3
2ej

Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

CONTINUOS INDESCOMPONIBLES Y COMPOSANTES

T E S I S

Que para Obtener el Título de

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a

Heladio Bautista Cruz

México, D. F.   Noviembre de 1983

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

PROLOGO

La presente tesis, tiene como objetivo, darnos una idéa de la relación que existe entre un continuo indescomponible y el conjunto de sus composantes. En realidad, aclara los puntos que se omiten en [1], [2], [3] y [10] y apoyándose en [4], [5], [6], [7], [8] y [9] nos dá un material accesible, para alguien que tenga los conocimientos de un curso de Topología de conjuntos.

En el capítulo I, se demuestra que la hipótesis del continuo implica que un continuo indescomponible métrico tiene c composantes (corolario 1.5.11.). Hay dos ejemplos de continuos indescomponibles métricos en el capítulo II. Surge una pregunta, ¿Que pasa con el conjunto de composantes de un continuo indescomponible no métrico?; tratando de dar respuesta a ésto, se analiza un ejemplo en el capítulo IV

Hay muchos resultados respecto al número de composantes de un continuo indescomponible no métrico, pero éstos son para casos particulares. El caso general, no se ha resuelto.

Deseo dar las gracias a la Dra Isabel Puga Espinosa, por haber dirigido esta tesis.

INDICE

CAPITULO I

PRELIMINARES.

CAPITULO II.

EJEMPLOS DE CONTINUOS INDESCOMPONIBLES METRICOS

CAPITULO III

CAPITULO IV

CAPITULO I

PRELIMINARES

1.1. Componentes y Casi-componentes.

Definición 1.1.1. Un espacio X es *localmente conexo*, si para cada $p \in X$ y cada U abierto en X que contenga a p existe un abierto conexo V en X tal que $p \in V \subset U$.

Definición 1.1.2. C es una *componente* en el espacio X, si C es conexo y si B es un conexo en X tal que $C \subset B$, entonces $C = B$.

Teorema 1.1.3. [8]. Un espacio X es localmente conexo si y sólo si las componentes de cada conjunto abierto son conjuntos abiertos.

Definición 1.1.4. Sea X un espacio y $p \in X$. La *casi-componente* de p es la intersección de todos los conjuntos abiertos y cerrados que contienen a p.

Teorema 1.1.5. [7] Toda componente es subconjunto de alguna casi-componente.

Teorema 1.1.6. [7] En un espacio compacto y Hausdorff, toda casi-componente es componente.

Teorema 1.1.7. Sea C una componente de un espacio compacto y Hausdorff X, y sea U un abierto en X tal que $C \subset U$. Entonces existe un conjunto V abierto y cerrado de X tal que $C \subset V \subset U$.

Demostración. Por el teorema 1.1.5 y el teorema 1.1.6 tenemos que C es casi-componente, es decir, es la intersección de todos los conjuntos abiertos y cerrados que contienen a C. Sea $p \in X \setminus U$. Ya que $p \notin C$, $p \notin A_p$ para algún abierto y cerrado A_p que contiene a C, ésto implica que $p \in X \setminus A_p = V_p$ y V_p es abierto y cerrado y la familia $\{V_p\}_{p \in X \setminus U}$ es cubierta abierta de $X \setminus U$, entonces existen V_{p_1}, $V_{p_2}, \ldots, V_{p_n}$ tal que $X \setminus U \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{p_i}$. Observemos que $\bigcup_{i=1}^{n} V_{p_i}$ es abierto y cerrado y que $C \cap (\bigcup_{i=1}^{n} V_{p_i}) = \emptyset$. Por lo tanto $V = X - \bigcup_{i=1}^{n} V_{p_i}$ es abierto y cerrado y $C \subset V \subset U$. $\square$

1.2. Espacios Lindelöf, espacios σ-compactos y espacios paracompactos.

Definición 1.2.1. Un espacio Hausdorff X es Lindelöf si cada cubierta abierta de X contiene una subcubierta numerable.

Definición 1.2.2. Un espacio es σ-compacto si éste puede ser expresado como la unión numerable de espacios compactos.

Teorema 1.2.3. [4] Las siguientes propiedades son equivalentes en un espacio localmente compacto X.
a) X es σ-compacto.
b) X es un espacio Lindelöf.

Definición 1.2.4. Una familia $\{A_\alpha \mid \alpha \in A\}$ de subconjuntos de un espacio X es llamada localmente finita si cada punto de X tiene una vecindad V tal que $V \cap A_\alpha \neq \emptyset$

sólo para un número finito de índices $\alpha \in A$.

Definición 1.2.5. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ dos cubiertas de un espacio X. Se dice que $\mathcal{U}$ refina a $\mathcal{V}$ si para cada $U \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $U \subseteq V$.

Definición 1.2.6. Un espacio Hausdorff X es paracompacto si cada cubierta abierta de X tiene un refinamiento localmente finito.

Teorema 1.2.7. (K. Morita) [4]. Un espacio Lindelöf X es regular si y sólo si es paracompacto.

Teorema 1.2.8. [4]. Cada espacio paracompacto es normal.

Teorema 1.2.9. Si X es un espacio compacto Hausdorff y 1ro numerable en un punto b, entonces $X - \{b\}$ es normal.

Demostración. Sea $\{W_k\}_{k=1}^{\infty}$ una base numerable de vecindades abiertas de b.

Entonces $X-\{b\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}(X-W_k)$, así que $X-\{b\}$ es σ-compacto y por el teorema 1.2.3 es Lindelöf. Entonces por el teorema 1.2.7. $X-\{b\}$ es paracompacto y por el teorema 1.2.8 $X-\{b\}$ es normal. □

1.3 Espacios métricos, redes y conjuntos pre-ordenados.

Definición 1.3.1. Una métrica en un conjunto X es una función real

$$d: X\times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

que satisface las siguientes condiciones:

M_1) $d(x,y)\geq 0$ para $x,y\in X$

M_2) $d(x,y)=0$ si y sólo si $x=y$

M_3) $d(x,y)=d(y,x)$ para $x,y\in X$

M_4) $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$ para $x,y,z\in X$.

Sea $d: X\times X\longrightarrow\mathbb{R}$ una métrica dada en un conjunto X. Definamos una familia $\mathcal{T}_d$ de subconjuntos de X como sigue. Para $U\subseteq X$, $U\in\mathcal{T}_d$ si y sólo si, para cada punto $p\in U$, existe un número real positivo r tal que U contiene cada pun to $x \in X$ con $d(p,x) < r$. Podemos verificar que la familia τ_d es una topología en X. La topología τ_d es llamada la <u>topología definida por la métrica d</u>.

Definición 1.3.2. Sea X un espacio. X se dice que es métrico si existe una métrica d la cual define la topología del espacio X.

Teorema 1.3.3. [4] Todo espacio compacto Hausdorff y métrico es separable y segundo numerable.

Definición 1.3.4. Un conjunto D es un conjunto <u>dirigido</u> si hay una relación binaria $\leq$ sobre D que satisface:

a) $a \leq a$ para toda $a \in D$

b) Si $a, b, c \in D$ tal que $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$

c) Si $a, b \in D$, entonces existe $c \in D$ tal que $a \leq c$ y $b \leq c$

Ejemplo. Sea D una familia de conjuntos tal que $A \cap B \in D$ para toda $A, B \in D$, definimos una relación $\leq$ en D de la siguiente manera; $A \leq B$ si $A \supseteq B$. La relación $\leq$ satisface a), b) y c) de la definición anterior, por lo tanto D es un conjunto dirigido. La familia D junto con la relación $\leq$ se llama familia dirigido por inclusión.

Definición 1.3.5. Por una red en un espacio X, se entenderá una función, $f: D \to X$ de un conjunto dirigido D en X.

Definición 1.3.6. Sea D un conjunto dirigido y $E \subset D$. Si para cada $d \in D$, existe $e \in E$ tal que $e \geq d$, entonces se dice que E es un subconjunto cofinal de D.

Definición 1.3.7. Sea $U \subseteq X$, se dice que la red $f: D \to X$ es frecuente en U si existe un subconjunto cofinal E de D tal que $f(E) \subset U$.

Definición 1.3.8. Un punto p en un espacio X es llamado un punto cerradura de la red $f: D \to X$ si f es frecuente en cada vecindad de p.

Teorema 1.3.9. [7]. Un espacio X es compacto si y sólo si cada red en X tiene un punto cerradura.

Definición 1.3.10. Una relación binaria $\leq$ en un conjunto A es llamado un <u>pre-orden</u> si satisface:

a) $a \leq a$ para toda $a \in A$

b) Si $a, b, c \in A$ tal que $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.

Un conjunto con un preorden es llamado <u>conjunto preordenado</u>.

Definición 1.3.11. Sea A un conjunto preordenado.

1) $B \subset A$ es llamado una <u>cadena</u> en A si cada dos elementos en B están relacionados.

2) $a_0 \in A$ es llamado <u>cota superior</u> de un subconjunto $B \subset A$ si para toda $b \in B$, $b \leq a_0$

3) $m \in A$ es llamado <u>elemento maximal</u> en A si para toda $a \in A$ tal que $m \leq a$ $a \leq m$.

Lema de Zorn 1.3.12. Sea X un conjunto preordenado. Si cada cadena en X tiene una cota superior, entonces X tiene al menos un elemento maximal.

1.4. Compactaciones

Definición 1.4.1. Por un encaje de un espacio X en un espacio Y, se entenderá una función continua inyectiva $f: X \to Y$ la cual define un homeomorfismo de X sobre $f(X)$.

Definición 1.4.2. Por una compactación de un espacio X, se entenderá un espacio compacto Y tal que X está encajado en Y y además es denso en tal espacio, es decir, $\overline{f(X)} = Y$.

Definición 1.4.3. Un espacio completamente regular y T_1 es llamado un espacio Tychonoff.

Teorema 1.4.4. [7] El producto topológico de una familia de espacios compactos es compacto.

Teorema 1.4.5. (Teorema de encaje de Tychonoff) [7]. Sea X un espacio Tychonoff, $I=[0,1]$ y $C(X,I)$ el conjunto de funciones continuas de X en I. Entonces, la función $g: X \longrightarrow I^{C(X,I)}$ definida por $[g(x)](f)=f(x)$ para toda $x \in X$ y para toda $f \in C(X,I)$ es un encaje.

Sea $\beta(X)=\overline{g(X)}$, ya que $I^{C(X,I)}$ es compacto, $\beta(X)$ es compacto. Tenemos que $\beta(X)$ es una compactación de X.

Definición 1.4.6. La compactación $\beta(X)$ de X, definida arriba es llamada la <u>compactación de Stone-Čech</u> de X.

La compactación de Stone-Čech tiene una propiedad crucial dada por el siguiente teorema.

Teorema 1.4.7. [7] Si X es un espacio Tychonoff, entonces cada función continua ϕ, $\phi: X \to Y$ de X en un espacio compacto y Hausdorff Y tiene una extensión sobre $\beta(X)$.

Definición 1.4.8. Un subconjunto A de un espacio X es <u>C^*-encajado</u> en X si cada función acotada continua en A con valores reales se puede extender a X.

Teorema 1.4.9. [8]. Si K es una compactación de X tal que X es C^*-encajado en K, entonces K es la compactación de Stone-Čech de X.

Teorema 1.4.10. [9] Sea X un espacio normal, A y B cerrados y ajenos en X. Entonces A y B tienen cerraduras ajenas en $\beta(X)$.

