

01161



DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
Facultad de Ingeniería

CRITERIO DE LINEALIZACION EQUIVALENTE
ESTOCASTICA APLICADO A MARCOS PLANOS

JOEL MELCHOR OJEDA RUIZ

TESIS

PRESENTADA A LA DIVISION DE ESTUDIOS DE
POSGRADO DE LA

FACULTAD DE INGENIERIA

DE LA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

COMO REQUISITO PARA OBTENER

EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERIA

(ESTRUCTURAS)

CIUDAD UNIVERSITARIA, MEXICO, D. F.

1993

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

RESUMEN.

Se presenta la aplicación de una metodología que permite tomar en cuenta la aleatoriedad en la excitación, en el estudio de la respuesta de marcos planos, tanto en vibración como en cantidad de energía disipada a través de la formación de articulaciones plásticas en los extremos de los elementos que conforman el sistema mecánico. Para ello, la excitación se considera como un proceso estocástico del tipo gaussiano estacionario; y en cuanto al sistema mecánico se consideran, a través de un modelo matemático, los parámetros que definen el comportamiento no-lineal del sistema, así como los parámetros dinámicos del mismo.

Intervienen en el desarrollo de la metodología conceptos de Mecánica Estructural Clásica, Dinámica Estocástica y Procedimientos de Álgebra Matricial.

En este trabajo se presenta un algoritmo iterativo.

En términos generales la metodología seguida es: establecer las ecuaciones de movimiento y de representación propuesta de la histéresis del sistema a través de una ecuación diferencial con coeficientes linealizados, obteniendo con ello la ecuación de Liapunov $L E_Y + \Sigma_Y L^T = B$, en donde, L es la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones, Σ_Y es la matriz de covariancias de la respuesta del sistema a encontrar y B la matriz que define la excitación. Una vez resuelta la ecuación para Σ_Y se encuentra la covariancia de la respuesta $\Sigma_{\delta Z}$ en las articulaciones plásticas, se corrigen los coeficientes linealizados propuestos en el modelo matemático de la curva de histéresis y se lleva a cabo un proceso iterativo que finaliza cuando se alcanza la tolerancia en la diferencia de $\Sigma_{\delta Z}$ última, con la obtenida en la iteración anterior.

Así, la metodología descrita se aplica a marcos planos y con ello se realiza un estudio de la respuesta de una estructura con osciladores resonantes. En este estudio se verifica la disminución de la amplitud de la respuesta del sistema estructural mediante la incorporación de la masa de niveles superiores, para ciertas condiciones de estructuración.

CRITERIO DE LINEALIZACION EQUIVALENTE ESTOCASTICA APLICADO A MARCOS PLANOS

INDICE

1. INTRODUCCION	1
1.1 Comportamiento no_lineal de los sistemas estructurales	3
1.2 Linealización equivalente estocástica	4
2. CONCEPTOS FUNDAMENTALES EN LA TEORIA DE VIBRACIONES ALEATORIAS	7
2.1 Conceptos de la teoría de probabilidad fundamentales para el criterio de linealización equivalente	8
2.2 Densidad espectral	18
2.3 Procesos estocásticos:	24
2.3.1 Procesos estacionarios	31
2.3.2 Procesos gaussianos	36
2.4 Función de transferencia y filtrado de la excitación	38
2.5 Ruido blanco	42
2.6 Estimación de la respuesta máxima	44

3. CRITERIOS DE FORMULACIONES ANALITICAS PARA SISTEMAS ESTRUCTURALES NO_LINEALES	49
3.1 Criterios de análisis matemático para sistemas estructurales no_lineales ante excitaciones aleatorias	50
3.2 Modelo matemático sobre comportamiento histerético (Y. K. Wen, 1980)	55
4. CRITERIO DE LINEALIZACION EQUIVALENTE ESTOCASTICA (CLE)	63
4.1 Análisis dinámico estructural	64
4.2 Excitación aleatoria (ruido blanco filtrado)	75
4.3 Diagrama de bloques del algoritmo	80
5. APLICACIONES DEL CLE A MARCOS ESTRUCTURALES PLANOS	83
5.1 Marco de concreto reforzado de un grado de libertad	87
5.2 Estudio sobre la variación de los coeficientes de linealización C_j y H_i	93
5.3 Marco de concreto reforzado de varios grados de libertad	99
5.4 Estudio paramétrico de marco plano de concreto reforzado con masa resonante	113
CONCLUSIONES	120
REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	122

CAPITULO 1

INTRODUCCION

En el último siglo se han desarrollado métodos para predecir la respuesta en vibración, de sistemas estructurales ante cargas fluctuantes externas, y cada vez toman más importancia, dada la tendencia a reducir el peso y costo de las estructuras. El sistema estructural puede llegar a colapsarse si, debido a grandes amplitudes de vibración, que conducen al deterioro de la junta de los elementos estructurales, provoca la falla de alguno o varios de estos elementos, los suficientes para formar el mecanismo de colapso. La falla en estos elementos se puede presentar cuando los niveles de esfuerzo a que son sometidos, exceden los límites de esfuerzo admisible, ya sea en el mismo instante en que es solicitado tal elemento, o como un daño acumulado debido a la fatiga del material.

El estudio de la vibración de sistemas se llevó a cabo por varios años mediante el empleo de funciones periódicas simples dependientes del tiempo, tanto en la excitación como en la respuesta. A la fecha se cuenta con una teoría bastante desarrollada para este tipo de vibración de sistemas lineales.

Sin embargo, a través del desarrollo de la industria aeroespacial, surgió un tipo de problemas de vibración que no podía ser resuelto aplicando los métodos clásicos, puesto que la vibración se presentaba en forma no periódica y bastante irregular, lo que condujo a una experimentación que puso de manifiesto el carácter probabilista en la respuesta de los sistemas como una mejor alternativa en la estimación de la amplitud de las vibraciones [4], lo cual, los métodos clásicos estimaban en forma determinista, tanto para la excitación como para la respuesta. El problema de la respuesta en vibración no periódica, aunque más complejo, en forma probabilista proporciona resultados más amplios que tratado en forma determinista.

Posteriormente, en ingeniería estructural se aplicó y desarrolló la estimación de vibraciones del tipo probabilista, modelando la excitación y la respuesta como un *proceso estocástico* (o aleatorio) que puede ser especificado por un reducido número de parámetros y funciones (como el espectro de potencia). Ambos procesos pueden visualizarse como un conjunto infinito de muestras o *realizaciones*. Mediante la aplicación de la teoría matemática y estadística se llegaron a formular soluciones a sistemas lineales bajo excitación aleatoria, con lo que se originó el desarrollo de la teoría probabilista de dinámica estructural; la cual permite relacionar todos los parámetros estadísticos de la respuesta, directamente con los correspondientes parámetros de la excitación.

El desarrollo de esta teoría de vibraciones fue tal, que condujo a su aplicación en diferentes áreas de la ingeniería, más aún con el uso de equipos de cómputo, se logró optimizar recursos e información, así como la generación de datos a partir de algoritmos como el de la transformada rápida de Fourier, que proporciona información al ser procesada en forma rápida y eficiente, en la estimación de los parámetros estadísticos requeridos.

1.1 COMPORTAMIENTO NO LINEAL DE LOS SISTEMAS ESTRUCTURALES.

El estudio de la respuesta de sistemas con modelos lineales, conduce a resultados simples y muchas veces útiles. Si los procesos de excitación tienen una distribución gaussiana, de acuerdo con la teoría lineal, los procesos de la respuesta serán también gaussianos, con lo cual se puede calcular la confiabilidad en términos de los parámetros estadísticos más relevantes de la respuesta [2][4].

Sin embargo, en la realidad los sistemas estructurales pueden presentar un comportamiento no lineal, que se acentúa al incrementarse la amplitud de vibración [22], por lo que tomar en cuenta este comportamiento es muy importante, aunado con la probabilidad de que se presenten niveles severos de excitación; ya que el diseño del sistema estructural podría resultar muy conservador, o en el peor de los casos, muy susceptible a la formación de mecanismos de colapso. Este efecto de no linealidad es típico en edificios ante sismos intensos, ya que debido a las cargas dinámicas elevadas a que son sometidos los elementos estructurales, estos presentan un comportamiento histerético muy marcado. Todo el comportamiento del sistema puede representarse por el uso de un modelo diferencial no lineal [11]; este modelo combinado con la representación estocástica del sismo conduce a la formulación de un análisis y procedimiento de diseño realista.

En su forma más simple, el proceso aleatorio de excitación $X(t)$, es la *entrada* del sistema y es *transformado* en un proceso de *salida* $Y(t)$ (o respuesta), por el modelo dinámico no lineal del sistema. Este modelo tendrá la forma de una relación diferencial ordinaria entre $X(t)$ y $Y(t)$, y ya que estos son dos procesos aleatorios (estocásticos), el

problema es resolver una *ecuación diferencial estocástica*, dicho modelo dinámico está formado por un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas, y puesto que la entrada puede estar formada por varios procesos, habrá que definir no sólo las características estadísticas de cada uno en la entrada o la salida, sino las relaciones estadísticas entre los procesos. Puede obtenerse una simplificación en la solución, si se adopta una aproximación adecuada de masas concentradas, con lo que se reduce el modelo del sistema a un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias.

1.2 LINEALIZACION EQUIVALENTE ESTOCASTICA.

La solución de las ecuaciones diferenciales estocásticas no_lineales es más compleja que para el caso lineal, para el cual existe una teoría extensa que permite su solución, no siendo así para los problemas no_lineales. Una alternativa en tales casos la proporciona el método de *linealización equivalente estocástica (LE)*.

En términos generales, este método reemplaza el conjunto de ecuaciones diferenciales no_lineales, por un conjunto equivalente de ecuaciones lineales, minimizando la diferencia entre ambos conjuntos de ecuaciones [27].

Consideremos la forma general de la ecuación diferencial estocástica de un oscilador no_lineal, como

$$g(\mathbf{Y}) = X(t) \quad (1.2.1)$$

en donde

$g(\mathbf{Y})$ = función arbitraria no_lineal de \mathbf{Y} .

$X(t)$ = excitación del sistema.

$\mathbf{Y} = [Y, \dot{Y}, \ddot{Y}]^T = \mathbf{Y}(t)$

en esta última

$Y(t)$ = desplazamiento,

$\dot{Y}(t)$ = velocidad,

$\ddot{Y}(t)$ = aceleración.

en la expresiones anteriores, tanto $X(t)$ como $Y(t)$ son procesos estocásticos. Así, el sistema no_lineal transforma $X(t)$ en el proceso $Y(t)$.

El método LE consiste en reemplazar la ecuación (1.2.1) por la forma lineal equivalente

$$m\ddot{Y} + c\dot{Y} + kY = X(t) \quad (1.2.2)$$

en donde m , c y k son parámetros dependientes del tiempo si la naturaleza estadística de $X(t)$ varía con el tiempo. La *ecuación de error* entre (1.2.1) y (1.2.2) está dada por

$$\varepsilon = g(Y) - m\ddot{Y} - c\dot{Y} - kY \quad (1.2.3)$$

en la cual puede minimizarse el valor medio cuadrático de ε , con respecto a los parámetros m , c y k ; con lo que se obtiene un conjunto de ecuaciones que contienen el valor medio de varias funciones de Y .

Para evaluar los valores medios en forma exacta, es necesario conocer la función de densidad de probabilidad de $Y(t)$, la cual no es conocida. Generalmente se hace la aproximación de que $Y(t)$ es un vector de procesos gaussianos [2][4], en la consideración de que se tendrá respuesta gaussiana si la excitación es gaussiana. Una vez hecha esta consideración, se recurre a la teoría lineal y se obtiene un sistema de ecuaciones no_lineales en el que intervienen los parámetros m , c y k , si los parámetros son constantes las ecuaciones del sistema serán algebraicas, o serán ecuaciones diferenciales si los parámetros varían con el tiempo.

Una gran ventaja del método LE, es que puede generalizarse a sistemas de varios grados de libertad con comportamiento no_lineal, y pueden incorporarse excitaciones y respuestas no estacionarias [4].

Dadas las características que presenta el criterio de linealización equivalente (LE), muestra una gran ventaja sobre el modelo de simulación Monte Carlo, en cuanto a tiempo

de ejecución, la cual es más significativa al incrementar el número de muestras de respuesta obtenidas.

CAPITULO 2

CONCEPTOS FUNDAMENTALES EN LA TEORIA DE VIBRACIONES ALEATORIAS

2.1 CONCEPTOS DE LA TEORIA DE PROBABILIDAD FUNDAMENTALES PARA EL CRITERIO DE LINEALIZACION EQUIVALENTE.

En el estudio y análisis de los fenómenos físicos, particularmente en el campo de la Ingeniería, existe cierto grado de incertidumbre asociado a los factores que definen las características del fenómeno. Por ello, en estudios en los que debe reproducirse el comportamiento de un fenómeno, es importante considerar dicha incertidumbre. Así, al recurrir al uso de modelos matemáticos, podemos incorporar modelos probabilistas que se adapten a las características propias del fenómeno, observadas a través de un registro estadístico, en la sucesión de eventos ocurridos en determinadas circunstancias.

El fenómeno físico en estudio es el comportamiento de un sistema mecánico estructural (SME), que tiene por entrada una excitación sísmica y la salida estará definida por los parámetros del SME. El objetivo principal del estudio es definir la respuesta, o salida, del SME al tomar en cuenta la incertidumbre en la excitación. Dada la naturaleza de los temblores, existen grandes incertidumbres respecto a las coordenadas del foco, magnitud del evento, relaciones magnitud-intensidad, duración del evento, tiempo de ocurrencia, etc. Es posible expresar la excitación sísmica como un *proceso estocástico*, que es una descripción matemática de la forma en que varían con el tiempo algunas características de ciertos eventos. Ahora, en cuanto al SME podemos decir que habrá incertidumbres en los elementos estructurales que lo conforman, en tanto la calidad en los materiales empleados y el proceso constructivo así lo originen.

Como parte fundamental del marco planteado anteriormente, está la teoría de probabilidad, por ello, se muestra a continuación algunos de los conceptos fundamentales de esta teoría, los cuales serán retomados posteriormente en aplicaciones más complejas. Una descripción más elaborada de estos conceptos, se encuentra en cualquiera de las referencias relacionadas con la teoría de probabilidad [9][20][26].

AXIOMAS FUNDAMENTALES.

AXIOMA 1. La probabilidad de ocurrencia de un evento A es mayor o igual a cero

pero menor o igual a la unidad:

$$0 \leq P[A] \leq 1 \quad (2.1.1)$$

AXIOMA II. La probabilidad de un cierto evento S es la unidad:

$$P[S] = 1 \quad (2.1.2)$$

en donde S es el evento asociado a todos los puntos de la muestra en el espacio muestral.

AXIOMA III. La probabilidad de un evento, el cual es la unión de dos eventos *mutuamente exclusivos* (A y B) es la suma de las probabilidades de estos dos eventos:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] \quad (2.1.3)$$

Si estos dos eventos no son *mutuamente exclusivos*, entonces

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] \quad (2.1.4)$$

PROBABILIDAD CONDICIONAL.

La probabilidad de que ocurra el evento A , dado que el evento B ha ocurrido, está definida como

$$P[A | B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} \quad (2.1.5 a)$$

de donde podemos obtener la probabilidad conjunta

$$P[A \cap B] = P[A | B] P[B] \quad (2.1.5 b)$$

o bien,

$$P[A \cap B] = P[B | A] P[A] \quad (2.1.5 c)$$

Cuando hay varios eventos involucrados

$$\begin{aligned}
 P[A \cap B \cap C \cap \dots N] &= P[A | B \cap C \cap \dots N] P[B \cap C \cap \dots N] \\
 &= P[A | B \cap C \cap \dots N] P[B | C \cap \dots N] \quad (2.1.6) \\
 &\quad P[C | D \cap \dots N] \dots P[N]
 \end{aligned}$$

INDEPENDENCIA.

Dos eventos A y B se dicen ser independientes, sí y sólo sí

$$P[A | B] = P[A] \quad (2.1.7)$$

complementando con la ecuación (2.1.5 a)

$$\frac{P[A \cap B]}{P[B]} = P[A] \quad (2.1.8)$$

$$P[A \cap B] = P[A] P[B] \quad (2.1.9)$$

o bien,

$$P[B | A] = P[B] \quad (2.1.10)$$

cualquiera de estas ecuaciones puede ser usada como definición de independencia.

Así pues, generalizando

$$P[A \cap B \cap C \cap \dots N] = P[A] P[B] P[C] \dots P[N] \quad (2.1.11)$$

si los eventos son independientes, la probabilidad de ocurrencia conjunta es simplemente el producto de sus probabilidades individuales de ocurrencia.

TEOREMA DE PROBABILIDADES TOTALES.

Dado un conjunto de eventos *mutuamente exclusivos y colectivamente exhaustivos*, B_1, B_2, \dots, B_n , siempre es posible expresar la probabilidad $P[A]$ de otro evento A en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} P[A] &= P[A \cap B_1] + P[A \cap B_2] + \dots + P[A \cap B_n] \\ &= \sum_{i=1}^n P[A \cap B_i] \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

de acuerdo con la cc. (2.1.5 b)

$$P[A] = \sum_{i=1}^n P[A | B_i] P[B_i] \quad (2.1.13)$$

TEOREMA DE BAYES.

De la definición de probabilidad condicional (2.1.5 b) y (2.1.5 c)

$$P[A \cap B] = P[A | B] P[B] = P[B | A] P[A] \quad (2.1.14)$$

de aquí que

$$P[A | B] = \frac{P[B | A] P[A]}{P[B]} \quad (2.1.15)$$

o bien

$$P[A_j | B] = \frac{P[B | A_j] P[A_j]}{P[B]} \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (2.1.15 a)$$

de cc. (2.1.13)

$$P[A_j | B] = \frac{P[B | A_j] P[A_j]}{\sum_{i=1}^n P[B | A_i] P[A_i]} \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (2.1.16)$$

en esta última ecuación, a la probabilidad resultante se le llama *a posteriori* y a la probabilidad $P[A_i]$ se le llama *a priori*.

DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES DE LAS VARIABLES ALEATORIAS.

El comportamiento de una variable aleatoria se describe a través de leyes probabilistas representadas mediante funciones de distribución de probabilidad.

En el caso de variables aleatorias discretas, estas leyes se representan mediante FUNCIONES DE MASA DE PROBABILIDAD, en el caso de variables continuas se utilizan las FUNCIONES DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD. Cuando se tratan varias variables a la vez el comportamiento lo determinan leyes de probabilidad CONJUNTAS.

Distribución de Probabilidad Marginal.

El comportamiento de una (o varias) variable(s) aleatoria(s) se puede obtener a partir de una distribución conjunta, integrando sobre todos los valores de las variables cuyo comportamiento no interesa. La función que representa a este comportamiento es la distribución de probabilidad MARGINAL. Por ejemplo sean X e Y variables aleatorias continuas, con densidad de probabilidades $f_{X,Y}(x, y)$; entonces la función de distribución de probabilidad (FDP) marginal de x es igual a

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy \tag{ 2.1.17 }$$

llevando a la generalidad esta expresión

$$f_{X,X_1, X_2}(x_1, x_2) = \int \int \dots \int f_{X,X_1, X_2, X_3, \dots, X_n}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) dx_3 dx_4 dx_5 \dots dx_n \tag{ 2.1.18 }$$

Distribución de Probabilidad Condicional.

Si en una función de distribución de probabilidad conjunta, algunas variables adquieren valores fijos, la función de distribución de probabilidad normalizada resultante representa a la distribución CONDICIONAL. Sean X e Y variables aleatorias continuas y

$f_{X|Y}(x, y)$ su función de distribución; si y adquiere el valor y_0 , entonces la función de distribución de probabilidad (FDP) condicional de X es igual a

$$f_{X|Y}(x, y_0) = \frac{f_{XY}(x, y_0)}{f_Y(y_0)} \quad (2.1.19)$$

En donde, según ec. (2.1.17)

$$f_Y(y_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y_0) dx$$

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN ACUMULADA.

Una forma alternativa de representar el comportamiento de una variable aleatoria es mediante la función de distribución acumulada. El valor de dicha función, $F_X(x)$, es igual a la probabilidad de que la variable aleatoria sea menor o igual que el argumento, es decir

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du \quad (2.1.20)$$

La función de distribución $f_X(x)$ se puede encontrar a partir de la función acumulada, a través de

$$\frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left[\int_{-\infty}^x f_X(u) du \right] = f_X(x) \quad (2.1.21)$$

Las propiedades de la función de distribución acumulada son las siguientes:

$$\begin{aligned} 0 &\leq F_X(x) \leq 1 \\ F_X(-\infty) &= 0 \\ F_X(\infty) &= 1 \\ F_X(x_2) - F_X(x_1) &= P\{x_1 < X \leq x_2\} \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

FUNCION DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD NORMAL.

Una de las más importantes funciones dentro de la teoría de probabilidades es la NORMAL o GAUSSIANA. Esta es aplicable a variables aleatorias continuas dentro del dominio de los números reales.

La función de densidad de probabilidad está definida por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \right)^2 \right], \quad -\infty < x < \infty \quad (2.1.23)$$

en donde

μ_x = media

σ_x^2 = variancia

son dos parámetros independientes.

Al examinar la expresión anterior se deduce que es una función simétrica con respecto a un eje vertical que pasa por μ_x , que es asintótica al eje de las abscisas para valores que tienden a $\pm\infty$, y, que su valor máximo corresponde a μ_x . En la siguiente figura se indica su representación cuando su media permanece constante igual a μ_x y su desviación estándar (σ_x) varía.

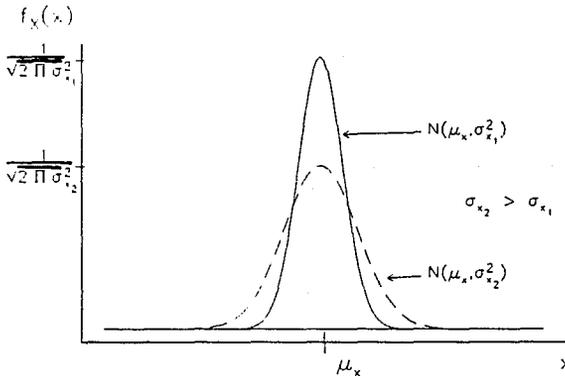


Fig. 2.1-1 Función de Densidad de Probabilidad (fdp) Normal.

MOMENTOS DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA.

La media ó valor esperado de una variable continua X está definida por

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx \quad (2.1.24)$$

La variancia de una variable continua X está definida por

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 = VAR(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)^2 f_X(x) dx \\ &= E[X^2] - E^2[X] \end{aligned} \quad (2.1.25)$$

La desviación estándar de una variable continua está definida por

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} \quad (2.1.26)$$

El coeficiente de variación de una variable continua está definido por

$$\rho_x = \frac{\sigma_x}{\mu_x} \quad (2.1.27)$$

VECTOR DE VARIABLES ALEATORIAS.

