27
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

NEGOCIACION Y EQUIDAD EN JUEGOS 3 - PERSONALES

T E S I S

Que para obtener el Título de:

MATEMATICO

P r e s e n t a :

JOSE LUIS PEREZ LOPEZ

DIRECTOR DE TESIS:
MAT. JOSE ZAPATA LILLO

MEXICO, D. F. 1993

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

INDICE

INTRODUCCION.. 1

CAPITULO 1. JUEGOS COOPERATIVOS................................... 3

1.1. NOTACIONES Y DEFINICIONES BASICAS.......................... 4
1.2. EJEMPLOS.. 12

CAPITULO 2. CONCEPTOS DE SOLUCION................................. 19

2.1. IMPUTACIONES.. 20
2.2. EL CORE... 23
2.3. CONJUNTOS ESTABLES.. 27
2.4. EL CONJUNTO DE NEGOCIACION................................ 34
2.5. EL VALOR DE SHAPLEY....................................... 37

CAPITULO 3. TRANSFORMACIONES DE PODER Y CONJUNTOS DE
NEGOCIACION ESPECIALES.. 40

3.1. EL PRINCIPIO DE EQUIDAD................................... 41
3.2. EL CONJUNTO DE NEGOCIACION PARA JUEGOS TRIPERSONALES...... 43
3.3. TRANSFORMACIONES DE PODER................................. 48
3.4. M-CONJUNTOS DE NEGOCIACION................................ 50
3.5. CONJUNTOS DE NEGOCIACION DESCRIPTIVOS..................... 51
3.6. UN EXPERIMENTO DE MURNIGHAN Y ROTH........................ 54

CAPITULO 4. TEORIA DE COTAS DE PAGO DE SELTEN 59

4.1. EL ORDEN DE FUERZA 60
4.2. PARTICIPACIONES DE COALICION Y COTAS TENTATIVAS BASADAS EN ELLAS 61
4.3. COTA DEL JUGADOR 2, POR SUBSTITUCION 62
4.4. COTAS POR COMPLEMENTACION 62
4.5. COTAS TENTATIVAS MAS ALTAS DE LOS JUGADORES 1 Y 2 63
4.6. EL CASO DEL JUGADOR 3: SU SITUACION ESTRATEGICA, SU COTA COMPETITIVA Y SU COTA TENTATIVA MAS ALTA 64
4.7. DISCUSION DEL CASO $t_1 + t_2 + t_3 > g$ 66
4.8. COTAS PRELIMINARES 69
4.9. COTAS FINALES 69
4.10. PREDICCIONES DE LA TEORIA DE COTAS DE PAGO 71

CAPITULO 5. UNA MEDIDA DE LOS EXITOS PREDICTIVOS 74

5.1. JUEGOS ENREJADOS 75
5.2. UN PROBLEMA DE DIMENSIONES 76
5.3. EXITOS PREDICTIVOS 77

CAPITULO 6. PROMINENCIA 80

6.1. NIVELES DE PROMINENCIA Y DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIA 80
6.2. ANTECEDENTES INTUITIVOS DEL METODO 82
6.3. NIVEL DE PROMINENCIA DE UN CONJUNTO DE DATOS 84
6.4. COMPARACION DE EXITOS PREDICTIVOS 86

CONCLUSION 88

BIBLIOGRAFIA 89

INTRODUCCION

Es notable el creciente interés que por el estudio sistemático de la negociación se ha manifestado en los últimos años, tanto en los medios comerciales y económicos como en los políticos. Esto se debe en parte a la tendencia a la "globalización" de la economía internacional, así como a la regulación gubernamental en la economía interna de cada país.

Según Nash, (Nash, 1950) un proceso que involucra a individuos es una negociación si:

1. Existe un acuerdo satisfactorio para todas las partes.
2. Existe un conflicto de intereses.
3. No es posible imponer un acuerdo contra la voluntad de algún participante.

La Teoría de Juegos nos proporciona modelos para la descripción adecuada de los procesos de negociación y además conceptos de solución que representan posibles resultados finales.

En este trabajo consideramos negociaciones en juegos tripersonales y en él exponemos modelos teóricos, que incluyen en sus supuestos la idea de equidad. A la vez, tratamos con modelos cuyos supuestos se basan enteramente en la racionalidad de los agentes.

Los experimentos han mostrado que las teorías del primer tipo tienen más capacidad descriptiva que las del segundo, aunque éstas a su vez, son más útiles para asesorar a los agentes.

Los conceptos de solución tratados aquí, son:

- el Core
- el Conjunto Estable,
- el Conjunto de Negociación y
- el Valor de Shapley.

Las teorías correspondientes a estos conceptos son principalmente normativas, aunque la Teoría del Conjunto de Negociación tiene también características descriptivas. Maschler (1978), mejoró considerablemente la capacidad descriptiva de esta teoría, incorporando ciertos supuestos de equidad.

Se examina la Teoría de Cotas de Pago (Selten,1982), que se basa plenamente en consideraciones de equidad y que supera ampliamente a las teorías anteriores en cuanto a capacidad descriptiva. Fueron Selten y Krischker (1982) quienes desarrollaron el método, que se usa aquí, para comparar diferentes teorías.

Tanto la Teoría del Conjunto de Negociación mejorada por Maschler como la Teoría de Cotas de Pago, toman en cuenta que los sujetos tienden a negociar en números "redondos", por lo tanto, ambas teorías dependen de un parámetro llamado el nivel de prominencia, cuyos múltiplos son considerados como números "redondos". Así que, la parte final está dedicada a determinar este nivel de prominencia en base a los datos obtenidos.

Los resultados de este trabajo se utilizarán en un proyecto más amplio:
Mediante una teoría descriptiva puede predecirse el comportamiento de los participantes en la negociación, y después puede adoptarse una teoría normativa para asesorar a una de las partes.

CAPITULO 1
JUEGOS COOPERATIVOS

La teoría de juegos cooperativos trata con ciertos modelos matemáticos que intuitivamente permiten contratos, cooperación y negociación. Frecuentemente, los modelos en cuestión implican ciertos acuerdos entre subgrupos de los participantes y así el concepto de coalición juega un papel central en la Teoría cooperativa.

Imaginemos que un cierto grupo de individuos está participando en una negociación. Es deseable distinguir a los participantes digamos dando su nombre, nosotros llamaremos a los participantes jugadores y los enumeraremos por $1, 2, \ldots, n$. Estos jugadores pertenen a algún conjunto Ω. Así, Ω es el conjunto de jugadores.

Como las coliciones son objetos importantes para nuestro análisis, tenemos que identificar "grupos" de jugadores con ciertos objetos matemáticos. Ahora, claramente, una coalición está definida especificando los jugadores que involucra, lo cual conduce a un subconjunto de Ω que consiste justo de aquellos jugadores que participan en la coalición dada. Así, las coaliciones son subconjuntos de Ω , en un contexto matemático riguroso. En general puede suceder que no todos los subconjuntos de Ω sean 'factibles' en algún sentido intuitivo, por lo tanto, al definir un juego (cooperativo) se debe de antemano especificar una clase de coaliciones admisibles o factibles, esto es, un sistema $\mathbb{P}$ de subconjuntos de Ω.
Finalmente, se debe ponderar acerca del incentivo que causa que los jugadores formen una coalición $S \subseteq \Omega$.

Tal incentivo deberia existir para cada jugador $i\in S$ y puede consistir de un pago de dinero, un mejoramiento en el estándar de vida, prestigio y cualquier cosa que sea digna de negociar.

1.1. NOTACIONES Y DEFINICIONES BASICAS.

Sea $\Omega=\{1,2,\ldots,n\}$ el <u>*conjunto de jugadores*</u> y $\mathbb{P}=\{S|S$ es permisible, $S\subseteq\Omega\}$ el <u>*sistema de coaliciones permisibles*</u>.

DEFINICION 1.1.1. Sea $\upsilon:\mathbb{P}\to\mathbb{R}$ una función tal que $\upsilon(\Phi)=0$. Entonces se dice que $G=(\Omega,\mathbb{P},\upsilon)$ es un <u>*juego*</u>.

DEFINICION 1.1.2. La función υ que corresponde al pago garantizado más grande $\upsilon(S)$ para cada coalición S, cuando todos sus miembros actuan juntos, es la <u>*función caracteristica*</u>.

La función caracteristica conforma una "presolución", es decir, un primer intento rudimentario de solución.

DEFINICION 1.1.3.

1. Una función caracteristica $\upsilon:\mathbb{P}\to\mathbb{R}$ es <u>*superaditiva*</u> si:

$$\upsilon(\Phi)=0 \quad y$$

$$\upsilon(S)+\upsilon(T)\le\upsilon(S+T) \qquad (S,T\in\mathbb{P}). \qquad (1)$$

2. υ es <u>*aditiva*</u> si :

$$\upsilon(S)+\upsilon(T)=\upsilon(S+T) \qquad (S,T\in\mathbb{P}). \qquad (2)$$

Se utilizará la notación $S+T$ en lugar de $S\cup T$ si y sólo si $S\cap T=\Phi$; por lo tanto, los requerimientos (1) y (2) <u>están restringidos solamente a pares de coaliciones ajenas.</u>

La superaditividad de la función característica refleja la propiedad de que una "unión" de jugadores en una coalición única (y uniones de coaliciones pequeñas en una más grande) es aconsejable para aumentar los pagos correspondientes.

En cambio, la aditividad refleja el hecho de que los jugadores no están interesados en formar coaliciones bajo las condiciones del juego dado.
Sin embargo, en los juegos experimentales donde falla la superaditividad, o donde no todas las coaliciones son permisibles, los jugadores desarrollan ingeniosos esquemas para burlar estas carencias. Ellos pueden hallar una manera de formar coaliciones no permisibles y vencer las limitaciones impuestas por la falta de la superaditividad.

En tales casos (el juego no es superaditivo ó $\mathbb{P}\neq$pot Ω) puede ser ventajoso basar el análisis teórico no sobre el juego $G=(\Omega,\mathbb{P},\upsilon)$, sino sobre su cubierta superaditiva.

DEFINICION 1.1.4.

1. Para cualquier coalición S sea $\sigma(S)$ el conjunto de todas las particiones $(S_1,\dots,S_m)$ de S en pares de coaliciones permisibles ajenas dos a dos.
2. Para cualquier coalición S se define $\bar{\upsilon}(S)$ como:

$$\bar{\upsilon}(S)=\max_{(S_1,\dots,S_m)\in\sigma(S)}\sum_{j=1}^{m}\upsilon(S_j) .$$

3. La <u>*cubierta superaditiva*</u> de un juego dado $G=(\Omega,\mathbb{P},\upsilon)$ es el juego $\bar{G}=(\Omega,\text{pot }\Omega,\bar{\upsilon})$.

Si G es un juego superaditivo y $\mathbb{P}=$PotΩ, no existe diferencia entre G y su cubierta superaditiva.

DEFINICION 1.1.5. Una coalición es <u>*genuina*</u> si está formada por al menos dos jugadores.

La siguiente notacion será bastante utilizada.

$\mathbb{V}$ denota el conjunto de todos los mapeos $v:\mathbb{P}\to\mathbb{R}$ tal que $v(\Phi)=0$. También $\mathbb{S}$ denota el conjunto de funciones superaditivas, y $\mathbb{A}$ el conjunto de funciones aditivas. Obviamente $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{S} \subseteq \mathbb{V}$. Por convención, $v\in\mathbb{S}$ es no negativa $(v\geq0)$ si $v(S)\geq0$ $(S\in\mathbb{P})$. La no negatividad se representa por $^{+}$. También la uno normalización $(v(\Omega)=1)$ se representa por ^{1}. Asi, por ejemplo, $\mathbb{A}^{+1}$ es el conjunto de funciones que son aditivas, no negativas y uno normalizadas.
Frecuentemente, usaremos los términos 'superaditivo', 'aditivo' etc. en conexión con los juegos, significando que su función caracteristica tiene la propiedad en cuestión.

DEFINICION 1.1.6. Una <u>*estructura de coalición*</u> para un juego *n*-personal es una partición

$$\mathfrak{F} = (S_1,\ldots,S_m) \text{ de } \Omega.$$

Una estructura de coalición representa el "rompimiento" del conjunto Ω en coaliciones ajenas dos a dos.

El resultado final de una partida es descrito por una configuración.

DEFINICION 1.1.7. Una *configuración* es una pareja

$$\alpha=(\mathcal{J},x)=(S_1,\ldots S_m;x_1,\ldots,x_n)$$

donde $\mathcal{J}$ es una estructura de coalición y x es un n-vector que satisface las siguientes restricciones:

$$x_i\geq v(i) \qquad i\in\Omega,$$

$$\sum_{i\in S_j} x_i = v(S_j) \qquad \text{para} \quad j=1,\ldots,m\ .$$

Así, una configuración muestra la estructura de coalición $S_1,\ldots S_m$ y los pagos $x_1,\ldots,x_n$ alcanzados por los jugadores.

El conjunto de todas las configuraciones para $G=(\Omega,\mathbb{P},v)$ es denotado por $\mathbb{K}$.

Se utilizará una notación simplificada para las coaliciones en juegos tripersonales: se escribirá i en lugar de $\{i\}$; ij para $\{i,j\}$ y 123 para $\{1,2,3\}$.

DEFINICION 1.1.8. Una coalición $S\in\mathbb{P}$ es *provechosa* si:

$$v(S) > \sum_{i\in S} v(i)\ .$$

DEFINICION 1.1.9. Un juego $G=(\Omega,\mathbb{P},v)$ es *esencial* si $\mathbb{P}$ contiene al menos una coalición provechosa.

Un juego es esencial si alguna coalición, al menos, funciona estrictamente mejor permaneciendo unida. De esta manera, solamente los juegos esenciales son interesantes para la experimentación.

DEFINICION 1.1.10. Una estructura de coalición $S_1,\ldots,S_m$ es una *estructura nula* si ninguna de las coaliciones $S_1,\ldots,S_m$ es provechosa.

En una estructura nula, los jugadores no están interesados en formar ninguna de las coaliciones que ella propone, debido a que en tal estructura no existe coalición alguna que aumente sus pagos, así que, los jugadores intentarán formar otra estructura de coalición.

DEFINICION 1.1.11. Un juego $G=(\Omega,\mathbb{P},\upsilon)$ es *cero normalizado* si:
$\upsilon(i)=0$ para $i=1,2,\ldots,n$.

En un juego cero normalizado la esperanza de cada jugador cuando juega solo tiene un valor de cero.

DEFINICION 1.1.12. Para cualquier juego $G=(\Omega,\mathbb{P},\upsilon)$ definimos un *proceso de cero normalización* con

$$\upsilon_o(S)=\upsilon(S)-\sum_{i\in S}\upsilon(i) \qquad \text{para toda } S\in\mathbb{P}.$$

Por medio de este proceso se obtene el juego cero normalizado $G_o=(\Omega,\mathbb{P},\upsilon_o)$.

Un mapeo f 1-1 del conjunto de configuraciones $\mathbb{K}$ de G sobre el conjunto de configuraciones $\mathbb{K}_o$ de G_o se define como sigue. Una configuración en $\mathbb{K}$,

$$\alpha=(S_1,\ldots,S_m;x_1,\ldots,x_n)$$

se mapea en la configuración $\beta=f(\alpha)$ en K_o

$$\beta=(S_1,\ldots,S_m;y_1,\ldots,y_n)$$

con

$$y_i=x_i-v(i).$$

El mapeo f es llamado, *mapeo de cero normalización*.

DEFINICION 1.1.13.

1. $v\in\mathcal{S}$ es *simple*, si $v(S)\in\{0,1\}$ $(S\in\mathbb{P})$.
2. Un juego simple $v\in\mathcal{S}$ es una *mayoría pesada* si existe $m\in\Delta^{+1}$ y $\alpha\in[0,1]$ tal que

$$v(\cdot) = 1_{[\alpha,1]}(m(\cdot)) = 1_{[\alpha,1]}\circ m(\cdot) .$$

Un juego simple se distingue por la propiedad de tener sólo dos tipos de coaliciones, a saber, victoria y derrota.
Una mayoría pasada asigna un peso m_i al jugador $i\in\Omega$. Una coalición que alcanza el nivel de mayoría α, es ganadora.
Una mayoría pesada puede verse de la siguiente manera:
Hay n jugadores con $m_1,\ldots,m_n$ votos para echar, respectivamente. Se requiere de un total de al menos α votos para efectuar una decisión.
Introducimos las notaciones

$\mathcal{S}_s$ para el conjunto de juegos simples y

$\mathcal{S}_m$ para las mayorías pesadas.

