UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES

"A C A T L A N"

D I A G O N A L I Z A C I O N

TESINA PARA OBTENER EL TITULO:

LIC. EN MATEMATICAS APLICADAS Y COMPUTACION

P R E S E N T A :

BEATRIZ TRUEBA RIOS

STA. CRUZ ACATLAN, EDO DE MEXICO A 8 DE NOVIEMBRE DE 1993

I N D I C E

CAPITULO 3.

INTRODUCCION

El propósito de este trabajo es mostrar un estudio de la diagonalización de matrices enfatizando la importancia que presenta este tema en la ingeniería y en general en las ciencias aplicadas.

La diagonalización de matrices es una herramienta importante en la solución de sistemas de ecuaciones lineales, éstos se encuentran en forma natural en ciencias e ingeniería. Frecuentemente está en problemas de equilibrio o estado estacionario de sistemas físicos, en circuitos eléctricos AC (corriente alterna) y DC (corriente directa), en mecánica estática y estructural. Indirectamente, en problemas discretos y continuos, en métodos de momentos, de coeficientes indeterminados, métodos de colocación de Garlekin, métodos de Rayleigh-Ritz, métodos de ecuaciones diferenciales ordinarias de Rigidez (métodos implícitos), ecuaciones diferenciales parciales, ajuste de datos, etc., sin embargo se puede definir la diagonalización como un tema principal dentro de el cálculo de valores propios y vectores propios, principalmente si L:V->V es una transformación lineal de un espacio vectorial V de dimensión finita sobre sí mismo. Nos preguntamos cuándo y cómo podemos encontrar una base S para V tal que L es representada con respecto a S por una matriz diagonal D. Este problema resulta de la representación de una transformación lineal de un espacio vectorial V de dimensión n en un espacio vectorial W de dimensión m por una matriz de orden mxn y depende principalmente de la elección de las bases ordenadas para V y W. De esta manera se observa cómo la matriz cambia cuando las bases para V y W cambian. El problema se origina cuando se trata el tema de similaridad. Lo interesante de este punto es que si la matriz A representa L:V->V con respecto a alguna base ordenada S para V entonces la potencia k de la matriz A representa L^k, ésto se desprende de la composición de L, es decir $L \circ L \circ \ldots \circ L = L^k$

Por otro lado encontramos que si A es una matriz similar a una matriz diagonal, entonces podemos fácilmente resolver un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneo con coeficientes constantes.

En la teoría de las vibraciones el problema de diagonalización resulta, además de interesante, útil ya que por ejemplo la matriz espectral de una matriz A es una matriz diagonal cuyos elementos son los valores característicos de la matriz A y representan las frecuencias de oscilación del sistema.

Desde el punto de vista teórico hay varios algoritmos para diagonalizar una matriz los que resultan tediosos si se llevan a cabo manualmente, afortunadamente el proceso de diagonalización por medio de computadora ha hecho posible que las técnicas para diagonalización hayan sido mejoradas en los últimos años, debido a la velocidad con la que se efectuan las operaciones en las máquinas modernas, por ejemplo en máquinas pequeñas e intermedias como la PC/80486 o la RS/6000 de IBM van desde 7 a 43 Mips (Millones de instrucciones por segundo).

El documento se divide en cinco partes en las que se trata la teoría general, las técnicas de diagonalización, algunas aplicaciones y ejemplos de matrices de orden n usando un programa de computadora escrito en lenguaje C y se presentan resultados.

CAPITULO I

TEORIA GENERAL

Para resolver el problema de diagonalización se deben hacer una serie de consideraciones. Primero iniciaré con algunas definiciones y enunciados de teoremas que permitan formalizar el concepto de diagonalización y posteriormente hablare de los algoritmos para efectuar la diagonalización en forma práctica. La diagonalización de una matriz es un concepto muy importante y se puede tratar por varios caminos, los más usuales y clásicos se presentarán en el desarrollo de este trabajo. Es conveniente dar algunas definiciones como las que se veran a continuación y se daran por hecho otras como las de: espacio vectorial, producto interno, etc.

Supongamos entonces que V es un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo real y que $S=\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$, un conjunto de vectores no cero, una base para V, es decir, S es un generador de V linealmente independiente así que si α es un vector de V entonces se puede escribir en la forma

$$\alpha = \sum a\alpha_i = a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+...+a_n\alpha_n \tag{1}$$

para algunos a_i números reales.

Decimos que $[\alpha]_S$ es el vector coordenado de α si

$$[\alpha]_2 = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

para un orden de la base S, es decir S debe ser una base ordenada.

Las matrices nos proporcionan una notación compacta y flexible, particularmente nos ayudan en el estudio de transformaciones lineales. Las matrices presentan un método organizado para la solución de un sistema de ecuaciones algebráicas lineales, así como de ecuaciones diferenciales lineales, etc. Se ha visto que el álgebra matricial es muy útil en las matemáticas puras y aplicadas.

Las matrices son arreglos rectangulares de m filas y n columnas, cuando n = m nos referimos a una matriz cuadrada. Es posible formar un álgebra de matrices, sin embargo sólo nos ocuparemos de cierto tipo de operaciones y propiedades como es la transpuesta. La transpuesta de una matriz A de n x n es la que resulta de intercambiar filas por columnas, esto es si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

la transpuesta de A es

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Otro concepto necesario para tratar el tema de diagonalización es el de una transformación lineal, ésto es con el fin de poder hablar de matrices similares o más concretamente de transformaciones similares, toda transformación lineal entre espaçios vectoriales de dimensión finita se puede representar mediante una matriz. Al hablar de transformaciones similares veremos que hay casos de interés y precisamente son aquellos en los que la transformación es diagonal, por lo tanto iniciaremos con las siguientes definiciones y teoremas.

<u>Definición:</u> Sea V y W espacios vectoriales. Una función $L:V\text{->}W$ es llamada una transformación lineal de V a W si:

a) $L(\alpha+\beta) = L(\alpha)+L(\beta)$ para α y β en V.

b) $L(c\alpha) = cL(\alpha)$para α en V y c un número real.

Si V = W, la transformación lineal L: V -> W es también operador lineal en V, esto es, una transformación lineal de V en sí mismo se llama un operador. L es una proyección.

Los siguientes teoremas nos garantizan cómo podemos utilizar una matriz en lugar de una transformación lineal.

<u>Teorema 1:</u> Sea L:V->W una transformación lineal de un espacio vectorial V de dimensión n a uno W de dimensión m ($n\neq 0, m\neq 0$) y sea $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ y $T=\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m\}$ bases ordenadas para V y W, respectivamente. Entonces la matriz A de mxn cuya j-ésima columna es el vector coordenado $[L(\alpha_j)]_T$ de $L(\alpha_j)$ con respecto a T tiene la siguiente propiedad: Si $\beta=L(\alpha)$ para alguna α en V, entonces $[\beta]_T=A[\alpha]_S$ donde $[\alpha]_S$ y $[\beta]_T$ son los vectores coordenados de α y β con respecto a S y T, respectivamente. A es la única matriz con esta propiedad.

La matriz A es la representación de L con respecto a las bases ordenadas S y T. Si cambiamos el orden de los vectores en S y T, la matriz A cambia. Obteniendo la matriz A podemos reemplazar a L por A, α por $[\alpha]_S$, β por

$[\beta]_T$ en la expresión $L(\alpha)=\beta$ para obtener $A[\alpha]_S=[\beta]_T$. Se puede trabajar más fácil con estas matrices que con la transformación L. En la transformación lineal $L:R^n \to R^m$ el uso de la base natural para R^n y R^m simplifica la obtención de L.

