01171

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

FACULTAD DE INGENIERIA

TECNICAS DE PRONOSTICO DE RIESGO (BETA) Y SU APLICACION AL C.A.P.M. MULTIPERIODICO

MOISES SILVA GONZALEZ

ASESOR DE TESIS:
DR. SERGIO FUENTES MAYA

T E S I S

PRESENTADA A LA DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE INGENIERIA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN INGENIERIA (INVESTIGACION DE OPERACIONES)

CIUDAD UNIVERSITARIA
MEXICO, D. F.
OCTUBRE, 1993

RESUMEN

En la familia de modelos de fijación de precios de activos se destaca el C.A.P.M. por simple y fácil de manejar. Sin embargo, tiene la limitante de no brindar un horizonte mayor al de un período. Ante tal desventaja, este trabajo busca proponer una alternativa de inversión que permita un horizonte de un número finito de períodos, permitiendo el rendimiento en activos, bajo incertidumbre y riesgo mínimo.

No debe dejar de observarse que el lucro en asuntos de inversión, conlleva una parte de incertidumbre que no es posible evitar. Bajo tales circunstancias, se tiene la fundamental necesidad de estimar tal incertidumbre de la manera más racional posible.

Para enfrentar ese problema, se propone una técnica de pronóstico de parámetros de riesgo $\vec{\beta}(t)$ que tiene un valor minimizado en cada etapa, bajo un modelo de portafolio que generaliza el C.A.P.M. a un horizonte de más de un período.

Con el objeto de cuantificar el parámetro de riesgo $\vec{\beta}(t)$, se plantea usar la técnica de series de tiempo en el caso multivariado, ello debido a que el parámetro de riesgo es un vector que varía de manera fortuita en cada día. La propuesta además, comprende minimizar el valor de dicha estimación del riesgo a través del modelo que se propone para generalizar el C.A.P.M.

Al conocer las magnitudes que se mencionan y que forman parte del modelo de portafolio, se puede pasar a una toma de decisiones mediante los valores optimizados de las variables de decisión que forman parte integral del modelo de portafolio, es decir, es posible determinar cuánto comprar de cada activo en cada período del horizonte.

INTRODUCCION

Esta tesis está dirigida a las personas denominadas inversionistas agresivos [3]*. Al decir inversionista agresivo, el autor referido en la cita anterior, está pensando en aquel tipo de inversionista que sigue y analiza el desenvolvimiento del mercado prácticamente sobre una base diaria, en búsqueda de oportunidades. Es decir, aquel inversionista que por su propia naturaleza, hará cambios en su portafolio con mayor frecuencia que el inversionista promedio, teniendo como objetivo, acelerar el ritmo de generación de utilidades.

De tal modo que toda persona que se encuentre AVIDA por multiplicar su capital al mayor ritmo posible y bajo un manejo racional del riesgo, debe estar interesado en un trabajo como éste.

Pero para despertar aún más el interés por este tema tan apasionante, se procederá a poner a modo de sugestión, algunas de las hipótesis del C.A.P.M. adelantando sobre las siglas su denominación inglesa, **CAPITAL ASSET PRICING MODEL**, así como su interpretación en español, **MODELO DE FIJACION DE PRECIOS DE ACTIVOS DE CAPITAL**. En las siguientes hipótesis se destaca la importancia de que se conozca de técnicas para analizar el comportamiento de los mercados de dinero y de valores.

a) LOS INVERSIONISTAS EVALUAN LOS PORTAFOLIOS TOMANDO EN CUENTA LAS TASAS O RENDIMIENTOS ESPERADOS Y LAS DESVIACIONES ESTANDAR DE ESTOS, SOBRE EL HORIZONTE DE UN PERIODO.

b) LOS INVERSIONISTAS SIEMPRE ESTAN EN LA BUSQUEDA DE INCREMENTAR SU RIQUEZA, PERO SIEMPRE ELEGIRAN, DENTRO DE LAS MEJORES ALTERNATIVAS DE RENDIMIENTO, AQUELLAS QUE PRESENTEN MENOR RIESGO.

Por lo tanto, se debe observar que al hablar del inversionista agresivo, no se le debe asociar con estrategias irracionales. Antes por el contrario, el inversionista agresivo no necesariamente incurre en mayores riesgos en el desarrollo normal de sus operaciones. De hecho, si realiza bien su labor, puede llegar a correr menos riesgos que un inversionista conservador. Ello debido a que gracias a su seguimiento sistemático, a su estudio y análisis del mercado, se ubica en las mejores situaciones en la mayor parte de las veces, incluso si su actitud hacia el riesgo no es muy diferente a aquella del inversionista promedio.

En consecuencia, la labor del inversionista agresivo se traduce, primeramente, en la minimización de riesgos, manteniendo las mismas probabilidades de éxito que un inversionista conservador. En segundo lugar, se traduce en la maximización de utilidades con similares grados de riesgo que los de los conservadores.

Podría pensarse por un momento, que estos asuntos atañen sólo a empresarios, personal especializado en estas labores o dueños de grandes fortunas. Sin embargo, considérese lo siguiente: bajo un sistema en el que, en cuestiones económicas, todo se puede comprar o vender, siempre y cuando haya acuerdo en los precios, es del interés del público en general el conocimiento de las inversiones. Para ello baste decir que se considera como un inversionista a toda persona que tiene ingresos superiores a sus egresos, es decir, que su gasto diario es menor a lo que gana en un día. En tales condiciones, las personas que están ahorrando parte de sus salarios en comprar una vivienda, un automóvil, una computadora, un negocio propio, en resumen, cualquier bien o servicio en general, son vistos como inversionistas.

Habiendo dejado en claro que bajo determinadas circunstancias, una persona puede ser considerada como un inversionista y que por tanto, el tema que se desarrolla en éste trabajo ha de ser de su interés particular, y que una buena alternativa de todo inversionista es proceder como uno agresivo, se presenta una alternativa sistemática, racional y de seguimiento diario en el análisis de las inversiones. Todo ello en el entendido de que el inversionista agresivo busca el mejor resultado de sus operaciones de inversión, y que por tal motivo requerirá de las técnicas matemáticas, consideradas la mejor herramienta en el análisis de cualquier problema cuantificable.

Para explicar el objetivo del presente trabajo, se deben mencionar los siguientes puntos; el problema de selección de portafolio puede enmarcarse en varios de los esquemas de la programación matemática, entre ellos se tienen, la programación lineal, la programación no lineal, la programación cuadrática, la entera y entera mixta, así como la programación dinámica determinista y estocástica. Todos los nombres antes referidos, son simples clasificaciones de técnicas matemáticas, que reciben un determinado nombre de acuerdo al tipo de problemas que se pueden resolver con ellas. Se verá en este trabajo un ejemplo de aplicación de una de dichas técnicas y se podrá apreciar en toda su magnitud, la importancia del uso sistemático de tales herramientas.

Es el enfoque de la programación dinámica determinista la que se explota en este trabajo. Pero para poder dar justificación de dicho uso de la programación dinámica, debe iniciarse por explicar en qué consiste el problema de selección de portafolios.

Un portafolio es una combinación lineal de activos de mercado. Dicha combinación lineal, obedece a determinadas restricciones que dependen del modelo elegido por el diseñador del portafolio, los <u>activos de mercado</u> son las acciones emitidas por las empresas y que están disponibles para ser comercializadas por el público en general, lo que se describe brevemente en los dos primeros capítulos de este trabajo. La representación matemática del portafolio es,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \, r_i .$$

En la que <u>n</u> es el número de activos que son tomados en cuenta para formar el portafolio, en el contexto del modelo de Markowitz <u>n</u> será el total de las acciones que se cotizan en el mercado accionario, x_i es la fracción del portafolio invertida en el activo <u>i</u> que tiene un rendimiento o paga una tasa de interés r_i.

A reserva de la explicación del modelo planteado en este trabajo, y tomando como una referencia inicial lo antes mencionado, se plantea el siguiente objetivo.

Objetivo

Modelar y determinar un portafolio de inversión que obedezca a espectativas multiperiódicas y que sea consistente con las hipótesis del C.A.P.M., que permita un rendimiento acumulado acorde con los intereses del inversionista y ser susceptible a modificaciones de acuerdo a las condiciones cambiantes del mercado.

El hecho de que los parámetros que entran al modelo sean constantes conocidas, ocurre gracias al empleo de la técnica de las series de tiempo y a los valores pronosticados que ellas arrojan, todo esto se detalla en el presente trabajo, baste decir por el momento que el problema queda planteado de la siguiente manera: se diseña un modelo de portafolio que tiene carácter recursivo, con parámetros del modelo conocidos, y que cumple con las restricciones del C.A.P.M., así mismo permite al diseñador del portafolio, adaptarlo a las circuntancias del medio en el que quiere invertir, esto es, tiene la facilidad de ser adaptable.

Ya que se ha planteado el objetivo, debe explicarse el por qué del empleo de la programación dinámica determinista. Para iniciar debe indicarse que de acuerdo a lo expuesto en el objetivo, el encuadre de la programación dinámica, sin pensar por un momento en el aspecto deterministico, es muy natural; ello debido al carácter de etapas o carácter multiperiódico del modelo. El problema de portafolio planteado originalmente por Harry M. Marokwitz es de un sólo período y consiste en determinar, cuánto comprar de cada acción y retener al final del mismo período.

En consecuencia, para poder determinar un modelo de portafolio de inversión, el carácter recursivo y de múltiples etapas que brinda la formulación de los funcionales de la programación dinámica, resulta ideal para diseñar un portafolio que contenga varias etapas.

Sin embargo, las tasas de interés que dan los activos de mercado (r_i) se modelan generalmente como variables aleatorias, las cuales no necesariamente son independientes, de hecho no lo son. El lector podría pensar, que en todo caso debería aplicarse el esquema de la programación dinámica no determinista o con incertidumbre. No obstante, como se plantea el modelo de este trabajo, es posible llegar a una representación del problema del portafolio en la cual todos los parámetros del mismo son constantes conocidas.

En lo sucesivo, se hablará del inversionista agresivo simplemente como el inversionista, entendiendo con esto que se trata de un inversionista que enfoca su problema de inversiones como lo plantea el objetivo de ésta introducción.

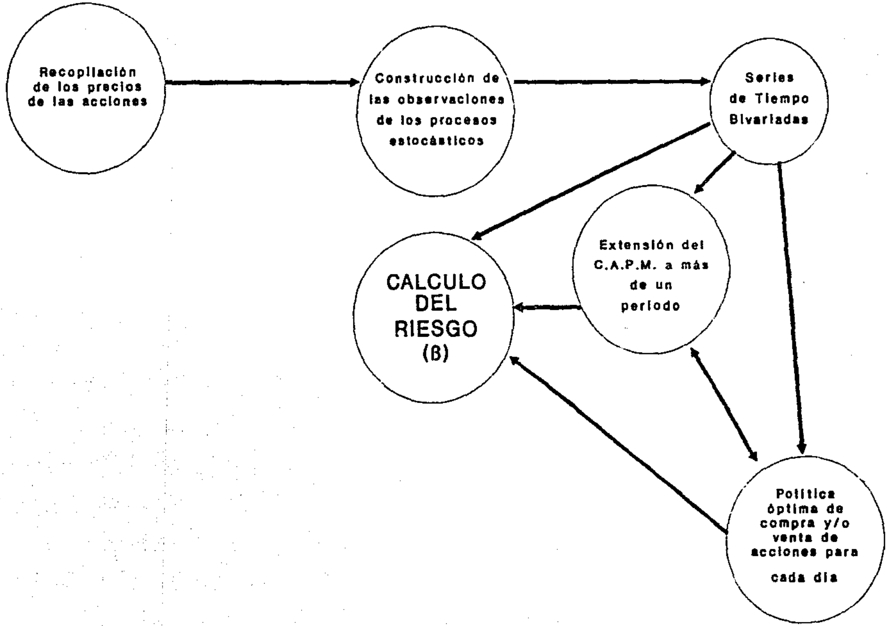
Para alcanzar el objetivo que se persigue, la tesis se divide en las siguientes partes: en el primer capítulo se describe el entorno de las inversiones en nuestro país, se explica brevemente cuál es el mecanismo que rige a los sistemas bursátil y financiero mexicanos y la Bolsa Mexicana de Valores; en el segundo se presenta el funcionamiento del mercado accionario, y la manera en que se determinan los precios de las acciones; en el tercer capítulo se describe el modelo de C.A.P.M. originalmente planteado, sus hipótesis, así como el parámetro de riesgo β, se describe en foma general la técnica de las series de tiempo, la manera en que se puede modelar el mercado accionario como una serie de tiempo multivariada o vectorial, y por último y lo más importante del capítulo, así como del trabajo, el modelo propuesto; en el cuarto capítulo se explica la manera en que se aplica el modelo a la informacón analizada, se presentan los resultados del trabajo, que dicho sea de paso, son muy alentadores a seguir enriqueciendo el modelo, se comparan los resultados contra los del C.A.P.M. original; y finalmente, en el quinto y último capítulo se presentan las conclusiones que se pudieron obtener como consecuencia del análisis realizado y de los resultados obtenidos.

Con el fin de mostrar de manera gráfica el recorrido que se hará a través del siguiente trabajo, se presenta en la siguiente página un esquema que muestra las etapas antes descritas, y que a su vez son los sucesivos estados de la metodología propuesta en el análisis del problema de portafolio.

Con dicho esquema se busca que se aprecie en forma evidente, la dependencia del cálculo del parámetro β, de los diversos factores que en él intervienen.

* : LA REFERENCIA CORRESPONDIENTE A LA BIBLIOGRAFIA EMPLEADA SE ESCRIBIRA EN NEGRITAS ENTRE CORCHETES, DE ACUERDO AL NUMERO QUE SE LE ASOCIA.

TECNICA PARA EL CALCULO DE (ß).



NO EXISTE

PAGINA

56
8

CAPITULO 1. EL ENTORNO DE LAS INVERSIONES EN MEXICO.

Trata de los mecanismos y elementos que integran al sistema financiero mexicano y a la Bolsa Mexicana de Valores.

•EL SISTEMA BURSATIL Y EL SISTEMA FINANCIERO MEXICANOS.

Para iniciar la explicación del entorno en el que se desarrollan las actividades bursátiles del inversionista y las empresas mexicanas, se comenzará con el sistema financiero, puesto que éste engloba a la actividad bursátil como uno de sus elementos. Efectivamente, la economía del país comprende una gran diversidad de actividades, operaciones, y proyectos, que se llevan a cabo como resultado de una planeación del desarrollo nacional, de manera tal que hablar de todo ello en un trabajo tan específico no es posible.

Por ello sólo se limitará la explicación a la actividad del sector financiero y muy en especial a un rango aún menor de este que se conoce como mercado de valores. Si bien será necesario presentar algunas ideas generales del sistema financiero mexicano para poder entender la operación del medio bursátil. <u>El sistema financiero mexicano</u> se constituye de todas aquellas instituciones u organizaciones, públicas o privadas, por medio de las cuales se desarrollan y regulan las actividades de circulación de dinero, otorgamiento y obtención de créditos, realización de inversiones y prestación de servicios bancarios.

Queda en claro que al sistema financiero lo componen elementos de dos clases, los públicos y los privados. A los primeros les corresponde la labor de regular el buen desempeño de las finanzas del país, esto mediante reglamentación y supervisión de las operaciones crediticias que se llevan a cabo. A los segundos les toca la labor de facilitar la concurrencia de oferentes y demandantes de recursos monetarios, es decir, capital. Los oferentes son generalmente el público que desea obtener una ganancia a cambio de prestar su dinero, y los demandantes son por lo general, representantes de empresas de algún sector de la producción o del sector de servicios que requieren de financiamiento para la realización de algún proyecto industrial, comercial, de servicios o de desarrollo económico en general.

Los organismos públicos determinan la política monetaria general fijada por el gobierno a través de la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (S.H.C.P.), siendo ésta última la máxima autoridad en la que se sustentan todas las operaciones comerciales del país.

Las dependencias de la S.H.C.P. que tienen relación directa con el mercado bursátil son: las Direcciones Generales de Banca de Desarrollo, de Banca Múltiple y de Seguros y de Valores; muy en especial la última.

Además de estos, hay tres organizaciones reguladoras y supervisoras:

1. Banco de México, que tiene como responsabilidad el controlar la emisión de dinero, es el agente público que suministra el dinero circulante al país. Se encarga de controlar la circulación monetaria y la regulación crediticia y cambiaria.
2. Comisión Nacional Bancaria y de Seguros, su tarea es supervisar el buen funcionamiento de los bancos, las instituciones de seguros y de fianzas.
3. Comisión Nacional de Valores, es la reguladora del desarrollo y operación del sistema bursátil.

Hay dos tipos de Sociedades Nacionales de Crédito: las instituciones de banca múltiple y las de banca de desarrollo. Las primeras son los bancos y realizan operaciones pasivas, que se determinan por los depósitos que reciben, y las operaciones activas, que se originan en los préstamos que otorgan. La labor de las últimas es propiciar el desarrollo en un área específica de la economía.

Una vez que se ha descrito brevemente al sistema financiero mexicano, se pasará a explicar, con igual brevedad, al sistema bursátil mexicano.

El sistema bursátil mexicano se conforma por todas las organizaciones públicas o privadas que regulan y propician las actividades crediticias por medio de los titulos-valor, que son las acciones y los bonos; que se negocian en la Bolsa Mexicana de Valores S. A. de C. V. (B.M.V.), apegándose a la Ley del Mercado de Valores (L.M.V.).

De acuerdo a la publicación en el Diario Oficial de la Federación con fecha, 3 de enero de 1975, la L.M.V. regula la oferta pública de valores, la intermediación en el mercado de éstos, las actividades de las personas que en él intervienen, el Registro Nacional de Valores e Intermediarios y las autoridades y servicios en materia de mercado de valores.

Bajo ese régimen de organizaciones y regulaciones, el mecanismo en el cual opera el sistema bursátil mexicano, visto de manera simplificada es el siguiente: hay dos grupos principales, que determinan la actividad del sistema, los oferentes y los demandantes. Ambos acuden a un espacio común para lograr sus fines respectivos, los primeros obtener una ganancia o rendimiento, y los segundos obtener un financiamiento a cambio del cual pagan una cantidad de dinero por el capital de los inversionistas (oferentes). El lugar común de estos grupos son las casas o los agentes de bolsa.

Las operaciones de intercambio de recursos se regulan mediante TITULOS-VALOR que se negocian en la Bolsa Mexicana de Valores. La Comisión Nacional de Valores supervisa y regula la realización de todas estas actividades y la L.M.V. reglamenta el sistema en general.

De acuerdo a lo que marca la L.M.V., se reconocen como valores a las acciones, obligaciones, bonos y demás titulos de crédito. Los valores que se negocian en la B.M.V. son: Acciones de empresas comerciales, industriales y de servicios, Acciones de sociedades de inversión, Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES), Certificados de aportación patrimonial, Petrobonos, Pagarés de la Tesorería de la Federación (Pagafes), Certificados plata, Obligaciones, Aceptaciones bancarias, Papel Comercial, Pagarés empresariales bursátiles, Certificados de participación inmobiliaria, Bonos bancarios de desarrollo, Bonos de renovación urbana del D.F., Bonos de indemnización bancaria y Bonos de desarrollo del Gobierno Federal.

El Registro Nacional de Valores e Intermediarios es un organismo público formado por una sección de valores y otra de intermediarios y está a cargo de la Comisión Nacional de Valores.

Las casas de bolsa son las sociedades anónimas registradas como tales en la Sección de Intermediarios del Registro Nacional de Valores e Intermediarios. Entre las actividades que las casas de bolsa llevan a cabo están:

- intermediación en el mercado de valores,
- recepción de fondos para realizar operaciones con valores que les encomienden los inversionistas,
- otorgamiento de crédito para apoyar la inversión de sus clientes en la bolsa,
- representar a inversionistas y a emisores de acciones.

Todas las casas de bolsa cobran las mismas tarifas por sus servicios, pero la cantidad mínima que aceptan para inversión varía mucho, lo mismo que las modalidades con que ofrecen sus servicios, algunas de las modalidades son: mínimos de inversión en los diferentes instrumentos, información disponible para los inversionistas y otros más. Se advierte que los inversionistas sólo pueden participar en el mercado de valores a través de las casas de bolsa o por medio de las instituciones bancarias autorizadas para actuar como intermediarios bursátiles.

·LA BOLSA MEXICANA DE VALORES.

Ahora se pasará a considerar el funcionamiento de la Bolsa Mexicana de Valores. Una bolsa de valores tiene como fin el propiciar las operaciones con valores y fomentar el desarrollo del mercado bursátil. Para ello realiza, entre otras las siguientes actividades: establecer locales e instalaciones que permitan las operaciones comerciales de los valores, ofrecer información de los valores inscritos en la bolsa, certificar las cotizaciones de los valores registrados.

Su operación es bajo una concesión de la S.H.C.P., se debe constituir como sociedad anónima de capital variable y en México sólo existe una sociedad de ese tipo, la Bolsa Mexicana de Valores S. A. de C. V. (B.M.V.). El funcionamiento de esta bolsa de valores gira en torno a las operaciones de intercambio de recursos monetarios que, a través de titulos-valor se llevan a cabo en su piso de remates.

Es en función al tipo de rendimiento o renta que otorgan y a su plazo o duración, que se clasifican los valores que se negocian en la B.M.V., en su piso de remates. En el piso de remates se reúnen los agentes de bolsa y los representantes de las casas de bolsa para efectuar las operaciones de compra-venta de valores.

Los valores que se negocian en la B.M.V., de acuerdo a la mencionada clasificación son,

INSTRUMENTOS DE RENTA FIJA

·LARGO PLAZO:	bonos de indemnización bancaria
	bonos bancarios de desarrollo
	bonos de renovación urbana dèl D.F.
	petrobonos
	obligaciones
·CORTO PLAZO:	cetes
	pagafes
	papel comercial

aceptaciones bancarias
pagarés empresariales bursátiles
metales preciosos amonedados

INSTRUMENTOS DE RENTA VARIABLE:

•LARGO PLAZO	acciones industriales, comerciales y de servicios acciones de sociedades de inversión.

Las operaciones que realizan los agentes y representantes de bolsa en el piso de remates, pueden ser de tres tipos: 1) órdenes limitadas, en las que el cliente (inversionista) establece el precio máximo de compra o el mínimo de venta; si el valor se sale de éste intervalo no se realiza la operación, 2) órdenes al mercado, que se realizan al precio que se cotice en el momento, y 3) órdenes condicionales en las que la operación se realiza sólo en el caso de que se den ciertas condiciones que especifique el inversionista.

Esta es pues la descripción general del panorama de las inversiones en México, para mayor aclaración de estas ideas y conceptos, se remite al lector a los libros, Invierta en la bolsa [2] e Inversiones [3].

CAPITULO 2. EL MERCADO ACCIONARIO.

Trata de las negociaciones entre los participantes de las operaciones bursátiles y de la manera en que se establecen los precios de las acciones.

•COSTOS DE TRANSACCION.

La diferencia entre una postura de oferta y la demanda de capital dan lugar a un costo de los valores que se cotizan en el mercado. Pero debe tomarse en cuenta que este costo adicional, es independiente de la tarifa que cobran las casas de bolsa por sus servicios a los inversionistas, que como ya se indicó en el capítulo anterior, es la misma en todas ellas, y tiene una tasa de 1.7% sobre el volumen de acciones negociado u operado.

La discrepancia entre la oferta y la demanda constituye de ésta forma, una parte de los costos de la operación de compra-venta de valores de mercado. Por ejemplo, supóngase una operación en la que se compra una acción y después se vende durante un período en el que ninguna información nueva provoca que los inversionistas reafirmen su confianza en el valor de la acción. Concretamente, que no cambien los precios de la acción ni a la venta ni a la compra. Por lo regular, la acción se comprará al precio que demandan los inversionistas y se venderá al precio de oferta, que es inferior.

Lo que ocurre con todo el proceso es la determinación del valor de las acciones del mercado por medio de la oferta y la demanda. A mayor volumen de acciones de un mismo instrumento cotizándose en el mercado, menor será su valor, ya que de ser alto, los inversionistas tomarán una opción que les dé mejores rendimientos a un menor costo.

Sin embargo, no todos los activos disfrutan de este tipo de liquidéz. Las acciones de empresas pequeñas tienden a venderse a menores precios, pero ocurre un efecto similar de compra-venta. En consecuencia el costo de transacción porcentual es considerablemente mayor en las acciones de la empresas pequeñas, respecto de las más grandes.

Las comisiones de los agentes y o las casas de bolsa, así como los costos por discrepancia entre la oferta y la demanda, representan costos de transacción para órdenes pequeñas de acciones establecidas por los inversionistas, cuando estas son de alrededor de 100 acciones. Para órdenes de mayor tamaño se debe tomar en cuenta la posibilidad de impactos en el precio.

Los impactos en el precio tienen una causa similar a las diferencias de precio en la compra y en la venta de acciones, si se tiene una orden de compra de acciones, por ejemplo, a mayor tamaño de la orden, mayor será la posibilidad de que el precio de compra del inversionista sea elevada. Más aún, mientras más rápidamente se satisfaga la orden y mientras mayor sea el conocimiento del agente o la organización que coloca la orden, mayor será el precio de compra que se le cargue al inversionista.

•INVERSION BANCARIA

En el proceso de negociación de las acciones hay dos mercados principales. La diferencia básica entre ellos está en sus integrantes. A esos mercados se les conoce como, mercados primario y secundario. Todo lo referido hasta aquí, es relativo al mercado secundario, en donde convergen agentes y casas de bolsa.

Sin embargo, los solicitantes de crédito, es decir, los representantes de las empresas industriales, de comercio y de servicios, no pueden acudir personalmente a los inversionistas (oferentes), debido a la magnitud de los capitales que demandan.

Es por ello que existe una instancia a la que los demandantes de capital (los emisores) acuden para resolver sus problemas de financiamiento. Y esa es el mercado primario. En él, los emisores tratan directamente con los compradores, que en ésta etapa del proceso son fundamentalmente banqueros inversionistas y que habrán de comerciar las acciones que compren a los emisores en el mercado secundario.

El proceso comienza con las discusiones entre las empresas emisoras y los banqueros inversionistas. Una vez que se han establecido las características básicas de la oferta de acciones, se crea un registro ante la Comisión Nacional de Valores. Y se establece un texto tentativo de las espectativas de ventas del emisor, pero no se incluye el precio real de la acciones y no se lleva a cabo la venta final hasta que el registro se hace efectivo y el texto tentativo se hace efectivo indicando el precio en el cuál se venderán las acciones.

Durante el período en el que no se venden las acciones el banquero inversionista puede intentar estabilizar el precio de los activos en el mercado secundario estando listo para hacer compras a un precio particular.

•DETERMINACION DE LOS PRECIOS DE LAS ACCIONES.

Aunque el financiamiento de una empresa lo constituyan cientos de miles o quizá millones de acciones, sólo son algunos millares de ellas los que se negocian al día, de lo cual es natural preguntarse, ¿qué determina los precios de las acciones negociadas en una jornada bursátil?.

Hay varias alternativas de negociación que se dan con las acciones y que influyen en la determinación de sus precios. Entre ellas están los esquemas de ofertas a la compra y ofertas a la venta. Estos son mecanismos que interaccionan entre sí en una jornada normal de actividades. Sin embargo lo que está más de acuerdo con ambas partes de la negociación, es el establecer un precio por consenso.

Las emisoras, que requieren del dinero para financiar sus proyectos determinan cuál es la cantidad mínima que necesitan para llevarlos a cabo, y los inversionistas establecen la cantidad máxima de dinero que pueden prestar a las empresas a fin de no afectar sus intererses durante ese período de tiempo, esto representa el equilibrio del mercado y con esto se establece un precio justo para cada acción.

Lo anterior lleva a establecer el concepto de <u>mercado eficiente</u>. Un <u>mercado eficiente</u> es aquel en el que el precio de toda acción es igual a su valor de inversión en todo momento. Es decir aquel mercado en el que no es posible hacer ganancias anormales debido a que se cuenta con información que le permite a uno, hacer mejores decisiones de compra y venta de valores. Se debe destacar que el concepto de mercado eficiente es una de las hipótesis del modelo de C.A.P.M. original, es por tal razón que se ha presentado en este momento, para que al plantearse y describirse la estructura de tal modelo, se pueda apreciar el significado de dicha hipótesis.

Con estos párrafos se han establecido los conceptos en los que se apoya la actividad bursátil, con lo cual ahora se pasará a la descripción del modelo que se propone en este trabajo.

CAPITULO 3. EL PRECIO DE RIESGO DEL MERCADO (β) MODELADO COMO UNA SERIE DE TIEMPO MULTIVARIADA.

Se presenta el modelo C.A.P.M. y se establece el parámetro del riesgo β. Se introduce el modelo propuesto y la metodología de su solución.

•EL COEFICIENTE (β) COMO UNA MEDIDA DEL RIESGO EN EL C.A.P.M.