El valor esperado de un vector $X=(X_1, \dots, X_n)^T$ es un vector μ , cuyos elementos μ_1, \dots, μ_n están dados por

$$\mu_i = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_i f_X(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n \quad (2.1.28)$$

la fdp marginal de X_i puede ser escrita como

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n \quad (2.1.29)$$

así, reescribiendo para

$$\mu_i = \int_{-\infty}^{\infty} x_i f_{x_i}(x_i) dx_i \quad i=1, \dots, n$$

La matriz de covariancia Σ asociada con un vector aleatorio real X , es el valor esperado del producto $(X-\mu)(X-\mu)^T$, esto es

$$\Sigma = E[(X-\mu)(X-\mu)^T] \quad (2.1.30)$$

se define

$$\begin{aligned} \Sigma_{ij} &= E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)] \\ &= E[(X_j - \mu_j)(X_i - \mu_i)] \\ &= \Sigma_{ji} \quad i, j=1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.1.31)$$

En particular con $\sigma_i^2 = \Sigma_{ii}$, podemos escribir Σ en su forma desarrollada como

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \dots & \Sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{ni} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad (2.1.32)$$

Los elementos σ_i^2 de la diagonal son las variancias asociadas con las variables aleatorias individuales X_i , $i=1, \dots, n$. La matriz de covariancia Σ está relacionada a la matriz de correlación R , definida por

$$R = E[XX^T] \quad (2.1.33)$$

Desarrollando la ec. (2.1.30) se obtiene

$$\Sigma = R - \mu\mu^T \quad (2.1.34 a)$$

$$R = \Sigma + \mu\mu^T \quad (2.1.34 \text{ b})$$

Ya que la matriz de covariancia Σ es real y simétrica, por provenir de un vector X real y puesto que $\Sigma_{ii} = \sigma_i^2$, la matriz de correlación R es también real y simétrica, se conoce también como matriz de autocorrelación o de dispersión.

LEY DE DISTRIBUCION GAUSSIANA MULTIDIMENSIONAL.

La fdp Gaussiana definida para una variable en (2.1.23) puede extenderse su aplicación a un vector de variables aleatorias $X=(X_1, \dots, X_n)^T$ con componentes independientes X_i , $i=1, \dots, n$. Ya que la fdp de X es

$$\begin{aligned} f_X(x_1, \dots, x_n) &= \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma_1 \dots \sigma_n} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.1.35)$$

en donde μ_i , σ_i^2 son la media y variancia respectivamente de X_i , $i=1, \dots, n$. La ecuación anterior se puede reescribir en forma compacta como

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\det(\Sigma)|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (X-\mu)^T \Sigma^{-1} (X-\mu) \right] \quad (2.1.36)$$

en donde

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad (2.1.37)$$

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T, \text{ y } \det(\Sigma) = \prod_{i=1}^n \sigma_i^2$$

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_1^{-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_n^{-2} \end{bmatrix}$$

La matriz Σ es diagonal ya que las variables X_i , $i=1, \dots, n$ son independientes.

2.2 DENSIDAD ESPECTRAL.

En el presente estudio, la excitación del sistema mecánico estructural (SME) se considera, como un evento aleatorio, dadas las características de los temblores, dentro de las cuales podemos mencionar la amplitud y la frecuencia dominante del registro, por ser las que ejercen mayor impacto en los SME's. Se encuentra una variabilidad en la amplitud de la excitación a medida que transcurre el tiempo. El contenido de frecuencias del registro de la excitación se encuentra delimitado por un rango bastante amplio de frecuencias (0.05 - 100.0 Hz). Es posible [32] considerar el registro como una superposición de muchas armónicas simples, pero cada una con diferente amplitud, fase y frecuencia con respecto a las demás. Es decir,

$$f(t) = \sum_{m=1}^n A_m e^{i\omega_m t} \quad (2.2.1)$$

en donde

$f(t)$ = Función que define la amplitud del registro en un instante t .

A_m = Amplitud de la armónica simple m .

ω_m = Frecuencia de la armónica m .

j = Número complejo que define la parte imaginaria de la armónica.

t = Instante de tiempo en que se efectúa la superposición de armónicas.

En el caso que $f(t)$ sea una función periódica con periodo T , la frecuencia ω_m en (2.2.1) siempre será múltiplo de la frecuencia fundamental

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

En tal caso, se tendrá

$$f(t) = \sum_{m=1}^n A_m e^{jm\omega_0 t} \quad (2.2.2)$$

la cual podemos comparar con la siguiente

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{jm\omega_0 t} \quad (2.2.3)$$

que es la Serie de Fourier (en su forma exponencial) [24].

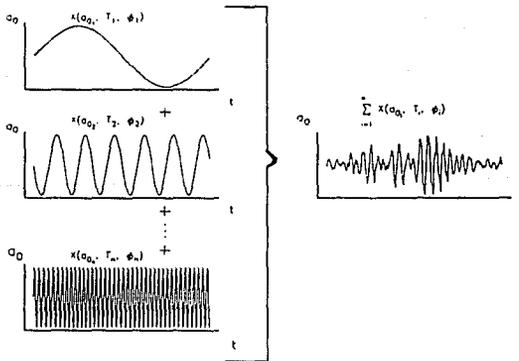


Fig. 2.2-1 Superposición de funciones periódicas en serie de Fourier

El coeficiente C_m puede evaluarse de la siguiente forma para una $f(t)$ dada,

$$C_m = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jm\omega t} dt \quad (2.2.4)$$

Si el periodo T de la función periódica $f(t)$ se aproxima al infinito, $f(t)$ se convierte en una función periódica y su representación de Fourier es

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.2.5)$$

en donde

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.2.6)$$

es conocida como *la integral de Fourier* o *transformada de Fourier* de $f(t)$. La ecuación (2.2.5) representa la operación inversa y se denomina *transformada inversa de Fourier* de $F(\omega)$.

Mediante el uso de la ec. (2.2.5) se pasa del análisis en el dominio de la frecuencia al análisis en el dominio del tiempo, la transformada inversa se obtiene mediante el uso de (2.2.6).

La condición necesaria para que exista $F(\omega)$, está dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (2.2.7)$$

es decir, la integral del valor absoluto de $f(t)$ debe ser finita.

La función $F(\omega)$ es, en general, compleja y, se tiene

$$F(\omega) = R(\omega) + jS(\omega) = |F(\omega)| e^{j\phi(\omega)} \quad (2.2.8)$$

en donde, $|F(\omega)|$ se denomina *espectro de magnitud* de $f(t)$, y $\phi(\omega)$, *espectro de fase* de $f(t)$. En lo sucesivo nos referiremos solo al espectro de magnitud.

Podemos escribir el conjunto complejo $F^*(w)$ de la transformada de Fourier $F(-w)$ de (2.2.6) como

$$F^*(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t} dt \quad (2.2.9)$$

De una propiedad de los conjuntos complejos

$$F(w) F^*(w) = | F(w) |^2 \quad (2.2.10)$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} | f(t) |^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{j\omega t} dw \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(w) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \right] dw \quad (2.2.11) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) F^*(w) dw \\ \int_{-\infty}^{\infty} | f(t) |^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} | F(w) |^2 dw \end{aligned}$$

Esta última expresión corresponde al Teorema de Parseval [32], en donde el término del lado izquierdo indica el contenido de energía de la señal y el del lado derecho es la integral del ESPECTRO DE ENERGIA o de la FUNCION DE DENSIDAD DE ENERGIA ESPECTRAL de $f(t)$.

Al tomar en cuenta sólo frecuencias positivas la expresión (2.2.11) puede escribirse en la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} | f(t) |^2 dt = 2 \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} | F(\omega) |^2 d\omega \right] \quad (2.2.12)$$

Si la función $f(t)$ es considerada dentro del intervalo $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ y nula fuera de

este, entonces

$$\begin{aligned} |f_T(t)|^2 &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T f_T^2(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f_T^2(t) dt \\ &= \frac{2}{T2\pi} \int_0^{\infty} |F_T(w)|^2 dw \end{aligned}$$

Si $T \rightarrow \infty$, entonces

$$\begin{aligned} |f_T(t)|^2 &= \int_0^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T2\pi} |F_T(w)|^2 \right] dw \\ &= \int_0^{\infty} G(w) dw \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

en donde

$$G(w) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T2\pi} |F_T(W)|^2 \right] \quad (2.2.14)$$

es la densidad espectral de potencia de la función $f(t)$.

Una vez que se define la densidad espectral es posible encontrar la variancia de $f(t)$

$$\sigma^2 = |f(t)|^2 = \int_0^{\infty} G(w) dw \quad (2.2.15)$$

pero con ello no se tiene bien identificada la distribución de $f(t)$. Sin embargo, si la función se supone como gaussiana, con media cero, entonces toda la distribución de probabilidades de x queda definida por la variancia de x , mediante la relación

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp \left[-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} \right] \quad (2.2.16)$$

de esta forma, conociendo la densidad espectral de un proceso se puede definir su variancia.

La densidad espectral de potencia $G(w)$ determinada para una señal $f(t)$ cualquiera podrá aplicarse a otras funciones $f(t)$ en las que el módulo $|F_r(w)|$ sea el mismo, lo cual se cumple solo si $|F_r(w)|$ es independiente de la de fase.

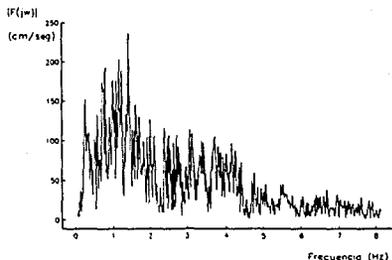


Fig. 2.2-2 Espectro de amplitud de Fourier del sismo de El Centro de 1940, componente Norte - Sur.

FUNCION DE CORRELACION.

La función

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t+\tau)x_2(t)dt \quad (2.2.17)$$

se conoce como la *función de correlación* entre las funciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

De igual forma, se define

$$R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)x_1(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t+\tau)x_1(t)dt \quad (2.2.18)$$

Ambas funciones de correlación, proporcionan una medida de la similitud o interdependencia entre las funciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ en función del parámetro τ (el corrimiento de una función con respecto a la otra). Si la función de correlación es cero para todo valor de τ , entonces se dice que las dos funciones no están correlacionadas.

Si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son idénticas, entonces la función de correlación

$$R_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_1(t-\tau)d\tau \quad (2.2.19)$$

se denomina *función de autocorrelación* de $x_1(t)$.

Una propiedad importante para nuestros fines, es que la transformada de Fourier de la función de autocorrelación $R_{11}(\tau)$, que conduce al espectro de energía $|X_1(\omega)|^2$ de $x_1(t)$. En otras palabras, la función de autocorrelación $R_{11}(\tau)$ y la densidad espectral de energía $|X_1(\omega)|^2$, constituyen un par de transformadas de Fourier, es decir,

$$|X_1(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} R_{11}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \quad (2.2.20)$$

$$R_{11}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_1(\omega)|^2 e^{j\omega\tau}d\omega \quad (2.2.21)$$

Este resultado se conoce como el *teorema de Wiener - Khintchine*.

2.3 PROCESOS ESTOCÁSTICOS.

La respuesta de un sistema mecánico estructural (SME), ante una excitación aleatoria, como lo es un temblor, presenta características aleatorias con respecto al tiempo de duración de la excitación. Realizar un estudio estadístico de la respuesta del SME, implica considerar diferentes temblores, puesto que con ello se obtiene un comportamiento distinto del SME para cada una de las excitaciones, es decir, el registro que se obtenga de la variación de la

respuesta con respecto al tiempo, será distinto al que se obtenga cuando se considere como excitación, un temblor registrado en diferente tiempo, puesto que las características de estos temblores difieren, aún siendo del mismo sitio. Así pues, podemos hablar de una *familia* de registros de temblores ocurridos en un sitio determinado, y de una *familia* de registros de respuestas de un SME, ambos grupos de registros asociados a un tiempo en particular, con lo que la excitación y la respuesta del SME pueden considerarse como *procesos estocásticos*.

DEFINICION.

Se define un *proceso estocástico* de la siguiente forma [13]:

Al realizar un experimento E definido, de acuerdo con el planteamiento usual en la teoría de probabilidad, por el espacio S de sus resultados ξ y por ciertos subconjuntos de S llamados eventos que forman una clase aditiva completa, es posible asociar a cada resultado ξ , una función real o compleja de cierto parámetro t :

$$X(t, \xi) \quad t \in T \quad (2.3.1)$$

En esta representación:

- El conjunto T de definición del parámetro t se llama usualmente *conjunto indicador*; T puede ser continuo o discreto.
- Generalmente la notación empleada para procesos estocásticos es $X(t)$.
- $X(t)$ puede interpretarse en cuatro formas diferentes:
 - a) como una familia de funciones de parámetro t (t y ξ variables),
 - b) como una función del tiempo (t variable y ξ fijo); esta función se llama entonces *realización* del proceso,
 - c) una variable aleatoria (t fijo y ξ variable) y
 - d) un valor determinado (t fijo y ξ fijo).

También podemos referirnos a un proceso estocástico bidimensional, si este consiste

en un par de procesos: $X(t)$, $Y(t)$. O bien, a un proceso n -dimensional, si lo integra una colección de procesos $X_1(t)$, ..., $X_n(t)$.

DESCRIPCION DE UN PROCESO ESTOCASTICO [2][28][13].

En la descripción de los conceptos, que a continuación se presentan, se admite que $X(t)$ es un proceso real y continuo; sin embargo, es posible llevar su aplicación a la generalidad, es decir, procesos complejos y discretos.

FUNCION DE DISTRIBUCION Y DENSIDAD DE PROBABILIDAD.

Tomando en cuenta que, para cada valor del parámetro t , el proceso es una variable aleatoria, es posible definir la función de distribución asociada a esta variable:

$$F_X(x, t) = P \{ X(t) \leq x \} \quad (2.3.2)$$

$F_X(x, t)$ es, en general, una función de t y es igual a la probabilidad del evento constituido por todos los resultados del experimento tales que, para el valor t considerado, los valores de $X(t)$, no rebasen el valor x .

La densidad de probabilidad correspondiente se obtiene derivando $F_X(x, t)$:

$$f_X(x, t) = \frac{\partial F_X(x, t)}{\partial x} = \frac{P \{ x < X(t) < x+dx \}}{dx} \quad (2.3.3)$$

Si se consideran dos valores t_1 y t_2 del parámetro, se definen dos variables aleatorias $X(t_1)$ y $X(t_2)$; su función de distribución conjunta depende en general de t_1 y t_2 , y se define como:

$$F_{X,X}(x_1, x_2; t_1, t_2) = P \{ X(t_1) \leq x_1; X(t_2) \leq x_2 \} \quad (2.3.4)$$

Por lo que, la densidad de probabilidad correspondiente es:

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_{X_1, X_2}(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (2.3.5)$$

Es también posible hablar de densidad de probabilidad condicional, la que puede definirse como:

$$f_{X_1}(x_1, t_1 | X(t_2) = x_2) = \frac{f_{X_1, X_2}(x_1, x_2; t_1, t_2)}{f_{X_2}(x_2, t_2)} \quad (2.3.6)$$

Para un conjunto de n valores del parámetro t se podrá definir una función de distribución de orden n :

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = P[X(t_1) \leq x_1; \dots; X(t_n) \leq x_n] \quad (2.3.7)$$

y la densidad de probabilidad asociada:

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \quad (2.3.8)$$

Si se conoce cualquiera de las dos funciones anteriores para cualquier número n y secuencia t_1, \dots, t_n , el proceso se encuentra totalmente definido desde el punto de vista probabilista.

MEDIA Y VARIANCIA.

Para un valor dado del parámetro t se podrá definir la media de la variable aleatoria correspondiente:

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x; t) dx \quad (2.3.9)$$

Esta media (o valor esperado) de $X(t)$ es en general función de t .

En la misma forma se define la variancia:

$$\sigma_X^2(t) = \text{VAR}[X(t)] = E[X^2(t)] - \mu_X^2(t) \quad (2.3.10)$$

AUTOCORRELACION Y AUTOCOVARIANCIA

Considerando dos valores t_1 y t_2 del parámetro, se podrá definir el momento conjunto de las variables aleatorias $X(t_1)$ y $X(t_2)$, el cual recibirá el nombre de *autocorrelación*.

$$R(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (2.3.11)$$

Es, en general, una función de t_1 y t_2 .

En la misma forma se define la *autocovariancia*:

$$C(t_1, t_2) = E\{[X(t_1) - \mu_X(t_1)][X(t_2) - \mu_X(t_2)]\} \quad (2.3.12)$$

$$C(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - \mu_X(t_1)\mu_X(t_2) \quad (2.3.13)$$

La autocovariancia permite cuantificar el grado de correlación lineal existente entre las variables $X(t_1)$ y $X(t_2)$.

La covariancia normalizada se conoce como *coeficiente de correlación*, el cual se denota por:

$$\rho_{X,X}(t_1, t_2) = \frac{C(t_1, t_2)}{\sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2)} \quad (2.3.14)$$

CORRELACION Y COVARIANCIA CRUZADAS, ORTOGONALIDAD E INDEPENDENCIA.

La correlación cruzada de dos procesos estocásticos se define como:

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)] \quad (2.3.15)$$

y su covariancia cruzada

$$C_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(t_1, t_2) - \mu_X(t_1)\mu_Y(t_2) \quad (2.3.16)$$

Se dice que los procesos $X(t_1)$ y $X(t_2)$ no están correlacionados si, para cualquier t_1 y t_2 :

$$R_{XY}(t_1, t_2) = \mu_X(t_1)\mu_Y(t_2) \quad (2.3.17)$$

es decir, si su covariancia cruzada es nula.

El coeficiente de correlación para dos procesos es:

$$\rho_{XY} = \frac{C_{XY}(t_1, t_2)}{\sigma_X(t_1)\sigma_Y(t_2)} \quad (2.3.18)$$

Se dice que dos procesos $X(t)$ y $Y(t)$ son ortogonales si para cualquier t_1 y t_2

$$R_{XY}(t_1, t_2) = 0 \quad (2.3.19)$$

Se dice que son independientes si el grupo de variables aleatorias $X(t_1), \dots, X(t_n)$ es independiente del grupo $Y(t_1'), \dots, Y(t_n')$ para cualquier grupo de valores $t_1, \dots, t_n; t_1', \dots, t_n'$, es decir si:

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_n}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n; t_1, \dots, t_n, t_1', \dots, t_n') = f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) f_{Y_1, Y_2, \dots, Y_n}(y_1, \dots, y_n; t_1', \dots, t_n') \quad (2.3.20)$$

FUNCION CARACTERISTICA Y FUNCION GENERATRIZ DE MOMENTOS.

Es usual asociar a la densidad o distribución de probabilidad de una variable aleatoria X , la siguiente función denominada *función característica*.

$$\phi_X(w) = E[\exp^{jwX}] \quad (2.3.21)$$

en donde

w = Parámetro real.

ϕ_X = Función característica de la variable aleatoria X .

j = Número complejo.

E = n -ésimo momento de la variable aleatoria X .

Esta función tiene tres propiedades importantes:

a) La correspondencia entre una densidad o distribución de probabilidad y su función característica es biunívoca (uno a uno).

b) Se tiene la siguiente relación

$$\left[\frac{d^n \phi_X(t)}{dt^n} \right]_{t=0} = (j)^n E[X^n] \quad (2.3.22)$$

Esta expresión es muy útil para el cálculo de los momentos de una variable aleatoria.

c) La función característica de la densidad de la suma de dos variables independientes es igual al producto de sus funciones características.

Otra función comúnmente empleada para los mismos fines es la llamada *función generatriz de momentos* $m(t)$

$$m(t) = E[\exp^{at}] \quad (2.3.23)$$

en la que t es una variable compleja.

Para esta función se tiene directamente:

$$\frac{d^n m(0)}{dt^n} = E[X^n] \quad (2.3.24)$$

Estas funciones pueden aplicarse directamente a procesos estocásticos, así por ejemplo, tendremos la función característica de un proceso estocástico como:

$$\phi_{X(t)}(w) = E[\exp i w X(t)] \quad (2.3.25)$$

en donde $\phi_{X(t)}(w)$ es en este caso una función de w y de t .

2.3.1 PROCESOS ESTACIONARIOS.

PROCESOS ESTACIONARIOS EN EL SENTIDO ESTRICTO.

Un proceso estocástico cuyo conjunto indicador T es lineal, es estacionario en el sentido estricto si para cualquier número k de valores t_1, \dots, t_k del parámetro y cualquier valor adicional ϵ del mismo parámetro se tiene:

$$f_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k) = f_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k; t_1 + \epsilon, \dots, t_k + \epsilon) \quad (2.3.26)$$

es decir si las densidades de probabilidad conjuntas de cualquier orden no se ven afectadas por un cambio de origen del parámetro de magnitud $\epsilon \in T$.

Se dice que dos procesos $X(t)$ y $Y(t)$ son conjuntamente estacionarios en el sentido estricto si las densidades de probabilidad conjuntas mixtas de cualquier orden que pueden definirse con ambos procesos no se ven afectadas por un corrimiento de origen de sus parámetros.

Como caso particular de la condición de estacionariedad se tiene

$$f_X(x, t) = f_X(x, t+\varepsilon) \quad (2.3.27)$$

lo que implica que $f_X(x, t)$ sea independiente de t , es decir

$$f_X(x, t) = f_X(x) \quad (2.3.28)$$

Una consecuencia de lo anterior es que la media del proceso es un valor constante

$$E[X(t)] = \mu_X \quad (2.3.29)$$

Si se considera ahora la densidad conjunta de orden 2:

$$f_{X,X}(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_{X,X}(x_1, x_2; t_1+\varepsilon, t_2+\varepsilon) \quad (2.3.30)$$

se observa que esta función debe depender sólo de $t_1 - t_2 = \tau$

$$f_{X,X}(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_{X,X}(x_1, x_2; \tau) \quad (2.3.31)$$

donde $f_{X,X}(x_1, x_2; \tau)$ es la densidad de probabilidad conjunta de $X(t)$ y $X(t+\tau)$ para cualquier valor de t .

La autocorrelación de un proceso de este tipo depende también sólo de τ .

$$R(\tau) = E[X(t+\tau)X(t)] = R(-\tau) \quad (2.3.32)$$

Lo mismo será válido para la correlación cruzada de procesos conjuntamente estacionarios:

$$R_{XY}(\tau) = E[X(t+\tau)Y(t)] \quad (2.3.33)$$

PROCESOS ESTACIONARIOS DE ORDEN k .

Un proceso se considera estacionario de orden k si la relación

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n; t_1 + \varepsilon, \dots, t_n + \varepsilon) \quad \forall \varepsilon \in T \quad (2.3.34)$$

sólo es verdadera para $n \leq k$.

Se observa que si es verdadera para k , también lo es para valores menores que k ya que las densidades marginales se definen en forma única a partir de la densidad conjunta.

PROCESOS ESTACIONARIOS EN EL SENTIDO AMPLIO.

Se dice que un proceso es estacionario en el sentido amplio si su valor medio es constante y su autocorrelación es finita y depende sólo de $t_1 - t_2 = \tau$, lo cual se estableció anteriormente como un caso particular de la condición de estacionariedad definida para procesos estacionarios en el sentido estricto. Ya que el concepto de estacionariedad en el sentido estricto se aplica a la totalidad de las funciones de distribución acumulada, en tanto que la estacionariedad en el sentido amplio se aplica a los dos primeros momentos de los procesos estocásticos.

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= \mu_X \\ E[X(t+\tau)X(t)] &= R(\tau) \end{aligned} \quad (2.3.35)$$

Si $X(t)$ es estacionario de orden 2, obviamente también lo es en el sentido amplio. Partiendo de que $X(t)$ es estacionario en el sentido amplio para establecer que es de orden 2 sólo es cierto si la media y variancia bastan para definir las densidades de segundo orden del proceso.

Dos procesos son conjuntamente estacionarios en el sentido amplio si cada uno de ellos lo es, y además su correlación cruzada depende sólo de $t_1 - t_2$.

$$R_{XY}(\tau) = E[X(t+\tau)Y(t)] \quad (2.3.36)$$

ERGODICIDAD.

Algunas veces es posible definir las características de un proceso estacionario a partir de una sola realización. La propiedad que hace esto posible, es llamada ergodicidad, no está implícita en la estacionariedad, pero esta es condición necesaria para sostener la ergodicidad.