Si L: V -> V es un operador lineal en un espacio vectorial V de dimensión n, entonces para obtener una representación de L se fijan bases ordenadas S y T. Es conveniente en este caso elegir S=T. Nos referimos a A como la representación de L con respecto a S.

Cuando hablamos de una transformación de L:V->W que tiene inversa G:W->V (también se le llama invertible) se conoce como un <u>isomorfismo</u>. Decimos que L es un isomorfismo si L es una función biyectiva que preserva las operaciones.

El siguiente teorema nos afirma que es posible contar con matrices inversas asociadas a transformaciones lineales inversas.

<u>Teorema 2:</u> Una transformación lineal L:V->W es invertible si y sólo si L es uno a uno y sobre. Más aún,

si L^{-1} es una transformación lineal y $(L^{-1})^{-1}=L$

Por lo que, si $L: V \to V$ es un operador lineal invertible y si A es la representación de L con respecto a la base ordenada S para V, entonces A^{-1} es la representación de L^{-1} con respecto a S.

Definición: Dadas dos bases S y S' para R^n, la matriz de transición P de S' a S es la matriz cuya j-esima columna es el vector coordenado del j-esimo vector en la base S' con respecto a S.

Utilizando el concepto de matriz de transición, el siguiente teorema garantiza que si A es una matriz que representa a $L:V \to W$, para una base, entonces $Q^{-1}AP$ también representa a L pero en otra base.

Teorema 3: Sea $L: V \to W$ una transformación lineal de un espacio vectorial V de dimensión n a un espacio vectorial W de dimensión m. Sea $S=\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ y $S'=\{\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n\}$ bases ordenadas para V, con matriz de transición P de S' a S; sean $T=\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$ y $T'=\{\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_m\}$ bases ordenadas para W con matriz de transición Q de T' a T. Si A es la representación de L de L con respecto a S′ y T′.

1.1. MATRICES SIMILARES Y DIAGONALIZACION

Como una consecuencia del teorema 3 se encuentra el corolario, que lleva casi directamente al objetivo de este documento, es decir, el de encontrar una transformación similar que sea diagonal.

Corolario: Sea L:V->V un operador lineal en un espacio vectorial V de dimensión n. Sea $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ y $S'=\{\alpha'_1,\alpha'_2,\ldots,\alpha'_n\}$ bases ordenadas para V con matriz de transición P de S′ a S. Si A es la representación de L con respecto a S, entonces $P^{-1}AP$ es la de L con respecto a S′.

En base a los teoremas anteriores se define una matriz similar.

Definición: Si A y B son matrices de nxn, se dice que B es similar a A si existe una matriz P no singular tal que $B=P^{-1}AP$.

Se ha llegado al punto en donde es posible contestar la pregunta que se hacen en la introducción de este trabajo, es decir que si A es una matriz de orden nxn entonces ahora se puede encontrar una matriz similar que es diagonal.

En base a la teoría de transformaciones lineales se podrá resolver la pregunta.

<u>Definición:</u> Una matriz cuadrada $A=(a_{ij})$ se llama <u>matriz diagonal</u> si todos los elementos fuera de su diagonal principal son cero, ésto es, $a_{ij}=0$ para $i\neq j$. Cuando todos los elementos de la diagonal principal son iguales a 1, ésto es $a_{ii}=1$ y $a_{ij}=0$ para $i\neq j$, se llama <u>matriz identidad</u> (I_n).

<u>Definición</u> Sea $L:V\to V$ una transformación lineal de un espacio vectorial V en sí mismo. Decimos que L es diagonalizable o que puede ser diagonalizada si existe una base S para V tal que L es representada con respecto a S por una matriz diagonal D.

Si D representa a L con respecto a S, entonces la j-ésima columna de D es el vector coordenado $[L(\alpha_j)]_S$ de

$L(\alpha_j)$ con respecto a S. Esto es, tenemos

$$[L(\alpha_j)]_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ c_j \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{<- j-ésima fila} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \qquad (3)$$

Por lo tanto $L(\alpha_j)=0\alpha_1+\ldots+0\alpha_{j-1}+c_j\alpha_j+0\alpha_{j+1}+\ldots+0\alpha_n=c_j\alpha_j$ para $j=1,\ldots,n$. La matriz D representa a L con respecto a S, por lo que L es diagonalizable.

La mayor parte de las matrices que son similares a matrices diagonales, tienen valores característicos distintos y por lo tanto esas matrices son diagonalizables.

Como se mencionó anteriormente dos matrices A y B de nxn son similares si existe una matriz P no singular de nxn tal que $B=P^{-1}AP$, ésto se ilustra con el siguiente ejemplo para dar énfasis y con el fin de hacer hincapié en la similaridad como un camino para diagonalizar una matriz.

Ejemplo: Sean A y P dos matrices y D una matriz diagonal

$$D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix}-6 & -3 & -25\\ 2 & 1 & 8\\ 2 & 2 & 7\end{pmatrix} \quad y \quad P=\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 3 & 5 & 7\end{pmatrix}$$

ya que det $P\neq0$ entonces P es invertible. Multiplicando PA y DP encontramos:

$$PA=\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 3 & 5 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6 & -3 & -25\\ 2 & 1 & 8\\ 2 & 2 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ 0 & -1 & 1\\ 6 & 10 & 14\end{pmatrix} \qquad (4)$$

$$DP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 3 & 5 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ 0 & -1 & 1\\ 6 & 10 & 14\end{pmatrix} \qquad (4')$$

Así PA=DP, si multiplicamos las dos partes por P^{-1} tenemos $P^{-1}PA=P^{-1}DP$, sabemos que $P^{-1}P=I$ y que IA=A entonces de lo anterior tenemos que $A=P^{-1}DP$ por lo que A y D son similares.

Cuando A es similar a una matriz diagonal podemos resolver fácilmente un sistema lineal no homogéneo de ecuaciones con coeficientes constantes.

<u>Definición</u>: Matriz Diagonalizable. Una matriz A de nxn es diagonalizable si existe una matriz diagonal D tal que A sea similar a D.

Una alternativa en el concepto de diagonalización resulta del cálculo de los valores característicos de una matriz A de nxn y que se hace elocuente en el siguiente teorema.

<u>Teorema 4:</u> Una matriz A de nxn es diagonalizable si y sólo si tiene n vectores característicos linealmente independientes. Si éste es el caso, la matriz diagonal D que es similar a A, está dada por:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad (5)$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son valores característicos de A. Si P es una matriz cuyas columnas son vectores característicos de A linealmente independientes entonces $D=P^{-1}AP$.

Es posible transformar un vector α en otro β, es decir $L(\alpha)=\beta$, pero lo interesante es que se puede transformar el vector α en sí mismo, es decir $L(\alpha)=\lambda\alpha$, la siguiente definición nos garantiza ésto.

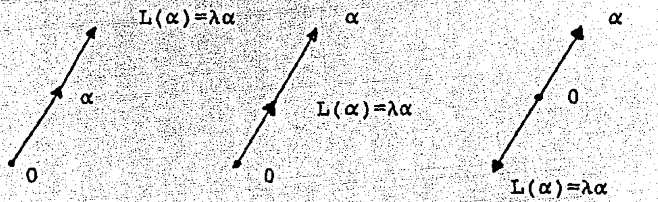
Definición: Sea $L:V\to V$ una transformación lineal de un espacio vectorial V de dimensión n en sí mismo. Entonces el número λ es llamado un valor característico de L si existe en V un vector α diferente de cero tal que

$$L(\alpha)=\lambda\alpha. \tag{6}$$

Todo vector α diferente de cero que satisface la ecuación (6) se llama vector característico de L asociado al valor característico λ.