Antes de comenzar con el concepto del coeficiente β, es necesario explicar lo que significa el C.A.P.M.

El C.A.P.M. es uno de los varios modelos que existen en la teoría de selección de portafolios clasificados como modelos de fijación de precios de activos [1].

Y C.A.P.M. son las siglas de los conceptos que determinan al modelo, Capital Asset Pricing Model, Modelo de Fijación de Precios de Activos de Capital. Como ya se indicó en la Introducción, el problema de portafolio queda englobado en una teoría más general, llamada Teoría de Decisiones [5].

Los problemas en esta rama de las matemáticas abarcan casos diversos y condiciones muy generales, es en función de cada caso la estrategia que se sigue para resolverlo. Y el problema de portafolio no es la excepción.

Hay modelos de portafolios que se aplican a un solo período o etapa, los hay multiperiódicos, así como deterministas o estocásticos [4]. Dentro de estas clasificaciones hay subdivisiones en las que los problemas modelados son lineales, cuadráticos, semilineales, de programación cero uno, o bien, combinaciones tales como restricciones lineales y función objetivo cuadrática.

El modelo de C.A.P.M. que se debe a Sharpe, Lintner y Treynor [4], es de los modelos clasificados como de función cuadrática y mixto, ya que algunas de las restricciones del mismo son lineales. Pero ese modelo se limita a una sola etapa, a lo que también se le llama modelo estático.

Este trabajo tiene como uno de sus objetivos, extender el modelo de C.A.P.M. a un caso multiperiódico. Pero antes de tocar el tema se debe concretar lo mencionado hasta ahora. El modelo C.A.P.M., es un modelo de selección de portafolios de una sola etapa, o estático, y se basa en las siguientes suposiciones [5],

1. Los inversionistas evalúan los portafolios tomando en cuenta las tasas o rendimientos esperados y las desviaciones estándar de éstos, sobre el horizonte de <u>un</u> período.
2. Los inversionistas siempre están en la búsqueda de incrementar su riqueza, de manera que al tener que elegir entre dos portafolios, elegirán aquel con la mayor tasa esperada o rendimiento esperado.
3. Los inversionistas muestran aversión al riesgo, de modo que al elegir entre dos portafolios que les brindan la misma tasa esperada, elegirán aquél con la menor desviación estándar.
4. Los valores que emiten las empresas son <u>infinitamente divisibles</u>. Lo que significa que un inversionista puede comprar una fracción de una acción si así lo desea.
5. Existe un instrumento que ofrece una tasa libre de riesgo, a la cual presta o pide prestado el inversionista.
6. Los impuestos y los costos de transacción son irrelevantes.
7. Todos los inversionistas tienen su horizonte en el mismo período.
8. El activo libre de riesgo es el mismo para todos los inversionistas.
9. La información está disponible, instantánea y gratuitamente para todos los inversionistas.
10. Todos los inversionistas tienen espectativas homogéneas, lo que significa que sus percepciones de los rendimientos esperados, las desviaciones estándar y las covarianzas de los

activos son las mismas. Dichas percepciones son subjetivas.

Por todo lo anterior, es claro que el C.A.P.M. es un modelo muy simplificado de la realidad. Las consecuencias económicas del modelo son que, los mercados de valores son perfectos, esto es, sin fricciones que impidan la inversión.

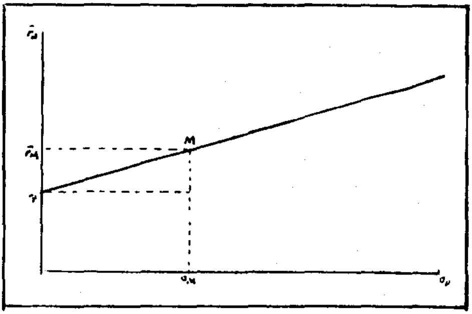
Una más de las consecuencias de la simplificación del modelo, es que existe equilibrio en el mercado de valores, en esas condiciones existe un portafolio **m** que contiene una fracción de cada uno de los valores suscritos en la bolsa, dicha fracción es la justa necesaria para que participen los activos en proporción al valor que ocupan del valor total del mercado accionario. Para hacer más concreta la idea, si V_m es el valor total de los activos del mercado, v_a el valor del activo a, y x_a la fracción de dicho activo en el portafolio m, el valor de la fracción x_a está dado por la expresión,

$$x_a = \frac{v_a}{V_m}, \qquad (3.1)$$

y el portafolio m por $\sum_{i=1}^{N} x_i r_i$ donde $x_i = \frac{v_i}{V_m}$, r_i es la tasa que rinde el activo i y N es el número de activos que están suscritos a la bolsa de valores y obviamente $V_m = \sum_{i=1}^{N} v_i$. Debe mencionarse que debido a su variación fortuita, la tasa r_i se modela como una variable aleatoria.

La combinación lineal de activos que conforman al portafolio de mercado, tiene asociados dos parámetros que la caracterizan, ellos son, su valor esperado $E[r_m]$ y su desviación estándar, σ_m. Estas dos cantidades, junto con la tasa libre de riesgo, r_f, son los parámetros que determinan la expresión del equilibrio en el C.A.P.M., denominada Línea del Mercado de Capitales (Capital Market Line), C.M.L.

$$\bar{r}_p = r_f + \frac{\bar{r}_m - r_f}{\sigma_m}\,\sigma_p. \qquad \text{(C.M.L.)} \quad (3.2)$$



Línea de mercado de capitales

La ecuación de C.M.L. dice que sólo es necesario conocer, la tasa esperada del mercado $E[r_m]$, la tasa del activo sin riesgo r_f, la varianza del mercado σ_m^2 y la varianza del portafolio σ_p^2 para poder determinar la tasa esperada de un <u>portafolio eficiente</u>.

Aunque la C.M.L. representa la relación de equilibrio entre la tasa esperada y la desviación estándar para portafolios eficientes, el CAPM <u>no</u> implica ninguna relación particular entre la tasa esperada y la desviación estándar (es decir, el riesgo total) para una acción individual. Para encontrar, en condiciones de equilibrio, una expresión para la tasa esperada de una acción individual, se debe considerar la relación que determina a la desviación estándar.

$$\sigma_p = \left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}\right]^{1/2} \qquad (3.3)$$

En la ecuación (3.3), x_i y x_j representan las fracciones invertidas en las acciones <u>i</u> y <u>j</u>, respectivamente, σ_{ij} significa la covarianza de los rendimientos entre el activo <u>i</u> y el activo <u>j</u>. Haciendo uso de esta ecuación, se puede determinar la desviación estándar del portafolio de mercado,

$$\sigma_M = \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_{iM} x_{jM} \sigma_{ij} \right]^{1/2} \tag{3.4}$$

en la que x_{iM} y x_{jM} denotan las proporciones invertidas en los activos i y j en el portafolio de mercado, respectivamente; estas fracciones son las que se determinan con la ecuación (3.1). Desarrollando un poco la ecuación (3.4) se tiene,

$$\sigma_M = \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_{iM} x_{jM} \sigma_{ij} \right]^{1/2} = \left[\sum_{i=1}^{N} x_{iM} \sum_{j=1}^{N} x_{jM} \sigma_{ij} \right]^{1/2},$$

en la que, para cada valor de i, la suma $\sum_{j=1}^{N} x_{jM} \sigma_{ij}$ representa la covarianza del activo i con el portafolio de mercado (σ_{iM}), y sustituyendo en la igualdad anterior esta cantidad, se llega a una expresión alternativa para σ_M,

$$\sigma_M = \left[\sum_{i=1}^{N} x_{iM} \sigma_{iM} \right]^{1/2}. \tag{3.5}$$

La ecuación que se ha obtenido es de gran interés para este trabajo, para notar su importancia basta observar que la varianza del mercado, es decir, el cuadrado de la expresión en la ecuación (3.5), es una combinación lineal que tiene los mismos coeficientes que el portafolio de mercado,

$$r_M = \sum_{i=1}^{N} x_i r_i, \qquad \text{donde} \quad x_i = \frac{V_i}{V_m}, \tag{3.6}$$

esta propiedad del modelo C.A.P.M. se utilizará para el modelo dinámico que se propone. Bajo las condiciones de equilibrio del modelo, y de acuerdo a las ecuaciones (3.5) y (3.6), cada inversionista considera que la medida relevante del riesgo para un activo, es su covarianza con el portafolio del mercado, σ_{iM}. Esto es, las acciones con mayores valores de σ_{iM} representan para el inversionista, las mayores contribuciones al riesgo del portafolio de mercado.

Dado que la relación entre el rendimiento y el riesgo es de tipo inverso, es decir, cuando el inversionista se muestra adverso al riesgo, busca los mayores rendimientos en contraparte a los menores riesgos, se obseva que los mayores valores de σ_{iM} tendrán que brindar, proporcionalmente, las mayores tasas esperadas a fin de que el inversionista se interese en comprarlas.

Con esa actitud del inversionista, se buscará eliminar del portafolio de mercado aquellas acciones que provoquen que la tasa esperada se eleve respecto a la desviación estándar. Como los inversionistas apreciarán ésta actitud como favorable, el portafolio de mercado <u>no</u> será más el portafolio de riesgo óptimo, de tal suerte que los <u>precios de las acciones estarán fuera de equilibrio</u>.

La expresión exacta del equilibrio entre el riesgo y la tasa esperada es

$$\bar{r}_i = r_f + \frac{\bar{r}_m - r_f}{\sigma_M^2}\sigma_{iM}. \tag{3.7}$$

A la ecuación (3.7) se le conoce como Línea de Mercado de Valores, Security Maket Line (SML), la que se representa con mucha frecuencia de la siguiente manera alternativa,

$$\bar{r}_i = r_f + (\bar{r}_M - r_f)\beta_i \quad , \tag{3.8}$$

donde el coeficiente β_i está definido como,

$$\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}, \tag{3.9}$$

llamado el coeficiente beta del activo <u>i</u>.

Una propiedad del coeficiente β es que, la β de un portafolio es simplemente un promedio ponderado de las betas de sus activos componentes, donde las proporciones invertidas en los activos son sus respectivos pesos, de modo que la β de un portafolio puede calcularse como,

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{N} x_i \beta_i \ . \tag{3.10}$$

Se verá a continuación la justificación del resultado anterior, mediante el cálculo del <u>riesgo total del portafolio</u>. Antes de ello, se debe indicar que este cálculo se encuentra dentro del concepto de DIVERSIFICACION. La diversificación de un portafolio tiene como propósito, reducir el riesgo que tiene asociado. Y como su nombre lo indica, se refiere a distribuir el capital del inversionista en el mayor número de activos posible.

Por definición de portafolio se tiene,

$$\bar{r}_p - r_f = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i \bar{r}_i \right) - r_f \ , \tag{3.11}$$

pero debe tenerse presente que la suma de las fracciones de capital del inversionista es igual a su capital total, esto da lugar a lo que se conoce como restricción de <u>presupuesto de capital</u> ,

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1. \tag{3.12}$$

Por lo tanto, $\sum_{i=1}^{N} x_i r_f = r_f$, sustituyendo en (3.11) se tiene,

$$\bar{r}_p - r_f = \sum_{i=1}^{N} x_i (\bar{r}_i - r_f) \ . \tag{3.11'}$$

Ahora, se debe recordar que de la ecuación (3.8),

$\bar{r}_i - r_f = (\bar{r}_M - r_f)\beta_i$, sustituyedo en (3.11') se tiene,

$\bar{r}_p - r_f = \sum_{i=1}^{N} x_i (\bar{r}_M - r_f)\beta_i = (\bar{r}_M - r_f)\left(\sum_{i=1}^{N} x_i \beta_i \right)$, y asociando con la ecuación (3.8), se tiene el resultado que se anticipó en la ecuación (3.10). En la medida en que se dé la semejanza entre el portafolio r_p y el de mercado, sus desviaciones se reducirán y con ello el riesgo del portafolio, es decir, se contará con una combinación de activos mejor diversificada.

•SERIES DE TIEMPO.

Para poder plantear el modelo que se propone, se hablará antes, de manera breve, de los conceptos básicos de series de tiempo. Algunos de los detalles matemáticos de la técnica pueden revisarse en el apéndice A.1.

Una **serie de tiempo** es una sucesión, que puede ser discreta o continua, de valores cuantitativos. Los valores que la conforman están asociados a algunos instantes determinados del tiempo [6]. Para una definición más formal, si se desea, revisar el apéndice A.1. Dicha sucesión puede ser simple (univariada), es decir, que consista de la observación de una sola magnitud en cada instante del tiempo de la base de la sucesión discreta o continua. La sucesión también puede ser múltiple (multivariada), y en este caso se trata de un vector de sucesiones del que se tienen observaciones en instantes comunes a todas ellas.

Pero en términos más pragmáticos, si se cuenta con un registro metódico de dichos valores cuantitativos, que se hayan efectuado a intervalos de tiempo fijo, se dice que se tiene información de una serie de tiempo [7]. Pues precisamente, los datos que se publican diariamente en la sección financiera de algunos periódicos, se encuentran dentro de este tipo de registros metódicos.

De hecho la información que se tiene en los diarios coincide con el concepto de sucesión múltiple o multivariada, ya que los intervalos de tiempo fijos, comunes a todas ellas, son los días de su publicación. En tales circunstancias, las tablas con las publicaciones son las observaciones o realizaciones de una serie de tiempo multivariada.

Pero con esto se ha introducido un nuevo concepto, una <u>realizacion</u> es sólo una observación de una multitud de posibles observaciones de la serie. Esto significa que igualmente pudo haberse observado otra realización del mismo proceso, pero cuyo comportamiento fuese distinto del que se observó en la realidad [7].

Se adoptará la siguiente convención en cuanto a la notación, un vector aleatorio de dimensión <u>n</u> será un vector columna, representado por negritas, de variables aleatorias $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$. El apóstrofo significa vector traspuesto.

Si T representa al conjunto de tiempos en los que se hacen las observaciones, discretas o continuas, y X_t a una familia de variables aleatorias, la notación de la serie de tiempo es $(x_t,\ t \in T)$, en la que x_t es una realización de la familia de variables aleatorias $(X_t,\ t \in T)$. Para el caso vectorial la extensión de la notación es directa, las observaciones se representan por $(\mathbf{x}_t,\ t \in T)$ y la familia de vectores aleatorios como $(\mathbf{X}_t,\ t \in T)$. Así, $\mathbf{x}_t$ representa un vector de observaciones para un vector n-dimensional aleatorio $\mathbf{X}_t$.

·LAS SERIES DE LAS ACCIONES QUE COTIZAN EN LA B.M.V. COMO UNA SERIE DE TIEMPO MULTIVARIADA.

Para poder justificar el empleo del modelo que se plantea en la siguiente sección de éste capítulo, se presentará a continuación un teorema que sustenta la aplicación del modelo propuesto [5].

<u>Teorema de Separacion</u>
LA COMBINACION OPTIMA DE ACTIVOS DE RIESGO, PARA UN INVERSIONISTA, SE PUEDE DETERMINAR SIN NINGUN CONOCIMIENTO, ACERCA DE LAS PREFERENCIAS QUE DICHO INVERSIONISTA PRESENTA HACIA EL RIESGO Y EL RENDIMIENTO.

Según el modelo de C.A.P.M. de Sharpe, la validez del teorema anterior es una característica intrínseca del mismo modelo, con lo cual <u>existe libertad en el criterio</u> de optimización del portafolio.

En la presentación del C.A.P.M. se dejó en claro que la β de un portafolio es simplemente un promedio ponderado de las betas de sus activos componentes, donde las proporciones invertidas en los activos son sus respectivos pesos. Y también se dijo que se puede calcular con la ecuación (3.10) que ahora se reproduce,

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{N} x_i \beta_i .$$

De tal modo que si se pueden conocer las β_i, y se conocen las fracciones a invertir en un portafolio, el cálculo de la β_p, es decir, del parámetro que mide el riesgo de un portafolio es relativamente simple.

Más aún, si el conocimiento que se tiene de β_i no se limita a un sólo período si no que a varios, es decir, si se cuenta con las observaciones de una SERIE VECTORIAL para $\vec{\beta}_i$ se podrá hacer, lo que se haría para una etapa en el caso del parámetro de riesgo vectorial β_p, pero en este caso el índice i representaría el valor de la etapa y ya no más a la componente del vector aleatorio $\vec{\beta}_i$. Llegando así a una generalización de la ecuación (3.10)

$$\tilde{\beta}_p^{(i)} = \tilde{x}_i \cdot \bar{\vec{\beta}}_i , \qquad (3.13)$$

en donde $\tilde{x}_i$ es el vector de fracciones de inversión de activo para el pronóstico del día i, que tiene n componentes, dado que hay n valores suscritos a la bolsa y $\bar{\vec{\beta}}_i$ es el vector de betas de los n activos en el pronóstico del día i. Así que el símbolo ~ representa los valores estimados o pronosticados de la serie vectorial de riesgo.

Por todo lo mencionado en cuanto a series de tiempo y en cuanto a la extensión del parámetro de riesgo, se puede ver que la aplicación de la técnica de series de tiempo, es un recurso de la mayor importancia para este trabajo.

Con todos los antecedentes presentados, se procede a describir el modelo en la siguiente y última sección de este capitulo.

• EL MODELO PROPUESTO.

La característica del C.A.P.M. que más se aprovecha en la construcción del modelo del PRONOSTICO DE RIESGO es la que se plantea en las ecuaciones (3.7), (3.8) y (3.9),

$$\bar{r}_i = r_f + (\bar{r}_M - r_f)\beta_i.$$

Esta ecuación tan simple guarda en sí la característica económica más importante del modelo y como ya se dijo es que bajo las condiciones de equilibrio, y de acuerdo a las ecuaciones (3.5) y (3.6), cada inversionista considera que <u>la medida relevante del riesgo para un activo, es su covarianza con el portafolio del mercado,</u> σ_{iM}. Esto es, las acciones con mayores valores de σ_{iM} representan para el inversionista, las mayores contribuciones al riesgo del portafolio de mercado.

Pero una medida que considera un factor adicional de riesgo es precisamente $\beta_i = \sigma_{iM}/\sigma_M^2$, ya que además de la covarianza del activo de riesgo y el portafolio de mercado, considera la varianza del portafolio de mercado, de ahí que el parámetro de mayor interés para el C.A.P.M., en términos de riesgo, sea el coeficiente β_p. Es por ello que se llega a proponer el siguiente problema estático de programación cuadrática,

$$\text{Minimizar } \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}$$

$$\text{sujeto a } \quad x_f + \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \quad \text{(restricción de presupuesto de capital)}$$

$$(\bar{r}_M - r_f)\sigma_p/\sigma_M = \bar{r}_p - r_f \quad \text{(línea de mercado de capitales)}$$

$$r_p \geq r_{min} \quad \text{(rendimiento mímimo aceptable)}$$

$$x_f,\ x_i \geq 0, \text{ con } i = 1,2,\ldots,N.$$

Matemáticamente el problema es viable, sin embargo, debe hacerse la siguiente observación, no se conoce la función de distribución conjunta del vector r_p, así que no es viable usar como parámetros los momentos de una función de distribución desconocida. Frente a este problema existe la alternativa de las series de tiempo, teniendo la información de registros históricos, es posible hacer un pronóstico de los parámetros estadísticos que intervienen en el modelo anterior.

Esto provoca un cambio sustancial en el modelo, tanto de principio como de procedimiento, lo primero es hacer un análisis mediante series de tiempo y aplicar los pronósticos que arroje dicho análisis al modelo, convirtiéndolo en un <u>problema de optimización con parámetros conocidos</u>. El siguiente paso será resolver un problema de programación cuadrática con parámetros conocidos (estimados) y de allí deducir un portafolio óptimo. Para la solución de dicho problema de programación cuadrática se aplicó un programa llamado G.A.M.S. que puede correrse en una computadora personal con un procesador 486.

Sin embargo, con las consideraciones hechas hasta el momento, se sigue teniendo un problema estático, de modo que para poder explotar la ventaja que brinda el pronóstico con la técnica de las series de tiempo, es conveniente darle carácter dinámico al problema, para ello se presenta la siguiente alternativa al problema de portafolio.

Se define el funcional recursivo

$$R_k({}^k\mathbf{x}) = \min \{ {}^k\sigma_p^2 + R_{k+1}({}^{k+1}\mathbf{x}) \}, \qquad (3.14)$$

con lo cual se replantea el problema como uno de PROGRAMACION DINAMICA DETERMINISTA,

$$R_k({}^k\mathbf{x}) = \min \{ {}^k\sigma_p^2 + R_{k+1}({}^{k+1}\mathbf{x}) \}$$

<u>s.a.</u> ${}^kp_I{}^k\sigma_p \geq {}^k\Delta r$ (el mercado de capitales ya no está en equilibrio)

$${}^kx_f + \sum_{i=1}^{N} {}^kx_i = 1, \quad \text{(presupuesto de capital)}$$

$$\prod_{k=1}^{h} (1 + {}^kx_f r_f + \sum_{i=1}^{N} {}^kx_i {}^k\bar{r}_i) \geq 1 + r_{min} \quad \text{(rendimiento acumulado)}$$

$$^{k+1}x_i = {}^kx_i + {}^ky_i \,,$$

$$^{k+1}x_f = {}^kx_f + {}^ky_f \,,$$

(ecuaciones de transformación de estados)

$0 \leq {}^kx_i$; $0 \leq {}^kx_f$ (variables de estado no negativas)
${}^ky_i$; ${}^ky_f$ (sin restricción.)

Los valores que pueden tomar los índices son,
$k = 0,1,2,\ldots,h$ en donde h es el horizonte del portafolio
$i = 1,2,3,\ldots,N$ activos de la bolsa.
Las variables de estado son,
${}^kx_f$: fracción del portafolio que se invierte en renta fija en la etapa k.
${}^kx_i$: fracción del portafolio que se invierte en el activo i en la etapa k.
Las variables de decisión son,
${}^ky_f$: fracción que se compra o se vende del activo de renta fija en la etapa k, si ${}^ky_f > 0$ comprar, vender en caso contrario.
${}^ky_i$: fracción que se compra o se vende del activo de renta variable en la etapa k, si ${}^ky_i > 0$ comprar, vender en caso contrario.
${}^kp_I$: precio del riesgo del mercado dado por

$${}^kp_I = ({}^k\overline{r}_M - r_f)/\,{}^k\sigma_M$$

${}^k\Delta r$: tasa relativa del portafolio, ${}^k\Delta r = {}^kr_p - r_f$.
r_{min}: es la tasa mínima atractiva para el inversionista.

${}^k\bar{r}_i$: es el pronóstico de los activos bajo la serie de tiempo vectorial.

Condiciones iniciales: ${}^0x_f = 1$, ${}^0x_i = 0$, ${}^0y_f = 0$, ${}^0y_i = 0$.
Condición de frontera: $R_{h+1}({}^{h+1}x) = 0$.

En el funcional recursivo se tiene un par de modificaciones respecto al problema estático, la varianza del portafolio es, adicionalmente, una función de la etapa, y los coeficientes que la determinan son las covarianzas estimadas de la serie vectorial de riesgo, que a su vez también son función de la etapa, ${}^k\tilde{\sigma}_{ij}$, esto se ve en la siguiente expresión,

$$ {}^k\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} {}^kx_i\,{}^kx_j\,{}^k\tilde{\sigma}_{ij} \; . \qquad (3.15) $$

Se deben hacer algunas observaciones respecto a un par de restricciones del modelo. La primera restricción, que tiene la leyenda

"el mercado de capitales ya no está en equilibrio",

se refiere a una observación que se hizo respecto a la actitud de los inversionistas, ${}^kp_I\,{}^k\sigma_p \geq {}^k\Delta r$, como los inversionistas apreciarán ésta actitud como favorable, el portafolio de mercado <u>no</u> será más el portafolio de riesgo óptimo, de tal suerte que los <u>precios de las acciones estarán fuera de equilibrio</u>.

La siguiente restricción que se debe comentar es la que tiene la leyenda, "rendimiento acumulado". En la evaluación de la utilidad de un portafolio, el inversionista aplica como parámetro de medición el interés que le rinde su portafolio después de <u>h</u> etapas, de modo que la tasa acumulada se puede calcular como el producto de los intereses que le reditúa su portafolio en cada una de las etapas, es éste el significado de la restricción,

$$ \prod_{k=1}^{h} \left(1 + {}^kx_f r_f + \sum_{i=1}^{N} {}^kx_i\,{}^k\tilde{r}_i\right) \geq 1 + r_{min} \; . \qquad (3.16) $$

Para finalizar con el objetivo del modelo y con ello su metodología de solución, se debe proceder de la siguiente manera. El modelo dinámico determinista, antes propuesto se introduce al programa GAMS, para lo cual se usan como constantes del modelo, las estimaciones que devuelve el análisis de la serie de tiempo vectorial. Debe aclararse que, puesto que el modelo sólo requiere de estimar las covarianzas de cada activo con el mercado y de la varianza del mercado, se hizo un análisis de series de tiempo bivariadas, estimando la covarianza entre cada activo y el Indice de la Bolsa de Valores. Con ello se conocían los parámetros ${}^{k}\tilde{\sigma}_{ij}$, $\tilde{\sigma}_{M}$, ${}^{k}\bar{\tilde{r}}_{M}$ y ${}^{k}\tilde{r}_{i}$; mismos que se usaron en el GAMS.

A continuación el programa devuelve las fracciones ${}^{k}x_{f}$ y ${}^{k}x_{i}$ óptimas, así como los valores óptimos de las variables de decisión ${}^{k}y_{f}$, ${}^{k}y_{i}$ para estar en condiciones de calcular los valores de la serie de riesgo pronosticada, usando la ecuación (3.13)

$$\tilde{\beta}_{p}^{(1)} = \tilde{x}_{i} \cdot \vec{\tilde{\beta}}_{i} ,$$

logrando de ésta forma el objetivo central de este trabajo.

NO EXISTE

PAGINA

56
8

CAPITULO 4. EL ANALISIS DEL PORTAFOLIO CON EL C.A.P.M. MULTIPERIODICO

Se presentan los resultados del modelo propuesto y su comparación con el C.A.P.M. original. Se presentan los valores del riesgo pronosticado y el efecto logrado por el modelo en la disminución del riesgo respecto al modelo original.

•LOS RESULTADOS DE LA SERIE DE TIEMPO VECTORIAL.

Ahora se mostrarán los resultados obtenidos en cada etapa, de acuerdo al proceso iterativo propuesto por Box y Jenkins para la construcción de modelos de series de tiempo, mismo que se describió en el capítulo anterior.

IDENTIFICACION.

Todo el análisis de este trabajo parte de la información que se obtuvo de las publicaciones de los precios de las acciones desde el día martes 5 de enero de 1993, hasta el día martes 6 de abril del mismo año. Lo que comprende 65 días de actividad en la bolsa.

Cuando se obtuvieron los precios, se hicieron archivos que contenían las tasas correspondientes, calculándolas con la relación

$$\text{TASA} = \frac{\text{PRECIO AL CIERRE} - \text{PRECIO AL INICIO}}{\text{PRECIO AL INICIO}}, \qquad (4.1)$$

de modo tal que ahora sólo quedarían 64 datos en cada archivo, debido al cálculo de la tasa diaria.

De esa forma se contaba con las observaciones de un proceso estocástico vectorial, la serie de tiempo que se analizó. Esto se puede apreciar en las gráficas tituladas "VITRO-Precio al cierre", "Mercado-Indice al cierre", "Vitro-Tasa diaria (%)" y "Mercado - Tasa diaria (%)" en las páginas 51 y 52.

Como se dijo en el capítulo anterior, lo que resulta de interés para el modelo, es la covarianza entre cada uno de los activos y el mercado, así como la varianza de este último, es por ello que se hizo un análisis bivariado, de allí que aparezcan en parejas las gráficas del análisis.

Con el propósito de presentar gráficamente los resultados, se eligió la pareja VITRO-MERCADO pues como se verá, resultó ser de las más simples, siendo un proceso vectorial AR(2). En el apéndice A1 se explica la dualidad existente entre los procesos ARMA(p,q) estacionarios e invertibles, y los procesos AR o MA de órdenes infinitos y convergentes.

Debido a la capacidad de cómputo (memoria limitada) con que se contó, así como a la velocidad de procesamiento, se eligieron, sin pérdida de rigor o generalidad, ajustes a procesos AUTORREGRESIVOS. Esto está garantizado por los criterios de causalidad e invertibilidad que se presentan en el apéndice A2.

Como la información que brindan las secciones financieras de los diarios no resulta regular para todas las emisoras, se eligieron 15 de los activos más persistentes en las publicaciones, ellos fueron,

1) ALFA	6) COMERCI	11) GIGANTE
2) APASCO	7) CONTAL	12) KIMBER
3) BIMBO	8) CYDSA	13) TELMEX
4) CEMEX	9) DESC	14) TELEVISA
5) CIFRA	10) FEMSA	15) VITRO.