Teorema 1.4.11. (B. Pospišil). $|\beta(\mathbb{N})| = 2^c$

Demostración. Por el teorema que dice "el producto de espacios separables es separable siempre y cuando la cardinalidad del conjunto de espacios que intervienen en el producto sea a lo mas c", tenemos que, I^c contiene un conjunto numerable denso D. Sea $\varphi : \mathbb{N} \to D$ una función sobre. Por ser $\mathbb{N}$ discreto, φ es continua, así que se puede extender a $\hat{\varphi}: \beta(\mathbb{N}) \to I^c$. Como $\beta(\mathbb{N})$ es compacto, $\hat{\varphi}(\beta(\mathbb{N}))$ es compacto, por consiguiente $\hat{\varphi}(\beta(\mathbb{N}))$ es un cerrado que contiene a D; consecuentemente $\hat{\varphi}$ es también sobre y por lo tanto tenemos que $|\beta(\mathbb{N})| \geq |I^c|$. Por otra parte, hay $c = c^{\aleph_0}$ funciones continuas de $\mathbb{N}$ en I, y por lo tanto $\beta(\mathbb{N})$ es un subespacio de I^c (teorema 1.4.5), así $|\beta(\mathbb{N})| \leq |I^c|$, es decir, $|\beta(\mathbb{N})| = |I^c|$. Pero sabemos que $|I^c| = 2^c$, lo que nos demuestra el teorema. $\square$

Teorema 1.4.12. Sea $A = [1, \infty)$. Entonces la cerradura $\overline{\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ en $\beta(A)$ es homeomorfa a $\beta(\mathbb{N})$.

Demostración. $\overline{\mathbb{N}}$ es una compactación de $\mathbb{N}$. Por el teorema de extensión de Tietze, cada función real acotada en $\mathbb{N}$ se puede extender continuamente a A, en consecuencia a $\beta(A)$, por lo tanto a $\overline{\mathbb{N}}$. Por el teorema 1.4.9. tenemos que $\overline{\mathbb{N}}$ es la compactación de Stone-Čech de $\mathbb{N}$, y así encajamos $\beta(\mathbb{N})$ en $\beta(A)$. $\square$

1.5. Continuos indescomponibles métricos y composantes.

Definición 1.5.1. Un continuo es un espacio topológico Hausdorff, compacto y conexo. Un subcontinuo de un continuo X, es un subespacio de X que también es un continuo.

Teorema 1.5.2. Un continuo métrico tiene a lo mas c elementos.

Demostración. Un continuo métrico X contiene un subconjunto D denso y numerable (teorema 1.3.3), así que todo elemento de X es límite de una sucesión de elementos de D. El número de sucesiones distintas de elementos de D es a lo mas c. $\square$

Teorema 1.5.3. Sea $\{K_d \mid d \in D\}$ una colección de continuos en un espacio X en donde D es un conjunto dirigido y si $d_0 < d_1$, entonces $K_{d_1} \subseteq K_{d_0}$ para toda $d_0, d_1 \in D$. Entonces $\bigcap_{d \in D} K_d$ es un continuo.

Demostración. $\bigcap_{d\in D} K_d$ es un subconjunto cerrado de cada K_d, por lo tanto es compacto y Hausdorff. Supongamos que existen conjuntos cerrados, ajenos H y K tal que $\bigcap_{d\in D} K_d = H \cup K$, $H \neq \emptyset \neq K$. Para algún d_0 fijo, X puede ser reemplazado por K_{d_0} y cada K_d por $K_{d_0} \cap K_d$ sin afectar a la intersección, por lo tanto, podemos suponer que X es compacto y Hausdorff. Entonces H y K son subconjuntos cerrados y ajenos de X y pueden ser separados por conjuntos abiertos U y V en X. Para cada K_d, $K_d \not\subset U \cup V$ ya que en caso contrario $U \cap K_d$ y $V \cap K_d$ sería una separación no trivial de K_d. Así, podemos escoger $x_d \in K_d - (U \cup V)$. El resultado es una red (x_d) la cual tiene un punto cerradura z en X (teorema 1.3.9). Ahora, si W es una vecindad de z y K_d es dado, entonces para alguna $K_c \subset K_d$, $x_c \in W$, lo que implica que $W \cap K_d \neq \emptyset$. Así, $z \in \overline{K_d} = K_d$ para cada $d \in D$. Entonces $z \in \bigcap_{d\in D} K_d \subset U \cup V$. Pero $U \cup V$ es entonces una vecindad de z, que no contiene elementos de (x_d), ésto por la elección de (x_d). Tenemos una contradicción

Por lo tanto $\bigcap_{d \in D} K_d$ es un continuo. □

Definición 1.5.4 Un continuo es <u>descomponible</u> si es unión de dos subcontinuos propios; en el caso contrario es <u>indescomponible.</u>

Teorema 1.5.5 [5] Si C es un conjunto conexo de un espacio conexo X y si U y V son conjuntos abiertos y ajenos tal que $X - C = U \cup V$. Entonces $C \cup U$ y $C \cup V$ son conexos. Además si C es cerrado, entonces $C \cup U$ y $C \cup V$ son cerrados.

Teorema 1.5.6. X es un continuo indescomponible si y sólo si todo subcontinuo propio de X tiene interior vacío.

Demostración. ⇒) Sea C un subcontinuo propio de X. Si $X - C$ no es conexo, entonces $X - C = U \cup V$, donde U y V son conjuntos abiertos y ajenos. Ya que C es cerrado y conexo, entonces $(C \cup U) \cup (C \cup V)$ es una descomposición de X en dos subcontinuos propios. Así que $X \setminus C$ es conexo. Si $\operatorname{int} C \neq \emptyset$, entonces $X =$

$\overline{X-C} \cup C$ es una descomposición de X en dos subcontinuos propios. $\Leftarrow$) Recíprocamente si $X = C_1 \cup C_2$, donde C_1 y C_2 son subcontinuos propios de X; entonces $C_1 \setminus C_2$ es un conjunto abierto de X, y por consiguiente C_1 posee puntos interiores, contradicción que demuestra que X es indescomponible. $\square$

Definición 1.5.7. Sea X un continuo. La <u>composante</u> de un elemento p de X es la unión de los subcontinuos propios de X que contienen a p.

Teorema 1.5.8. Toda composante de un continuo métrico K, es la unión de una familia numerable de subcontinuos propios de K.

Demostración. Sea C la composante determinada por un punto p de K. el conjunto abierto $K - \{p\}$ tiene una base numerable $\{U_i\}_{i=1}^{n}$, ya que K es un continuo métrico, el teorema 1.3.3 nos garantiza tal base. Para cada i, designemos por C_i la componente de

$K - U_i$ que contiene a p. Entonces C_i es un subcontinuo propio de K que contiene a p y por consiguiente, está contenido en C. Supongamos que x es un punto cualquiera de C. Existe un subcontinuo propio K' de K, que contiene a la vez p y x. Sea q un punto de $K - K'$. Entonces existe un número natural j tal que q pertenece a U_j, y U_j está contenida en $K - K'$. Por tanto K' es un subconjunto de C_j, por lo que el punto x pertenece a C_j. Por consiguiente $C = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$. □

Teorema 1.5.9. Todo continuo métrico indescomponible K, posee una infinidad no numerable de composantes.

Demostración. Supongamos que K contiene sólo una familia numerable de composantes. En virtud del teorema anterior, toda composante de K es unión de una familia numerable de subcontinuos propios de K. Esto implica que K es unión de una familia numerable de subcontinuos pro pios de K. Pero ningún subcontinuo propio de K puede contener un punto interior, pues de lo contrario, en virtud del teorema 1.5.6, K sería descomponible. Y ésto está en contradicción con el teorema de Baire. $\square$

Teorema 1.5.10. Las composantes de todo continuo indescomponible K son ajenas dos a dos.

Demostración. Como K es un continuo indescomponible, la relación $x\sim y$ si hay un subcontinuo propio de K que contiene a x y a y es una relación de equivalencia. Es claro que $x\sim x$ y que $x\sim y$ si y sólo si $y\sim x$. Sean $x, y, z \in K$ y supongamos que $x\sim y$ y $y\sim z$ entonces existen K_1 y K_2 subcontinuos propios de K tales que $x, y \in K_1$ y $y, z \in K_2$. Como $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$, pues $y \in K_1 \cap K_2$, $K_1 \cup K_2$ es un subcontinuo de K que contiene a x y a z. $K_1 \cup K_2$ debe ser propio pues de lo contrario K sería descomponible. Las clases de equivalencia de esta relación son las composantes de K, por lo tanto, las composantes de K son ajenas dos a dos. $\square$

Corolario 1.5.11. La hipótesis del continuo implica que un continuo métrico indescomponible posee c composantes.

Demostración. Sea K un continuo métrico indescomponible, por el teorema 1.5.9, K posee al menos c composantes y por el teorema 1.5.2, junto con el teorema 1.5.10., K posee a lo mas c composantes. $\square$

Definición 1.5.12. Un continuo es <u>irreducible</u> entre dos puntos, si no existe un subcontinuo propio que contenga a dichos puntos.

Teorema 1.5.13. Un continuo descomponible K no es irreducible entre cada dos de tres puntos dados.

Demostración. Sea $K = A \cup B$ unión de dos subcontinuos propios A y B, y sean a, b y c tres puntos de K. Al menos dos de ellos pertenecen a A (o a B), y entonces K no es irreducible entre dichos dos puntos. $\square$

Teorema 1.5.14. Un continuo métrico K es indescomponible si y sólo si existen tres puntos en él de modo que dicho continuo sea irreducible entre cada dos de ellos.

Demostración. Sea K un continuo métrico indescomponible. Por el teorema 1.5.9, podemos tomar tres puntos a, b y c en K de tal manera que dichos puntos estén en composantes distintas. Por el teorema 1.5.10., dichas composantes son ajenas dos a dos, por consiguiente, K es irreducible entre cada dos puntos del conjunto $\{a, b, c\}$. Recíprocamente, sean a, b y c tres puntos en K de tal modo que K sea irreducible entre cada dos de ellos. Por el teorema anterior, concluimos que K es indescomponible. $\square$

Definición 1.5.15. Un conjunto A en un espacio X, es un <u>conjunto frontera</u> si $\overline{X-A} = X$; es decir, $X \setminus A$ es denso en X.

Teorema 1.5.16. Cada continuo X que contenga una composante la cual sea un conjunto frontera, es indescomponible.

Demostración. Sea p un punto de X tal que su composante C es un conjunto frontera, es decir, $\overline{X-C} = X$. Si el continuo X es descomponible entonces

$$X = A \cup B, \quad A \neq X \neq B$$

donde A y B son subcontinuos de X. Supongamos que $p \in A$. Así $A \subset C$, en consecuencia $X-C \subset X-A \subset B$, y por lo tanto

$$X = \overline{X-C} \subset \overline{B} = B$$

es decir, $B = X$, lo cual contradice la desigualdad $B \neq X$. Por lo tanto, X es un continuo indescomponible. $\square$

1.6. La función conjunto T.

Teorema 1.6.1. [6] Sea X un continuo irreducible entre a y b. Entonces X no es la unión de dos subcontinuos propios de X, A y B tal que $a \in A \cap B$.

Teorema 1.6.2. [6] Sea X un continuo irreducible entre a y b, C un subcontinuo de X. Si $X-C$ no es conexo, entonces es la unión de dos conjuntos abiertos uno de los cuales contiene a a y el otro contiene a b.

