donde B es una base como al principio.

Si se satisface (3), decimos que B es una base posible y advertimos que la solución de (3) contiene como la coordenada numerada "O" la solución del problema (1).

Supongamos ahora que y' ∈ [Y - B] y que hay una nueva base posible B', como vimos antes: [B - {y"}] = [B' - {y'}]. Siendo así, existe un vector v tal que:

$$\sum_{y \in B} y w(y) - y'v + y'v =$$

$$= \sum_{y \in B} y[w(y) - vr(y)] + y'v = (b, I) \qquad \text{---------} \ (3')$$

$$\text{así} \quad v = \frac{w(y")}{r(y")}$$

Observando que $v >_L 0$, sólo necesitamos demostrar que y es el único elemento que hemos eliminado de B, i.e. que:

$$\min_{\substack{y \in B \\ r(y) > 0}} \frac{w(y)}{r(y)} \quad \text{es único.}$$

Si no fuera así, entonces

$$\frac{w(y")}{r(y")} = \frac{w(y_1)}{r(y_1)} \; ; \quad \text{con } y^1 \neq y"$$

Para demostrar que esto no es posible, tomemos la matriz $W_{(nxn)}$, cuyas hileras sean los vectores de n dimensiones ${}^0w(y)$ formados al eliminar de w(y) el primer elemento. Sea $[y]_B$ la matriz formada para $y \in B$. Entonces, por (3), $[y]_B \; W = I$. Ahora, despejando w(y") y postmultiplicando ambos miembros de esta nueva ecuación por un vector k, sin dejar de advertir que $Wk = 0$ implica $k = 0$, (lo cual implica a su vez que W es no singular), entonces es imposible que dos hileras de W, por ejemplo: ${}^0w(y")$ y ${}^0w(y^1)$, sean proporcionales, dado lo cual, el mínimo debe ser único.

Utilizando el algoritmo de H. Scarf, se requiere que consideremos otro conjunto que escribiremos como $Z = \{z | z \in Y\}$, suponiendo que tiene como elementos vectores z de dimensión n. En este conjunto Z nos interesan **ciertos subconjuntos que tienen la propiedad de que todos sus elementos se encuentran "cercanos" entre sí.** LLamaremos a este conjunto **un conjunto primitivo** de Z. Consideremos ahora una proyección desde subconjuntos de Z hasta subconjuntos de Y.

Para esto, supongamos que $\exists$ **D** $\subset Z$, tal que la proyección lleva a **D** hasta una base $B \subset Y$, con B posible para el problema (1). Supongamos también que puede escogerse **D** en forma tal que todos sus elementos, menos uno, sean los mismos que en el conjunto primitivo en Z. Podríamos tratar de lograr que ambos conjuntos contengan los mismos elementos eliminando el elemento que no tenga su equivalente del conjunto primitivo y encontrando otro que lo sustituya, o insertando en **D** el elemento del conjunto primitivo que no se encuentra en **D** y eliminando, por consiguiente, un elemento de **D**.

En virtud de la proyección, la última operación implica el encuentro de una nueva base para el problema (1); la primera operación implica a su vez, el encuentro de un nuevo conjunto primitivo a partir de un conjunto primitivo dado. Si ocurre que existe siempre una forma única de ejecución de estas operaciones (como sabemos que sucede con los cambios de base posibles) y si los pasos nunca forman un ciclo, podemos demostrar que, finalmente, se logrará hacer concordar **D** con un conjunto primitivo de Z.

Para comprobar como este algoritmo nos conduce a un teorema del punto fijo, sustiyamos en (1) $b = e'$, donde **e'** es el vector hilera de dimensión n, cuyas componentes son todas iguales a 1. Ademas: Sea Z un subconjunto finito del simplex de dimensión n, y **f(z) una proyección continua del simplex en sí mismo**, de un sólo valor y sea **y(z) la proyección de Z en** Y, mencionada antes, así:

$$y(z) = f(z) - z + e'$$

Aplicando la proyección, podemos suponer que cuando el algoritmo termine, tendremos:

$$\sum_{z \in P} y(z)w(z) = \sum_{z \in P} [f(z) - z + e']w(z) = e' \qquad \text{------}(4)$$

donde P es el conjunto primitivo en Z con el que termina el algoritmo.