En una gran variedad de aplicaciones, es útil hallar un vector α de V tal que $L(\alpha)$ y α sean paralelos o colineales. Es decir se busca un vector α y un escalar λ tales que $L(\alpha) = \lambda\alpha$, esta ecuación determina los posibles valores del escalar λ y dirección del vector α.

Sea $L: V\to V$ un operador lineal en V. Si λ es un valor característico de L y α tiene la propiedad de que L mapea α a un múltiplo de sí mismo, el multiplicador es el valor característico.



Cuando $\lambda>0$ Cuando $0<\lambda<1$ Cuando $\lambda<0$ (7)

Ahora si la matriz A de nxn representa la transformación L entonces tenemos

$$A\alpha = \lambda\alpha \tag{8}$$

Se dice que el vector $\alpha\neq 0$ es un vector característico de A correspondiente al valor característico λ.

<u>Teorema 5:</u> Sea A una matriz de nxn. Entonces λ es un valor característico de A si y sólo si

$$p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = 0 \tag{9}$$

A la ecuación (9) se le llama ecuación característica de A, y a $p(\lambda)$ se le llama polinomio característico de A.

La ecuación (8) la podemos escribir como

$$[A-\lambda I]\alpha=0 \qquad \textbf{(10)}$$

donde I es la matriz identidad, A es una matriz cuadrada, la ecuación (10) es una ecuación homogénea y su solución es no trivial sólo cuando su determinante $p(\lambda)$ de los coeficientes se hace cero, entonces tenemos

$$p(\lambda) = \det\,[A-\lambda I] = 0 \qquad \textbf{(11)}$$

En álgebra de matrices, la matriz

$$K(\lambda) = [A-\lambda I] \qquad \textbf{(12)}$$

llamada matriz característica de la matriz A. El determinante de la matriz característica

$$\det K(\lambda) = \det\,[A-\lambda I] = p(\lambda) \qquad \textbf{(13)}$$

es llamado el polinomio característico.

Volviendo a las matrices similares tenemos que si la matriz D es diagonal, entonces sus valores característicos se encuentran en la diagonal principal. Si A es similar a D, entonces A y D tienen los mismos valores característicos.

<u>Teorema 6:</u> Sea L:V->V una transformación lineal de un espacio vectorial V de dimensión n en sí mismo. Entonces L es diagonalizable si y sólo si V tiene una base de vectores característicos de L. Y si D es una matriz

diagonal que represente a L con respecto a S, entonces los valores sobre la diagonal principal son los valores característicos de L, es de la forma (5).

Si A es una matriz de orden nxn, se puede considerar la transformación lineal $L:R^n \to R^n$ definida por $L(\alpha)=A\alpha$ para α en R^n. Si λ es un escalar y $\alpha \neq 0$ (0=vector cero) un vector en R^n tal que $A\alpha=\lambda\alpha$, entonces λ es un valor característico de A y α es un vector característico de A asociado con λ. Esto es, λ es un valor característico de L y α es un vector característico de L asociado con λ. Se dice que A es diagonalizable, o que puede ser diagonalizada, si A es similar a la matriz diagonal D. Si A y D son similares, entonces las dos representan la transformación lineal $L:R^n \to R^n$, respecto a las bases ordenadas S y T para R^n. Así L es representada por D con respecto a T.

<u>Teorema 7:</u> Una matriz A de orden nxn es similar a la matriz diagonal D si y sólo si R^n tiene una base de vectores característicos de A, ésto es, los valores de la diagonal principal de D son valores característicos de A.

Para ilustrar el teorema anterior se considera el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Sea que A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Se quiere encontrar los valores característicos de A y el vector característico asociado. Para encontrar todos los escalares λ y los vectores diferentes de cero, se procede como sigue:

Sea $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ que satisface $A\alpha=\lambda\alpha$. Buscamos $A\alpha$:

$$A\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

y obtenemos:

$$a_1 + a_2 = \lambda a_1$$

$$-2a_1 + 4a_2 = \lambda a_2$$

igualamos a cero y factorizamos

$$\begin{aligned} -a_1 - a_2 + \lambda a_1 = 0 \quad &\text{o} \quad (\lambda-1)a_1 - a_2 = 0 \\ 2a_1 - 4a_2 + \lambda a_2 = 0 \quad &\text{o} \quad 2a_1 + (\lambda-4)a_2 = 0 \end{aligned} \qquad (1')$$

con este sistema tenemos:

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 = (\lambda-3)(\lambda-2)$$

por lo que $\lambda_1=3$ y $\lambda_2=2$ son los valores característicos de A. Para encontrar un vector característico de A asociado con $\lambda=2$, se obtiene directamente sustituyendo el valor de λ en (1') obteniendo el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ característico asociado con $\lambda=2$. De igual manera para $\lambda = 3$ en (1') encontramos

$$2a_1 - a_2 = 0$$

$$2a_1 = a_2$$

Por lo que $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ es un vector característico asociado con $\lambda=3$.

Nótese que de la ecuación (12), $K(\lambda)=(A-\lambda I)$, se puede obtener el vector característico α_1 usando la matriz adjunta de $k(\lambda_1)$, ésto es α_1 = (constante)[cualquier columna de Adj $K(\lambda_1)$], recordando que la adjunta de una matriz es la transpuesta de la matriz de cofactores.

Concluimos que $S=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente. S es una base de R^2 de los vectores característicos de A y la matriz A puede ser diagonalizada en la siguiente forma

$$D=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1\\-2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$$

Si P es una matriz cuyas columnas son vectores caracteríticos de A linealmente independientes entonces $D=P^{-1}AP$. Cuando la matriz A de orden nxn tiene n valores característicos distintos, entonces A es diagonalizable.

1.2. DIAGONALIZACION ORTOGONAL:

Esta es otra forma de diagonalizar una matriz, se inicia recordando que toda matriz simétrica ($A^t=A$) tiene n vectores característicos reales linealmente independientes por lo que es posible diagonalizar la matriz A. Cuando $A^t=-A$ los valores característicos son imaginarios.

Las matrices simétricas son de gran importancia en dinámica clásica y en otras ramas de la matemática aplicada.

En muchas aplicaciones de física e ingeniería es muy importante considerar la transformación de matrices

$$B = P^{-1}AP \tag{14}$$

donde P es una matriz no singular. Tal transformación se llama transformación de similaridad, que se definió anteriormente. La matriz B es la transformación de A por la matriz P. Pero si A es simétrica ($A^t=A$) y P es ortogonal, es decir, $P^{-1}=P^t$, entonces

$$B = P^tAP \tag{15}$$

En este caso tenemos que B también es simétrica.

$$B^t = (P^tAP)^t = PAP^t = B \tag{16}$$

Si $S=\{u_1,u_2,...,u_n\}$, es un conjunto de vectores que satisfacen $u_i.u_j = 0$ con $i\neq j$, se dice que el conjunto S es ortogonal. Si además satisface $u_i.u_i= 1$ el conjunto es ortonormal. Por otra parte si la matriz P de nxn es invertible y satisface $P^{-1}=P^t$ entonces P se llama ortogonal por lo que $P^tP=I$. Las columnas de P deben formar una base ortonormal de R^n.