Teorema 1.6.3. Sea X un continuo irreducible entre a y b, C un subcontinuo de X y $a \in \partial C$. Entonces C es un conjunto frontera, es decir, $\overline{X-C} = X$

Demostración. Por el teorema 1.6.2 tenemos que $X-C$ es conexo. Por lo tanto, si hacemos $A=C$ y $B=\overline{X-C}$, del teorema 1.6.1 se sigue que $\overline{X-C}=X$ $\square$

Lema 1.6.4. Si U es un abierto propio de un continuo X y C una componente de $\overline{U}$, entonces $C \cap \partial U \neq \emptyset$.

Demostración. Supongamos que $C \cap \partial U = \emptyset$ es decir, $C \subset U$. Ya que X es compacto y Hausdorff, C es casi-componente de $\overline{U}$. Para cada $p \in \partial U$ existe V_p abierto y cerrado de $\overline{U}$ tal que $C \subset V_p$ y $p \in X \setminus V_p$. Observemos que $X \setminus V_p$ es abierto y cerrado en $\overline{U}$ y que $\{X \setminus V_p\}_{p \in \partial U}$ es una cubierta abierta de ∂U y ya que esta frontera es compacta, existen $P_1, \ldots, P_n$ tal que $\partial U \subset \bigcup_{i=1}^{n} X - V_{p_i}$. $\bigcap_{i=1}^{n} V_{p_i}$ es un abierto y cerrado en $\overline{U}$, pero no contiene elementos de ∂U, es decir, $\bigcap_{i=1}^{n} V_{p_i}$ es un abierto y cerrado de X, diferente de X, lo cual es una contradicción, ya que X es conexo. □

Definición 1.6.5. La función conjunto T se define sobre un espacio X como sigue:

Para $A \subset X$

$$T(A) = \{x \in X \mid \text{no existe } U \text{ abierto o } C \text{ continuo tal que } x \in U \subset C \subset X - A\}$$

Teorema 1.6.6. Sea X un continuo. Entonces si C es un subcontinuo de X,

$T(C)$ es un continuo.

Demostración. Supongamos que existe q en $\overline{T(C)}-T(C)$, entonces existe U abierto y K subcontinuo de X tal que $q\in U\subset K\subset T-C$, además, $U\cap T(C)\neq\emptyset$. Sea $r\in U\cap T(C)$, entonces $r\in T(C)\cap(X-T(C))$. Esta contradicción demuestra que $T(C)$ es cerrado y en consecuencia que es compacto. $T(C)$ es Hausdorff ya que es un subconjunto de X.

Supongamos que $T(C)$ no es conexo, es decir, $T(C)=A\cup B$ con A y B cerrados, ajenos y no vacíos en X. Ya que X es compacto y Hausdorff, entonces es normal, por lo tanto, existen U y V abiertos y ajenos en X tal que $A\subset U$ y $B\subset V$. Supongamos que $C\subset A$. Para cada $p\in\partial V$, $p\notin T(C)$; es decir, existe U_p abierto y K_p continuo tal que $p\in U_p\subset K_p\subset X-C$. $\{U_p\}_{p\in\partial V}$ es una cubierta abierta de ∂V y ya que esta frontera es compacta, existen $p_1,\dots,p_n$ tal que $\partial V\subset\bigcup_{i=1}^{n}U_{p_i}$. Observemos que $K_{p_1},\dots,K_{p_n}$ son un número finito de continuos que no intersectan a C y que contienen a ∂V. Aplicando el lema 1.6.4, tenemos que toda componente de $\overline{V}$ intersecta a alguna K_{p_i}. Sean $K_1, K_2, \ldots, K_m$ las componentes de $K_{p_1} \cup K_{p_2} \cup \cdots \cup K_{p_n} \cup \overline{V}$. Supongamos que existe $q \in B$ y que $q \in K_i$ para alguna $i = 1, \ldots, m$, entonces existe un abierto $W \subset V$ tal que $q \in W$ y $W \cap K_j = \emptyset$ para $j \neq i$. Por consiguiente $q \in W \subset K_i \subset X - C$, es decir, $q \in X - T(C)$. Esta contradicción demuestra que $T(C)$ es conexo, y en consecuencia que es un continuo. $\square$

Definición 1.6.7. Sea X un espacio y $a, b \in X$. Una familia $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ de subconjuntos de X se llama <u>cadena simple</u> de a a b cuando A_1 (y solamente A_1) contiene a a y A_n (y solamente A_n) contiene a b, y $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i-j| \leq 1$

Teorema 1.6.8. Si a y b son puntos de un espacio conexo X y $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X, entonces existe una cadena simple de elementos de $\mathcal{U}$ de a a b.

Demostración. Sea S el conjunto de elementos p de X para los que existe una cadena simple de elementos de $\mathcal{U}$ de a a p.

Sea $q \in S$ y $U_1, \ldots, U_n$ una cadena simple de elementos de $\mathcal{U}$ de a a q, entonces dado un punto $x \in U_n$, $U_1, \ldots, U_n$ o $U_1, \ldots, U_{n-1}$ es una cadena simple de a a x (puede ocurrir que $q \in U_{n-1} \cap U_n$). Resulta que $x \in S$ y por lo tanto todo el conjunto U_n está contenido en S. Por lo tanto S es abierta. Supongamos que existe un punto $y \in \bar{S} - S$. Entonces existe un elemento W de $\mathcal{U}$ tal que $y \in W$. Puesto que $y \in \bar{S}$, $W \cap S \neq \emptyset$, sea $x \in W \cap S$, existe una cadena simple $U_1, \ldots, U_n$ de a a x, por lo cual la familia $U_1, U_2, \ldots, U_n, W$ contiene una cadena simple de a a y. Por consiguiente S es cerrado.

Como X es conexo, entonces $S = X$. ∎

Definición 1.6.9. Sea X un espacio y $A, B, C \subset X$. El conjunto C se dice que <u>corta débilmente al conjunto A del conjunto B</u>, si C intersecta a cada continuo que intersecte a A y a B.

Teorema 1.6.10. Sea X un espacio y $a, b, p \in X$, tal que p corta débilmente a de b, Si $T(p)$ no contiene a a y b, entonces $T(p)$ separa a de b.

Demostración. Supongamos que $T(p)$ no separa a de b. Sea C la componente en $X - T(p)$ tal que $a, b \in C$. Para cada punto x de C hay un subcontinuo M_x y un abierto O_x tal que $x \in O_x \subset M_x \subset X \setminus \{p\}$. La colección de tales abiertos forma una cubierta abierta de C y por el teorema 1.6.8. hay una cadena simple $O_{x_1}, \ldots, O_{x_n}$ con $a \in O_{x_1}$ y $b \in O_{x_n}$. Ya que cada O_{x_i} está contenida en un continuo que no contiene a p, se sigue que hay un continuo que contiene a a y b pero no contiene a p. Por lo tanto $T(p)$ separa a de b. $\square$

Teorema 1.6.11. Si Y es un continuo irreducible de a a b y $x \in Y$, entonces $a \in T(x)$, $b \in T(x)$ o $T(x)$ separa a de b. En el caso en que $T(x)$ separa a de b, $Y - T(x)$ tiene exactamente dos componentes A y B, donde $a \in A$, $b \in B$, y ambos $T(x) \cup A$ y $T(x) \cup B$ son subcontinuos propios de Y.

Demostración. Suponer $a \notin T(x)$ y

$b \notin T(x)$, ésto implica que $x \neq a$ y $x \neq b$, por lo cual x corta débilmente a de b y aplicando el teorema 1.6.10. tenemos que $T(x)$ separa a de b. Por lo tanto, la primera parte del teorema está probada. Supongamos $T(x)$ separa a de b, entonces $Y - T(x) = A \cup B$ con $a \in A$, $b \in B$, A y B abiertos y ajenos en Y. Por el teorema 1.5.5, $T(x) \cup A$ y $T(x) \cup B$ son subcontinuos propios de Y. Supongamos que A no es componente entonces existen C y D abiertos en Y tal que $A = C \cup D$ $C \neq \emptyset \neq D$ y $C \cap D = \emptyset$, es decir, $Y - T(C) = C \cup D \cup B$. Supongamos que $a \in D$ $C \cap (D \cup B) = \emptyset$ y C como $D \cup B$ son abiertos por lo tanto, por el teorema 1.5.5 $T(x) \cup (D \cup B)$ es un subcontinuo propio de Y que contiene a y b. Esta contradicción demuestra que A es componente, análogamente se demuestra que B es componente. $\square$

1.7. Ultrafiltros en $\mathbb{N}$.

Definición 1.7.1. Una familia no vacía Ω de subconjuntos no vacíos de $\mathbb{N}$, es un ultrafiltro en $\mathbb{N}$, si tiene las siguientes propiedades:

a) Si $E_1, E_2 \in \Omega$, entonces $E_1 \cap E_2 \in \Omega$

b) Ω es maximal con respecto a la propiedad a).

Si $n \in \mathbb{N}$ y si Ω consiste de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ que contienen a n, entonces Ω es un ultrafiltro en $\mathbb{N}$, y lo denotaremos por Ω^n; estos ultrafiltros son llamados <u>ultrafiltros fijos</u>. Todos los ultrafiltros en $\mathbb{N}$ que no son ultrafiltros fijos, son llamados <u>ultrafiltros libres</u>.

Teorema 1.7.2. Cada familia F de subconjuntos de $\mathbb{N}$ con la propiedad de la intersección finita puede ser aumentada a un ultrafiltro en $\mathbb{N}$.

Demostración. Sea F una familia de subconjuntos de $\mathbb{N}$ con la propiedad de la intersección finita. Sea H la colección de familias de subconjuntos no vacíos de $\mathbb{N}$ con las siguientes propiedades:

1) $F \subset G$ para toda $G \in H$

2) Si $G \in H$ y $E_1, E_2 \in G$, entonces $E_1 \cap E_2 \in G$

$H \neq \emptyset$, ya que F junto con las intersecciones finitas de sus elementos es un elemento de H.

La relación, $G_1 \leq G_2$ si $G_1 \subseteq G_2$, es un preorden en H. Consideremos una cadena $\{C_\mu\}_{\mu \in M}$ en H y sea $C = \bigcup_{\mu \in M} C_\mu$. Primero observamos que $C \in H$, por consiguiente C es una cota superior para $\{C_\mu\}_{\mu \in M}$. Así, aplicando el lema de Zorn 1.3.12. podemos concluir que existe un elemento maximal en H, este elemento es un ultrafiltro que contiene a F. $\square$

Teorema 1.7.3. Sea Ω un ultrafiltro en $\mathbb{N}$. Si $E_1 \in \Omega$ y $E_1 \subset E_2$, entonces $E_2 \in \Omega$.

Demostración. Sea $\Omega' = \Omega \cup \{E_2\} \cup \{E_2 \cap E \mid E \in \Omega\}$ sea $F_1, \ldots, F_n \in \Omega$, entonces $F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n \cap E_1 \neq \emptyset$ lo que implica que $F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap E_2 \neq \emptyset$ por consiguiente Ω' tiene la propiedad de la intersección finita, por lo cual puede ser aumentado a un ultrafiltro Ω^*. Tenemos que $\Omega \subset \Omega^*$, por lo cual $\Omega = \Omega^*$. Por lo tanto $E_2 \in \Omega$. $\square$

Teorema 1.7.4. Sea Ω un ultrafiltro en $\mathbb{N}$ y $E \subset \mathbb{N}$ tal que $E \cap F \neq \emptyset$ para toda $F \in \Omega$. Entonces $E \in \Omega$.