DEFINICION 1.1.14. Sea $v \in S_*$. Entonces

1. $W = W(v) = \{S \mid v(S)=1\}$ es el <u>*sistema de coaliciones ganadoras*</u>,

2. $L = L(v) = \{S \mid v(S)=0\}$ es el <u>*sistema de coaliciones perdedoras*</u>.

Claramente, para cualquier $v \in S_*$ tal que $v(\Omega)=1$,

$$\emptyset \in L, \quad \Omega \in W, \qquad W + L = \mathbb{P} .$$

También, si $S \in W$, entonces, por superaditividad $S^c \in L$, sin embargo, S, $S^c \in L$ puede ocurrir.
Note también que $S \in W$, $T \supseteq S$ implica $T \in W$.

DEFINICION 1.1.15.

1. Sea $v \in S_*$. $S \in W$ es <u>*mínima ganadora*</u> si $T \subseteq S$, $T \in W$ implica $T = S$.

   $W^m = W^m(v)$ es el <u>*sistema de coaliciones mínimas ganadoras.*</u>

2. Sea $m \in \mathbb{A}^+$ y $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Decimos que m es <u>*homogéneo con respecto a α*</u> ('m hom α ') si, para $S \in \mathbb{P}$ y $m(S) > \alpha$, existe $T \subseteq S$, tal que $m(T) = \alpha$.
3. $v \in S_m$ es una <u>*mayoría pesada homogénea*</u> si existe $(m,\alpha) \in \mathbb{A}^{+1} \times \mathbb{R}^+$ tal que m hom α y $v = 1_{[\alpha,1]} \circ m$. S_h denota el conjunto de mayorías pesadas homogéneas.

4. $v \in \mathbb{V}$ es una función de <u>*suma constante*</u> si:

$$v(S) + v(S^c) = v(\Omega) \qquad (S \in \mathbb{P}).$$

La propiedad de suma constante es indicada con $_{\circ}$.

Una coalición ganadora es mínima ganadora si no contiene coaliciones más pequeñas que sean ganadoras

Ahora, la homogeneidad significa que cualquier coalición mínima ganadora acumulará el mismo peso. Claramente, una función puede ser homogénea con respecto a un cierto (m,α) sin serlo con respecto a otro par (μ,β).

En un juego de suma constante, el valor característico de una coalición cuando se añade al de su complemento, es siempre igual a una cantidad fija: $v(\Omega)$.

DEFINICION 1.1.16. Sea $v\in\mathbb{V}$ y $T\in\mathbb{P}$. La <u>*restricción v_T de v sobre T*</u> es el mapeo $v_T:\mathbb{P}\to\mathbb{R}$ definido por

$$v_T(S) = v(T\cap S).$$

La restricción v_T redefine el valor de una coalición S, asignando un nuevo valor, de acuerdo a los miembros de T que S contiene. Por lo tanto, si S y T no tienen miembros en común, el valor asignado por v_T a la coalición S es de cero.

1.2. EJEMPLOS.

EJEMPLO 1.2.1. Sea $n = 5$, $m = (\frac{1}{7},\frac{1}{7},\frac{1}{7},\frac{1}{7},\frac{3}{7})$, y $\alpha = \frac{4}{7}$. Definimos $\upsilon \in S_m$ por

$$\upsilon(S) = \begin{cases} 1, & m(S) \geq \alpha, \\ 0, & m(S) < \alpha, \end{cases}$$

entonces υ representa un juego de cuatro 'pequeños' jugadores y un 'gran' jugador: el jugador 5 necesita solamente un socio para establecer una coalición S tal que $\upsilon(S)=1$. Por otro lado, los jugadores 1,2,3,4 pueden unir sus fuerzas para formar una coalición ganadora.

EJEMPLO 1.2.2. Sea $n = 6$ y $m = (\frac{2}{9},\frac{2}{9},\frac{2}{9},\frac{1}{9},\frac{1}{9},\frac{1}{9})$, $\alpha = \frac{5}{9}$. Además

$$\upsilon(\cdot) = 1_{[\alpha,1]} \cdot m(\cdot) .$$

Claramente, cualquier conjunto con al menos cuatro jugadores es ganadora. Sin embargo, vía las coaliciones 3-personales los jugadores 4,5,6 son levemente discriminados, porque, para que una coalición S, con $|S|=3$ sea ganadora, debe contener necesariamente al menos dos de los jugadores 1,2,3.

EJEMPLO 1.2.3. Sea $\Omega=\{1,\ldots,n\}$, $m=(\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n})$ (la 'distribución uniforme') y $\alpha = \frac{n-1}{n}$. Entonces al menos n-1 jugadores son necesarios para formar una coalición ganadora.

<u>EJEMPLO 1.2.4.</u> Sea $n = 5$ y definimos $v \in S_e$ por

$$v(S) = \begin{cases} 0, & |S| \leq 2,\ S = (1,2,3), (2,3,4), (3,4,5), (4,5,1), (5,1,2) \\ 1, & \text{en otr caso.} \end{cases}$$

Así, exactamente aquellas coaliciones 3-personales en la que los jugadores i, $i+1$, $i+2$ (mod 5) aparecen simultáneamente, son las perdedoras.

Podría pensarse que todo juego simple es un juego de mayoría pesada, sin embargo veremos que, en general, esto no es cierto.

Supongamos que, para este ejemplo en particular $v \in S_m$ i.e.

$v = 1_{(\alpha,1)} \circ m$ para algún m y algún α.

Entonces m debe satisfacer

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 + m_3 &< \alpha \\ m_2 + m_3 + m_4 &< \alpha \\ m_3 + m_4 + m_5 &< \alpha \\ m_4 + m_5 + m_1 &< \alpha \\ m_5 + m_1 + m_2 &< \alpha \end{aligned}$$

Sumando ambos lados, obtenemos $3m(\Omega) < 5\alpha$.

Tenemos también que:

$$\begin{aligned} m_1 + m_3 + m_4 &\geq \alpha \\ m_2 + m_4 + m_5 &\geq \alpha \\ m_3 + m_5 + m_1 &\geq \alpha \\ m_4 + m_1 + m_2 &\geq \alpha \\ m_5 + m_2 + m_3 &\geq \alpha \end{aligned}$$

de donde obtenemos $3m(\Omega) \geq 5\alpha$. Esta contradicción implica que v no es un juego de mayoría pesada, i.e.

$$S_e \supsetneq S_m \quad \text{para} \quad n = 5.$$

EJEMPLO 1.2.5. Sea $n = 6$, $\Omega_0 = \{1,2,3\}$ y definimos $v \in S_*$ por

$$v(S) = \begin{cases} 0, & |S| \leq 2;\ |S| = 3 \text{ y } |S \cap \Omega_0| \text{ es impar}, \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Aquí, en una coalición 3-personal, los jugadores 1,2,3 deben aparecer en números pares para hacer una coalición ganadora.
Puede probarse, (como en el ejemplo 4) que

$$S_* \supsetneqq S_m \quad \text{para} \quad n = 6.$$

Así, se puede ver fácilmente, al igual que en los ejemplos 4 y 5, que $S_* \supsetneqq S_m$ para todo $n \geq 5$. Mientras que, para $n<5$, se tiene que $S_* = S_m$.

Regresando a los ejemplos previos, podemos ver que:

1.2.1. es de suma constante y homogéneo,
1.2.2. es de suma constante pero no homogéneo,
1.2.3. no es de suma constante, solamente homogéneo,
1.2.4. no es de suma constante y no es una mayoría pesada,
1.2.5. es de suma constante pero no es una mayoría pesada.

Los ejemplos anteriores fueron puramente teóricos. Los ejemplos siguientes muestran como la Teoría de Juegos puede aplicarse a las situaciones reales.

EJEMPLO 1.2.6. EL JUEGO DEL CONTRATO DE RECOLECCION DE BASURA.

Un pueblo ofrece, a concurso cerrado, su contrato anual de recolección de basura. Tres firmas compiten por el trabajo; para ello proponen ofertas secretas, el trabajo será adjudicado a la firma que proponga la oferta más baja menor o igual a $50,000, ya que si las ofertas exceden esta cantidad, el pueblo se encargará de la operación de la recolección de la basura. Debido a las diferencias en los costos de trabajo y la eficiencia del equipo, los costos para proveer el servicio al pueblo varían de una firma a otra y esos costos generales son conocidos por todas las partes. Específicamente, el costo a la firma 1 para proveer el servicio es de $38,000, para la firma 2 es de $40,000 y para la firma 3 es de $44,000. Las necesidades económicas demandan que las ofertas propuestas por cada firma excedan sus costos individuales generales.

Cada una de las firmas debe proponer una oferta que está determinada por sus costos generales y la ganancia que ellas desean obtener. Los pagos (la ganancia real obtenida por cada una de esas firmas como resultado de las tres ofertas) pueden ser determinados fácilmente. Por ejemplo, si las firmas 1, 2 y 3 ofrecen $44,000, $43,000 y $48,000, respectivamente, el contrato será adjudicado a la firma 2 la cual obtendrá una ganancia de $3,000, mientras que las otras dos firmas no obtienen nada. ¿Cómo debe ofrecer cada firma?.

Ahora, si por ejemplo, las firmas 1 y 2 deciden formar una coalición, la firma 1 puede ofrecer \$44,000 y la firma 2 puede ofrecer cualquier cantidad más grande. Ya que, es conocido que la oferta de la firma 3 deberá exceder los \$44,000. Entonces el contrato será adjudicado a la firma 1 y realizará una ganancia de \$6,000. Así, el valor de la coalición de las firmas 1 y 2 es de \$6,000 ó $v(12)=\$6000$. Podemos verificar que:

$$v(1)=\$2000$$
$$v(123)=\$12000$$
$$v(2)=v(3)=v(23)=\$0.$$

<u>EJEMPLO 1.2.7. EL JUEGO DEL SISTEMA HIDRAULICO.</u> Los consejos de Tres municipios vecinos negocian sobre la construcción de un sistema hidraúlico. Los datos relevantes en esta negociación son los costos de construcción de tal sistema (para cualquier subconjunto) y los ingresos que en cada municipio se producirán.

Costos.
Un municipio ....\$ 800
(1,2)..................\$1300
(1,3)..................\$1300
(2,3)..................\$1250
(1,2,3)................\$1900.

Ingresos.
(1)............\$1000
(2)............\$1100
(3)............\$ 800

Así, la función característica v será:

$v(1)=\$1000-\$800=\$200$, $v(2)=\$1100-\$800=\$300$, $v(3)=\$800-\$800=\$0$,
$v(12)=\$1000+\$1100-\$1300=\$800$, $v(23)=\$1100+\$800-\$1250=\$650$,
$v(13)=\$1000+\$800-\$1300=\$500$, $v(123)=\$1000+\$1100+\$800-\$1900=\$1000$.

EJEMPLO 1.2.8. EL JUEGO DE LA MEDICINA. Juan García ha inventado una nueva medicina. Juan no puede fabricar la medicina él mismo, pero puede vender la fórmula a la compañía A ó a la compañía B. La compañía afortunada dividirá una ganancia de $1 millón con Juan García.

Llamando a Juan García, el jugador 1, a la cía A, el jugador 2 y a la cía B, el jugador 3, hallamos que la función característica para este juego es:

$v(1)=v(2)=v(3)=v(23)=\$0,$
$v(12)=v(13)=v(123)=\$1,000,000.$

EJEMPLO 1.2.9. EL JUEGO DE LA TIERRA. La tierra de un granjero vale $100,000 para él; para un fabricante vale $200,000 como instalación fabril; un fraccionador pagaría hasta $300,000. No hay otros compradores probables.

Denotemos a los jugadores por 1,2 y 3, respectivamente. Dejando que cero represente la condición de carencia de la tierra, notamos que cualquier coalición que no contiene al jugador 1 tiene un valor de $0. Cualquier otra coalición tiene un valor igual al máximo valor que un miembro de la coalición pone a la tierra.
Así, obtenemos la siguiente función característica:

$v(1)=\$100,000,$ $v(2)=v(3)=v(23)=\$0,$
$v(12)=\$200,000,$ $v(13)=v(123)=\$300,000.$

EJEMPLO 1.2.10. EL JUEGO DEL AEROPUERTO. Suponga que tres tipos de aviones (Piper Cubs, DC-10s y 707s) usan un aeropuerto. Un Piper Cub necesita una pista de aterrizaje de 100 mts, un DC-10 requiere una pista de aterrizaje de 150 mts y un 707 requiere una pista de aterrizaje de 400 mts.

Suponga que el costo de mantenimiento de una pista de aterrizaje por un año es igual a su longitud.

Ya que, aviones 707 aterrizan en el aeropuerto, éste tiene una pista de 400 mts. Para simplicidad, suponga que cada año solamente un avión de cada tipo aterriza en el aeropuerto.

Si nombramos al jugador 1=Piper Cub, al jugador 2=DC-10 y al jugador 3=707; podemos definir un juego 3-personal en el cual el valor de una coalición es el costo asociado con a longitud de la pista de aterrizaje necesaria para dar servicio al avión más grande en la coalición.

Así, la función característica para este juego es:
(listamos un costo como una renta negativa)

$v(1)=-\$100$,
$v(12)=v(2)=-\$150$,
$v(3)=v(23)=v(13)=v(123)=-\$400$.

CAPITULO 2
CONCEPTOS DE SOLUCION

En 1944, el "problema de n personas" recibió su primera formulación matemática clara (John von Neumann y Oskar Morgenstern, 1944).
Siguiendo con este trabajo, muchos autores, han propuesto una gran variedad de conceptos de solución para los juegos de n personas.

¿Pero, qué es una solución (ó un resultado) de un juego?. Si $v:\mathbb{P}\rightarrow\mathbb{R}$ es una asignación de "dinero" para las coaliciones, entonces una solución es una distribución de dinero entre los jugadores, i.e. un vector $x\in\mathbb{R}^n$ ó, equivalentemente, una función aditiva $x\in\mathbb{A}$.

Por supuesto un valor $v(S)$ no siempre significa "dinero", sin embargo, en la teoria de pagos laterales, las funciones de utilidad para los diversos jugadores pueden ser escogidas de modo que la razón de transferencia de utilidad entre cualesquiera dos de ellos sea 1:1; esto significa que, si un subconjunto S de jugadores puede obtener una utilidad total $v(S)$, esta utilidad puede ser dividida entre los miembros de S en todas las formas posibles. Con esto, no hay diferencia formal cuando $x\in\mathbb{R}^n$ es interpretado como una distribución de utilidad, riqueza o influencia. Asi acordamos que consideramos resultados como vectores $x\in\mathbb{R}^n$ ó $x\in\mathbb{A}$ e intentamos hallar relaciones entre ciertos vectores y un juego dado $(\Omega,\mathbb{P},v)$.

2.1. IMPUTACIONES.

DEFINICION 2.1.1. Sea $v: \mathbb{P} \to \mathbb{R}$ $v(\Phi)=0$.

1. Un vector $x \in \mathbb{R}^n$ es *individualmente racional* (con respecto a v) si $x_i \geq v_i \quad i = 1,\ldots,n$.

2. Un vector $x \in \mathbb{R}^n$ es *óptimo de Pareto* si $x(\Omega)=v(\Omega)$.

3. Un vector $x \in \mathbb{R}^n$ es una *imputación* si es individualmente racional y óptimo de Pareto.

   $I=I(v)=\{x\in A \mid x_i \geq v_i \ (i\in\Omega), \ x(\Omega)=v(\Omega)\}$ es el conjunto de imputaciones de v.

Claramente, ningún jugador puede ser forzado a aceptar menos de lo que él puede obtener actúando solo.
El ser óptimo de Pareto, por otra parte, significa que los jugadores no pueden mejorar su utilidad total cuando actúan como la gran coalición.

DEFINICION 2.1.2. $v\in \mathbb{V}$ es *débilmente superaditivo* si:

$$\sum_{i\in S} v_i \leq v(S) \qquad (S\in \mathbb{P}).$$

Si S_v denota el conjunto de funciones débilmente superaditivas entonces $S\subseteq S_v$.

