



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

ALGUNOS ASPECTOS DE VORTICES Y SOLITONES EN TEORIA DE CAMPO

T E S I S

PARA OBTENER EL TITULO DE: DOCTOR EN CIENCIAS (FISICA) PRESENTA: JOAQUIN ESCALONA SEGURA

DIRECTORES DE TESIS:

DR: MANUEL TORRES LABANSAT DR: ARMANDO ANTILLON DIAZ

MEXICO, D. F.

OCTUBRE DE 1993

TESIS CON FALLA DE ORIGEN



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ALGUNOS ASPECTOS DE VÓRTICES Y SOLITONES  
EN TEORÍA DE CAMPO.

Tesis doctoral. Resumen.  
M.en C. Joaquín Escalona Segura

En esta tesis se abordan tres problemas asociados al estudio de solitones en dos dimensiones del espacio-tiempo y de vórtices (solitones en dos dimensiones especiales).

1) Radiación de Color.

Se estudia el problema de la radiación de energía y de color, producidas por una carga puntual no-Abeliana en movimiento. Se encontraron dos posibles soluciones a las ecuaciones de Yang-Mills asociadas. En un caso se tiene un grupo de simetría  $SU(n)$ , no produciéndose radiación de energía como resultado de la dinámica interna. Para la segunda solución encontrada, existe una relación entre los grados de libertad del espacio interno y los grados de libertad de la partícula en el espacio de Minkowski. Esta relación implica una transferencia de energía, debida a la evolución en el tiempo del espacio interno. Discutimos en los dos casos el problema de la radiación de color.

2) Sistemas Multisolitónicos.

A partir de teorías en una dimensión espacial y una temporal, cuyas ecuaciones de movimiento contienen soluciones tipo solitón, estudiamos el comportamiento de un sistema de varios solitones, modelando las interacciones por medio de fluctuaciones alrededor de soluciones clásicas. Se obtienen las ecuaciones de movimiento para el sistema multisolitónico y la fluctuación asociada. Realizamos un análisis de las soluciones a las ecuaciones.

3) Vórtices.

Se estudio un modelo relativista generalizado del propuesto por Nielsen-Olesen el cual sirve para explicar el fenómeno de la superconductividad. Este modelo contiene un término Chern-Simons y un acoplamiento a través de la derivada covariante al momento magnético anómalo. Se analizaron las consecuencias dinámicas del sistema en dos posibles fases de simetría. Se obtuvieron las soluciones numéricas en cada caso junto con las cantidades dinámicas del sistema.

A T E N T A M E N T E

Vo. Bo.



---

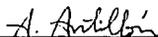
M.en C. Joaquín Escalona Segura  
Tesisista.



---

Dr. Manuel Torres Lapansat  
Asesor de tesis.

Vo. Bo.



---

Dr. Armando Antillón Díaz  
Coasesor de tesis.

A la Dra. Ana Ma. Cetto y autoridades del IFUNAM que apoyaron mi estancia en el Instituto.

Al M. en C. Gerardo Avila, Cesar, Rafael, Javier y personal de la Dirección de Investigación y Posgrado de la UAEM, gracias por su apoyo y amistad.

Al Dr. Iván Ortega, por su continuo estímulo para finalizar este trabajo.

A los Dres. Luis Mochán y Gabriel Germán por su continuo interés.

Al M. en C. (pronto Dr.) Jorge Hernández por su valiosa ayuda en la revisión de algunos de los programas de análisis numérico.

A Guillermo Hinojosa y amigos del Laboratorio de Cuernavaca del IFUNAM por su apoyo y amistad.

A mis amigos de la Fac. de Ciencias de la UAEM: Reyes y Oscar, quienes simplificaron mi vida en diversas ocasiones. Por supuesto GRACIAS A HUGO por su amistad y valiosa ayuda.

Al M. en C. Federico Vázquez y Dr. Manuel López de Haro por su amistad y apoyo.

A Carmen, Obdulia, Marco y Luis Francisco por su interés y amistad.

Dos personas muy significativas contribuyeron a esta tesis. Visto de cierta forma gracias a Teresita de Jesús comencé y gracias a Claudia Angélica he finalizado.