Los siguientes teoremas nos permitirán establecer los criterios o reglas para la diagonalización de una matriz cuando la matriz es simétrica.

Teorema 8 Sea A una matriz de orden nxn y sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ valores característicos distintos de A con los vectores característicos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ entonces $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son linealmente independientes.

También sabemos que si A es una matriz simétrica real de nxn. Entonces los vectores característicos de A son reales.

Con respecto a las matrices simétricas se encuentra que los vectores característicos correspondientes a valores característicos distintos son ortogonales.

Por ejemplo. Sea A una matriz simétrica real de orden 2x2. Si λ_1 y λ_2 son valores característicos distintos y corresponden a vectores característicos reales α_1 y α_2, entonces α_1 y α_2 son ortogonales.

Teorema 10: Si A es una matriz simétrica real de nxn. Entonces A tiene n vectores característicos ortonormales y reales.

Definición: (Matriz diagonalizable ortogonalmente). Se dice que una matriz A de orden nxn es diagonalizable ortogonalmente si existe una matriz ortogonal Q tal que $Q^tAQ = D$ donde $D=diag(\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n)$ y λ_i $i=1,\ldots,n$ son valores característicos de A. Y como $Q^t=Q^{-1}$ entonces se puede escribir $Q^{-1}AQ = D$. Además la matriz A es diagonalizable ortogonalmente si y sólo si A es simétrica.

1.3. PROCEDIMIENTO PARA HALLAR UNA MATRIZ DIAGONALIZABLE Q:

i) Hállese una base para cada espacio característico de A. Definición: Espacio característico. Sea λ una valor característico de A. El subespacio E_λ recibe el nombre de espacio característico de A correspondiente al valor característico λ.

ii) Hállese una base ortonormal para cada espacio característico de A utilizando el proceso de Gram-Schmidt.

iii) Escríbase Q como la matriz cuyas columnas son los vectores característicos ortonormales obtenidos en ii).

El procedimiento anterior requiere del proceso de Gram-Schmidt con el que es posible que toda base en R^n se pueda transformar en una base ortonormal. Antes de dar el Teorema de Gram-Schmidt es necesario recordar lo siguiente:

Si $\alpha \in R^n$ entonces la norma o longitud de α, denotada por $|\alpha|$, está dada por $|\alpha| = \sqrt{\alpha.\alpha}$, de donde si $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, entonces $\alpha.\alpha = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$. $\alpha.\beta$ es el producto interno estándar definido por $\alpha.\beta = \sum a_i b_i$, si $\alpha, \beta \in R^n$.

El siguiente teorema nos muestra el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.

<u>Teorema 11</u> Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt. Sea H un subespacio de dimensión m de R^n. Entonces H tiene una base ortonormal. Sea $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$ una base de H.

Paso 1. $u_1 = \alpha_1 / |\alpha_1|$.

Paso 2. $\alpha'_2 = \alpha_2 - (\alpha_2 . u_1) u_1$

Paso 3. $u_2 = \alpha'_2 / |\alpha'_2|$

Paso 4. Sea $\alpha'_{k+1} = \alpha_{k+1} - (\alpha_{k+1} . u_1) u_1 - (\alpha_{k+1} . u_2) u_2 - \dots - (\alpha_{k+1} . u_k) u_k$

Paso 5. Sea $u_{k+1} = \alpha'_{k+1} / |\alpha'_{k+1}|$. Entonces es evidente que $u_1, u_2, \dots, u_m, u_{k+1}$ es un conjunto ortonormal, y se continúa en esta forma hasta $k+1 = m$.

En el siguiente ejemplo se ilustra, con una matriz de orden 2x2,el procedimiento para hallar una matriz diagonalizable Q.

Ejemplo: Diagonalización de una matriz simétrica de orden 2x2 mediante una matriz Ortogonal

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

La ecuación característica de A es:

$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)-4 = \lambda^2-4\lambda-1 = 0$, sus raices son $\lambda=(4 \pm \sqrt{20})/2 = 2 \pm \sqrt{5}$. Para $\lambda_1= 2-\sqrt{5}$, se obtiene

$$(A-\lambda I)\alpha = \begin{pmatrix} -1+\sqrt{5} & -2 \\ -2 & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Un vector característico es $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1+\sqrt{5} \end{bmatrix}$ y su norma es:

$$|\alpha_1| = \sqrt{2^2+(-1 + \sqrt{5})^2} = \sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

Por tanto,

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1+\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

A continuación para $\lambda_2= 2 + \sqrt{5}$, se calcula

$$(A-\lambda I)\alpha = \begin{pmatrix} -1-\sqrt{5} & 2 \\ -2 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y el vector característico para α_2 es

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 2 \end{bmatrix}$$. Nótese que $\alpha_1 . \alpha_2 = 0$ por ser ortogonales.

La norma de α_2 es: $|\alpha_2| = \sqrt{10-2\sqrt{5}}$

de tal manera que

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \begin{bmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 2 \end{bmatrix}$$

Por último formamos la matriz P con u_1 y u_2

$$P = \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \begin{bmatrix} 2 & 1-\sqrt{5} \\ -1+\sqrt{5} & 2 \end{bmatrix}$$

$$P^t = \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\begin{bmatrix} 2 & -1+\sqrt{5} \\ 1-\sqrt{5} & 2 \end{bmatrix}$$

$$P^tAP= \frac{1}{10-2\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1+\sqrt{5} \\ 1-\sqrt{5} & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1-\sqrt{5} \\ -1+\sqrt{5} & 2 \end{bmatrix}$$

$$P^tAP= \frac{1}{10-2\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1+\sqrt{5} \\ 1-\sqrt{5} & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4-2\sqrt{5} & -3-\sqrt{5} \\ -7+3\sqrt{5} & 4+2\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$P^tAP= \frac{1}{10-2\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 30-14\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 10+6\sqrt{5} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2-\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

CAPITULO 2

APLICACION A LA TEORIA DE LAS FORMAS CUADRATICAS

2.1 LA MATRIZ MODAL:

Sea la matriz A de nxn con n valores característicos distintos λ_k, $k=1,2,\ldots,n$ y n vectores característicos α_k, $k=1,2,\ldots,n$. Sean los n vectores característicos α_k colocados como columnas de una matriz cuadrada M. Esta matriz cuadrada es llamada la matriz modal de A y es de la forma:

$$M = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad . \; . \; . \quad \alpha_n]. \tag{17}$$

La matriz modal M es por lo tanto una matriz particionada cuyas columnas son los vectores característicos de la matriz A.

La matriz espectral de la matriz A es una matriz diagonal S de nxn cuyos elementos son los valores característicos de la matriz A (se considera aquí el caso en el que la matriz A tiene n valores característicos distintos). La matriz espectral tiene la forma (5).