De cada uno de los anteriores quince activos se construyó un modelo bivariado con el índice de la bolsa. De acuerdo a la metodología de

Box y Jenkins, lo primero que se hizo con los archivos de las tasas diarias fue diferenciarlas con el objeto de estabilizar la serie, es decir, se les aplicó el operador de diferencia ∇, en consecuencia se redujo cada archivo de datos a analizar a 63 registros históricos. Para todas la series bivariadas, se encontró que con una diferencia era suficiente para estabilizar la serie, lo cual se observa en las gráficas tituladas, "Vitro 1 diferencia" y "Mercado 1 diferencia", en la página 53.

De modo que para todos los procesos vectoriales resultó d = 1. A continuación se estudiaron las funciones de AUTOCORRELACION Y DE AUTOCORRELACION PARCIAL, de las cuales se presentan de nuevo las de VITRO y el MERCADO en las páginas 54 a la 57.

Por lo anterior, y para el proceso bivariado VITRO-MERCADO, se consideró que p debería ser DOS, d UNO y q obviamente CERO, es decir, $p = 2$, $d = 1$ y $q = 0$.

La primera prueba a la que debe enfrentarse el modelo en formación, se refiere al número de términos que debe incluir el polinomio de retraso, de modo que se analiza el comportamiento de los primeros diez retrasos con una prueba χ^2 de cuatro grados de libertad con el cuantil $\alpha = 0.99$. El número de grados se debe a que bajo la conjetura de que puede tratarse de un AR(2) vectorial, el determinante de la matriz de retraso 2 tiene 4 coeficientes libres y da lugar a un polinomio escalar de grado 4, y ya que por tratarse de series <u>bivariadas</u>, la dimensión de los vectores aleatorios es $n = 2$, lo que da lugar a $n^2 = 4$ grados de libertad, ver apéndice A1.

En la siguiente tabla, la columna <u>i</u> se refiere al retraso que se está considerando, y la columna $\Xi(i)$ significa el valor del estadístico Ξ para ese retraso.

i	Ξ(i)	i	Ξ(i)
1	28.542781	6	6.294445
2	16.749634	7	3.880991
3	4.190846	8	2.768435
4	3.367804	9	2.086477
5	3.682956	10	10.069158

Como el cuantil de χ^2 con $\alpha = 0.99$ y cuatro grados de libertad es 13.28, sólo se deben incluir en el modelo los retrasos 1 y 2, ya que el resto de los valores en la tabla anterior son menores que ésta significancia.

ESTIMACION.

En términos de trabajo computacional, la etapa de estimación es la que más esfuerzo requiere. Como ya se dijo en el capítulo 3, es aquí donde se debe tratar de determinar los parámetros matriciales del modelo autorregresivo, o del modelo ARIMA en general.

Al probar la existencia, unicidad, invertibilidad, y estabilidad del proceso vectorial, se recurrió a los criterios de causalidad e invertibilidad, apéndice A1. Debido a dichos criterios, se debe plantear la solución de un polinomio que surge del cálculo del determinante del polinomio matricial, con lo cual se obtuvieron los siguientes coeficientes del polinomio,

1.014036 1.005895 0.377881 0.147193

es decir, se debieron encontrar las cuatro raíces del polinomio,

$$1 - 1.014036x - 1.005895x^2 - 0.377881x^3 - 0.147193x^4.$$

Como los criterios lo indican, las raíces deben estar fuera del círculo unitario, y a continuación se muestran, no las raíces, si no sus módulos, que son las magnitudes de interés en la aplicación de los criterios,

1.523019 1.523019 1.711399 1.711399 ,

por ser todos los módulos mayores que 1, se concluye, a partir de los criterios de causalidad e invertibilidad, que el proceso vectorial que se deseaba modelar ya era estable, estacionario e invertible.

VERIFICACION.

La necesidad de esta etapa radica en el hecho de que todo modelo es sólo una aproximación de la realidad, uno puede hacer que un modelo sea muy parecido a las observaciones que se tengan, sin embargo, fuera del intervalo de tiempos que se tienen, las diferencias pueden llegar a ser muy grandes. En un intento por hacer que dichas diferencias sean las menores posibles, en la etapa de verificación, el modelo se somete a varias pruebas.

ANALISIS DE RESIDUALES

Lo primero que debe cumplir un modelo bien ajustado es que la media residual sea cero y su varianza estable,

$$E[a_t] = 0 \quad y \quad Var[a_t] = \sigma_a^2 = cte.,$$

lo que se aprecia en las gráficas tituladas "Vitro (Residuales)", "Mercado (Residuales)" en la página 58.

La siguiente característica de un modelo bien ajustado es la estabilidad de las funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial, se espera que después de un número finito de retrasos estas se corten o bien, converjan a cero. Tal comportamiento se puede observar en las gráficas que llevan los mismos nombres que las funciones que las determinan en las páginas 59 a 62.

La siguiente prueba es la del periodograma, su objetivo es determinar si existe o no, alguna componente estacional en el modelo. Si en la gráfica del periodograma no se observa alguna frecuencia que domine sobre el resto de los valores de la función, se dice que la serie de los residuales no presenta una componente estacional. Es de hecho el comportamiento no estacional el que se observa en las gráficas de las páginas 63 y 64.

En las gráficas del periodograma acumulado normalizado, 61 y 62, aparecen dos bandas que representan el intervalo de confianza para el ajuste de los residuales, la más angosta de ellas considera una significancia del 99%, y como puede verse, los valores pasan la prueba. La banda más ancha es al 95%.

Para finalizar el análisis de residuales se hace una prueba de significancia con el estadístico Ξ, en el que se considera el comportamiento de los residuales para cada retraso y se compara contra el cuantil $\alpha = 0.99$ de la distribución χ^2 con 4 grados de libertad. Dicha prueba se presenta en la siguiente tabla.

i	Ξ(i)	i	Ξ(i)
1	1.083260	6	0.788081
2	0.948469	7	2.563261
3	3.579867	8	3.786722
4	7.355882	9	4.917897
5	4.608696	10	5.178078

Como ya se dijo en párrafos arriba, el valor del cuantil $\chi^2_{0.99}$ con cuatro grados de libertad es 13.28, de modo que los residuales pasan la prueba de significancia.

PRONOSTICO

Cuando un modelo ha pasado las pruebas que se exigen en la etapa de verificación, se está en condiciones de usarlo para hacer pronósticos de los posibles valores que tomará la serie en los tiempos futuros. En cuanto a los datos analizados, el pronóstico se hizo para los tiempos que corresponden a las últimas 10 observaciones de las series de 63 datos, es decir, para los días 54 a 63.

Los valores del ajuste que se obtuvieron se muestran en las siguientes tablas.

Matriz de varianza-covarianza:

4.487580	1.160758
1.160758	1.360353

las entradas de la matriz anterior miden la dispersión del rendimiento, razón por la cual se presentan sus valores en unidades de porcentaje al cuadrado, por ejemplo, el valor 4.48758 representa una varianza de $4.48758 \times 100^{-2} = 0.000448758$.

Modelo Ajustado AR(2):

Retraso 1		Retraso 2	
-0.629488	0.125526	-0.512710	0.000000
0.286569	-0.384549	0.000000	-0.287089

para un polinomio de retraso de la forma que se presentó en el capítulo anterior, las matrices anteriores representan los coeficientes, de modo que el polinomio tendrá la forma

$$\Phi_2(B) = I - \begin{bmatrix} -0.629488 & 0.125526 \\ 0.286569 & -0.384549 \end{bmatrix} B - \begin{bmatrix} -0.512710 & 0.000000 \\ 0.000000 & -0.287089 \end{bmatrix} B^2,$$

y con este polinomio matricial $\Phi_2(B)$ se tiene el proceso vectorial AR(2)

$$\Phi_2(B) X_t = a_t.$$

Los valores pronosticados de los rendimientos se muestran en la siguiente tabla,

Pronóstico (10 días)

a) VITRO

dia	r(%)	var(%^{2})	dia	r(%)	var(%^{2})
54)	0.588795	5.125067	59)	0.270702	10.162141
55)	0.265767	5.502552	60)	0.315116	11.158664
56)	0.197320	7.266527	61)	0.299862	12.089131
57)	0.369166	8.211938	62)	0.291712	13.134301
58)	0.299158	8.980202	63)	0.302725	14.134512

b)MERCADO

dia	r(%)	var(%^{2})	dia	r(%)	var(%^{2})
54)	-0.155892	2.244156	59)	-0.136019	4.803532
55)	0.083840	2.601133	60)	-0.151036	5.352066
56)	-0.209809	3.133968	61)	-0.111052	5.888387
57)	-0.185326	3.789697	62)	-0.126488	6.402383
58)	-0.061192	4.308225	63)	-0.134366	6.930350

En las tablas anteriores, el primer número corresponde al día de actividades contra el cual se hizo el pronóstico, el segundo al rendimiento pronosticado en porcentaje, por ejemplo, para el dia "54", el pronóstico del rendimiento de VITRO es de 0.588795% = 0.00588795 y su varianza es de 5.125067(%^{2}) = 0.0005125067. Estos resultados pueden verse en las gráficas que tienen como títulos el nombre del activo analizado y entre paréntesis la leyenda (Pronóstico) de la página 65 a la 80.

·RESULTADOS DE LA MODIFICACION BAJO EL AJUSTE β_t PRONOSTICADO.

Después de los múltiples cálculos que hay de por medio, se llega a la parte final de la metodología propuesta, si bien el análisis de los datos de la serie vectorial es un proceso intermedio, es cuando se cuenta con el pronóstico, que se puede pasar al problema de optimización no lineal con el paquete GAMS.

Las constantes que se le dan como parámetros del modelo son los pronósticos de los quince activos, así como del mercado, de las que se tienen dos ejemplos en las tablas anteriores, "Pronóstico (10 dias) a)VITRO, b)MERCADO". El paquete da como salida los valores óptimos de las fracciones a invertir en cada activo y para cada día, las cuales se muestran a continuación. La segunda tabla es la de las fracciones óptimas para el C.A.P.M. original.

DIA i (condiciones iniciales) <u>MODELO PROPUESTO</u>

DIA	ACTIVO	FRACCION OPTIMA (X_i)	DECISIONES COMPRAR	DECISIONES VENDER
0	renta fija	1.0		1.0
	ALFA		0.125	
	CYDSA		0.489	
	KIMBER		0.385	
1	ALFA	0.125	0.037	
	CYDSA	0.489	0.264	
	GIGANTE		0.084	
	KIMBER	0.385		0.385
2	ALFA	0.163		0.163
	APASCO		0.075	
	COMERCI		0.789	
	CYDSA	0.753		0.618
	GIGANTE	0.084		0.084
3	renta fija		0.394	
	ALFA		0.144	
	APASCO	0.075		0.075
	COMERCI	0.789		0.789
	CYDSA	0.136	0.318	
	VITRO		0.008	
4	renta fija	0.394		0.394
	ALFA	0.144		0.126
	COMERCI		0.114	
	CYDSA	0.454		0.298
	KIMBER		0.713	
	VITRO	0.008		0.008
5	ALFA	0.018		
	COMERCI	0.114		
	CYDSA	0.156		
	KIMBER	0.713		

DIA i (condiciones iniciales) <u>MODELO DE C.A.P.M. ORIGINAL</u>

			DECISIONES	
0	ACTIVO	FRACCION OPTIMA (X_i)	COMPRAR	VENDER
	renta fija	1.0		1.0
	ALFA		0.116	
	CYDSA		0.435	
	KIMBER		0.448	
1	ALFA	0.116	0.046	
	CYDSA	0.435	0.284	
	GIGANTE		0.119	
	KIMBER	0.448		0.448
2	ALFA	0.162		0.162
	APASCO		0.095	
	COMERCI		0.737	
	CYDSA	0.720		0.551
	GIGANTE	0.119		0.119
3	renta fija		0.444	
	ALFA		0.126	
	APASCO	0.095		0.095
	COMERCI	0.737		0.737
	CYDSA	0.168	0.237	
	TELEVISA		0.01	
	VITRO		0.015	
4	renta fija	0.444		0.444
	ALFA	0.126		0.105
	COMERCI		0.115	
	CYDSA	0.405		0.253
	KIMBER		0.712	
	TELEVISA	0.01		0.01
	VITRO	0.015		0.015

5	ALFA	0.021
	COMERCI	0.115
	CYDSA	0.152
	KIMBER	0.712

Con las tablas anteriores se pueden calcular los rendimientos esperados de los portafolios del modelo propuesto y del C.A.P.M. original en función de la varianza y del dia del pronóstico, lo que se muestra en las gráficas de "CONJUNTO EFICIENTE" y "PORTAFOLIO OPTIMO", página 81. Para poder distinguir las gráficas de cada modelo se usó una marca redonda para el modelo propuesto y una marca cuadrada para el C.A.P.M. "normal".

•EL CALCULO DEL β_t, PRONOSTICO DEL RIESGO DEL PORTAFOLIO.

Para hacer el cálculo de los factores de riesgo pronosticados se debe considerar que como

$$\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2},$$

es preciso conocer a futuro σ_{iM} así como σ_M^2 para cada activo i, con i corriendo desde ALFA hasta VITRO. Para conocer esas cantidades en cada periodo basta con observar que $\sigma_{iM} = \rho_{iM}\sigma_i\sigma_M$, y recordar que cuando se trabaja con series de tiempo estacionarias el coeficiente de correlación entre las componentes de la serie no cambia, es decir, $\rho_{iM}(t) = \rho_{iM}(t+h)$ para cualquier t y para cualquier h.

Así que al usar la notación para parámetros estimados o pronosticados, se tiene que $\tilde{\sigma}_{iM} = \rho_{iM}\tilde{\sigma}_i\tilde{\sigma}_M$, resultando que el valor estimado del parámetro de riesgo o valor pronosticado de $\tilde{\beta}_i(t)$ es

$$\tilde{\beta}_i(t) = \rho_{iM}\frac{\tilde{\sigma}_i(t)}{\tilde{\sigma}_M(t)}. \qquad (4.2)$$

Para calcular el coeficiente de correlación ρ_{iM}, se usaron los valores de la matriz de varianza-covarianza que aparece en la sección de pronóstico de éste capitulo, unas páginas antes; así como la ecuación

$$\rho_{iM} = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_i \sigma_M} .$$

De esa forma se obtuvieron los valores de la siguiente tabla.

BETAS PRONOSTICADAS

$\tilde{\vec{\beta}}_i(t)$

EN LA NOTACION DE LA BETA DEL RENGLON ANTERIOR, i SE REFIERE A LA COMPONENTE i (ACTIVO i) DEL CONJUNTO DE EMISORAS, Y t AL DIA DEL PRONOSTICO EN CONSIDERACION.

ACTIVO	DIAS				
	54	55	56	57	58
ALFA	0.466975	0.494292	0.510886	0.521351	0.532775
APASCO	0.924624	0.853620	0.894938	0.888707	0.893380
BIMBO	0.598527	0.567855	0.562024	0.605224	0.593462
CEMEX	1.233009	1.329846	1.329884	1.154593	1.167437
CIFRA	0.938711	1.095546	1.065553	1.054422	1.089123
COMERCI	0.771854	0.775118	0.705482	0.722438	0.753435
CONTAL	0.499572	0.509252	0.485035	0.468077	0.471602
CYDSA	0.144034	0.143779	0.140183	0.137407	0.140778
DESC	0.535306	0.554638	0.542494	0.525465	0.528796
FEMSA	0.723664	0.759378	0.657077	0.657697	0.670815
GIGANTE	0.989467	0.946691	0.910784	0.951520	0.915138
KIMBER	0.494865	0.417276	0.407763	0.432607	0.434713
TELMEX	1.092653	1.316530	1.373711	1.413862	1.411519
TELEVISA	0.685321	0.678241	0.640904	0.633192	0.677455
VITRO	0.709959	0.683299	0.715362	0.691561	0.678272

La tabla anterior representa así, los valores estimados de la serie de tiempo vectorial para $\tilde{\vec{\beta}}(t)$, con tales valores se puede aplicar la ecuación (3.21) del capítulo 3, es decir,

$$\tilde{\beta}_p(t) = \tilde{x}(t) \cdot \vec{\tilde{\beta}}(t),$$

y llegar finalmente, al objetivo fundamental de éste trabajo,

PRONOSTICO DEL RIESGO, PARAMETRO β DEL PORTAFOLIO.

$\tilde{\beta}_p(t)$ DEL MODELO PROPUESTO

0.319328	0.268357	0.642811	0.142990	0.427393

PRONOSTICO DEL RIESGO, PARAMETRO β DEL PORTAFOLIO.

$\tilde{\beta}_p(t)$ DEL MODELO CAPM ORIGINAL

0.338523	0.287732	0.628510	0.138045	0.428747

estos resultados se pueden observar en las últimas dos gráficas, tituladas "BETAS DE LOS ACTIVOS" y "BETAS DE LOS PORTAFOLIOS", página 82.

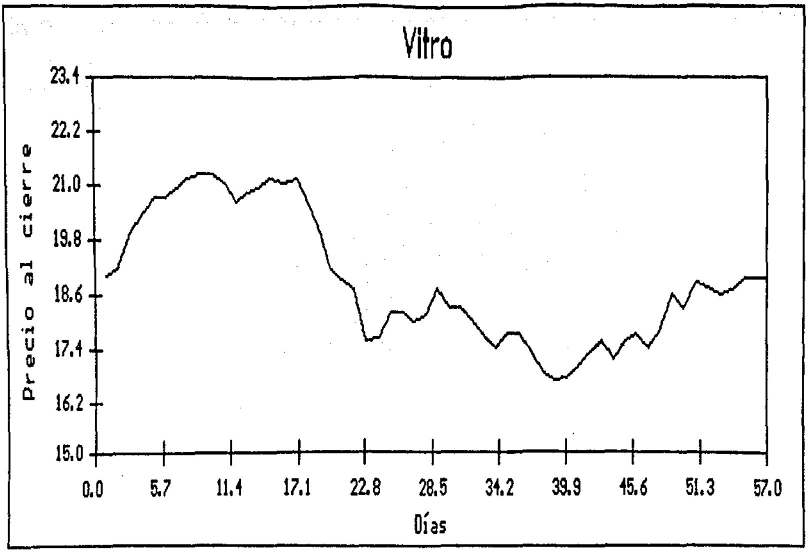
·**GRAFICAS**

NO EXISTE

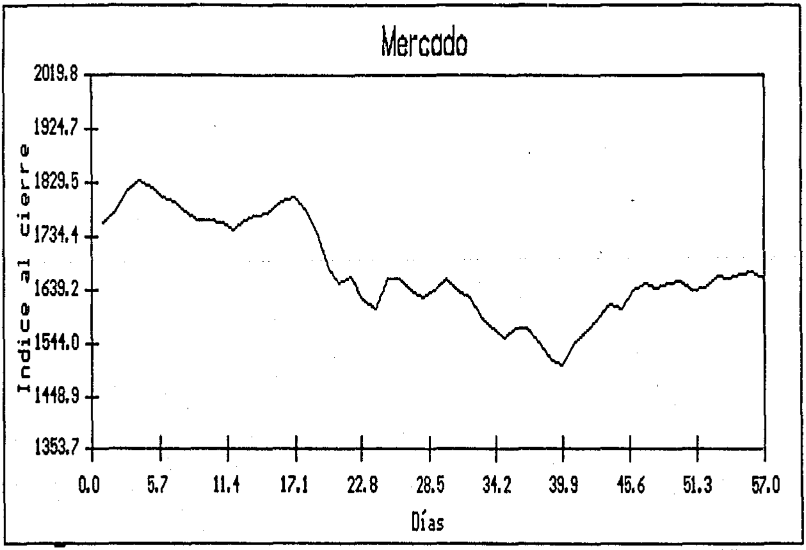
PAGINA

56

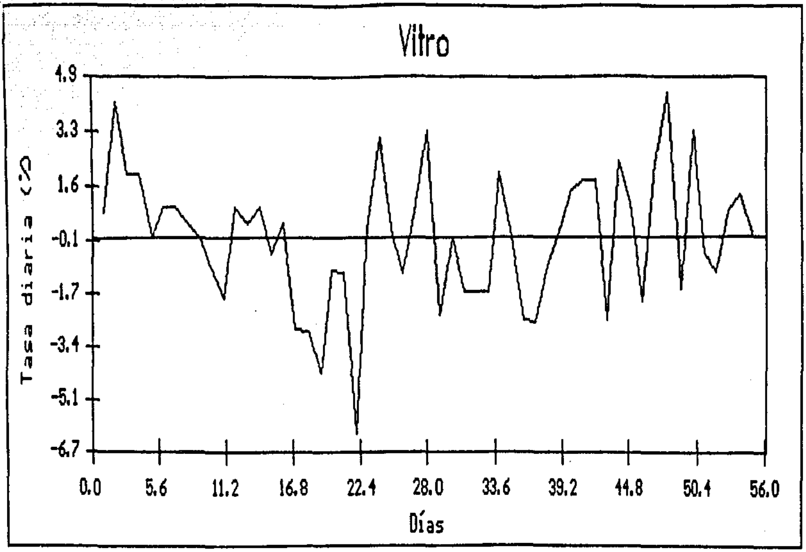
8

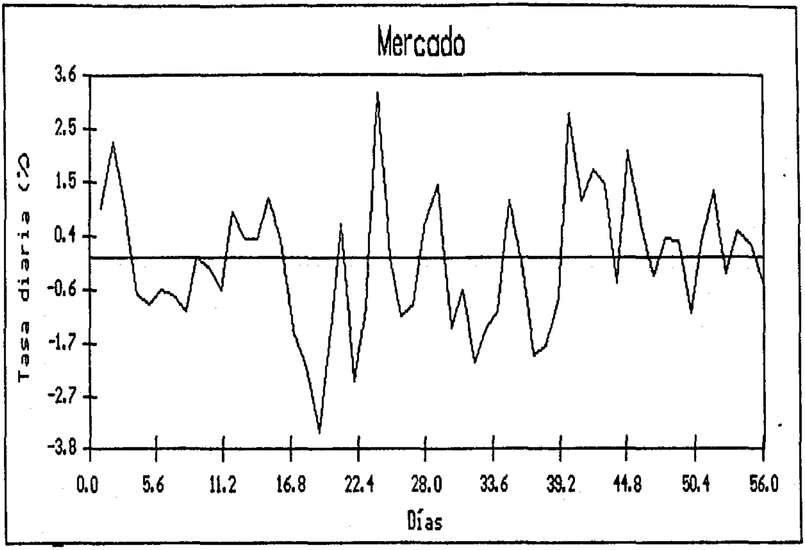


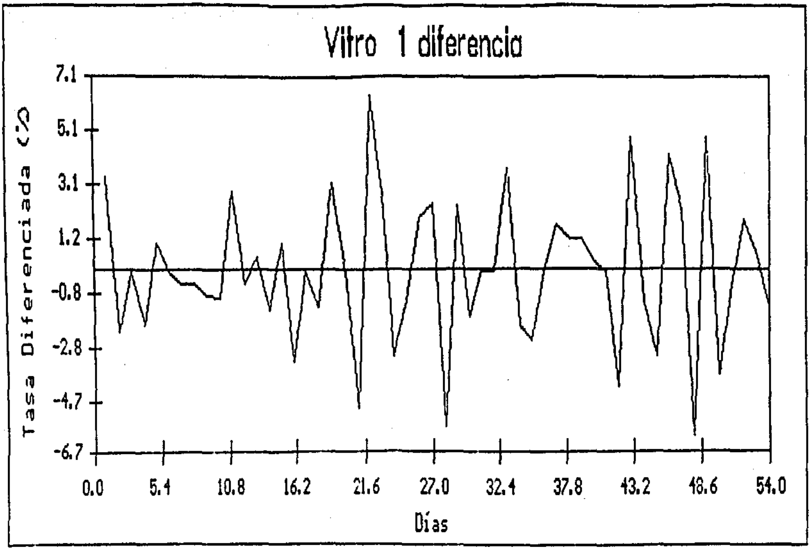
Vitro
23.4
22.2
21.0
19.8
18.6
17.4
16.2
15.0
Precio al cierre
0.0
5.7
11.4
17.1
22.8
28.5
34.2
39.9
45.6
51.3
57.0
Días

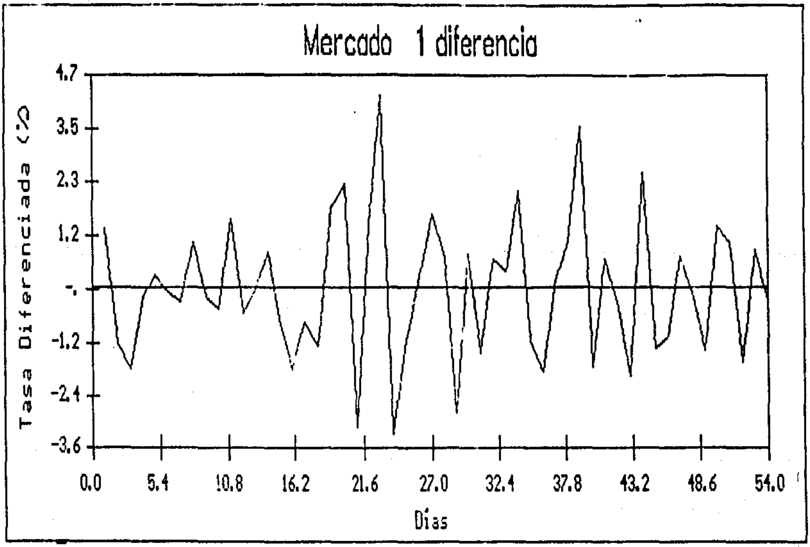


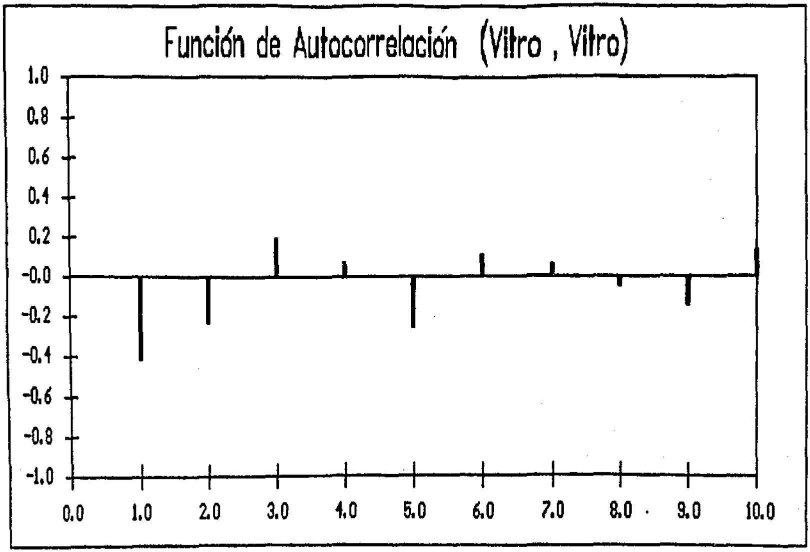
Mercado
2019.8
1924.7
1829.5
1734.4
1639.2
1544.0
1448.9
1353.7
Indice al cierre
0.0
5.7
11.4
17.1
22.8
28.5
34.2
39.9
45.6
51.3
57.0
Días

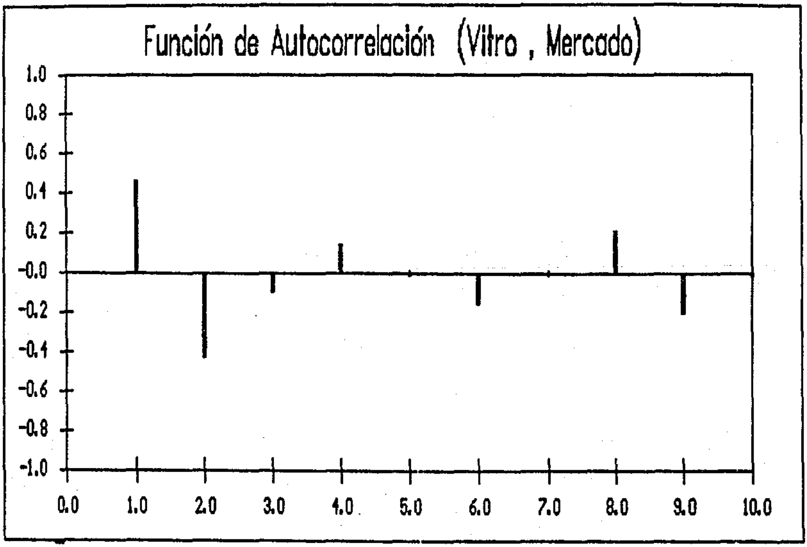

Vitro
Tasa diaria (%)
4.9
3.3
1.6
-0.1
-1.7
-3.4
-5.1
-6.7
0.0
5.6
11.2
16.8
22.4
28.0
33.6
39.2
44.8
50.4
56.0
Días