**ALGUNOS ASPECTOS DE VORTICES Y SOLITONES  
EN TEORIA DE CAMPO.**

**INDICE.**

|   |    |
|---|----|
| 1. INTRODUCCION. . . . .  | 1  |
| 2. TOPICOS DE TEORIA DE CAMPO Y FISICA EN 2 DIMENSIONES. . . . .      | 5  |
| • Teoría de norma y ruptura espontánea de la simetría. . . . .        | 5  |
| – Teoría de campo y simetrías. . . . .                                | 5  |
| – Teoría de norma. . . . .  | 7  |
| – Rompimiento espontáneo de la simetría. . . . .                      | 11 |
| • Solitones en la teoría de campo. . . . .                            | 15 |
| – El concepto de solitón. . . . .                                     | 15 |
| – Clasificación topológica de los solitones. . . . .                  | 16 |
| – Carga topológica. . . . .   | 17 |
| • Física en (2+1) dimensiones. Aniones. . . . .                       | 21 |
| • Referencias. . . . .  | 25 |
| 3. RADIACION PRODUCIDA POR UNA CARGA INTERNA. . . . .                 | 26 |
| • Ecuaciones de Yang-Mills y cargas internas. . . . .                 | 28 |
| • Transformaciones de Neuman-Unti. . . . .                            | 32 |
| • Potenciales de Liénard-Wiechert para una carga no Abeliانا. . . . . | 35 |
| • Conclusiones. . . . .   | 41 |
| • Referencias. . . . .  | 42 |

|   |     |
|---|-----|
| 4. SISTEMAS MULTISOLITONICOS EN (1+1) DIMENSIONES. . . . .        | 43  |
| • Soluciones estáticas tipo solitón en (1+1) dimensiones. . . . . | 44  |
| • Solitón en un campo externo. . . . .                            | 48  |
| • Ecuaciones de movimiento para un sistema de solitones. . . . .  | 55  |
| – Potenciales de interacción para dos solitones. . . . .          | 58  |
| • Conclusiones. . . . .   | 64  |
| • Referencias. . . . .  | 66  |
| 5. VORTICES DE CHERN-SIMONS CON MOMENTO MAGNETICO                 |     |
| ANOMALO. . . . .  | 67  |
| • Presentación del Modelo. . . . .                                | 70  |
| • Modos de propagación de los campos. . . . .                     | 78  |
| • Simetrías y leyes de conservación. . . . .                      | 81  |
| • Soluciones tipo vórtice a las ecuaciones de campo. . . . .      | 86  |
| – Ansatz y ecuaciones de campo. . . . .                           | 86  |
| – Límite puro de Chern-Simons. . . . .                            | 89  |
| – Vórtices en la fase rota. . . . .                               | 90  |
| – Cantidades cuantizadas en la fase rota. . . . .                 | 92  |
| – Vórtices en la fase rota. Análisis numérico. . . . .            | 96  |
| – Límite de Bogomol'nyi en la fase simétrica. . . . .             | 102 |
| • Conclusiones. . . . .   | 108 |
| • Referencias. . . . .  | 111 |

## INTRODUCCION.

A partir de las ideas generadas por Isaac Newton, tanto en las matemáticas como en la física, los científicos comienzan a valerse de las ecuaciones diferenciales lineales para describir diversos fenómenos como son la trayectoria seguida por una bala de cañón, el crecimiento de una planta, la combustión del carbón y el desempeño de una máquina. En todos estos fenómenos, pequeños cambios producen pequeños efectos, y los grandes efectos pueden ser obtenidos a partir de la suma de muchos cambios pequeños.

En este marco conceptual, se desarrolló la física del siglo pasado. Sin embargo, existe otro tipo de ecuaciones muy diferentes, las cuales eran conocidas vagamente en el siglo diecinueve; nos referimos a las ecuaciones no lineales. El manejo de estas ecuaciones exige técnicas matemáticas y formas de intuición con las que no se contaron sino hasta el presente siglo.

El mundo físico está plagado de un sin número de fenómenos de carácter no lineal. Al ser perturbado un sistema, la no linealidad de su respuesta se puede hacer patente cuando ésta no es proporcional a la interacción ejercida. En términos de las ecuaciones no lineales, un pequeño cambio en algún parámetro puede producir un efecto desproporcionado y aún catastrófico en otras variables.