Dado que $ef(z) = ez = 1$, tenemos que $e[f(z) - z + e'] = n$ de modo que premultiplicando (4) por e, obtenemos:

$$n \sum_{z \in P} w(z) = n$$

i.e.:

$$\sum_{z \in P} w(z) = 1 \qquad \text{------------} \quad (5)$$

Suponiendo, por último, que los elementos de P están tan "próximos" que podemos tomarlos como idénticos bajo la condición, que hemos supuesto en todo momento, de que Z sea apropiadamente denso, la proyección se dará de un conjunto convexo y compacto (el símplex fundamental) a otro; entonces, de acuerdo con (5), la ecuación (4) se convierte en $f(z) - z = 0$, que es el punto fijo de Brouwer.

3a. Etapa:

Sea la función $F_i(p)$ de la primera etapa:

$$F_i(p) = \frac{p_i + \text{máx } (0,\ k_i Z_i(p))}{[\Sigma p_i + \Sigma \text{ máx } (0,\ k_i Z_i(p))]}$$

P.D. $\exists\ p^* \in Sm$, tal que

$$F_i(p^*) = \frac{p_i^* + \text{máx } (0,\ k_i Z_i(p^*))}{[\Sigma p_i^* + \Sigma \text{ máx } (0,\ k_i Z_i(p^*))]} = p_i^*$$

Por la Ley de Walras, debe cumplirse: $p_i Z_i(p) = 0\ \forall\ p \in S_m$, y para todo $F_i(p) \in S_m$ que sean vectores de precios de equilibrio.

$$\sum_{i=1}^{m} Z_i(p^*) \bullet (\text{máx}\ (0,\ k_i Z_i(p^*)) = 0$$

Si, como hemos dicho $Z_i(p^*) > 0$ (demanda de exceso positiva), entonces tendremos que

$$\sum_{i=1}^{m} p_i^* Z_i(p_i^*) = \frac{\Sigma p_i^* Z_i(p^*) + \Sigma[Z_i(p^*)(\text{máx}\ (0,\ k_i Z_i(p^*))]}{\Sigma[p_i^* + \text{máx}\ (0,\ k_i Z_i(p^*))]} \neq 0$$

Por lo tanto, para que se cumpla de Ley de Walras será necesario que si $Z_i(p) < 0 \Rightarrow p_i = 0$. Pero el vector de precios **p** no podría tener todas sus componentes iguales a cero, por lo que el equilibrio se alcanzará en el momento en que la función de demanda de exceso $Z(p) \leq 0$.

3.5 LAS MEDIAS PONDERADAS.

Para no perder de vista un objetivo particular en este trabajo, como lo es el de tratar de ligar algunos principios que creemos básicos, entre la economía, la física y la matemática, llevemos nuestra atención al simplejo de los precios en nuestra economía, en donde necesariamente tendrá que ubicarse el nuevo vector de precios después de cada cambio de la demanda de exceso hasta alcanzar el vector de equilibrio $F(p^*) = p^*$.

$$\sum F_i(p^*) = \frac{\sum p_i^* + \text{máx}\ (0,\ k_i Z_i(p^*))}{\Sigma[p_i^* + \Sigma\ \text{máx}\ (0,\ k\ Z_i\ (p^*))]} = p_i^* \in S_m$$

Esto mismo puede puede expresarse, dado que buscamos una proyección de S_m en sí mismo, con el vector columna e de dimensión m, cuyas componentes son todas iguales a la unidad. Entonces $[p + sm(p)]e$ es, claramente, no negativo. Así, podemos expresar la proyección T(p), como sigue:

$$T(p) = \frac{p + M(p)}{[p + M(p)]e} \in S_m$$

que se trata de una media ponderada por un vector de unos.