Sea μ_T el promedio de una realización $x(t)$ de $X(t)$, en el espacio $D_T = \{t : 0 < t_i < T, i=1, \dots, n\}$

$$\mu_T = \frac{1}{T} \int_{D_T} x(t) dt \quad (2.3.37)$$

$$\mu = E[X(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \mu_T$$

Para procesos estacionarios en el sentido amplio, la condición suficiente y necesaria para la ergodicidad en la media es que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{D_T} R(\tau) d\tau = 0 \quad (2.3.39)$$

Una condición suficiente pero no necesaria para que (2.3.38) se cumpla, es que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R(\alpha\tau_n) = 0, \text{ para todas } \tau_n \neq 0 \quad (2.3.40)$$

Así, la ergodicidad en el primer momento μ_X de $X(t)$, requiere condiciones en el segundo momento $R(\tau)$. Sea definido $R_T(\tau)$ como

$$R_T(\tau) = \frac{1}{T} \int_{D_T} [x(t+\tau) - \mu_X][x(t) - \mu_X] dt \quad (2.3.41)$$

La ergodicidad en la autocovariancia implica que

$$R(\tau) = E\{|x(t+\tau) - \mu_x\} \{x(t) - \mu_x\}| = \lim_{T \rightarrow \infty} R_T(\tau) \quad (2.3.42)$$

Una comparación entre las ecuaciones (2.3.37) y (2.3.38) con (2.3.41) y (2.3.42) implica que para la ergodicidad en la autocovariancia, el proceso estocástico $Q_c(t) = |x(t+\tau) - \mu| |x(t) - \mu|$ debe satisfacer

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T R_{Q_c}(\tau) d\tau = 0 \quad (2.3.43)$$

Así, la ergodicidad en el segundo momento de $X(t)$ requiere condiciones en el cuarto momento $R_{Q_c}(\tau)$.

REPRESENTACION DEL MOVIMIENTO EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA.

La representación de los procesos estacionarios, en el dominio de la frecuencia, se lleva a cabo a través de la función de densidad espectral de potencia [27], la cual representa para un proceso estocástico, una forma análoga al análisis de Fourier de una función determinista, ya que describe el contenido de frecuencia del proceso. Esta función de densidad espectral de potencia es una función real positiva, definida como la transformada de Fourier de la función de autocorrelación

$$G(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \exp^{-jw\tau} d\tau \quad (2.3.44)$$

ahora, puesto que

$$G(w) = G(-w)$$

es posible escribir

$$G(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} R(\tau) \cos(w\tau) d\tau \quad (2.3.45)$$

Se define también

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(w) \exp^{jw\tau} dw \quad (2.3.46)$$

Para el caso de dos procesos estacionarios conjuntos $X(t_1)$ y $Y(t_2)$, la función de densidad espectral cruzada, es la transformada de Fourier de la función de covarianza cruzada

$$G_{XY}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau) \exp^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2.3.47)$$

2.3.2 PROCESOS GAUSSIANOS.

Los procesos gaussianos constituyen los más importantes de los procesos estocásticos, ya que a través de ellos pueden representarse una gran variedad de fenómenos físicos, además de presentar características matemáticas que hacen el análisis relativamente sencillo.

La función característica conjunta de un proceso gaussiano está dado por

$$\phi_{X(t_1), \dots, X(t_n)}(w_1, \dots, w_n) = E[\exp \{j(w_1 x_1(t_1) + \dots + w_n x_n(t_n))\}] \quad (2.3.48)$$

en donde las variables $x_1(t_1), \dots, x_n(t_n)$ son variables aleatorias gaussianas conjuntas.

La descripción completa de las funciones de densidad de probabilidad conjunta, está dada por la función de correlación, es decir, con tener cuantificados la media (o valor esperado) y la covarianza, se tendrá plenamente identificado el proceso.

De la ecuación (2.3.9)

$$\mu(t) = E\{X(t)\}$$

y de la ecuación (2.3.10)

$$C(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - \mu_X(t_1)\mu_X(t_2)$$

Las expresiones anteriores están dadas para el caso de dos variables aleatorias gaussianas conjuntas. En estas circunstancias, la función de densidad de probabilidad conjunta (de segundo orden) tiene la forma siguiente:

$$p\{X(t_1, t_2)\} = \frac{1}{2\pi\sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2)\sqrt{1-\rho_{XX}^2(t_1, t_2)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{|X(t_1) - \mu_X(t_1)|^2}{\sigma_X^2(t_1)[1-\rho_{XX}^2(t_1, t_2)]} - \right. \right. \quad (2.3.49)$$

$$\left. \left. - \frac{2[X(t_1) - \mu_X(t_1)][X(t_2) - \mu_X(t_2)]}{\sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2)[1-\rho_{XX}^2(t_1, t_2)]} + \frac{|X(t_2) - \mu_X(t_2)|^2}{\sigma_X^2(t_2)[1-\rho_{XX}^2(t_1, t_2)]} \right] \right\}$$

8

en donde

$$\sigma_X^2(t_1) = \mathcal{V}\mathcal{A}R\{X(t_1)\}$$

$$\sigma_X^2(t_2) = \mathcal{V}\mathcal{A}R\{X(t_2)\}$$

$$\rho_{XX}(t_1, t_2) = \frac{C(t_1, t_2)}{\sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2)}$$

Finalmente, para procesos gaussianos estacionarios, tomando en cuenta la ergodicidad en la covariancia, el *cuarto momento* puede expresarse en términos solamente de $R_{X(t)}(\tau)$, de acuerdo con la ecuación (2.3.43)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |R_{X(t)}(\tau)|^2 d\tau = 0 \quad (2.3.50)$$

2.4 FUNCION DE TRANSFERENCIA Y FILTRADO DE LA EXCITACION.

En el análisis del comportamiento de los sistemas estructurales, es posible llegar a establecer relaciones apropiadas entre la respuesta del sistema y la excitación del mismo, sobre todo, si se trata de un sistema lineal estable. Las funciones que definen estas relaciones se conocen como FUNCIONES DE TRANSFERENCIA, estas serán propias para cada sistema estructural en particular. En la siguiente descripción se analiza un sistema estructural subamortiguado de un grado de libertad. La excitación como la respuesta serán representados por procesos gaussianos estacionarios, por lo que al tomar en cuenta los conceptos de procesos estocásticos definidos anteriormente, conociendo la función de transferencia y la función autocorrelación, o bien, la función de densidad espectral de potencia, el proceso de respuesta del sistema, quedará completamente determinado.

Considerando la representación típica del movimiento del sistema estructural [21], idealizado en un modelo de masa y resorte, sometido a una cierta excitación $f(t)$, se tiene

$$m\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t) \quad (2.4.1)$$

Esta puede representarse de la siguiente manera al introducir los parámetros del sistema

$$w_0^2 = \frac{K}{m}$$

y

$$\xi = \frac{C}{2w_0 m} = \frac{C}{2\sqrt{Km}}$$

$$\ddot{x}(t) + 2\xi w_0 \dot{x}(t) + w_0^2 x(t) = \frac{f(t)}{m} \quad (2.4.2)$$

dadas las condiciones del sistema, si la excitación $f(t)$ corresponde a un impulso, representado por una función delta de Dirac se tendrá

$$f(t) = \delta(t) \quad (2.4.3)$$

y de acuerdo con la teoría clásica de la dinámica estructural, la respuesta del sistema será

$$x(t) = h(t) = \frac{1}{w_0} \exp^{-\xi w_0 t} \text{ Sen } w_D t \quad (2.4.4)$$

en la cual

$$w_D = w_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

En la expresión (2.4.4), sólo se da la solución particular de la ecuación de movimiento del sistema (2.4.2), puesto que la solución complementaria decae a medida que transcurre el tiempo y prevalece sólo la solución particular.

Ahora, si la excitación $f(t)$ es de la forma típica de los registros de temblores, $f(t)$ puede representarse como una serie de impulsos de la forma de (2.4.3), entonces la respuesta $x(t)$ está dada por la integral de Duhamel o integral de Convolución

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (2.4.5 a)$$

la cual puede escribirse como

$$x(t) = f(t) * h(t) \quad (2.4.5 b)$$

Aplicando transformadas de Fourier a esta última expresión, es posible obtener la respuesta en el dominio de la frecuencia [32]

$$x(w) = f(w) H(w) \quad (2.4.6)$$

en donde $x(w)$ y $f(w)$ son, la respuesta y la excitación respectivamente, del sistema en el dominio de la frecuencia, y $H(w)$ es la FUNCION DE TRANSFERENCIA.

Para encontrar $H(w)$, se propone que la aceleración en la base $\frac{f(t)}{m}$ tenga la forma exponencial

$$\frac{f(t)}{m} = \exp^{j\omega t} \quad (2.4.7)$$

y que el desplazamiento sea

$$x(t) = \exp^{j\omega t} \quad (2.4.8)$$

por lo que

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= j\omega \exp^{j\omega t} \\ \ddot{x}(t) &= -\omega^2 \exp^{j\omega t} \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

sustituyendo (2.4.7), (2.4.8) y (2.4.9) en la ecuación de movimiento (2.4.2)

$$-\omega^2 \exp^{j\omega t} + j\omega \exp^{j\omega t} 2\xi\omega_0 + \exp^{j\omega t} \omega_0^2 = \exp^{j\omega t} \quad (2.4.10)$$

simplificando

$$(-\omega^2 + j\omega 2\xi\omega_0 + \omega_0^2) = 1 \quad (2.4.11)$$

$$= \frac{1}{(-\omega^2 + j\omega 2\xi\omega_0 + \omega_0^2)} = H(\omega) \quad (2.4.12)$$

Esta última expresión, corresponde a la función compleja de transferencia del sistema lineal de un grado de libertad con parámetros ω_0 y ξ , representada en el dominio de la frecuencia ω .

Graficar la función de transferencia es bastante útil (ver Fig. 2.4-1), ya que puede visualizarse la frecuencia para la cual la magnitud de esta función es máxima. Esto sucede cuando la frecuencia de excitación coincide con la frecuencia natural de vibración del sistema. Otra aportación importante de esta gráfica, lo es el perfil de la misma pues, como se verá posteriormente, define un rango de frecuencias a ser filtradas, es decir, permitir el paso de una banda de frecuencias con cierta amplificación.

Si a las funciones de la expresión (2.4.6), se les obtiene su densidad espectral de potencia, de acuerdo con la expresión (2.2.14), se tendrá

$$G_x(\omega) = G_f(\omega) |H(\omega)|^2 \quad (2.4.13)$$

la cual proporciona la densidad espectral de potencia $G_x(\omega)$ de la respuesta, que según (2.2.15), su integral representa la variancia de la respuesta.

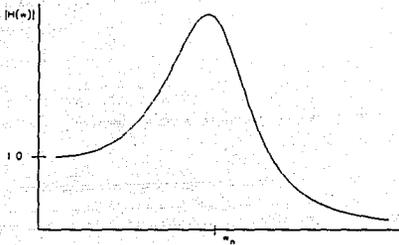


Fig. 2.4-1 Gráfica típica de la magnitud de la Función de Transferencia para un sistema de un grado de libertad.

Esta última característica es de gran utilidad para estimar las respuestas máximas del sistema.

Partiendo de un análisis en el dominio de la frecuencia de la ecuación de movimiento del sistema, es posible obtener funciones de transferencia que relacionen la excitación en la base, con la respuesta del sistema. Esta característica de la función de transferencia se debe al hecho que esta establece la fracción de energía a ser transmitida a través del sistema en varias frecuencias. Por esta razón, los sistemas por los que se transmiten se conocen como filtros. Estos pueden depender por ejemplo, del amortiguamiento ξ y la frecuencia natural ω_n del sistema. Existen filtros de banda angosta y filtros de banda ancha. La energía de excitación transmitida a través de las frecuencias contenidas en el ancho de banda será la mas representativa a la salida del filtro.

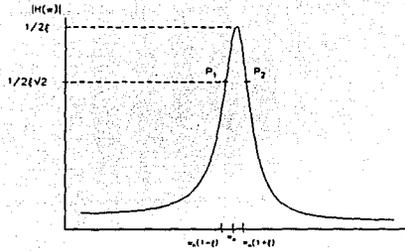


Fig. 2.4-2 Ancho de banda de un sistema de un grado de libertad ligeramente amortiguado.

2.5 RUIDO BLANCO.

El proceso conocido como ruido blanco, se define como un caso particular de los procesos estocásticos llamados *ruido de disparo* (*shot noise*) [27], cuando estos son débilmente estacionarios, es decir, que sólomente se cumplen los dos primeros *momentos* que describen el proceso (media y covariancia).

La descripción del proceso estocástico *ruido de disparo*, $S(t)$, debe cumplir con lo siguiente

$$\begin{aligned} \mu_s(t) &= 0 \\ \Sigma_{ss}(t_1, t_2) &= \sigma^2 \delta(t_2 - t_1) \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

en donde

$\mu_s(\cdot)$ = Media o primer momento del proceso.

$\Sigma_{ss}(\cdot)$ = Covariancia o segundo momento del proceso.

$A(t_1)$ = Función de intensidad del tipo determinista.

$\delta(t_2 - t_1)$ = Función delta de Dirac.

Para el caso de procesos débilmente estacionarios, la función de intensidad $A(t_1)$ en (2.5.1), es constante y la covariancia se define entonces por

$$\Sigma_{ss}(t_1, t_2) = A \delta(t_2 - t_1) \quad (2.5.2)$$

ya que el valor esperado de este proceso, $\mu_s(t)$, es cero, la función de covariancia será igual a la función de correlación, por esto, la densidad espectral del proceso, es la transformada de Fourier de (2.5.2), en la que

$$G_{ss}(w) = \frac{A}{2\pi} \quad (2.5.3)$$

es una constante.

La expresión anterior es la que caracteriza a un proceso estocástico *ruido blanco*, $W(t)$. Pueden emplearse en su definición, cualquiera de las expresiones siguientes

$$\begin{aligned} G_{ww}(w) &= G_0 \\ R_{ww}(\tau) &= 2\pi G_0 \delta(\tau) \quad \tau = t_2 - t_1 \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

La interpretación física de una densidad espectral constante, como lo es para este tipo de procesos, es que la energía contenida en el proceso estocástico se distribuye uniformemente sobre todo el rango de frecuencia y su variancia es infinita (lo cual es físicamente imposible).

2.6 ESTIMACION DE LA RESPUESTA MAXIMA.

En el estudio del comportamiento de los sistemas estructurales, ante sollicitación sísmica, es relevante poder establecer alguna diferencia favorable entre la respuesta permisible, con la respuesta máxima observada, definida por algún criterio de prevención de daños. Este criterio proporciona suficiente información acerca del comportamiento de los sistemas estructurales lineales, no siendo así para los sistemas no-lineales, en los que también es importante la cantidad de energía disipada, o bien a través de la descripción de los efectos acumulativos de los ciclos de respuesta repetitivos, cuando la fatiga representa un factor a tomar en cuenta. Con la finalidad de poder identificar el comportamiento de un sistema estructural y contando con la información estadística de la excitación sísmica, a través del espectro de densidad de potencia, es posible llegar a establecer una descripción de la respuesta máxima del sistema [19], de acuerdo con (2.2.15) y (2.4.13)

$$\sigma_1^2 = \int_0^{\infty} G_1(w)dw = \int_0^{\infty} G_1(w) | H(w) |^2 dw \quad (2.6.1)$$

en donde

σ_1^2 = Variancia de la respuesta

$G_1(w)$ = Espectro de densidad de potencia de la respuesta.

$G_1(w)$ = Espectro de densidad de potencia de la excitación.

$H(w)$ = Función de transferencia.

En la expresión anterior, se considera la excitación como una función estocástica estacionaria, con duración delimitado por un cierto intervalo de tiempo; durante el cual se presenta la parte más importante del movimiento del terreno.

A través de la función de autocorrelación puede verificarse que

$$\sigma_1^2 = \int_0^{\infty} G_1(w)dw \quad (2.6.2)$$

de (2.2.21)

$$R_{xx}(\tau) = \int_0^{\infty} G_x(w) \exp jw\tau dw$$

Si se evalúa la función para $\tau=0$

$$R_{xx}(0) = \int_0^{\infty} G_x(w) dw \quad (2.6.3)$$

ahora, de (2.3.31)

$$R_{xx}(\tau) = E\{x(t+\tau)x(t)\}$$

Se evalúa esta en $\tau=0$, se tendrá

$$R_{xx}(0) = E\{x^2(t)\} \quad (2.6.4)$$

que es la definición de variancia, por lo tanto, de ec. (2.6.3)

$$\sigma_x^2 = E\{x^2(t)\} = \int_0^{\infty} G_x(w) dw \quad (2.6.5)$$

Se define el i -ésimo momento (λ_i) de la función de densidad espectral $G(w)$, como

$$\lambda_i = \int_0^{\infty} w^i G_i(w) dw \quad (2.6.6)$$

en la que es evidente que $\sigma_x^2 = \lambda_0$, para el caso $i=2$

$$\lambda_2 = \int_0^{\infty} w^2 G_i(w) dw = \int_0^{\infty} G_i(w) dw \quad (2.6.7)$$

en donde $G_i(w)$ corresponde al espectro de densidad de potencia de pseudo-velocidades de la respuesta; de igual forma podemos encontrar, para $i=4$

$$\lambda_4 = \int_0^{\infty} w^4 G_i(w) dw = \int_0^{\infty} G_i(w) dw \quad (2.6.8)$$

en donde $G_i(w)$ corresponde al espectro de densidad de potencia de pseudo-aceleraciones de la respuesta.

Aplicando (2.6.5) a (2.6.7) y (2.6.8) encontraremos, respectivamente las variancias de pseudo-velocidades y pseudo-aceleraciones de la respuesta

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= w^2 \sigma_x^2 = \lambda_{2,x} \\ \sigma_x^2 &= w^4 \sigma_x^2 = \lambda_{4,x}\end{aligned}\quad (2.6.9)$$

la nomenclatura $\lambda_{2,x}$ y $\lambda_{4,x}$, indican respectivamente, segundo y cuarto momento del espectro de densidad de potencia de la respuesta en desplazamiento del sistema.

A partir de los momentos $\lambda_{2,x}$ y $\lambda_{0,x}$, es posible encontrar la frecuencia, Ω_x , en donde se concentra la mayor cantidad de energía del espectro de densidad de potencia, mediante

$$\Omega_x = \sqrt{\frac{\lambda_{2,x}}{\lambda_{0,x}}} = \frac{\sigma_x}{\sigma_x} \quad (2.6.10)$$

También es posible encontrar la medida de dispersión δ , de la función de densidad espectral alrededor de la frecuencia central Ω_x ,

$$\delta = \sqrt{1 - \frac{\lambda_{1,x}^2}{\lambda_{0,x} \lambda_{2,x}}} \quad (2.6.11)$$

El valor de la respuesta $x_{i,p}$, correspondiente a una probabilidad de excedencia p , y a una excitación de duración s , se puede relacionar con la desviación estándar $\sigma_x(s)$, para un sistema de un grado de libertad, a través de

$$x_{i,p} = r_{i,p} \sigma_x(s) \quad (2.6.12)$$

en donde $\sigma_x(s)$, es la desviación estándar de la respuesta, en el tiempo s , donde $|x(t)|$ es máximo, y $r_{i,p}$ corresponde al factor pico, tal como se muestra en la figura 2.6-1.

La estimación del factor pico $r_{i,p}$, ha sido estudiada por un gran número de investigadores; sin embargo, la siguiente es una forma que proporciona resultados muy aceptables para el caso de procesos estacionarios de banda angosta, como podría ser un *ruido blanco filtrado*.

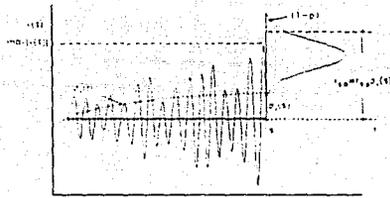


Fig. 2.6-1 Relación de la desviación estándar de la respuesta $\sigma_r(s)$, el factor pico r_{sp} y la respuesta máxima $r_{sp} p_1(t)$.

La distribución de la probabilidad de que se presente el valor máximo de la respuesta dentro del intervalo $(0, s)$, es equivalente a determinar la probabilidad $p_a(s)$ de que la respuesta del sistema sobrepase en una ocasión un nivel a determinado para el intervalo de tiempo s . Se ha demostrado, como resultado de estudios teóricos y de simulación que [19]

$$p_a(s) = A \exp^{-\alpha s} \quad (2.6.13)$$

en donde $A = p_a(0)$ es la probabilidad inicial en $s=0$ y α es el factor de decrecimiento de la función, cuyo valor puede estimarse por

$$\alpha = 2\nu_a \frac{1 - \exp \left[-\frac{\pi}{2} \delta_c^{1+b} \frac{a}{\sigma_r} \right]}{1 - \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{a}{\sigma_r} \right)^2 \right]} \quad (2.6.14)$$

en donde

- ν_a = Número de veces que se cruza el valor a .
- δ_c^{1+b} = Una medida del ancho de banda.
- b = Constante semiempírica igual a 0.2

El factor $r_{x,p}$ puede expresarse en función del número promedio n de ciclos del movimiento de la respuesta, dado por

$$n = \frac{\Omega_c s}{2\pi} (-Ln p_a)^{-1} \quad (2.6.15)$$

así,

$$r_{x,p} = \{ 2 Ln \{ 2n | 1 - \exp(-\delta_c^{1+b} \sqrt{\pi Ln 2n}) | \} \}^{1/2} \quad (2.6.16)$$

La respuesta $x_{i,p}$, obtenida al aplicar las expresiones anteriores, corresponde a la respuesta estacionaria; sin embargo, la excitación produce una respuesta transitoria; esta situación puede ser simplificada a una condición estacionaria, a través de una duración estacionaria equivalente [19].

CAPITULO 3

CRITERIOS DE FORMULACIONES ANALITICAS PARA SISTEMAS ESTRUCTURALES NO_LINEALES

El comportamiento de sistemas estructurales lineales ante excitaciones aleatorias ha sido ampliamente desarrollado y existen en la literatura resultados obtenidos por gran cantidad de investigadores, a través del uso de modelos matemáticos en los que, por simplificaciones del análisis se recurre al uso de hipótesis restrictivas. En el tipo y número de estas hipótesis restrictivas se define la diferencia entre los distintos criterios de análisis.

Según se ha observado en la respuesta de los sistemas estructurales ante una excitación sísmica intensa que el comportamiento es, en menor o mayor grado, no_lineal. Por ello es que para sistemas con bajo nivel de comportamiento no_lineal, se aplican algunos de los modelos matemáticos desarrollados para sistemas lineales, con la adición de algunas hipótesis restrictivas. Sin embargo, se han desarrollado modelos matemáticos que son aplicables exclusivamente a sistemas estructurales con comportamiento no_lineal.

En este capítulo se presentan las características generales de algunos criterios de análisis de sistemas estructurales y sus principales limitaciones.

3.1 CRITERIOS DE ANALISIS MATEMATICO PARA SISTEMAS ESTRUCTURALES NO_LINEALES ANTE EXCITACIONES ALEATORIAS.

En el análisis probabilista de sistemas estructurales con comportamiento no_lineal se puede hablar de niveles de complejidad. En la medida que los diferentes criterios de análisis incorporen la menor cantidad de hipótesis restrictivas, el modelo matemático reproducirá la respuesta en una forma más cercana a la que sucede en la realidad.

El primer nivel de complejidad es el que considera un oscilador determinista de un grado de libertad modelado mediante una masa y un resorte con bajo nivel de no_linealidad, sujeto a una excitación representada por un proceso tipo ruido blanco. A partir de este nivel de complejidad pueden incorporarse características aleatorias del sistema estructural, como la rigidez del resorte; y más aún, que el resorte entre en el rango de deformaciones inelásticas, durante oscilaciones de gran amplitud; lo cual hace que el nivel de complejidad sea mayor, puesto que la rigidez será considerada como un proceso estocástico

correlacionado con los procesos estocásticos de carga y respuesta del sistema estructural. Estas consideraciones pueden aplicarse a modelos de varios grados de libertad, en los que el nivel de complejidad es mayor.