Un ejemplo de teorías con características no lineales son las llamadas teorías de campo, que describen la dinámica de las interacciones fundamentales de la Naturaleza. Para varios de los modelos planteados por las teorías de campo, las ecuaciones de movimiento asociadas admiten cierta clase especial de soluciones conocidas por el nombre de solitones. Las dos características más importantes de este tipo de soluciones son: a) que su energía asociada está localizada en el espacio y b) que durante su propagación su forma no se ve alterada.

Pero la existencia de soluciones solitónicas no solamente se restringe a las teorías de campo; existen en todas las escalas estudiadas por la física desde las teorías cuánticas de campo de las partículas elementales hasta la cosmología, pasando por la física del estado sólido y la hidrodinámica. En general, existen dos tipos de solitones: unos dejan el sistema intacto durante su paso por el medio, otros lo cambian; a los primeros se les denomina solitones no topológicos a los segundos topológicos.

Ejemplos de solitones no topológicos son las ondas solitarias en un fluido, las ondas solitarias en plasma, los solitones magnetohidrodinámicos, los solitones ópticos no lineales, los solitones en fibras ópticas, solitones en moléculas polarizadas, solitones producidos por impactos fuertes y los solitones que conducen información nerviosa.

Por otro lado, ejemplos de solitones topológicos son los “kinks” en ondas con densidad de carga, algunas dislocaciones, localizaciones de carga en algunos conductores de baja dimensionalidad, paredes de dominio en ferro y antiferromagnetos, instantones de la cromodinámica cuántica, mesoestructuras en transformación de fase estructural, excitaciones localizadas en ácido nucléico y proteínas, finalmente, y para terminar esta lista, en defectos topológicos causantes de la formación de estructuras a gran escala a nivel cosmológico.

La propiedad común que comparten los diversos solitones es el delicado equilibrio que existe entre la no linealidad de la Naturaleza y los efectos dispersivos del medio donde los solitones se presentan. Como sabemos, los efectos dispersivos son los responsables de que, por ejemplo, las soluciones ondulatorias de varios modelos se desvanescan con el transcurrir del tiempo.

Siendo tan diversas las ramas de la física las cuales admiten soluciones solitónicas a las ecuaciones características de cada sistema, el concepto de solitón viene a establecerse como uno de los conceptos unificadores de la física. Es por esta razón por la que el estudio de los solitones se convierte en una tarea trascendente.

En el presente trabajo analizamos algunos aspectos importantes que atañen a los solitones en las teorías de campo en diferentes dimensiones, abordando esencialmente tres

puntos:

- a) la llamada radiación de color producida por una partícula descrita por una teoría de norma, i.e. con una carga interna,
- b) el estudio de la interacción entre solitones en una dimensión, y
- c) el estudio de las características dinámicas de solitones bidimensionales provenientes de una teoría tipo Chern-Simons.

El correspondiente análisis lo desarrollamos de la siguiente forma:

En el capítulo 2 realizamos una breve revisión de conceptos importantes, útiles en los desarrollos posteriores. Comenzamos por establecer el lenguaje usado en la teoría de campo. Posteriormente revisamos algunos conceptos de la dinámica asociada a las soluciones tipo solitón en teorías de campo y discutimos brevemente el papel que tiene el rompimiento espontáneo de la simetría en este tipo de soluciones. Finalmente concluimos con una breve discusión del concepto de Anión.

A continuación, en el capítulo 3, abordamos el problema de la radiación de energía y de color producidas por una carga puntual no Abeliiana en movimiento, utilizando el formalismo de las "coordenadas nulas". Analizamos las dos soluciones encontradas. Realizamos una discusión sobre la radiación de color para las soluciones presentadas, proponiendo una definición invariante de norma para la carga total de color.

En el capítulo 4 consideramos teorías en  $(1 + 1)$  dimensiones, cuyas ecuaciones de movimiento aceptan soluciones tipo solitón. Estudiamos la ecuación de movimiento de un solitón en un campo externo utilizando como ansatz la solución solitónica estática sujeta a una translación continua y considerando una fluctuación alrededor de ella. También estudiamos la dinámica de un sistema multisolitónico. Analizamos la fenomenología descrita por las ecuaciones de movimiento.