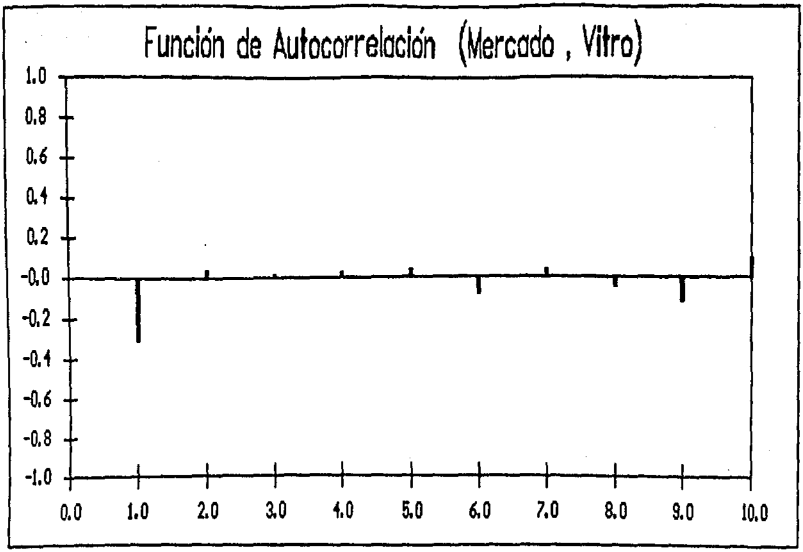

Mercado
Tasa diaria (%)
3.6
2.5
1.5
0.4
-0.6
-1.7
-2.7
-3.8
0.0
5.6
11.2
16.8
22.4
28.0
33.6
39.2
44.8
50.4
56.0
Días


Vitro 1 diferencia
Tasa Diferenciada (%)
7.1
5.1
3.1
1.2
-0.8
-2.8
-4.7
-6.7
0.0
5.4
10.8
16.2
21.6
27.0
32.4
37.8
43.2
48.6
54.0
Días

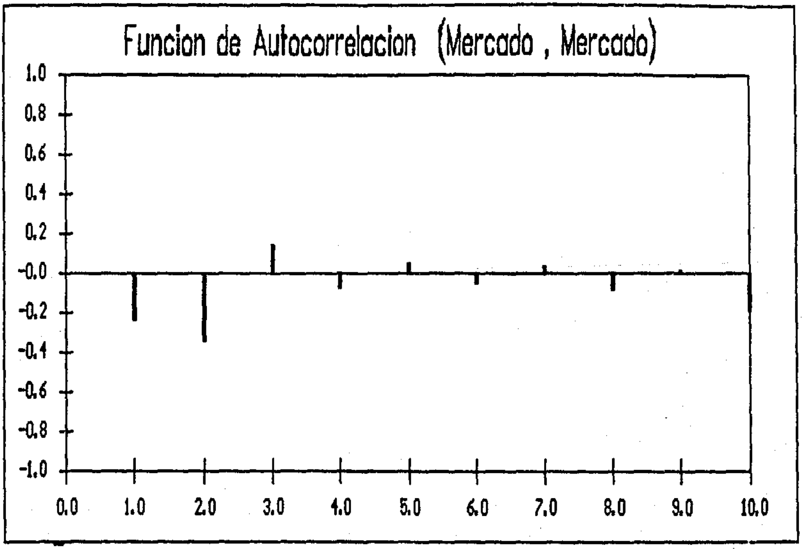

Mercado 1 diferencia
Tasa Diferenciada (%)
4.7
3.5
2.3
1.2
-.
-1.2
-2.4
-3.6
0.0
5.4
10.8
16.2
21.6
27.0
32.4
37.8
43.2
48.6
54.0
Días


Función de Autocorrelación (Vitro , Vitro)
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1.0
0.0
1.0
2.0
3.0
4.0
5.0
6.0
7.0
8.0
9.0
10.0

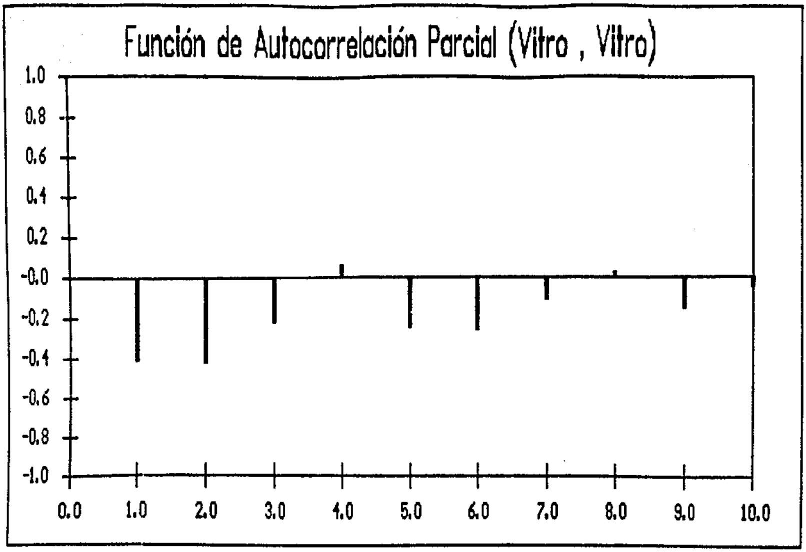

Función de Autocorrelación (Vitro , Mercado)
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1.0
0.0
1.0
2.0
3.0
4.0
5.0
6.0
7.0
8.0
9.0
10.0

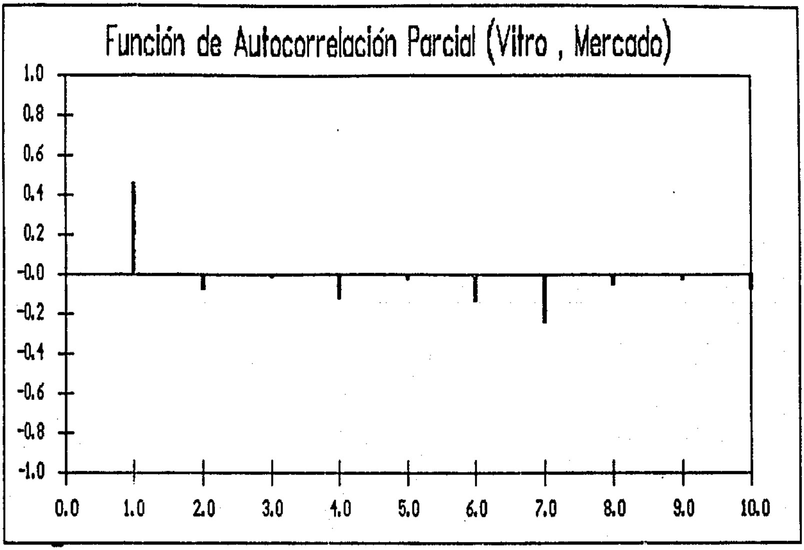


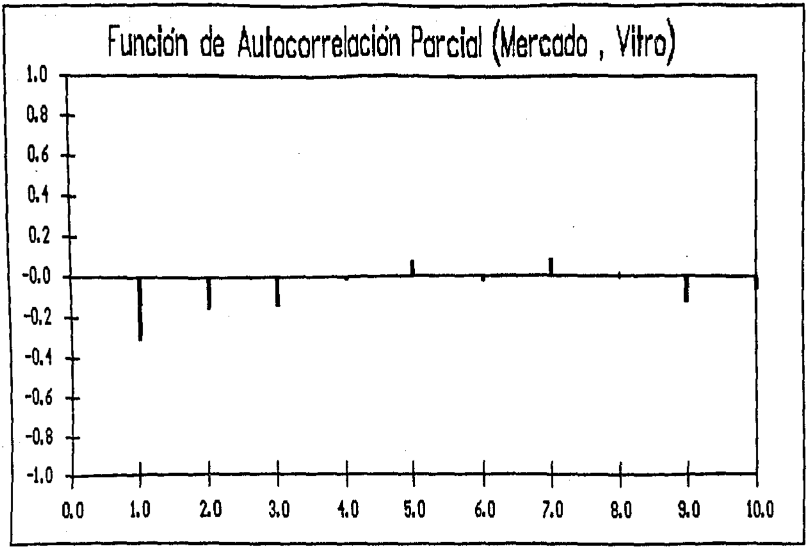
Función de Autocorrelación (Mercado , Vitro)
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1.0
0.0
1.0
2.0
3.0
4.0
5.0
6.0
7.0
8.0
9.0
10.0

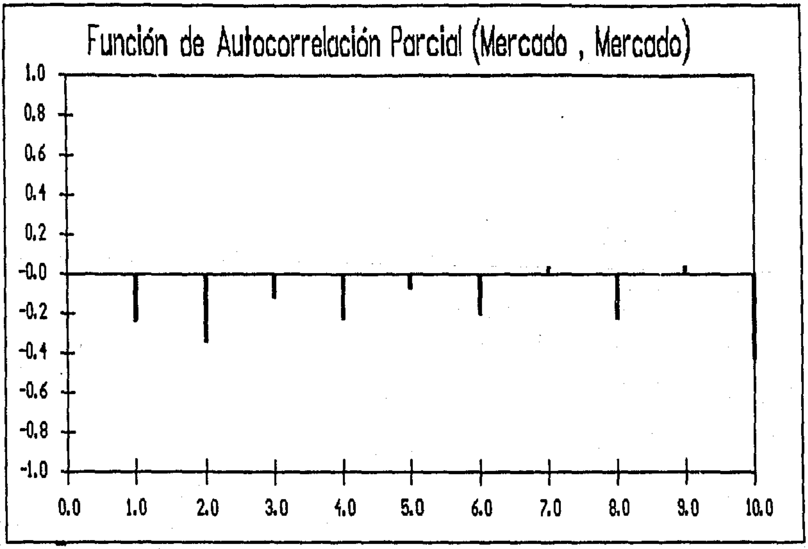


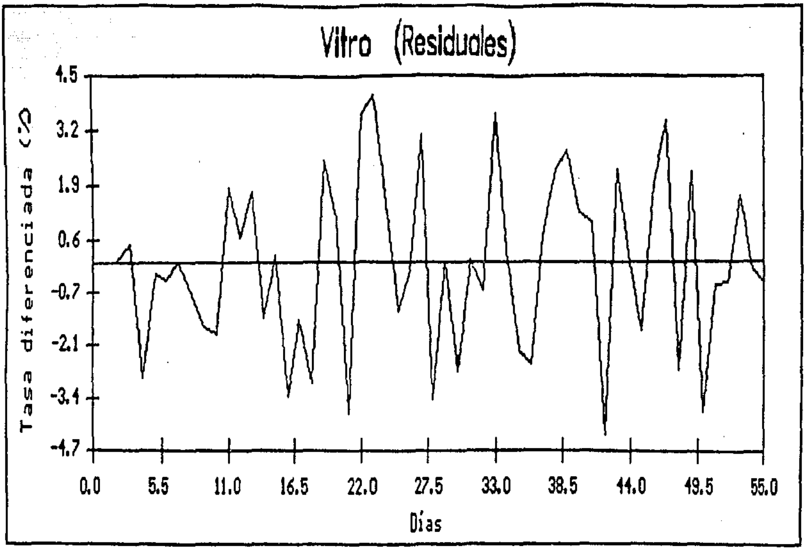
Funcion de Autocorrelacion (Mercado , Mercado)
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1.0
0.0
1.0
2.0
3.0
4.0
5.0
6.0
7.0
8.0
9.0
10.0

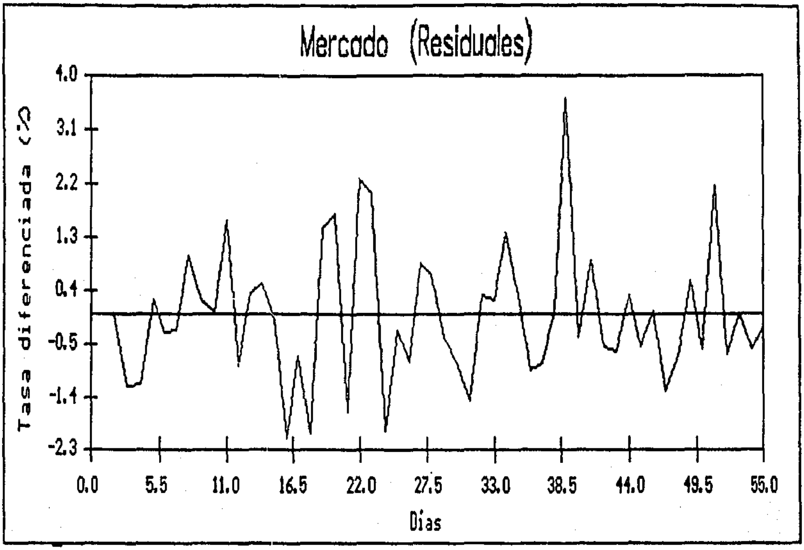

Función de Autocorrelación Parcial (Vitro , Vitro)
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1.0
0.0
1.0
2.0
3.0
4.0
5.0
6.0
7.0
8.0
9.0
10.0

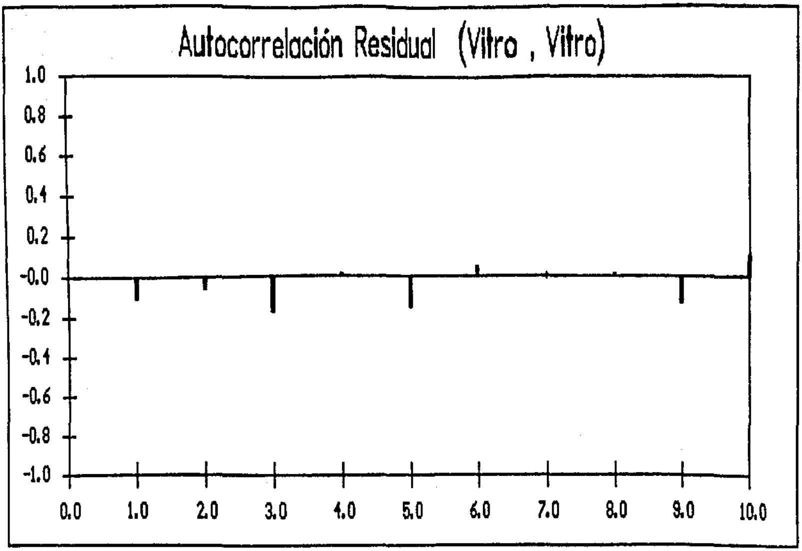

Función de Autocorrelación Parcial (Vitro , Mercado)
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1.0
0.0
1.0
2.0
3.0
4.0
5.0
6.0
7.0
8.0
9.0
10.0

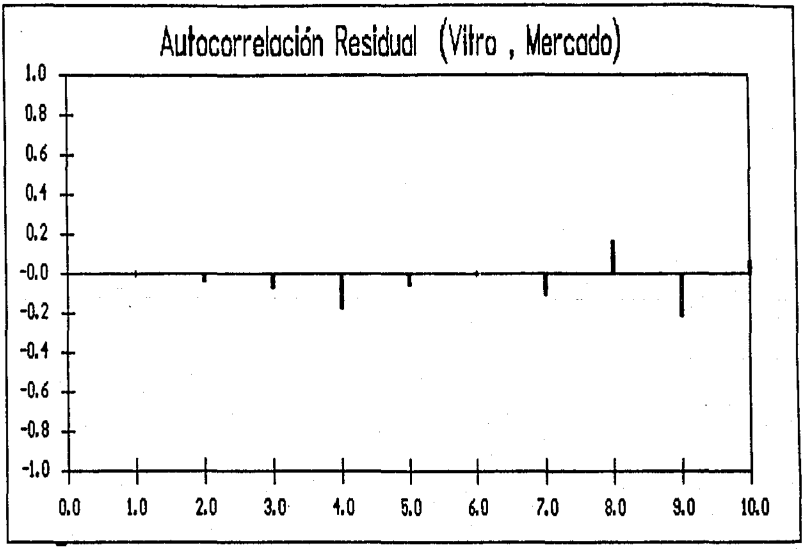

Función de Autocorrelación Parcial (Mercado , Vitro)
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1.0
0.0
1.0
2.0
3.0
4.0
5.0
6.0
7.0
8.0
9.0
10.0

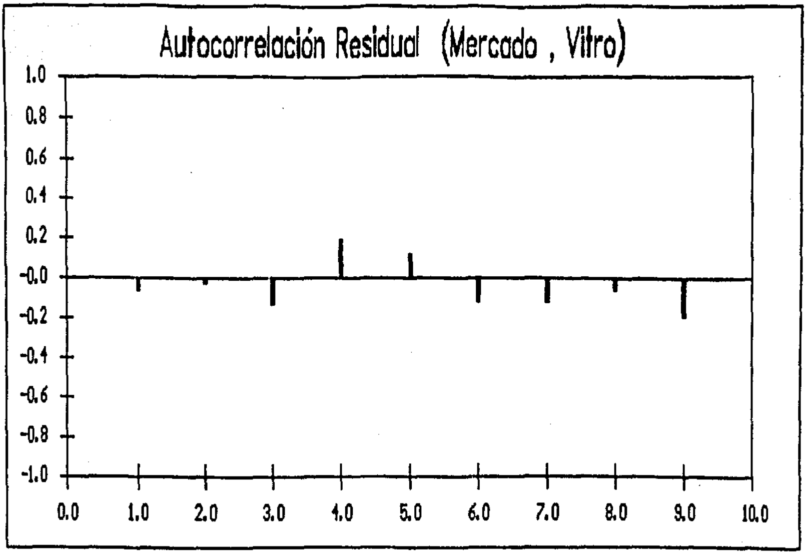

Función de Autocorrelación Parcial (Mercado , Mercado)
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1.0
0.0
1.0
2.0
3.0
4.0
5.0
6.0
7.0
8.0
9.0
10.0

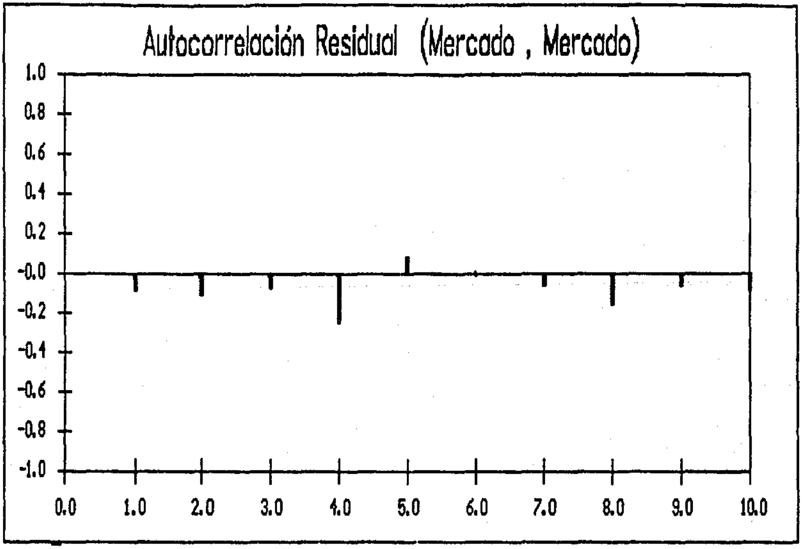

Vitro (Residuales)
Tasa diferenciada (%)
4.5
3.2
1.9
0.6
-0.7
-2.1
-3.4
-4.7
0.0
5.5
11.0
16.5
22.0
27.5
33.0
38.5
44.0
49.5
55.0
Días

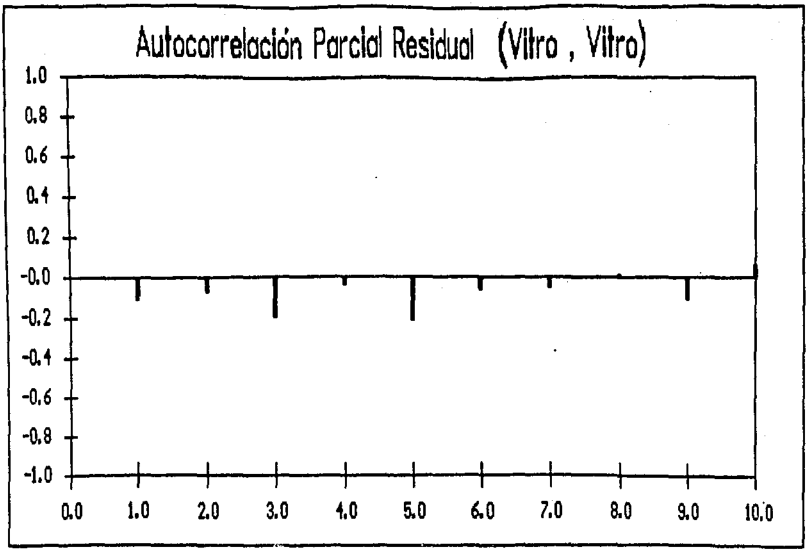

Mercado (Residuales)
Tasa diferenciada (%)
4.0
3.1
2.2
1.3
0.4
-0.5
-1.4
-2.3
0.0
5.5
11.0
16.5
22.0
27.5
33.0
38.5
44.0
49.5
55.0
Días

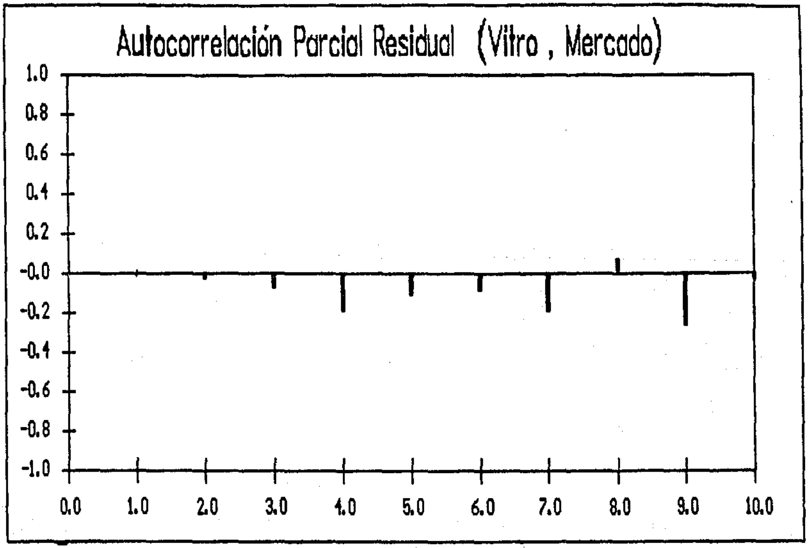

Autocorrelación Residual (Vitro , Vitro)
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1.0
0.0
1.0
2.0
3.0
4.0
5.0
6.0
7.0
8.0
9.0
10.0

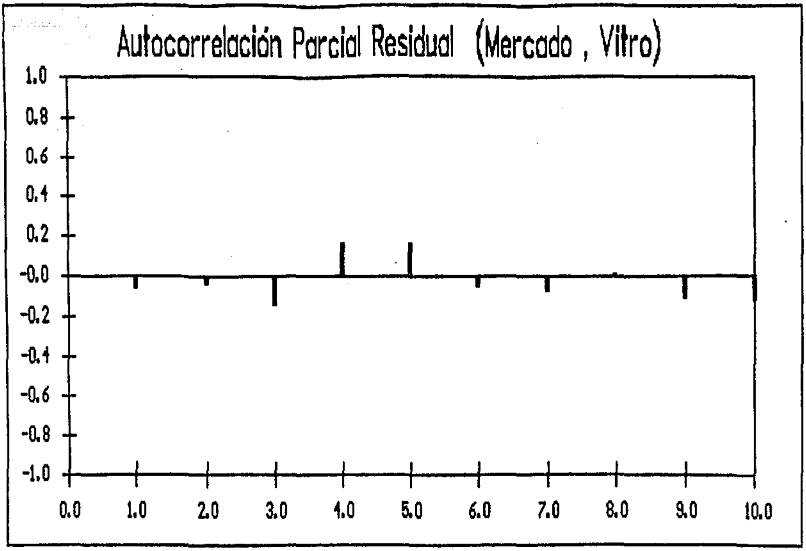

Autocorrelación Residual (Vitro , Mercado)
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1.0
0.0
1.0
2.0
3.0
4.0
5.0
6.0
7.0
8.0
9.0
10.0

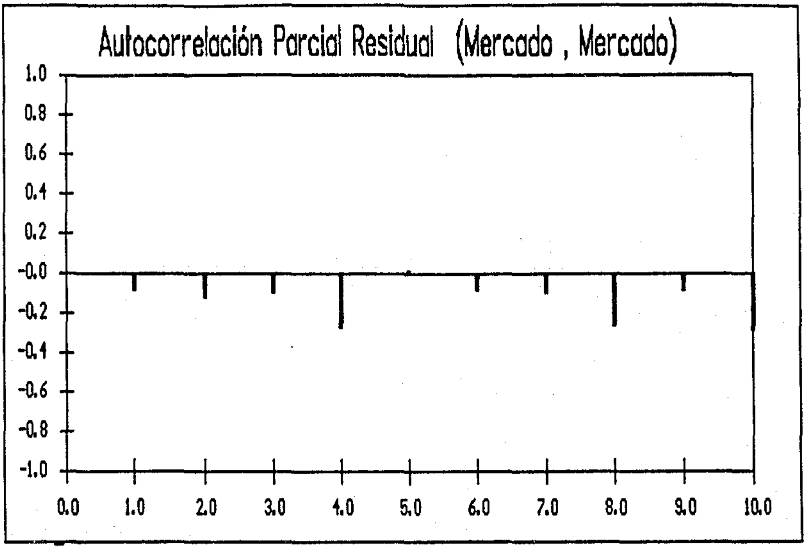

Autocorrelación Residual (Mercado , Vitro)
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1.0
0.0
1.0
2.0
3.0
4.0
5.0
6.0
7.0
8.0
9.0
10.0

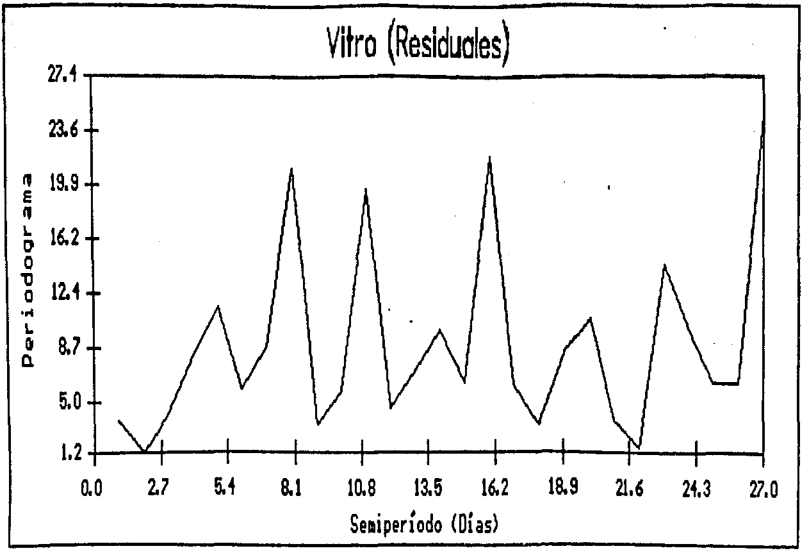

Autocorrelación Residual (Mercado , Mercado)
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1.0
0.0
1.0
2.0
3.0
4.0
5.0
6.0
7.0
8.0
9.0
10.0

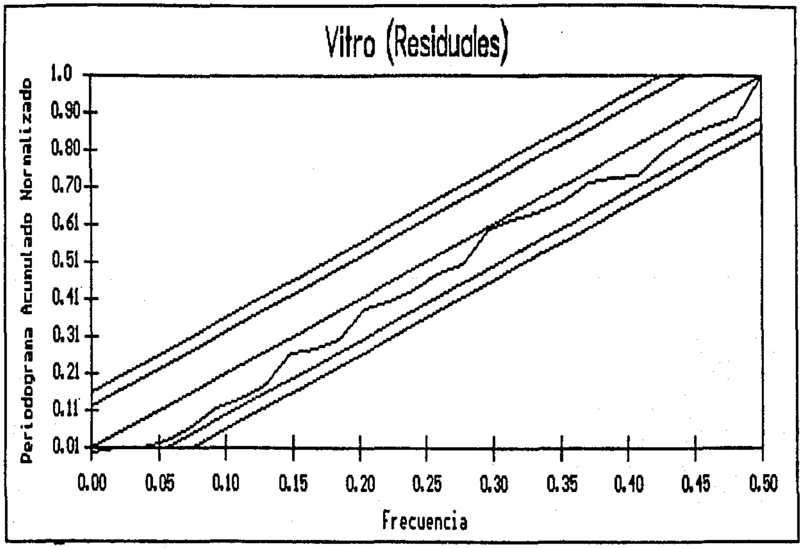

Autocorrelación Parcial Residual (Vitro , Vitro)
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1.0
0.0
1.0
2.0
3.0
4.0
5.0
6.0
7.0
8.0
9.0
10.0