2.2. DIAGONALIZACION DE UNA MATRIZ, REDUCCION A LA FORMA CUADRATICA.

El típico vector característico y valor característico α_k y λ_k de la matriz cuadrada A satisfacen la ecuación del vector característico

$$A\alpha_k = \lambda_k\alpha_k \qquad k = 1,2,3,\ldots,n \tag{18}$$

Sea la matriz A multiplicada por su matriz modal M (17) para obtener

$$AM = A[\alpha_1 \;\; \alpha_2 \;\; \alpha_3 \; ... \; \alpha_n] = [A\alpha_1 \;\; A\alpha_2 \;\; A\alpha_3 ... \; A\alpha_n]$$

$$= [\lambda_1\alpha_1 \;\; \lambda_2\alpha_2 \;\; \lambda_3\alpha_3 \; ... \; \lambda_n\alpha_n] = MS \qquad (19)$$

La matriz M tiene una inversa, por lo que los vectores característicos de la matriz A, α_k, $k=1,2,3,...,n$ son linealmente independientes. Este seráa el caso si A tiene n valores característicos distintos λ o si A es una matriz simétrica, esto es $A^t=A$. Si la matriz A no es simétrica, y algunos de sus valores característicos son múltiplos, la matriz M puede no tener inversa. El resultado (19) AM=MS puede ser multiplicado por M^{-1} en el caso de que M tenga inversa. Obtenemos

$$M^{-1}AM = S \qquad (20)$$

La ecuación (20) es la representación de la diagonalización de la matriz A. La ecuación AM=MS puede ser multiplicada por la inversa de la matriz modal M^{-1} para obtener

$$A = MSM^{-1} \qquad (21)$$

Es interesante notar que si (21) se multiplica por sí mismo el resultado es:

$$A^2 = (MSM^{-1})(MSM^{-1}) = MS(M^{-1}M)SM^{-1} = MS^2M^{-1} \qquad (22)$$

La matriz S^2 es una matriz diagonal cuyos elementos es el cuadrado de los valores característicos de A. Si

multiplicamos (21) por sí mismo k veces, obtenemos

$$A^k = MS^kM^{-1} \qquad k = 0,1,2,3,... \qquad (23)$$

La matriz S^k es una matriz diagonal cuyos elementos son la k-ésima potencia de los valores característicos de A. Como ya se mencionó en la introducción.

2.3 <u>LA MATRIZ DIAGONAL DE UNA MATRIZ CON DISTINTOS VALORES CARACTERISTICOS.</u>

Consideremos A como una matriz simétrica con valores característicos distintos, multiplicamos la ecuación AM=MS a la izquierda por la transpuesta de M, M^t, para obtener

$$M^tAM = M^tMS \qquad (24)$$

Ahora tomamos la transpuesta de la ecuación (24) tomando en cuenta que A^t=A y obteniendo

$$M^tAM = SM^tM \tag{25}$$

De (24) y (25) tenemos

$$M^tMS = SM^tM \tag{26}$$

A partir de que S es una matriz diagonal y para satisfacer (26), debemos tener M^tM=una matriz diagonal. Si los vectores característicos α_k son normalizados a la unidad así que

$$\alpha_r' \alpha_s = 1 \qquad \text{para} \quad r = s \tag{27}$$

la matriz modal de la matriz simétrica A tiene la propiedad de

$$M^tM = I \tag{28}$$

donde I es la matriz identidad. Una matriz que satisface la ecuación (28) es llamada una matriz ortogonal como ya se había mencionado y tiene la propiedad de que $M^t=M^{-1}$ en este caso la ecuación (21) toma la forma de

$$A = MSM^t \tag{29}$$

En (29) M es la matriz modal de A y M^t es su transpuesta. Esta ecuación es la diagonal de una matriz simétrica con valores característicos distintos.

La diagonalización de una matriz está muy relacionada con el problema de obtener la forma cuadrática. En muchas aplicaciones en ingeniería, se desea reducir una expresión dada con producto cruzado a la forma cuadrática o equivalentemente a una expresión con cuadrados de las variables sin términos cruzados. Se mostrará a través del siguiente ejemplo que este problema es similar a encontrar los valores y vectores característicos de la expresión con téminos cruzados como se describió anteriormente.

Ejemplo: Obtener la forma cuadrática del problema

$$Q = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 \qquad (30)$$

La relación anterior se puede poner en forma de matriz simétrica como sigue:

$$Q = \begin{bmatrix} 2x_1x_1 & -x_1x_2 & 0 \\ -x_2x_1 & 2x_2x_2 & -x_2x_3 \\ 0 & -x_3x_2 & x_3x_3 \end{bmatrix} \qquad (31)$$

sabiendo que $x_ix_j = x_jx_i$. Entonces la matriz A que resulta de los coeficientes es:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (32)$$

La ecuación 30 y 31 se puede escribir de la forma:

$$Q = (\ x_1 \quad x_2 \quad x_3\ ) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \qquad (33)$$

Multiplicando las dos últimas matrices se tiene:

$$Q = (\ x_1 \quad x_2 \quad x_3\ ) \begin{bmatrix} 2X_1 - X_2 \\ -X_1 + 2X_2 - X_3 \\ -X_2 + X_3 \end{bmatrix} \qquad (34)$$

realizando la última multiplicación se obtiene:

$$Q = x_1\ (2x_1 - x_2\ ) + x_2\ (-x_1 + 2x_2 - x_3\ ) + x_3\ (-x_2 + x_3\ )$$

$$= 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 \qquad (35)$$

La ecuación 35 es idéntica a la expresión para Q dada por la ecuación (30). Los valores y vectores característicos se dan a continuación:

$\lambda_1 = 3.238$; [0.591, -0.736, 0.328]

primera columna de la matriz M

$\lambda_2 = 1.555$; [-0.736, -0.328, 0.591]

segunda columna de la matriz M

$\lambda_3 = 0.198$; [0.328, 0.591, 0.736]

tercera columna de la matriz M

Usando estos valores se forma la matriz M

$$M = \begin{bmatrix} 0.591 & -0.736 & 0.328 \\ -0.736 & -0.328 & 0.591 \\ 0.328 & 0.591 & 0.736 \end{bmatrix} \tag{36}$$

La matriz M es una matriz ortogonal por lo que $M^t = M^{-1}$, la relación que corresponde a la ecuación (20) es:

$$\begin{bmatrix} 0.591 & -0.736 & 0.328 \\ -0.736 & -0.328 & 0.591 \\ 0.328 & 0.591 & 0.736 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.591 & -0.736 & 0.328 \\ -0.736 & -0.328 & 0.591 \\ 0.328 & 0.591 & 0.736 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3.238 & 0 & 0 \\ 0 & 1.555 & 0 \\ 0 & 0 & 0.198 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Considérese la siguiente transformación de x al sistema coordenado ξ

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.591 & -0.736 & 0.328 \\ -0.736 & -0.328 & 0.591 \\ 0.328 & 0.591 & 0.736 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \quad (38)$$

La ecuación (38) se puede escribir de la forma:

$$(x) = [M](\xi) \quad (39)$$

y la transpuesta de (39) es:

$$(x)^t = [\xi]^t(M)^t \quad (40)$$

ahora la escribimos en la forma de matriz completa:

$$(x_1\ ,x_2\ ,x_3\ ) = (\xi_1\ ,\xi_2\ ,\xi_3\ )\begin{bmatrix} 0.591 & -0.736 & 0.328 \\ -0.736 & -0.328 & 0.591 \\ 0.328 & 0.591 & 0.736 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Usando las expresiones dadas por las matrices x y x^t en la ecuación (38) y (41) en la ecuación para Q que se dá en la ecuación (33), se obtiene:

$$Q = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \begin{bmatrix} 0.591 & -0.736 & 0.328 \\ -0.736 & -0.328 & 0.591 \\ 0.328 & 0.591 & 0.736 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} .$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 0.591 & -0.736 & 0.328 \\ -0.736 & -0.328 & 0.591 \\ 0.328 & 0.591 & 0.736 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(42)}$$

Sustituyendo la matriz diagonal de (37) en lugar de las tres matrices que se encuentran en el centro de (42), obtenemos:

$$Q = 3.238\ \xi_1^2 + 1.555\ \xi_2^2 + 0.198\xi_3^2 \qquad \textbf{(43)}$$

La ecuación (43) representa la forma cuadrática de la ecuación (30) con la transformación de coordenados x a ξ como se dió en la ecuación (38). La transformación del sistema coordenado ξ a x se obtiene al multiplicar la ecuación (39) por $M^{-1}(=M')$, obteniendo

$\xi = M'x$

CAPITULO 3

ALGORITMOS PARA DIAGONALIZACION

En muchos problemas se requiere de la estimación de los valores y vectores característicos, teóricamente ya se vió que se pueden obtener encontrando las n raices de $p(\lambda)$ y posteriormente resolver el sistema lineal asociado; se determinan los vectores característicos correspondientes. En la práctica $p(\lambda)$ es dificil de obtener y sobre todo para polinomios de grado N. Por lo que fué necesario desarrollar técnicas de aproximación para encontrar los valores característicos.