Para finalizar, en el capítulo 5 estudiamos el modelo de solitones bidimensionales (vórtices) procedentes de un modelo relativista generalizado, el cual contiene un término

de Chern-Simons y un acoplamiento, por medio de la derivada covariante, al momento magnético anómalo. Analizamos las consecuencias dinámicas del sistema en dos fases de simetría para el potencial  $V(\phi) = a_2|\phi|^2 + a_4|\phi|^4 + a_6|\phi|^6$ , donde  $\phi$  es un campo de Higgs,  $a_2, a_4$  y  $a_6$  son constantes.

- a) En la llamada fase rota estudiamos las soluciones topológicas encontradas. Se presenta el método numérico utilizado para resolver las ecuaciones de movimiento.
- b) En la fase simétrica encontramos el llamado límite de Bogomol'nyi, para el cual el sistema de ecuaciones de movimiento de segundo orden se convierte en un sistema de ecuaciones de primero.

Se muestran las soluciones numéricas halladas en cada caso y se analizan las cantidades dinámicas del sistema.

Debido a la estructura de esta tesis consideramos adecuado al final de cada uno de los capítulos realizar las conclusiones correspondientes.

**Capítulo 2**  
**TOPICOS DE TEORIA DE CAMPO Y FISICA**  
**EN 2 DIMENSIONES.**

**Teoría de norma y ruptura espontánea de la simetría.**

**Teoría de campo y simetrías.**

En la descripción usual de la física de partículas elementales, cada partícula es representada por un campo  $\phi_j(x)$ , función de las coordenadas espacio-temporales. La dinámica de estos campos se obtiene a partir de la densidad Lagrangiana  $\mathcal{L}$ , la cual es función de los campos  $\phi_j(x)$  y sus gradientes  $\partial_\mu \phi_j(x)$  ( $j = 1, 2, \dots, n; \mu = 0, 1, 2, 3$ ).

A partir de la integral espacio-temporal de  $\mathcal{L}$  se obtiene una cantidad escalar, la acción

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_j(x), \partial_\mu \phi_j(x)). \quad (1)$$

Requiriendo que la acción sea estacionaria ante variaciones infinitesimales de los campos  $\delta\phi_i(x)$ , es decir

$$\delta S = \int d^4x \delta\mathcal{L} = 0, \quad (2)$$

se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_j)} - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_j} = 0. \quad (3)$$

Estas ecuaciones de movimiento contienen la dinámica de la teoría clásica de los campos. En la teoría cuántica los campos  $\phi_i$ 's son representados por operadores que cumplen

reglas de conmutación bien definidas. Alternativamente, en el formalismo de integrales funcionales, las soluciones a las ecuaciones de movimiento sólo dominan en el límite clásico. En esta tesis estaremos interesados principalmente en soluciones a las ecuaciones clásicas de movimiento, aunque en el capítulo 4 mencionaremos algunos aspectos acerca de la cuantización de solitones.

Al igual que en la mecánica clásica, tenemos que a cada simetría de  $\mathcal{L}$  corresponde una ley de conservación (Teorema de Noether [1]). En la siguiente tabla se muestran posibles simetrías espacio-temporales del Lagrangiano y las cantidades conservadas correspondientes.

| SIMETRIA            | CANTIDAD CONSERVADA |
|---------------------|---------------------|
| Traslación espacial | momento lineal      |
| Traslación temporal | energía             |
| Rotación            | momento angular.    |

En la teoría de campos además de las simetrías espacio-temporales existen las llamadas simetrías internas. Expliquemos esto un poco a continuación.

En el espacio cuatridimensional en el cual se desarrollan los fenómenos físicos, los campos se describen por cantidades escalares, vectoriales o en general por medio de tensores. En algunas teorías, como las que nos interesa abordar, a los campos se les asocian índices extras, que dependen directamente del número de generadores de algún grupo asociado a la teoría; al espacio formado por dichos generadores se le conoce como “espacio interno”. En dichos espacios pueden existir simetrías de la teoría y a ellas es a las que nos referimos como “simetrías internas”.