El siguiente teorema nos dice bajo que condición $I(v)\neq\Phi$.

TEOREMA 2.1.3. Sea $v\in S_v$. Entonces $I(v)\neq\emptyset$, es un poliedro compacto convexo con puntos extremos

$$\bar{x}^k=(v_1,\dots v_n)+(v(\Omega)-\sum_{i\in\Omega} v_i)e^k \quad (k\in\Omega) \qquad (1)$$

Prueba:

Claramente $I(v)$ es un poliedro compacto convexo. Como $v\in S_v$, tenemos

$$v(\Omega) \geq \sum_{i\in\Omega} v_i$$

y por lo tanto (1) define elementos de $I(v)$.

Supongamos ahora que:

$$\bar{x}^k=\frac{(x+y)}{2}, \qquad x,y\in I(v).$$

Entonces, para $i\neq k$, $x_i>v_i$ implica

$$y_i= 2\bar{x}^k_i-x_i= 2v_i-x_i< v_i.$$

Por lo tanto $x_i=y_i=v_i$ $(i\in\Omega,\ i\neq k)$ y

$$x_k= v(\Omega)-\sum_{i\neq k} x_i = v(\Omega)-\sum_{i\neq k} v_i = v_k+ v(\Omega)-\sum_{i\in\Omega} v_i= \bar{x}^k_k.$$

Esto implica que $x=\bar{x}^k=y$ y así $\bar{x}^k$ es un extremo. Por otro lado, suponga que $\bar{x}\in I(v)$ es un punto extremo de $I(v)$. Entonces, si

$$\bar{x}_i>v_i, \qquad \bar{x}_k>v_k \qquad (2)$$

Para algún par i,k, considerese

$$x^{\pm\varepsilon} = \bar{x} \pm \varepsilon e^{i} \mp \varepsilon e^{k} \in \mathbb{R}^{n}.$$

Obviamente, $x_i^{\pm\varepsilon} \geq v_i$ para ε suficientemente pequeño, y como

$$x^{\pm\varepsilon}(\Omega) = \bar{x}(\Omega) \pm \varepsilon \mp \varepsilon = \bar{x}(\Omega)$$

se ve que $x^{\pm\varepsilon} \in \mathbb{I}(v)$. Pero, $\bar{x} = \dfrac{(x^{+\varepsilon} + x^{-\varepsilon})}{2}$ proporciona una contradicción. Por lo tanto (2) no puede ocurrir. En otras palabras, existe a lo más una $k\in\Omega$ tal que $\bar{x}_k > v_k$ mientras $\bar{x}_i = v_i$ es verdadera para $i\neq k$. Esto muestra que $\bar{x} = \bar{x}^{k}$. □

<u>TEOREMA 2.1.4.</u> Si $v\in\mathbb{A}$ entonces $\mathbb{I}(v)=\{v\}$. Si $v\in S_*$, entonces $\mathbb{I}(v) = \{ x\in\mathbb{R}^n \mid x\geq 0 \ , \ x(\Omega)=1 \}$ si $v(\Omega)=1$. En este caso, los puntos extremos de $\mathbb{I}(v)$ están dados por $\bar{x}^{k} = e^{k}$ $(k\in\Omega)$.

La prueba es simplemente una consecuencia del Teorema 2.1.3. Sin embargo, el teorema es muy ilustrativo en vista de la pregunta ¿En cuánto el concepto de una imputación contribuirá a nuestra comprensión de una situación competitiva? .

Los juegos simples son los más accesibles entre los juegos superaditivos. Aún en este caso, el conjunto de imputaciones es muy grande.

Así, nuestra penetración en la situación cooperativa descrita por un juego, no es mejorada demasiado calculando estas imputaciones.

No es contradictorio a esas observaciones que los juegos aditivos tengan definida una imputación única. Ya que un juego aditivo es inesencial y cualquier jugador consigue tanto como puede alcanzar por sí mismo; cualquier concepto razonable de resultado o solución tendrá esta propiedad.

Claramente, el conjunto de imputaciones debe ser reducido por algunos requerimientos adicionales.

2.2. EL CORE.

DEFINICION 2.2.1. Sea $(\Omega,\mathbb{P},v)$ un juego.

1. Se dice que <u>$x\in\mathbb{I}(v)$ *domina a* $y\in\mathbb{I}(v)$ *vía* $S\in\mathbb{P}$</u>, $S\neq\Phi$ (x dom y) si:

$$x_i>y_i \quad (i\in S), \quad x(S)\leq v(S).$$

2. Se dice que <u>$x\in\mathbb{I}(v)$ *domina a* $y\in\mathbb{I}(v)$</u> (x dom y) si existe $S\in\mathbb{P}$, $S\neq\Phi$, tal que x dom_S y.

3. El <u>*core*</u> de v es el conjunto de todas las imputaciones no dominadas. La notación para el core es $\mathbb{C}(v)$.

Si x dom y, entonces los jugadores $i\in S$ pueden argüir contra y reclamando que ellos podrían mejorar juntándose y distribuyendo la riqueza $v(S)$ según x. Así, ellos tienen una motivación para dejar a y, y y puede considerarse 'inestable'.

Por contraste, nada puede decirse contra una imputación $x\in\mathbb{C}(v)$ la cual es muy 'estable'.

TEOREMA 2.2.2. Suponga $v\in S$. El core de v es el conjunto

$$\{x\in\mathbb{R}^n \mid x(S)\geq v(S) \quad (S\in P),\ x(\Omega)=v(\Omega)\}.$$

Prueba.
Sea $x\in\mathbb{R}^n$ tal que $x(S)\geq v(S)$ $(S\in P)$, $x(\Omega)=v(\Omega)$.
Si tenemos $S=\{i\}$ entonces $x_i\geq v_i$. Esto significa que x es una imputación.

Ahora supongamos que existe $y\in I(v)$ tal que $y_i>x_i$ para toda $i\in S$. Sin embargo, esto significa que $y(S)>v(S)$ y así no es posible que y dom_S x. Por lo tanto $x\in C(v)$.

Suponga ahora que $y\in\mathbb{R}^n$ no satisface $y(S)\geq v(S)$ ó $y(\Omega)=v(\Omega)$. Si $y(\Omega)\neq v(\Omega)$, entonces y no es una imputación y por lo tanto, no está en el core. Supongamos entonces que, existe alguna coalición no vacía $S\subset\Omega$ tal que

$$y(S)=v(S)-\varepsilon \qquad \text{donde } \varepsilon>0.$$

Sea $\alpha=v(\Omega)-v(S)-\sum_{i\in S^c} v_i$. Por superaditividad, $\alpha>0$.

Finalmente, definimos z por

$$z_i=\begin{cases} y_i+\dfrac{\varepsilon}{|S|} & \text{si } i\in S \\[2ex] v_i+\dfrac{\alpha}{|S^c|} & \text{si } i\in S^c \end{cases}$$

Es fácil comprobar que z es una imputación y además z dom_S y. Por lo tanto $y\notin C(v)$.

El core es un concepto muy importante de solución. Es razonable esperar vectores de pago del core como resultados –si ellos existen. Los elementos del core pueden considerarse como estables; uno puede esperar que un elemento del core no es objetado una vez que ha sido acordado durante las negociaciones.

Hay grandes clases de juegos que admiten un core no vacío, y es más, que permiten una bonita e impresionante interpretación del core como un conjunto estable de resultados o un concepto de estabilidad. El problema es, que algunos juegos superaditivos, y particularmente la mayor parte de los juegos simples no tienen core.

Suponga $\emptyset \neq U \in \mathbb{P}$ es una coalición fija y $e^U : \mathbb{P} \to \mathbb{R}$ es definida por

$$e^U(S) = \begin{cases} 1, & S \supseteq U \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces $e^U \in S$ es llamado <u>*unánime*</u> con respecto a U y $(\Omega, \mathbb{P}, e^U)$ es el <u>*juego de unanimidad*</u> de U. Especificamente si $U=\{i\}$ entonces $e^U = \delta$ es una <u>*δ-medida*</u> y $(\Omega, \mathbb{P}, \delta)$ es llamado algunas veces un <u>*juego de dictador*</u>.

Así, dada una coalición fija U, un juego es de unanimidad si cualquier coalición que contenga a la coalición U es ganadora.

Llamamos a $i \in \Omega$ un <u>*jugador de veto*</u> si $\Omega - i \in L$. En otras palabras, un jugador es de veto, si al retirarse éste de la gran coalición, la coalición resultante es perdedora. El conjunto de jugadores de veto es denotado como $I = I(v)$.
Claramente, si e^T es un juego de unanimidad, entonces $i \in T$ es un jugador de veto.

TEOREMA 2.2.3.

1. Si $v=e^U$, entonces

$$\mathbb{C}(v) = \{x\in\mathbb{R}^n \mid x\geq 0 , x(U^c)=0, x(\Omega)=1\}.$$

2. Si $v\in S_0^1$ entonces $\mathbb{C}(v)=\Phi$ a menos que $v=\delta_i$ sea un juego de dictador para algún $i\in\Omega$.

3. Si $v\in S^1$, $I=\Phi$ entonces $\mathbb{C}(v)=\Phi$.

Prueba.

1 Es trivial.

2. Si $v\in S_0^1$ y $x\in\mathbb{C}(v)$ entonces $v(S) + v(S^c) = 1$ $(S\in P)$ y por lo tanto $x(S)=1$ ó $x(S^c)=1$ $(S\in P)$. Pero esto significa que $x(S)=0$ ó $x(S^c)=0$ $(S\in P)$.
Sea $S=\Omega-i$, entonces $x_i=0$ $(i\in\Omega)$ (en cuyo caso $\mathbb{C}(v)=\Phi$) ó existe un $i_o\in\Omega$ tal que $x_{io}=1$. Como $x\geq v$, claramente, $S\in L$ $(i_o\in S)$, así $W=\{S\mid i_o\in S\}$.

3. Si $I=\Phi$, entonces $\Omega-i\in W$ $(i\in\Omega)$, por lo tanto $x(\Omega-i)=1$ $(x\in\mathbb{C}(v),\ i\in\Omega)$ y $x_i=0$ $(i\in\Omega)$, pero entonces $x(\Omega)=1$ es imposible, por lo tanto $\mathbb{C}(v)=\Phi$. □

Según el teorema 2.2.3., existen bastantes juegos simples que no tienen core. El core es un concepto de solución que descansa fuertemente sobre la "cooperación": debe ser posible distribuir toda la utilidad disponible a Ω sin que alguna $S\subseteq\Omega$ sea capaz de poner objeciones. Para una gran clase de juegos esto es obviamente mucho que pedir. Por lo tanto, se introduce un concepto de solución que puede existir aún si el core es vacío.

2.3. CONJUNTOS ESTABLES.

DEFINICION 2.3.1. (V. Neumann - Morgenstern). Sea $v \in \mathbb{V}$.

1. Si $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{I}$, entonces definimos

$$\text{dom } \mathbb{E} = \{ y \in \mathbb{I} \mid \exists\ x \in \mathbb{E} : x \text{ dom } y \}$$

2. $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{I}$ es un <u>*conjunto estable*</u> (con respecto a v) si $\mathbb{E} + \text{dom } \mathbb{E} = \mathbb{I}$.

Así, si $\mathbb{E}$ es estable, entonces dos condiciones tienen que satisfacerse : Por una parte, no debe haber dominación dentro de $\mathbb{E}$, es decir, ninguna coalición puede poner objeciones o amenazas una vez que un elemento de $\mathbb{E}$ ha sido acordado. Por otro lado, existe un incentivo para restringir la discusión a elementos de $\mathbb{E}$, ya que cualquier $y \in \mathbb{I} - \mathbb{E}$ es dominado por algún $x \in \mathbb{E}$. En otras palabras, si existe alguna forma de acuerdo tácito de que solamente las imputaciones de $\mathbb{E}$ son admitidas para la discusión en los procesos de negociación, entonces una situación relativamente 'estable' ha sido alcanzada. Así, los conjuntos estables son interpretados también como alguna forma de estándar social o estándar de comportamiento.

<u>EJEMPLO 2.3.2.</u>

Sea $(\Omega, \mathbb{P}, v)$ un juego simple. Seleccionemos cualquier $T \in W^m$ y definamos

$$\mathbb{E}^T = \{ x \in \mathbb{I}(v) \mid x_i = 0 \text{ para todo } i \notin T \}$$

Ahora probaremos que $\mathbb{E}^T$ proporciona un ejemplo de un conjunto estable.

Claramente, si $x, y \in \mathbb{E}^T$ y x dom$_S$ y para alguna $S \in \mathbb{P}$, entonces, tenemos necesariamente $S \subseteq T$, pues $x_i = y_i = 0$ es verdadero siempre que $i \notin T$. Además, como υ es simple $\upsilon(S) \geq x(S) > 0$ implica $\upsilon(S) = 1$, $S = T$, ya que T es mínima ganadora. Pero entonces

$1 = x(T) = \sum_{i \in T} x_i > \sum_{i \in T} y_i = y(T) = 1$ proporciona una contradicción.

Por otra parte, si $y \notin \mathbb{E}^T$, entonces $y(T) < 1$. Usando la distribución uniforme μ^T, definimos

$$x = y_T + y(T^c)\mu^T,$$

entonces $x_i > y_i$ $(i \in T)$ y $x(T) = 1 = \upsilon(T)$, esto es, tenemos que $x \in \mathbb{E}^T$ tal que x dom$_T$ y.

<u>TEOREMA 2.3.3.</u>

Sea $\upsilon = 1_{[\alpha,1]} \circ m \in Sh_O$, y sea $Q_\alpha = \{S \in \mathbb{P} \mid m(S) = \alpha\}$. También denote por m_T la restricción de m sobre $T \in \mathbb{P}$. Entonces

$$\mathbb{E}_\alpha = \{ x^T = \frac{m_T}{\alpha} \mid T \in Q_\alpha \}$$

es un conjunto estable.

Prueba.

Suponga x^T dom$_R$ x^S para algunas $T, S \subseteq Q_\alpha$, $R \in \mathbb{P}$. Claramente, si $x_i^T > x_i^S$ para algún $i \in R$, entonces $x_i^T = \frac{m_i}{\alpha}$, $x_i^S = 0$, i.e. $i \in T$, $i \notin S$. Por lo tanto $R \cap S = \Phi$. Esto implica $m(R) \leq 1 - m(S) = 1 - \alpha < \alpha$ y así $\upsilon(R) = 0$. Pero claramente, la dominación con respecto a $R \in L$ no puede ocurrir. Así, esto muestra que $\mathbb{E}_\alpha \cap$ dom $\mathbb{E}_\alpha = \Phi$.

Por otro lado tenemos que verificar que $\mathbb{E}_\alpha \cap \mathrm{dom}\ \mathbb{E}_\alpha = \emptyset$. Para este fin, sea $y \notin \mathbb{E}_\alpha$ y sea $R = \{ i \mid y_i < \frac{m_i}{\alpha} \}$.

Si $m(R) \geq \alpha$, entonces, por la homogeneidad, encontramos $T \subseteq R$, $T \in Q_\alpha$, i.e.

$$v(T) = 1 \ , \quad x^T(T) = \frac{m_T(T)}{\alpha} = \frac{m(T)}{\alpha} = 1$$

$$x_i^T = \frac{m_i}{\alpha} > y_i \qquad (i \in T),$$

i.e. $x^T \ \mathrm{dom}_T\ y$.

Si $m(R) < \alpha$, entonces $m(R^c) \geq \alpha$ $(v \in S_0)$, de aquí

$1 \geq y(R^c) \geq \frac{m(R^c)}{\alpha} \geq 1$. Esto, no obstante, solo es compatible, con

$$y_i = \frac{m_i}{\alpha} \ (i \in R^c), \qquad m(R^c) = \alpha \ ,$$

i.e. $y = x^{R^c} \in \mathbb{E}_\alpha$; una contradicción. Por lo tanto, $y \notin \mathbb{E}_\alpha$ implica $y \in \mathrm{dom}\ \mathbb{E}_\alpha$. $\square$

Si las condiciones del teorema 2.3.3. se satisfacen, entonces $\mathbb{E}_\alpha$ es usualmente llamado la 'solución simple' principal de

$$v = 1_{[\alpha,1]} \circ m \in Sh_0 \ .$$

EJEMPLO 2.3.4.