La observación que se nos antoja interesante y que está presente en una parte considerable de los fenómenos económicos, es la que el profesor Enrique Hueda Ojira, de la Facultad de Economía, ha hecho respecto a los trabajos de Marx, en los que, explícita o implícitamente, se refiere al estudio de estos fenómenos a través de los valores medios, como una forma de acercarse a soluciones congruentes con planteamientos plausibles. Obviamente este enfoque tiene que ver, en gran medida, con los trabajos económicos de Irving Fisher que están apoyados en la física y que mencionamos al final del capítulo primero..

Podríamos concluír a este respecto, que los problemas de existencia y estabilidad del equilibrio económico estarían relacionados con el estudio de las partículas de un cuerpo, (con alguna connotación propia como "cuerpo social o económico", tal como se hace con la mecánica de fluídos en física.

Objetivamente se trata de continuar en la búsqueda que han iniciado los economistas, los matemáticos y los físicos, en la que seguramente se irán incorporando elementos sociales y humanísticos que nos conduzcan, si no se engaña Poincaré, a la unidad de la ciencia.

BIBLIOGRAFIA DEL CAPITULO III.

[1]. ARROW,KENNETH JOSEPH Y F. H. HAHN.
Análisis General Competitivo. (Trad. Eduardo L. Suárez). F.C.E. Madrid, 1977. 527 p.

[2]. BALLESTERO, ENRIQUE.
El encuentro de las ciencias sociales. Alianza Universidad, (AU272). Madrid, 1980. 134 p.

[3]. BENETTI, CARLO.
Valor y Distribución. (Trad. Carlos Wert Ortega). Ed. Saltés. Madrid, 1978. 242 p.

[4]. BRAND, LOUIS.
Análisis vectorial. (Trad. Tomás S. Garza). CECSA. 7a.reimp. México, 1965. 333 p. (QA261.B64).

[5]. KEYNES, JOHN M.
Teoría general de la ocupación, el interés y el dinero. (Trad. Eduardo Hornedo). 2ed. 6a.reimp. F.C.E. México, 1981. 356 p.

[6]. KLEIN, LAWRENCE R.
La economía de la oferta y la demanda. (Trad. Eduardo L. Suárez). F.C.E. México, 1988. 191 p.

[7]. SCARF, HERBERT E.
Applied general equilibrium analysis. Cambridge University Press. USA., 1984. 538 p. (HB145.A66S224).

[8].SHILOV, GEORGE E.
An introduction to the theory of linear spaces. (Trans. from the Russian by. Richard A. Silverman). Prentice Hall. USA., 1961. 310 p. (QA261.S46).

[9]. ZAPATA LILLO, PALOMA.
Fundamentación Matemática de los algoritmos simpliciales. Revista del Seminario de Enseñanza y Titulación. Fac. de Ciencias. UNAM. México. Vol IX. No 84. 1933. 235 p. (multilit).

C O N C L U S I O N E S .

1. El universo de los modelos matemáticos que viven en los espacios multidimensionales ofrecen amplias posibilidades para representar fenómenos de la más diversa índole. El siglo XVIII fué una época de grandes descubrimientos en la matemática, que aplicaron en las ciencias de la naturaleza y es palpable que los intentos por aplicarlos a las ciencias sociales, no fueron infructuosos, como ejemplo: La estadística y el cálculo diferencial e integral..

2. Las ciencias sociales actualmente, como la economía, la demografía, la sociología, etc., han descubierto el instrumental de las matemáticas para hacer más productivo su trabajo, hacerlo más confiable y alcanzar altos niveles de eficiencia con un mejor aprovechamiento, pero aún no han logrado alcanzar un dominio adecuado de los principios de la matemática.

3 La preparación de los científicos sociales debe incluír, de manera formal, las bases matemáticas con un doble objetivo: 1o. Obtener el máximo aprovechamiento de las matemáticas en la solución de los problemas específicos de su campo, y 2o. Obtener el beneficio que la matemática les ofrece en la formación de una estructura lógica y cultural, para seguir más de cerca el desarrollo de la ciencia.