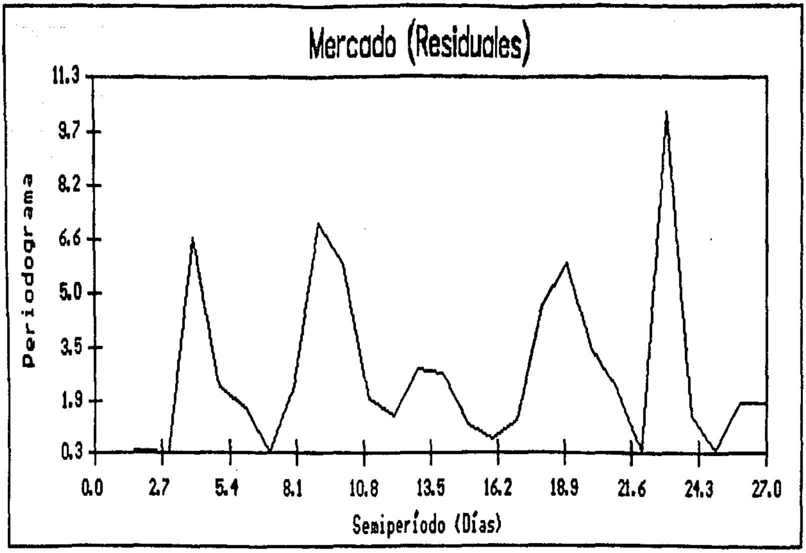

Autocorrelación Parcial Residual (Vitro , Mercado)
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1.0
0.0
1.0
2.0
3.0
4.0
5.0
6.0
7.0
8.0
9.0
10.0


Autocorrelación Parcial Residual (Mercado , Vitro)
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1.0
0.0 1.0 2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0

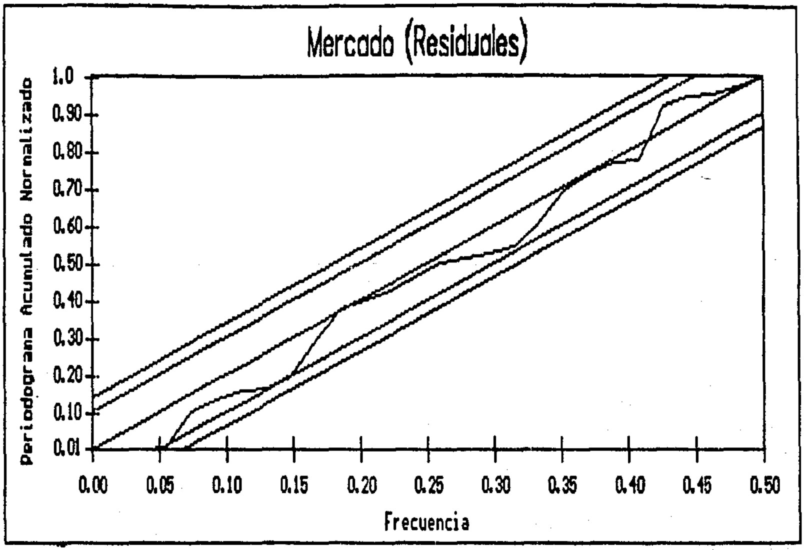

Autocorrelación Parcial Residual (Mercado , Mercado)
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1.0
0.0 1.0 2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0


Vitro (Residuales)
Periodograma
27.4
23.6
19.9
16.2
12.4
8.7
5.0
1.2
0.0
2.7
5.4
8.1
10.8
13.5
16.2
18.9
21.6
24.3
27.0
Semiperíodo (Días)

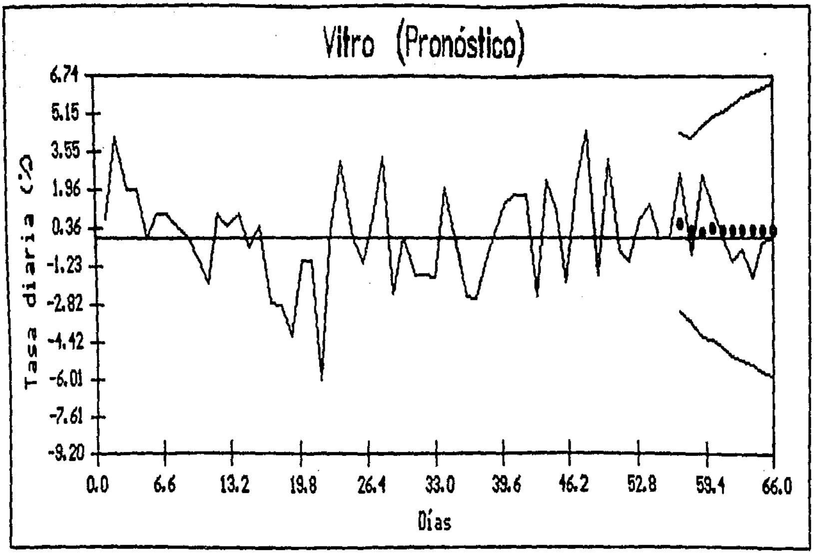

Vitro (Residuales)
Periodograma Acumulado Normalizado
1.0
0.90
0.80
0.70
0.61
0.51
0.41
0.31
0.21
0.11
0.01
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0.30
0.35
0.40
0.45
0.50
Frecuencia



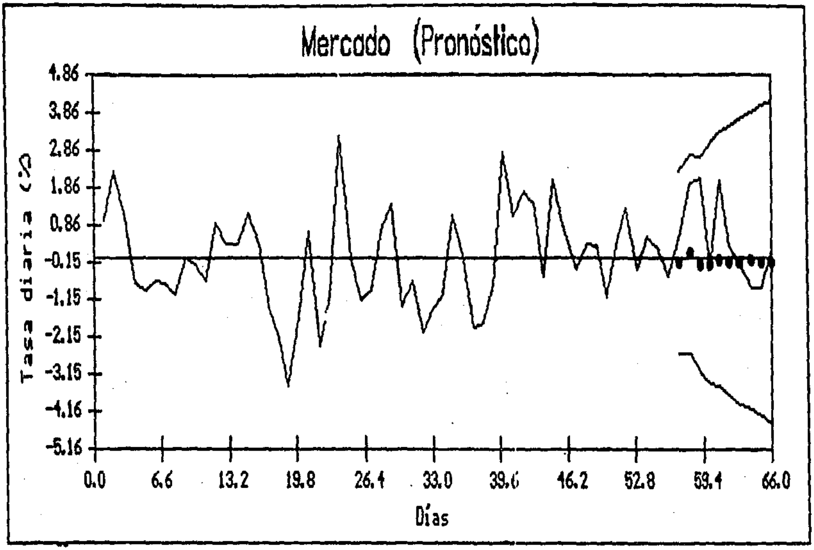
Mercado (Residuales)
Periodograma
11.3
9.7
8.2
6.6
5.0
3.5
1.9
0.3
0.0
2.7
5.4
8.1
10.8
13.5
16.2
18.9
21.6
24.3
27.0
Semiperíodo (Días)



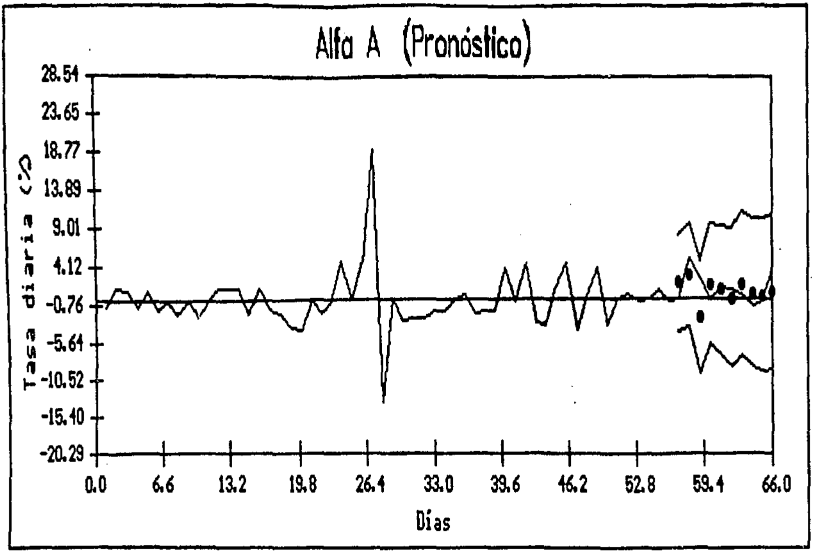
Mercado (Residuales)
Periodograma Acumulado Normalizado
1.0
0.90
0.80
0.70
0.60
0.50
0.40
0.30
0.20
0.10
0.01
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0.30
0.35
0.40
0.45
0.50
Frecuencia

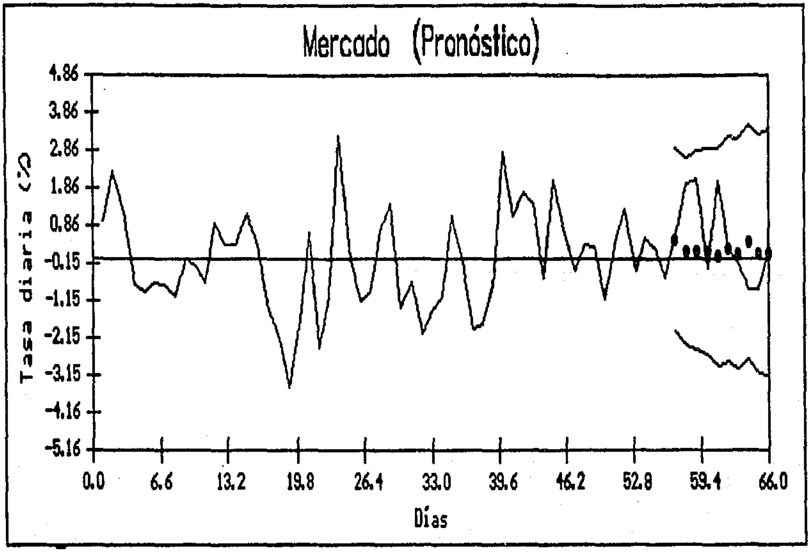


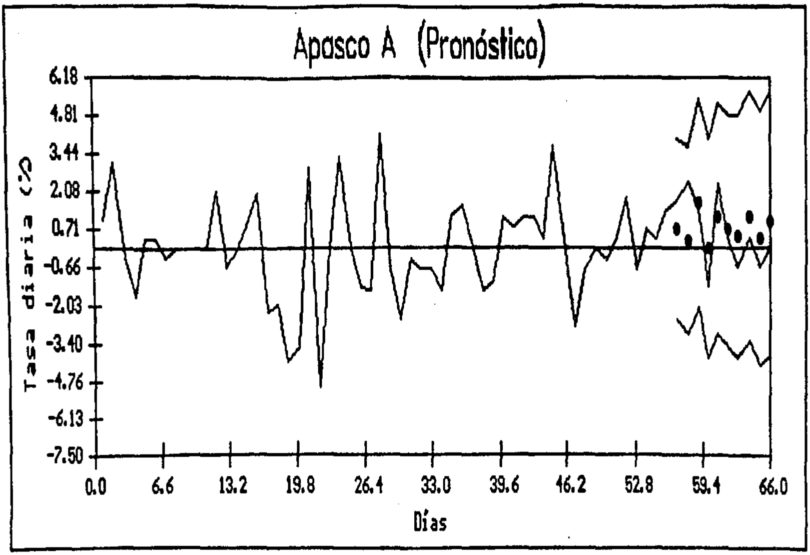
Vitro (Pronóstico)
Tasa diaria (%)
6.74
5.15
3.55
1.96
0.36
-1.23
-2.82
-4.42
-6.01
-7.61
-9.20
0.0
6.6
13.2
19.8
26.4
33.0
39.6
46.2
52.8
59.4
66.0
Días

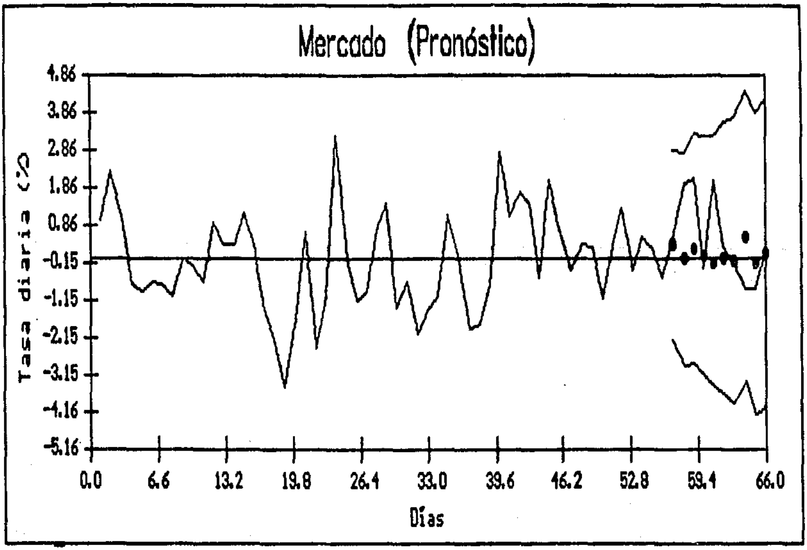


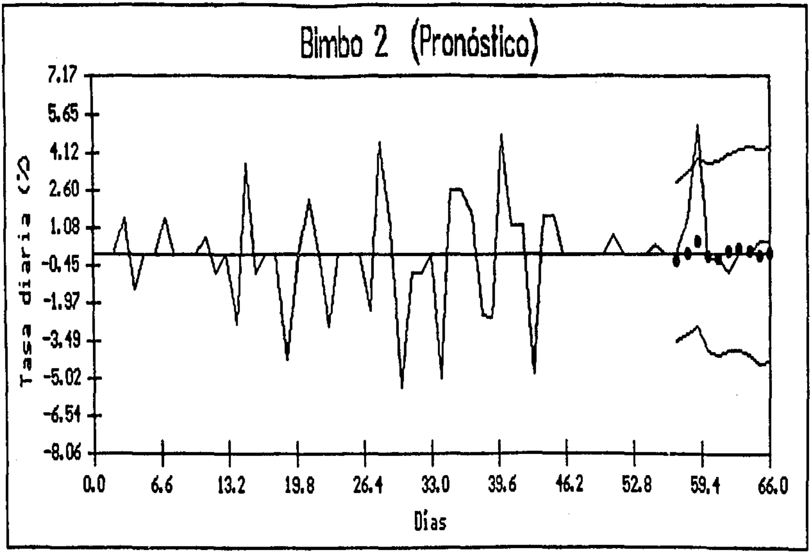
Mercado (Pronóstico)
Tasa diaria (%)
4.86
3.86
2.86
1.86
0.86
-0.15
-1.15
-2.15
-3.15
-4.16
-5.16
0.0
6.6
13.2
19.8
26.4
33.0
39.6
46.2
52.8
59.4
66.0
Días

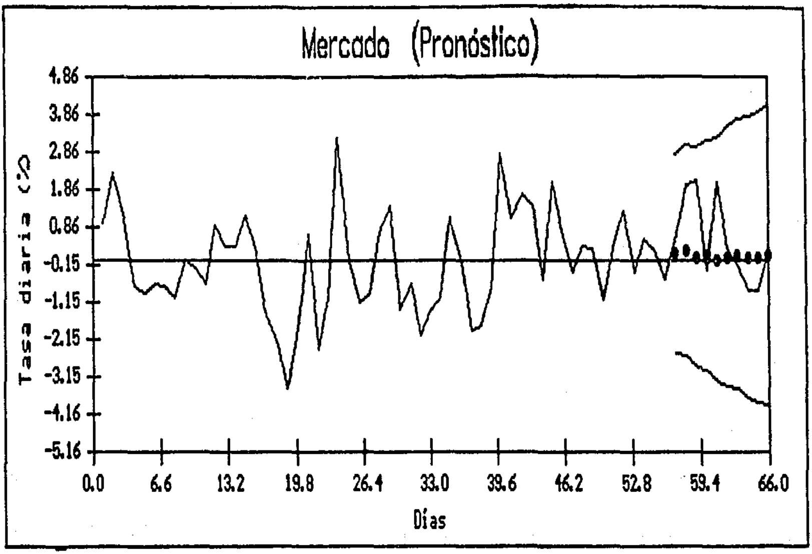

Alfa A (Pronóstico)
Tasa diaria (%)
28.54
23.65
18.77
13.89
9.01
4.12
-0.76
-5.64
-10.52
-15.40
-20.29
0.0
6.6
13.2
19.8
26.4
33.0
39.6
46.2
52.8
59.4
66.0
Días

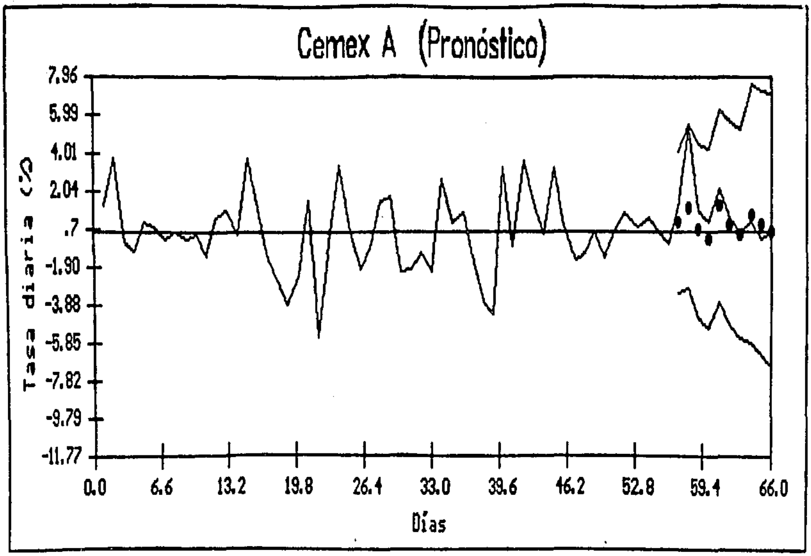

Mercado (Pronóstico)
Tasa diaria (%)
4.86
3.86
2.86
1.86
0.86
-0.15
-1.15
-2.15
-3.15
-4.16
-5.16
0.0
6.6
13.2
19.8
26.4
33.0
39.6
46.2
52.8
59.4
66.0
Días

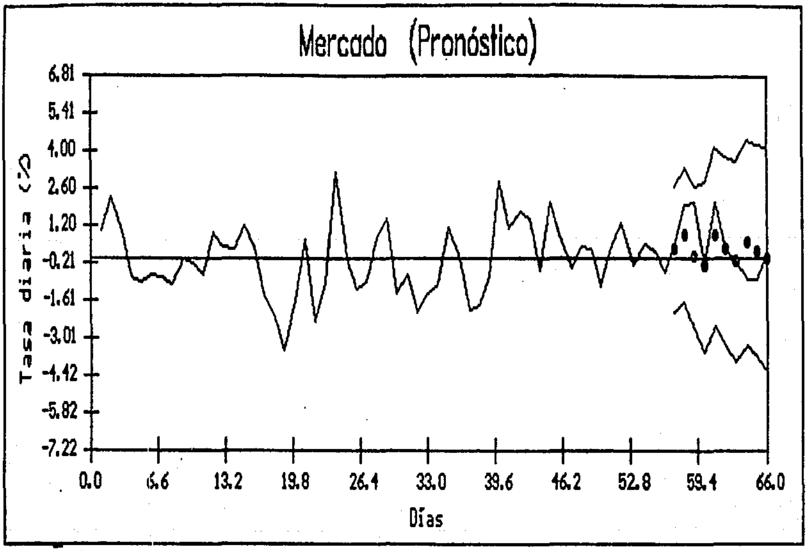

Apasco A (Pronóstico)
6.18
4.81
3.44
2.08
0.71
-0.66
-2.03
-3.40
-4.76
-6.13
-7.50
Tasa diaria (%)
0.0
6.6
13.2
19.8
26.4
33.0
39.6
46.2
52.8
59.4
66.0
Días

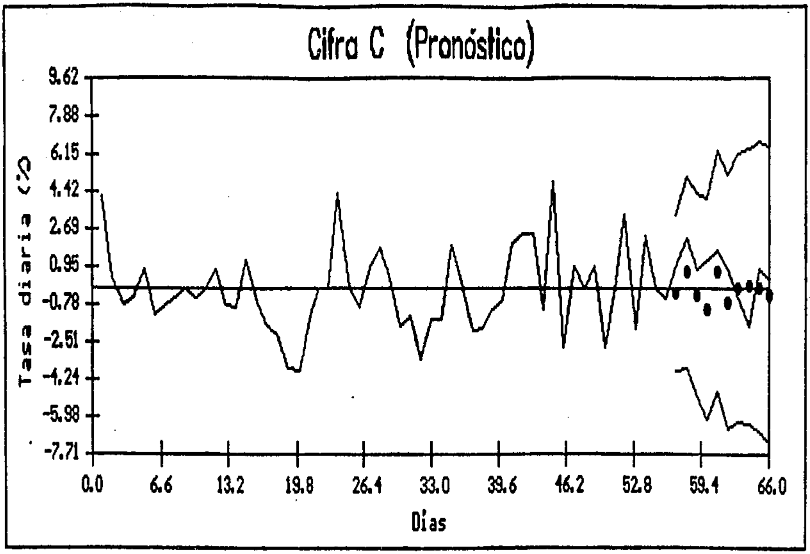

Mercado (Pronóstico)
4.86
3.86
2.86
1.86
0.86
-0.15
-1.15
-2.15
-3.15
-4.16
-5.16
Tasa diaria (%)
0.0
6.6
13.2
19.8
26.4
33.0
39.6
46.2
52.8
59.4
66.0
Días

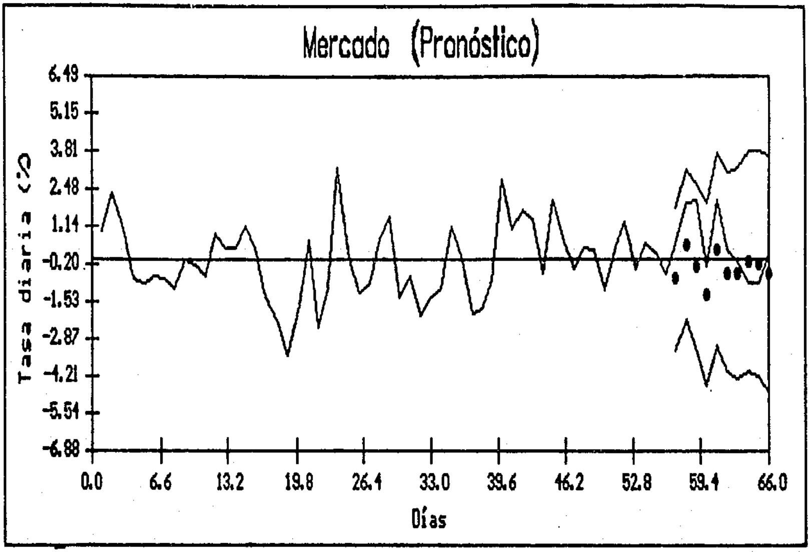

Bimbo 2 (Pronóstico)
Tasa diaria (%)
7.17
5.65
4.12
2.60
1.08
-0.45
-1.97
-3.49
-5.02
-6.54
-8.06
0.0
6.6
13.2
19.8
26.4
33.0
39.6
46.2
52.8
59.4
66.0
Días

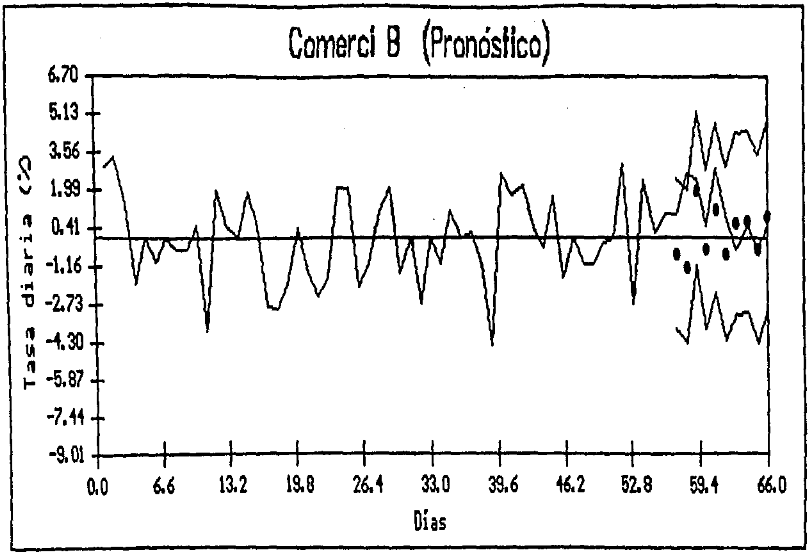

Mercado (Pronóstico)
Tasa diaria (%)
4.86
3.86
2.86
1.86
0.86
-0.15
-1.15
-2.15
-3.15
-4.16
-5.16
0.0
6.6
13.2
19.8
26.4
33.0
39.6
46.2
52.8
59.4
66.0
Días

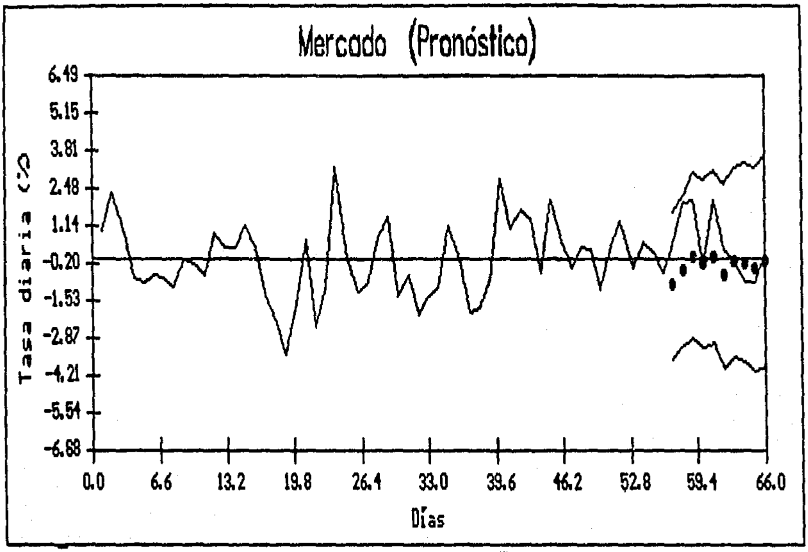

Cemex A (Pronóstico)
Tasa diaria (%)
7.96
5.99
4.01
2.04
.7
-1.90
-3.88
-5.85
-7.82
-9.79
-11.77
0.0
6.6
13.2
19.8
26.4
33.0
39.6
46.2
52.8
59.4
66.0
Días

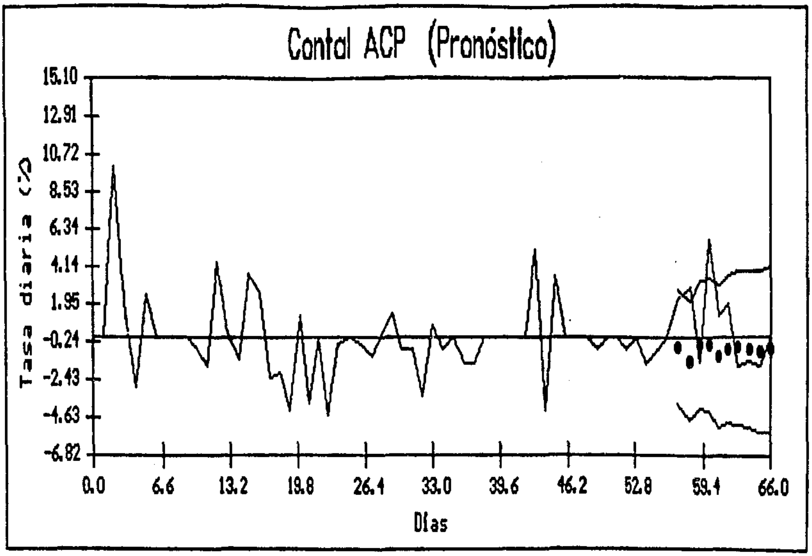

Mercado (Pronóstico)
Tasa diaria (%)
6.81
5.41
4.00
2.60
1.20
-0.21
-1.61
-3.01
-4.42
-5.82
-7.22
0.0
6.6
13.2
19.8
26.4
33.0
39.6
46.2
52.8
59.4
66.0
Días