Sea n=3. Entonces $S*_O = Sh_O = \left\{ \delta_1, \delta_2, \delta_3, 1_{[2/3,1]} \circ m\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \right\}$.

Así, para el juego

$$\upsilon = 1_{[2/3,1]} \circ m\left(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}\right)$$

de acuerdo al teorema previo

$$\mathbb{E}_{2/3} = \left\{ \left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0\right), \left(\tfrac{1}{2},0,\tfrac{1}{2}\right), \left(0,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) \right\} \tag{3}$$

es una solución. Note que

para $0 \le t < \frac{1}{2}$ $\quad i\in\Omega$,

$$\mathbb{E}_i^t = \{ x\in\mathbb{I} \mid x_i = t\} = \{ x\in\mathbb{R}^3 \mid x\ge 0,\ x(\Omega)=1,\ x_i = t\} \tag{4}$$

es una solución adicional. Si $x, y\in\mathbb{E}_i^t$, entonces x dom_S y implicaría $S=\Omega-i$ (como $\upsilon_j=0$) y así

$$x(\Omega) = x_i + \sum_{\Omega-i} x_j > y_i + \sum_{\Omega-i} y_j = 1.$$

Por otro lado, si $y_i \neq t$, entonces procedemos como sigue:

1. Si $y_i > t$, entonces $\varepsilon = y_i - t > 0$ y

$$x = te^i + \sum_{\Omega-i} (y_j + \tfrac{1}{2}\varepsilon)e^j \in \mathbb{E}_i^t.$$

satisface

$$x\ \mathrm{dom}_{\Omega-i}\ y.$$

2. Si $y_i < t$ note que de $t<\frac{1}{2}$ se sigue que $2-2t>1$ y por lo tanto existe $j \neq i$, $y_j < 1-t$. Obviamente

$$x = te^i + (1-t)e^j \in \mathbb{E}_i^t$$

satisface

$$x \ \mathrm{dom}_{\{i,j\}} \ y .$$

Es agradable saber que:

TEOREMA 2.3.5.

Sea $n=3$ y $\upsilon = 1_{[2/3,1]} \circ m\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$. Entonces $\mathbb{E}_{2/3}$ y $\mathbb{E}_i^t$ ($i \in \Omega$, $0 \leq t < \frac{1}{2}$) definidos por (3) y (4) son todas las soluciones de υ.

Prueba.

Es fácil ver que $x \ \mathrm{dom}_S \ y$ para algunos $x, y \in \mathbb{I}$, $S \in \mathbb{P}$ implica $|S| = 2$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(x) &= \{y \in \mathbb{I} \mid x_i > y_i \ (i \in S) \text{ para alguna } S \in \mathbb{P}, |S| = 2\}. \\ &= \{y \in \mathbb{I} \mid x_1 > y_1, \ x_2 > y_2\} \cup \{y \in \mathbb{I} \mid x_1 > y_1, \ x_3 > y_3\} \cup \\ &\quad \{y \in \mathbb{I} \mid x_2 > y_2, \ x_3 > y_3\}. \end{aligned}$$

Gráficamente $\mathrm{dom}(x)$ puede representarse en

$$\mathbb{I} = \{x \mid x \geq 0 , \sum_{i=1}^{3} x_i = 1\}$$

como en la figura 1.

Aquí (fig. 1), dom(x) es la parte sombreada, el área blanca es el conjunto (y| y dom x), y las lineas paralelas a la frontera del triángulo son el conjunto (x|ni x dom y, ni y dom x). Por lo tanto, cualesquiera dos puntos de un conjunto estable tienen que estar situados sobre una linea paralela a una de las orillas del triángulo.

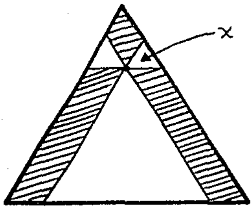

fig. 1

Ahora, supongamos que $\mathbb{E}$ es un conjunto estable.

1. Supongamos que hay tres puntos no colineales x, y, z en $\mathbb{E}$. Entonces los siguientes dos casos pueden ocurrir (fig 2). Ambos casos admiten vectores de pago no dominados (área sombreada). El caso de la izquierda, por lo tanto no es factible. El caso de la derecha es factible si y sólo si

$$x = \left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0\right), \quad y = \left(\tfrac{1}{2},0,\tfrac{1}{2}\right), \qquad z = \left(0,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)$$

Ningunos vectores adicionales son admitidos para $\mathbb{E}$ y así $\mathbb{E}=\mathbb{E}_{2/9}$.

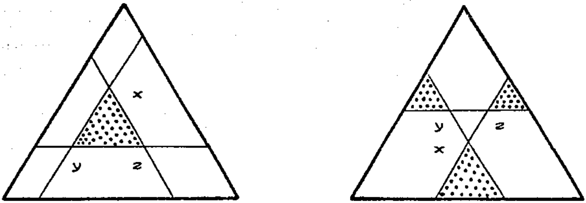

fig. 2

2. Supongamos ahora que todos los elementos de $\mathbb{E}$ son colineales. Entonces todos los puntos de una cierta paralela a una de las orillas deben ser elementos de $\mathbb{E}$. Es decir, siempre hallaremos puntos no dominados en $\square$. Por lo tanto, $\mathbb{E} = \{x \in \square \mid x_i = t\}$ para algún $i \in \Omega$, $t \in [0,1]$. Sin embargo, $t \geq \frac{1}{2}$ no es factible, ya que en este caso otra vez siempre habrá puntos no dominados en $\square$ (fig. 3).

Así, en este caso tenemos necesariamente $\mathbb{E} = \mathbb{E}_i^t$ para algún $i \in \Omega$, $t \in [0, \frac{1}{2})$. $\square$

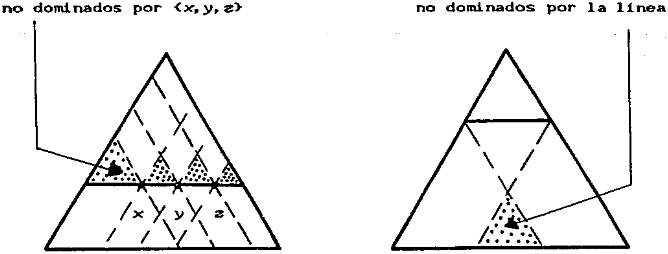

fig. 3

Las primeras investigaciones en conjuntos estables parecían indicar que éstos existían para todos los juegos. De hecho muchos juegos tienen un gran número de conjuntos estables y muchos de conjuntos contienen una infinidad de asignaciones. Por otro lado, el desarrollo en los años recientes ha proporcionado contraejemplos de conjeturas por mucho tiempo sostenidas, acerca de la naturaleza de los conjuntos estables. En este sentido fue muy importante el descubrimiento de un juego 10-personal para el que no existen los conjuntos estables (Lucas, 1968).

2.4. EL CONJUNTO DE NEGOCIACION.

Una de las dificultades con los conceptos de solución antes estudiados es que, en general, no parecen explicar qué sucede en cualquier partida de un juego. Además, hasta aquí, las soluciones han sido subconjuntos de $\mathbb{I}(v)$. Los conjuntos estables son dados como "estándares de comportamiento". El conjunto de negociación se obtiene tomando en cuenta las discusiones que pueden tomar lugar en cada partida.
Así, consideraremos las posibles amenazas y contra amenazas hechas por los diversos jugadores.

Sea $(\Omega, \mathbb{P}, v)$ un juego (en particular $v \in \mathbb{V}$). También sea $x \in \mathbb{R}^n$ y $\mathfrak{B} \subseteq \mathbb{P}$ estructura de coalición. Denotemos por $\mathbb{I}(\mathfrak{B})$ el conjunto $\mathbb{I}(\mathfrak{B}) = \mathbb{I}(\mathfrak{B}, v) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\mathfrak{B}, x) \text{ es una configuración}\}$.

DEFINICION 2.4.1.

1. Sea $T_{ij}=\{\ S\in P \mid i\in S,\ j\notin S\}$ para $i,j\in\Omega$.

2. Sea $(\mathcal{B},x)$ una configuración y sea $i,j\in B$ para algún $B\in\mathcal{B}$. Un par (C,y), donde

$$C\in P,\quad y\in\mathbb{R}^{C},$$

es una <u>*objeción*</u> de i contra j en '$(\mathcal{B},x)$' si

1. $C\in T_{ij}$.
2. $y(C)=v(C)$.
3. $y\geq x_{C},\ y_{i}>x_{i}$.

Así, el jugador i, arguye contra el jugador j, que existe una coalición C la cual puede proporcionar un vector $y\in\mathbb{R}^{n}$ tal que todo mundo está al menos tan bien como en x y además i puede mejorar estrictamente su situación siempre y cuando j no sea un miembro.

DEFINICION 2.4.2.

Sea $(\mathcal{B},x)$ una configuración y suponga que (C,y) es una objeción de i contra j en $(\mathcal{B},x)$. Ahora, (D,z), donde

$$D\in P,\quad z\in\mathbb{R}^{D},$$

es una <u>*contra objeción*</u> de j contra i para '(C,y)' si

1. $D\in T_{ji}$.
2. $z(D)=v(D)$.
3. $z\geq x_{D},\quad z_{D\cap C}\geq y_{D\cap C}$.

Obviamente una 'contra objeción' es más débil que una objeción, ya que nadie está realmente estrictamente mejor. Sin embargo, se está buscando una cierta idea de estabilidad, esto es, si $(\mathcal{B},x)$ ha sido alcanzada de algún modo por un proceso de negociación, entonces para perturbarla, se toma una objeción 'fuerte', mientras que para defender $(\mathcal{B},x)$ contra esta objeción se usa un argumento más débil, como que todos los jugadores creen que tienen un cierto nivel de seguridad --ellos deberían adherirse a $(\mathcal{B},x)$ en lugar de empezar el proceso de negociación otra vez.

Así, un jugador i puede objetar a otro j en la misma coalición S, cuando se propone el vector de pago x, si junta una coalición C sin j y encuentra un vector de pago realizable y, en el cual todos los miembros de C están al menos tan bien como en x y además i obtiene más. El jugador j puede entonces contra objetar la objeción de i, si puede encontrar una coalición D que lo contenga, pero que no contenga a i y un vector z, en el que todos los miembros de D obtienen al menos lo mismo que en x y cualquiera en $C\cap D$ obtiene al menos lo que obtendría en y.

Una interpretación adicional es la siguiente: si k tiene una objeción contra l, esto debe considerarse como una demanda a l para deducir algo de su participación y darsela a k. De otra manera la amenaza será llevada a cabo. Pero, k no quiere realmente salirse de $\mathfrak{B}$. El lo hará si l no le paga. Si l tiene una contra objeción, esto significa que él puede proteger su participación aún si k lleva a cabo su amenaza.

DEFINICION 2.4.3. Una configuración $(\mathfrak{B},x)$, es <u>*$\mathfrak{M}$-estable*</u> (con respecto a v) si, para cualquier par $(i,j)\in B\in\mathfrak{B}$ y para cada objeción de i contra j existe una contra objeción de j contra i para esta objeción.

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{B})=\mathfrak{M}(\mathfrak{B},v)=\{x\in\mathfrak{I}(\mathfrak{B})\mid(\mathfrak{B},x)\text{ es }\mathfrak{M}\text{-estable}\}$$

es el <u>*conjunto de negociación*</u> de v para $\mathfrak{B}$.

El siguiente teorema es muy importante, para su prueba véase Rosenmüller (301-307).

<u>TEOREMA 2.4.4.</u> (Davis-Maschler-Peleg). Sea $v\in S_v$. Para cualquier estructura de coalición $\mathfrak{B}$ se tiene que:

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{B})\neq\Phi$$

y por lo tanto

$$\mathfrak{M}\neq\Phi.$$

2.5. EL VALOR DE SHAPLEY.

Las soluciones antes analizadas, (core, conjuntos estables, etc.) efectúan sólo predicciones modestas y cautelosas sobre los resultados. En muchas ocasiones, resulta importante tener una solución específica -un vector de ganancia único que exprese el valor del juego para cada uno de los jugadores. Esto es deseable, porque muchas aplicaciones de la Teoría de Juegos, parecen demandar una respuesta directa a la pregunta del valor real de una posición competitiva particular.

Tales soluciones son llamadas soluciones de valor. Aquí, veremos únicamente una de ellas: el Valor de Shapley (Owen, 1968; Shapley, 1953).

Para cualquier función característica, Lloyd Shapley mostró que existe un vector único $x=(x_1,...,x_n)$ que satisface los cuatro axiomas siguientes:

AXIOMA 2.5.1. Reordenamiento de jugadores, intercambia las recompensas. Suponga que el valor de Shapley de un juego 3-personal es $x=(10,15,20)$. Si intercambiamos los papeles del jugador 1 y del jugador 3, entonces el valor de Shapley para el nuevo juego sería $x=(20,15,10)$.

AXIOMA 2.5.2. $\sum_{i=1}^{n} x_i=v(N)$.

AXIOMA 2.5.3. Si $v(S-i)=v(S)$ para todas las coaliciones S, entonces $x_i=0$.

Antes de enunciar el último de los axiomas, definiremos la suma de dos juegos n-personales. Sean υ y $\bar{\upsilon}$ dos funciones características para juegos con jugadores idénticos. Definimos el juego $\upsilon+\bar{\upsilon}$, como el juego con la función característica $\upsilon+\bar{\upsilon}$ dada por $(\upsilon+\bar{\upsilon})(S)=\upsilon(S)+\bar{\upsilon}(S)$.

<u>AXIOMA 2.5.4.</u> Sea x el vector del valor de Shapley para el juego υ y sea y el vector del valor de Shapley para el juego $\bar{\upsilon}$. Entonces el vector del valor de Shapley para el juego $\upsilon+\bar{\upsilon}$ es el vector $x+y$.

La validez del Axioma 2.5.4. ha sido a menudo cuestionada, porque sumar recompensas de diferentes juegos sería semejante a sumar manzanas con naranjas. Si se supone que los Axiomas 2.5.1. a 2.5.4. son válidos, Shapley probó el siguiente teorema:

<u>TEOREMA 2.5.5.</u> Dado cualquier juego n-personal con función característica υ, existe un único vector de pago $x=(x_1,\ldots,x_n)$ que satisface los axiomas 2.5.1-2.5.4.
La recompensa del jugador i-ésimo (x_i) está dada por:

$$x_i= \sum_{\{S \mid i \notin S\}} p_n(S)[\upsilon(S\cup\{i\})-\upsilon(S)] \qquad (5)$$

donde
$$p_n(S)= \frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!} \qquad (6).$$

La ecuación (5) parece compleja, sin embargo, esta ecuación tiene una interpretación simple.

Suponga que los jugadores $1,2,\ldots,n$ arriban en orden aleatorio. Esto es, cualquiera de las $n!$ permutaciones de $1,2,\ldots,n$ tiene una probabilidad de $1/n!$.

Suponga ahora que, cuando el jugador i llega, él halla que los jugadores en el conjunto S han arribado. Si el jugador i forma una coalición con los jugadores que están presentes cuando él llega, él aporta $v(S\cup\{i\})-v(S)$ a la coalición. La probabilidad de que cuando el jugador i llegue, los jugadores en la coalición S estén presentes es p_n.

Ahora mostraremos que p_n (dada por (6)) es la probabilidad de que cuando el jugador i llegue, los jugadores en el subconjunto S estén presentes.

$$\underbrace{|S|(|S|-1)\ldots(2)(1)}_{S\text{ llega}} \qquad \underbrace{(1)}_{i\text{ llega}} \qquad \underbrace{(n-|S|-1)\ldots(2)(1)}_{\text{los jugadores que no están en } S\cup\{i\} \text{ arriban.}}$$

$$= \quad |S|!\,(n-|S|-1)!$$

Ya que existe un total de n! permutaciones de $1,2,\ldots,n$, la probabilidad de que el jugador i llegue y vea a los jugadores en S es:

$$\frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!} = p_n \quad .$$

CAPITULO 3
TRANFORMACIONES DE PODER
Y
CONJUNTOS DE NEGOCIACION ESPECIALES

Los experimentos de laboratorio sobre juegos en forma de función característica han conducido a diversas teorías descriptivas.
Ninguna teoría propuesta hasta ahora, es completamente satisfactoria a la luz de los datos.
La evidencia sugiere claramente que las consideraciones de equidad tienen una fuerte influencia sobre las divisiones de pago observados.