En los diferentes criterios de análisis estocástico no_lineal se presenta la dificultad de que los momentos estadísticos de la respuesta exceden en número a la cantidad de ecuaciones (cosa que no sucede en el caso de sistemas lineales), por ello es que se adoptan modelos que relacionan los momentos de orden superior con los momentos de orden inferior (primero y segundos momentos, por ejemplo).

Con la misma idea de simplificación anotada en el párrafo anterior, la excitación comúnmente se considera como un proceso estacionario tipo ruido blanco, o bien un proceso estacionario de ruido blanco filtrado, el cual reproduce en forma más aproximada la distribución espectral de potencia observada en sismos reales. También pueden utilizarse otros criterios que toman en cuenta procesos no_estacionarios de ruido blanco filtrado.

MÉTODOS MARKOVIANOS, BASADOS EN LA ECUACION DE FOKKER-PLANCK-KOLMOGOROV (FPK).

En problemas de dinámica estructural estocástica de sistemas estructurales con comportamiento no_lineal, cuando los procesos de excitación se modelan como procesos gaussianos tipo ruido blanco, existen varios métodos de análisis que permiten encontrar soluciones exactas, entre los cuales se cuenta con los métodos Markovianos que se basan en la solución de la ecuación lineal diferencial parcial conocida como la ecuación de Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK).

La función de probabilidad de transición de estado de procesos Markovianos se determina por la ecuación FPK o ecuación de difusión. Esta ecuación, que determina la difusión de la probabilidad de masa, es análoga a las ecuaciones de difusión que determinan la difusión de calor o masa en problemas de mecánica de fluidos [4]. Es posible relacionar los coeficientes de difusión y arrastre en la ecuación FPK, directamente con los parámetros en la ecuación dinámica de movimiento del sistema estructural en

estudio. Aunque la solución que proporcionan estos métodos sea matemáticamente exacta, no debe perderse de vista el hecho de que la excitación física real, debe reemplazarse por una excitación tipo ruido blanco ideal, la cual puede filtrarse para dar lugar a una representación más realista del movimiento.

La ecuación FPK establece la densidad de probabilidad conjunta de los vectores de desplazamiento y velocidad de la respuesta del sistema, condicionada al estado actual de ambos vectores, es decir, que la densidad de probabilidad conjunta, relativa al estado futuro de estos vectores, no depende de su estado pasado. Esto último es lo que define a los procesos Markovianos.

De estudios realizados por Roberts [16], acerca de la aplicabilidad de los métodos Markovianos, cuando los procesos de excitación son de banda ancha, se puede hacer la aproximación de la excitación como procesos tipo ruido blanco.

Una restricción importante de los métodos Markovianos, es su aplicabilidad a sistemas de un grado de libertad, y que los procesos de excitación deben ser estacionarios para el caso de sistemas de varios grados de libertad. Por otro lado la excitación debe ser tipo ruido blanco.

LINEALIZACION EQUIVALENTE.

Krylov y Bogoliubov [34] introdujeron esta técnica de solución aproximada para sistemas no_lineales ante excitaciones deterministas. Sin embargo, la metodología ha sido extendida al campo probabilista. Su aplicación es confiable cuando los sistemas estructurales tienen una respuesta estadística del tipo Gaussiana. La metodología se describe en detalle en capítulos posteriores.

El método de linealización equivalente para la solución de sistemas estructurales no_lineales presenta algunas ventajas importantes, como son su aplicabilidad a sistemas de varios grados de libertad y el hecho de que se puede adaptar al caso de excitaciones tanto estacionarias como no_estacionarias (en este trabajo sólo se considera excitación

estacionaria). Otra característica importante es que se pueden considerar tanto pequeñas no_linealidades como niveles importantes de no_linealidad. Aunque esto último falta comprobarse con estudios de Monte Carlo.

Una comparación de los resultados obtenidos del método de linealización equivalente con los que se obtienen de la aplicación de la ecuación FPK, para las mismas condiciones en el sistema estructural, y comparando además con los resultados obtenidos por simulación de Monte Carlo, indican que la aproximación de la linealización equivalente es generalmente muy buena [8].

El alto grado de flexibilidad del método de linealización equivalente está relacionado directamente con su limitación: sólo conduce a estimar el primer y segundo momento estadístico de la respuesta. Si se hace la consideración de que la respuesta es gaussiana, obviamente no es posible predecir la influencia de la no_linealidad en la distribución de probabilidad de la respuesta. En este caso el método no es efectivo para proporcionar la estimación de confiabilidad, basada en la probabilidad de que el sistema falle en una forma prescrita durante un intervalo fijo de tiempo. Estas estimaciones son particularmente sensibles a la configuración precisa de la distribución de probabilidad de la respuesta en sus *colas* extremas.

La aplicación del método de linealización equivalente es muy efectiva cuando se estudia la influencia de posibles modificaciones estructurales, sobre el nivel de respuesta del sistema. Sin embargo, no es tan efectivo cuando se aplica para el diseño óptimo de la configuración estructural, en el que se toma en cuenta la confiabilidad del sistema estructural.

METODOS DE PERTURBACION.

Si la no_linealidad del sistema es suficientemente pequeña, puede usarse el método de perturbación de la solución. Este método se aplica a sistemas continuos o discretos de uno o varios grados de libertad

La teoría de perturbación se ha utilizado muchos años en el análisis determinista. Pero fué generalizada al caso de excitaciones estocásticas por Crandal [29]. El principio básico del método es extender la solución al conjunto de ecuaciones no_lineales en términos de un parámetro escalar pequeño λ , el cual caracteriza la magnitud de los términos no_lineales. El primer término de la expansión es simplemente la respuesta lineal, la que se obtiene cuando la no_linealidad del sistema no se toma en cuenta. Los términos subsecuentes expresan la influencia de la no_linealidad. Puesto que el esquema de perturbación conduce rápidamente a que el cálculo sea largo y tedioso, en la medida que el orden de λ se incrementa, los resultados se obtienen, usualmente en la práctica, a partir del primer orden de λ .

METODO DE SIMULACION MONTE CARLO.

La mayoría de los métodos de simulación se conocen con el nombre de Monte Carlo, en donde las funciones muestrales de la respuesta se calculan usando la muestra de excitación. Cada cálculo individual es determinista. Cuando se realiza un número grande de cálculos, estos resultados se usan para inferir información estadística acerca de la respuesta. Generalmente se usan generadores automáticos de números aleatorios y filtros para representar las características aleatorias de la excitación y de las propiedades del sistema estructural.

Una desventaja del método es que particularmente para sistemas no_lineales el esfuerzo de cálculo (aún con el uso de equipo de cómputo) y el costo para generar un gran número de datos que permitan obtener resultados confiables en la estadística de la respuesta, puede ser muy alto. Sin embargo, la ventaja de este método es que pueden tomarse en cuenta una representación más real tanto de la excitación como del comportamiento no_lineal de los sistemas estructurales.

3.2 MODELO MATEMATICO SOBRE COMPORTAMIENTO HISTERETICO (Y. K. WEN, 1980).

De acuerdo con el comportamiento observado en estructuras, al verse sometidas a una sollicitación cíclica de carga severa, como es el caso de un temblor, se presentan niveles importantes de deformación, provocando con ello la disipación de energía inducida a la estructura, lo cual indica un comportamiento no_lineal en la respuesta de la estructura.

Una forma común de establecer la energía que una estructura puede llegar a disipar, es a través de su *curva de histéresis*. La disipación de energía representada por estas curvas, es proporcional al área delimitada por las mismas, así podemos observar que para deformaciones pequeñas, el área contenida en la curva de histéresis es también pequeña, por consiguiente el grado de disipación de energía de la estructura será bajo; el caso opuesto corresponde a deformaciones grandes.

De acuerdo con estas características, es importante adoptar un modelo que permita reproducir en forma aproximada, el comportamiento de la estructura. Esto se logra utilizando el *modelo diferencial simple* propuesto por Y. K. Wen [17]; con el cual es posible obtener una gran variedad de curvas de histéresis, modificando los parámetros del mismo.

En el modelo mencionado, la fuerza z requerida para producir un desplazamiento u , está dada por la siguiente ecuación diferencial no_lineal de primer orden

$$\dot{z} = \alpha_3 \dot{u} - \alpha_4 | \dot{u} | z | z |^{\alpha_5 - 1} - \alpha_5 \mu | z |^{\alpha_6} \quad (3.2.1)$$

en la que α_i ($i=3, \dots, 6$) son los parámetros que definen la forma de la curva histerética.

Si la fuerza z se combina con una fuerza restauradora lineal, se obtiene una representación generalizada para la fuerza histerética de la siguiente forma

$$\Phi(u, \dot{u}) = \alpha_2 \alpha_1 \dot{u} + (1 - \alpha_2) \alpha_1 z \quad (3.2.2)$$

En las expresiones anteriores

α_1 = Rigidez elástica lineal.

α_2 = Porcentaje de la rigidez lineal.

α_3 = Parámetro que define la amplitud de la fuerza restauradora.

α_4 y α_5 = Parámetros que controlan la forma de la histéresis.

α_6 = Parámetro que define la suavidad de la transición del comportamiento elástico a plástico (un valor alto de α_6 corresponde a un sistema elastoplástico).

La relación entre α_i ($i=1,\dots,6$) con la rigidez inicial k_1 y la rigidez final k_2 y el momento de fluencia están dados por [11]

$$k_1 = \alpha_1 \alpha_2 + (1 - \alpha_2) \alpha_1 \alpha_3 \quad (3.2.3)$$

$$k_2 = \alpha_1 \alpha_2 \quad (3.2.4)$$

$$M_y = \left[\frac{\alpha_3}{\alpha_4 + \alpha_5} \right]^{1/\alpha_4} (1 - \alpha_2) \alpha_1 \quad (3.2.5)$$

en donde

k_1 = Rigidez inicial.

k_2 = Rigidez última en la articulación plástica.

M_y = Momento de fluencia de la sección.

De acuerdo con estudios realizados por diferentes investigadores [11][17] se considera $\alpha_3 = 1.0$, $\alpha_4 = \alpha_5$ y $\alpha_6 = 1.0$, con lo cual se reproducen con muy buena aproximación las curvas histéricas obtenidas de pruebas experimentales de elementos de concreto reforzado.

Al considerar $\alpha_3 = 1.0$, el valor de α_2 está dado por [11]

$$\alpha_2 = \frac{k_2}{k_1} \quad (3.2.6)$$

Es común que α_2 tenga un valor tal que sea $\leq 2\%$.

Es posible determinar α_1 , a partir de [1]

$$\alpha_1 = \frac{0.0026 (EI)_{efectiva}}{\alpha_2} \quad (3.2.7)$$

En donde α_2 es considerado como un factor cuyo valor debe ser $\leq 2\%$, para que la metodología del criterio de linealización equivalente estocástica proporcione buenos resultados. En el desarrollo de los ejemplos de este trabajo se utilizó $\alpha_2 = 0.0156$.

Una vez que se tienen identificados α_1 , α_2 , α_3 y α_6 , además del momento de fluencia de la sección en la zona de articulación plástica, los parámetros α_4 y α_5 pueden determinarse de (3.2.5)

$$\alpha_4 = \alpha_5 = \frac{\alpha_3}{2M_y} (1 - \alpha_2)\alpha_1 \quad (3.2.8)$$

De la forma descrita anteriormente, se calculan los parámetros del modelo histerético de Y. K. Wen, que incorporan al análisis del marco el comportamiento no_lineal de cada uno de los elementos estructurales, al considerar la presencia de articulaciones plásticas en los extremos de los mismos. El modelo representado por la ecuación (3.2.1) se aplica cuando α_6 adopta valores pares, en el caso descrito anteriormente $\alpha_6 = 1.0$ es impar, por lo que deberá tomarse en cuenta la siguiente representación del modelo

$$\dot{z} = \alpha_3 \dot{u} - \alpha_4 | \dot{u} | z^{\alpha_5} - \alpha_3 \dot{u} | z^{\alpha_4} | \quad (3.2.9)$$

En esta última ecuación se pueden sustituir los parámetros α_i ($i=1,\dots,6$) calculados como se indicó anteriormente.

Resolviendo (3.2.9) es posible obtener las gráficas que relacionan fuerza-desplazamiento, o bien las que relacionan momento-rotación, que permiten identificar el comportamiento no_lineal de los elementos estructurales.

Para encontrar la solución de la ecuación diferencial (3.2.9), es posible aprovechar

el hecho de poder combinarla con la ecuación diferencial de movimiento del sistema, en la cual se incorpora la fuerza restauradora (3.2.2), formando un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas. En este sistema de ecuaciones se debe incorporar también, la ecuación que relaciona la rotación elástica θ y la variable z , con el momento flexionante en la sección, y se debe tomar en cuenta la influencia del desplazamiento u sobre la rotación y el momento flexionante. Estas relaciones se describen posteriormente en las ecuaciones (4.1.11), (4.1.18) y (4.1.22). En el procedimiento de solución se analiza un oscilador simple con parámetros dinámicos establecidos (amortiguamiento, frecuencia natural, rigidez lineal, etc.) y momento de fluencia conocido. Esto con la finalidad de poder complementar la información con la que se estiman los parámetros que intervienen en la ecuación (3.2.9). Se establece el siguiente sistema de ecuaciones y se aplica el método de Runge-Kutta de 4o. orden [5]

$$\begin{aligned}
 m(1) &= \dot{u} \\
 m(2) &= a_0 - 2\xi\omega\dot{u} - \alpha_2\omega^2u - (1-\alpha_2)\omega^2z \\
 m(3) &= \alpha_3\dot{u} - \alpha_4 | \dot{u} | z^{\alpha_5} - \alpha_5\dot{u} | z^{\alpha_5} | \quad (3.2.10) \\
 m(4) &= \frac{1}{(E_2 - B)} (Az - E_1\dot{u})
 \end{aligned}$$

en donde,

$m(1)$, $m(2)$, $m(3)$ y $m(4)$ = Variables auxiliares para aplicar el método, con las que se calculan u , \dot{u} , z y θ .

- a_0 = Amplitud de la excitación en la base del oscilador.
- ξ = Porcentaje de amortiguamiento crítico.
- ω = Frecuencia natural del oscilador.
- u = Desplazamiento del oscilador.
- α_i ($i=1, \dots, 6$) = Parámetros del modelo.

$$E_1 = \frac{3EI}{h^2}$$

$$E_2 = -\frac{3EI}{h}$$

$$A = (1 - \alpha_2)\alpha_1$$

$$B = \alpha_1\alpha_2$$

EI = Coeficiente de rigidez lineal a la flexión.

h = Altura del oscilador.

La solución del sistema anterior de ecuaciones se representa en las siguientes figuras, en las que se observan las curvas típicas de histéresis para elementos de concreto reforzado, haciéndose notar la influencia de algunos de los parámetros del modelo.

En la figura 3.2-1 se muestra la relación fuerza-desplazamiento de un oscilador simple de concreto reforzado, como respuesta a una excitación periódica, representada por una función senoidal con una frecuencia igual a la frecuencia natural del oscilador. La relación momento-rotación de este oscilador para las mismas condiciones de excitación, se muestra en la figura 3.2-2. Para esta solución en particular se tomó la sección de una columna cuyo momento de fluencia M_f es de 2310 $Klb-plg$. El coeficiente de rigidez lineal a la flexión EI , es de 20,995,000 $Klb-plg^2$, y la información complementaria sobre el oscilador es

$$h = 133.70 \text{ plg}$$

$$Masa = 1.0 \frac{Klb-sec^2}{plg}$$

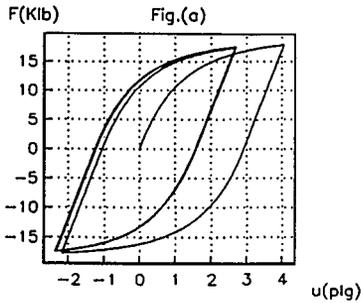
$$\xi = 0.1 \%$$

Los parámetros α_1 , α_4 y α_5 se calcularon a través de (3.2.6) y (3.2.8), respectivamente. Los valores de los parámetros α_2 y α_6 son los que se presentan en las siguientes figuras. El valor de α_3 se considera igual a 1.0. Los resultados que se muestran en las gráficas son los que se obtienen al variar α_2 y α_6 únicamente, la excitación es la misma para todas las gráficas.

Para la sección del elemento de concreto reforzado se determinó analíticamente la respuesta en el rango elástico, según el criterio presentado en la literatura relacionada al comportamiento de elementos de concreto reforzado, con la finalidad de tener una referencia de los resultados que se obtienen de la solución del modelo (3.2.1), los cuales concuerdan con los mostrados en las gráficas (b) y (c) de la figura 3.2-2, para el caso de la gráfica (a), en la misma figura, concuerdan cuando son trazadas rectas tangentes en el origen y al final de la segunda rama de la curva histerética.

El comportamiento lineal del oscilador se puede verificar también si la excitación es lo suficientemente pequeña. En este caso la respuesta se mantiene en la rama elástica en la curva histerética. Otra forma de obtener la respuesta lineal es forzándola, es decir, que la pendiente de la segunda rama en la curva histerética sea igual a la de la primera rama, lo cual se logra haciendo $\alpha_2 = 1.0$.

Con el fin de verificar los parámetros α_i ($i=1, \dots, 6$) y poder establecer la ecuación (3.2.9), para cada sección potencial de plastificación, un análisis de este tipo puede aplicarse a cada uno de los elementos estructurales de los marcos de concreto reforzado en estudio.



α_i	Fig(a)	Fig(b)	Fig(c)
α_1	2099.5	2099.5	2099.5
α_2	0.0156	0.0	0.0156
α_3	1.0	1.0	1.0
α_4	0.447348	0.447348	0.447348
α_5	0.447348	0.447348	0.447348
α_6	1.0	7.0	7.0

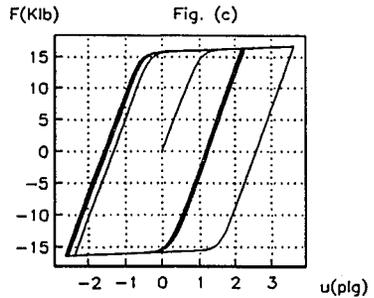
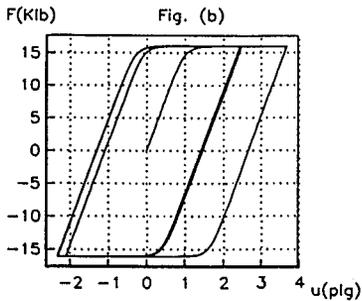
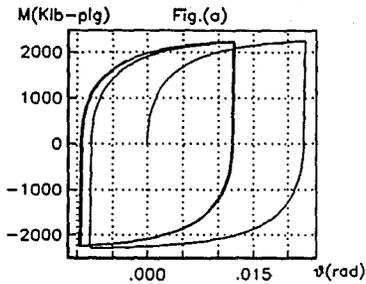


Fig. 3.2-1. Relación Fuerza-Desplazamiento de la respuesta de un oscilador simple ante excitación periódica con variación de algunos parámetros del modelo diferencial (3.2.1).



α_i	Fig(a)	Fig(b)	Fig(c)
α_1	2099.5	2099.5	2099.5
α_2	0.0156	0.0	0.0156
α_3	1.0	1.0	1.0
α_4	0.447348	0.447348	0.447348
α_5	0.447348	0.447348	0.447348
α_6	1.0	7.0	7.0

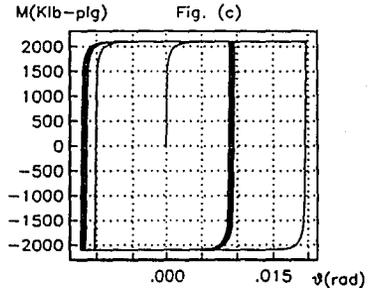
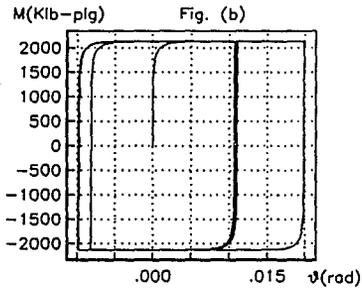


Fig. 3.2-2. Relación Momento-Rotación de la respuesta de un oscilador simple ante excitación periódica con variación de algunos parámetros del modelo diferencial (3.2.1).

CAPITULO 4

CRITERIO DE LINEALIZACION EQUIVALENTE ESTOCASTICA (CLE)

4.1 ANALISIS DINAMICO ESTRUCTURAL.

Una de las características del criterio de linealización equivalente estocástica es su aplicabilidad a sistemas estructurales de varios grados de libertad. En esta tesis se estudia el comportamiento no_lineal de marcos planos, tomando en cuenta la aleatoriedad de la excitación, a través de su representación como un proceso estocástico estacionario. En este capítulo se consideran los conceptos planteados anteriormente en torno a procesos estocásticos y vibraciones aleatorias.

En la siguiente descripción se considera un marco plano discretizado en elementos elásticos [2], con articulaciones plásticas potenciales en los extremos, las masas se concentran en cada entrepiso, asociadas a un grado de libertad horizontal. Se supone además que: a) la ley constitutiva es simétrica en cada articulación plástica; b) las cargas vivas y muertas no contribuyen significativamente al comportamiento dinámico provocado por la excitación en la base; y c) la matriz de amortiguamiento se mantiene invariante con respecto al desarrollo de deformaciones inelásticas.

La ecuación general de movimiento de un sistema de varios grados de libertad, tomando en cuenta las rotaciones plásticas que se desarrollan en los extremos de los elementos estructurales, es

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku - K_p\theta = w \quad (4.1.1)$$

en la que la suma algebraica de $Ku - K_p\theta = w$, es el resultado de considerar el efecto total, en el extremo de cada elemento estructural, producido por las rotaciones plástica y elástica; además

- u = Vector de desplazamientos.
- \dot{u} = Vector de velocidades.
- \ddot{u} = Vector de aceleraciones.
- θ = Vector de rotaciones plásticas.
- M = Matriz de masas.
- C = Matriz de amortiguamiento.
- K = Matriz de rigidez elástica.

K_g = Matriz de rigideces asociadas a las rotaciones plásticas.

Desarrollando (4.1.1) en los términos asociados a los diferentes desplazamientos (horizontal y giros), se tiene

$$\begin{bmatrix} m_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_m \\ u_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{mm} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_m \\ \dot{u}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{mm} & k_{m0} \\ k_{0m} & k_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_m \\ u_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{\theta m} \\ k_{\theta 0} \end{bmatrix} \theta = \begin{bmatrix} w(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.1.2)$$

esta puede expresarse mediante el siguiente conjunto de ecuaciones

$$m_m \ddot{u}_m + c_{mm} \dot{u}_m + k_{mm} u_m + k_{m0} u_0 - k_{\theta m} \theta = w(t) \quad (4.1.3)$$

$$k_{0m} u_m + k_{00} u_0 - k_{\theta 0} \theta = 0 \quad (4.1.4)$$

de la última ecuación, y realizando condensación estática

$$u_0 = -k_{00}^{-1} k_{0m} u_m + k_{00}^{-1} k_{\theta 0} \theta \quad (4.1.5)$$

sustituyendo en (4.1.3) y haciendo

$$E_3 E_1 = k_{mm} - k_{m0} k_{00}^{-1} k_{0m} \quad (4.1.6)$$

$$E_3 E_2 = k_{m0} k_{00}^{-1} k_{\theta 0} - k_{\theta m} \quad (4.1.7)$$

tendremos

$$m_m \ddot{u}_m + c_{mm} \dot{u}_m + E_3 E_1 u_m + E_3 E_2 \theta = w(t) \quad (4.1.8)$$

efectuando el siguiente cambio de variables

$$\begin{aligned} u_m &= Y_1 \\ \dot{u}_m &= Y_2 \\ \theta &= Y_3 \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

podemos escribir

$$\dot{Y}_1 = Y_2 \quad (4.1.10 \text{ a})$$

$$\dot{Y}_2 = -m_m^{-1} C_{mm} Y_2 - m_m^{-1} E_3 E_1 Y_1 - m_m^{-1} E_3 E_2 Y_3 + m_m^{-1} w(t) \quad (4.1.10 \text{ b})$$

Las ecuaciones anteriores, (4.1.10 a) y (4.1.10 b), describen el movimiento del sistema, pero es necesario incorporar una tercera ecuación que describa el comportamiento no_lineal de los elementos.