Demostración. Tenemos que $G = \{E \cap F \mid F \in \Omega\}$, tiene la propiedad de la intersección finita ya que si $F_1, \ldots, F_n \in \Omega$, entonces $F_1 \cap \cdots \cap F_n \in \Omega$ y por lo tanto $E \cap (F_1 \cap \cdots \cap F_n) \neq \emptyset$, por el teorema 1.7.2 puede ser aumentado a un ultrafiltro Ω' en $\mathbb{N}$. Aplicando el teorema anterior tenemos que $\Omega \subset \Omega'$ lo que implica que $\Omega = \Omega'$ y por lo tanto que $E \in \Omega$, ya que $E \in \Omega'$. $\square$

Teorema 1.7.5. Sea Ω una familia no vacía de subconjuntos no vacíos de $\mathbb{N}$, tal que si $E_1, E_2 \in \Omega$, entonces $E_1 \cap E_2 \in \Omega$. Entonces, Ω es un ultrafiltro si y sólo si para toda $E \subseteq \mathbb{N}$, $E \in \Omega$ o $\mathbb{N} - E \in \Omega$.

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $E \subset \mathbb{N}$. Si $E \notin \Omega$ por el teorema anterior hay un conjunto $F \in \Omega$ tal que $E \cap F = \emptyset$, en consecuencia $F \subset \mathbb{N} \setminus E$, y aplicando el teorema 1.7.3. tenemos que $\mathbb{N} - E \in \Omega$. $\Leftarrow$) Supongamos que existe una familia Ω' de subconjuntos no vacíos de $\mathbb{N}$, tal que si $H, K \in \Omega'$, entonces $H \cap K \in \Omega'$, de tal manera que $\Omega \subset \Omega'$. Supongamos que existe $E \in \Omega' - \Omega$, entonces $\mathbb{N} \setminus E \in \Omega$, lo cual implica que $\mathbb{N} - E \in \Omega'$, entonces $E \cap (\mathbb{N} - E) = \emptyset \in \Omega'$. Esta contradicción demuestra que $\Omega = \Omega'$. Por lo tanto Ω es un ultrafiltro en $\mathbb{N}$. $\square$

Teorema 1.7.6. Sea Ω un ultrafiltro libre en $\mathbb{N}$. Entonces Ω no contiene subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$.

Demostración. Supongamos que existe $E \in \Omega$ finito. Si $\{e\} \in \Omega$ para alguna $e \in E$, entonces $\Omega = \Omega^e$ y en este caso habríamos terminado. Si $\{e\} \notin \Omega$ para toda $e \in E$, entonces por el teorema 1.7.5, tendríamos que $\mathbb{N} - \{e\} \in \Omega$ para toda $e \in E$, y como:

$$\mathbb{N} \setminus E = \bigcap_{e \in E} (\mathbb{N} - \{e\}) \in \Omega$$

tendríamos una contradicción. $\square$

Sea: $F = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ es una función sobre}\}$

$N = \{\Omega \mid \Omega \text{ es un ultrafiltro en } \mathbb{N}\}$

$N^* = \{\Omega \mid \Omega \text{ es un ultrafiltro libre en } \mathbb{N}\}$

Teorema 1.7.7. Sea $f \in F$, $\Omega \in N$. Entonces $f(\Omega) = \{f(M) \mid M \in \Omega\} \in N$.

Demostración.

a) Por ser f función tenemos que $f(M) \neq \emptyset$ para toda $M \in \Omega$.

b) Sean $M, M' \in \Omega$, sea $L = f^{-1}(f(M) \cap f(M'))$ entonces $M \cap M' \subset L$ y $f(L) = f(M) \cap f(M')$ ya que f es sobre; lo cual implica que $L \in \Omega$ y ésto implica que $f(M) \cap f(M') \in f(\Omega)$.

c) Para toda $M \subset \mathbb{N}$, $M \in f(\Omega)$ o $\mathbb{N} - M \in f(\Omega)$. Sea $M \subset \mathbb{N}$ y supongamos que $M \notin f(\Omega)$. Entonces $f^{-1}(M) \notin \Omega$, por lo cual $\mathbb{N} - f^{-1}(M) \in \Omega$. De modo que $f(\mathbb{N} - f^{-1}(M)) = \mathbb{N} - M \in f(\Omega)$. Por lo tanto, aplicando el teorema 1.7.5, obtenemos que $f(\Omega) \in N$. $\square$

Definición 1.7.8. Sea $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función, π es una <u>permutación de $\mathbb{N}$</u> si es biyectiva.

Lema 1.7.9. Sean $\Omega \in N^*$, $f \in F$. Si existe $M \in \Omega$ tal que $f|M$ es uno a uno, entonces existe una permutación π de $\mathbb{N}$ tal que $\pi(\Omega) = f(\Omega)$.

Demostración. Ya que Ω es un ultrafiltro libre en $\mathbb{N}$, el teorema 1.7.6 implica que M es infinito. Supongamos $M = \{m_1, m_2, \dots\}$. Sabemos que $\{m_1, m_3, m_5, \dots\} \in \Omega$ o $\mathbb{N} - \{m_1, m_3, m_5, \dots\} \in \Omega$, es decir, $\{m_1, m_3, \dots\} \in \Omega$ o $\{m_2, m_4, m_6, \dots\} = (\mathbb{N} - \{m_1, m_3, \dots\}) \cap M \in \Omega$. De lo anterior podemos afirmar que existe $E \in \Omega$ tal que $E \subset M$, $\mathbb{N} - E$ es infinito y $\mathbb{N} - f(E)$ es infinito ($f|M$ es uno a uno). Por consiguiente existe una permutación π de $\mathbb{N}$ tal que $\pi|E = f|E$.

<u>Afirmación</u>. $f(\Omega) = \pi(\Omega)$

Demostración. Supongamos que existe $H \in \pi(\Omega) - f(\Omega)$. Entonces $\mathbb{N} - f^{-1}(H) \in \Omega$ y por lo que $E \cap (\mathbb{N} - f^{-1}(H)) \in \Omega$. De aquí se tiene que $\pi(E \cap (\mathbb{N} - f^{-1}(H))) = f(E \cap (\mathbb{N} - f^{-1}(H))) \subseteq \mathbb{N} \setminus H \in \pi(\Omega)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\pi(\Omega) \subset f(\Omega)$.

Analogamente $f(\Omega) \subset \pi(\Omega)$. $\square$

CAPITULO II

EJEMPLOS DE CONTINUOS INDESCOMPONIBLES METRICOS

2.1. Primer ejemplo

Definición 2.1.1. Dados dos puntos a y b en $\mathbb{R}^2$, una cadena simple de a a b es una familia $A_1, \ldots, A_n$ de discos cerrados con radios iguales tal que $a \in A_1$, $b \in A_n$ y $a \notin A_i$ si $i \neq 1$, $b \notin A_j$ si $j \neq n$ y además $A_i \cap A_j = \emptyset$ si y sólo si $|i-j| > 1$.

Sean $a, b, c \in [0,1] \times [0,1]$ (ver figura 1). Construyamos una familia de cadenas simples $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ donde $C_n = \{A_1^n, A_2^n, \ldots, A_{m_n}^n\}$ con las siguientes propiedades $C_{n+1} \subset C_n$ para toda $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ y el radio de A_i^n tienda a cero cuando n tienda a infinito.

Construcción.

C_1 de a a b tal que $c \in A_i^1$ para alguna i

C_2 de a a c tal que $b \in A_j^2$ para alguna j
C_3 de b a c tal que $a \in A_k^3$ para alguna k

En general
C_{3n+1} de a a b tal que $c \in A_i^{3n+1}$ para alguna i
C_{3n+2} de a a c tal que $b \in A_j^{3n+2}$ para alguna j
C_{3n+3} de b a c tal que $a \in A_k^{3n+3}$ para alguna k

Ya que $C_{n+1} \subset C_n$ para toda $n \in \mathbb{N}-\{0\}$ tenemos que $\bigcap_{n=0}^{\infty} C_{3n+1} = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_{3n+2} = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_{3n+3}$

Definimos $\bigcap_{n=0}^{\infty} C_{3n+1} = C$ y ya que C_n es un continuo para toda $n \in \mathbb{N}-\{0\}$, aplicando el teorema 1.5.3, obtenemos que C es un continuo.

Afirmación. C es un continuo irreducible entre a y c, entre b y c, y entre a y b.

Demostración. Demostraremos la afirmación para el caso a y b ya que los otros dos casos se demuestran de manera análoga. Sea K un continuo tal que $\{a,b\} \subset K \subset C$. Supongamos que existe un punto $p \in C-K$, entonces para alguna $N \in \mathbb{N}-\{0\}$ suficientemente grande, existe A_i^N tal que $p \in A_i^N$ y $A_i^N \cap K = \emptyset$. □

Sean $W = \bigcup_{s=1}^{i} A_s^N$, $W' = \bigcup_{t=i+1}^{N} A_t^N$.

Tenemos que $V = W \cap K$ y $V' = W' \cap K$ son cerrados en K. Además,

$$V \cup V' = (W \cap K) \cup (W' \cap K) = (W \cup W') \cap K = C_N \cap K = K$$

y

$$V \cap V' = (W \cap K) \cap (W' \cap K) = (W \cap W') \cap K = (A_i^N \cap A_{i+1}^N) \cap K = (K \cap A_i^N) \cap A_{i+1}^N = \emptyset \cap A_{i+1}^N = \emptyset$$

Ya que $a \in V$ y $b \in V'$, tenemos que K no es conexo, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $K = C$.

De acuerdo al teorema 1.5.14, C es un continuo indescomponible.

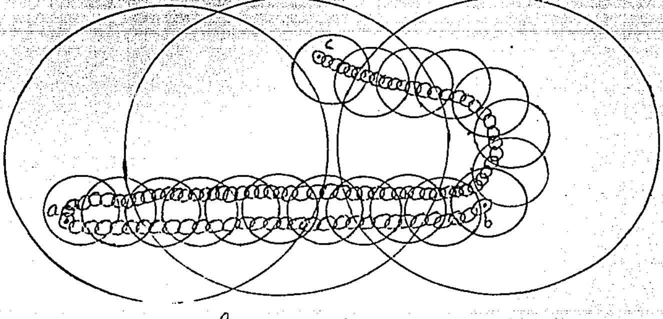


figura 1.

2.2. Segundo ejemplo. (B. Knaster)

Sea E_1 el segmento $[0,1]$. De el excluyamos al intervalo $(1/3, 2/3)$ y designemos por E_2 al conjunto cerrado que queda. Después, omitamos de E_2 los intervalos $(1/3^2, 2/3^2)$ y $(7/3^2, 8/3^2)$ y designemos por E_3 al conjunto cerrado que queda (compuesto por cuatro segmentos). En cada uno de estos cuatro segmentos, excluyamos al intervalo abierto central de longitud $1/3^3$, etc.

Continuando este proceso, obtendremos una sucesión decreciente de conjuntos cerrados, E_n. El subespacio $E=\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ de $[0,1]$, es llamado conjunto de Cantor

Usando al conjunto de Cantor definiremos al continuo de Knaster.

Sea C_n $(n \geq 1)$ el conjunto de puntos x de E tales que:

$$2/3^n \leq x \leq 1/3^{n-1}$$

Designemos por D_0 el subconjunto del semiplano $\{(x,y) \mid y \geq 0\}$ formado por las semicircunferencias que pasan por cada punto de E y que tienen por centro al punto $(\frac{1}{2}, 0)$. De manera análoga, sea D_n $(n \geq 1)$ el conjunto formado por las semicircunferencias del semiplano $\{(x,y) \mid y \leq 0\}$ que pasan por cada punto de C_n y que tienen por centro al punto $(\frac{5}{2 \cdot 3^n}, 0)$.