A partir de este capítulo, la atención se centra en los juegos tripersonales cero normalizados.
Diversas teorías han producido algunos conceptos de solución para tales juegos, sin embargo, no parecen tener mucha relevancia descriptiva. A este respecto la teoría del conjunto de negociación (Aumann y Maschler,1964) es una notable excepción.

La teoría de negociación en su forma original, no hace uso del principio de equidad. No obstante, Maschler (1978) argumentó que, quizá la función característica no representaba adecuadamente la situación; y propuso una teoría acerca del poder de las coaliciones. Esta teoría, sí hace uso de las consideraciones de equidad.
Los efectos de la prominencia, dan lugar a una inclinación para trabajar con números "redondos". Las teorías descriptivas deben tomar este fenómeno en cuenta. Por lo tanto, la versión descriptiva del conjunto de negociación considerada aquí, permite pequeñas desviaciones causadas por efectos de la prominencia.

Los "conjuntos de negociación unidos" basados en la unión del conjunto de negociación para la función característica original y los M-conjuntos de negociación proporcionan mejores predicciones que el conjunto de negociación solo.

3.1. EL PRINCIPIO DE EQUIDAD.

El principio de equidad se aplica a situaciones en las cuales los beneficios o costos tienen que ser distribuidos entre los miembros de un grupo. Considere una cantidad r de dinero (ó algún otro bien) que tiene que distribuirse entre un grupo de n miembros 1,2,...,n. Una *división* de r es un vector $(r_1,\ldots,r_n)$ con $r_i \geq 0$ para $i=1,\ldots,n$ y $r_1+\ldots+r_n=r$. Se llama a r_i la *participación de i*. Hablamos de una *división igual* si: $r_i = \frac{r}{n}$ para $i= 1,\ldots,n$.

Únicamente en casos especiales la aplicación del principio de equidad da origen a una división igual. En algunas situaciones hay buenas razones para una división desigual de r.

Un *estándar de comparación* es una selección específica de números clave (por ejemplo, las capacidades). Un estándar de comparación determina un sistema de pesos no negativos $w_1,\ldots,w_n$ para los miembros del grupo tales que $w_i>0$ al menos para una i.

El *principio de equidad* requiere

$$r_i = \mu w_i$$

con

$$\mu = \frac{r}{\sum_{i=1}^{n} w_i}.$$

Nosotros llamamos al método de calcular las participaciones r_i un *estándar de distribución*.

Un estándar de distribución mide participaciones y un estándar de comparación asigna pesos. Ambos son necesarios para la aplicación del principio de equidad. Un estandar de distribución junto con un estándar de comparación es llamado un *estándar de equidad*. Una vez que el estándar de equidad es conocido, la aplicación del principio de equidad es trivial.

En aplicaciones prácticas, el número de estándares de equidad razonables es a menudo bastante pequeño.

Los estándares de distribución y comparación no son completamente arbitrarios. Deben ser relevantes, en el sentido que estén substancialmente conectados con el problema, y accesibles, en el sentido que las variables a ser medidas puedan ser fácilmente observadas por todos los miembros del grupo.

Un estándar de distribución relevante debe ser una medida significativa de los premios a ser distribuidos.

Un estándar de comparación que produce pesos desiguales debe estar basado sobre buenas razones para las diferencias en las participaciones. Si no hay tales razones, solamente el estándar de comparación *igualitario*, el cual da pesos iguales para todos los miembros, puede aplicarse. La aplicación del principio de equidad con el estándar de comparación igualitario conduce a una división igual.

En una situación de negociación puede ser apropiado dar más a aquellos que son más poderosos, en todo caso, esto es éticamente justificado.

3.2. EL CONJUNTO DE NEGOCIACION PARA JUEGOS TRIPERSONALES.

El conjunto de negociación es una de las teorias más importantes para juegos en forma de función caracteristica. El conjunto de negociación, en su forma original, no tiene conexión con el principio de equidad. Sin embargo, la manera en como se aplica a los datos, involucra la teoría del "poder de una coalición" de Maschler la cual sí está basada en consideraciones de equidad.

En esta parte, para la descripción del conjunto de negociación, nos restringimos a juegos tripersonales superaditivos cero normalizados.
Es conveniente introducir una notación especial para esta clase de juegos.

$$
\begin{aligned}
v(12)&=a\\
v(13)&=b\\
v(23)&=c\\
v(123)&=g\ .
\end{aligned}
$$

Dado cualquier juego tripersonal superaditivo cero normalizado podemos suponer que $g \geq a \geq b \geq c$.
La suposición anterior no nos hace perder generalidad, ya que $g \geq a \geq b \geq c$ puede alcanzarse siempre con una renumeración apropiada de los jugadores.
Tres números q_1, q_2 y q_3 ligados a los jugadores de un juego tripersonal, son llamados las *cuotas*.
Considere un juego tripersonal G y sea $\bar{G}$ su cubierta superaditiva.
Definimos la cuota del jugador i, q_i como:

$$q_i= \frac{\bar{v}(ij) + \bar{v}(ik) - \bar{v}(jk)}{2} \quad \text{para } i=1,2,3,$$

donde i, j, k es una permutación de 1, 2, 3.

Las cuotas están caracterizadas por la propiedad:

$$q_i+q_j=\bar{v}(ij)$$

para cualquier permutación i, j, k de 1, 2, 3. En el caso especial de juegos tripersonales superaditivos cero normalizados se tiene:

$$q_1=\frac{(a+b-c)}{2}$$

$$q_2=\frac{(a-b+c)}{2}$$

$$q_3=\frac{(-a+b+c)}{2}\ .$$

Como $g \geq a \geq b \geq c$ q_1 y q_2 son no negativas. Sin embargo, q_3 puede ser negativa; q_3 es no negativa si y sólo si $b+c \geq a$.
Un *juego de cuota* es un juego tripersonal en el cual todas las cuotas son no negativas.

La tabla 1 muestra el conjunto de negociación para juegos tripersonales superaditivos cero normalizados con $g \geq a \geq b \geq c$.

En las líneas del principio se hacen dos distinciones:
El core es no vacío si y sólo si $2g \geq a + b + c$.
La segunda distinción, separa juegos de cuota de otros juegos.

La tabla también puede aplicarse a juegos tripersonales cero normalizados en los cuales no todas las coaliciones genuinas sean permisibles. Simplemente se tienen que ignorar aquellas configuraciones cuyas estructuras de coalición contengan coaliciones no permisibles.

Para determinar el conjunto de negociación para un juego tripersonal $G=(\Omega, \mathbb{P}, \upsilon)$ que no es cero normalizado, se tiene que hallar el conjunto de negociación del juego cero normalizado $G_0=(\Omega, \mathbb{P}, \upsilon_0)$ de G y aplicar la inversa del mapeo de cero normalización.

Tabla 1. Conjunto de negociación para juegos superaditivos tripersonales cero normalizados.

<table>
<tr><th rowspan="3">Estructura de coalición</th><th colspan="3">Condiciones</th></tr>
<tr><th colspan="2">$b+c\geq a$ juegos de cuota</th><th>$b+c<a$</th></tr>
<tr><th>$2g<a+b+c$</th><th colspan="2">$2g\geq a+b+c$ core no vacío</th></tr>
<tr><td>———</td><td colspan="3">$(—;0,0,0)$</td></tr>
<tr><td>12,3</td><td colspan="2">$(12,3;q_1,q_2,0)$</td><td>$(12,3;x_1,x_2,0)$ con $x_1\geq b$ y $x_2\geq c$</td></tr>
<tr><td>13,2</td><td colspan="2">$(13,2;q_1,0,q_3)$</td><td>$(13,2;b,0,0)$</td></tr>
<tr><td>23,1</td><td colspan="2">$(23,1;0,q_2,q_3)$</td><td>$(23,1;0,c,0)$</td></tr>
<tr><td>123</td><td>$(123;x_1,x_2,x_3)$ con $x_i= q_i - \dfrac{q_1+q_2+q_3-g}{3}$</td><td colspan="2">$(123;x_1,x_2,x_3)$ con $x_1+x_2\geq a$, $x_1+x_3\geq b$, $x_2+x_3\geq c$</td></tr>
</table>

3.3. TRANSFORMACIONES DE PODER.

Al discutir sus experimentos, Maschler observó que la aplicación de la teoría del conjunto de negociación a juegos experimentales en forma de función característica no producía buenas predicciones (Maschler, 1978). El argüía que esto no necesariamente significa que la teoría del conjunto de negociación deba ser rechazada. La representación del juego (antes que la teoría) puede estar equivocada.

Maschler (1963) propuso una teoría del "poder de una coalición". Esta teoria describe diversos caminos para calcular una función característica transformada v' para cualquier función característica v, dada. Esas transformaciones serán llamadas transformaciones de poder, ya que Maschler llama a $v'(S)$ el "poder" de S. Formalmente, una *transformación de poder* es una función φ que asigna una nueva función característica $v'=\varphi(v)$ a cualquier función característica v; la función transformada $v'=\varphi(v)$ está definida sobre el mismo conjunto $\mathbb{P}$ de coaliciones permisibles al igual que v.

Sea $G=(\Omega,\mathbb{P},v)$ un juego n-personal superaditivo; y sea $D_1,\dots,D_m$ una estructura de coalición para G. En esta parte, llamaremos a cada grupo D_i, un *grupo negociador*. La interpretación de este grupo de negociadores es como sigue. Los jugadores quieren negociar sobre la formación de la gran coalición Ω, y para este propósito se han organizado en m grupos, $D_1,\dots,D_m$, cada uno de los cuales cuenta con una voz.

Los grupos negociadores $D_1,\dots,D_m$ negocian sobre la distribución de $v(\Omega)$. Ellos tienen que acordar sobre los pagos $x(D_1),\dots,x(D_m)$. Esos pagos deben sumar $v(\Omega)$. La distribución de $x(D_j)$ es una materia interna de D_j y no entra en la discusión de los grupos negociadores.

Dos estándares de distribución se sugieren a sí mismos. Ellos definen la participación $r(D_j)$ del grupo negociador D_j de dos maneras diferentes: como la *participación del total*,

$$r(D_j)=x(D_j)$$

y como la *participación del excedente*,

$$r(D_j)=x(D_j)-v(D_j).$$

Esos dos estándares de distribución pueden combinarse con dos estándares de comparación, los cuales también inmediatamente se sugieren ellos mismos. Una definición de pesos demanda una *división igual*:

$$w_j=1 \qquad \text{para} \quad j=1,\dots,n$$

la otra, una *división proporcional*:

$$w_j=|D_j| \qquad \text{para} \quad j=1,\dots,n.$$

Así, se obtienen cuatro estándares de equidad:

1. División igual del total.
2. División proporcional del total.
3. División igual del excedente.
4. División proporcional del excedente.

Tabla 2. Participaciones equitativas para grupos negociadores según los cuatro estándares de equidad.

	Igual	Proporcional
División del total	$\frac{1}{m}\, \upsilon(\Omega)$	$\frac{\lvert D_j \rvert}{n}\, \upsilon(\Omega)$
División del excedente	$\frac{1}{m}\left[\upsilon(\Omega) - \sum_{j=1}^{m} \upsilon(D_j) \right]$	$\frac{\lvert D_j \rvert}{n}\left[\upsilon(\Omega) - \sum_{j=1}^{m} \upsilon(D_j) \right]$

La tabla 2 muestra las participaciones equitativas que resultan de esos cuatro estándares de equidad. Los dos estándares de equidad basados sobre una participación del total, no necesariamente garantizan al menos $\upsilon(D_j)$. Por lo tanto, Maschler considera únicamente el estándar de distribución de las participaciones del excedente.

Para generar transformaciones de poder se parte de la idea de que en una situación con más de dos grupos negociadores se crean insuperables dificultades de pelea multilateral. Los grupos negociadores deben unirse para formar grupos más grandes, hasta que, finalmente, sólo hay dos grupos opositores entre sí:

S y $\Omega - S$.

Este enfoque es conocido como el *punto de vista de polarización.*

El punto de vista de polarización junto con los dos estándares de equidad basados sobre la participación del excedente conducen a dos transformaciones de poder φ_1 y φ_2 llamadas: *transformación de poder de la división igual del excedente* y *transformación de poder de la división proporcional del excedente*, respectivamente.

Para juegos superaditivos $G=(\Omega,\mathbb{P},\upsilon)$ las funciones características transformadas $\upsilon_1=\varphi_1$ y $\upsilon_2=\varphi_2$ se definen como sigue:

$$\upsilon_1(S) = \upsilon(S) + \frac{[\upsilon(\Omega) - \upsilon(S) - \upsilon(\Omega-S)]}{2}$$

$$\upsilon_2(S) = \upsilon(S) + \frac{|S|\ [\upsilon(\Omega) - \upsilon(S) - \upsilon(\Omega-S)]}{n} .$$

Estas transformaciones de poder han sido discutidas solamente para juegos superaditivos. Una manera de extender una transformación de poder de un juego superaditivo a juegos más generales se basa en la aplicación de la transformación a la cubierta superaditiva de la función característica original, $\varphi(\upsilon) = \varphi(\bar{\upsilon})$.

Es dudoso si las transformaciones de poder deben aplicarse a juegos en los que la gran coalición Ω no es permisible. Al fin y al cabo, la interpretación de las transformaciones de poder se basa en la idea de que una coalición puede ser capaz de obtener más que su valor en un acuerdo sobre la formación de la gran coalición Ω.

La teoría de la transformación de poder de Maschler es un ingenioso intento por capturar la influencia de la equidad sobre el razonamiento estratégico en juegos en forma de función característica.

3.4. $\mathbb{M}$-CONJUNTOS DE NEGOCIACION.

Maschler propuso que la teoría del conjunto de negociación no debe aplicarse solamente a la función característica original; sino que, antes se deben de aplicar varias transformaciones de poder. Para hacer esto, definimos los "$\mathbb{M}$-conjuntos de negociación" para juegos tripersonales cero normalizados en los cuales la gran coalición es permisible. Usaremos el símbolo B para el conjunto de negociación ordinario y B_1 y B_2 denotarán los $\mathbb{M}$-conjuntos de negociación derivados de las dos transformaciones de poder φ_1 y φ_2 respectivamente.

Sea $G=(\Omega,\mathbb{P},\upsilon)$ un juego tripersonal cero normalizado con $123\in\mathbb{P}$. Considere la transformación de poder $\upsilon'=\varphi_m(\upsilon)$ donde m es 1 ó 2. Sea $G'=(\Omega,\mathbb{P},\upsilon')$ el juego transformado y B' el conjunto de negociación de G'. Una configuración para G' puede no serlo para G.

Siempre que $\upsilon(ij)$ sea más pequeño que $\upsilon(123)$, tenemos

$$\upsilon'(ij) > \upsilon(ij).$$

Si la desigualdad anterior sucede, una configuración de la forma $(ij,k;x_1,x_2,x_3)$ para el juego transformado G' no puede ser el resultado final de una partida de G. Claramente, solamente las configuraciones para G pueden servir como predicciones para G. Por lo tanto B_i se define como sigue. El *$\mathbb{M}$-conjunto de negociación*, B_m para G es el conjunto de todas las configuraciones en B'_m que son configuraciones para G $(m=1,2)$. El $\mathbb{M}$-conjunto de negociación, B_m implica que en G no se formará ninguna coalición bipersonal permisible ij a menos que tengamos $\upsilon(ij)=g$.

La función característica transformada $v' = \varphi_i(v)$ posee siempre la propiedad de suma constante.

El juego transformado es siempre un juego de cuota con core vacío. Por lo tanto, un M-conjunto de negociación B_m contiene a lo más una configuración para cualquier estructura de coalición.

3.5. CONJUNTOS DE NEGOCIACION DESCRIPTIVOS.

En la discusión de sus datos experimentales, Maschler sugiere que se deberían permitir pequeñas desviaciones de las predicciones teóricas. Él observó que los sujetos no parecían inquietarse mucho acerca de diferencias de pago hasta de cinco puntos. Esto resultó en una tendencia a acordar pagos en "números redondos", donde "redondo" significa divisibilidad por cinco. Él concluyó que desviaciones de hasta cinco puntos no deben considerarse como violaciones de la teoría.