A continuación se mencionan algunos algoritmos para diagonalizar.

3.1. ALGORITMO QL.

Debido a sus características de estabilidad es una técnica muy usada. El método puede ser modificado para usarse en el cálculo de valores característicos de matrices no simétricas. Para resolver $D=P^{-1}AP$ en lugar de determinar la matriz diagonal D el método de Householder calcula la matriz simétrica tridiagonal con los mismos valores característicos que los de A (matriz original). El algoritmo QL puede aplicarse a la matriz tridiagonal para resolver el problema.

3.2 ALGORITMO QR

Para el caso de una matriz no simétrica A de nxn se requiere encontrar los valores característicos de una matriz similar con valores característicos más fáciles de determinar, después de realizar operaciones matriciales iterativas para que los valores característicos se acumulen a lo largo de una matriz triangular. Para el caso simétrico, no tratamos de encontrar la matriz

triangular superior directamente, se construye una matriz tridiagonal con los mismos valores característicos. Para el caso no simétrico se construye una matriz que puede considerarse como una combinación de una matriz tridiagonal y una triangular que se llama Hessenberg superior y contiene ceros en las componentes abajo de la subdiagonal inferior. Cuando ya se ha formado la matriz Hessenberg superior con los mismos valores característicos se emplea un procedimiento de factorización, que en cada paso, factoriza una matriz en un producto de una matriz ortogonal, denotada por Q, y una matriz triangular superior, denotada por R.

3.3 FORMA DE JORDAN

Si una matriz A no puede ser diagonalizada entonces se puede encontrar una matriz B similar a la matriz A que sea casi diagonal . Se dice que la matriz B está en la forma canónica de Jordan. La matriz de bloques de Jordan es la matriz $B(\lambda)$ de kxk con el número constante en la diagonal, unos (1) por arriba de la diagonal y ceros en cualquier otro lado.

Teorema: Sea A una matriz de nxn. Entonces existe una matriz invertible P de nxn tal que $P^{-1}AP=J$, donde J es una matriz de Jordan cuyos elementos diagonales son los valores característicos de A. Ademas, J es única excepto por el orden en que aparecen los bloques.

La matriz J recibe el nombre de forma canónica de Jordan de A.

3.4 METODO DE GIVENS

Usa transformaciones de similaridad, reduce A a la forma diagonal triple y lo logra después de un número finito de iteraciones. Genera el polinomio característico de tal manera que proporciona simultáneamente una secuencia de Sturm para encontrar las raices reales. Los vectores característicos se obtienen fácilmente del producto de la rotación de matrices.

3.5. METODO DE JACOBI

El Método de Jacobi es el método más clásico para diagonalizar una matriz simétrica y su éxito particularmente se vió en la mecánica cuántica. Este método fué usado durante mucho tiempo hasta que en los

40's se descubrio el algoritmo QR.

El Método de Jacobi garantiza que una matriz A real, simétrica tiene todos los valores característicos reales y que existe una matriz ortogonal O tal que $O^{-1}AO$ es diagonal. Este proceso se continúa en una forma iterativa tal que no se alteran los valores característicos. Cada transformación se basa en una matriz de rotación O_K que después de n pasos la matriz A se transforma en

$$O_n^{-1} \; . \; . \; . \; O^{-1}AO \; . \; . \; . \; O_n$$

en donde

$$O_k = \begin{bmatrix} \cos \phi k & -\text{sen}\ \phi k \\ \text{sen}\ \phi k & \cos \phi k \end{bmatrix}$$

Como se verá el ángulo ϕ se determina a través de la

tangente de $2\phi = 2a_{lk}/(a_{ll} - a_{kk})$.

La aproximación a la forma diagonal hace que la diagonal contenga los valores característicos y los vectores característicos se encuentran en las columnas O_1

O_2 $O_3 \ldots$

Para ilustrar el método se hacen las siguientes consideraciones.

1. Se consigue el elemento mayor numéricamente, es de $|a_{ik}|$ = max.

Los elementos $a_{ii}, a_{ik} = a_{ki}$ y a_{kk} forman una submatriz de A que puede ser fácilmente transformada a forma diagonal.

2. La matriz O definida como

$$O = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

3. Se efectuan los productos $D = O^{-1}AO$

$$D = \begin{bmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ik} \\ a_{ki} & a_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

4. Obteniéndose los elementos de la matriz diagonal

$$d_{ii} = a_{ii} \cos^2\phi + 2a_{ik} \operatorname{sen}\phi \cos\phi + a_{kk} \operatorname{sen}^2\phi$$

$$d_{ik} = d_{ki} = -(a_{ii} - a_{kk}) \operatorname{sen}\phi \cos\phi + a_{ik} (\cos^2\phi - \operatorname{sen}^2\phi)$$

$$d_{kk} = a_{ll} \operatorname{sen}^2\phi - 2a_{lk} \operatorname{sen}\phi \cos\phi + a_{kk} \cos^2\phi$$

5. Se escoge el ángulo ϕ tal que $d_{lk}=d_{kl}=0$ esto es

$$\tan 2\phi = 2a_{lk}/(2a_{ll}-a_{kk})$$

Esta ecuación dá 4 valores distintos de ϕ y a fin de escoger rotaciones más pequeñas como sea posible se pide $-\pi/4 \le \phi \le \pi/4$. Poniendo

$$R = \sqrt{(a_{ll}-a_{kk})^2 + 4a^2_{lk}} \quad y \quad \sigma = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{ll} \ge a_{kk} \\ -1 & \text{si } a_{ll} < a_{kk} \end{cases}$$

Obtenemos $\quad \operatorname{sen} 2\phi = 2\sigma a_{lk}/R,$

$$\cos 2\phi = \sigma(a_{ll} - a_{kk})/R$$

el ángulo 2ϕ esta en el primer cuadrante si $\tan 2\phi > 0$ y en el cuarto cuadrante si $\tan 2\phi < 0$. De aqui que para el ángulo ϕ se tiene

$$\phi = 1/2 \text{ arc tg} \left(2a_{lk}/(a_{ll}-a_{kk}) \right) \quad \text{si } a_{ll} \ne a_{kk}$$

$$\phi = \begin{cases} \pi/4 & \text{si } a_{lk} > 0 \\ -\pi/4 & \text{si } a_{lk} < 0 \end{cases} \quad \text{si } a_{ll} = a_{kk}$$

donde el valor de la función arc tg se escoge entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ finalmente tenemos

$$d_{ll} = 1/2\,(a_{ll} + a_{kk} + \sigma R)$$
$$d_{kk} = 1/2\,(a_{ll} + a_{kk} - \sigma R)$$
$$d_{lk} = d_{kl} = 0$$