Sea $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$. Con el propósito de probar que B es un continuo indescomponible, consideremos la sucesión infinita $S_1, S_2, S_3, \ldots$ de las semicircunferencias contenidas en B y definidas por las siguientes condiciones:

a) S_1 une los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$

b) Para toda $n \geq 1$ $S_n \cap S_{n+1}$ es exactamente un punto

Sea $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$

Por un <u>punto</u> <u>extremo</u> del conjunto de Cantor, se entenderá un punto el cual es extremo de alguno de los intervalos de E_n para alguna $n \in \mathbb{N}$.

Para lograr nuestro propósito, debe-mos probar que S contiene a todos los puntos extremos del conjunto de Cantor. Se hará por inducción sobre las E_n's.

Por la construcción de E, sabemos que E_n contiene 2^n puntos extremos del conjunto de Cantor. Probaremos que estos puntos están contenidos en $\bigcup_{m=1}^{2^n-1} S_m$ con $(0,0)$ en S_1 y $\frac{1}{3^{n-1}}$ en S_{2^n-1}.

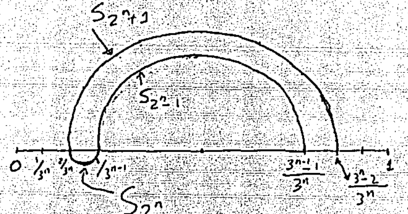
Primer paso. Para $n=1$, los puntos extremos de E_1 están contenidos en S_1.

Segundo paso. Supongamos que para $n>1$ los 2^n puntos extremos de E_n están contenidos en $\bigcup_{m=1}^{2^n-1} S_m$ con $(0,0)$ en S_1 y $1/3^{n-1}$ en S_{2^n-1}

Antes de iniciar el tercer paso, observemos que por la forma en que definimos D_n, si el extremo de un elemento de D_n es un extremo del conjunto de Cantor, entonces su otro extremo es otro extremo del conjunto de Cantor.

Tercer paso. E_{n+1} contiene 2^{n+1} puntos extremos. Como $\frac{1}{3^{n-1}} \in S_{2^n-1}$, entonces $2/3^n \in S_{2^n}$

$\frac{3^n-2}{3^n} \in S_{2^n+1}$ y el radio de S_{2^n+1} difiere del radio de S_{2^n-1} en $1/3^n$. (Ver la siguiente figura)



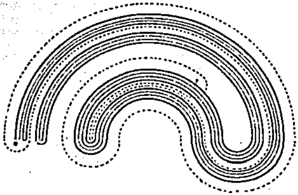
Así, el radio de S_{2^n+2} difiere del radio de S_{2^n-2} en $1/3^n$.

En general el radio de S_{2^n+t} difiere del radio de S_{2^n-t} en $1/3^n$. Como caso particular el radio de $S_{2^n+2^n-1}$ difiere del radio de S_1 en $1/3^n$. Por la observación hecha antes de iniciar este paso, tenemos que $1/3^n \in S_{2^{n+1}-1}$.

Hemos construido una línea "paralela" a la línea que tenemos por hipótesis de inducción, y por consiguiente tiene tantos puntos extremos como tal línea

Por consiguiente los 2^{n+1} puntos extremos de E_{n+1} están contenidos en $\bigcup_{n=1}^{2^{n+1}} S_m$

Por lo tanto todos los puntos extremos del conjunto de Cantor están contenidos en S. (Ver la siguiente figura).



Sea $J = S \cap E$. Sabemos que J es denso en E, es decir, $\overline{J} = E$ y de lo cual se puede deducir que $\overline{S} = B$, y esto prueba que B es conexo, y por lo tanto que es un continuo. Por otra parte, $\overline{E - J} = E$, lo cual implica que $\overline{B - S} = B$, lo cual nos indica que S es un conjunto frontera de B. Para probar que B es un continuo indescomponible, basta probar (por el teorema 1.5.16.) que S es una composante de B, lo cual se deduce rápidamente del siguiente lema.

Lema 2.2.1. Si K es un continuo sujeto a las condiciones:

$$K \subsetneq B, \quad K \cap S \neq \emptyset,$$

entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$K \subset S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n.$$

Demostración. Sea $q \in K \cap S$. El conjunto S es denso en B, la desigualdad $K \neq B$ implica la existencia de un punto $p \in S \setminus K$. Se puede elegir el punto p de manera que si A designa a la línea contenida en S con extremos $(0,0)$ y p. Entonces $q \in A$.

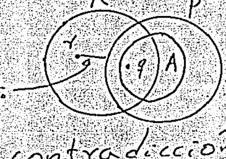
Probaremos que $K \subset A$.

Supongamos que existe $r \in K \setminus A$. Sea n_0 un número natural tal que la distancia de p a K, así como la de r a A, sean mayores a $1/3^{n_0}$. Por consiguiente:

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{2^{n_0}-1} S_i$$

Consideremos la banda P formada por todos los círculos con radio $1/3^{n_0+2}$ que tienen por centro un punto de A. (ver figura anterior). El borde de esta banda se compone de dos líneas "paralelas" a A

y de dos semicirconferencias que tienen
su centro en $(0,0)$ una y en p la otra.
Entre estas cuatro líneas, las tres prime-
ras son disjuntas de B, pues sus puntos
de intersección con el eje de las X's es-
tán, en virtud de la inclusión $A \subset \bigcup_{i=1}^{2^{n_0}-1} S_i$,
situados en los intervalos contiguos a E.
La cuarta línea es disjunta de K, pues
la distancia de p a K es mayor a $1/3^{n_0}$
la cual es mayor a $4/3^{n_0+2}$.
Así el borde entero de la banda P
es disjunta de K. Ahora bien, K es un
continuo, entonces $K \subset P$ o $K \cap P = \emptyset$,
contrariamente a las fórmulas $r \in K \setminus P$ y $q \in K \cap P$, las cuales son cla-
ras después de observar el siguiente
dibujo.



La contradicción anterior prueba que
$K \subset A$ $\square$

<u>Por lo tanto B es un continuo indes-
componible.</u>

CAPITULO III
LOS RESIDUOS ONDA SON INDESCOMPONIBLES

Definición 3.1. Un espacio X es conexo en pequeño en $p \in X$, si para cada vecindad abierta U de p, hay un conjunto abierto V tal que $p \in V \subset U$ y si $y \in V$, entonces hay un conexo C de U tal que $p, y \in C$.

Definición 3.2. Diremos que el par (Y, X) es una <u>onda de a a b</u> si Y es un continuo irreducible de a a b, si es conexo en pequeño y 1^{ro} numerable en b, y si $X = Y - \{b\}$. Al residuo $X^* = \beta(X) - X$ se le llamará <u>residuo onda</u>.

Lema 3.3. Si Y es un continuo irreducible de a a b y $W \subset Y$ es un continuo con $b \in \operatorname{int} W$, entonces $W - \{b\}$ es conexo.

Demostración. Supongamos que $W-\{b\}=$ $= M_0 \cup N_0$ con $M_0 \neq \emptyset \neq N_0$, M_0 y N_0 abiertos en W y $M_0 \cap N_0 = \emptyset$. Por el teorema 1.5.5, $M = M_0 \cup \{b\}$ y $N = N_0 \cup \{b\}$ son continuos. Ya que b está en la frontera de M y N, por el teorema 1.6.3, se tiene que M y N son densos en ninguna parte, así que $M \cup N =$ $= W$ es denso en ninguna parte también, una contradicción ya que $b \in \operatorname{int} W$. □

Teorema 3.4. Si (Y, X) es una onda de a a b, entonces $\beta(X) - X$ es un continuo.

Demostración. Ya que Y es conexo en pequeño y 1ro numerable en b, existe una colección numerable de continuos $\{N_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que para cada i, $b \in N_i$, $N_{i+1} \subset N_i$ y $\bigcap_{i=1}^{\infty} N_i = \{b\}$. Además

$$\beta(X) - X = \overline{N_j - \{b\}}^{\beta(X)} - [N_j - \{b\}] = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{N_i - \{b\}}^{\beta(X)}$$

para cada $j \in \mathbb{N}$.

Demostraremos la primera igualdad. Sea $i \in \mathbb{N}$. N_i es un continuo de Y, por lo tanto es cerrado en Y, por lo tanto $N_i \cap X = N_i - \{b\}$ es cerrado en X, por lo tanto $\overline{(N_i - \{b\})}^{\beta(X)} \cap X = N_i - \{b\}$, de aquí se sigue la contención $\overline{N_i - \{b\}}^{\beta(X)} - (N_i - \{b\}) \subseteq \beta(X) \setminus X$

Sea $p \in \beta(X) - X$. Entonces $p \notin N_i - \{b\}$. Tenemos que $\beta(X) = \overline{X}^{\beta(X)} = \overline{N_i - \{b\}}^{\beta(X)} \cup \overline{X \setminus (N_i - \{b\})}^{\beta(X)}$. Si $p \notin \overline{N_i - \{b\}}^{\beta(X)}$ entonces $p \in \overline{X - N_i}^{\beta(X)} \subset$ $\subset \overline{X - \operatorname{int} N_i}^{\beta(X)}$. Por otra parte, $Y - \operatorname{Int} N_i =$ $= X - \operatorname{int} N_i$, así que, $X - \operatorname{int} N_i$ es compacto, es decir $\overline{X - \operatorname{int} N_i}^{\beta(X)} = X - \operatorname{int} N_i$. Esto implica que $p \in X$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $p \in \overline{N_i - \{b\}}^{\beta(X)}$

Ahora probaremos la segunda igualdad. Sea $i \in \mathbb{N}$ y $p \in \overline{N_i - \{b\}}^{\beta(X)} - N_i - \{b\}$. De la primera igualdad podemos deducir que $p \in \overline{N_n - \{b\}}^{\beta(X)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ lo cual implica que $p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{N_n - \{b\}}^{\beta(X)}$.

Sea $p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{N_n - \{b\}}^{\beta(X)}$. Entonces $p \in \overline{N_n - \{b\}}^{\beta(X)}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $p \in N_i - \{b\}$, entonces $p \in X$. Por otra parte, $\bigcap_{j=1}^{\infty} N_j = \{b\}$ implica que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $p \notin N_m$, pero $p \in \overline{N_m - \{b\}}^{\beta(X)} \cap X = N_m$, una contradicción. Por lo tanto $p \in \overline{N_i - \{b\}}^{\beta(X)} - (N_i - \{b\})$.

De las dos igualdades y ya que

$N_i - \{b\}$ es conexo, por el teorema 3.3.1. se tiene que $\beta(X) - X$ es una intersección de una colección monótona de continuos y por el teorema 1.5.3, tenemos que $\beta(X) \setminus X$ es un continuo. $\square$

Teorema 3.5. Sea X un espacio compacto y Hausdorff, $b \in X$, y supongamos que X es 1^{ro} numerable en b. Si $\{b\}$ es una componente de X y $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión en $X - \{b\}$ que converge a b. Entonces existen dos conjuntos cerrados A y B en X tal que $X = A \cup B$, $A \cap B = \{b\}$ y ambos A y B contienen una subsucesión de $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Demostración. Sea $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base local de X en b. Sea $N_1 = X$ y $b_{(i,1)} \in \{b_i\}_{i=1}^{\infty}$, entonces existe $W_{(n,1)} \in \{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $b \in W_{(n,1)} \subset N_1 - \{b_{(i,1)}\}$, entonces por el teorema 1.1.7. existe N_2 abierto y cerrado en X tal que $b \in N_2 \subset W_{(n-1)}$. Sabemos que existe $b_{(i,2)} \in \{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $b_{(i,2)} \in N_2$, entonces existe $W_{(n,2)} \in \{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $b \in W_{(n,2)} \subset N_2 - \{b_{(i,2)}\}$. Aplicando otra vez el teorema 1.1.7. tenemos que existe N_3

abierto y cerrado en X tal que $b \in N_3 \subset U_{(n,2)}$.
Continuando este procedimiento, obtenemos $\{N_i\}_{i=1}^{\infty}$, la cual resulta ser una base local numerable en X de b, tal que N_j es abierto y cerrado para toda $j \in \mathbb{N}$, $N_{j+1} \subset N_j$, $N_1 = X$ y además $\{N_j - N_{j+1}\} \cap \{b_i\}_{i=1}^{\infty} \neq \emptyset$.