La sugestión de Maschler de permitir desviaciones hasta 5 es probablemente apropiada para sus datos. Para otros experimentos puede ser necesaria otra especificación de desviaciones permisibles.

Se considerará el tamaño máximo de desviaciones permisibles como un parámetro Δ que debe ser ajustado a los experimentos bajo consideración.

Suponga que T es el conjunto de configuraciones predichas por la teoría. Si se quiere decir que las desviaciones hasta Δ no importan, lo que se está haciendo realmente es predecir un conjunto mayor $T[\Delta]$, que será llamado una Δ vecindad de T.
Formalmente definimos una <u>Δ *vecindad*</u> de T como el conjunto de todas las configuraciones

$$\alpha = (S_1,\ldots,S_m;x_1,\ldots x_n)$$

en T, para las cuales se puede formar una configuración

$$\beta = (S_1,\ldots,S_m;y_1,\ldots y_n)$$

con la misma estructura de coalición, y

$$|x_i-y_i|\leq\Delta \qquad \text{para} \quad i=1,2,\ldots,n.$$

Es importante que se requiera que β tenga la misma estructura de coalición que α. Esto significa que T es aumentada para cualquier estructura de coalición.

El <u>*conjunto de negociación con desviaciones hasta* Δ</u>, denotado por $B[\Delta]$, es la Δ vecindad del conjunto de negociación B.

Análogamente, $B_m[\Delta]$ es el <u>*M-conjunto de negociación con respecto a ρ con desviaciones hasta* Δ</u>, y es la Δ vecindad de B. El conjunto de negociación no excluye ninguna estructura de coalición. La estructura nula es raramente observada en los experimentos, sin embargo puede llegar a aparecer. Para dar al conjunto de negociación más oportunidad de acertar, una versión modificada del conjunto de negociación será introducida, la cual excluye la estructura nula.

Sea K_o el conjunto de todas las configuraciones con la estructura nula como estructura de coalición. Llamamos a $B-K_o$ el *conjunto de negociación sin estructuras nulas*. El símbolo B_o es usado para $B-K_o$. La Δ vecindad de B_o, el *conjunto de negociación sin estructuras nulas y con desviaciones hasta Δ* es denotado por $B_o[\Delta]$. Análogamente, B_{om} denota B_m-K_o, el *M-conjunto de negociación con respecto a φ_m sin estructuras nulas*, y $B_{om}[\Delta]$ es la Δ vecindad de B_{om}.

En el caso de juegos donde la gran coalición es permitida también se deberían considerar transformaciones de poder. Esto no significa necesariamente que las predicciones deberían basarse sobre uno de los conjuntos de negociación solamente. Como veremos aquí, para las muestras investigadas, las mejores predicciones se obtienen del conjunto $U[\Delta]$:

$$U[\Delta] = B_o[\Delta] \cup B_{o1}[\Delta] \cup B_{o2}[\Delta].$$

$U[\Delta]$ es *la unión de los conjuntos de negociación, con desviaciones hasta Δ*.

3.6. UN EXPERIMENTO DE MURNIGHAN Y ROTH.

Murnighan y Roth (1977) realizaron un experimento sobre un juego tripersonal cero normalizado. Este juego $G=(\Omega,\mathbb{P},v)$ con $\Omega=(1,2,3)$ y $\mathbb{P}=(1,2,3,13,12,123)$ tiene la siguiente función característica:

$$v(1) = v(2) = v(3) = 0$$
$$v(12) = v(13) = v(123) = 100.$$

El procedimiento usado por Murnighan y Roth excluye la coalición 23. Treinta y seis triadas de sujetos jugaron el juego 12 veces en los mismos papeles. No se ofreció ningún pago de dinero. La repetición de partidas puede conducir a la cooperación, y la falta de pagos de dinero puede reducir la competitividad. A pesar de esas desventajas es interesante analizar los datos de Murnighan y Roth.

Las partidas se realizaron con comunicación anónima formal. El procedimiento no fue el mismo para todas las partidas y la variación de las reglas de comunicación tuvo cierta influencia sobre los resultados.

El conjunto de negociación coincide con el core y predice un pago de 100 para el jugador 1 si una coalición genuina se forma.

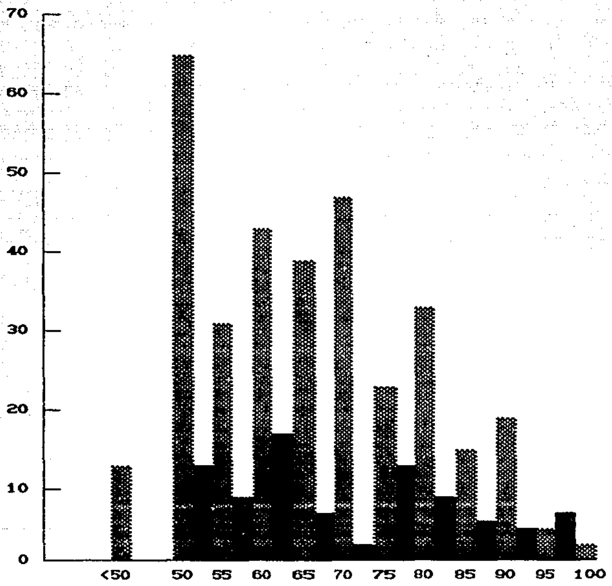

Figura 4. Distribución de frecuencia de la participación del jugador 1 en coaliciones bipersonales.
De Murnighan y Roth (1977).

De las 432 partidas, 412 terminaron en las coaliciones bipersonales 12 ó 13. La coalición 123 se formó en solamente el 4.6% de todos los casos. Por esto es interesante mirar las partidas con coaliciones bipersonales como resultados.

En los experimentos de Murnighan y Roth fue posible acordar sobre fracciones de pago de hasta 1/100 de punto. Esto es tomado en cuenta para la determinación de las 5 vecindades.

La figura 4 muestra la distribución de x_1. Las frecuencias de valores divisibles por 5 son mostradas como columnas separadas alternando con columnas de frecuencias agregadas para grupos de la forma $5k<x_1<5k+5$ con $k=10,...,19$. Hay solamente 13 casos con $x_1<50$ mostrados separadamente como una sola columna.

La tabla 3 muestra los rangos predichos por los conjuntos de negociación con desviaciones hasta cinco y el número de casos observados dentro de esos rangos. El conjunto de negociación ordinario $B_0[5]$ contiene solamente el 3% de todos los casos. El M-conjunto de negociación $B_1[5]$ contiene el 27% y $B_2[5]$ contiene el 25% de los 412 casos. U[5] contiene el 46% de los 412 casos.

Tabla 3. Pagos para el jugador 1 en coaliciones bipersonales.

Teoría	Rango para los pagos del jugador 1 en coaliciones bipersonales	Número de casos observados
$B_0[5]$	$95 \leq x_1 \leq 100$	16
$B_1[5]$	$70 \leq x_1 \leq 80$	113
$B_2[5]$	$61.67 \leq x_1 \leq 71.66$	103
$U[5]$	$95 \leq x_1 \leq 100$ ó $61.67 \leq x_1 \leq 80$	188
	$0 \leq x_1 \leq 100$	412
	$0 \leq x_1 \leq 50$	13
	$50 \leq x_1 \leq 100$	399

Fuente: Murnighan y Roth (1977).

A primera vista, la representación de la teoria del conjunto de negociación para los datos obtenidos por Murnighan y Roth no es impresionante. La figura 4 revela que no hay una concentración extraordinaria de observaciones en los rangos predichos por los diversos conjuntos de negociación con desviaciones hasta 5.

Aparte de los efectos de la prominencia conectados a la divisibilidad por 5 y 10 las frecuencias parecen tener una tendencia a disminuir de izquierda a derecha en un rango de 50 a 100, aún si en 70 la frecuencia es un poco más grande que la frecuencia en 60.

Es bastante seguro predecir que la participación del jugador 1 en la coalición bipersonal deberia ser al menos 50. Alrededor del 97% de los 412 casos en la tabla 3 satisfacen esta condición.

CAPITULO 4
TEORIA DE COTAS DE PAGO DE SELTEN

Las teórias economicas generalmente suponen que los agentes actúan racionalmente al tomar sus decisiones, y por lo tanto que optimizan.
Sin embargo, los experimentos realizados han demostrado la poca relevancia descriptiva de estas teorías.

Selten, con su teoria de cotas de pago, supone que el tomador de decisiones tiene sólo una racionalidad limitada y así, es incapaz de realizar cálculos complicados para optimizar, y se contenta con determinar niveles de satisfacción mediante consideraciones de equidad y argumentos de sentido común.

El comportamiento de un agente que no optimiza está guiado por niveles de aspiración.

Un nivel de aspiración puede ser visto como el pago más pequeño que un jugador está dispuesto a aceptar en una coalición genuina.

La teoria de cotas de pago es un intento para describir las razones de sentido común que influyen en los niveles de aspiración de los jugadores.

La teoria de cotas de pago, está restringida a juegos tripersonales cero normalizados. Para cada juego de esta clase, la teoria especifica tres números u_1, u_2 y u_3 que son interpretados como cotas inferiores de pago para los pagos finales de los jugadores 1,2 y 3 respectivamente.

4.1. EL ORDEN DE FUERZA.

Suponga que todas las coaliciones bipersonales son permisibles, (123 puede o no ser permisible). En un sentido intuitivo obvio, el jugador 1 es más fuerte que el jugador 2 si se tiene $b>c$. Para $b=c$ ambos son igualmente fuertes.
Similarmente, el jugador 2 es más fuerte que el jugador 3 para $a>b$, y ambos son igualmente fuertes para $a=b$.

Usaremos los simbolos $\cong$ y $\blacktriangleright$ para expresar las relaciones "igualmente fuerte" y "más fuerte", respectivamente.

La convención de numeración de los jugadores hecha anteriormente permite los siguientes ordenes de fuerza:

$1 \blacktriangleright 2 \blacktriangleright 3$ para $a > b > c$
$1 \cong 2 \blacktriangleright 3$ para $a > b = c$
$1 \blacktriangleright 2 \cong 3$ para $a = b > c$
$1 \cong 2 \cong 3$ para $a = b = c$

Para juegos tripersonales cero normalizados donde no todas las coaliciones son permisibles, el orden de fuerza se define como el orden de fuerza de su cubierta superaditiva.

4.2. PARTICIPACIONES DE COALICION Y COTAS TENTATIVAS BASADAS EN ELLAS.

La *participación de coalición* es la división igualitaria de su valor, y a élla pueden aspirar los jugadores "más fuertes" de la coalición. Las participaciones de coalición de 12, 13, 23 y 123 son

$\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$ y $\frac{g}{3}$ respectivamente.

Considere una coalición genuina permisible S, donde i es uno de los miembros más fuertes; esto es, S no tiene otros miembros más fuertes que i.
Entonces

$$\frac{v(S)}{|S|} \qquad (I)$$

es una cota tentativa del jugador i.

Interpretación: Ya que ningún otro miembro de S es más fuerte que i, él debería recibir al menos $v(S)/S$ si S se forma.

Suponga que todas las coaliciones genuinas son permisibles. Entonces $\frac{a}{2}$ y $\frac{g}{3}$ son las cotas tentativas del jugador 1, y $\frac{c}{2}$ es la cota tentativa del jugador 2. Para $a>b$ el jugador 3 no tiene una cota tentativa de la forma (I) ya que en este caso no existe una coalición en la cual él sea el más fuerte de los miembros.

4.3. COTA DEL JUGADOR 2, POR SUBSTITUCION.

La siguiente definición será relevante únicamente para el jugador 2. Suponga que ambas coaliciones 12 y 13 son permisibles. Sin la ayuda del jugador 2, el jugador 1 no puede hacer nada mejor que formar una coalición con 3, en la cual puede conseguir a lo más b. El incremento $a-b$ está disponible para los jugadores 1 y 2 si y sólo si ambos se ponen de acuerdo para formar 12 en vez de 13. Por lo tanto, el jugador 2 debería de obtener al menos $\frac{(a-b)}{2}$ si 12 se forma. Por supuesto, 1 también tendría derecho de obtener esta cantidad, pero esto es irrelevante ya que su cota tentativa $\frac{a}{2}$, es al menos tan grande como $\frac{(a-b)}{2}$. No se puede usar un argumento similar para establecer una cota tentativa para el jugador 3, ya que nada se gana si otro jugador es remplazado por él.

Supongamos que las coaliciones 12 y 13 son permisibles. Entonces

$$\frac{(a-b)}{2}$$

es la *cota del jugador 2, por substitución*. Esta es una de sus cotas tentativas.

4.4. COTAS POR COMPLEMENTACION.

Sean i, j, k los jugadores 1, 2 y 3 respectivamente, no necesariamente en este orden. Si ambas coaliciones jk y 123 son permisibles, entonces

$\frac{g-v(jk)}{3}$ es la *cota por complementación*, del jugador i.

Interpretación: La gran coalición 123 no puede formarse sin el jugador i. Los jugadores j y k no pueden conseguir más que $v(jk)$. Un acuerdo de los tres jugadores es necesario para obtener el incremento $g-v(jk)$. Por lo tanto, el jugador i puede demandar al menos una tercera parte de este incremento.

La cota por complementación del jugador 1 no es importante para la determinación de sus cotas de pago ya que no puede ser más grande que su participación de coalición $g/3$.

4.5. COTAS TENTATIVAS MAS ALTAS DE LOS JUGADORES 1 Y 2.

Supongamos que todas las coaliciones genuinas son permisibles. En este caso para $i=1,2$ la <u>*cota tentativa más alta*</u> del jugador i se define como el máximo de sus cotas tentativas .

Así, tenemos que:

$$t_1 = \max\left[\frac{a}{2}, \frac{g}{3}\right]$$

y $\quad t_2 = t_1 \qquad$ para $b=c$

$$t_2 = \max\left[\frac{c}{2}, \frac{a-b}{2}, \frac{g-b}{3}\right] \qquad \text{para } b>c$$

Si algunas de las coaliciones genuinas no son permisibles las cotas tentativas más altas t_i, $i=1,2$ se definen del mismo modo, como el máximo de todas las cotas tentativas para el jugador, las cuales se expresan en términos de los valores de coaliciones permisibles.

4.6. EL CASO DEL JUGADOR 3: SU SITUACION ESTRATEGICA, SU COTA COMPETITIVA Y SU COTA TENTATIVA MAS ALTA.

Antes de definir "la cota competitiva del jugador 3" será útil discutir su situación estratégica en juegos con $a>b$. Suponga que todas las coaliciones bipersonales son permisibles y que tenemos $a>b$ y $t_1 + t_2 \leq a$. Al suponer $a>b$ la coalición 12 es la coalición bipersonal más atractiva. En esta coalición, ambos jugadores, 1 y 2 pueden conseguir sus cotas tentativas más altas t_1 y t_2, por lo tanto, el jugador 3 debe temer que 12 se forme. El jugador 3 no puede excluir esta posibilidad aún si se pudiera formar la gran coalición 123 con $g>a$. Para prevenir la formación de 12, el jugador 3 debe hacer ofertas atractivas a cada uno de los otros jugadores. Suponga que 1 y 2 no reducen sus niveles de aspiración por abajo de sus cotas tentativas más altas t_1 y t_2.

Entonces las cantidades

$$h_1 = a - t_2$$
$$y$$
$$h_2 = a - t_1$$

son las cotas superiores para los pagos de los jugadores 1 y 2 en 12. Por lo tanto, el jugador 3 puede ofrecer h_1 para el jugador 1 en 13 ó alternativamente h_2 para el jugador 2 en 23 para prevenir la formación de 12. Esto puede inducir al jugador 3 a reducir su nivel de aspiración al mínimo de $b-h_1$ y $c-h_2$. Esto conduce a la cota competitiva del jugador 3.

Suponga que todas las coaliciones bipersonales son permisibles. La <u>*cota competitiva*</u> w del jugador 3, se define como sigue:

$$w = \min [b-h_1, c-h_2].$$

Los números h_1 y h_2 son las <u>*ofertas competitivas más altas*</u> para los jugadores 1 y 2, respectivamente.

Comentario: Para $t_1+t_2>a$ la coalición 12 no es atractiva y el razonamiento que ha motivado la definición de la cota competitiva del jugador 3 no puede aplicarse.

Supongamos que todas las coaliciones genuinas son permisibles. En este caso la <u>*cota tentativa más alta del jugador 3*</u> se define como el máximo de sus cotas tentativas .