Del modelo matemático propuesto por Y. K. Wen [17], que describe el comportamiento no_lineal, se tiene la siguiente ley constitutiva, que define la relación de la rotación elástica y la histéresis, a través de una variable auxiliar z , con el momento flexionante en la sección potencial de articulación plástica, en ambos extremos de los elementos estructurales. Esta relación está descrita por

$$M = \alpha_2 \alpha_1 \theta + (1 - \alpha_2) \alpha_1 z \quad (4.1.11)$$

en la cual

- M = Momento flexionante en la sección.
- θ = Rotación de la sección.
- z = Variable auxiliar del modelo histerético.
- α_1 = Rigidez elástica lineal.
- α_2 = Porcentaje de la rigidez elástica lineal.

La expresión anterior corresponde a una sección en particular, para todo el sistema se tiene la siguiente representación, tomando en cuenta n secciones potenciales de desarrollo de articulaciones plásticas

$$M = \begin{bmatrix} (\alpha_2 \alpha_1)_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (\alpha_2 \alpha_1)_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (\alpha_2 \alpha_1)_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [(1 - \alpha_2) \alpha_1]_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [(1 - \alpha_2) \alpha_1]_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & [(1 - \alpha_2) \alpha_1]_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

en forma condensada

$$M = B \theta + A z \quad (4.112)$$

Puesto que la rotación total en una sección es la acumulación de las rotaciones elástica y plástica, se puede establecer que el vector de momento flexionantes M , estará dado por [2]

$$M = k_r u - k_r \theta \quad (4.113)$$

en la cual

u = Vector de desplazamientos nodales.

θ = Vector de rotaciones plásticas.

k_r = Matriz de rigidez elástica lineal, de cada rotación plástica asociada a los grados de libertad del marco estructural.

k_r = Matriz ensamblada de las rigideces angulares asociados a cada rotación plástica.

Ya que $k_r = k_{\theta}^T$ [10], de (4.1.1) sustituyendo k_{θ} en (4.1.13)

$$M = [k_{\theta m}^T \quad k_{\theta 0}^T] \begin{bmatrix} u_m \\ \dots \\ u_0 \end{bmatrix} - k_r \theta \quad (4.1.14)$$

desarrollando esta expresión

$$M = k_{\theta m}^T u_m + k_{\theta 0}^T u_0 - k_r \theta \quad (4.1.15)$$

sustituyendo u_0 de (4.1.5) en la anterior

$$M = [k_{\theta m}^T - k_{\theta 0}^T k_{10}^{-1} k_{0m}] u_m + [k_{\theta m}^T k_{10}^{-1} k_{\theta 0} - k_r] \theta \quad (4.1.16)$$

haciendo

$$\begin{aligned} E_1 &= k_{\theta m}^T - k_{\theta 0}^T k_{10}^{-1} k_{0m} \\ E_2 &= k_{\theta m}^T k_{10}^{-1} k_{\theta 0} - k_r \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

se simplifica la expresión (4.1.16) a la siguiente

$$M = E_1 u_m + E_2 \theta \quad (4.1.18)$$

igualando (4.1.12) y (4.1.18)

$$B \theta + A z = E_1 u_m + E_2 \theta \quad (4.1.19)$$

despejando z

$$z = A^{-1} [E_1 u_m + (E_2 - B) \theta] \quad (4.1.20)$$

Derivando esta última, puede sustituirse en el modelo diferencial de Y. K. Wen, en su forma lineal equivalente, la cual es

$$\dot{z} = C \dot{\theta} + H z \quad (4.1.21)$$

en donde C y H son las matrices diagonales que contienen los coeficientes que linealizan la ecuación diferencial. Las variables, θ y z , son las que se han venido utilizando.

Derivando (4.1.20)

$$\dot{z} = A^{-1} [E_1 \dot{u}_m + (E_2 - B) \dot{\theta}] \quad (4.1.22)$$

igualando (4.1.22) con (4.1.21) y sustituyendo (4.1.20)

$$A^{-1} [E_1 \dot{u}_m + (E_2 - B) \dot{\theta}] = C \dot{\theta} + H A^{-1} [E_1 u_m + (E_2 - B) \theta] \quad (4.1.23)$$

despejando $\dot{\theta}$

$$\dot{\theta} = [A^{-1}(E_2 - B) - C]^{-1} [HA^{-1}E_1 u_m - A^{-1}E_1 \dot{u}_m + HA^{-1}(E_2 - B)\theta] \quad (4.1.24)$$

haciendo

$$\begin{aligned}
Q_r &= [A^{-1}(E_2 - B) - C]^{-1} \\
Q_1 &= HA^{-1}E_1 \\
Q_2 &= -A^{-1}E_1\dot{u}_m \\
Q_3 &= HA^{-1}(E_2 - B)\theta
\end{aligned}
\tag{4.1.25}$$

se simplifica la expresión (4.1.24) a la siguiente

$$\dot{\theta} = Q_r [Q_1\dot{u}_m + Q_2\dot{u}_m + Q_3\theta] \tag{4.1.26 a}$$

de acuerdo con la equivalencia (4.1.9) tendremos

$$\dot{Y}_3 = Q_r [Q_1Y_1 + Q_2Y_2 + Q_3Y_3] \tag{4.1.26 b}$$

agrupando (4.1.10 a), (4.1.10 b) y (4.1.26 b) en su representación matricial

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ m_m^{-1}E_3E_1 & m_m^{-1}C_{mm} & m_m^{-1}E_3E_2 \\ -Q_rQ_1 & -Q_rQ_2 & -Q_rQ_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_m^{-1}W(t) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.1.27}$$

definiendo

$$g = - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ m_m^{-1}E_3E_1 & m_m^{-1}C_{mm} & m_m^{-1}E_3E_2 \\ -Q_rQ_1 & -Q_rQ_2 & -Q_rQ_3 \end{bmatrix} \tag{4.1.28}$$

la expresión (4.1.27) puede escribirse en la siguiente forma condensada

$$\frac{dY}{dt} = g Y + W \tag{4.1.29}$$

Tomando en cuenta que Y es el proceso estocástico que reproduce la respuesta del sistema, excitado por un proceso gaussiano estacionario, estará descrita por su media y variancia. El vector del valor medio de la ecuación (4.1.29) es

$$E\left[\frac{dY}{dt}\right] = E[g Y] + E[W] \quad (4.130)$$

Si $E[W] = 0$, y ya que la operación del valor esperado es conmutativa con la diferenciación, entonces

$$\frac{d}{dt} E[Y] = g E[Y] \quad (4.131)$$

Para las condiciones iniciales $E[Y(t_0)] = Y_0$, la solución de la ecuación diferencial (4.131) es [27]

$$E[Y] = \exp [g(t-t_0)] Y_0 \quad (4.132)$$

Para obtener la matriz de covariancia se obtiene primero una ecuación diferencial. Para ello se resta (4.131) a (4.129)

$$\frac{d}{dt} (Y - E[Y]) = g(Y - E[Y]) + W \quad (4.133)$$

haciendo

$$Z = Y - E[Y] \quad (4.134)$$

se tiene que

$$\frac{d}{dt} Z = g Z + W \quad (4.135)$$

post-multiplicando ambos lados de esta ecuación por Z^T

$$\left(\frac{d}{dt} Z\right) Z^T = g Z Z^T + W Z^T \quad (4.136)$$

trasponiendo (4.136)

$$Z \frac{d}{dt} Z^T = (Z Z^T) g^T + Z W^T \quad (4.137)$$

sumando (4.136) y (4.137)

$$\left(\frac{d}{dt} z\right) z^T + z \frac{d}{dt} z^T = \frac{d}{dt} (z z^T) \quad (4.1.38)$$

$$= g(z z^T) + (z z^T) g^T + W z^T + z W^T$$

la esperanza de esta ecuación proporciona

$$\frac{d}{dt} \Sigma_Y = g \Sigma_Y + \Sigma_Y g^T + E[W z^T] + E[z W^T] \quad (4.1.39)$$

donde

$$\Sigma_Y = E[z z^T] = E\{(Y - E[Y])(Y - E[Y])^T\} \quad (4.1.40)$$

es la matriz de covariancia de la respuesta Y

Sustituyendo (4.1.34) en el término $E[z W^T]$ de la ecuación (4.1.39), y dado que la excitación puede considerarse como ruido blanco (*shot noise*) $w(t)$ [27], se tendrá

$$E[z W^T] = E[Y - E[Y]] E[0, w(t), 0]$$

De (4.1.9)

$$E[z W^T] = E \begin{bmatrix} u_m - E[u_m] \\ \dot{u}_m - E[\dot{u}_m] \\ \theta - E[\theta] \end{bmatrix} E[0, w(t), 0] \quad (4.1.41)$$

$$E[z W^T] = E \begin{bmatrix} 0 & (u_m - E[u_m])w(t) & 0 \\ 0 & (\dot{u}_m - E[\dot{u}_m])w(t) & 0 \\ 0 & (\theta - E[\theta])w(t) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.1.42)$$

Ahora, el ruido blanco es no correlacionado con los impulsos anteriores y puesto que los desplazamientos u_m y θ son producto de impulsos anteriores,

$$\begin{aligned} E[(u_m - E[u_m])w(t)] &= 0 \\ E[(\theta - E[\theta])w(t)] &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.43)$$

por lo que existe correlación sólo entre los impulsos y la velocidad \dot{u}_m , pues el arrivo de un impulso en un instante t ocasiona el cambio $\dot{u}_m(t+\varepsilon) - \dot{u}_m(t-\varepsilon)$ igual a la intensidad del impulso, en donde ε es un número pequeño positivo. Así, tomando en cuenta que la probabilidad de que se presenten dos o más impulsos en forma simultánea es nula, entonces [27]

$$E[(\dot{u}_m - E[\dot{u}_m])w(t)] = \int_{t-\varepsilon}^t I(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = \frac{1}{2}I(t) \quad (4.144)$$

en donde $I(t)$ es la función de intensidad del ruido blanco.

Ahora, en el dominio del tiempo

$$E[W Z^T] = E[Z W^T] \quad (4.145)$$

En la expresión (4.1.39)

$$E[W Z^T] - E[Z W^T] = \Omega(t) \quad (4.146)$$

en donde $\Omega(t)$, tiene la forma

$$\Omega(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.147)$$

La igualdad (4.1.45), también es cierta en el dominio de la frecuencia, por lo que la matriz de excitación $\Omega(\omega)$ tendrá la siguiente forma

$$\Omega(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.148)$$

Cuando la excitación es ruido blanco gaussiano $I(\omega) = 2\pi G_0$, donde G_0 es la constante de amplitud del espectro de densidad de potencia, según (2.5.4).

Por lo anterior, la expresión (4.1.39) puede reescribirse como

$$\frac{d}{dt} \Sigma_Y = g \Sigma_Y + \Sigma_Y g^T + \Omega(t) \quad (4.1.49)$$

la solución de esta expresión es la siguiente [27], si $\Sigma_Y(t_0) = 0$

$$\Sigma_Y = \int_{t_0}^t \exp [g(t-\tau)] \Omega(\tau) \exp [g^T(t-\tau)] d\tau \quad (4.1.50)$$

Para el caso estacionario la expresión (4.1.49) se simplifica, puesto que la matriz de covariancia permanece invariante con el tiempo, por lo que

$$g \Sigma_Y + \Sigma_Y g^T + \Omega(t) = 0 \quad (4.1.51)$$

que constituye la *ecuación de Liapunov*, a ser resuelta para Σ_Y . Para tal efecto, se aplica el algoritmo propuesto por Bartels y Stewart [25].

Se debe observar que la matriz g (4.1.28), depende de las matrices Q_1, Q_2 y Q_3 , y estas de los coeficientes de linealización C y H (4.1.21). Dadas las características de los procesos que se han mencionado a largo del planteamiento de la dinámica del sistema, es posible relacionar la matriz de covariancias de la respuesta de rotaciones inelásticas $\Sigma_{\theta z}$ con los coeficientes de linealización C y H . Así también, $\Sigma_{\theta z}$ puede relacionarse a través de la siguiente transformación con Σ_Y [2], obtenida al resolver la ecuación de Liapunov, según

$$\Sigma_{\theta z} = \Delta \Sigma_Y \Delta^T \quad (4.1.52)$$

en donde Δ se obtiene de ensamblar (4.1.20) y (4.1.26 a)

$$z = A^{-1} [E_1 u_m + (E_2 - B) \theta]$$

$$\dot{\theta} = Q_1 Q_1 u_m - Q_2 \dot{u}_m + Q_3 \theta$$

matricialmente

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 Q_1 & Q_1 Q_2 & Q_1 Q_3 \\ A^{-1} E_1 & 0 & A^{-1} (E_2 - B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_m \\ \dot{u}_m \\ \theta \end{bmatrix} \quad (4.1.53)$$

en forma simplificada

$$R_{\theta_2} = \Delta Y \quad (4.1.54)$$

OBTENCION DE COEFICIENTES LINEALIZADOS.

De estudios realizados por Atalik y Utku [18], se tiene que

$$\begin{aligned} C_j &= E \left[\frac{\partial z_j}{\partial \theta_j} \right] \\ H_j &= E \left[\frac{\partial z_j}{\partial z_j} \right] \end{aligned} \quad (4.1.55)$$

para cada una de las j -secciones potenciales de desarrollo de articulación plástica. Y. K. Wen aplicó estos resultados a sistemas con comportamiento histerético que presentan distribución conjunta gaussiana en Σ_{θ_2} , obteniendo las siguientes expresiones para determinar los valores de los coeficientes de linealización [11]

$$\begin{aligned} C &= \alpha_1 - (\alpha_4 F_1 + \alpha_3 F_2) \\ H &= -(\alpha_4 F_1 + \alpha_3 F_4) \end{aligned} \quad (4.1.56)$$

En la cual los términos F_i , ($i=1, \dots, 4$) son

$$\begin{aligned} F_1 &= \sigma_z^4 \Gamma [(\alpha_n + 2) / 2] 2^{\alpha_n - 2} I_1 / \pi \\ F_2 &= \sigma_z^4 \Gamma [(\alpha_n + 1) / 2] 2^{\alpha_n - 2} / \pi^{1/2} \\ F_3 &= \alpha_n \sigma_z^{\alpha_n - 1} \sigma_\theta \Gamma [(\alpha_n + 2) / 2] 2^{\alpha_n - 2} [2 (1 - \rho_{\theta z}^2)^{(\alpha_n - 1)/2} / \alpha_n + \rho_{\theta z} I_3] / \pi \\ F_4 &= \alpha_n \sigma_z^{\alpha_n - 1} \sigma_\theta \rho_{\theta z} \Gamma [(\alpha_n + 1) / 2] 2^{\alpha_n - 2} / \pi^{1/2} \end{aligned}$$

en donde

- σ_z = Desviación estándar de la variable auxiliar
- σ_θ = Desviación estándar de la velocidad de rotación.
- $\rho_{\theta z}$ = Coeficiente de correlación.

$\Gamma(\cdot)$ = Función Gamma.

$$I_i = 2 \int_L^{\pi/2} \text{Sen}^{\alpha_i} \psi d\psi, \quad L = \text{Tan}^{-1}[(1-\rho_{bz}^2)^{1/2}/\rho_{bz}]$$

α_i , ($i=1,\dots,6$) = Parámetros del modelo histerético de Y. K. Wen, el cual se describió anteriormente.

De la manera descrita se obtienen los coeficientes de linealización, C_i y H_j , para cada sección potencial de articulación plástica; el proceso se sintetiza en el algoritmo que se presenta más adelante. De acuerdo con la metodología, el valor más aproximado de los coeficientes de linealización, se obtiene a través de un proceso iterativo. Este proceso finalizará una vez que la diferencia entre las covariancias de la respuesta obtenida en cada iteración, respecto a la iteración anterior, sea lo suficientemente pequeña. Finalmente se tendrá la información estadística necesaria, con la que se identifica el proceso de respuesta.

4.2 EXCITACION ALEATORIA (RUIDO BLANCO FILTRADO).

En la descripción de la dinámica de los sistemas estructurales, presentada anteriormente, se mencionó que la excitación podía ser representada por procesos estocásticos, particularmente estacionarios del tipo gaussiano y en la obtención de algunos resultados se mencionó la aplicación de procesos de ruido blanco, los cuales tienen una función de densidad espectral de potencia constante con la frecuencia. Esta representación de la excitación no es la más apropiada, puesto que el espectro de amplitud de Fourier de los acelerogramas de movimientos fuertes (como el mostrado en la Fig. 2.2-2) muestran una variación irregular respecto a la frecuencia, aún en un limitado rango de frecuencias y como característica, presentan picos en algunas frecuencias y posterior a ellas, es decir, al incrementar la frecuencia, la amplitud del espectro disminuye considerablemente. De acuerdo con lo anterior, se puede deducir que lo más apropiado es utilizar un proceso filtrado, con el cual se representaría apropiadamente la excitación, para ello puede considerarse un sistema (ó filtro) con masa interconectada a un resorte y a un amortiguador con una cimentación que no está impedida de movimiento, así la ecuación de movimiento puede escribirse [2] como

$$\ddot{x}_g(t) + 2\xi_g \omega_g \dot{x}_g(t) + \omega_g^2 x_g(t) = \omega_0^2 y(t) + 2\xi_0 \omega_0 \dot{y}(t) \quad (4.2.1)$$

en la cual

$x_g(t)$ = Desplazamiento del sistema.

$y(t)$ = Desplazamiento de la cimentación del sistema.

ω_g = Frecuencia natural del sistema.

ξ_g = Amortiguamiento crítico.

ω_0 = Frecuencia natural del filtro.

ξ_0 = Amortiguamiento del filtro.

Siguiendo un planteamiento similar en la obtención de (2.4.12) [2] se encuentra la función de transferencia para el modelo representado por (4.2.1)

$$H_0(\omega) = \frac{\omega_0^2 + 2\omega_0 \xi_0 \omega j}{(\omega_0^2 - \omega^2 + 2\xi_0 \omega_0 \omega j)} \quad (4.2.2)$$

La expresión anterior se deriva también del modelo propuesto por Kanai y Tajimi [30][31] como un modelo semi-empírico para las características sísmicas del estrato del suelo.

Ahora, considerando que el desplazamiento $y(t)$ fuera un proceso estocástico, en particular ruido blanco, la función de densidad espectral de la respuesta para este sistema en que se relaciona la aceleración en la entrada con la aceleración en la salida, después de aplicar (2.4.13), es

$$G(\omega) = G_0 \left[\frac{\omega_0^4 + 4\omega_0^2 \xi_0^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_0^2 \omega_0^2 \omega^2} \right], \quad -\infty < \omega < \infty \quad (4.2.3)$$

El modelo representado por la ecuación (4.2.1), puede considerarse como un filtro de la excitación de un sistema estructural, en tal caso ω_0 y ξ_0 constituyen los parámetros del filtro, identificados como la frecuencia característica y la relación característica de amortiguamiento del suelo, respectivamente. Los valores propuestos por Kanai son 15.6 rad/seg para la frecuencia y 0.6 para el amortiguamiento como representativos de

condiciones de suelo firme [2][19]; sin embargo, para otras condiciones de terreno, deben adoptarse otros valores.

Al tomar en cuenta la relación de aceleraciones entre la entrada y la salida, consideradas como procesos estocásticos, el modelo de Kanai-Tajimi (4.2.3) se aplica en el rango $0 < \omega < \infty$, en la cual, según (2.5.3) y (2.5.4)

$$G_0 = \frac{A}{2\pi} \quad (4.2.4)$$

es la forma de representar la intensidad del espectro de densidad de potencia del ruido blanco.

Para aplicar este tipo de excitación a un sistema de varios grados de libertad con comportamiento no_lineal, el desarrollo presentado anteriormente para describir su análisis dinámico estructural es muy similar, a excepción que se toma en cuenta en las ecuaciones de movimiento del sistema, la influencia del movimiento del terreno, modificando (4.1.3) y (4.1.4) por

$$m_m \ddot{u}_m + c_{mm} \dot{u}_m + k_{mm} u_m - k_{m0} u_0 - k_{m\theta} \theta - I(2\xi_0 \omega_0 \dot{u}_0 + \omega_0^2 u_0) = 0 \quad (4.2.5)$$

$$k_{0m} u_m + k_{00} u_0 - k_{0\theta} \theta = 0 \quad (4.2.6)$$

$$\ddot{u}_0 + 2\xi_0 \omega_0 \dot{u}_0 + \omega_0^2 u_0 = f(t) \quad (4.2.7)$$

Donde I es un vector identidad de dimensión n ($n =$ grados de libertad del sistema).

Para llegar a obtener g se sigue el desarrollo descrito en la sección anterior, con las expresiones anteriores. Haciendo

$$Y_1 = u_0, \quad Y_2 = \dot{u}_0 \quad (4.2.8)$$

se tendrá que de (4.1.10 a)

$$\dot{Y}_1 = Y_2 \quad (4.2.9)$$

de (4.1.10 b)

$$\dot{Y}_2 = -m_m^{-1}c_{mm}Y_2 - m_m^{-1}E_3E_1Y_1 - m_m^{-1}E_3E_2Y_3 + I\omega_0^2Y_4 + I2\xi_0\omega_0Y_5 = 0 \quad (4.2.10)$$

de (4.1.26 b)

$$\dot{Y}_3 = Q_1(Q_1Y_1 + Q_2Y_2 + Q_3Y_3)$$

de (4.2.8)

$$Y_4 = Y_5 \quad (4.2.11)$$

y de ecuación (4.2.7)

$$\dot{Y}_5 = -2\xi_0\omega_0Y_5 - \omega_0^2Y_4 + f(t) \quad (4.2.12)$$

Se integran las expresiones anteriores en

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -I & 0 & 0 & 0 \\ m_m^{-1}E_3E_1 & m_m^{-1}c_{mm} & m_m^{-1}E_3E_2 & -I\omega_0^2 & -I2\xi_0\omega_0 \\ -Q_1Q_1 & -Q_1Q_2 & -Q_1Q_3 & 0 & 0 \\ 0^T & 0^T & 0^T & 0 & 1 \\ 0^T & 0^T & 0^T & \omega_0^2 & 2\xi_0\omega_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

Similar a (4.1.27), es posible expresar esta en forma condensada:

$$g = - \begin{bmatrix} 0 & -I & 0 & 0 & 0 \\ m_m^{-1}E_3E_1 & m_m^{-1}c_{mm} & m_m^{-1}E_3E_2 & -I\omega_0^2 & -I2\xi_0\omega_0 \\ -Q_1Q_1 & -Q_1Q_2 & -Q_1Q_3 & 0 & 0 \\ 0^T & 0^T & 0^T & 0 & 1 \\ 0^T & 0^T & 0^T & \omega_0^2 & 2\xi_0\omega_0 \end{bmatrix} \quad (4.2.13)$$

así, como se mostró en (4.1.29):

$$\frac{dY}{dt} = g Y + W$$

La matriz $\Omega(\omega)$ en (4.1.48) se modificará por

$$\Omega(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0^T & 0^T & 0^T & 0 & 0 \\ 0^T & 0^T & 0^T & 0 & 1 \end{bmatrix} 2\pi G_0 \quad (4.2.14)$$

De igual forma, la matriz Δ en (4.1.53) se modificará por

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 Q_1 & Q_1 Q_2 & Q_1 Q_3 & 0 & 0 \\ A^{-1} E_1 & 0 & A^{-1}(E_2 - B) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_m \\ \dot{u}_m \\ \theta \\ u_s \\ \dot{u}_k \end{bmatrix} \quad (4.2.15)$$

Y como en (4.1.54)

$$R_{v, z} = \Delta Y$$

Con las nuevas matrices g , $\Omega(\omega)$ y Δ , en las que se incorpora el efecto de la excitación ruido blanco filtrado, se aplica el mismo desarrollo descrito en la sección anterior.

**ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

4.3 DIAGRAMA DE BLOQUES DEL ALGORITMO.

De acuerdo con las características del criterio de linealización equivalente estocástica, mencionadas en temas anteriores, se plantea un algoritmo para aplicarse a sistemas mecánicos estructurales discretizados en elementos horizontales y verticales (vigas y columnas respectivamente), a través de una secuencia de bloques de actividades que, pueden codificarse en algún lenguaje de programación, y ser aplicado en un equipo de computación con requerimientos mínimos en la configuración del equipo.

A partir de datos geométricos del sistema estructural, como número de elementos, número de nodos, coordenadas de los nodos, etc., combinados con la información requerida por el modelo diferencial que reproduce el comportamiento no_lineal de los elementos estructurales, se ensambla la matriz de rigidez lineal y la matriz de rigidez que incorpora el efecto de las articulaciones plásticas en los extremos de los elementos estructurales.

Posteriormente, con la aplicación de álgebra matricial simple y tomando en cuenta los datos de la excitación, se obtienen las diferentes matrices que integran la ecuación de Liapunov, la cual es resuelta mediante la aplicación del algoritmo propuesto por Bartels y Stewart [25], obteniendo así la matriz de covariancia de la respuesta del sistema estructural; con esta, es posible determinar la matriz de covariancia de la respuesta de las articulaciones plásticas, determinando así la información estadística con la que se estiman los valores de los coeficientes de linealización del modelo diferencial que reproduce el comportamiento no_lineal de los elementos estructurales.

Sin embargo, puesto que los coeficientes de linealización adoptaron un valor inicial, estos deberán modificarse en la medida que la matriz de covariancias de la respuesta converge a un valor con el cual se minimiza la diferencia entre este último valor y el obtenido en la iteración anterior.

Con el desarrollo de la metodología (indicada por el diagrama de bloques en la siguiente figura) se tiene la información estadística de la respuesta del sistema estructural, con la que es posible estimar la respuesta estadística y llevar a cabo un análisis de confiabilidad.

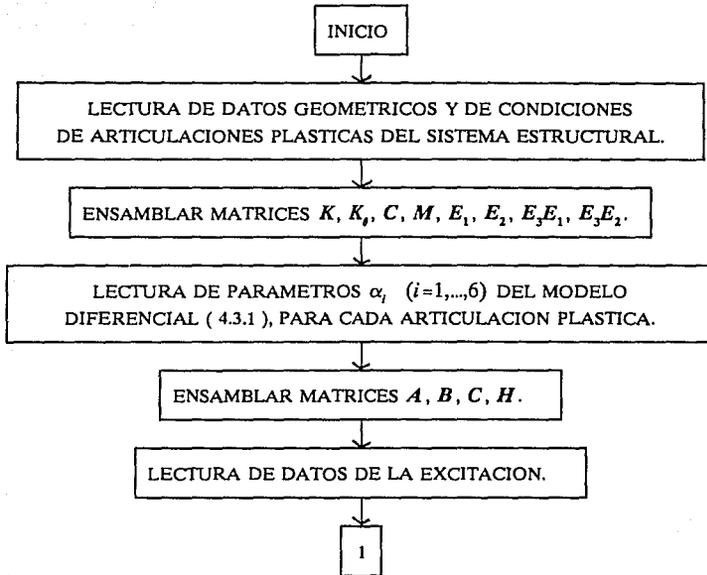


FIG. 4.3-1 Diagrama de bloques de la metodología del C.L.E.

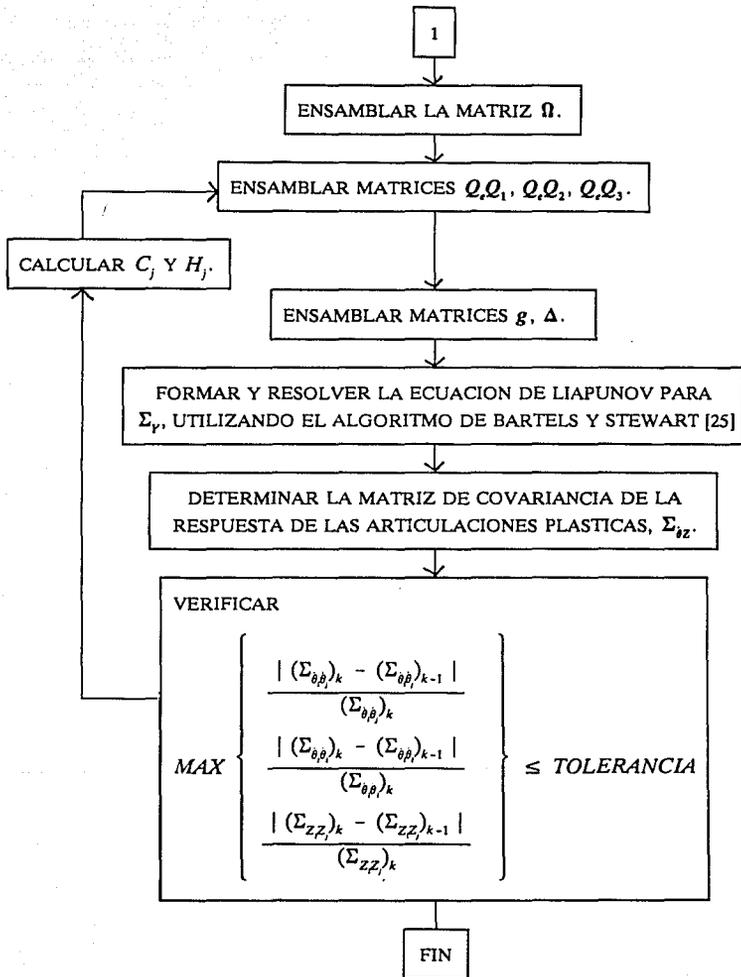


FIG. 4.3-1 (Cont.) Diagrama de bloques de la metodología del C.L.E.

CAPITULO 5

APLICACIONES DEL CLE A MARCOS ESTRUCTURALES PLANOS

El contexto en el que se presentó el desarrollo del criterio de linealización equivalente estocástica (CLE), tomó en cuenta que su aplicación sería para sistemas mecánicos estructurales idealizados por marcos planos.

En el desarrollo de este capítulo, se presentan algunas aplicaciones del CLE en marcos planos de concreto reforzado, con diferentes grados de libertad y tomando en cuenta además una variación en la amplitud de la excitación en algunas de estas aplicaciones. En la última parte del capítulo se presentan los resultados de un estudio paramétrico de un marco plano de concreto reforzado con masas resonantes.

En el planteamiento de la ecuación general de movimiento (4.1.1), interviene la matriz K_g , a través de la cual se incorporan los efectos de cambio de rigidez angular producidos por la presencia de articulaciones plásticas. A partir de la matriz de rigidez elástica K_h , de cada uno de los elementos estructurales del marco definida como [21]

$$K_h = \begin{bmatrix} \frac{EA_h}{l_h} & 0 & 0 & -\frac{EA_h}{l_h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_h}{l_h^3} & -\frac{6EI_h}{l_h^2} & 0 & -\frac{12EI_h}{l_h^3} & -\frac{6EI_h}{l_h^2} \\ 0 & -\frac{6EI_h}{l_h^2} & \frac{4EI_h}{l_h} & 0 & \frac{6EI_h}{l_h^2} & \frac{2EI_h}{l_h} \\ -\frac{EA_h}{l_h} & 0 & 0 & \frac{EA_h}{l_h} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_h}{l_h^3} & \frac{6EI_h}{l_h^2} & 0 & \frac{12EI_h}{l_h^3} & \frac{6EI_h}{l_h^2} \\ 0 & -\frac{6EI_h}{l_h^2} & \frac{2EI_h}{l_h} & 0 & \frac{6EI_h}{l_h^2} & \frac{4EI_h}{l_h} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

se integra la matriz K_h para cada uno de los elementos estructurales. Esta matriz está definida por

$$K_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{6EI_h}{l_h^2} & \frac{6EI_h}{l_h^2} \\ \frac{4EI_h}{l_h} & \frac{2EI_h}{l_h} \\ 0 & 0 \\ \frac{6EI_h}{l_h^2} & \frac{6EI_h}{l_h^2} \\ \frac{2EI_h}{l_h} & \frac{4EI_h}{l_h} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Las matrices (5.1) y (5.2) están dadas en coordenadas locales, la primera ensambla K en (4.1.1), de acuerdo con una transformación de coordenadas y tomando en cuenta los grados de libertad del marco. La matriz (5.2) ensambla K_s en (4.1.1), siguiendo la misma transformación de (5.1) y tomando en cuenta los grados de libertad del marco (NGL) y el número total de articulaciones plásticas (NAP) que se presentarán, (la dimensión de K_s es NAP x NGL). La matriz K_s ya ensamblada, se divide como se indica en (4.1.2), en las rigideces asociadas a los grados de libertad lineales (u horizontales) y en las rigideces asociadas a los giros, k_{sm} y k_{s0} respectivamente.

Otra matriz a ensamblar es k_r , la cual tiene la siguiente forma [2]

$$k_r = \begin{bmatrix} k_{r_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_{r_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{r_n} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

donde n es el número de elementos estructurales con articulación plástica en ambos extremos. Los elementos k_{r_i} en (5.3) se obtienen a partir de (5.2). Esta tiene la forma siguiente

$$K_{r_s} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_h}{I_h} & \frac{2EI_h}{I_h} \\ \frac{2EI_h}{I_h} & \frac{4EI_h}{I_h} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Las matrices C y H se introducen a través del modelo diferencial de Y. K. Wen en (4.1.21). Son matrices diagonales en las que los valores en la diagonal principal corresponden a los coeficientes de linealización C_j y H_j , respectivamente en cada matriz, de cada una de las secciones potenciales de plastificación. Los valores de estos coeficientes de linealización se obtienen a partir de (4.1.56), una vez que se han obtenido las matrices de covariancias Σ_y y $\Sigma_{\dot{y}z}$, después de la primera iteración. Ya que los coeficientes de linealización C_j y H_j , intervienen en la metodología del CLE desde la primera iteración, será conveniente fijar un valor inicial para ambos en cada una de las secciones potenciales de plastificación. Estos valores pueden calcularse a partir de las siguientes expresiones [11]

$$\begin{aligned} C_j &= 0.999 \alpha_3 \\ H_j &= -0.05 (\alpha_4 + \alpha_5) \end{aligned} \quad (5.5)$$

En el cálculo de los valores de los coeficientes de linealización en iteraciones subsiguientes, a partir de (4.1.56), para $\alpha_6 = 1.0$, los términos F_i ($i=1, \dots, 4$) se simplifican a la siguiente forma

$$\begin{aligned} F_1 &= \sigma_z \Gamma(\frac{3}{2}) \sqrt{2} I_s / \pi = \sigma_z (0.8862269254) \sqrt{2} I_s / \pi \\ F_2 &= \sigma_z \Gamma(1) \sqrt{2} / \pi^{1/2} = \sigma_z \sqrt{2} / \pi^{1/2} \\ F_3 &= \sigma_{\theta} \Gamma(\frac{3}{2}) \sqrt{2} [2(1-\rho_{\dot{b}z}^2) + \rho_{\dot{b}z} I_s] / \pi \\ &= \sigma_{\theta} (0.8862269254) \sqrt{2} [2(1-\rho_{\dot{b}z}^2) + \rho_{\dot{b}z} I_s] / \pi \\ F_4 &= \sigma_{\theta} \rho_{\dot{b}z} \Gamma(1) \sqrt{2} / \pi^{1/2} = \sigma_{\theta} \rho_{\dot{b}z} \sqrt{2} / \pi^{1/2} \\ I_s &= 2 \int_L^{\pi/2} \text{Sen } \psi d\psi \quad , \quad L = \text{Tan}^{-1} [(1-\rho_{\dot{b}z}^2)^{1/2} / \rho_{\dot{b}z}] \\ I_s &= 2 \text{Cos } L \end{aligned} \quad (5.6)$$

Los coeficientes de linealización obtenidos con (4.1.56), deben relacionarse con los obtenidos en la iteración anterior [11] con la finalidad de mejorar la convergencia, a través de la siguiente relación

$$C_j^k = (C_j^k + C_j^{k-1})/2$$

$$H_j^k = (H_j^k + H_j^{k-1})/2$$
(5.7)

En el desarrollo de la metodología del CLE, la solución de la ecuación de Liapunov se puede llevar a cabo mediante el algoritmo de Bartels y Stewart [25], con una tolerancia de 10^{-11} .

El proceso iterativo indicado en el diagrama del CLE de la Fig. 4.4-1, se detiene cuando se alcanza una tolerancia de 0.01.

5.1 MARCO DE CONCRETO REFORZADO DE UN GRADO DE LIBERTAD.

Tomando en cuenta los conceptos desarrollados anteriormente, se aplicó el CLE primeramente al marco simple de concreto reforzado mostrado en la siguiente figura.

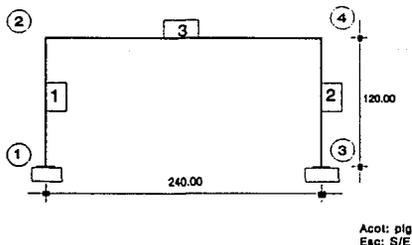


Fig. 5.1-1 Marco simple de concreto reforzado.

Los elementos estructurales son de sección constante, los cuales tienen las características dadas en la siguiente tabla.

Barra	E (Klb/plg ²)	I (plg ⁴)	M _y (Klb-plg)
1	3600.00	3499.20	2272.87
2	3600.00	3499.20	2272.87
3	3600.00	3600.00	1190.64

Tabla 5.1-1 Módulo de elasticidad (E), momento de inercia (I) y momento de fluencia (M_y) de los elementos estructurales del marco de la figura 5.1-1.

Los parámetros que intervienen en el modelo que reproduce el comportamiento no lineal de los elementos estructurales en las zonas de articulación plástica se obtienen como se describió en el capítulo 3. En la estimación de $(EI)_{efectiva}$ se consideró el 60 y 40% de la rigidez EI en columnas y vigas respectivamente.

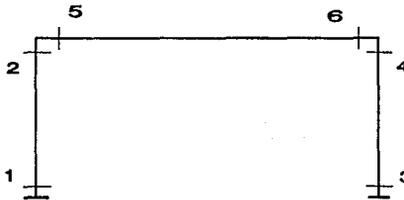


Fig. 5.1-2 Secciones potenciales de desarrollo de articulaciones plásticas del marco simple de concreto reforzado.

Articulación Plástica	α_1 (Klb/rad)	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
1	1260000.0	0.0156	1.0	0.2728	0.2728	1.0
2	1260000.0	0.0156	1.0	0.2728	0.2728	1.0
3	1260000.0	0.0156	1.0	0.2728	0.2728	1.0
4	1260000.0	0.0156	1.0	0.2728	0.2728	1.0
5	966000.0	0.0156	1.0	0.4025	0.4025	1.0
6	966000.0	0.0156	1.0	0.4025	0.4025	1.0

Tabla 5.1-2 Valores de los parámetros, para cada una de las secciones de los elementos estructurales que pueden desarrollar una articulación plástica, que intervienen en el modelo matemático de Y. K. Wen.

La masa del oscilador se consideró con un valor de $0.2 \frac{\text{Klb} \cdot \text{seg}^2}{\text{in}^2}$. La aceleración en la base es un ruido blanco filtrado, de acuerdo con el modelo de Kanai-Tajimi con parámetros

$$G_{ii} = \frac{200}{2\pi} \frac{\mu \text{seg}}{\text{seg}^2}$$

$$\omega_g = 15.6 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

$$\xi_g = 0.69$$

los cuales corresponden a un espectro de densidad de potencia de banda ancha, típico en suelos duros.

Los resultados se presentan en las siguientes tablas, de acuerdo como se obtienen en las iteraciones, hasta alcanzar la convergencia.

Iteración 0, $\sigma_u^2 = 0.0724 \text{ plg}^2$, $\sigma_u^2 = 0.01909 \frac{\text{plg}}{\text{seg}}$.

Articulación Plástica	C_1	H_1	σ_n^2 ($\times 10^6$)	σ_n^2 ($\times 10^6$)	σ_z^2 ($\times 10^6$)	$\sigma_{\theta_z}^2$ ($\times 10^6$)
1,3	0.999	-0.02728	0.34846	101.810	0.33793	0.00924
2,4	0.999	-0.02728	0.11328	33.556	0.11138	0.00304
5,6	0.999	-0.02728	0.19383	57.090	0.18949	0.00764

Iteración 1, $\sigma_u^2 = 0.0743 \text{ plg}^2$, $\sigma_u^2 = 0.01909 \frac{\text{plg}}{\text{seg}}$.

Articulación Plástica	C_1	H_1	σ_n^2 ($\times 10^6$)	σ_n^2 ($\times 10^6$)	σ_z^2 ($\times 10^6$)	$\sigma_{\theta_z}^2$ ($\times 10^6$)
1,3	0.9361	-1.11347	0.66752	105.320	0.31252	0.37172
2,4	0.9631	-0.64507	0.15198	32.641	0.10276	0.06882
5,6	0.9294	-1.23620	0.34661	59.787	0.17460	0.23223

Iteración 2, $\sigma_u^2 = 0.0756 \text{ plg}^2$, $\sigma_u^2 = 0.01909 \frac{\text{plg}}{\text{seg}}$.

Articulación Plástica	C_1	H_1	σ_n^2 ($\times 10^6$)	σ_n^2 ($\times 10^6$)	σ_z^2 ($\times 10^6$)	$\sigma_{\theta_z}^2$ ($\times 10^6$)
1,3	0.903	-1.74602	0.86794	107.320	0.29838	0.57675
2,4	0.945	-0.96768	0.17308	31.969	0.09799	0.10031
5,6	0.893	-1.94893	0.44894	61.462	0.16637	0.36317

Iteración 3, $\sigma_u^2 = 0.0764 \text{ } \rho l g^2$, $\sigma_v^2 = 0.01909 \frac{\rho l c}{S \eta c}$.

Articulación Plástica	C_1	H_1	σ_u^2 (x10 ⁶)	σ_v^2 (x10 ⁶)	σ_z^2 (x10 ⁶)	$\sigma_{\theta_z}^2$ (x10 ⁶)
1,3	0.886	-2.11536	0.98781	108.330	0.29045	0.69334
2,4	0.936	-1.13406	0.18401	31.503	0.09534	0.11543
5,6	0.873	-2.37629	0.51382	62.412	0.16177	0.44009

Iteración 4, $\sigma_u^2 = 0.0768 \text{ } \rho l g^2$, $\sigma_v^2 = 0.01909 \frac{\rho l c}{S \eta c}$.

Articulación Plástica	C_1	H_1	σ_u^2 (x10 ⁶)	σ_v^2 (x10 ⁶)	σ_z^2 (x10 ⁶)	$\sigma_{\theta_z}^2$ (x10 ⁶)
1,3	0.877	-2.33042	1.05767	108.800	0.28598	0.75978
2,4	0.932	-1.21856	0.18949	31.194	0.09385	0.12264
5,6	0.863	-2.63241	0.55373	62.931	0.15919	0.48545

Iteración 5, $\sigma_u^2 = 0.0771 \text{ } \rho l g^2$, $\sigma_v^2 = 0.01909 \frac{\rho l c}{S \eta c}$.

Articulación Plástica	C_1	H_1	σ_u^2 (x10 ⁶)	σ_v^2 (x10 ⁶)	σ_z^2 (x10 ⁶)	$\sigma_{\theta_z}^2$ (x10 ⁶)
1,3	0.872	-2.45503	1.09775	109.010	0.28346	0.79763
2,4	0.931	-1.26069	0.19214	30.995	0.09301	0.12601
5,6	0.858	-2.78539	0.57783	63.211	0.15773	0.51224

Para las características dinámicas del sistema estructural de la figura 5.1-1 y las de la excitación que se consideraron en la aplicación del CLE a sistemas de un grado de libertad, se hacen las siguientes observaciones a los resultados obtenidos:

a) El número de iteraciones realizadas hasta alcanzar la convergencia es bajo. La convergencia está definida por una tolerancia de 0.01 en la relación de los valores obtenidos para la covariancia de la respuesta en la iteración última con respecto a la iteración anterior, como se indica en el diagrama de bloques de la figura 4.3-1.

b) Los resultados presentados en la tabla correspondiente a la iteración 0, pueden considerarse como los correspondientes al marco con comportamiento no_lineal muy bajo, por las siguientes razones:

1. En la iteración 0 los coeficientes de linealización C_j y H_j , tienen los valores iniciales, estos valores se van modificando a medida que se realizan más iteraciones, según se establece en la expresión (4.1.56). Es decir, se lleva a cabo una corrección a los valores iniciales por el comportamiento de la respuesta del sistema estructural.

2. Los valores para σ_θ^2 y $\sigma_\theta'^2$, correspondientes a la respuesta en la rotación de las secciones potenciales de desarrollo de articulación plástica de la figura 5.1-2, son menores en la iteración 0 con respecto a los valores en la iteración 5, lo cual es indicativo de que en la corrección por el comportamiento de la respuesta del sistema estructural, se va tomando más en cuenta el comportamiento no_lineal en estas secciones.

c) El coeficiente de linealización C_j tiende a disminuir a medida que se realizan más iteraciones, es decir a medida que se toma en cuenta en el análisis la corrección por comportamiento de la respuesta del sistema; mientras que el coeficiente H_j tiende a un valor negativo mayor cada vez.

5.2 ESTUDIO SOBRE LA VARIACION DE LOS COEFICIENTES DE LINEALIZACION C_j Y H_j .

Con la finalidad de observar la forma en que varían los coeficientes de linealización C_j y H_j que intervienen en el modelo sobre comportamiento histerético de los sistemas estructurales, dado por la expresión (4.1.21), se aplicó el CLE a un marco simple de concreto reforzado, como el mostrado en la figura 5.2-1. Este es equivalente a un marco de varios niveles con características geométricas distintas (ver figura 5.2-2). El periodo del sistema estructural es de 2.0 seg. Los elementos estructurales son de sección constante y tienen las características dadas en la tabla 5.2-1.

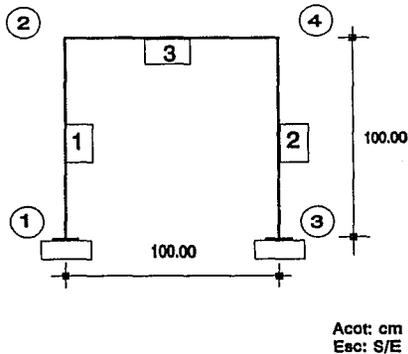


Fig. 5.2-1 Marco simple de concreto utilizado en el presente estudio.