Los conjuntos

$$A = \{b\} \cup \{\cup_{i=1}^{\infty} (N_{2i-1} - N_{2i})\}$$

$$B = \{b\} \cup \{\cup_{i=1}^{\infty} (N_{2i} - N_{2i+1})\}$$

tienen las propiedades deseadas. □

Teorema 3.6. Si (Y, X) es una onda de a a b y W un subcontinuo con mas de dos puntos, que contiene a b, entonces $b \in \operatorname{int} W$.

Demostración. Sea $p \in W$, $p \neq b$ y $T(p)$ como se definió en 1.6.5. Ya que Y es conexo en pequeño en b, tenemos que $b \notin T(p)$, por consiguiente por el teorema 1.6.11. $a \in T(p)$ o $Y - T(p) = A \cup B$ con A y B abiertos ajenos y $a \in A$, $b \in B$. Supongamos que $b \notin \operatorname{int} W$. Entonces existe V abierto tal que $b \in V \subset Y - T(p)$ y $V \cap (Y \setminus W) \neq \emptyset$. Sea $q \in V \cap (Y - W)$, es decir, $q \notin T(p) \cup W$. Si $a \in T(P)$, $T(P) \cup W$ es un subcontinuo propio que contiene a a y a b. Si $a \notin T(p)$, entonces por el teorema 1.6.11. $T(p) \cup A$ es un subcontinuo propio que contiene a a. Como $b \notin \operatorname{int} W$ y $b \notin T(p) \cup A$, existe U abierto tal que $b \in U \subset X \setminus (T(p) \cup A)$ y $U \cap (Y \setminus W) \neq \emptyset$. Si $\gamma \in U \cap (Y \setminus W)$, entonces $\gamma \notin T(p) \cup A \cup W$ y $T(p) \cup A \cup W$ sería un continuo propio que contiene a a y b. Esta contradicción demuestra que $\underline{b \in \operatorname{int} W}$ $\square$

Corolario 3.7. Si (Y, X) es una onda de a a b y M es un cerrado de Y con $b \in M$ y $b \notin \operatorname{int} M$, entonces $\{b\}$ es una componente de M.

Demostración. Sea C la componente de $b \in M$, supongamos que existe p en C diferente de b, por el teorema anterior $b \in \operatorname{int} C \subset \operatorname{int} M$, contradicción $\square$

Teorema 3.8. Si (Y, X) es una onda de a a b, entonces el residuo onda $X^* = \beta(X) \setminus X$ es un continuo indescomponible.

Demostración. Por el teorema 3.4, X^* es un continuo. Supongamos que hay un subcontinuo propio F de X^* el cual contiene un punto interior q, con respecto a X^*. Sea $p \in X^* \setminus F$. Por regularidad en $\beta(X)$ tenemos que hay conjuntos abiertos U y V en $\beta(X)$ tal que $\overline{U} \cap \overline{V} = \overline{U} \cap (X^* - \operatorname{int} F) = \overline{V} \cap F = \emptyset$ con $p \in V$ y $q \in U$. Entonces $X \cap V$ y $X \cap U$ son abiertos de X, y en consecuencia de Y, ya que $X = Y - \{b\}$ es abierto en Y. Sea $\{N_i\}_{i=1}^{\infty}$ como en la demostración del teorema 3.4. Ya que $q \in \beta(X) - X$, $U \cap N_i \neq \emptyset$ para toda $i \in \mathbb{N}$, y de aquí $U \cap X \cap N_i \neq \emptyset$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Por consiguiente $b \in \overline{U \cap X}$ y ya que Y es 1ro numerable en b, tenemos que existe una sucesión $\{b_i\}$ de puntos en $U \cap X$ que converge a b en Y.

Por el corolario 3.7 $\{b\}$ es una componente de $Y - (V \cap X)$, y $\{b_i\}$ es una sucesión en $(Y \setminus V) - \{b\}$ que converge a b. Por el teorema 3.5 existen cerrados en Y A_0 y B_0 tal que $A_0 \cup B_0 = Y - V$, $A_0 \cap B_0 = \{b\}$, y A_0 y B_0 contienen ambos una subsucesión de $\{b_i\}$. Sean $A = A_0 \cap X$ y $B = B_0 \cap X$; A y B son subconjuntos cerrados y ajenos en X, y ya que X es normal (teorema 1.2.9), el teorema 1.4.10 nos garantiza que $\overline{A}^{\beta(\alpha)} \cap \overline{B}^{\beta(\alpha)} = \emptyset$. Ahora, ya que A y B contienen subsucesiones de $\{b_i\}$ tenemos que $\overline{A}^{\beta(\alpha)}$ y $\overline{B}^{\beta(\alpha)}$ contienen puntos de $\overline{U}^{\beta(\alpha)} \cap X^*$; estos puntos están en F ya que $\overline{U} \cap (X^* - \operatorname{int} F) = \emptyset$, es decir $F \cap \overline{A}^{\beta(\alpha)} \neq \emptyset \neq F \cap \overline{B}^{\beta(\alpha)}$. Sea $x \in F$, por la igualdad $\overline{V}^{\beta(\alpha)} \cap F = \emptyset$, tenemos que $x \notin \overline{V}^{\beta(\alpha)}$, es decir, $x \in \overline{Y - V}^{\beta(\alpha)} = \overline{A_0 \cup B_0}^{\beta(\alpha)} = \overline{A_0}^{\beta(\alpha)} \cup \overline{B_0}^{\beta(\alpha)}$.

Por consiguiente:

$$F = (F \cap \overline{A}^{\beta(\alpha)}) \cup (F \cap \overline{B}^{\beta(\alpha)})$$

lo cual nos demuestra que F no es continuo

Terminamos aplicando el teorema 1.5.6. $\square$

Corolario 3.9. Sea $X = [0,1)$. Entonces $X^* = \beta([0,1)) - [0,1)$ es un continuo indescomponible.

Demostración: Sea $Y = [0,1]$. Entonces (Y, X) es una onda de 0 a 1. $\square$

CAPITULO IV

COMPOSANTES DE UN CONTINUO INDESCOMPONIBLE NO METRICO

Sea $A=[1,\infty)$. En este capítulo consideremos $A^*=\beta(A)\setminus A$, donde $\beta(A)$ denota la compactación de Stone-Čech de A. Si X es un espacio compacto y Hausdorff, y $f: A\to X$ es una función continua, $\bar{f}$ denotará la extensión de f a $\beta(A)$, que nos garantiza el teorema 1.4.7.

A^* es un residuo onda, es decir, es un continuo indescomponible (teorema 3.8). Sin embargo, esta afirmación, es interesante demostrarla otra vez ya que A^* es un caso particular de residuo onda, con el cual nos conviene estar familiarizados, ya que contaremos sus composantes.

Para probar que A^* es un continuo

demostraremos el siguiente lema.

Lema 4.1. Sea $A_n = [n, \infty)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces

i) $A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$

ii) $\overline{A_n}$ es un continuo para toda $n \in \mathbb{N}$.

Demostración de i). Para toda $x \in A$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin [n, \infty) = A_n$, es decir $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, en consecuencia $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \subseteq A^*$.

Inversamente, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que
$$\beta(A) = \overline{[1, n]} \cup \overline{[n, \infty)}$$
$$= [1, n] \cup \overline{[n, \infty)},$$
por lo que $A^* \subseteq \overline{A_n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Así, $A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$ $\square$

Demostración de ii). Ya que $\overline{A_n}$ es un cerrado en $\beta(A)$, $\overline{A_n}$ es compacto y Hausdorff. La conexidad de $\overline{A_n}$ se sigue de la de A_n, para cada $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Teorema 4.2. A^* es un continuo.

Demostración. Observemos que $\overline{A_1} \supset \overline{A_2} \supset \overline{A_3}$

$\overline{A_3} \supset \overline{A_4} \supset \dots$ lo cual, por el lema anterior y el teorema 1.5.3, nos demuestra que A^* es un continuo. $\square$

Teorema 4.3. A^* es un continuo indescomponible.

Demostración. Supongamos que X y Y son subconjuntos cerrados propios de A^* y $A^* = X \cup Y$. Es suficiente demostrar que X no es conexo. Sea $x \in A^* \setminus Y$ y $y \in A^* \setminus X$. Como $\beta(A)$ es compacto y Hausdorff, entonces es normal, y entonces existen conjuntos abiertos U y V en $\beta(A)$ tal que:

1) $x \in U$, $y \in V$
2) $\overline{U} \cap \overline{V} = \overline{U} \cap Y = \overline{V} \cap X = \emptyset$

Observación. Ya que $A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$, $U \cap A$ y $V \cap A$ son no acotados.

Tomemos sucesiones $\langle p_i \rangle_{i=1}^{\infty}$, $\langle q_i \rangle_{i=1}^{\infty}$ y $\langle r_i \rangle_{i=1}^{\infty}$ de A como sigue:

Sea $p_1 \in U \cap A$, tomemos $q_1 > p_1$ tal que $q_1 \in V \cap A$. Tomemos $r_1 > q_1$ tal que el intervalo $(q_1, r_1) \subset V$. Esto es posible ya que V es abierto en $\beta(A)$ y por lo tanto q_1 está en algún intervalo abierto en V.

Procediendo inductivamente, supongamos que p_k, q_k, y r_k ya los escogimos para $k<n$ y satisfacen que:

1) $p_k \in U \cap A$
2) El intervalo (q_k, r_k) esta contenido en V.
3) $p_k < q_k < r_k$, y si $k<n-1$, entonces $r_k < p_{k+1}$.

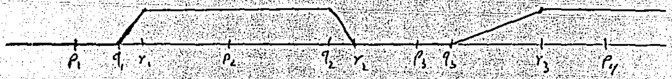
Entonces ya que $U \cap A$ es no acotado es posible escoger $p_n > r_{n-1}$ tal que $p_n \in U$. Ya que $V \cap A$ es no acotado, existe un punto $q_n > p_n$ tal que $q_n \in V \cap A$. Ya que V es abierto en $\beta(A)$, r_n puede ser elegido mas grande que q_n tal que $(q_n, r_n) \subset V$.

Las sucesiones $\langle p_i \rangle_{i=1}^{\infty}$, $\langle q_i \rangle_{i=1}^{\infty}$, $\langle r_i \rangle_{i=1}^{\infty}$ no tienen un supremo común t, ya que si esto pasa entonces $t \in \overline{V} \cap \overline{U}$, una contradicción. Por lo tanto, estas sucesiones no son acotadas.