En la siguiente sección consideraremos simetrías internas de  $\mathcal{L}$ . A toda simetría de este tipo corresponde una transformación que actúa sobre los campos y deja invariante a  $\mathcal{L}$ . En el caso en que estas simetrías sean globales, es decir no dependen ni del espacio ni del tiempo, existirá una Ley de conservación asociada.

## Teoría de norma.

El caso más general posible de las simetrías internas es la simetría de norma no-Abeliana. Este tipo de simetría aparece de hecho en la electrodinámica en una realización Abeliana. La extensión al caso no-Abeliano aparece por primera vez en el trabajo de Yang y Mills[2].

Para discutir el concepto de teoría de norma empecemos considerando un conjunto de  $n$  campos escalares, en general complejos, que se arreglan en un vector de  $n$  componentes:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} \quad (4)$$

Estos campos forman una base para una representación de un grupo de simetría  $G$  (grupo de norma). Considerando una representación  $n$ -dimensional y unitaria  $(U(\vec{\theta}))$  del grupo, la transformación del campo  $\phi$  está dada por

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = U(\vec{\theta})\phi(x) \quad (5)$$

$$U(\vec{\theta}) = e^{-iL \cdot \vec{\theta}(x)}, \quad (6)$$

donde  $L_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) son matrices  $n \times n$  las cuales representan a los generadores  $T_i$  del grupo, y  $\theta_i(x)$  son funciones arbitrarias del espacio y del tiempo. En el caso en que las  $\theta_i$  fueran independientes de  $x$ , recuperaríamos el caso de simetría global.

Los generadores del grupo  $T_i$  obedecen las reglas de conmutación

$$[T_i, T_j] = c_{ijk} T_k, \quad (7)$$

donde las  $c_{ijk}$  son las constantes de estructura del grupo. Dado que los campos se transforman de acuerdo a alguna representación de  $G$ , los generadores serán representados por las matrices  $L_i$ . Con los generadores del grupo se asociarán un conjunto de campos vectoriales  $W_\mu^i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) que se conocen como campos de norma.

Para que la densidad Lagrangiana sea invariante ante estas transformaciones es necesario generalizar la derivada  $\partial_\mu \phi$  a una derivada covariante  $D_\mu \phi$  de tal forma que se transforme de la siguiente forma

$$D_\mu \phi(x) \rightarrow D'_\mu \phi'(x) = U(\theta) D_\mu \phi(x), \quad (8)$$

de tal manera que la densidad Lagrangiana sólo contenga gradientes a través de la derivada covariante. Esto asegura la invariancia bajo transformaciones de norma no-Abelianas para aquellos términos de  $\mathcal{L}$  que contengan a  $\phi$  y sus gradientes.

Generalizando la derivada covariante que aparece en la electrodinámica,  $D_\mu \phi$  incorpora los campos de norma de acuerdo a la siguiente definición

$$D_\mu \phi(x) \equiv \left[ \partial_\mu - ig \vec{L} \cdot \vec{W}_\mu(x) \right] \phi(x), \quad (9)$$

donde  $g$  es la constante de acoplamiento y hemos utilizado la notación

$$\vec{W}_\mu(x) = \left( W_\mu^1(x), W_\mu^2(x), \dots, W_\mu^N(x) \right). \quad (10)$$

La regla de transformación para los campos se escribe como

$$\vec{L} \cdot \vec{W}_\mu \rightarrow \vec{L} \cdot \vec{W}'_\mu = U(\theta) \left[ \vec{L} \cdot \vec{W}_\mu - \frac{i}{g} U^{-1}(\theta) \partial_\mu U(\theta) \right] U^{-1}(\theta). \quad (11)$$

Para ver más directamente la condición de transformación sobre las  $W_\mu^i(x)$ 's, podemos realizar una transformación infinitesimal

$$U(\theta) \approx 1 - i \vec{L} \cdot \vec{\theta}, \quad (12)$$

con lo cual se obtiene, utilizando las ecuaciones (11), (12) y (5) que a primer orden en  $\theta$

$$\delta W_\mu^i \approx -\frac{1}{g} \partial_\mu \theta_i(x) + c_{ijk} \theta_j(x) W_\mu^k(x). \quad (13)$$

donde  $\delta\vec{W}_\mu = \vec{W}'_\mu - \vec{W}_\mu$ . Es importante hacer notar que la regla de transformación para los campos vectoriales de norma  $W_\mu^i(x)$  no dependen de la representación de las matrices  $L_i$ .