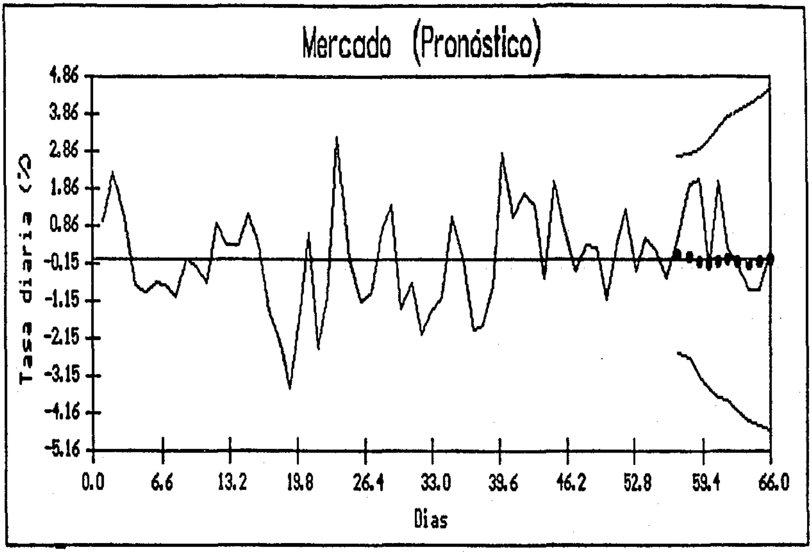

Cifra C (Pronóstico)
Tasa diaria (%)
9.62
7.88
6.15
4.42
2.69
0.95
-0.78
-2.51
-4.24
-5.98
-7.71
0.0
6.6
13.2
19.8
26.4
33.0
39.6
46.2
52.8
59.4
66.0
Días

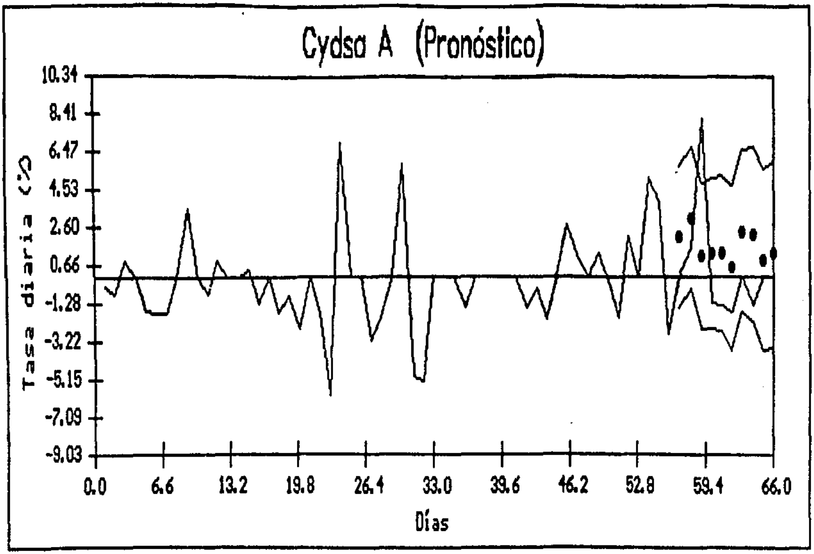

Mercado (Pronóstico)
Tasa diaria (%)
6.49
5.15
3.81
2.48
1.14
-0.20
-1.53
-2.87
-4.21
-5.54
-6.88
0.0
6.6
13.2
19.8
26.4
33.0
39.6
46.2
52.8
59.4
66.0
Días

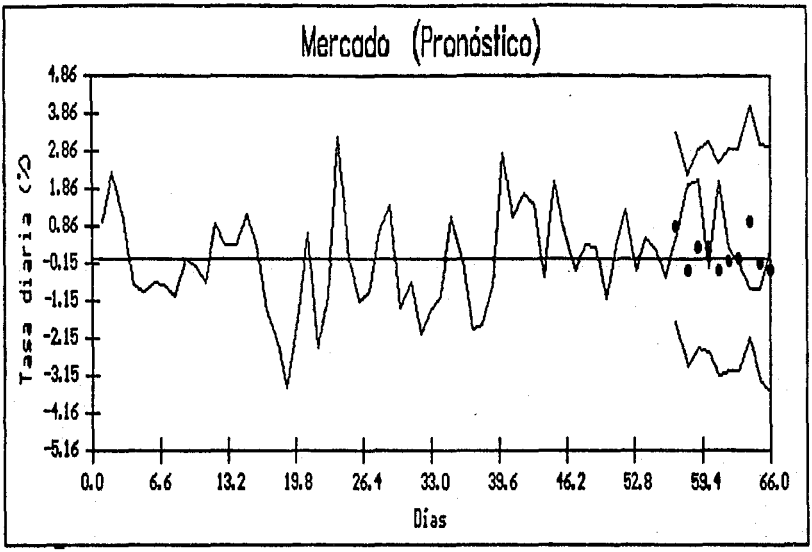

Comerci B (Pronóstico)
Tasa diaria (%)
6.70
5.13
3.56
1.99
0.41
-1.16
-2.73
-4.30
-5.87
-7.44
-9.01
0.0
6.6
13.2
19.8
26.4
33.0
39.6
46.2
52.8
59.4
66.0
Días

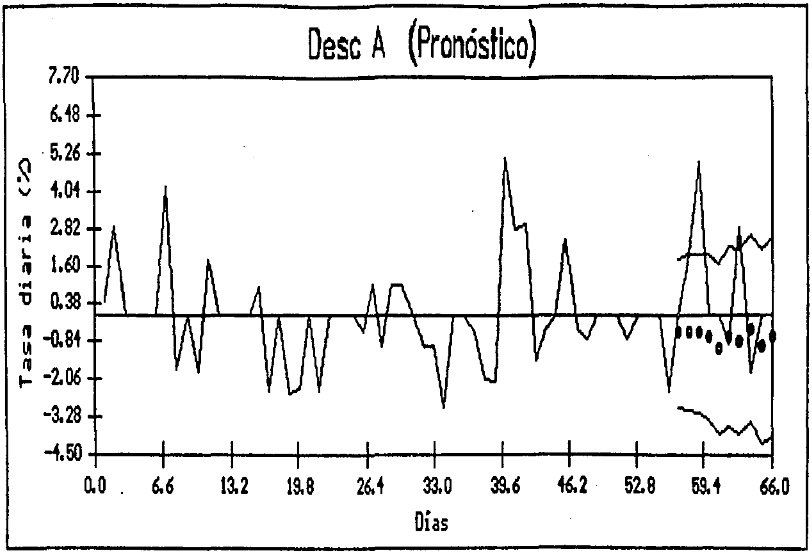

Mercado (Pronóstico)
Tasa diaria (%)
6.49
5.15
3.81
2.48
1.14
-0.20
-1.53
-2.87
-4.21
-5.54
-6.88
0.0
6.6
13.2
19.8
26.4
33.0
39.6
46.2
52.8
59.4
66.0
Días

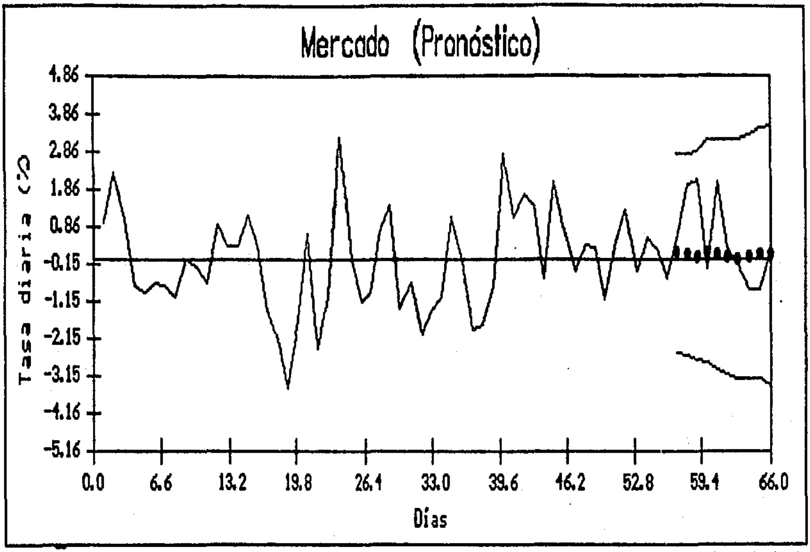

Contal ACP (Pronóstico)
Tasa diaria (%)
15.10
12.91
10.72
8.53
6.34
4.14
1.95
-0.24
-2.43
-4.63
-6.82
0.0
6.6
13.2
19.8
26.4
33.0
39.6
46.2
52.8
59.4
66.0
Días

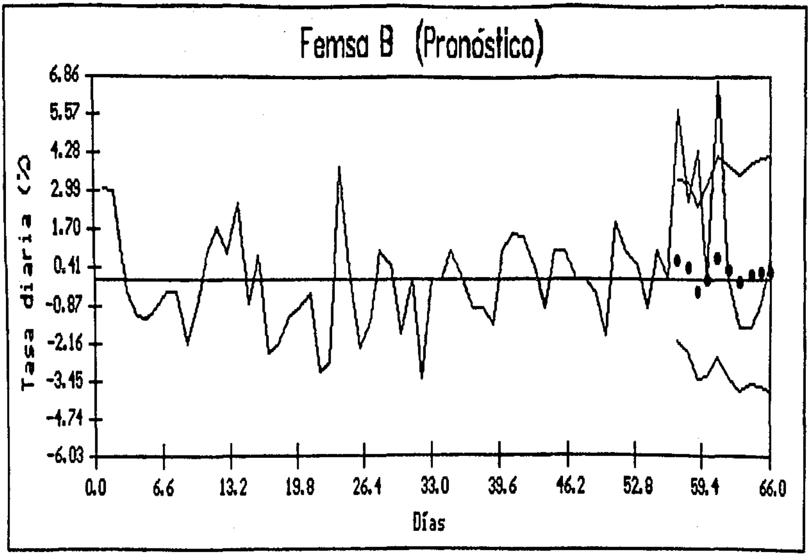

Mercado (Pronóstico)
Tasa diaria (%)
4.86
3.86
2.86
1.86
0.86
-0.15
-1.15
-2.15
-3.15
-4.16
-5.16
0.0
6.6
13.2
19.8
26.4
33.0
39.6
46.2
52.8
59.4
66.0
Días

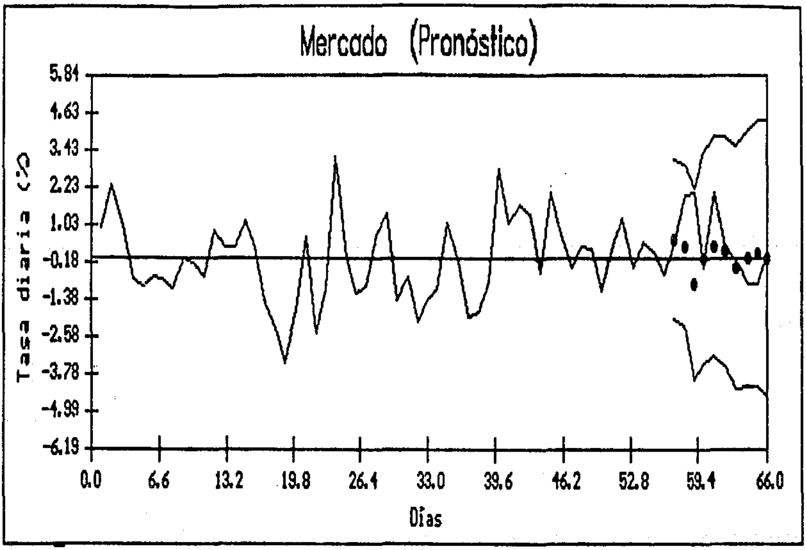

Cydsa A (Pronóstico)
Tasa diaria (%)
10.34
8.41
6.47
4.53
2.60
0.66
-1.28
-3.22
-5.15
-7.09
-9.03
0.0
6.6
13.2
19.8
26.4
33.0
39.6
46.2
52.8
59.4
66.0
Días

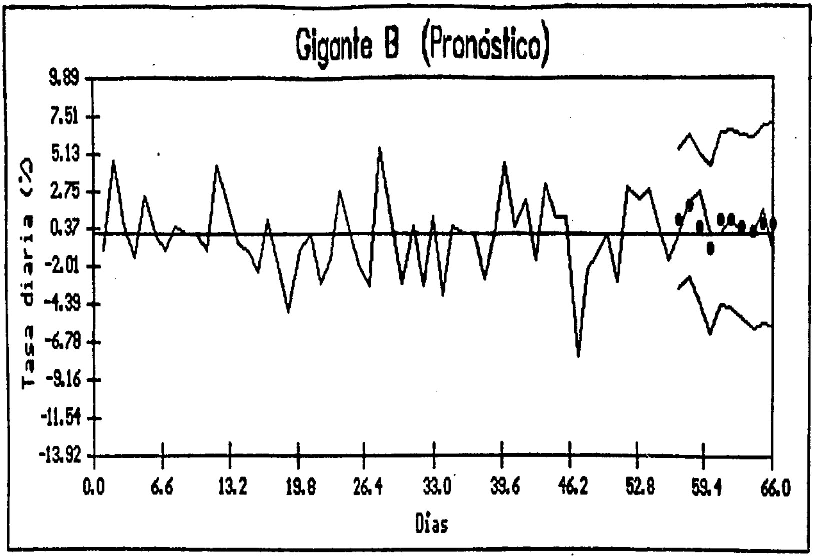

Mercado (Pronóstico)
Tasa diaria (%)
4.86
3.86
2.86
1.86
0.86
-0.15
-1.15
-2.15
-3.15
-4.16
-5.16
0.0
6.6
13.2
19.8
26.4
33.0
39.6
46.2
52.8
59.4
66.0
Días

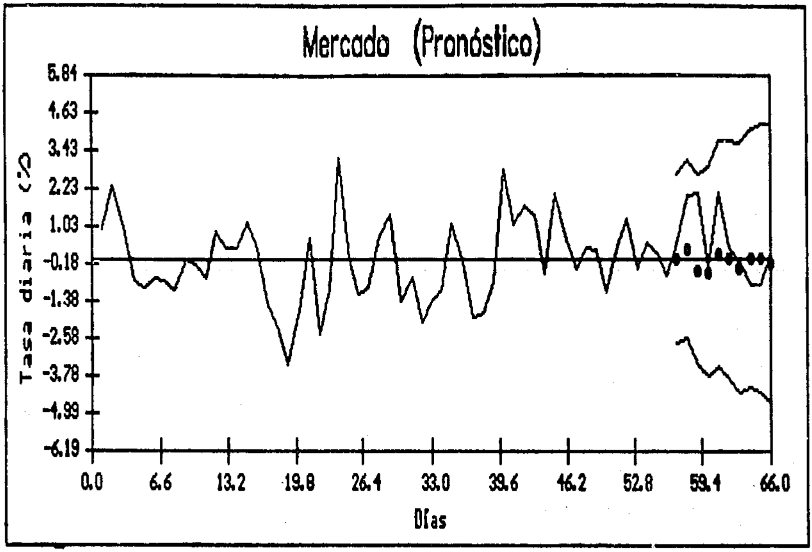

Desc A (Pronóstico)
7.70
6.48
5.26
4.04
2.82
1.60
0.38
-0.84
-2.06
-3.28
-4.50
Tasa diaria (%)
0.0
6.6
13.2
19.8
26.4
33.0
39.6
46.2
52.8
59.4
66.0
Días

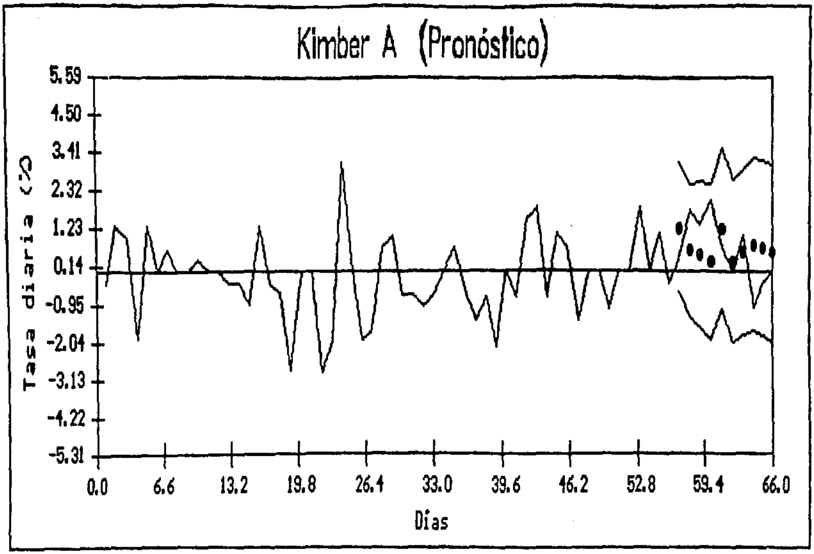

Mercado (Pronóstico)
4.86
3.86
2.86
1.86
0.86
-0.15
-1.15
-2.15
-3.15
-4.16
-5.16
Tasa diaria (%)
0.0
6.6
13.2
19.8
26.4
33.0
39.6
46.2
52.8
59.4
66.0
Días


Femsa B (Pronóstico)
Tasa diaria (%)
6.86
5.57
4.28
2.99
1.70
0.41
-0.87
-2.16
-3.45
-4.74
-6.03
0.0
6.6
13.2
19.8
26.4
33.0
39.6
46.2
52.8
59.4
66.0
Días

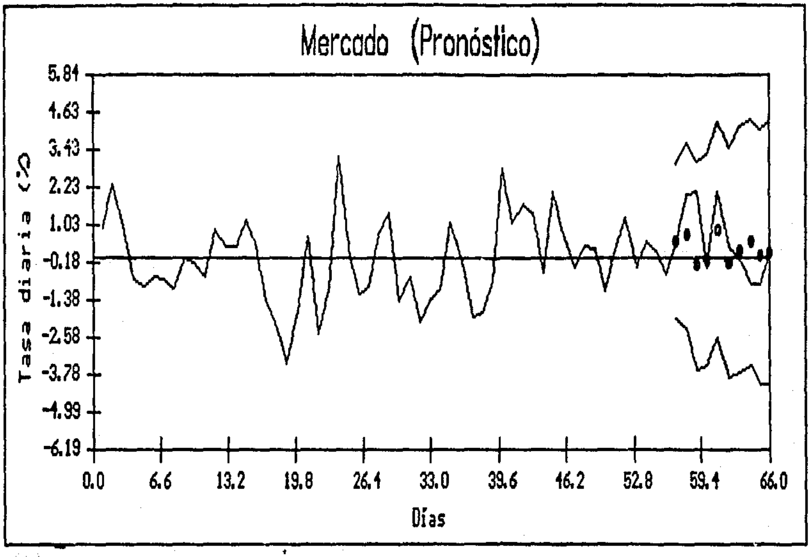

Mercado (Pronóstico)
Tasa diaria (%)
5.84
4.63
3.43
2.23
1.03
-0.18
-1.38
-2.58
-3.78
-4.99
-6.19
0.0
6.6
13.2
19.8
26.4
33.0
39.6
46.2
52.8
59.4
66.0
Días


Gigante B (Pronóstico)
Tasa diaria (%)
9.89
7.51
5.13
2.75
0.37
-2.01
-4.39
-6.78
-9.16
-11.54
-13.92
0.0
6.6
13.2
19.8
26.4
33.0
39.6
46.2
52.8
59.4
66.0
Días

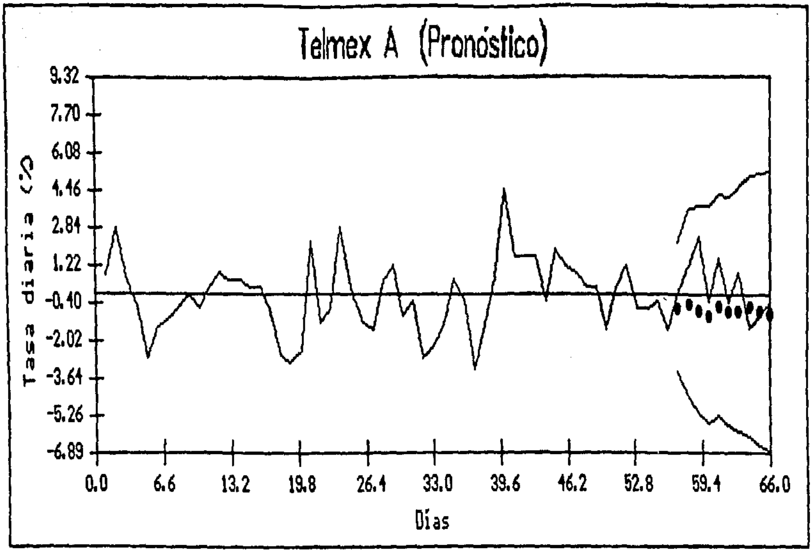

Mercado (Pronóstico)
Tasa diaria (%)
5.84
4.63
3.43
2.23
1.03
-0.18
-1.38
-2.58
-3.78
-4.99
-6.19
0.0
6.6
13.2
19.8
26.4
33.0
39.6
46.2
52.8
59.4
66.0
Días

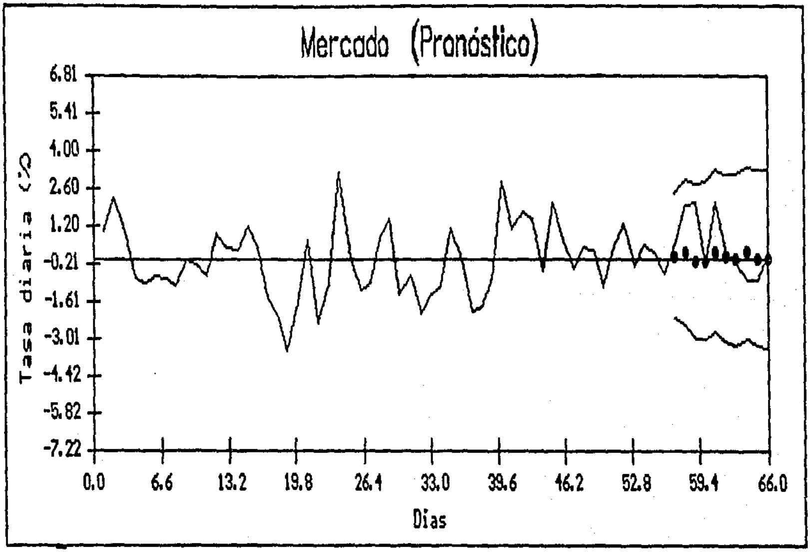


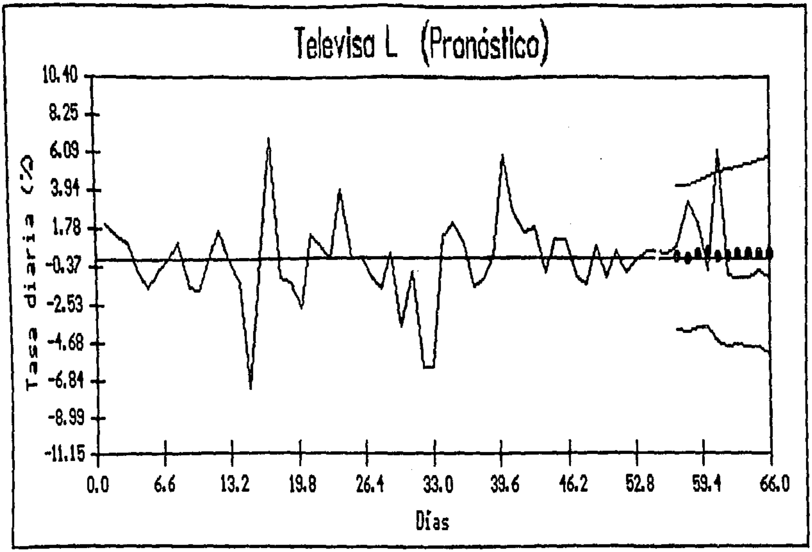
Kimber A (Pronóstico)
5.59
4.50
3.41
2.32
1.23
0.14
-0.95
-2.04
-3.13
-4.22
-5.31
Tasa diaria (%)
0.0
6.6
13.2
19.8
26.4
33.0
39.6
46.2
52.8
59.4
66.0
Días

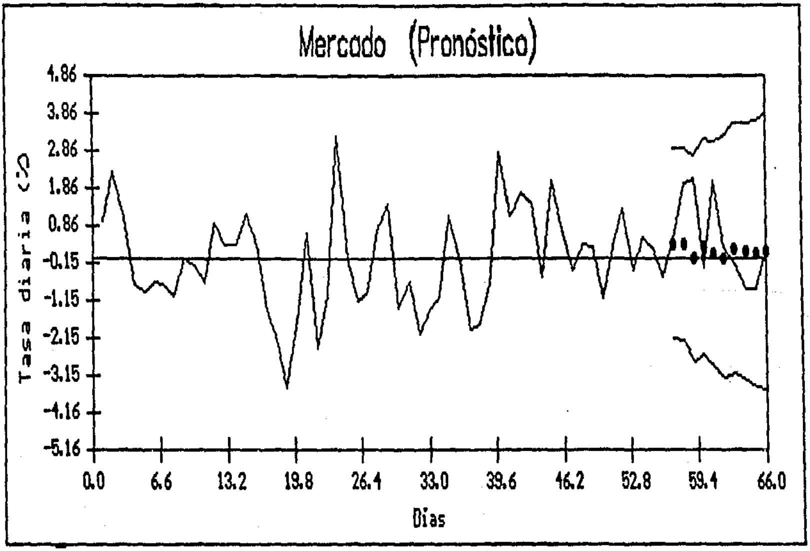


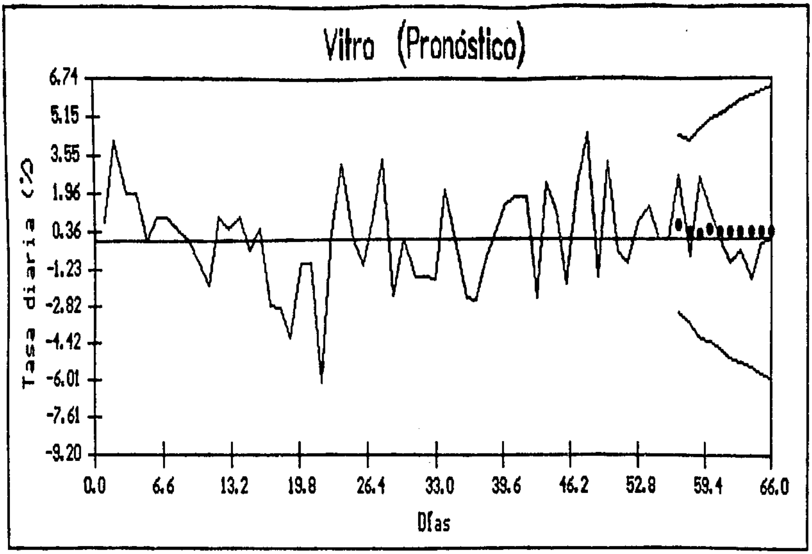
Mercado (Pronóstico)
5.84
4.63
3.43
2.23
1.03
-0.18
-1.38
-2.58
-3.78
-4.99
-6.19
Tasa diaria (%)
0.0
6.6
13.2
19.8
26.4
33.0
39.6
46.2
52.8
59.4
66.0
Días


Telmex A (Pronóstico)
Tasa diaria (%)
9.32
7.70
6.08
4.46
2.84
1.22
-0.40
-2.02
-3.64
-5.26
-6.89
0.0
6.6
13.2
19.8
26.4
33.0
39.6
46.2
52.8
59.4
66.0
Días

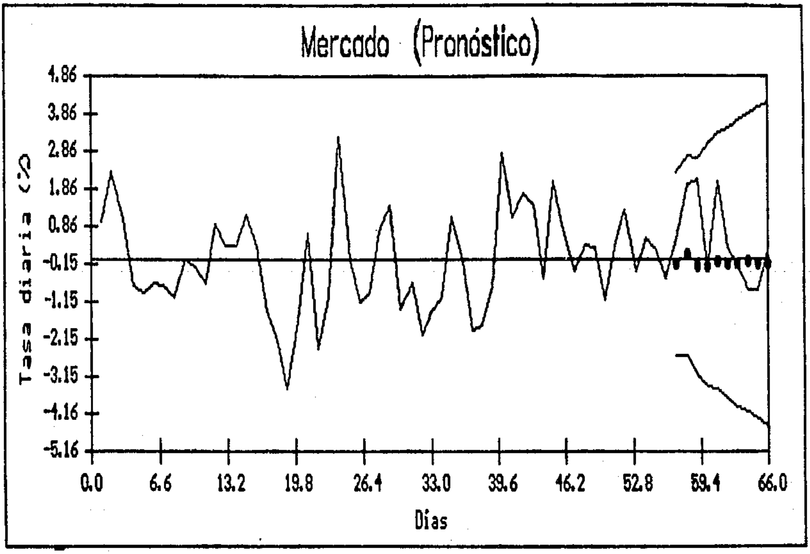

Mercado (Pronóstico)
Tasa diaria (%)
6.81
5.41
4.00
2.60
1.20
-0.21
-1.61
-3.01
-4.42
-5.82
-7.22
0.0
6.6
13.2
19.8
26.4
33.0
39.6
46.2
52.8
59.4
66.0
Días