Barra	E (Ton/cm ²)	I (cm ⁴)
1	113.1371	10080.0
2	113.1371	10080.0
3	113.1371	91450.0

Tabla 5.2-1 Módulo de elasticidad (E) y momento de inercia (I) de los elementos estructurales del marco de la figura 5.2-1.

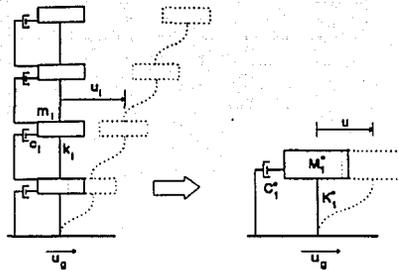


Fig. 5.2-2 Sistema de varios grados de libertad modelado como oscilador de un grado de libertad.

Los momentos de fluencia M_f para cada uno de los elementos estructurales del marco equivalente, corresponden al valor medio de los resultados que se obtuvieron de una serie de análisis deterministas para un conjunto de acelerogramas simulados a partir del registro del sismo de 1985 en la estación SCT en el Valle de México [7]. Se consideraron cuatro diferentes niveles de resistencia del marco estructural a través del factor de ductilidad Q . En la tabla 5.2-2 se muestran los momentos de fluencia obtenidos para cada uno de los niveles de ductilidad Q .

Q	Momento de fluencia M_f , Ton-cm		
	Barra 1	Barra 2	Barra 3
1	41194.0	41194.0	39734.0
2	20760.0	20760.0	20692.0
3	13969.0	13969.0	13865.0
4	10298.0	10298.0	9933.0

Tabla 5.2-2 Momento de fluencia (M_f) en Ton-cm para cada elemento estructural del marco mostrado en la figura 5.2-1, para diferentes niveles de resistencia.

Con los datos de la tabla anterior se calcularon los parámetros que intervienen en el modelo que reproduce el comportamiento no_lineal de los elementos estructurales en las

zonas de articulación plástica (ver figura 5.2-3), de la forma como se describió en el capítulo 3. Estos se presentan en las tablas 5.2-3 y 5.2-4.

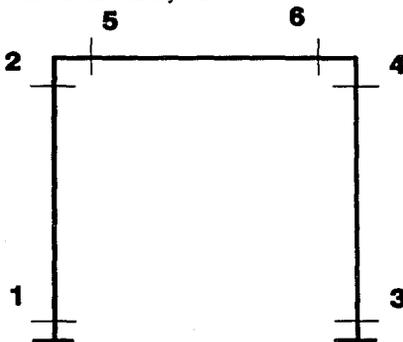


Fig. 5.2-3 Secciones potenciales de desarrollo de articulaciones plásticas.

Art. Plástica	α_1 (Ton/rad)	α_2	α_3	α_6
1	190.064	0.0156	1.0	1.0
2	190.064	0.0156	1.0	1.0
3	190.064	0.0156	1.0	1.0
4	190.064	0.0156	1.0	1.0
5	1724397.0	0.0156	1.0	1.0
6	1724397.0	0.0156	1.0	1.0

Tabla 5.2-3 Valores de los parámetros α_1 , α_2 , α_3 y α_6 para cada una de las secciones de los elementos estructurales que pueden desarrollar una articulación plástica.

Art. Plástica	Q=1	Q=2	Q=3	Q=4
	$\alpha_4 = \alpha_5$	$\alpha_4 = \alpha_5$	$\alpha_4 = \alpha_5$	$\alpha_4 = \alpha_5$
1	0.002307	0.004577	0.006803	0.009228
2	0.002307	0.004577	0.006803	0.009228
3	0.002307	0.004577	0.006803	0.009228
4	0.002307	0.004577	0.006803	0.009228
5	0.02169	0.041668	0.062185	0.086801
6	0.02169	0.041668	0.062185	0.086801

Tabla 5.2-4 Valores de los parámetros α_4 y α_5 para cada una de las secciones de los elementos estructurales que pueden desarrollar una articulación plástica.

La excitación considerada en este análisis se representó por el modelo de Kanai-Tajimi, para el espectro de densidad de potencia del registro del sismo de 1985 en la estación SCT en el Valle de México [7], con parámetros

$$\omega_g = 3.14159 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

$$\xi_g = 0.05$$

y con amplitudes G_0 , con los siguientes valores

$$a) G_0 = \frac{30}{2\pi} \frac{\text{cm}^2}{\text{seg}^2}$$

$$b) G_0 = \frac{84}{2\pi} \frac{\text{cm}^2}{\text{seg}^2}$$

Los resultados se presentan en las gráficas de las figuras 5.2-4 y 5.2-5. Estos corresponden a la sección inferior de las columnas del sistema estructural. Además, en la gráfica de la figura 5.2-6 se presenta la variación de la energía disipada en la parte inferior de las columnas del sistema estructural para las mismas condiciones de excitación y resistencia utilizadas en la determinación de la variación de los coeficientes de linealización C_j y H_j .

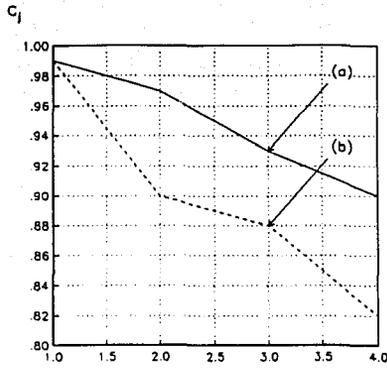


Fig. 5.2-4 Variación del coeficiente de linealización C_j para las secciones en la base de las columnas del sistema estructural equivalente. (a) $G_0 = \frac{30 \text{ cm}^2}{2\pi \cdot 10^4}$.
 (b) $G_0 = \frac{84 \text{ cm}^2}{2\pi \cdot 10^4}$.

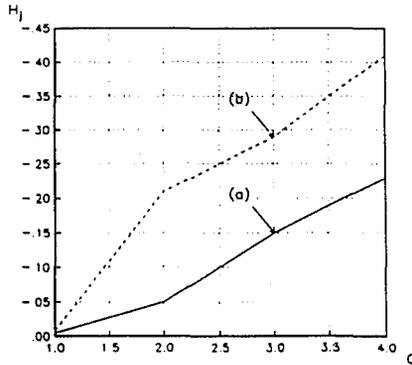


Fig. 5.2-5 Variación del coeficiente de linealización H_j para las secciones en la base de las columnas del sistema estructural equivalente. (a) $G_0 = \frac{30 \text{ cm}^2}{2\pi \cdot 10^4}$.
 (b) $G_0 = \frac{84 \text{ cm}^2}{2\pi \cdot 10^4}$.

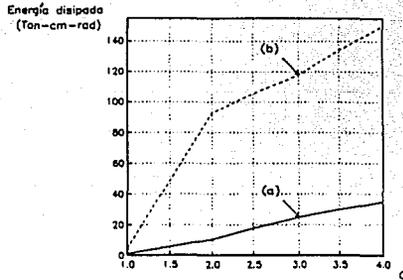


Fig. 5.2-6 Energía disipada en el extremo inferior de cada columna del sistema estructural equivalente. (a) $G_0 = \frac{30}{2\pi} \frac{\text{cm}^3}{\text{seg}^2}$, (b) $G_0 = \frac{84}{2\pi} \frac{\text{cm}^3}{\text{seg}^2}$.

De acuerdo con estas gráficas:

- El coeficiente C_j disminuye de valor al incrementarse el nivel de excitación. Esto también sucede al disminuir el nivel de resistencia (ó incrementarse la ductilidad Q).
- El coeficiente H_j tiende a tener un valor mayor negativo al incrementarse el nivel de excitación. Esto también sucede al disminuir el nivel de resistencia (ó incrementarse la ductilidad Q).
- Como un resultado lógico esperado, la energía disipada tiende a incrementarse al tomar en cuenta niveles más altos de excitación, o bien al incrementar el nivel de ductilidad.

5.3 MARCO DE CONCRETO REFORZADO DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD.

La metodología del CLE se aplicó al marco plano de concreto reforzado mostrado en la figura 5.3-1, de varios grados de libertad. Este marco se diseñó para cumplir con los requerimientos de solicitación sísmica establecidos por el US Uniform Building Code (versión 1973) y se han realizado varios análisis relacionados con su comportamiento, principalmente estudios de confiabilidad, por diferentes métodos e investigadores [11], que fué la fuente de información de los datos relacionados a la geometría y excitación del sistema estructural de la figura 5.3-1.

La excitación se representó por un ruido blanco filtrado de Kanai-Tajimi, tomando en cuenta diferentes intensidades para G_0 .

Las secciones de las vigas y columnas son de 12.0 x 20.0 plg y 12.0 x 18.0 plg respectivamente. En la estimación de la rigidez elástica efectiva se consideró el 45% en vigas y el 60% en columnas de la rigidez elástica.

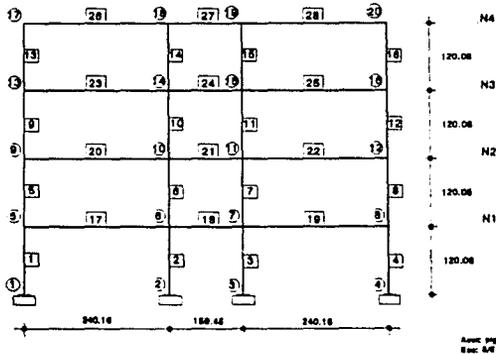


Fig. 5.3-1 Marco plano de concreto reforzado que ilustra la aplicación del CLE a sistemas de varios grados de libertad.

Los elementos estructurales son de sección constante, los cuales tienen las características dadas en la siguiente tabla.

Barras	E (Klb/plg ²)	I (plg ⁴)	M _y (Klb-plg)
1,4,13,16	3600.0	5832.0	2310.0
2,3,14,15	3600.0	5832.0	3919.0
5,8	3600.0	5832.0	2443.0
6,7	3600.0	5832.0	2977.0
9,12	3600.0	5832.0	1733.0
10,11	3600.0	5832.0	2666.0
17,19,20, 22,23,25	3600.0	8000.0	1200.0
18,21,24, 26,28	3600.0	8000.0	900.0
27	3600.0	8000.0	600.0

Tabla 5.3-1 Módulo de elasticidad (E), momento de inercia (I) y momento de fluencia (M_y) de los elementos estructurales del marco de la figura 5.3-1.

Los parámetros que intervienen en el modelo que reproduce el comportamiento no lineal de los elementos estructurales en las zonas de articulación plástica, se obtuvieron como se describió en el capítulo 3.

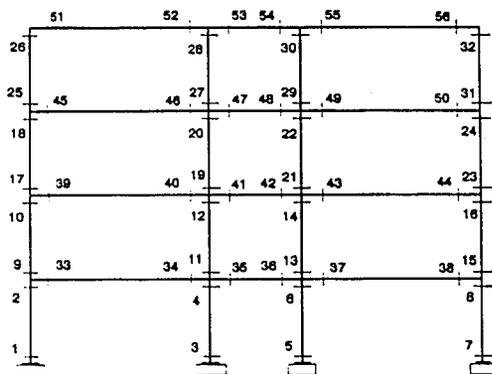


Fig. 5.3-2 Secciones potenciales de desarrollo de articulaciones plásticas.

Articulación Plástica	α_1 (Klb/rad)	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
1,2,7,8,25 26,31,32	2099500.0	0.0156	1.0	0.44735	0.44735	1.0
3,4,5,6,27 28,29,30	2099500.0	0.0156	1.0	0.26369	0.26369	1.0
9,10,15,16	2099500.0	0.0156	1.0	0.42299	0.42299	1.0
11,12,13,14	2099500.0	0.0156	1.0	0.34712	0.34712	1.0
17,18,23,24	2099500.0	0.0156	1.0	0.59629	0.59629	1.0
19,20,21,22	2099500.0	0.0156	1.0	0.38762	0.38762	1.0
33,34,37,38 39,40,43,44 45,46,49,50	2160000.0	0.0156	1.0	0.88596	0.88596	1.0
35,36,41 42,47,48 51,52,55,56	2160000.0	0.0156	1.0	1.18128	1.18128	1.0
53,54	2160000.0	0.0156	1.0	1.77192	1.77192	1.0

Tabla 5.3-2 Valores de los parámetros que intervienen en el modelo matemático de Y. K. Wen.

La masa en los diferentes niveles se consideró igual en cada nivel con el siguiente valor

$$m_{N4} = m_{N3} = m_{N2} = m_{N1} = 0.441 \frac{\text{Klb} \cdot \text{seg}^2}{\text{pie}}$$

La excitación se consideró a través de un ruido blanco filtrado con el modelo de Kanai-Tajimi, con parámetros

$$\omega_g = 15.6 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

$$\xi_g = 0.69$$

los cuales corresponden al mismo espectro de densidad de potencia empleado anteriormente. La amplitud G_0 del espectro, se calculó a partir de la siguiente expresión, la cual según la referencia [15] es aplicable a terrenos duros,

$$a_0 = 29 \sqrt{G_0} \quad (\text{en plg/seg}^2)$$

ésta relaciona la aceleración máxima del suelo a_0 con el parámetro G_0 . Se consideraron los siguientes valores para la aceleración máxima del suelo: 0.1 g, 0.2 g, 0.5 g y 1.0 g.

Los resultados de la última iteración son los que aparecen en las siguientes tablas.

NIVEL	ACELERACION MAXIMA DEL SUELO, a_0							
	0.1 g		0.2 g		0.5 g		1.0 g	
	σ_u^2 plg ²	$\frac{\sigma_u^2}{S_{\theta}^2}$ $\frac{p \theta^2}{S_{\theta}^2}$	σ_u^2 plg ²	$\frac{\sigma_u^2}{S_{\theta}^2}$ $\frac{p \theta^2}{S_{\theta}^2}$	σ_u^2 plg ²	$\frac{\sigma_u^2}{S_{\theta}^2}$ $\frac{p \theta^2}{S_{\theta}^2}$	σ_u^2 plg ²	$\frac{\sigma_u^2}{S_{\theta}^2}$ $\frac{p \theta^2}{S_{\theta}^2}$
1	0.043	1.33	0.109	3.19	0.595	9.91	2.759	41.94
2	0.242	7.10	0.618	16.41	3.513	48.99	16.454	213.15
3	0.519	14.92	1.311	33.71	7.332	96.20	34.158	418.01
4	0.731	21.36	1.818	48.38	9.683	134.37	44.865	574.56

Tabla 5.3-3 Variancias de la respuesta del marco de la figura 5.3-1 en cada uno de los niveles, para las diferentes intensidades de excitación.

ARTICULACION PLASTICA	ACELERACION MAXIMA DEL SUELO, a_0					
	0.1 g			0.2 g		
	σ_θ^2 ($\times 10^6$)	σ_θ^2 ($\times 10^6$)	$\sigma_{\theta z}^2$ ($\times 10^6$)	σ_θ^2 ($\times 10^6$)	σ_θ^2 ($\times 10^6$)	$\sigma_{\theta z}^2$ ($\times 10^6$)
1,7	0.154	2.798	0.049	0.796	7.998	0.228
2,8	0.012	0.452	0.002	0.041	1.328	0.010
3,5	0.168	3.358	0.039	0.758	8.465	0.152
4,6	0.044	1.296	0.009	0.127	3.069	0.026
9,15	0.023	0.625	0.005	0.087	1.743	0.021
10,16	0.030	0.707	0.006	0.119	1.940	0.025
11,13	0.085	2.148	0.028	0.250	4.648	0.085
12,14	0.092	2.196	0.028	0.296	4.902	0.091
17,23	0.007	0.399	0.002	0.023	1.265	0.009
18,24	0.027	0.599	0.006	0.117	1.616	0.028
19,21	0.038	1.359	0.012	0.102	3.417	0.039
20,22	0.063	1.669	0.019	0.230	4.224	0.074
25,31	0.001	0.135	0.000	0.003	0.478	0.001
26,32	0.007	0.325	0.001	0.026	0.973	0.005
27,29	0.009	0.618	0.001	0.024	1.916	0.006
28,30	0.023	1.051	0.004	0.074	3.107	0.018

Tabla 5.3-4 Variancias de la respuesta de las articulaciones plásticas en las columnas del marco de la figura 5.3-1, para las intensidades de excitación correspondientes a las aceleraciones pico del suelo de 0.1 g y 0.2 g.

ARTICULACION PLASTICA	ACELERACION MAXIMA DEL SUELO, a_g					
	0.1 g			0.2 g		
	σ_g^2 ($\times 10^6$)	σ_b^2 ($\times 10^6$)	σ_{bz}^2 ($\times 10^6$)	σ_g^2 ($\times 10^6$)	σ_b^2 ($\times 10^6$)	σ_{bz}^2 ($\times 10^6$)
33,38	0.137	2.123	0.067	1.079	9.660	0.516
34,37	0.097	1.527	0.042	0.732	6.098	0.302
35,36	0.174	3.340	0.152	2.564	44.986	1.620
39,44	0.116	1.923	0.057	0.874	8.144	0.418
40,43	0.082	1.439	0.038	0.599	5.574	0.265
41,42	0.154	3.225	0.144	2.197	41.650	1.546
45,50	0.043	1.055	0.019	0.234	3.431	0.095
46,49	0.032	0.817	0.013	0.172	2.552	0.063
47,48	0.055	1.558	0.043	0.328	6.617	0.275
51,56	0.011	0.341	0.003	0.059	1.105	0.016
52,55	0.007	0.230	0.002	0.036	0.727	0.009
53,54	0.010	0.346	0.005	0.050	1.210	0.028

Tabla 5.3-5 Variancias de la respuesta de las articulaciones plásticas en las vigas del marco de la figura 5.3-1, para las intensidades de excitación correspondientes a las aceleraciones pico del suelo de 0.1 g y 0.2 g.

ARTICULACION PLASTICA	ACELERACION MAXIMA DEL SUELO, a_0					
	0.5 g			1.0 g		
	σ_0^2 ($\times 10^6$)	σ_b^2 ($\times 10^6$)	σ_{bz}^2 ($\times 10^6$)	σ_0^2 ($\times 10^6$)	σ_b^2 ($\times 10^6$)	σ_{bz}^2 ($\times 10^6$)
1,7	13.918	47.734	2.374	66.842	235.35	11.161
2,8	0.353	5.955	0.051	1.745	23.751	0.212
3,5	10.571	31.999	1.206	52.327	144.36	6.423
4,6	0.889	10.133	0.082	4.576	36.671	0.335
9,15	0.632	5.122	0.092	3.726	23.501	0.576
10,16	0.968	6.237	0.119	5.548	28.650	0.744
11,13	1.600	9.950	0.264	9.452	41.760	1.508
12,14	2.259	12.945	0.342	12.992	55.073	1.879
17,23	0.134	4.420	0.035	0.705	18.850	0.183
18,24	1.559	6.940	0.287	8.338	33.891	1.654
19,21	0.558	8.775	0.102	2.987	32.885	0.458
20,22	2.182	13.289	0.436	11.870	59.220	2.451
25,31	0.022	2.062	0.005	0.095	7.732	0.022
26,32	0.207	3.674	0.034	1.057	14.744	0.194
27,29	0.086	6.584	0.024	0.374	23.814	0.110
28,30	0.486	11.052	0.099	2.409	43.178	0.518

Tabla 5.3-6 Variancias de la respuesta de las articulaciones plásticas en las columnas del marco de la figura 5.3-1, para las intensidades de excitación correspondientes a las aceleraciones pico del suelo de 0.5 g y 1.0 g.

ARTICULACION PLASTICA	ACELERACION MAXIMA DEL SUELO, a_0					
	0.5 g			1.0 g		
	σ_θ^2 ($\times 10^6$)	σ_θ^2 ($\times 10^6$)	$\sigma_{\theta z}^2$ ($\times 10^6$)	σ_θ^2 ($\times 10^6$)	σ_θ^2 ($\times 10^6$)	$\sigma_{\theta z}^2$ ($\times 10^6$)
33,38	46.664	447.20	7.309	228.49	2302.9	29.162
34,37	34.232	260.64	5.689	150.56	1162.1	23.274
35,36	45.794	475.01	5.686	219.86	2504.3	15.901
39,44	45.184	467.59	7.631	210.41	2172.2	31.024
40,43	31.928	272.34	5.912	135.38	1130.2	24.149
41,42	43.052	505.22	5.934	203.67	2565.7	16.471
45,50	6.533	37.974	1.579	28.242	172.52	6.730
46,49	4.699	23.458	1.058	20.481	109.29	4.755
47,48	9.956	122.66	2.710	46.041	619.61	10.216
51,56	1.173	5.757	0.155	5.645	27.076	0.819
52,55	0.694	3.394	0.079	3.490	15.508	0.447
53,54	1.095	8.576	0.268	5.485	45.904	1.289

Tabla 5.3-7 Variancias de la respuesta de las articulaciones plásticas en las vigas del marco de la figura 5.3-1, para las intensidades de excitación correspondientes a las aceleraciones pico del suelo de 0.5 g y 1.0 g.

ARTICULACION PLASTICA	ACELERACION MAXIMA DEL SUELO, a_0			
	0.1 g	0.2 g	0.5 g	1.0 g
1,7	0.8971	0.8296	0.6437	0.5751
2,8	0.9646	0.9451	0.9101	0.8753
3,5	0.9328	0.8944	0.7855	0.7382
4,6	0.9601	0.9431	0.9209	0.8790
9,15	0.9551	0.9267	0.8762	0.8243
10,16	0.9518	0.9213	0.8638	0.8093
11,13	0.9276	0.8941	0.8406	0.7634
12,14	0.9269	0.8919	0.8293	0.7554
17,23	0.9610	0.9382	0.9036	0.8587
18,24	0.9366	0.8970	0.7715	0.7290
19,21	0.9435	0.9178	0.8884	0.8254
20,22	0.9317	0.8938	0.8041	0.7447
25,31	0.9901	0.9836	0.9661	0.9608
26,32	0.9722	0.9565	0.9183	0.8945
27,29	0.9801	0.9693	0.9527	0.9321
28,30	0.9702	0.9536	0.9182	0.8913

Tabla 5.3-8 Coeficientes de linealización C_l para las secciones en los extremos de las columnas del marco en estudio, para las intensidades de excitación correspondientes a las aceleraciones pico del suelo de 0.1 g, 0.2 g, 0.5 g y 1.0 g.

ARTICULACION PLASTICA	ACELERACION MAXIMA DEL SUELO, a_0			
	0.1 g	0.2 g	0.5 g	1.0 g
33,38	0.8194	0.6564	0.4555	0.2443
34,37	0.8449	0.7057	0.4471	0.2899
35,36	0.7195	0.5090	0.4854	0.2264
39,44	0.8287	0.6773	0.4406	0.2532
40,43	0.8503	0.7184	0.4377	0.2974
41,42	0.7246	0.5113	0.4798	0.2247
45,50	0.8863	0.8079	0.5635	0.5028
46,49	0.8994	0.8321	0.6016	0.5539
47,48	0.8194	0.6808	0.4908	0.3178
51,56	0.9252	0.8785	0.7499	0.6901
52,55	0.9380	0.9001	0.7961	0.7439
53,54	0.8861	0.8100	0.6312	0.5297

Tabla 5.3-9 Coeficientes de linealización C_i para las secciones en los extremos de las vigas del marco en estudio, para las intensidades de excitación correspondientes a las aceleraciones pico del suelo de 0.1 g, 0.2 g, 0.5 g y 1.0 g.