Así, se puede ver que:

$$t_3 = t_2 \qquad \text{para } a=b$$

$$t_3 = \max\left[\frac{g-a}{3}, w\right] \qquad \text{para } a>b \text{ y } t_1+t_2 \leq a$$

$$t_3 = \frac{g-a}{3} \qquad \text{para } a>b \text{ y } t_1+t_2 > a \qquad \text{(II)}$$

Si no todas las coaliciones genuinas son permisibles, la cota tentativa más alta t_3, se define como sigue:

(1) Si $2 \cong 3$ entonces $t_3=t_2$.

(2) Si $2 \blacktriangleright 3$ entonces (II) describe t_3 si $123 \in \mathbb{P}$.

(3) Para $\mathbb{P} = \{1,2,3,12,13,23\}$ con $2 \blacktriangleright 3$, $t_1+t_2 \leq a$ y $w>0$ tenemos que $t_3=w$.

(4) En todos los demás casos donde no todas las coaliciones genuinas son permisibles, $t_3=0$.

4.7. DISCUSION DEL CASO $t_1 + t_2 + t_3 > g$.

Las cotas tentativas mas altas son candidatos naturales para las cotas preliminares p_1 , p_2 y p_3. Sin embargo, en algunos casos puede haber razones para cotas preliminares más bajas.

Suponga que todas las coaliciones genuinas son permisibles y que $g>a$. Puede suceder que $t_1 + t_2 + t_3 > g$.

Un ejemplo es proporcionado por un juego experimental de Medlin (1976).
Los valores para este juego son:

$a=95$; $b=88$; $c=81$; $g=113$.

Aquí las cotas tentativas más altas t_1 y t_2 son $\frac{a}{2}$ y $\frac{c}{2}$, respectivamente:

$$t_1 = \max\left[\frac{a}{2}, \frac{g}{3}\right] = 47.5$$

$$t_2 = \max\left[\frac{c}{2}, \frac{a-b}{2}, \frac{g-b}{3}\right] = 40.5$$

Las ofertas competitivas más altas h_1 y h_2 son:

$$h_1 = a-t_2 = 54.5$$

$$h_2 = a-t_1 = 47.5$$

En vista de

$$b-h_1 = 88 - 54.5 = 33.5$$

y

$$c-h_2 = 81 - 47.5 = 33.5$$

tenemos

$$w = 33.5$$

y

$$t_3 = \max \left[\frac{g-a}{3}, w \right] = 33.5.$$

Consecuentemente, las cotas tentativas más altas suman más que g:

$$t_1 + t_2 + t_3 = 121.5 > g .$$

Sin embargo, la gran coalición 123 puede distribuir 18 puntos más que la coalición bipersonal más provechosa 12. Los jugadores pueden sentir que no deberían perder esos 18 puntos. Si ninguno reduce su nivel de aspiración por abajo de su cota tentativa más alta t_i, no existe manera de formar la coalición 123. Por lo tanto un jugador tiene que reducir su nivel de aspiración por abajo de su cota tentativa más alta para hacer que la gran coalición sea posible.

Es más probable que la coalición 12 se forme, por ello, el jugador 3 tiene la razón más fuerte para reducir su nivel de aspiración por abajo de su cota tentativa más alta t_3. Los jugadores 1 y 2 posiblemente no sentirán una presión similar.

¿A qué nivel el jugador 3 debería reducir su aspiración?. A primera vista, una reducción a $\frac{(g - a)}{3}$ podría ser la indicada. Sin embargo, esta reducción es una concesión inecesaria.

Los resultados de Medlin, sugieren que una reducción a $g-\alpha=18$ es suficiente. Los jugadores 1 y 2 parecen estar dispuestos a darle al jugador 3 todo el incremento $g-\alpha$ para hacer posible la coalición 123. Así, la cota preliminar p_3 debe definirse como $p_3=g-\alpha$ en casos similares.

En el experimento de Medlin los sujetos parecen considerar a los números divisibles por 5 como "redondos". Esto indica una nueva reducción de $p_3=18$ a la cota final $u_3=15$. Los datos de Medlin contienen 8 partidas del juego bajo consideración. En 5 de esas partidas, el jugador 3 estuvo en la coalición final. El jugador 3 recibió 16,18 y 28 en tres casos de coaliciones tripersonales y pagos de 26 y 36 en dos casos de coaliciones bipersonales.
No es claro como deben aplicarse esos argumentos en casos con $a=b$ donde los jugadores 2 y 3 son igualmente fuertes. No hay duda que $t_1= t_2= t_3= \frac{g}{3}$ es razonable para $g>a=b=c$.

Ahora supongamos que $a=b>c$ y $\frac{a}{2}+ c > g$. Entonces como $c<a$ tenemos

$\frac{a}{2}\geq \frac{g}{3}$ y por lo tanto $t_1= \frac{a}{2}$ y $t_2= t_3= \frac{c}{2}$.

Consecuentemente, el caso $t_1+t_2+t_3 > g$ aparece aquí. En este caso el jugador 1 está en una posición más débil que en el caso descrito antes.

Los otros dos jugadores tendrían que reducir sus niveles de aspiración por abajo de sus cotas tentativas más altas si el jugador 1 no está dispuesto a hacerlo. Por lo tanto parece plausible suponer que los tres jugadores deben hacer concesiones. Esto sugiere:

$p_1= \frac{g}{3}$ y $p_2= \frac{(g-a/2)}{2}$ como cotas preliminares.

4.8. COTAS PRELIMINARES.

Suponga que todas las coaliciones genuinas son permisibles. Para $i=1,2,3$ la <u>*cota preliminar*</u> p_i del jugador i se define como sigue:

$$p_i = t_i \quad \text{para } i=1,2,3 \quad \text{si } g = a \text{ ó } t_1 + t_2 + t_3 \leq g$$

$$p_i = t_i \quad \text{para } i=1,2 \text{ y } p_3 = g - a \quad \text{si } t_1 + t_2 + t_3 > g > a > b \geq c$$

$$p_i = \frac{g}{3} \quad \text{para } i=1,2,3 \quad \text{si } t_1 + t_2 + t_3 > g > a = b = c$$

$$p_1 = \frac{g}{3} \quad \text{y } p_2 = p_3 = \frac{g}{2} - \frac{a}{4} \quad \text{si } t_1 + t_2 + t_3 > g > a = b > c$$

Si algunas de las coaliciones genuinas no son permisibles, la cota preliminar del jugador i se define como $p_i = t_i$ para $i = 1,2,3$.

4.9. COTAS FINALES.

En los juegos experimentales, los pagos no son infinitamente divisibles. Existe una unidad de dinero que no puede dividirse. La unidad de dinero más pequeña se denotará por γ ($\gamma > 0$).

La Teoría de cotas de pago supone que los jugadores no entrarán en coalición genuina si no reciben al menos γ.

El cambio de las cotas preliminares a las cotas finales depende de un parámetro, llamado el *nivel de prominencia*, el cual debe ser ajustado a los datos. Este parámetro es de la forma $\Delta = m10^k\gamma$ con $m=1,2,5,10,25$ y $k=0,1,2,\ldots$ .Idealmente el nivel de prominencia debe escogerse de modo que un número es percibido como "redondo" por los sujetos experimentales si y sólo si éste es divisible por Δ (Albers y Albers, 1983).

Para cualquier número real μ, el entero m más grande con $m \le \mu$ se denotará como ent μ. Para un nivel de prominencia fijo Δ, la *cota final* u_i del jugador i se define como:

$$u_i = \max \left[\gamma \, , \Delta \text{ ent } \frac{p_i}{\Delta} \right] \qquad \text{para} \quad i = 1,2,3.$$

Esto significa que la cota preliminar p_i del jugador i es redondeada al mayor número divisible por Δ menor ó igual a p_i. El resultado es la cota final a menos que sea cero, en cuyo caso la cota final es la unidad de dinero más pequeña.

4.10. PREDICCIONES DE LA TEORIA DE COTAS DE PAGO.

La Teoría de cotas de pago hace las siguientes dos predicciones:

(A) Si existe al menos una coalición permisible S con

$$\sum_{i\in S} u_j \leq v(S)$$

entonces una coalición S de esta clase se formará.

(B) Si una coalición genuina S se forma, los pagos finales x_i de los miembros de S no estarán por debajo de sus cotas de pago finales:

$$x_i \geq u_i \quad \text{para cualquier} \quad i\in S.$$

Para tener un mejor punto de vista de las implicaciones de la teoría de cotas de pago, es útil hacer una clasificación, que permite la descripción de p_1, p_2 y p_3 mediante fórmulas exactas. Así, consideramos "casos sin simetría" (para juegos con $a>b>c$) en la tabla 4 y "casos con simetría" (para juegos con $a=b$ ó $b=c$) en la tabla 5.

Tabla 4. Cotas preliminares para casos sin simetrías

Condiciones	Cotas
$a > b > c$[1]	$p_1 = \max[a/2, g/3]$ $p_2 = \max[c/2, (a-b)/2, (g-b)/3]$
$g = a > b > c$[2]	$p_3 = \max\ [w, (g-b)/3]$ con $w = \min[b-h_1, c-h_2]$ donde $h_1 = a-p_2$ y $h_2 = a-p_1$
$g > a > b > c$ $p_1 + p_2 + w \leq g$	
$g > a > b > c$[3] y $p_1 + p_2 + w > g$	$p_3 = g - a$

[1] $a>b>c$, $p_1 = g/3$ excluye el caso $p_2 = (a-b)/2$.

[2] $a>b>c$ y $p_3 = w$ implican $p_2 = c/2$.

[3] $g>a>b>c$ y $p_1+p_2+w > g$ implican $p_1 = a/2$, $p_2 = c/2$ y $w > g-a$.

Tabla 5. Cotas preliminares para casos con simetrías.

Condiciones	Cotas
$g = a = b = c$	$p_1 = p_2 = p_3 = a/2$
$g > a = b = c$	$p_1 = p_2 = p_3 = g/3$
$g = a = b > c$	$p_1 = a/2$; $p_2 = p_3 = c/2$
$g > a = b > c$ y $a/2 + c > g$	$p_1 = g/3$ $p_2 = p_3 = g/2 - a/4$
$g > a = b > c$ y $a/2 + c \le g$	$p_1 = \max[a/2, g/3]$ $p_2 = p_3 = \max[c/2, (g - a)/3]$
$g = a > b = c$	$p_1 = p_2 = a/2$ $p_3 = \max[0, b - a/2]$
$g > a > b = c$ y $a/2 + b > g$	$p_1 = p_2 = a/2$ $p_3 = g - a$
$g > a > b = c$ y $a/2 + b \le g$	$p_1 = p_2 = \max[a/2, g/3]$ $p_3 = \max[b - p_1, (g - a)/3]$

CAPITULO 5
UNA MEDIDA DE LOS EXITOS PREDICTIVOS

En este capitulo se proporciona un método para comparar los éxitos predictivos de diferentes teorías de función caracteristica. Este método, compara diferentes teorias de área que predicen regiones de diferente tamaño. A diferencia de otras teorías que predicen solamente resultados promedio o son menos específicas, una teoría de área es una teoría que predice un rango de resultados.

La ventaja de las teorías de área, radica en que, para cada partida del juego, se puede checar si la predicción fue correcta o no. Esta es una gran ayuda si uno necesita mejorar teorías a la luz de los datos.

Para comparar los éxitos predictivos de dos teorías de área para un cuerpo de datos experimentales, no es suficiente examinar cual teoría proporciona más predicciones correctas. Esto es debido a que una teoria puede producir algunas predicciones correctas simplemente porque predice un rango muy grande. Un ejemplo extremo, lo provee una teoria que será llamada la *Teoría nula*; el rango de predicción de la teoría nula es el conjunto de todas las configuraciones.

Claramente, si se desea comparar teorías de área de una manera significativa, el tamaño del rango de predicción debe tomarse en cuenta. Para este propósito Selten y Krischker (1982) desarrollaron una medida del tamaño de los éxitos predictivos.

La idea básica es bastante simple. Una medida del tamaño relativo del rango de predicción se resta de la frecuencia relativa de las predicciones correctas. Esto proporciona la medida de los éxitos predictivos.

El término "índice de aciertos" es usado para la frecuencia relativa de las predicciones correctas . Si los resultados están aleatoriamente distribuidos sobre todo el rango de resultados, puede esperarse que el índice de aciertos sea igual al tamaño relativo del rango de predicción.

5.1. JUEGOS ENREJADOS.

Como se ha explicado antes (Capítulo 4, Sección 9), los juegos experimentales involucran una unidad de dinero más pequeña γ. Consecuentemente, el rango de resultados posibles no es realmente un continuo, es más bien un conjunto finito de configuraciones.

Un par (G,γ), donde $G=(\Omega,\mathbb{P},v)$ es un juego en forma de función característica y $\gamma>0$, es un *juego enrejado* si los valores $v(S)$ de todas las coaliciones permisibles son múltiplos de γ.

Una *configuración enrejada* $\alpha=(S_1,\ldots,S_m;x_1,\ldots,x_n)$ para un juego enrejado es una configuración con la propiedad de que los pagos $x_1,\ldots,x_n$ son múltiplos de γ. Los juegos experimentales deben verse como juegos enrejados.

5.2. UN PROBLEMA DE DIMENSIONES.

A primera vista, el número de configuraciones enrejadas parece ser una medida razonable del tamaño de un rango de predicciones. Sin embargo, esta idea debe modificarse debido al hecho de que configuraciones para diferentes estructuras de coalición están en espacios de dimensión diferente. En un juego tripersonal una coalición bipersonal como la 12 da lugar a una familia de configuraciones con un parámetro de la forma :

$$\alpha = (12, 3; x_1, \ a-x_1, 0)$$

mientras que, la gran coalición 123 está conectada a una familia de configuraciones con dos parámetros

$$\alpha = (123; x_1, x_2, \ g-x_1-x_2).$$

Esto muestra que el contar configuraciones para determinar la medida del tamaño, sería similar a sumar metros y metros cuadrados.

Por lo tanto, la suposición de que todas las configuraciones enrejadas son igualmente probables no es adecuada. En vez de ello, es más acertado suponer que: todas las estructuras de coalición son igualmente probables y aquellas configuraciones con la misma estructura de coalición son también igualmente probables. Esta hipótesis, es la base de la definición del tamaño relativo.

5.3. EXITOS PREDICTIVOS.

Sea (G,γ) un juego enrejado. Sea J el número de estructuras de coalición para G y para cualquier estructura de coalición $S_1,\ldots,S_m$, sea $I(S_1,\ldots,S_m)$ el número de configuraciones enrejadas con esta estructura de coalición. Para cualquier configuración enrejada $\alpha=(S_1,\ldots,S_m;x_1,\ldots,x_n)$ para (G,γ) el *peso* $A(\alpha)$ de α se define como:

$$A(\alpha) = \frac{1}{JI(S_1,\ldots,S_m)}.$$

Sea T un conjunto de configuraciones enrejadas para (G,γ). El *área* $A(T)$ de T es la suma de los pesos de todas las configuraciones enrejadas en T:

$$A(T) = \sum_{\alpha\in T} A(\alpha).$$

El área es la medida del tamaño relativo usada en la definición de la medida de los éxitos predictivos.

Suponga que un cuerpo de datos experimentales consiste de k partidas basadas sobre m juegos enrejados $(G_1,\gamma_1),\ldots,(G_m,\gamma_m)$. Para $i=1,2,\ldots,m$, sea k_i el número de partidas del juego enrejado (G_i,γ_i). Considere una Teoría T que predice un conjunto T_i de configuraciones enrejadas para cada uno de los juegos enrejados (G_i,γ_i). Sea A_i el área de T_i. El *área promedio* A para todo el cuerpo de datos se define como:

$$A = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{m} k_i A_i \ .$$

Sea s el número de partidas predichas correctamente por T en el cuerpo de datos. Entonces el *índice de aciertos* R para este cuerpo de datos es

$$R = \frac{s}{k} \ .$$

El *índice de éxitos predictivos* S de la teoría T para el cuerpo de datos es la diferencia entre el índice de aciertos R y el área promedio A:

$$S = R - A \ .$$

Ambos, R y A, son números entre 0 y 1.

El cálculo de áreas es ilustrado por un ejemplo en la tabla 6.