Televisa L (Pronóstico)
10.40
8.25
6.09
3.94
1.78
-0.37
-2.53
-4.68
-6.84
-8.99
-11.15
Tasa diaria (%)
0.0
6.6
13.2
19.8
26.4
33.0
39.6
46.2
52.8
59.4
66.0
Días

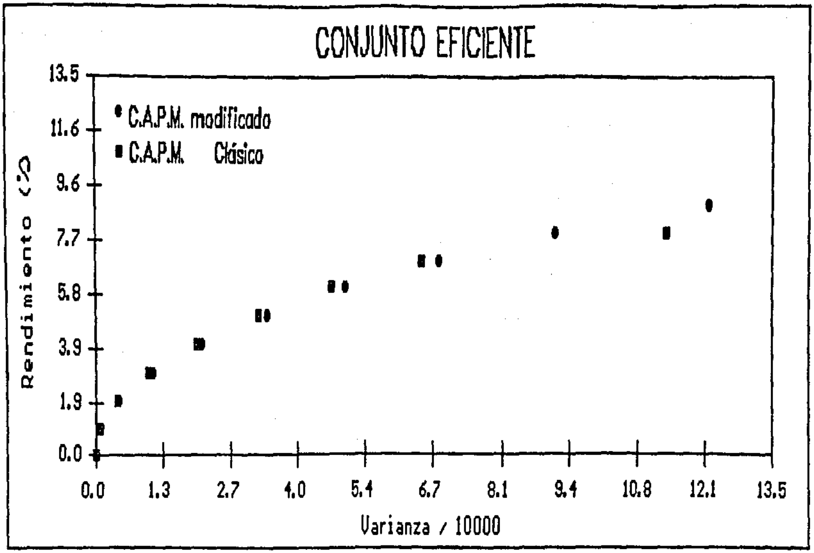

Mercado (Pronóstico)
4.86
3.86
2.86
1.86
0.86
-0.15
-1.15
-2.15
-3.15
-4.16
-5.16
Tasa diaria (%)
0.0
6.6
13.2
19.8
26.4
33.0
39.6
46.2
52.8
59.4
66.0
Días

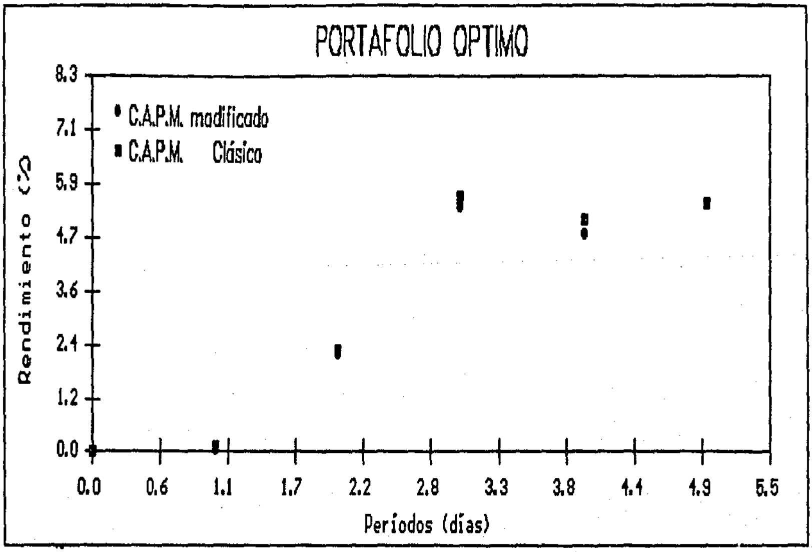


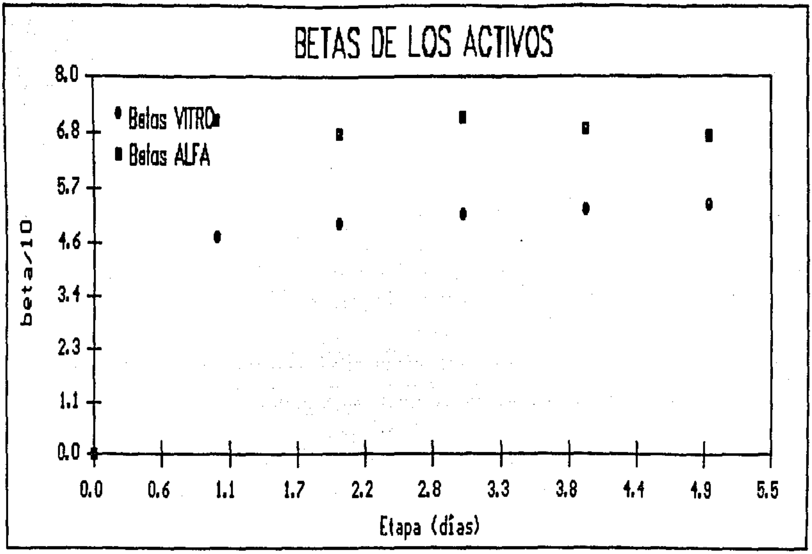
Vitro (Pronóstico)
6.74
5.15
3.55
1.96
0.36
-1.23
-2.82
-4.42
-6.01
-7.61
-9.20
Tasa diaria (%)
0.0
6.6
13.2
19.8
26.4
33.0
39.6
46.2
52.8
59.4
66.0
Días

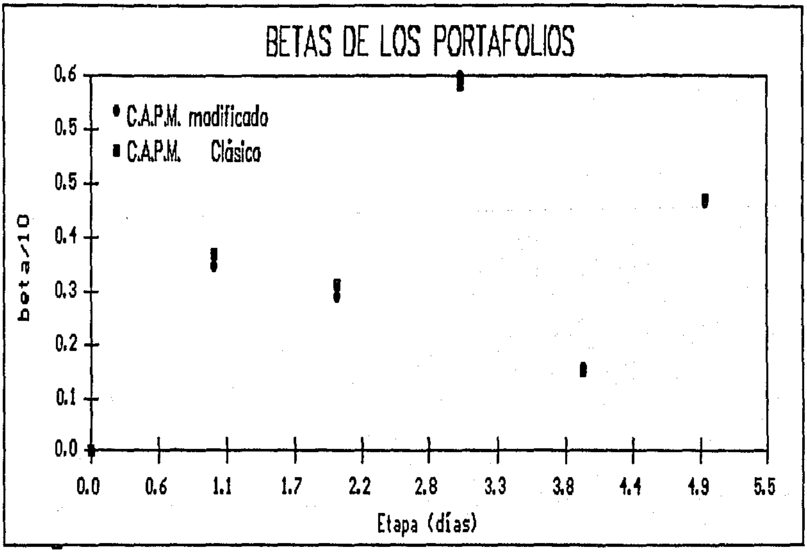


Mercado (Pronóstico)
4.86
3.86
2.86
1.86
0.86
-0.15
-1.15
-2.15
-3.15
-4.16
-5.16
Tasa diaria (%)
0.0
6.6
13.2
19.8
26.4
33.0
39.6
46.2
52.8
59.4
66.0
Días


CONJUNTO EFICIENTE
C.A.P.M. modificado
C.A.P.M. Clásico
Rendimiento (%)
13.5
11.6
9.6
7.7
5.8
3.9
1.9
0.0
0.0
1.3
2.7
4.0
5.4
6.7
8.1
9.4
10.8
12.1
13.5
Varianza / 10000


PORTAFOLIO OPTIMO
C.A.P.M. modificado
C.A.P.M. Clásico
Rendimiento (%)
8.3
7.1
5.9
4.7
3.6
2.4
1.2
0.0
0.0
0.6
1.1
1.7
2.2
2.8
3.3
3.8
4.4
4.9
5.5
Períodos (días)


BETAS DE LOS ACTIVOS
Betas VITRO
Betas ALFA
beta/10
8.0
6.8
5.7
4.6
3.4
2.3
1.1
0.0
0.6
1.1
1.7
2.2
2.8
3.3
3.8
4.4
4.9
5.5
Etapa (días)


BETAS DE LOS PORTAFOLIOS
C.A.P.M. modificado
C.A.P.M. Clásico
beta/10
0.6
0.5
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
0.6
1.1
1.7
2.2
2.8
3.3
3.8
4.4
4.9
5.5
Etapa (días)

CAPITULO 5. CONCLUSIONES.

Para concluir este trabajo se recordará la introducción. En ella se planteó claramente el propósito bursátil y lucrativo del objetivo central, el cual queda muy bien expresado en el contexto de las hipótesis del C.A.P.M., el inversionista siempre está buscando incrementar su riqueza, para lograrlo usa como parámetros de evaluación las tasas esperadas de los activos así como sus varianzas. Además, una característica que presentan, es la aversión al riesgo, de todos ellos, los que buscan diariamente multiplicar sus rendimientos de manera consistente, racional y sistemática son los llamados inversionistas agresivos.

Bajo el esquema del modelo propuesto, dichas hipótesis se cumplen, aunque otras no. Por ejemplo, no se sigue suponiendo que los mercados son eficientes. Más aún, en ninguna de las restricciones del modelo de selección de portafolios se aplica tal hipótesis. Por otra parte, un resultado interesante es el que se refiere a las fracciones óptimas, no se descartó la hipótesis de divisibilidad infinita; sin embargo, el modelo convergió a soluciones que van de acuerdo al comportamiento real de las operaciones bursátiles. Esto se concluye del hecho de que las fracciones seleccionadas por el modelo no son tan pequeñas en el sentido de que sólo se eligen a lo más, cuatro activos de renta variable y el de renta fija. Para los más dinámicos y agresivos inversionistas, los resultados aquí logrados son muy útiles puesto que en la naturaleza de su actividad está el conocimiento diario del comportamiento del mercado. Bajo éste modelo, el inversionista puede manejar un portafolio que no le distrae de tantos otros parámetros que se toman en cuenta en el mundo de las inversiones bursátiles y que además le resulta manejable y adaptable de un día a otro.

En general, se llegó a un resultado que es muy estimulante y aceptable para un inversionista que constantemente busca el mayor rendimiento de un portafolio. Es muy aceptable pues permite obtener grandes rendimientos comparables a los del C.A.P.M. original y pese a ello presenta un menor riesgo, medido a partir del parámetro β, como se vió en las gráficas de conjunto eficiente y betas de los portafolios.

En la gráfica de conjunto eficiente se puede interpretar que al elegir un portafolio, uno no debe aceptar un rendimiento menor que el del C.A.P.M. y por otra parte se sabe cual puede ser una cota superior al rendimiento esperado, marcada por la curva del conjunto eficiente del modelo propuesto.

Esta es pues una alternativa en diseño de portafolios que compite en tan buenos rendimientos como el C.A.P.M. original y que pese a la sencillez económica del mismo, resulta en un portafolio bien diversificado y a la vez de bajo riesgo.

Para terminar, puede decirse que el objetivo que se planteó al inicio del trabajo se ha logrado de manera muy satisfactoria y que deja abierta la posibilidad de mayores rendimientos y menores riesgos, permite al inversionista adaptarlo a las condiciones del mercado y permite la incorporación de mayores restricciones, como la de que el riesgo del portafolio $\tilde{\beta}_p(t)$ se acote por arriba, además que no limita el horizonte del inversionista a un período como en realidad lo hace el C.A.P.M. clásico.

Adicionalmente a la ganancia de todas estas ventajas, el objetivo central de pronóstico del riesgo, resultó en un procedimiento o metodología que consiste de los siguientes pasos,

1) Analizar la información de las emisoras de activos como series de tiempo bivariadas, cada activo contra el mercado.
2) Obtener de las series, estimaciones o pronósticos de las varianzas y covarianzas de cada activo con el mercado.
3) Usar esos parámetros como constantes del modelo de portafolio propuesto y de la optimización de éste obtener las fracciones óptimas.
4) Sabiendo que el parámetro de riesgo de cada activo contribuye

al riesgo total del portafolio en una proporción igual a su fracción óptima del mismo, calcular el riesgo total pronosticado como un promedio ponderado.

NO EXISTE

PAGINA

56

8

APENDICE 1. ALGUNOS CONCEPTOS DE ARIMA VECTORIAL

En este apéndice se establecen algunos de los conceptos básicos de las series de tiempo vectoriales o multivariadas, se presentan las ecuaciones que fundamentan todos los cálculos computacionales que se realizaron, así como las de los errores que determinan los intervalos de confianza de los pronósticos. Con ello se pretende presentar toda la información que el modelo desarrollado requiere, pero sin que el estudio de este apéndice sea determinante para la compresión global del trabajo que se realizó.

Se iniciará con las definiciones que determinan los elementos de la teoría de las series de tiempo.

Un **vector aleatorio** de dimensión m es un elemento de $\mathbb{R}^m$ de tal forma que cada una de sus componentes es una variable aleatoria.

Un **proceso estocástico** es una familia de vectores aleatorios asociados a un conjunto índice, de tal forma que a cada elemento del conjunto le corresponda uno y sólo un vector aleatorio, lo que se acostumbra representar como $\{ X_t ; t \in T \}$.

En la notación del conjunto anterior, T es el conjunto índice y X_t es el vector aleatorio correspondiente al elemento t de T. Si T es un intervalo de números reales, cerrado o abierto, se dice que el proceso estocástico es continuo, y si T es un conjunto finito o infinito numerable, se dice que el proceso estocástico es discreto.

La continuidad o discreción del intervalo T no implica nada respecto a las características de las variables aleatorias involucradas. Dichas variables pueden ser variables aleatorias discretas o continuas.

Se entiende por una **serie de tiempo** una sucesión o conjunto de observaciones de un proceso estocástico, de modo tal que la inferencia estadística que se haga estará asociada a las características del proceso estocástico generador de la serie observada.

En la metodología de las series de tiempo se utilizan constantemente algunos operadores que se presentan a continuación.

El **operador de retraso** se representa como B ya que en inglés se escribe backwardness. No se usará ésta letra para representar a los vectores aleatorios, de modo que no habrá lugar a confusión. La relación que define a este operador es la siguiente [8],

$$B^j X_t = X_{t-j} , \quad j = 0,\pm1,\pm2,\pm3,... \quad t = 0,\pm1,\pm2,\pm3,... \tag{A1.1}$$

El siguiente operador que se presenta con igual frecuencia es el llamado **operador de diferencia** que se representa por el símbolo ∇, y se define por la relación,

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1} = (1-B)X_t . \tag{A1.2}$$

De lo que resulta la siguiente ecuación de operadores,

$$\nabla = 1 - B . \qquad (A1.3)$$

También se usan con frecuencia en esta técnica, operadores de retraso en forma de polinomios, ésto es, el polinomio

$$X_t - \Psi_1 X_{t-1} - \Psi_2 X_{t-2} - \ldots - \Psi_k X_{t-k} = X_t - \sum_{j=1}^{k} \Psi_j X_{t-j}$$

es un polinomio de retraso matricial vectorial que puede expresarse como $\Psi(B)X_t$, en donde

$$\Psi(B) = I - \Psi_1 B - \Psi_2 B^2 - \ldots - \Psi_k B^k = I - \sum_{j=1}^{k} \Psi_j B^j \qquad (A1.4)$$

y los coeficientes Ψ_j son matrices de orden n×n con entradas constantes y conocidas y sus valores ponderan la importancia de los retrasos con los cuales están asociados, y k puede tomar los valores 1,2,3,...

Dentro de los modelos que han probado servir en la práctica para representar fenómenos reales, se encuentran los de promedios móviles que se representan como

$$X_t = (I - \Theta_1 B - \Theta_2 B^2 - \ldots - \Theta_q B^q) a_t = \Theta(B) a_t , \qquad (A1.5)$$

en los que Θ_i es una matriz de orden n×n de coeficientes conocidos. A estos modelos se les acostumbra representar como MA(q), modelos de promedios móviles de orden q, las siglas se refieren a su origen inglés, MOVING AVERAGE. I es la identidad de orden n×n.

Otros modelos se definen de forma similar, son los modelos autorregresivos de orden p, o modelos AR(p),

$$(I - \Phi_1 B - \Phi_2 B^2 - \ldots - \Phi_p B^p) X_t = \Phi(B) X_t = a_t , \qquad (A1.6)$$

Φ_i es una matriz de coeficientes de orden n×n.

Existen modelos compuestos, formados por una parte autorregresiva y una de promedios móviles a los cuales se les llama en consecuencia, **modelos autorregresivos de promedios móviles** y se representan como

$$\Phi(B)X_t = \Theta(B)a_t \ . \qquad (A1.7)$$

Además de todos éstos existen modelos aún más elaborados que comprenden una parte referente al operador de diferencias, los cuales se representan por la expresión

$$\Phi(B)\ \nabla^d\ X_t = \Theta(B)a_t \qquad (A1.8)$$

y se les conoce como modelos **autorregresivos integrados y de promedios móviles** ARIMA(p,d,q).

La idea básica en esta técnica de análisis de procesos estocásticos es la siguiente,

> UNA SERIE DE TIEMPO, CUYOS VALORES SUCESIVOS PUEDEN SER ALTAMENTE <u>DEPENDIENTES</u>, PUEDE CONSIDERARSE GENERADA A PARTIR DE UNA SERIE DE CHOQUES ALEATORIOS <u>INDEPENDIENTES</u>.

Estos choques aleatorios son, por hipótesis, realizaciones independientes de un vector aleatorio cuya media es constante èn el tiempo, que por lo general es cero, y cuya matriz de varianza-covarianza es $\underline{\sigma}_a^2$, en donde $\underline{\sigma}_a^2$ es una matriz diagonal en la que para cualquier instante del proceso, el elemento del renglón $\underline{i}$ y columna $\underline{j}$ representa la covarianza entre las componentes $\underline{i}$ y $\underline{j}$ de dicho vector aleatorio.

A esta sucesión de vectores aleatorios $\{a_t\}$ se le conoce como proceso de ruido blanco vectorial o sólo ruido blanco.

Con todos estos elementos Box y Jenkins desarrollaron una técnica de tipo iterativo que permite construir modelos para series de tiempo, en esa técnica se siguen cuatro etapas fundamentales, y son:

(1) **Identificación** de un posible modelo. Dentro del conjunto infinito de modelos ARIMA(p,d,q), se busca determinar los valores de los órdenes p, d y q que representen a la serie estudiada.

(2) **Estimación** de los parámetros involucrados. Cuando en la etapa anterior se han elegido los valores p, d y q más convenientes, se estiman los valores de las matrices de coeficientes involucradas en los polinomios de retraso, tratando de que los valores ajustados del modelo sean los más parecidos a las observaciones por medio de técnicas de estiamción no lineal.

(3) **Verificación**. Se revisa o verifica que el modelo sea de hecho un ajuste adecuado, que no se hayan violado las hipótesis fundamentales de la técnica. Si el modelo no cumple con tales hipótesis, se deben intentar aquellas modificaciones que sean necesarias hasta que la etapa de verificación indique resultados aceptables.

(4) **Pronóstico**. Al llegar a esta etapa, se puede usar el modelo para los fines que se perseguían al inicio del análisis del proceso estocástico. La importancia mayor de esta técnica radica en esta etapa. Uno busca una estimación de algo que a futuro es incierto, y la técnica permite dicha estimación. Es por ello que a esta etapa se le conoce, también, como de aplicación o de uso del modelo.

Sin entrar en detalles de la teoría se dirá que en la etapa de identificación se revisa si la FUNCION DE AUTOCORRELACION se anula en un número finito de q términos, en tal caso, debe suponerse que se trata de un modelo MA(q).

Por otra parte, si al analizar la función de autocorrelación parcial se observa que se anula en un número finito de p términos, se debe conjeturar que se trata de un proceso autorregresivo de orden p, AR(p).

Con lo cual se tiene el siguiente cuadro de comportamiento de las partes autorregresivas y de promedios móviles en términos de las funciones de autocorrelación (FAC) y de autocorrelación parcial (FACP).

Proceso	FAC	FACP
AR(p)	Convergencia a cero, de -- una sucesión infinita.	Solamente las primeras p autoco-rrelaciones parciales son distintas de cero.

Proceso	FAC	FACP
MA(q)	Sólo las primeras q auto-correlaciones sondistin-tas de cero.	Sucesión infinita convergente a cero.

En la etapa de estimación, cuando ya se conocen los valores de p, d y q que mejor sirven al modelo, se determina un ajuste de parámetros de éste, los coeficientes matriciales de los polinomios de retraso, por medio de la maximización de una función de verosimilitud. Esta etapa requiere de un algoritmo de optimización no lineal, en este trabajo se realizó por medio del método de Newton para maximizar funciones no lineales de muchas variables, y una vez que se obtenían tales parámetros estimados, se podía continuar con la etapa de verificación.

En la etapa de verificación se debe revisar que las hipótesis de la técnica tengan validez para el modelo estimado, la primera consiste en revisar que los residuales, los estimadores del ruido blanco, tengan media cero. Después se debe verificar que la varianza sea constante para cada etapa. Las pruebas que se mencionan líneas arriba aparecen en la sección de gráficas del capítulo 4, con los nombres de

- Función de Autocorrelación (*,*),
- Función de Autocorrelación Parcial(*,*);

entre las páginas 54 y 57.

Después apracen las gráficas del análisis de residuales, con los títulos,

- * (Residuales),
- Autocorrelación Residual (*,*),
- Autocorrelación Parcial Residual (*,*),
- Periodograma * (Residuales),
- Periodograma Acumulado Normalizado * (Residuales);

entre las páginas 59 Y 62.

En todas las gráficas a las que se hace referencia, el, o los asteriscos, significan algún activo de mercado de los que se analizaron o el portafolio de mercado. Esta información analizada se describe en el capítulo 4.

Para un proceso estocástico { X_t ; t ∊T } se define la función media o promedio como

$$\vec{\mu}_t = E[X_t], \tag{A1.9}$$

donde el operador de esperanza se aplica a cada componente del vector aleatorio; se define la función matricial de covarianza del proceso como

$$\Gamma(k) = \mathrm{Cov}(X_t, X_{t+k}) = E[(X_t - \vec{\mu}_t)\ (X_{t+k} - \vec{\mu}_{t+k})']$$

$$= E \begin{bmatrix} X_{1,t} - \mu_{1,t} \\ \vdots \\ X_{m,t} - \mu_{m,t} \end{bmatrix} [X_{1,t+k} - \mu_{1,t+k}, \ \ldots, \ X_{m,t+k} - \mu_{m,t+k}]$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma_{11}(k) & \gamma_{12}(k) & \cdots & \gamma_{1m}(k) \\ \gamma_{21}(k) & \gamma_{22}(k) & \cdots & \gamma_{2m}(k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{m1}(k) & \gamma_{m2}(k) & \cdots & \gamma_{mm}(k) \end{bmatrix} = \mathrm{Cov}(X_{t-k}, X_t) \tag{A1.10}$$

en donde $\gamma_{ij}(k) = E[(X_{i,t}-\mu_{i,t})(X_{j,t+k}-\mu_{j,t+k})] = E[(X_{i,t-k}-\mu_{i,t-k})(X_{j,t}-\mu_{j,t})]$, para $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$, $i = 1,2,\ldots,m$ y $j = 1,2,\ldots,m$. Para $i = j$, $\gamma_{ii}(k)$ es la función de autocovarianza para la i-ésima componente del proceso $X_{i,t}$. Para $i \neq j$, $\gamma_{ij}(k)$ es la función de covarianza cruzada entre $X_{i,t}$ y $X_{j,t}$. La matriz $\Gamma(0)$ es la matriz de varianza-covarianza del proceso.

Nótese que $\gamma_{ji}(k) = E[(X_{j,t}-\mu_{j,t})(X_{i,t+k}-\mu_{i,t+k})]$ que en general es diferente de $\gamma_{ij}(k) = E[(X_{i,t}-\mu_{i,t})(X_{j,t+k}-\mu_{j,t+k})]$, de donde se tiene que $\gamma_{ij}(k) \neq \gamma_{ji}(k)$.

La función matricial de correlación para el proceso vectorial se define como

$$\rho(k) = D^{-1/2}\Gamma(k)D^{-1/2} = [\rho_{ij}(k)] \qquad \text{(A1.11)}$$

para $i,j = 1,2,\ldots,m$, donde D es la matriz diagonal en la que el i-ésimo elemento de la diagonal es la varianza del i-ésimo proceso; es decir,

$$D = \operatorname{diag}[\gamma_{11}(0),\gamma_{22}(0),\ldots,\gamma_{mm}(0)].$$

Por consiguiente, el i-ésimo elemento de la diagonal de $\rho(k)$, $\rho_{ii}(k)$, es la función de autocorrelación para la i-ésima componente de la serie $X_{i,t}$, mientras que el elemento ij-ésimo, fuera de la diagonal,

$$\rho_{ij}(k) = \frac{\gamma_{ij}(k)}{[\gamma_{ii}(0)\ \gamma_{jj}(0)]^{1/2}}, \qquad \text{(A1.12)}$$

representa la función de correlación cruzada entre $X_{i,t}$ y $X_{j,t}$.

Como en el caso univariado, las funciones matriciales de covarianza y correlación son positivas semidefinidas en el sentido de que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \vec{\alpha}_i'\Gamma(t_i-t_j)\,\vec{\alpha}_j \geq 0 \qquad \text{(A1.13)}$$

y además,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \vec{\alpha}_i' \rho(t_i - t_j)\, \vec{\alpha}_j \geq 0 \qquad \text{(A1.14)}$$

para cualquier conjunto de instantes $t_1, t_2, \ldots, t_n$ y cualquier conjunto de vectores $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n$. Y también como en el caso univariado, a las funciones matriciales de covarianza y correlación se les llama las funciones matriciales de autocovarianza y autocorrelación, respectivamente.

En el caso multivariado de m componentes, el ruido blanco a_t se constituye de vectores de media cero y matriz de covarianzas que cumple con la siguiente característica

$$E[a_t a_{t+k}'] = \begin{cases} \Sigma \ , & \text{si} \quad k=0, \\ 0 \ , & \text{si} \quad k\neq 0, \end{cases} \qquad \text{(A1.15)}$$

donde Σ es cualquier matriz simétrica positiva definida de orden $m\times m$.

Los procesos vectoriales autorregresivos y de promedios moviles, ARMA(p,q) vectorial.

Como una extensión directa del caso univariado, se define un proceso ARMA(p,q) vectorial, proceso autorregresivo y de promedios móviles, como el proceso que resuelva la ecuación vectorial en diferencias

$$\Phi_p(B)X_t = \Theta_q(B)a_t, \qquad \text{(A1.16)}$$

en la que B es el conocido operador de retraso, y donde

$$\Phi_p(B) = \Phi_0 - \Phi_1 B - \Phi_2 B^2 - \ldots - \Phi_p B^p$$
$$\Theta_q(B) = \Theta_0 - \Theta_1 B - \Theta_2 B^2 - \ldots - \Theta_q B^q$$

son los polinomios matriciales autorregresivo y de promedios móviles de órdenes p y q respectivamente. Φ_i, Θ_j, con $i = 1,2,\ldots,p$ y $j = 1,2,\ldots, q$, son matrices de orden $m \times m$ de coeficientes y $\Phi_0 = \Theta_0 = I$, la identidad de orden $m \times m$.

El proceso es estacionario si los ceros (las raíces) del determinante $|\Phi_p(B)|$ están fuera del círculo unitario. En este caso, es posible reescribir el proceso como

$$X_t = \Psi(B) a_t, \tag{A1.17}$$

en donde

$$\Psi(B) = [\Phi_p(B)]^{-1}\Theta_q(B) = \sum_{s=0}^{\infty} \Psi_s B^s \tag{A1.18}$$

que es tal que la sucesión de Ψ_s es de cuadrado sumable y es una matriz de orden $m \times m$. Así mismo, el proceso es invertible si los ceros del determinante del polinomio matricial $|\Theta_q(B)|$ están fuera del círculo unitario, lo que permitiría escribir el proceso como

$$\Pi(B) X_t = a_t \tag{A1.19}$$

con

$$\Pi(B) = [\Theta_q(B)]^{-1}\Phi_p(B) = I - \sum_{s=1}^{\infty} \Pi_s B^s \tag{A1.20}$$

tal que la sucesión de Π_s es absolutamente sumable y de orden $m \times m$.

Resumiendo lo visto hasta aquí se tiene, un modelo vectorial determinado por la ecuación (A1.16) es estacionario si los ceros de $|\Phi_p(B)|$ se encuentran fuera del círculo unitario. En cuyo caso el proceso X_t se puede escribir en la forma MA

$$X_t = [\Phi_p(B)]^{-1}\Theta_q(B)a_t \ . \qquad (A1.21)$$

Análogamente, la ecuación (A1.16) es invertible si los ceros de $|\Theta_q(B)|$ se ubican fuera del círculo unitario, y por tanto el proceso se puede representar como uno del tipo AR

$$[\Theta_q(B)]^{-1}\Phi_p(B)X_t = a_t. \qquad (A1.22)$$

<u>Una observación importante</u>.