4. Aún cuando la matemática de mayor uso en las ciencias sociales no rebasa los conocimientos básicos del álgebra, álgebra lineal y el cálculo, para fines de aplicación cotidiana, es evidente que formas más elevadas como el análisis, la topología, la teoría de números y otras de la matemática actual, están desarrollándose no sólo en función de los problemas de la física y de la electrónica, sino que, en gran medida, estas áreas de la matemática se están adentrando en los fenómenos del comportamiento, lo que ha

ensanchado el campo de la investigación en las matemáticas.

5. En forma sintética, pero por demás ilustrativa, reproduzco una expresión de Irving Fisher, cuyos trabajos en la economía y en la física insisto, aún esperan quien continúe la exploración de un campo pleno de inquietantes sorpresas para quienes se atrevan a seguirlo:

> "El mundo de la economía es una región nebulosa. Los primeros exploradores usaron una visión simple. Las matemáticas son la linterna por la que, lo que antes se veía débilmente, aparece ahora firme y claramente delimitado. Las viejas ilusiones desaparecen. Vemos mejor, también vemos más lejos".

Octubre, 1993

APENDICE I.

definiciones económicas del equilibrio.(*)

EQUILIBRIO: Situación en la que una entidad económica se halla en reposo; o en la que las fuerzas que actúan sobre una entidad se encuentran compensadas de tal manera que no existe ninguna tendencia al cambio.

EQUILIBRIO DEL CONSUMIDOR: Aquella situación en la que el consumidor está maximizando la utilidad, es decir, ha elegido la cesta de bienes que, dada la renta y los precios, mejor satisface sus deseos.

EQUILIBRIO DE UNA EMPRESA: Situación o nivel de producción en la que la empresa está maximizando su beneficio. Este nivel estará sujeto a las restricciones a que pueda tener que hacer frente y, por tanto, no habrá ningún incentivo que lo motive para variar su nivel de producción o de precios. En la teoría estándar de la empresa, esto significa que ésta ha elegido un nivel de producción en el que el INGRESO MARGINAL es exactamente igual al COSTO MARGINAL y este último es creciente.

EQUILIBRIO COMPETITIVO: El equilibrio de la oferta y la demanda en un mercado o economía caracterizados por la COMPETENCIA PERFECTA. Dado que los vendedores y los compradores no tienen ningún poder para influir en el mercado, el precio variará hasta el punto en que sea igual al costo marginal y la utilidad marginal.

EQUILIBRIO A CORTO PLAZO Y A LARGO PLAZO: Equilibrios establecidos en diferentes períodos de tiempo, corto plazo y largo plazo, que, a su vez, dependen de que el tamaño de la planta sea capáz o no de ajustarse totalmente.

EQUILIBRIO MACROECONOMICO: Nivel del PNB en el que la demanda agregada planeada es igual a la oferta agregada planeada. En el modelo más sencillo, la definición del PNB de equilibrio es: C+I+G = PNB. donde C es el consumo planeado, I es la cantidad total que las empresas planean gastar en inversión y G es el gasto público en bienes y servicios.

EQUILIBRIO GENERAL: Situación de equilibrio de la economía en su conjunto, en la que los precios de todos los bienes y servicios son tales que todos los mercados se encuentran simultáneamente en equilibrio. Dado que a estos precios los productores desean ofrecer exactamente la cantidad de bienes que los consumidores desean comprar, no existen presiones que animen a ningún agente de la economía a modificar sus acciones. En cambio, el EQUILIBRIO PARCIAL es una situación en la que sólo hay equilibrio en un mercado.

CAMPO ESCALAR Y ESPACIO VECTORIAL

CAMPO ESCALAR.

Definición: Campo es una estructura de números a los que llamaremos escalares. Esta estructura a la que se le asigna de manera general la letra C (o la letra F en inglés Field) consiste de un conjunto de números y un conjunto de propiedades en base a las relaciones binarias (entre dos elementos del campo) a través de un operador, como sigue:

Propiedades del Operador SUMA:

A. CERRADURA DE LA SUMA. Para todo par a y b de escalares, existe un escalar (a+b) llamado la suma de a y b.

Sean a, b y c elementos de C, se demuestra que:

A.1 La suma es conmutativa: $a + b = b + a$.