Nótese que $d_{ll} + d_{kk} = a_{ll} + a_{kk}$ y $d_{ll}(d_{kk}) = a_{ll}a_{kk} - a_{lk}^2$

Ejecutando una serie de rotaciones de 2 dimensiones la transformación de matrices nos lleva a la forma diagonal como se vió. El programa que se adjunta a este trabajo, muestra exactamente los pasos anteriores como un algoritmo para diagonalizar una matriz por el Método de Jacobi

CONCLUSIONES

Del estudio del tema diagonalización de matrices se encontró, además de interesante y práctico, útil en muchos aspectos de las ciencias e ingeniería. Como era de esperarse aún cuando todos los libros de álgebra lineal tratan el tema de diagonalización, no presentan los detalles de cada uno de los métodos, sin embargo hay libros como el de J. H. Wilkinson, The Algebraic Eigenvalue Problem. que trata el problema de manera muy abstracta, por lo que se tuvo que revisar la literatura citada y concluir con un ejemplo programado en lenguaje C. Una sorpresa en el desarrollo del trabajo también fué ver que existen paquetes comerciales como el de IMSL fabricado por IMSL, Inc. y que utiliza paquetes más viejos como AISPACK, LINPAK que son exclusivamente para el manejo de matrices. Dasafortunadamente estos paquetes son del orden de 6,000 dólares y no pueden ser instalados en máquinas del tipo PC, porque no son fabricados para ellas, esto hace una limitante en el uso de esta paquetería en máquinas PC compatibles con IBM. Por lo que con este estudio se puede ver la posibilidad de programar algoritmos como el que se presentó en este trabajo, y no depender de paquetes tan sofisticados como los que he citado.

Como conclusión se puede decir que el tema de DIAGONALIZACION es de gran importancia tanto teórica como práctica en aplicaciones de ingeniería y en areas del conocimiento que requieren soluciones de sistemas de ecuaciones algebráicas.

BIBLIOGRAFIA

1. Boyce, Wiliam E. y DiPrima, Richard C. Ecuaciones Diferenciales y Problemas con valores en la Frontera, E. Noriega Limusa, 1991.

2. Burden, Richard L. Análisis Numérico, Grupo Editorial Iberoamérica, 1985.

3. Froberg, Carl-Erik. Introduction to Numerical Analysis, Addison-Wesley Publishing Co. 1970.

4. Grossman, Stanley I. Algebra Lineal con Aplicaciones, McGraw Hill, 1992.

5. IMSL Math/Library, Versión 1.1 , IMSL, Inc., 1989.

6. Kolman, Bernard. Elementary Linear Algebra, Macmillan Publishing Co., Inc., 1970.

7. Lang Serge. Algebra Lineal, Addison-Wesley Iberoamericana, 1986.

8. Meirovitch, Leonard. Analytical Methods and Vibration, MacMillan Co. 1967.

9. Pipes, Louis A. y Hovanessian, Shahen A. Matrix-Computer Methods in Engineering, John Wiley & Sons, Inc. 1969.

10. Scheid, Francis, Theory and Problems of Numerical Analysis, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1968.

11. Stewart, G.W., Computer Science and Applied Mathematics, Academic Press, 1973.

12. Thomson, William T. Theory of Vibration with Aplications, Prentice Hall, 1972.

13. Weis. Higher Algebra, Prentice Hall, 1969.

14. Wilkinson, J.H. The Algebraic Eigenvalue Problem, Oxford University Press., 1965.

MANUAL DEL USUARIO

El programa Jacobi para diagonalizar una matriz simétrica de nxn se encuentra en el archivo JACOBI.EXE y el código fuente en JACOBI.C.

Si se desea correr el programa instale su sistema operativo versión 3.1 en adelante y ejecute el programa dando el nombre de

A>JACOBI

Primeramente se verá en pantalla los datos de la Universidad, se pulsa cualquier tecla para continuar y el programa responde con otra que indica el nombre del programa y el autor.

Al pulsar cualquier tecla se podran introducir los datos de la matriz uno a uno, siguiendo el orden de la fila hasta la diagonal, continúe de esta manera fila por fila. Después del último elemento de la matriz dado aparecerá en pantalla la matriz completa. Dé un RETURN para ver la matriz de entrada que será diagonalizada. Pulsar cualquier tecla para obtener la matriz final de vectores propios, nuevamente pulse cualquier tecla para la matriz final de valores propios.