Es importante notar que para modelos de series de tiempo univariadas, si los polinomios AR y MA son no degenerados, $\phi_p(B) \neq 1$ y $\theta_q(B) \neq 1$, entonces los órdenes de $[\phi_p(B)]^{-1}$ y de $[\theta_q(B)]^{-1}$ son infinitos. En estas condiciones, un proceso AR(p) de orden finito corresponde a un proceso MA de orden infinito, y un proceso MA(q) de orden finito corresponde a un proceso AR de orden infinito. Sin embargo esta relación dual no necesariamente existe en el caso vectorial. Ello se debe a que en el caso vectorial

$$[\Phi_p(B)]^{-1} = \frac{1}{|\Phi_p(B)|}\,\Phi_p^{\dagger}(B), \qquad (A1.23)$$

donde $|\Phi_p(B)|$ es el determinante y $\Phi_p^{\dagger}(B)$ es la matriz adjunta de $\Phi_p(B)$. El orden de la matriz adjunta $\Phi_p^{\dagger}(B)$ de un polinomio matricial

AR de orden finito también es finito. De aquí que, la inversa de un polinomio matricial AR no degenerado $[\Phi_p(B)]^{-1}$ puede ser de orden finito si el determinante $|\Phi_p(B)|$ es una constante. De manera similar, el orden de una matriz polinomial $[\Theta_q(B)]^{-1}$ también puede ser finito. De tal suerte que es posible, para algunos procesos vectoriales, ser representados simultáneamente por una forma de orden finito AR, una forma de orden finito MA y una forma ARMA de orden finito, un ejemplo de ésto se puede ver en la página 348 del libro de William W. S. Wei que se tiene como referencia [9].

Cuando se cuenta con registros históricos de una serie de tiempo, se debe recurrir a estudiar muestras de la información disponible, de modo que si bien no se conocen las funciones de probabilidad conjunta, sí es posible calcular estimadores de los momentos de la serie; ello conduce al concepto de FUNCION MATRICIAL DE CORRELACION MUESTRAL.

Si se cuenta con un conjunto de n observaciones de una serie de tiempo vectorial, de la forma X_1, X_2, ... ,X_n; se puede calcular la función matricial de correlación muestral

$$\hat{\rho}(k) = [\hat{\rho}_{ij}(k)] \tag{A1.24}$$

en la que $\hat{\rho}_{ij}(k)$ es la correlación cruzada muestral para las componentes i-ésima y j-ésima del conjunto de observaciones

$$\hat{\rho}_{ij}(k) = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (Z_{i,t}-\overline{Z}_i)(Z_{j,t+k}-\overline{Z}_j)}{\left[\sum_{t=1}^{n} (Z_{i,t}-\overline{Z}_i)^2 \sum_{t=1}^{n}(Z_{j,t}-\overline{Z}_j)^2\right]^{1/2}} \tag{A1.25}$$

y $\overline{Z}_i$ y $\overline{Z}_j$ son las medias muestrales de las correspondientes componentes de los vectores del conjunto de observaciones. Hannan demostró que si el proceso vectorial es estacionario, $\hat{\rho}(k)$ es un estimador consistente que se distribuye normalmente y de forma asintótica.

Estimación del riesgo del pronóstico

Para terminar con los conceptos básicos y con ello, el apéndice, se va a pasar a considerar la estimación del riesgo del pronóstico.

Considérese que el proceso vectorial determinado por la ecuación en diferencias (A1.16) es estacionario, de modo que, como se ha dicho en párrafos arriba, se puede representar como lo indican las ecuaciones (A1.17) y (A1.18), que a continuación se vuelven a escribir,

$$X_t = \Psi(B)a_t,$$

en donde

$$\Psi(B) = [\Phi_p(B)]^{-1}\Theta_q(B) = \sum_{s=0}^{\infty} \Psi_s B^s .$$

Un pronóstico cualquiera, que se realice a partir de las n observaciones de registros históricos con que se cuente y con h períodos adelante, será de la forma

$$\tilde{X}_n(h) = \sum_{j=h}^{\infty} C_j \, a_{n+h-j}, \tag{A1.26}$$

en donde C_j es una matriz de m×m por determinar, mientras que el valor de la serie para el período n+h se determina por la ecuación

$$X_{n+h} = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \, a_{n+h-j} \qquad \text{(A1.27)}$$

con $\Psi_0 = I$ de m×m.

El error cuadrático medio del pronóstico es

$$\underset{n}{E}[(X_{n+h} - \tilde{X}_n(h))^2] = \underset{n}{E}[(X_{n+h} - \tilde{X}_n(h))^2 | \; X_n, X_{n-1}, \ldots] \qquad \text{(A1.28)}$$

pero como $E[a_{n+i} a'_{n+j}] = 0$ si $i \neq j$,

$$\underset{n}{E}[(X_{n+h} - \tilde{X}_n(h))^2] = \sum_{j=0}^{h-1} E[(\Psi_j \; a_{n+h-j})(\Psi_j \; a_{n+h-j})'] +$$

$$\sum_{j=h}^{\infty} E[((\Psi_j + C_j) \; a_{n+h-j})((\Psi_j + C_j) \; a_{n+h-j})']$$

$$= \sum_{j=0}^{h-1} \Psi_j \Psi_j' \sigma_a^2 \quad + \quad \sum_{j=h}^{\infty} (\Psi_j + C_j)(\Psi_j + C_j)' \sigma_a^2$$

en donde σ_a^2 es la matriz de varianza-covarianza de los residuales, es decir,

$$\sigma_a^2 = E[a_{n+h-j} a'_{n+h-j}] = \underline{\sigma}_a^2 \; I, \qquad \text{(A1.29)}$$

con $\underline{\sigma}_a^2$ un escalar cualquiera y con I la identidad de m×m.

Y para que el error cuadrático medio sea mínimo se debe cumplir que $C_j = -\Psi_j$, $j = h, h+1, h+2, \ldots$

de donde resulta que la expresión del pronóstico es

$$\tilde{X}_n(h) = -\sum_{j=h}^{\infty} \Psi_j \; a_{n+h-j}; \qquad \text{(A1.30)}$$

$$\text{pero } \underset{n}{E}[a_{n+h-j}] = \begin{cases} a_{n+h-j} & , \quad j \geq n \\ 0 & , \quad j < n \end{cases}$$

$$\text{entonces } \underset{n}{E}[X_{n+h}] = - \underset{n}{E}\left[\sum_{j=0}^{h-1} \Psi_j \; a_{n+h-j}\right] - \underset{n}{E}\left[\sum_{j=h}^{\infty} \Psi_j \; a_{n+h-j}\right] =$$

$$= - \sum_{j=h}^{\infty} \Psi_j \; a_{n+h-j} \; . \qquad \text{(A1.31)}$$

En consecuencia,

$$\tilde{X}_n(h) = E[X_{n+h}] \; , \qquad \text{(A1.32)}$$

por lo tanto, el error del pronóstco con origen en n viene dado por

$$e_n(h) = X_{n+h} - \tilde{X}_n(h) = -\sum_{j=0}^{h-1} \Psi_j \; a_{n+h-j} \qquad \text{(A1.33)}$$

y se cumple que

$$\underset{n}{E}[e_n(h)] = 0 \quad \text{y} \quad \underset{n}{Var}[e_n(h)] = \sum_{j=0}^{h-1} \Psi_j \Psi_j' \sigma_a^2 \; . \qquad \text{(A1.34)}$$

Desarrollando un poco más la expresión de la varianza del error del pronóstico se tiene,

$$\Psi_j \Psi_j' = \sum_{l=1}^{m} \Psi_{il}^{(j)} \Psi_{lk}^{(j)}, \qquad \text{(A1.35)}$$

en la que $\Psi_{il}^{(j)}$ representa el elemento del renglón i, columna l, de la matriz correspondiente al retaso j.

$$\text{Entonces,} \quad \underset{n}{Var}[e_n(h)] = \sum_{j=0}^{h-1} \left(\sum_{l=1}^{m} \Psi_{il}^{(j)} \Psi_{lk}^{(j)} \right) \sigma_a^2$$

y nuevamente, como $E[a_{n+i} a'_{n+j}] = 0$ si $i \neq j$ se llega a un resultado de interés económico para este trabajo,

$$\underset{n}{\mathrm{Var}}_{i}[e_n(h)] = [\Psi_{ii}^{(h)}]^2\sigma_i^2 + [\Psi_{iM}^{(h)}]^2\sigma_M^2 , \qquad \text{(A1.36)}$$

en el que el indice i representa a cualquiera de los activos que se cotizan en la Bolsa y M representa el portafolio de mercado. Es importante notar que el riesgo del pronóstico de cualquier instrumento bursátil sólo depende de su varinza y de la varianza del portafolio de mercado.

Dicho resultado es análogo al caso de dos variables aleatorias univariadas, X, Y, para las cuales $\mathrm{Var}[aX + bY] = a^2\mathrm{Var}[X] + b^2\mathrm{Var}[Y]$ si X, Y son variables aleatorias independientes.

Un caso especial lo constituye el riesgo del pronóstico del portafolio de mercado, por definición, $r_M = \sum_{i=1}^{n} X_{iM} r_i$, en tal caso

$$\underset{n}{\mathrm{Var}}_{M}[e_n(h)] = \sum_{i=1}^{m} \Psi_{Mi}^{(j)}\sigma_i^2 + [\Psi_{MM}^{(h)}]^2\sigma_M^2 , \qquad \text{(A1.37)}$$

con lo que se tiene la estimación de los parámetros que requiere el modelo y más que eso, una justificación estadística de los resultados económicos del capítulo 3.

Ya se ha definido el proceso vectorial de ruido blanco, pero ahora se adoptrá una notación diferente.

Ruido Blanco Multivariado (Multivariate White Noise, WN)

Se dice que la serie m-variada o de m componentes, $\{Z_t , t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \}$ es de ruido blanco con media 0 y matriz de covarianzas Σ, denotada por,

$$(Z_t) \sim WN(0, \Sigma) \ , \qquad (A1.38)$$

si y sólo si (Z_t) es estacionaria con vector de media 0 y función matricial de covarianzas,

$$\Gamma(h) = \begin{cases} \Sigma \text{ si } h = 0 \\ 0 \text{ en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Ahora se presentarán dos teoremas que garantizan la existencia, unicidad e invertibilidad de procesos ARMA(p,q) vectoriales. Para estudiar las demostraciones de ellos se puede consultar la referencia de Brockwell [8].

Teorema (<u>Criterio de Causalidad</u>)

<u>Si</u> $\det \Phi(z) \neq 0 \quad \forall \quad z \in \mathbb{C} \quad \ni \quad |z| \le 1$, entonces el proceso $\Phi(B)X_t = \Theta(B)Z_t$, $(Z_t) \sim WN(0, \Sigma)$ tiene exactamente una solución estacionaria,

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j Z_{t-j} \ , \qquad (A1.39)$$

donde las matrices Ψ_j se determinan de forma ùnica por la ecuación

$$\Psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j z^j = \Phi^{-1}(z)\Theta(z), \quad |z| \le 1. \qquad (A1.40)$$

Teorema (<u>Criterio de invertibilidad</u>)

<u>Si</u> $\det \Theta(z) \neq 0 \quad \forall \quad z \in \mathbb{C} \quad \ni \quad |z| \le 1$, y (X_t) es una solución estacionaria del proceso $\Phi(B)X_t = \Theta(B)Z_t$, $(Z_t) \sim WN(0, \Sigma)$ entonces,

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Pi_j X_{t-j} \ , \qquad (A1.41)$$

donde las matrices Π_j están determinadas unívocamente por

$$\Pi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \Pi_j z^j = \Theta^{-1}(z)\Phi(z), \quad |z| \le 1. \qquad (A1.42)$$

Como puede verse en [9], el estadístico $\Xi(s) = N\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[\hat{P}_{ij}(s)]^2$, da una prueba que permite determinar el orden de un modelo autorregresivo, el cual se distribuye asintóticamente como una χ^2 con n^2 grados de libertad. En donde n, como ya se ha dicho, es la dimensión de los vectores aleatorios, N es el tamaño de la muestra, y $\hat{P}_{ij}(s)$ es un estimado del elemento del renglón $\underline{i}$, columna $\underline{j}$ de la matriz de autocorrelación parcial con retraso s.

NO EXISTE

PAGINA

56
8

APENDICE 2. ALGUNOS CONCEPTOS DE C.A.P.M. MULTIPERIODICO, EXTENSIONES DEL C.A.P.M.

En este apéndice se establecen algunas de las ideas que amplían la teoría del C.A.P.M., se presentan varias reducciones de las hipótisis del modelo y se describe brevemente la transición del mismo al caso multiperiódico.

Como se vió en el capítulo 3, el modelo del C.A.P.M. original hace fuertes suposiciones que llevan a restricciones muy rígidas. Después de este modelo se han creado otros más complicados, en la mayoría de ellos se relajan algunas de las suposiciones del C.A.P.M. original. A esas versiones modificadas del C.A.P.M. se les conoce como **versiones extendidas del C.A.P.M.** o modelos extendidos de fijación de precios de capital.

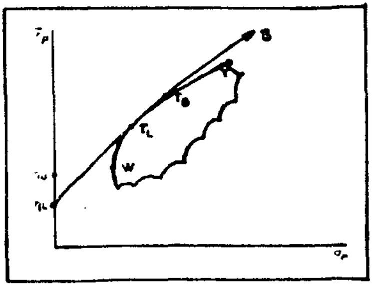
En este apéndice se verán algunas de esas extensiones de forma descriptiva.

Políticas de inversión eficientes cuando se restringen los préstamos o son caros.

Como se dijo en el capítulo 3, una de las hipótesis del C.A.P.M. es que los inversionistas pueden prestar o pedir prestado a la misma tasa de interés sin riesgo. Sin embargo la realidad en asuntos de préstamos es diferente, o en todo caso, se restringen las cantidades de los préstamos.

La primera modificación que se presenta es en ese sentido, estudiar el efecto de la relajación de la hipótesis de presetar y pedir prestado a la misma tasa libre de riesgo.

Una alternativa para visualizar tal efecto es considerando que los inversionistas pueden prestar dinero sin riesgo, es decir, suponer que pueden comprar acciones a una tasa r_{fL} libre de riesgo; y que además pueden pedir prestado dinero en cantidades ilimitadas a una mayor tasa de interés r_{fB}, $r_{fB} > r_{fL}$; esto se muestra en la siguiente figura.



Conjunto eficiente cuando las tasas libres de riesgo son diferentes.

La región con apariencia de sombrilla representa a las combinaciones rendimiento-riesgo, sin tasa libre de riesgo, disponibles de entre los activos de riesgo.

Si no existen oportunidades de prestar o pedir prestado a la tasa libre de riesgo, el conjunto eficiente será la curva WT_LT_BY, y muchas combinaciones de activos de riesgo serán eficientes, pero la disponibilidad de prestar a la tasa libre de riesgo r_{fL} hace que los portafolios de riesgo entre los puntos W y T_L sean <u>ineficientes</u>, ya que las combinaciones de préstamo sin riesgo y de portafolio con riesgo en T_L proporcionan más rendimiento por el mismo riesgo.

De forma similar, la capacidad de pedir prestado dinero a la tasa r_{fB} crea otro portafolio de interés especial, representado por T_B. Los portafolios de riesgo entre los puntos T_B y Y ahora son ineficientes, debido a que los activos que se manejan en T_B los dominan, brindando más rendimiento por el mismo riesgo.

Los inversionistas que muestren preferencia al riesgo no buscarán prestar ni pedir prestado, pero si intentarán poseer combinaciones eficientes de activos con riesgo, ubicándose a lo largo de la curva T_LT_B. Así las cosas, sus valores y portafolios estarán diseñados a guisa de ser consistentes con sus grados de aversión al riesgo.

En tales circunstancias, la CLM estará formada por dos líneas y una curva, la línea que va de r_{fL} a T_L, depués la curva de T_L a T_B y finalmente una línea que parte de T_B y que se prolonga indefinidamente.

Espectativas heterogeneas

Otra de las extensiones tiene que ver con la apreciación de cada uno de los inversionistas respecto al riesgo. Se dijo ya que una más de las hipótesis del C.A.P.M. es la de que todos los inversionistas tienen la misma apreciación del riesgo.

Varios investigadores han estudiado las implicaciones de suponer que los diferentes inversionistas tienen percepciones diferentes respecto a los rendimientos esperados, desviaciones estándar y covarianzas; sustituyendo de esa manera la hipótesis por una de espectativas heterogéneas. En algunos de los estudios se ha encontrado que la combinación óptima de cada inversionista es única ya que el portafolio depende de las espectativas del inversionista respecto a las tasas esperadas, desviaciones estándar y covarianzas.

El C.A.P.M. original supone que los inversionistas únicamente están interesados en el riesgo y el rendimiento. Sin embargo, también pueden ser importantes otras características para el inversionista, por ejemplo, la liquidez. La liquidez se refiere al costo de vender o comprar una acción en una situación de premura o urgencia. Por ejemplo, se considera que una casa es una inversión relativamente sin liquidez ya que comunmente es difícil obtener un precio "justo" al tratar de venderla rápidamente.

Es razonable suponer que muchos inversionistas considerarán los portafolios de mayor liquidez más atractivos si les reditúan el mismo rendimiento, bajo el mismo riesgo, que otros de menor liquidez. No obstante, sin lugar a dudas, la actitud de los inversionistas hacia la liquidez es diferente. Para algunos es muy importante, para otros medianamente importante y aún para otros poco importante.

Bajo esas condiciones, la tasa esperada de un activo se basará en dos características del mismo:

1. La contribución marginal al riesgo, debida al activo, de un portafolio eficiente. Lo cual se medirá por la beta (β_i) del

activo.

2. La contribución marginal a la liquidez, debida al activo, de un portafolio eficiente. Ello se medirá por la liquidez (L_i) del activo.

Manteniendo cualesquiera otras características del portafolio sin cambio, los inversionistas rechazarán grandes valores de β_i pero aceptarán con agrado grandes valores de L_i. Lo que ésto implica es que dos activos con las mismas betas pero diferentes liquideces no tendrán las mismas tasas esperadas. Asi, los inversionistas retendrán las acciones de mayor liquidez y venderán las que tengan menos y en el equilibrio las acciones de mayor liquidez tendrán menor tasa esperada. De forma similar, dos acciones con la misma liquidez pero diferentes betas no tendrán la misma tasa esperada. La acción con la mayor beta tendrá mayor tasa esperada.

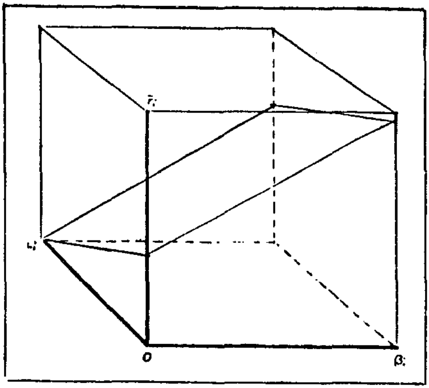
Si se grafica la relación entre las tres magnitudes, $\bar{r}_i$, β_i y L_i, se obtiene lo que se conoce como un <u>Plano de Activos de Mercado</u> (Security Market Plane).

Si las tasas esperadas se basan en β_i, L_i y una tercera característica, entonces se tendrá un modelo C.A.P.M. tetradimensional para describir el correspondiente equilibrio. A la ecuación correspondiente de tal modelo se le llama por analogía, <u>Hiperplano de Activos de Mercado</u>.

EN EQUILIBRIO, TODAS LAS ACCIONES SE GRAFICARAN EN UN <u>HIPERPLANO</u>

DE ACTIVOS DE MERCADO, DONDE CADA EJE MIDE LA CONTRIBUCION DE UN ACTIVO A LA CARACTERISTICA DEL PORTAFOLIO EFICIENTE QUE LE INTERESA, EN PROMEDIO, AL INVERSIONISTA.

SI EN PROMEDIO, UNA CARACTERISTICA (COMO LA LIQUIDEZ) ES DEL GUSTO DEL INVERSIONISTA, ENTONCES AQUELLAS ACCIONES QUE CONTRIBUYAN MAS A ESA CARACTERISTICA, MANTENIENDO TODAS LAS OTRAS SIN CAMBIO, OFRECERAN MENORES TASAS ESPERADAS. INVERSAMENTE, SI UNA CARACTERISTICA (TAL COMO LA BETA) ES INDESEABLE PARA EL INVERSIONISTA, ENTONCES, AQUELLAS ACCIONES QUE MAS CONTRIBUYAN A ESA CARACTERISTICA OFRECERAN MAYORES TASAS ESPERADAS.



Plano de Mercado de Activos

En un mercado de valores con muchas características relevantes, la tarea de diseñar un portafolio, para un inversionista específico, es más complicada, puesto que sólo un inversionista con actitudes y preferencias promedio deberá poseer el portafolio de mercado. En general:

> SI A UN INVERSIONISTA LE GUSTA MAS UNA CARACTERISTICA (O LE DESAGRADA MENOS) QUE AL INVERSIONISTA PROMEDIO, GENERALMENTE TENDRA UN PORTAFOLIO CON MAS DE ESA CARACTERISTICA, PROPORCIONALMENTE, RESPECTO AL PORTAFOLIO DE MERCADO. INVERSAMENTE, SI A UN INVERSIONISTA LE AGRADA MENOS UNA CARACTERISTICA (O LE DESAGRADA MAS) QUE AL INVERSIONISTA PROMEDIO, DEBERA TENER UN PORTAFOLIO CON RELATIVAMENTE MENOS DE ESA CARACTERISTICA, QUE LO QUE BRINDA EL PORTAFOLIO DE MERCADO.

El C.A.P.M. multiperiódico

Como la beta (o bien la covarianza) es la medida relevante del riesgo para un activo, según el C.A.P.M., sólo es necesario explotar la relación entre ésta y el riesgo total del activo. Como se verá, dicha relación es la siguiente

$$\sigma_i = [\beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2]^{1/2} . \qquad \text{(A2.1)}$$

Se mostrará que el riesgo total del activo i en (A2.1), medido por su desviación estándar σ_i, se divide en dos componentes. La primera de ellas es la proporción relacionada al movimiento del portafolio de mercado, la cual es igual al producto del cuadrado de la beta de la empresa emisora del activo y la varianza del portafolio de mercado y se le llama con frecuencia el riesgo del mercado (o riesgo sistemático) del activo. La segunda componente es la parte no relacionada al movimiento del portafolio de mercado. Se le representa como $\sigma^2_{\varepsilon i}$ y se le llama con frecuencia <u>riesgo único</u> (<u>o</u> <u>no</u> <u>comercial</u> <u>o</u> <u>no</u> <u>sistemático</u>) del activo.

El pronóstico del rendimiento de un activo es análogo al pronóstico de la temperatura del día de mañana. Los meteorólogos tienen algunos modelos para estimar cuál será la máxima temperatura <u>esperada</u>. Veamos de qué manera se puede hacer una estimación del riesgo futuro.

Según el C.A.P.M., los precios de los activos se ajustarán hasta que se dé el equilibrio, en el que cada uno de los activos se ubica en la SML. O bien, en el equilibrio, la tasa esperada del activo <u>i</u> durante el intervalo que dura cada período es,

$$\bar{r}^e_i(t) = r_f + (\bar{r}_M(t) - r_f)\beta_i(t) \qquad \text{(A2.2)}$$

donde,

$\bar{r}^e_i$ denota la tasa esperada en <u>equilibrio</u>, del activo <u>i</u>,

r_f denota la tasa libre de riesgo,

$\bar{r}_M$ denota la tasa esperada del portafolio de mercado,

β_i denota el coeficiente beta del activo <u>i</u>,

t representa la etapa o instante que se esté considerando.

Pero la ecuación (A2.2) se puede escribir como

$$\bar{r}^e_i(t) - r_f = (\bar{r}_M(t) - r_f)\beta_i(t), \qquad \text{(A2.3)}$$

mostrando que la <u>tasa relativa o de exceso</u>, en el equilibrio, para un activo durante el período <u>t</u>, es igual al producto del rendimiento promedio relativo del portafolio de mercado y de la beta del activo.

Sin embargo, la ecuación anterior no es un modelo de lo que será la tasa relativa real de un activo durante el período t. Por esa razón se usa un proceso generador de rendimientos. La línea característica es un tipo de proceso generador de rendimientos,

$$r_i(t) - r_f(t) = (r_M(t) - r_f(t))\beta_i(t) + \varepsilon(t)_i, \qquad \text{(A2.4)}$$

donde $r_i(t)$ es la tasa real del activo i que se dará en la etapa t, $r_f(t)$ es la tasa libre de riesgo para ese período y $r_M(t)$ es la tasa real del portafolio de mercado en la etapa t. $\beta_i(t)$ es la beta del activo i, mientras que el último término $\varepsilon_i(t)$ se conoce como el término de error aleatorio del activo, ambos relativos al período t. A la ecuación (A2.4) también se le conoce como modelo de mercado.

Para justificar la ecuación (A2.1) considerar al portafolio p, de tal modo que

$$r_p(t) - r_f(t) = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i(t) r_i(t)\right) - r_f(t)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} x_i(t)(r_i(t) - r_f(t)), \qquad \text{(A2.5)}$$

sustituyendo el miembro derecho de la ecuación (A2.4) en la anterior, se obtiene una nueva expresión de la línea característica del portafolio,

$$r_p(t) - r_f(t) = \sum_{i=1}^{N} x_i(t)[(r_M(t) - r_f(t))\beta_i(t) + \varepsilon(t)_i]$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N} x_i(t)\beta_i(t)\right)(r_M(t)-r_f(t)) + \sum_{i=1}^{N} x_i(t)\varepsilon(t)_i$$

$$= (r_M(t) - r_f(t))\beta_p(t) + \varepsilon_p(t) \qquad \text{(A2.6)}$$

en donde

$$\beta_p(t) = \sum_{i=1}^{N} x_i(t)\beta_i(t), \qquad (A2.7)$$

$$\varepsilon_p(t) = \sum_{i=1}^{N} x_i(t)\varepsilon(t)_i. \qquad (A2.8)$$

En la ecuación (A2.8) el término de error aleatorio del portafolio ($\varepsilon_p(t)$) es un promedio ponderado de los términos de error aleatorio de las acciones, usando como pesos sus respectivas proporciones dentro del portafolio.

Bajo la hipótesis de independencia estadística entre los activos y de período a período, es decir,

$$\underset{t}{E}[\varepsilon_i(t)\varepsilon_j(t)] = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j \qquad (A2.9)$$

$$\text{y} \quad \underset{i}{E}[\varepsilon_i(t)\varepsilon_i(t+h)] = 0 \quad \text{si} \quad h \neq 0; \qquad (A2.10)$$

a partir de la ecuación (A2.6) se sigue que el riesgo total del portafolio, medido por la desviación estándar de los rendimientos del portafolio σ_p, será

$$\sigma_p(t) = [\ \beta_p^2(t)\sigma_M^2(t) + \sigma_{\varepsilon p}^2(t)\ ]^{1/2}, \qquad (A2.11)$$

donde

$$\beta_p^2(t) = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i(t)\beta_i(t)\right)^2 \qquad (A2.12)$$

$$\text{y} \qquad \sigma_{\varepsilon p}^2(t) = \sum_{i=1}^{N} x_i^2(t)\sigma_{\varepsilon i}^2(t) \qquad (A2.13)$$

en la que se ve que la ecuación (A2.1) es un caso particular de la (A2.11).

BIBLIOGRAFIA

[1] Flores Rivera Ciro Filemón, UN MODELO DE OPTIMIZACION PARA CARTERAS DE INVERSION; Tesis de grado de maestría, D.E.P.F.I.; U.N.A.M. Junio, 1992.

[2] Diaz Mata Alfredo, INVIERTA EN LA BOLSA; Grupo editorial Iberoamerica.

[3] Marmolejo González Martin, INVERSIONES; Instituto Mexicano de Ejecutivos de Finanzas, México, 1985.

[4] Ross Stephen A., THE ARBITRAGE THEORY OF CAPITAL ASSET PRICING; Journal of Economy Theory 13, 341-360 (1976).

[5] Sharpe William F., Alexander Gordon J., INVESTMENTS; Prentice Hall 1990.

[6] Valdés Cornejo Saúl Feliciano, UN MODELO PARA PRONOSTICO DE LLUVIA DEL EDO. DE MORELOS, ESTUDIO COMPARATIVO DE METODOLOGIAS DE SERIES DE TIEMPO; Tesis de grado de maestría, D.E.P.F.I., U.N.A.M., Mayo de 1991.

[7] Guerrero Victor M., ANALISIS ESTADISTICO DE SERIES DE TIEMPO ECONOMICAS; colección cbi, U.A.M. unidad IZTAPALAPA, 1991.

[8] Brockwell Peter J., Davis Richar A., TIME SERIES: THEORY AND METHODS; Springer-Verlag Inc., 1991.

[9] Wei William W. S., TIME SERIES ANALYSIS UNIVARIATE AND MULTIVARIATE METHODS; Addison-Wesley, 1990.