A.2 La suma es asociativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$

A.3 Existencia del neutro aditivo. Existe un único escalar llamado cero, tal que: para todo elemento a del campo C, se cumple: $a + 0 = a$.

A.4 Inverso aditivo o simétrico. Para todo escalar a en el campo C, existe un único escalar $-a \in C$, tal que: $a + (-a) = 0$.

Propiedades del Operador MULTIPLICACION (producto):

B. CERRADURA DE LA MULTIPLICACION. (Producto de escalares): Para todo par a y b de escalares, existe un escalar $(a \cdot b)$ llamado el producto de a por b.

Sean a, b y c elementos de C, se demuestra que:

B.1 La multiplicación es conmutativa: $a\ b = b\ a$.

B.2 La multiplicación es asociativa: $a\ (b\ c) = (a\ b)\ c$.

B.3 Neutro multiplicativo. Existe un único escalar 1, llamado uno, tal que, para todo escalar a, se cumple: $a\ \ 1 = a$.

B 4. Inverso multiplicativo o recíproco: Para todo escalar a en el campo existe un único escalar a^{-1}ó $1/a$, tal que $a\ a^{-1} = 1$.

C. Propiedad DISTRIBUTIVA: La multiplicación es distributiva con respecto a la suma, también se dice que la multiplicación distribuye a la suma, ya que el producto de dos escalares se puede expresar como la suma de dos productos de escalares:

$$a\ (b + c) = a\ b\ +\ a\ c.$$

Si las condiciones A, B y C se cumplen para un conjunto de escalares y para los operadores (+) y (·), entonces el conjunto de escalares con las dos operaciones es llamado un Campo. En particular el campo toma el nombre del conjunto de los escalares que en él intervienen, así tenemos: $\mathbb{Q}$ = campo de los números racionales; $\mathbb{R}$ = campo de los números reales, y $\mathbb{C}$ = campo de los números complejos.

ESPACIO VECTORIAL:

Definición: Un espacio vectorial es un conjunto $\mathbb{V}x$, cuyos elementos llamados vectores, satisfacen las siguientes propiedades:

A.0 CERRADURA DE LA ADICION: Para todo par de vectores x, y en $\mathbb{V}x$ existe un vector x+y en $\mathbb{V}x$, llamado la suma de x y y.

Sean x, y y z en $\mathbb{V}x$, se demuestra que:

A.1 La adición es conmutativa: $x + y = y + x$.

A.2 La adición es asociativa: $x + (y + z) = (x + y) + z$.

A.3 Existe un único vector 0 (llamado el origen) en $\mathbb{V}x$, tal que para todo vector x, se cumple: $x + 0 = x$.

A.4 Para todo vector x en $\mathbb{V}x$, existe un único vector (-x) tal que $x + (-x) = 0$.

B.0 CERRADURA DE LA MULTIPLICACION (producto por un escalar): Para todo par a y x, tales que $a \in C$ y $x \in \mathbb{V}x$, existe un vector ax $\in \mathbb{V}x$, llamado el producto del escalar a por el vector x.

Sean $a, b \in C$; $x, y \in \mathbb{V}x$, se demuestra que:

B.1 La multiplicación por escalares es asociativa:

$$a(bx) = (ab)x.$$

B.2 $1 \cdot x = x$ para todo vector $x \in \mathbb{V}x$.

C.1 La multiplicación por escalares es distributiva respecto a la suma de vectores:

$$a(x + y) = ax + ay; \text{ y}$$

C.2 La multiplicación por vectores es distributiva con respecto a la suma de escalares:

$$(a + b)\,x = ax + bx.$$

Debemos entender estos axiomas o propiedades de los campos y de los espacios vectoriales como una caracterización conveniente de los objetos que deseamos estudiar, ya que la relación entre un espacio vectorial $\mathbb{V}x$ y un Campo C, se describe usualmente diciendo que $\mathbb{V}x$ es un espacio vectorial sobre un campo C, ejemplos:

1. ESPACIO VECTORIAL REAL. Cuando C es el campo de los números reales ($\mathbb{R}$).

2. ESPACIO VECTORIAL RACIONAL. Cuando C es el campo de los números racionales ($\mathbb{Q}$).

3. ESPACIO VECTORIAL COMPLEJO. Cuando C es el campo de los números complejos ($\mathbb{C}$).

OBSERVACIONES:

1. Los axiomas A definen las condiciones de un grupo abeliano (conmutativo).

2. Los axiomas B y C describen un grupo que admite escalares como operadores. Si estos escalares son elementos de un anillo, en lugar de un campo, el espacio vectorial es llamado un "módulo".