ARTICULACION PLASTICA	ACELERACION MAXIMA DEL SUELO, α_0			
	0.1 g	0.2 g	0.5 g	1.0 g
1,7	-0.6630	-1.2416	-3.8276	-3.8289
2,8	-0.2492	-0.4388	-0.9641	-1.2195
3,5	-0.4138	-0.6985	-1.6032	-1.8954
4,6	-0.2505	-0.3982	-0.7547	-1.0030
9,15	-0.2799	-0.4854	-0.9647	-1.3392
10,16	-0.2988	-0.5158	-1.0665	-1.4343
11,13	-0.4391	-0.6890	-1.1998	-1.7344
12,14	-0.4441	-0.7078	-1.3426	-1.8229
17,23	-0.3123	-0.5743	-1.1822	-1.5856
18,24	-0.3937	-0.6847	-1.6926	-2.0611
19,21	-0.3828	-0.6357	-1.1346	-1.5849
20,22	-0.4294	-0.7252	-1.5257	-1.9513
25,31	-0.1321	-0.2514	-0.5363	-0.7144
26,32	-0.2095	-0.3712	-0.7730	-1.0273
27,29	-0.1686	-0.3020	-0.5865	-0.7706
28,30	-0.2223	-0.3921	-0.7938	-1.0126

Tabla 5.3-10 Coeficientes de linealización H_i para las secciones en los extremos de las columnas del marco en estudio, para las intensidades de excitación correspondientes a las aceleraciones pico del suelo de 0.1 g, 0.2 g, 0.5 g y 1.0 g.

ARTICULACION PLASTICA	ACELERACION MAXIMA DEL SUELO, a_0			
	0.1 g	0.2 g	0.5 g	1.0 g
33,38	-1.2325	-3.3169	-26.418	-17.219
34,37	-1.0204	-2.4679	-18.733	-12.055
35,36	-2.2479	-11.1821	-39.251	-33.873
39,44	-1.1624	-2.9755	-25.589	-15.671
40,43	-0.9854	-2.3244	-18.432	-11.465
41,42	-2.2001	-10.6707	-39.726	-33.532
45,50	-0.8134	-1.6501	-6.6057	-5.8150
46,49	-0.7070	-1.3817	-5.0457	-4.7391
47,48	-1.4055	-3.6006	-18.242	-14.544
51,56	-0.5924	-1.1416	-3.0608	-3.5953
52,55	-0.4810	-0.9028	-2.2432	-2.8219
53,54	-0.9306	-1.9476	-6.4242	-6.9119

Tabla 5.3-11 Coeficientes de linealización H_i para las secciones en los extremos de las vigas del marco en estudio, para las intensidades de excitación correspondientes a las aceleraciones pico del suelo de 0.1 g, 0.2 g, 0.5 g y 1.0 g.

Se hacen las siguientes observaciones a partir de los resultados obtenidos sobre el sistema estructural de la figura 5.3-1:

a) Para cada uno de los niveles de excitación aplicados al sistema estructural, también son aplicables las observaciones que se hicieron para el caso del sistema de un grado de libertad, con la diferencia que por ser un sistema más complejo, el número de iteraciones realizadas resultó mayor. Se tomó en cuenta el mismo valor de 0.01 para la tolerancia en la convergencia.

b) Los valores para σ_u^2 y σ_v^2 , para los cuatro niveles de entrepiso del sistema estructural, son mayores a medida que el nivel de excitación es más alto.

c) Los valores para σ_θ^2 y σ_ψ^2 , correspondientes a la variancia de la respuesta en la rotación de las secciones con articulación plástica de la figura 5.3-2, se van incrementando a medida que el nivel de excitación es más alto.

d) Los coeficientes de linealización C_i tienden a disminuir de valor al incrementarse el nivel de excitación, mientras que los coeficientes H_i tienden a ser más chicos (valores negativos mayores).

e) Los resultados obtenidos para el sistema de varios grados de libertad, son congruentes con los que se obtienen en sistemas de un grado de libertad.

f) El tiempo de cómputo empleado en el análisis del marco correspondió a tres minutos en realizar diez iteraciones en promedio, para cada nivel de excitación, requiriéndose además, 900 kb de memoria disponible en disco.

5.4 ESTUDIO PARAMETRICO DE MARCO PLANO DE CONCRETO REFORZADO CON MASA RESONANTE.

Los osciladores de masa resonante son sistemas amortiguadores que se agregan a los sistemas estructurales y tienen como finalidad contrarrestar el movimiento del sistema estructural. Este sistema amortiguador es del tipo pasivo, ya que no cuenta con una fuente de energía que le permita desarrollar su función en forma activa. Básicamente se define por una masa unida a la estructura por medio de un resorte y un elemento amortiguador; parámetros estructurales que definen la efectividad de su uso. El uso de los osciladores de masa resonante se ha llevado a la práctica real con la finalidad de reducir los niveles de respuesta ante solicitaciones de viento, lográndose muy buenos resultados [3]; sin embargo, en cuanto a su aplicación en el campo de las solicitaciones sísmicas, los resultados no han sido comprobados totalmente.

El análisis paramétrico realizado en esta tesis consiste en comparar los resultados estadísticos obtenidos de una serie de análisis deterministas para un conjunto de acelerogramas simulados a partir del registro del sismo de 1985 en la estación SCT en el valle de México [7], con los resultados obtenidos al aplicar el CLE. Se varían los parámetros que definen el comportamiento dinámico tanto del sistema estructural como del oscilador de masa resonante.

El sistema estructural principal que se utilizó en este estudio paramétrico es un marco simple de concreto reforzado como el mostrado en la figura 5.4-1. Este es equivalente a un marco con características geométricas distintas y de varios niveles (ver figura 5.2-2). A este se añade un oscilador resonante en su parte superior.

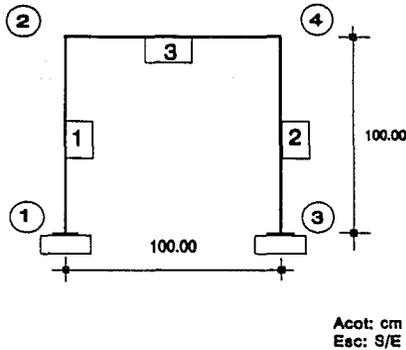


Fig. 5.4-1 Marco simple de concreto utilizado en el estudio paramétrico.

El análisis determinista para cada uno de los registros simulados se realizó tomando en cuenta un comportamiento lineal del sistema estructural, mientras que el análisis con el CLE se realizó (por las características inherentes del modelo matemático de Y. K. Wen) tomando en cuenta un comportamiento débilmente no_lineal. Para que el efecto del oscilador de masa resonante sobre el sistema estructural fuera el mismo en los dos tipos de análisis fué necesario establecer el periodo equivalente del sistema estructural con comportamiento no_lineal.

Con el fin de estimar el periodo equivalente del sistema estructural, cuando se considera que este tiene un comportamiento débilmente no_lineal, se aplicó el CLE en el que la excitación se consideró como un ruido blanco filtrado de acuerdo con el modelo de Kanai-Tajimi. Para reproducir la excitación correspondiente a una armónica simple se realizó un barrido de frecuencias del filtro, manteniendo constantes el nivel de amortiguamiento crítico del filtro ($\xi_g = 0.01$) y el nivel de amplitud de la excitación ($G_0 = \frac{30}{2\pi} \frac{cm^2}{Seg^2}$), lo cual es similar en un análisis determinista, a excitar un sistema estructural con una serie de armónicas simples (cada una con una frecuencia diferente pero de magnitud constante entre sí, y observar con cual de ellas se logra el efecto de resonancia).

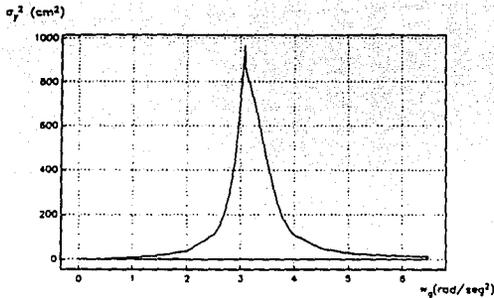


Fig. 5.4-2 Respuesta del marco de la figura 5.4-1 al barrer la frecuencia de excitación en la base.

En la figura 5.4-2 se muestran los resultados obtenidos al aplicar el procedimiento descrito anteriormente, a un sistema estructural que tiene un periodo de 1.8 seg si se considera con comportamiento lineal. En esta gráfica se observa que el sistema entra en resonancia cuando la excitación en la base tiene una frecuencia igual a 3.08 rad/seg, lo cual indica que el efecto no_lineal en el comportamiento del sistema, provoca que se alargue el periodo de 1.8 seg a 2.04 seg. Dicho alargamiento ocurre en diferentes sistemas estructurales lineales de un grado de libertad con periodo comprendido en el rango de 1.5 seg a 2.4 seg.

Una vez identificado el periodo del sistema estructural equivalente se adicionó el oscilador de masa resonante a este sistema, como se indica en las figuras 5.4-3 y 5.4-4.

Las características geométricas que definen los parámetros dinámicos del marco con masa resonante son tales que conducen a un comportamiento de viga de cortante. Se emplea una relación de masas, dada por

$$\frac{m_{OMR}}{M_1^*} = 0.03 \quad (5.4.1)$$

en donde m_{OMR} es la masa del oscilador resonante y M_1^* la masa del sistema principal.

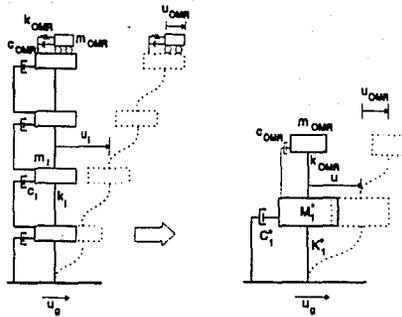


Fig. 5.4-3 Sistema de varios grados de libertad con oscilador de masa resonante acoplado, idealizado como un sistema de dos grados de libertad.

De acuerdo con estudios de la relación de frecuencias óptima, realizados por Den Hartog [33], se establece que

$$T_{OMR} = 1.03 T_1 \quad (5.4.2)$$

Esta expresión indica que el oscilador de masa resonante debe tener un periodo T_{OMR} , tres por ciento mayor que el periodo T_1 del sistema estructural principal, para que la reducción de la respuesta sea mayor.

Tomando en cuenta lo anterior se realizó un estudio comparativo de algunos de los parámetros estadísticos de la respuesta, obtenidos con el criterio CLE y con simulación de Monte Carlo. Se usaron acelerogramas simulados a partir del registro del sismo de 1985 en el Valle de México, en la estación SCT [7]. Usando estos acelerogramas simulados se obtuvo la media y la desviación estándar de la respuesta máxima, tanto del sistema estructural equivalente como del sistema estructural acoplado de dos grados de libertad. En el primer caso (CLE) se obtuvo la desviación estándar de la respuesta del sistema estructural en las dos modalidades: con y sin el oscilador de masa resonante acoplado. Dichos resultados se obtuvieron para diferentes sistemas estructurales con periodos comprendidos entre 1.5 seg y 2.4 seg. Estos se presentan en la gráfica de la figura 5.4-5, en donde el eje de las

ordenadas corresponde al cociente del valor del desplazamiento máximo del sistema estructural con el oscilador de masa resonante, dividido entre el valor de la respuesta del sistema estructural equivalente (sin el oscilador de masa resonante). En las abscisas se presentan los periodos T_1 de los sistemas estructurales considerados.

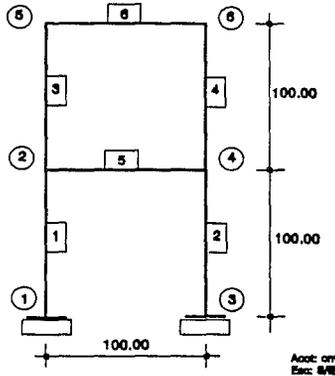


Fig. 5.4-4 Marco plano equivalente con oscilador de masa resonante acoplado.

En la gráfica de la figura 5.4-5 se verifica que el uso eficiente de los osciladores de masa resonante se logra cuando se está muy cerca de la condición de resonancia, pues la máxima disminución de la respuesta ocurre muy cerca del periodo dominante de la excitación (2.0 seg).

Con la finalidad de verificar que el uso eficiente de los osciladores de masa resonante se obtiene cuando se cumple la relación (5.4.2), se consideró el sistema estructural equivalente con periodo de 2.1 seg (en donde ocurre la máxima disminución de la respuesta obtenida con los acelerogramas simulados). Se llevó a cabo un barrido de periodos del oscilador de masa resonante, en un rango en el que quedara comprendida la relación (5.4.2), este rango se consideró dentro de los siguientes límites

$$0.85 \leq \frac{T_{OMR}}{T_1} \leq 1.15 \quad (5.4.3)$$

Se obtiene así la gráfica de la figura 5.4-6. En donde T_{OMR} es el periodo del oscilador de masa resonante y T_1 el del marco principal equivalente.

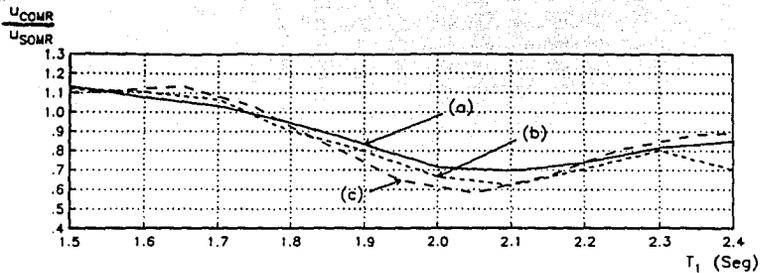


Fig. 5.4-5 Variación del cociente de respuestas del sistema estructural con (COMR) y sin (SOMR) oscilador de masa resonante, para diferentes periodos. Se mantienen constantes las relaciones (5.4.1) y (5.4.2). (a) cociente calculado a partir de las medias de los desplazamientos máximos laterales en el primer nivel obtenidos por simulación. (b) cociente calculado a partir de las desviaciones estándar de las respuestas obtenidas por simulación. (c) cociente calculado a partir de las desviaciones estándar de las respuestas obtenidas con el CLE.

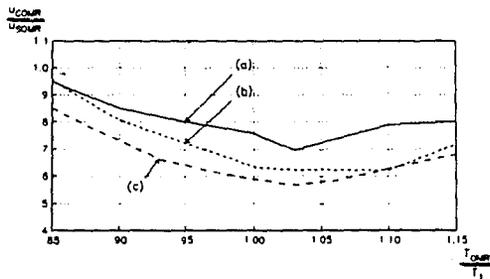


Fig. 5.4-6 Variación del cociente de respuesta del sistema estructural para diferentes relaciones de periodos $\frac{T_{COMR}}{T_1}$, manteniendo constante la relación (5.4.1). (a) cociente calculado a partir de las medias de los desplazamientos máximos laterales obtenidos por simulación. (b) cociente calculado a partir de las desviaciones estándar de las respuestas obtenidas por simulación. (c) cociente calculado a partir de las desviaciones estándar de las respuestas obtenidas con el CLE.

De acuerdo con los resultados que se muestran en las figuras 5.4-5 y 5.4-6 se hacen las siguientes observaciones:

a) El efecto que tienen los osciladores de masa resonante en la respuesta de los sistemas estructurales principales, en términos generales es el mismo cuando se consideran comportamiento lineal y débilmente no_lineal, puesto que la curva correspondiente a los resultados de la aplicación del CLE (en el que se considera en este caso particular, comportamiento débilmente no_lineal) presenta una tendencia de variación similar a las curvas correspondientes a los resultados obtenidos por simulación (en donde se considera comportamiento lineal).

b) La diferencia entre las curvas obtenidas por simulación, con respecto a las curvas obtenidas por la aplicación del CLE, se debe principalmente a dos razones:

1. La cantidad de registros utilizados por simulación es pequeña (se utilizaron trece registros simulados).

2. Existe una diferencia en cuanto al área delimitada por el espectro de densidad de potencia del modelo de excitación utilizado en la aplicación del CLE, con respecto al área delimitada por el espectro que se obtiene a partir de los registros simulados.

c) A partir de la gráfica en la figura 5.4-6 se verifica que el uso más eficiente se obtiene cuando se cumple la relación dada por la expresión (5.4.2), pues a medida que esta relación se aleja del tres por ciento, el efecto de disminución de la respuesta del sistema estructural principal, tiende a disminuir, dentro del rango establecido en (5.4.3).

d) La herramienta desarrollada en esta tesis, que utiliza el CLE puede utilizarse para continuar haciendo estudios paramétricos sobre la respuesta de estructuras con osciladores resonantes. Para niveles de no_linealidad alta los resultados deben compararse con los obtenidos con el método de simulación de Monte Carlo.

CONCLUSIONES

Con base en los conceptos manejados en torno al desarrollo presente del tema de tesis y tomando en consideración los resultados obtenidos de las aplicaciones del CLE presentadas, se generan las siguientes conclusiones

- 1) El CLE es versátil en cuanto a que pueden realizarse estudios paramétricos de sistemas no_lineales de varios grados de libertad ante procesos estocásticos.
- 2) La aplicación del CLE se limita a sistemas estructurales con comportamiento no_lineal, pues al tratar de tomar en cuenta el comportamiento lineal presenta problemas numéricos en la realización del proceso iterativo de solución de la ecuación de Liapunov (4.1.51) mediante el uso del algoritmo de Bartels y Stewart.
- 3) Los resultados que se obtienen al tomar en cuenta un comportamiento débilmente no_lineal al aplicar el CLE, en un marco estructural ante el sismo de banda estrecha, son muy aproximados a los que se obtienen del análisis lineal por simulación.
- 4) El filtrado de la señal mediante el uso de modelos como el de Kanai-Tajimi, utilizado en los ejemplos de esta tesis reproduce con bastante aproximación los espectros de densidad de potencia del movimiento de suelos blandos como el de la Ciudad de México.

Existe un campo todavía muy amplio por estudiar, como por ejemplo considerar procesos no_estacionarios en los modelos de excitación, o bien desarrollar el análisis de sistemas estructurales tridimensionales en donde se tomara en cuenta la influencia de las deformaciones geométricas de los elementos estructurales. Sería de gran utilidad incorporar algunos de estos aspectos a la metodología del CLE, puesto que los sistemas estructurales y la excitación se reproducirían en una forma más cercana a la real.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1] Casciati, F., 1993. Comunicación directa.
- [2] Casciati, F. and Faravelli, L., 1991. *Fragility Analysis of Complex Structural Systems*. Research Studies Press Ltd.
- [3] López C., R., 1991. Tesis: *Análisis paramétrico de edificios con control pasivo de masas sujetas a excitaciones sísmicas*. Escuela Militar de Ingenieros.
- [4] Roberts, J. B. and Spanos, P. D., 1990. *Random Vibration and Statistical Linearization*. John Wiley & Sons.
- [5] Press, William H., Flannery, Brian P., Teukolsky, Saul A. and Vetterling, Williams T., 1989. *Numerical Recipes. The art of scientific computing*. Cambridge University Press.
- [6] Branstetter, L. J., Jeong, G. D., Yao, J. T. P., Wen, Y. K. and Lin, Y. K., 1988. *Mathematical modelling of structural behaviour during earthquakes*. Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 3, No. 3.
- [7] Grigoriu, M., Ruiz, S. and Rosenblueth, E., 1988. *Nonstationary models of seismic ground acceleration*. Earthquake Spectra, Vol. 4, No. 3.
- [8] Lin, Y. K., Kozin, F., Wen, Y. K., Casciati, F., Schueller, G. I., Der Kiureghian, A., Ditlevsen, O. and Vanmarcke, E. H., 1986. *Methods of Stochastic Structural Dynamics*. Structural Safety, 3, 167-194.
- [9] Stark, H. and Woods, J. W., 1986. *Probability, Random Processes, and Estimation Theory for Engineers*. Prentice Hall.
- [10] Casciati, F. and Faravelli, L., 1985a. *Reliability Assessment for Non-Linear Random Frames*. Eggwertz S. and Lin N. C. (eds.), Probabilistic Methods in the Mechanics of Solid and Structures, Springer-Verlag, Berlin, 467-478.
- [11] Casciati, F. and Faravelli, L., 1985. *Methods of Non-Linear Stochastic Dynamics for the Assessment of Structural Fragility*. Nuclear Eng. & Design, 90, 341-356.

- [12] Ang, A. H-S. and Tang, W. H., 1984. *Probability Concepts in Engineering Planning and Design. Vol. II. Decision, Risk, and Reliability.* John Wiley & Sons.
- [13] Auvinet, G., 1984. Apuntes del curso: *Procesos Estocásticos.* División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, U. N. A. M.
- [14] Augusti, G., Baratta A. and Casciati, F., 1984. *Probabilistic Methods in Structural Engineering.* Chapman and Hall.
- [15] Sues, R. H., Wen, Y. K. and Ang, A. S. H., 1983. *Stochastic seismic performance evaluation of buildings.* UILU-ENG-83-2008, SRS N.506, University of Illinois.
- [16] Roberts, J. B., 1981. *Response of Nonlinear Mechanical Systems to Random Excitation: Part 1: Markov Methods.* The shock and Vibration Digest, 13(4), 17-28.
- [17] Wen, Y. K., 1980. *Equivalent Linearization for Hysteretic Systems Under Random Excitation.* Journal of Applied Mechanics, Vol. 47, 150-154.
- [18] Atalik, T. S. and Utku, S., 1976. *Stochastic Linearization of Multi-Degree-Of-Freedom Non-Linear Systems.* Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 4, 411-420.
- [19] Vanmarcke, E. H., 1976. *Seismic Risk and Engineering Decisions.* Lomnitz, C. and Rosenblueth E., Eds., Elsevier Scientific Publishing Company, cap. 8, 287-337.
- [20] Ang, A. H-S. and Tang, W. H., 1975. *Probability Concepts in Engineering Planning and Design. Vol. I. Basic Principles.* John Wiley & Sons.
- [21] Clough, R. and Penzien, J., 1975. *Dynamics of Structures.* Mc Graw-Hill.
- [22] Park, R. and Paulay, T., 1975. *Reinforced Concrete Structures.* John Wiley & Sons.

- [23] Arnold, L., 1974. *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. John Wiley & Sons.
- [24] Hsu, H. P., 1973. *Andlisis de Fourier*. Fondo Cultural Interamericano, S. A., cap. 4, 71-101.
- [25] Bartels, R. H. and Stewart, G. W., 1972. *Algorithm 432. Solution of the matrix Equation $AX + XB = C$* . Comm. ACM 15, 9, 820-826.
- [26] Benjamin, J. R. and Cornell, C. A., 1970. *Probability, Statistics, and Decision for Civil Engineers*. Mc Graw-Hill.
- [27] Lin, Y. K., 1967. *Probabilistic Theory of Structural Dynamics*. Mc Graw-Hill.
- [28] Papoulis, A., 1965. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. Mc Graw-Hill.
- [29] Crandall, S. H., 1963. *Perturbation Tecniques for Random Vibration of Nonlinear Systems*. Journal of Acoustical Society of America, 35(11), 1700-1705.
- [30] Kanai, K., 1961. *An Empirical Formula for tha Spectrum of Strong Earthquake Motions*. Bull. Earthquake Research Inst., Univ. of Tokyo, Japan, 39.
- [31] Tajimi, H., 1960. *A Statistical Method of Determining the Maximum Response of a Building Structure During an Earthquake*. Proc. 2nd World Conf. Earthquake Engng., Vol. II, Tokyo and Kyoto, Japan, 781-798.
- [32] Crandall, S. H., 1958. *Random Vibration*. Massachusetts Institute of Technology.
- [33] Den Hartog, J. P., 1947. *Machanical Vibrations*. Mc Graw-Hill.
- [34] Krylov, N. and Bogoliubov, N., 1947. *Introduction á la mécanique non-lineaire: les méthodes approchées et asymptotiques*. Ukr. akad, nauk. Inst. de la mécanique, Chaire de Phys. Math. Ann., t. 1-2, 1937; translated by S. Lefshetz in *Annal of Mathematical Studies*, No. 11, Princeton University, Princeton, N. J.