Tabla 6. Cálculo del área del conjunto de negociación sin estructura nula y con desviaciones hasta 5 .

Estructura de coalición	rango predicho	Número de configuraciones enrejadas para la estructura de coalición: predichas	todas
1,2,3	——	0	1
12,3	$55 \leq x_1 \leq 65$	11	96
13,2	$55 \leq x_1 \leq 65$	11	91
23,1	$30 \leq x_2 \leq 40$	11	66
123	$54 \leq x_1 \leq 63$ $29 \leq x_2 \leq 38$ $24 \leq x_3 \leq 33$	75	7381

área= 0/(5*1) + 11/(5*96) + 11/(5*91) + 11/(5*66) + 75/(5*7381)
= 0.082458

Nota: Los datos son de un ejemplo específico de un juego de cuota tripersonal: $v(1)=v(2)=v(3)=0$, $v(12)=85$, $v(13)=90$, $v(23)=65$, $v(123)=120$. La unidad más pequeña de dinero fue $\gamma=1$. En 17 de 32 partidas el resultado estuvo en el rango predicho (Rapoport y Kahan, 1976). Esto proporciona un índice de éxitos de 0.53-0.08=0.45.

CAPITULO 6
PROMINENCIA

En este capitulo, se propone un método para determinar el nivel de prominencia Δ de un conjunto de datos, este concepto fue introducido en 4.9. (aunque Δ apareció en 3.5. pero sin usar tal término). Se necesita el nivel de prominencia Δ para definir los conjuntos de negociación descriptivos.

Las cotas finales, proporcionadas por la teoria de cotas de pago, también dependen del nivel de prominencia Δ. Por lo tanto, necesitamos una manera, no arbitaria, para ajustar el parámetro Δ a los datos.

6.1. NIVELES DE PROMINENCIA Y DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIA.

Sea X el conjunto de todos los multiplos de una unidad más pequeña de dinero $\gamma>0$. Un *nivel de prominencia* en X es un número Δ de la forma $\Delta=\mu 10^{\eta}\gamma$ con $\mu=1,2,5,25$ y $\eta=0,1,2,\ldots$ .El conjunto de todos los niveles de prominencia en X se denotará por X_o. El *nivel de prominencia* $\delta(x)$ de un número $x\in X$ es el nivel de prominencia ($\Delta\in X_o$) más grande tal que x es divisible sin residuo por Δ.

Considere un conjunto de datos en el cual las observaciones son números en X. Podemos pensar en un conjunto de esta clase como una distribución de frecuencia. Formalmente, una *distribución de frecuencia sobre X* es una función k que asigna un número entero positivo $k(x)$ a cualquier x en un subconjunto finito no vacío Y de X y $k(x)=0$ a cualquier $x \in X-Y$. El conjunto Y es el *soporte* de k. El número $k(x)$ es la frecuencia con la que el valor x ocurre en el conjunto de datos. El *número de todas las observaciones* está dado por:

$$H = \sum_{x \in X} k(x).$$

Para cualquier nivel de prominencia $\Delta \in X_0$, sea $m(\Delta)$ el número de valores en Y con $\delta(x)=\Delta$; $m(\Delta)$ es el *número de valores con el nivel de prominencia Δ*.

Para cualquier nivel de prominencia $\Delta \in X_0$, sea $h(\Delta)$ la suma de todos los $k(x)$ con $\delta(x)=\Delta$. Llamamos a $h(\Delta)$ el *número de observaciones con el nivel de prominencia Δ*. Para cualquier nivel de prominencia $\Delta \in X_0$ sea Y_Δ el conjunto de todos los $x \in Y$ con $\delta(x) \geq \Delta$. El número de elementos de Y_Δ es denotado por $M(\Delta)$. Obviamente, $M(\Delta)$ no es otra cosa que la suma de todos los $m(\Delta')$ con $\Delta' \geq \Delta$ y $\Delta' \in X_0$. $M(\Delta)$ es el *número de valores con al menos el nivel de prominencia Δ*. El número de todos los elementos de Y es denotado por M.

El número H_Δ de *observaciones con al menos el nivel de prominencia Δ* se define como:

$$H(\Delta) = \sum_{z \in Y_\Delta} k(z).$$

Obviamente, $H(\Delta)$ es la suma de todos los $h_{\Delta'}$, con $\Delta' \geq \Delta$ y $\Delta' \in X_0$.

6.2. ANTECEDENTES INTUITIVOS DEL METODO.

Suponga que un conjunto de datos descrito por una distribución de frecuencia k ha sido obtenido por experimentos en los cuales los sujetos negocian en "números redondos". ¿Dónde se debe trazar la línea divisoria entre los "números redondos" y otros números?. Es plausible suponer que los sujetos perciben un número x como "redondo" si su nivel de prominencia $\delta(x)$ es al menos tan grande como un nivel crítico Δ^*. ¿Cómo debemos estimar este nivel crítico?.

Suponga por el momento que, contrariamente a nuestras expectativas, la prominencia no influye en el comportamiento de los sujetos. Bajo esta "hipótesis nula", la frecuencia $k(x)$ de un valor $x \in Y$ no dependería de su nivel de prominencia $\delta(x)$. Esto significa que para niveles de prominencia Δ con $m(\Delta)$ suficientemente grande, se esperaría una pequeña diferencia entre la fracción $H(\Delta)/H$ de observaciones con al menos el nivel de prominencia Δ y la fracción $M(\Delta)/M$ de valores con al menos el nivel de prominencia Δ.

Ahora suponga que los sujetos negocian en "números redondos", donde la redondez de x está definida por $\delta(x)\geq\Delta^{*}$. Entonces $h(x)$ debería tender a ser más grande que la frecuencia total promedio H/M para $\delta(x)\geq\Delta^{*}$ y más pequeña que H/M para $\delta(x)<\Delta^{*}$. El valor esperado de la frecuencia promedio $h(\Delta)/m(\Delta)$ para valores con el nivel de prominencia Δ debe ser más grande que H/M para $\delta(x)\geq\Delta^{*}$ y más pequeño que H/M para $\delta(x)<\Delta^{*}$. Si esto es cierto, el valor esperado de la diferencia:

$$D(\Delta) = \frac{H(\Delta)}{H} - \frac{M(\Delta)}{M}$$

es máximo para $\Delta=\Delta^{*}$. Para ver esto, suponga que Δ' es el nivel de prominencia justo por debajo de Δ. Así, tenemos

$$D(\Delta') = \frac{H(\Delta) + h(\Delta')}{H} - \frac{M(\Delta) + m(\Delta')}{M}$$

$$D(\Delta') = D(\Delta) + \frac{h(\Delta')}{H} - \frac{m(\Delta')}{M}$$

$$D(\Delta') = D(\Delta) + \frac{m(\Delta')}{H}\left[\frac{h(\Delta')}{m(\Delta')} - \frac{H}{M}\right].$$

Por lo tanto, el método propuesto aquí estima el valor crítico Δ^{*} como el maximizador de $D(\Delta)$ ó el maximizador más grande de $D(\Delta)$ si diversos valores de Δ maximizan a D.

6.3. NIVEL DE PROMINENCIA DE UN CONJUNTO DE DATOS.

Considere un conjunto de datos descrito por una distribución de frecuencia k sobre X. El *nivel de prominencia* Δ^* de k se define como el maximizador más grande de $D(\Delta)$ si diversos valores de Δ maximizan a D.

Ejemplo: La tabla 7 muestra la determinación del nivel de prominencia para un conjunto de datos en el ejemplo de los pagos al jugador 1 en coaliciones bipersonales en el juego de Murnighan y Roth. La distribución de frecuencia k se muestra en la figura 4 (capitulo 3).

En los experimentos de Murnighan y Roth la unidad más pequeña de dinero fue $\gamma=0.01$. El máximo de $D(\Delta)$ se supuso $\Delta^*=5$. Este es el nivel de prominencia del conjunto de datos.

Los datos muestran una pendiente pronunciada en la frecuencia promedio de $\Delta=5$ a $\Delta=2.5$. Esto presta soporte a la idea de que $\Delta^*=5$ es en efecto un nivel crítico que separa los "números redondos" de otros números a los ojos de los sujetos. Por supuesto es plausible suponer que los "números redondos" más atractivos son aquellos que tienen un nivel de prominencia alto, y los menos atractivos aquellos cuyo nivel de prominencia es bajo. Sin embargo, esto no rechaza la existencia de una linea divisoria relativamente pronunciada entre los "números redondos" y otros números.

Tabla 7. Determinación del nivel de prominencia del pago del jugador 1 en una coalicion bipersonal en el juego de Murnighan y Roth.

Nivel de prominencia Δ	Número de valores $m(\Delta)$	Número de observaciones $h(\Delta)$	Números acumulativos valores $M(\Delta)$	Números acumulativos observaciones $H(\Delta)$	Distribuciones acumulativas $\frac{M(\Delta)}{M}$	Distribuciones acumulativas $\frac{H(\Delta)}{H}$	$D(\Delta)$
100	1	3	1	3	.016	.007	-.009
50	1	64	2	67	.031	.163	.132
25	2	24	4	91	.062	.221	.159
20	3	79	7	170	.109	.413	.304
10	3	61	10	231	.156	.561	.405
5	5	90	15	321	.234	.779	.545
2.5	11	27	26	348	.406	.845	.439
2	11	24	37	372	.578	.903	.325
1	11	20	48	392	.750	.951	.201
0.5	8	10	56	402	.875	.976	.101
0.25	1	1	57	403	.891	.978	.087
0.2	-	-	57	403	.891	.978	.087
0.1	4	4	61	407	.953	.988	.035
0.05	1	1	62	408	.969	.990	.021
0.02	1	3	63	411	.984	.998	.014
0.01	1	1	64	412	1.000	1.000	.000

Nota: El juego es descrito en 3.6.

6.4. COMPARACION DE EXITOS PREDICTIVOS.

Para terminar, se verán cuatro conjuntos de resultados experimentales: kahan y Rapoport, 1974; Medlin, 1976; Rapoport y Kahan, 1976; Murnighan y Roth, 1977; Maschler, 1978.

La primera muestra consiste de 27 partidas de Maschler de varios juegos superaditivos. La segunda muestra consiste de 432 partidas de el estudio de Murnighan y Roth discutida en el capitulo 3. La tercera muestra consiste de 160 partidas de 5 juegos superaditivos tomados de un estudio de Rapoport y Kahan. La cuarta muestra contiene 160 partidas de 20 juegos superaditivos en el estudio de Medlin.

La tabla 8 presenta indices de acierto, áreas e indices de éxito para tres teorías: El conjunto de negociación $B_o[5]$, los conjuntos de negociación unidos $U[5]$ y la teoría de cotas de pago E_5 con $\Delta=5$.

Los indices de éxito para $U[5]$ son más altos que aquellos para $B_o[5]$. Esto indica que la teoría del conjunto de negociación se mejora tomando transformaciones de poder.

En el juego de Murnighan y Roth el área de $U[5]$ es considerablemente más grande que la de $B_o[5]$. Para las otras muestras hay sólo una pequeña diferencia entre $U[5]$ y $B_o[5]$.

Para las cuatro muestras, E_5 tiene indices de éxito considerablemente más altos que $U[5]$. En algunos casos el área de E_5 es mucho más grande que la de $U[5]$, pero esta desventaja es más que compensada por la ventaja de un alto indice de aciertos.

Tabla 8. Indices de aciertos, áreas e índices de éxitos para cuatro conjuntos de datos experimentales.

	$B_o[5]$	U[5]	E_5	Experimento
Indice de aciertos Area Indice de éxitos	.34 .19 .15	.89 .20 .69	.89 .13 .76	27 partidas de Maschler de 26 juegos superaditivos
Indice de aciertos Area Indice de éxitos	.04 .03 .01	.44 .12 .32	.92 .31 .61	432 partidas del juego reportado por Murnighan y Roth
Indice de aciertos Area Indice de éxitos	.51 .08 .43	.55 .08 .47	.92 .18 .74	160 partidas de 5 juegos reportados por Rapoport y Kahan
Indice de aciertos Area Indice de éxitos	.68 .09 .59	.72 .09 .63	.93 .20 .73	160 partidas de Medlin de 20 juegos superaditivos

CONCLUSION

La evidencia experimental sugiere fuertemente que las consideraciones de equidad influyen decisivamente en el comportamiento de los sujetos experimentales en juegos tripersonales.

Esto muestra que la hipótesis de trabajo que atribuye una racionalidad limitada a los sujetos experimentales es realista, en contraposición con aquellas teorías que suponen un comportamiento optimizador de los agentes.

B I B L I O G R A F I A

ALBERS, WULF, and GISELA ALBERS, *On the Prominence Structure of the Decimal System*, in R. W. Scholz (ed.), *Decision Making under Uncertainty*. Amsterdam: Elsevier, 1983, pp.271-287.

AUMANN, R.J., and M. MASCHLER. *The Bargaining Set for Cooperative Games*, in M. Dresher, L. S. Shapley, and A. W. Tucker (eds.), *Advances in Game Theory*. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1964, pp. 443-476.

KAHAN, J. P., and A. RAPOPORT, *Test of the Bargaining Set and Kernel Models in Three-Person Games*, in A. Rapoport (ed.), *Game Theory as a theory of Conflict Resolution*. Dordrecht: Reidel, 1974, pp. 119-159.

LUCAS, W. F., *A Game with No Solution*, in Bulletin of the AMS, 74, 1968, pp. 237-239.

LUCAS, W. F., *An Overview of the Mathemathical Theory of Games.*, Management Science.,Vol 18, No 5, January, Part 2, 1972.

MASCHLER, M., *The Power of a Coalition*. Management Science, 10, 1963, pp. 8-29.
Playing an N-Person Game: An Experiment, in H. Sauermann (ed.), *Coalition Forming Behavior*, Contributions to Experimental Economics , Vol. 8. Tübingen: Mohr, 1978, pp. 231-328.

MEDLIN, S. M., *Effects of Grand Coalition Payoffs on Coalition Formation in three-Person Games*. Behavorial Science, 21, 1976, pp. 48-61.

MURNIGHAN, J. K., and A. E. ROTH, *The Effects of Communication and Informaton Availability in an Experimental Study of a three-Person Game*. Management Science, 23, 1977, pp. 1336-1348.

NASH, J. F., *The Bargainig Problem,* Econometrica 18, 1950, pp. 155-162.

OSBORNE, MARTIN., *Bargaining and Markets,* Academic Press, INC., San Diego California, 1990.

OWEN, G., *Game Theory,* B.W. Saunders Co., Philadelphia, 1968.

OWEN, G., *Mathematics for the Social and Management Sciences,* B. W. Co.

RAIFFA, HOWARD. *El Arte y la Ciencia de la Negociación.* Fondo de Cultura Económica. México, 1991.

RAPOPORT, A., and J. P. KAHAN., *When Three is Not Always Two against One: Coalitions in Experimental Three-Person Cooperative Games.* Journal of Experimental Social Psychology, 12, 1976, pp. 253-273.

ROSENMÜLLER, J., *The Theory of Games and Markets.,* Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1981.

ROTH ALVIN S., *Laboratory Experimentation in Economics: six points of view.* British Library Cataloguing in Publication Data, 1987.

SELTEN, R., *Equal Division Payoff Bounds for 3-Person Characteristic Function Experiments*, in R. Tietz (ed.), Aspiration Levels in Bargaining and Economic Decision Making, Springer Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No. 213, Berlin: Springer-Verlag, 1982, pp. 265-275.

SELTEN, R. and W. KRISCHKER, *Comparison of Two Theories for Characteristic Function Experiments*, in R. Tietz (ed.), Aspiration Levels in Bargaining and Economic Decision Making, Springer Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No. 213, Berlin: Springer-Verlag, 1982, pp. 259-264.

SHAPLEY, L. S., *A Value for n-Person Game*, in Contributions to the Theory of Games, vol. 2, eds. H. Kuhn and A. W. Tucker, Princeton, NJ, Princeton University Press, 1953, pp. 307-317.

SHUBIK, M. *Teoria de Juegos en las Ciencias Sociales: Conceptos y Soluciones.* Fondo de Cultura Económica. México, 1992.

THIE PAUL., *An Introduction to Linear Programming and Game Theory*, Second Edition; John Wiley Sons.

VON NEUMANN, J. and O. MORGENSTERN, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton, N.J., Princeton University Press, 1944.