PRODUCTOS ENTRE VECTORES:

PRODUCTO INTERIO, PRODUCTO ESCALAR O PRODUCTO PUNTO.

Definición: Sean los vectores $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $y = (y_1\ , y_{,2}\ \ldots, y_n)$. El producto interior, escalar o punto $(x \cdot y)$ es la suma de todos los productos de las respectivas componentes de x, y:

$$x\ y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Ya que se trata de un número real, se puede decir que es una función cuyo dominio es el conjunto de las parejas de vectores de V_n, y el contradominio es el conjunto de los números reales.

PROPIEDADES:

i) $x\ y = y\ x$

ii) $x\ (y + z) = x\ y + x\ c$

iii) $\alpha(x\ y) = (\alpha x)\ y = x\ (\alpha y)$

iv) $x\ x = |x|^2 \quad \therefore \quad x\ x = |0| \Leftrightarrow x = 0.$

De iv) tenemos que: $|x| = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]^{1/2}$ lo cual define la norma del vector $x \in V_n$ y nos permite expresar el producto interior como $x\ y = |x|\,|y| \cos\theta$, siendo θ el ángulo formado por los vectores x, y.

APLICACIONES:

-Una aplicación importante en la mecánica es la expresión del trabajo (W) por este producto vectorial, que se calcula como el producto de la fuerza por la distancia.

-Otra aplicación fundamental en el mismo espacio vectorial es la definición de ortogonalidad entre dos vectores, que se expresa como: $x\ y = 0$. Esta definición se complementa con la expresión siguiente: $|x + y| = |x - y| \Leftrightarrow x\ y = 0$.

-De la definición del producto interior por medio del ángulo formado por los vectores, podemos despejar el valor del coseno de θ, i.e:

$$\cos \theta = \frac{X \cdot Y}{|X||Y|}$$

PRODUCTO VECTORIAL:

Definición: Por el cálculo de los determinantes, se define el producto vectorial como una función cuyo dominio es el conjunto de parejas en V_n y el contradominio es el conjunto de vectores en V_n.

La regla de correspondencia la expresaremos con un ejemplo práctico: Sean $X = (x_1, x_2, x_3)$; $Y = (y_1, y_2, y_3)$, vectores en V_3, entonces

$$X \times Y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2 y_3 - x_3 y_2)i + (x_3 y_1 - x_1 y_3)j + (x_1 y_2 - x_2 y_1)k$$

PROPIEDADES:

i) $X \times Y = -Y \times X$

ii) $(X \times Y) X = (X \times Y) Y = 0.$

iii) $|X \times Y| = \left[|X|^2 |Y|^2 - (X Y)^2 \right]^{1/2}$

iv) $\alpha (X \times Y) = (\alpha X) \times Y.$

v) $X \times (Y + Z) = (X \times Y) + (X \times Z)$

vi) $|X \times Y| = |X| \, |Y| \text{ SEN } \theta.$

La interpretación geométrica que podemos dar es la de que X x Y es un vector perpendicular al plano en que se encuentran X y Y, por lo tanto, es un vector perpendicular tanto al vector X como al vector Y. En cuanto a la norma del producto vectorial (se trata de un número real) expresa el área del paralelogramo construído por los vectores cuando representamos la suma de ellos. Esta área estará expresada en unidades de superficie.

Existen también productos que combinan los ya definidos y que toman el nombre de TRIPLES PRODUCTOS, cuyas propiedades requieren de un estudio más ámplio y que tienen la mayor importancia en los espacios de dimensiones mayores.