Sea $I=[0,1]$ y definamos $f: A \to I$ (Ver la siguiente figura) como sigue:

$$f(t)=\begin{cases} 0 & \text{si } t \leq q_1 \\ 0 & \text{si } t \in [r_{k-1}, q_k] \text{ para } k \text{ impar} \\ 1 & \text{si } t \in [r_{k-1}, q_k] \text{ para } k \text{ par} \end{cases}$$

Podemos extender linealmente a f a cada uno de los intervalos $[q_k, r_k]$.



Ya que f es continua en A, $\bar{f}$ es una función continua y $\bar{f}^{-1}(0)$ es un subconjunto cerrado de $\beta(A)$ que contiene a $\{p_{2k+1}\}_{k=0}^{\infty}$. Por lo tanto $\bar{f}^{-1}(0)$ intersecta a A^*. Pero cualquier punto límite de $\{p_{2k+1}\}_{k=0}^{\infty}$ está en $\overline{U}$ y por lo tanto no está en Y. Así que $\bar{f}^{-1}(0)$ intersecta a X, es decir, $0 \in \bar{f}(X)$. Análogamente $1 \in \bar{f}(X)$. Supongamos ahora que $a \in A^*$ y $\bar{f}(a) \in (0,1)$. Tenemos que:

$$f^{-1}((0,1)) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (q_k, r_k) \subseteq V$$

De esto se sigue que $a \in \overline{V}$. De lo cual deducimos que $a \notin X$ y por consiguiente $\bar{f}(X) = \{0,1\}$, así que X no puede ser conexo. Así completamos la prueba del teorema. □

Teorema 4.4. $|A^*| = 2^c$

Demostración. De acuerdo al teorema 1.4.12., la cerradura $\overline{\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ en $\beta(A)$ es homeomorfa a $\beta(\mathbb{N})$. Por lo tanto, como $\beta(\mathbb{N})$ tiene cardinalidad 2^c (teorema 1.4.11.) Tenemos que $\beta(A)$ tiene al menos 2^c elementos, lo cual nos indica que $A^* = \beta(A) \setminus A$ tiene al menos 2^c elementos. Por otro lado, como A es separable y completamente regular, éste encaja sobre I^c (Ver el teorema 1.4.5). Así que $\beta(A)$ tiene a lo mas 2^c elementos. □

Este teorema junto con el teorema 1.5.2, nos garantizan el siguiente corolario.

Corolario 4.5. A^* no es métrico.

Recordemos que:

$F = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f$ es una función sobre$\}$

$N = \{\Omega \mid \Omega$ es un ultrafiltro en $\mathbb{N}\}$

$N^* = \{\Omega \mid \Omega$ es un ultrafiltro libre en $\mathbb{N}\}$

Antes de iniciar la demostración del siguiente lema, hagamos la siguiente convención. Si $M = \{m_1, m_2, m_3, \ldots\}$ es un subconjunto de $\mathbb{N}$, entonces $i < j$ implicará que $m_i < m_j$.

Lema 4.6. La hipótesis del continuo implica que hay un subconjunto G de N^* de cardinalidad 2^c tal que si Ω y Θ pertenecen a G, f a F y $f(\Omega)$ a N^*, entonces $f(\Omega) \neq f(\Theta)$.

Demostración. La hipótesis del continuo implica que $|F| = c$, por lo tanto, podemos indexar al conjunto F de la siguiente manera, $F = \{f_\alpha\}_{\alpha \in \omega_1}$. Supongamos que f_0 es la identidad en $\mathbb{N}$. Para cada $0 < \alpha \leq \omega_1$, denotemos $2^\alpha = \{g : \alpha \to \{0,1\}$ $\mid g$ es una función$\}$.

Aplicando inducción transfinita, construiremos, para cada $0<\alpha<\omega_1$ y para cada $g\in 2^{\alpha}$ un subconjunto infinito $M(\alpha,g)$ de $\mathbb{N}$, con las siguientes propiedades:

a) Si $0<\alpha_1\leq\alpha_2\leq\alpha<\omega_1$ y $g\in 2^{\omega_1}$, entonces $M(\alpha_2, g|\alpha_2)\setminus M(\alpha_1, g|\alpha_1)$ es vacío o finito.

b) Si $0\leq\beta<\alpha<\omega_1$, entonces $f_\beta(M(\beta+1, g|\beta+1))$ es finito o $f_\beta|M(\beta+1, g|\beta+1)$ es uno a uno.

c) Si $g,h\in 2^{\alpha+1}$ son tales que $g|\alpha=h|\alpha$ y $g(\alpha)\neq h(\alpha)$, entonces $M(\alpha+1, g|\alpha+1)\cap M(\alpha+1, h|\alpha+1)=\emptyset$.

Primer paso. Sea $\alpha=1$, $2^1=\{g_1,g_2\}$ donde $g_1,g_2:\{0\}\to\{0,1\}$, $g_1(0)=0$ y $g_2(0)=1$.
Elegimos:

$M(1,g_1)=\{n\in\mathbb{N} \mid n \text{ es par}\}$

$M(1,g_2)=\{n\in\mathbb{N} \mid n \text{ es impar}\}$

La propiedad a) se cumple claramente, la propiedad b) se cumple ya que f_0 es la identidad en $\mathbb{N}$, y la propiedad c) se cumple por vacuidad.

Segundo paso. Aquí vamos a hacer el

paso inductivo para un ordinal con antecesor. Supongamos que $0 < \alpha < \omega_1$, $g \in 2^{\alpha+1}$ y que $M(\alpha, g|\alpha)$ ha sido construido con las propiedades a), b) y c. Ya que f_α es una función sobre, entonces existe un subconjunto infinito $M = \{m_1, m_2, m_3, \dots\}$ de $M(\alpha, g|\alpha)$ tal que $f_\alpha(M)$ es finito o f_α/M es uno a uno. Si $g(\alpha) = 0$, entonces $M(\alpha+1, g) = \{m_2, m_4, m_6, \dots\}$, si $g(\alpha) = 1$, entonces $M(\alpha+1, g) = \{m_3, m_5, m_7, \dots\}$. Observemos que en $M(\alpha+1, g)$ no aparece el primer elemento de $M(\alpha, g|\alpha)$. Ya que $M(\alpha+1, g) \subset M(\alpha, g|\alpha)$, se cumple la propiedad a), las propiedades b) y c) se cumplen por la forma en que se construyó $M(\alpha+1, g)$.

<u>Tercer paso</u>. Finalmente, vamos a hacer el paso inductivo para un ordinal límite α. Fijamos una sucesión $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots$ tal que α es el límite de esta sucesión. Sea $g \in 2^\alpha$, por hipótesis de inducción, para cada $\alpha' < \alpha$, $M(\alpha', g|\alpha')$ ya ha sido construido y tiene las propiedades a), b) y c).

Elegimos un elemento $x_1 \in M(\alpha_1, g|\alpha_1)$. En general, para $n \in \mathbb{N}$, $M(\alpha_n, g|\alpha_n) \setminus (M(\alpha_1, g|\alpha_1) \cap \dots \cap M(\alpha_{n-1}, g|\alpha_{n-1}) \subset (M(\alpha_n, g|\alpha_n) \setminus M(\alpha_1, g|\alpha_1) \cup \dots \cup$

$(M(\alpha_n, g|\alpha_n) \setminus M(\alpha_{n-1}, g|\alpha_{n-1}))$ que es un conjunto finito por la propiedad a). Así que $M(\alpha_1, g|\alpha_1) \cap \dots \cap M(\alpha_n, g|\alpha_n)$ es infinito. Por tanto, podemos elegir un elemento $x_n \in M(\alpha_1, g|\alpha_1) \cap \dots \cap M(\alpha_n, g|\alpha_n) \setminus \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$.

Para $0 < \beta < \alpha$ existe α_n tal que $\beta < \alpha_n$ y $M(\alpha, g) \setminus M(\alpha_n, g|\alpha_n)$ es finito lo que implica que $M(\alpha, g) - M(\beta, g|\beta)$ es finito, lo cual prueba la propiedad a). Las propiedades b) y c) se cumplen claramente.

Para cada $g \in 2^{\omega_1}$, elegimos un Ω_g en N^* tal que para toda $0 < \alpha < \omega_1$, $M(\alpha, g|\alpha)$ es un elemento de Ω_g, ésto es posible ya que el conjunto $\Omega = \{M(\alpha, g|\alpha) \mid 0 < \alpha < \omega_1\}$ tiene la propiedad de la intersección finita y por el teorema 1.7.2 puede extenderse a un ultrafiltro Ω_g en $\mathbb{N}$, Ω_g resulta ser un ultrafiltro libre en $\mathbb{N}$ ya que de lo contrario $\Omega_g = \Omega^n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, lo cual implicaría que $n \in M(\alpha, g|\alpha)$ para cada $0 < \alpha < \omega_1$ y ésto sería una contradicción (recordemos que en $M(\alpha+1, g|\alpha+1)$ no está el primer elemento de $M(\alpha, g|\alpha)$ ya que para $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande $n \notin M(m, g|m)$.

Supongamos que $g \in 2^{\omega_1}$ y $f_\alpha \in F$. Entonces $f_\alpha(M(\alpha+1, g|\alpha+1))$ es finito o $f_\alpha | M(\alpha+1, g|\alpha+1)$ es uno a uno. En el primer caso $f_\alpha(\Omega_g) \notin N^*$ (teorema 1.7.6) y en el segundo caso, existe una permutación π de $\mathbb{N}$ tal que $f_\alpha(\Omega_g) = \pi(\Omega_g)$ (Teorema 1.7.9). Hay c permutaciones de $\mathbb{N}$ y la hipótesis del continuo implica que 2^{ω_1} tiene cardinalidad 2^c. $g \neq g'$ en 2^{ω_1} implica que $\Omega_g \neq \Omega_{g'}$, ya que hay una $\alpha \in \omega_1$ mínima tal que $g(\alpha) \neq g'(\alpha)$ y por la propiedad c) $M(\alpha+1, g|\alpha+1) \cap M(\alpha+1, g'|\alpha+1) = \emptyset$. Por consiguiente, $|\{\Omega_g | g \in 2^{\omega_1}\}| = 2^c$.

En $\{\Omega_g | g \in 2^{\omega_1}\}$ definimos una relación de equivalencia $\sim$ como sigue: $\Omega_g \sim \Omega_{g'}$ si existe una permutación π en $\mathbb{N}$ tal que $\pi(\Omega_g) = \Omega_{g'}$. Tomamos un elemento de cada clase y obtenemos un subconjunto G de $\{\Omega_g | g \in 2^{\omega_1}\}$ de cardinalidad 2^c tal que, si Ω_g y $\Omega_{g'}$ son elementos distintos de G, entonces no existe permutación π de $\mathbb{N}$ tal que $\pi(\Omega_g) = \Omega_{g'}$.

Sea $f\in F$, $\Omega, \Theta \in G$ y $f(\Omega)\in N^*$. Si $f(\Omega)=f(\Theta)$, entonces existen permutaciones π y π_1 de $\mathbb{N}$ tal que $f(\Omega)=\pi(\Omega)=f(\Theta)=\pi_1(\Theta)$, lo cual implica que $\pi(\Omega)=\pi_1(\Theta)$, entonces $\pi_1^{-1}\circ\pi(\Omega)=\Theta$ y ésto es una contradicción ya que $\pi^{-1}\circ\pi$ es una permutación de $\mathbb{N}$. Por lo tanto, $f(\Omega)\neq f(\Theta)$. $\square$

Teorema 4.7. La hipótesis del continuo implica que hay 2^c composantes de A^*.