Para salir pulsar cualquier tecla, si desea diagonalizar otra matriz dé el comando JACOBI.

```
/*****************************************************************/
/*                                                               */
/* Nombre   : JACOBI.C                                           */
/* Objetivo: Diagonalizar una matriz simétrica A.                */
/* Entrada : Recibe datos del teclado como elementos de A.       */
/* Salida   : Se obtiene la matriz de vectores propios de A.     */
/*            y matriz diagonal de valores propios de A.         */
/* Parámetros: TAM Indica el orden de la matriz A.               */
/*             ITER representa el número de iteraciones.         */
/* Autora: Beatriz Trueba Ríos.                                  */
/* Fecha : Verano de 1993.                                       */
/* Fuente: Introduction to Numerical Analysis.                   */
/*         Carl-Erik Froberg, Addison Wesley 1969.               */
/*         Lenguaje C Introducción a la Programación.            */
/*         Al Kelley / Ira Pohl. Addison Wesley Iberoamericana*/
/*                                                               */
/*****************************************************************/
#include <string.h>
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include  <math.h>

#define TAM  10
#define ITER 100
#define ABS(x) (((x) > 0.0) ? (x) : -(x))
#define SEP_COL 2
#define SEP_REN 2

void centra(char * dest, char * fuente)
{
char t[80];
int i;

for(i = 1; i <= (80 - strlen(fuente)) / 2; i++)
t[i] = ' ';
strcpy(t + i, fuente);
strcpy(dest, t);
}

void LINEA_H(int k, int ini,int tope,int fig)
{
int h;

for (h=ini;h<tope;h++)
{
gotoxy(h,k);
if (fig == 1)
printf("■");
else
printf("=");
}
}
```

```
void LINEA_V(int k, int ini,int tope,int fig)
{
int h;

for (h=ini;h<(tope+1);h++)
{
gotoxy(k,h);
if (fig == 1)
printf("█");
else
printf("║");
}
}

void ESQUINA(int ir,int ic,int fr,int fc)
{
gotoxy(ic,ir);
printf("╔");
gotoxy(ic,fr);
printf("╚");
gotoxy(fc,fr);
printf("╝");
gotoxy(fc,ir);
printf("╗");
}

void MATRM( long double Z[][TAM],int m,int n)
{
int i,j,r,c;
long double Dato;
char t[80];

LINEA_H(1,1,80,1);
centra(t, "ESCRIBA LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ:");
printf(t);
LINEA_H(3,1,80,1);

r = (79 - (SEP_COL + 7) * n) / 2;
c = (24 - (SEP_REN * m)) / 2;
for (i=0;i<n;i++)
{
 j = 0;
 while(j <= i)
{
gotoxy(r,c);
scanf("%Lf",&Dato);
Z[i][j] = Dato;
if(i != j) Z[j][i] = Dato;
r = r + SEP_COL + 7;
j++;
}
```

```
r = (79 - (SEP_COL + 7) * n) / 2;
c = c + SEP_REN;
}
}
void MATWM( long double Z[TAM][TAM],int m,int n)
{
int i,j,r,c;
r = (79 - (SEP_COL + 7) * n) / 2;
c = (24 - (SEP_REN * m)) / 2;
for (i=0;i<m;i++) {
for (j = 0;j < n;j++) {
  gotoxy(r,c);
  printf("%7.3Lf",Z[i][j]);
  r = r + SEP_COL + 7;
 }
r = (79 - (SEP_COL + 7) * n) / 2;
  c = c + SEP_REN;
}
}

void MATUM( long double Z[][TAM],int n)
{
int i,j;

for (i = 0;i < n;i++) {
    for (j = 0;j < n;j++)
Z[i][j] = 0.0;
    Z[i][i] = 1.0;
}
}

SIGN( long double a, long double b)
{
if (b < 0) a = -a;
return(a);
}

long double MATAN( long double Z[][TAM],int n)
{
long double VarM;
int i,j;
long double VarMatan=0.0;

for (i = 0;i < n;i++)
{
for (j=0;j<n;j++)
if (VarMatan -ABS(Z[i][j])<0) VarMatan=ABS(Z[i][j]);
}
return(VarMatan);
}
```

```
void MATSK(int l)
{
int i;

for (i = 0;i < l;i++) putchar('\n');
}

void MATRR( long double Z[TAM][TAM], long double s, long double
c,int i, int j, int n)
{
long double x,y;
int k;
for (k = 0;k < n;k++)
{
x = Z[i][k];
y = Z[j][k];
Z[i][k] = c * x + s * y;
Z[j][k] = c * y - s * x;
}
}

void MATRC( long double Z[TAM][TAM], long double s, long double
c,int i,int j,int n)
{
long double x,y;
int k;
for (k = 0;k < n;k++)
{
x = Z[k][i];
y = Z[k][j];
Z[k][i] = c * x - s * y;
Z[k][j] = c * y + s * x;
}
}

void main()
{
long double Z[TAM][TAM];
long double U[TAM][TAM];
long double b,s,c,cot;
long double A,EPS,Q,D;
char car;
int k,i,j,i1,IX,N1;
int N;
char t[80];
clrscr();
printf("\n\nProporcione la dimensión de la matriz cuadrada: ");
scanf("%d",&N);
b = s = c = cot = 0;
clrscr();
```

```
MATSK(6);
printf("                        UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE
MEXICO \n");
MATSK(2);
printf("                   ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS
PROFESIONALES,  ACATLAN \n");
MATSK(5);
printf("                             MATEMATICAS APLICADAS Y
COMPUTACION \n");
LINEA_H(1,1,80,1);
LINEA_H(24,1,80,1);
LINEA_V(1,1,24,1);
LINEA_V(80,1,24,1);
gotoxy(15,23);
printf("Pulse cualquier tecla para continuar . . .");
getch();
clrscr();
MATSK(10);
printf("                METODO DE JACOBI PARA DIAGONALIZAR UNA
MATRIZ SIMETRICA \n");
printf("\n\n                                    BEATRIZ TRUEBA RIOS
\n\n");
MATSK(1);

LINEA_H(1,1,80,1);
LINEA_H(24,1,80,1);
LINEA_V(1,1,24,1);
LINEA_V(80,1,24,1);

LINEA_H(3,3,77,1);
LINEA_H(20,3,77,1);
LINEA_V(3,3,20,1);
LINEA_V(77,3,20,1);

LINEA_H(6,6,74,1);
LINEA_H(17,6,74,1);
LINEA_V(6,6,17,1);
LINEA_V(74,6,17,1);
gotoxy(22,23);
printf("Pulse cualquier tecla para continuar . . .");
getch();
clrscr();
MATRM(Z,N,N);
clrscr();
centra(t,"LA MATRIZ DE ENTRADA QUE SERA DIAGONALIZADA ES:");
printf(t);
printf("\n\n\n");

MATSK(3);
MATWM(Z,N,N);
printf("\n\n\n\n\n");
```

```
centra(t, "Pulse cualquier tecla para continuar . . .");
printf(t);
getch();
clrscr();
MATUM(U,N);
A = MATAN(Z,N);
EPS = 1.0e-6 * A;
Q = 0.5;
for (k = 0;k < ITER;k++) {
Q = Q * Q;
D = A * Q;
N1 = N - 1;
do {
IX = 0;
for (i = 0;i < N1;i++)   {
i1 = i + 1;
for (j = i1;j < N;j++) {
if((ABS(Z[i][j]) - D) <= 0) continue;
IX = 1;
b = (Z[i][i] - Z[j][j]) / (2.0 * Z[i][j]);
cot = b + SIGN(sqrt(b * b+1.0),b);
s = SIGN(1.0,b) / sqrt(cot * cot+1.0);
c = s * cot;
MATRR(Z,s,c,i,j,N);
MATRC(Z,-s,c,i,j,N);
MATRC(U,-s,c,i,j,N);
Z[i][j] = 0.0;
Z[j][i] = 0.0;
}
}
} while(IX);
if (D - EPS <= 0) {
MATSK(1);
centra(t, "MATRIZ FINAL DE VECTORES PROPIOS");
printf(t);
printf("\n\n");
MATWM(U,N,N);
LINEA_H(1,1,80,1);
LINEA_H(22,1,80,1);
LINEA_H(24,1,80,1);
LINEA_V(1,1,24,1);
LINEA_V(80,1,24,1);
centra(t, "Pulse cualquier tecla para continuar . . .");
printf(t);
getch();
clrscr();
MATSK(1);
centra(t, "MATRIZ FINAL DE VALORES PROPIOS");
printf(t);
printf("\n\n");
MATWM(Z,N,N);
```

```
LINEA_H(1,1,80,1);
LINEA_H(22,1,80,1);
LINEA_H(24,1,80,1);
LINEA_V(1,1,24,1);
LINEA_V(80,1,24,1);
centra(t, "Pulse cualquier tecla para continuar . . .");
printf(t);
getch();
clrscr();
exit(1);
}
}
putchar('\n');
centra(t,"El método de Jacobi no converge para esta matriz.");

}
```

Proporcione la dimension de la matriz cuadrada: 5

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES, ACATLAN

MATEMATICAS APLICADAS Y COMPUTACION

Pulse cualquier tecla para continuar . . .

METODO DE JACOBI PARA DIAGONALIZAR UNA MATRIZ SIMETRICA

BEATRIZ TRUEBA RIOS

Pulse cualquier tecla para continuar . . .

ESCRIBA LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ:

3				
2	4			
1	1	2		
0	-1	6	5	
0	-1	0	-1	3

LA MATRIZ DE ENTRADA QUE SERA DIAGONALIZADA ES:

3.000	2.000	1.000	0.000	0.000
2.000	4.000	1.000	-1.000	-1.000
1.000	1.000	2.000	6.000	0.000
0.000	-1.000	6.000	5.000	-1.000
0.000	-1.000	0.000	-1.000	3.000

Pulse cualquier tecla para continuar . . .

MATRIZ FINAL DE VECTORES PROPIOS

0.699	0.544	-0.065	0.101	0.449
-0.568	0.783	-0.229	0.037	-0.107
-0.179	0.079	0.744	0.621	0.151
0.017	-0.206	-0.607	0.767	-0.037
-0.396	-0.206	-0.149	-0.122	0.874

Pulse cualquier tecla para continuar . . .

MATRIZ FINAL DE VALORES PROPIOS

1.215	0.000	-0.000	-0.000	0.000
0.000	5.944	-0.000	-0.000	0.000
-0.000	-0.000	-3.098	0.000	0.000
-0.000	-0.000	0.000	9.832	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	3.106

Pulse cualquier tecla para continuar . . .