Demostración. Sea G como en el lema anterior. Para cada $\Omega\in G$, definimos $B(\Omega)=\cap\{\bar{M}\mid M\in\Omega\}$, la cerradura es tomada en $\beta(A)$.

La demostración de este teorema la dividiremos en varias afirmaciones.

Afirmación 1. $B(\Omega)\in A^*$.

Demostración. Como Ω tiene la propiedad de la intersección finita y $\beta(A)$ es compacto, entonces $B(\Omega)\neq\emptyset$. Supongamos que $B(\Omega)$ tiene al menos dos elementos x y y, entonces como $\beta(A)$ es compacto y Hausdorff, existen U y V abiertos en $\beta(A)$ tal que $x\in U$, $y\in V$ y $\overline{V}\cap\overline{U}=\emptyset$. Como Ω es ultrafiltro en $\mathbb{N}$, entonces $V\cap\mathbb{N}\in\Omega$ o $\mathbb{N}-(V\cap\mathbb{N})\in\Omega$. Supongamos que $V\cap\mathbb{N}\in\Omega$ entonces $x,y\in\overline{V\cap\mathbb{N}}$, lo cual implica que $x,y\in\overline{V}$ y ésto es una contradicción, por otro lado, si $\mathbb{N}-(V\cap\mathbb{N})\in\Omega$, entonces $x,y\in\overline{\mathbb{N}-(V\cap\mathbb{N})}=\overline{\mathbb{N}-V}\subset\overline{V^c}=V^c$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $B(\Omega)$ consta de un solo punto. Para no complicar la notación llamemos a este punto $B(\Omega)$.

Sabemos que $C_n=\{n,n+1,n+2,\ldots\}\in\Omega$ para toda $n\in\mathbb{N}$ y además que $C_n\subset A_n$, entonces $\overline{C_n}\subset\overline{A_n}$, es decir, $\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{C_n}\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{A_n}=A^*$ (Ver el lema 4.1) y como $B(\Omega)\in\overline{C_n}$ para toda $n\in\mathbb{N}$, entonces $B(\Omega)\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{C_n}$, por lo cual $B(\Omega)\in A^*$.

Ahora, sean Ω y Θ elementos de G distintos. Probaremos que $B(\Omega)$ y $B(\Theta)$ no pertenecen a una misma composante de A^*, lo cual nos probaría que A^* tiene al menos 2^c composantes. Puesto que por el teorema 1.5.10. composantes distintas de A^* son ajenas dos a dos y la cardinalidad de A^* es 2^c, tendríamos que A^* tiene a lo más 2^c composantes. Por lo anterior tendríamos que A^* tiene 2^c composantes.

Supongamos que hay un subcontinuo propio K de A^* que contiene a $B(\Omega)$ y a $B(\Theta)$. Entonces hay un punto p en $A^* \setminus K$, como K es compacto y $\beta(A)$ es Hausdorff, entonces K es cerrado en $\beta(A)$, por lo cual existen abiertos U y V en $\beta(A)$ tal que:

$$p \in U \subset \overline{U} \subset V \subset \overline{V} \subset \beta(A) \setminus K.$$

De lo anterior, es claro que $B(\Omega), B(\Theta) \in \beta(A) \setminus \overline{V}$.

<u>Afirmación 2</u>. Existen $M \in \Omega$ y $L \in \Theta$ tal que $n \in M \cup L$ implica $n \notin V$.

Demostración. Supongamos que para toda $M \in \Omega$ existe $n \in M$ tal que $n \in V$, entonces $V \cap \mathbb{N} \in \Omega$, lo cual implica que $B(\Omega) \in \overline{V \cap \mathbb{N}}$, es decir, $B(\Omega) \in \overline{V}$, lo cual es una contradicción, por consiguiente existe $M \in \Omega$ tal que $n \in M$ implica $n \notin V$. Análogamente existe $L \in \Omega$ tal que $L \cap V = \emptyset$.

Denotemos por $I_1, I_2, \ldots I_n, \ldots$ a las componentes de $A \setminus \overline{U}$ las cuales intersectan a $\mathbb{N} \setminus V$. Ya que A es localmente conexo, cada componente I_n es abierto en A (teorema 1.1.3.). Notemos que $\partial I_n \subset \overline{U}$

Afirmación 3. Existe un número infinito de componentes de $A \setminus \overline{U}$.

Demostración. Tenemos que $\overline{U} \subset V$ y por la afirmación 2. tenemos que $\mathbb{N} \setminus V$ es infinito lo que implica que $\mathbb{N} - \overline{U}$ es infinito. Supongamos que existe un numero finito $I_1, I_2, \ldots, I_m$ de componentes. Esto implica que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_n = \emptyset$. Sabemos que $p \in A^* \subset \overline{A_n}$ lo cual nos dice que $U \cap A_n \neq \emptyset$, esta contradicción nos demuestra la afirmación 3.

Sea $f \in F$ tal que $f(n) = i$ si $n \in I_i$
$f(n) = n$ si $n \notin I_i$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

Afirmación 4. $f(\Omega) \in \mathbb{N}^*$

Demostración. Supongamos que $f(\Omega) \notin N^*$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$\{n\} \in f(\Omega)$, es decir, existe $M \in \Omega$ tal que $f(M) = \{n\}$, lo cual implica que M es finito, y ésto es una contradicción ya que $\Omega \in N^*$ (teorema 1.7.6)

Así por definición de G, $f(\Omega) \neq f(\Theta)$, lo cual implica que existe M' en Ω y L' en Θ tal que $f(M') \cap f(L') = \emptyset$.

Sea:

$$X = \bigcup\{I_i : i \in f(M \cap M')$$

$$Y = \bigcup\{I_i : i \in f(L \cap L')\}$$

$n \in M$, implica $n \notin \overline{U}$, entonces $n \in I_i$ para alguna $i \in \mathbb{N}$, lo cual nos dice que $X \neq \emptyset$. Análogamente, $n \in L$, implica $n \notin \overline{U}$, entonces $n \in I_j$ para alguna $j \in \mathbb{N}$, lo cual nos dice que $Y \neq \emptyset$.

De lo anterior tenemos que $X \cap Y = \emptyset$, lo cual implica que $Y \setminus V \subset A \setminus (X \cup V)$.

Afirmación 5. $K \subset \overline{A \setminus V}$, $B(\Omega) \in \overline{X \setminus V}$ y $B(\Theta) \in \overline{Y \setminus V}$, cerraduras tomadas en $\beta(A)$.

Demostración. $\overline{V} \cap K = \emptyset$ y $\beta(A) = \overline{A \setminus V} \cup \overline{V}$ implica que $K \subset \overline{A \setminus V}$. Sabemos que $M \cap M'$ $\in \Omega$ y $M \cap V = \emptyset$, lo cual implica que $B(\Omega)$ $\in \overline{M \cap M'} = \overline{(M \cap M') \setminus V}$ y como $M \cap M' \subset X$, tenemos que $\overline{(M\cap M')\setminus V} \subset \overline{X\setminus V}$, lo que implica que $B(\Omega) \in \overline{X\setminus V}$. Análogamente $B(\Theta) \in \overline{Y-V}$.

De la siguiente igualdad:

$$(\overline{X}^{A}\setminus V) \cup (A\setminus(X\cup V)) = A\setminus V$$

tenemos que $K \subset \overline{A\setminus V} = \overline{X}^{A}\setminus V \cup \overline{(A\setminus(X\cup V))}$ y de la afirmación anterior $B(\Omega) \in \overline{X}^{A}\setminus V$ y $B(\Theta) \in A\setminus(X\cup V)$.

$\overline{X}^{A}\setminus V$ y $A\setminus(X\cup V)$ son cerrados en A y ya que $\partial I_n \subset \overline{U} \subset V$ (frontera en A), tenemos que son ajenos y por el teorema 1.4.10, tenemos que:

$$\overline{X}^{A}\setminus V \cap A\setminus(X\cup V) = \emptyset$$

Esto demuestra que K no es conexo.

Por lo tanto, $B(\Theta)$ y $B(\Omega)$ están en composantes distintas. $\square$

Acabamos de demostrar, que si aceptamos la hipótesis del continuo, entonces A^* tiene 2^c composantes. Sin embargo, el principio NCF (se sabe que es consistente con Z-F) implica que A^* tiene una composante. Este principio lo definiremos enseguida.

Definición 4.8. Dos elementos Ω y Θ de N^*, se dice que son <u>casi</u> <u>coherentes</u> si hay una $f \in F$ no decreciente tal que $f(\Omega) = f(\Theta)$.

Principio NCF (Near Coherence of Filters) 4.9. Si $\Omega, \Theta \in N^*$, entonces son casi coherentes.

Lema 4.9 [10]. Cada composante de A^* contiene un elemento de $\{B(\Omega) \mid \Omega \in N^*\}$

Teorema 4.10. El principio NCF implica que A^* tiene una composante.

Demostración. Sean $\Omega, \Theta \in N^*$. El principio NCF implica que son casi coherentes es decir, existe $f \in F$ no decreciente tal que $f(\Omega) = f(\Theta)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea I_n el intervalo cerrado más pequeño que contiene a $f^{-1}(n)$.

Para cada $M \in \Omega$, existe $L \in \Theta$ tal que $f(M) = f(L)$, es decir, todo intervalo I_m que contenga elementos de M, contiene elementos de L, es decir, $B(\Omega)$ y $B(\Theta)$ están en la misma componente en

$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n}$, es decir, $B(\Omega)$ y $B(\theta)$ están en la misma composante.

Aplicando el lema anterior, obtenemos que A^* tiene una composante. $\square$

SIMBOLOGIA

$\overline{A}$	cerradura de A.
I	intervalo $[0,1]$
$\beta(X)$	compactación de Stone-Čech de X
$\lvert A\rvert$	cardinalidad de A.
c	cardinalidad de $\mathbb{R}$
$\aleph_0$	cardinalidad de $\mathbb{N}$
C_p	composante de p
$\operatorname{int} A$	interior de A.
T	función conjunto
Ω^n	ultrafiltro fijo en $\mathbb{N}$ que contiene a $\{n\}$.
N	conjunto de ultrafiltros en $\mathbb{N}$
N^*	conjunto de ultrafiltros libres en $\mathbb{N}$
F	conjunto de funciones sobres de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$
E	conjunto de Cantor
B	continuo de Knaster
X^*	residuo onda
$T(C)$	conjunto que para C, determina T.
$\square$	término de la demostración

BIBLIOGRAFIA.

[1] D.P. Bellamy, A non-metric indecomposable continuum, Duke Math. J. 38 (1971), 15-20. MR 42 # 6792.

[2] D.P. Bellamy and L.R. Rubin, Indecomposable continua in Stone-Čech compactifications. Proceedings of the American Matematical society volume 39 Number 2, July 1973.

[3] M.E. Rudin, Composants and β(N). Proceedings of Washington State University. Conference on General Topology March 1970 pages 117-119.

[A] B. Knaster et C. Kuratowski, Sur les continus non-bornés (Applications de la méthode d'inversion).

[4] J. Dugundji, Topology, Allyn and Bacon Boston, Mass 1966 MR 33 # 1824.

[5] K. Kuratowski. Topology Vol. 1.

[6] K. Kuratowski. Topology Vol. 2.

[7] Sze-Tsen Hu. Elements of General Topology.

[8] Williard. Topology.

[9] Walker and Jerison. Rings of functions.

[10] Klaas Pieter Hart. The Čech-Stone compactification of the Real line. Faculty of Technical Mathematics and Informatics. Delft University of Technology. Postbus 5031 2600 GA Delft. the Netherlands.