En el caso especial donde el grupo de simetría es el  $U(1)$ , las constantes de estructura  $c_{ijk}$  son idénticamente cero y sustituyendo el campo de norma  $W_\mu^i(x)$  por  $A_\mu(x)$  y la constante de acoplamiento  $g$  por  $e$  en la ecuación (11) tenemos

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x), \quad (14)$$

la cual es la conocida regla de transformación para  $A_\mu$  en la electrodinámica clásica. La derivada covariante en tal caso está dada como

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu, \quad (15)$$

que corresponde al llamado acoplamiento mínimo.

Habiendo introducido los campos de norma, debemos considerar los términos que pueden aparecer en la densidad Lagrangiana; para esto definiremos el tensor de campo generalizado

$$G_{\mu\nu}^i \equiv \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i + gc_{ijk}W_\mu^j W_\nu^k \quad (16)$$

el cual se transforma covariantemente

$$L_i G_{\mu\nu}^i \rightarrow L_i G_{\mu\nu}^i = U(\theta)L_i G_{\mu\nu}^i U^{-1}(\theta) \quad (17)$$

de tal manera que el Lagrangiano  $\mathcal{L}_G$  asociado

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^i G^{i\mu\nu}, \quad (18)$$

es un invariante de norma, *i.e.*  $\delta\mathcal{L}_G = 0$ .

Nuevamente si consideramos el grupo  $U(1)$  y realizamos las sustituciones

$G_{\mu\nu}^i \rightarrow F_{\mu\nu}$ ,  $W_\mu^i(x) \rightarrow A_\mu(x)$  y  $g \rightarrow e$  en la ecuación (16) y en la (18) obtenemos al tensor electromagnético

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (19)$$

y el Lagrangiano de Maxwell

$$\mathcal{L}_F = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (20)$$

Una característica importante de las teorías no Abelianas es que en la Lagrangiana aparecen términos de acoplamiento entre los campos de norma. Esto se debe a que  $W_\mu^i$  representan campos con carga  $g$ , a diferencia del caso en la electrodinámica donde no hay acoplamiento entre fotones, los cuales no poseen carga. Finalmente, hacemos notar que no puede incluirse un término explícito de masa para  $\vec{W}_\mu$  (de la forma  $\frac{m^2}{2} \vec{W}_\mu \vec{W}^\mu$ ) ya que este rompería la invariancia de norma.

En cuanto a la dinámica del campo escalar  $\phi$ , la densidad Lagrangiana se puede escribir como

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - V(\phi) \quad (21)$$

donde el potencial  $V(\phi)$  es una función invariante de los campos escalares. De acuerdo a la ecuación (8) es claro que  $\mathcal{L}_\phi$  es invariante ante las transformaciones de norma. Es importante hacer notar que  $\mathcal{L}_\phi$  incluye la interacción del campo escalar con los campos de norma.

## Rompimiento espontáneo de la simetría.

En 1960 Nambu y Goldstone mostraron la importancia del concepto de rompimiento espontáneo de la simetría (RES) en la física de la materia condensada. Nambu especuló sobre su aplicación en la física de partículas. En efecto el concepto de rompimiento espontáneo de la simetría ha resultado esencial en el éxito que las teorías de norma han tenido para modelar la dinámica de las interacciones fundamentales, en particular es parte esencial en el llamado modelo estándar.

En general el RES ocurre cuando el estado base de un sistema no es invariante ante el grupo de transformaciones definidas por la teoría. Para comprender este fenómeno consideremos un modelo que presenta rompimiento espontáneo de simetría. Consideremos un campo con  $n$  componentes escalares (ec. (4)), cuya dinámica esta determinada por la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\mu^2}{2}\phi^2 - \lambda(\phi^2)^2 \quad (22)$$

la cual es invariante ante el grupo de simetría  $O(n)$ . El rompimiento espontáneo de la simetría ocurre si el parámetro de masa  $\mu^2$  es negativo. El potencial

$$V(\phi) = \frac{\mu^2}{2}\phi^2 + \lambda(\phi^2)^2 \quad (23)$$

tiene un mínimo para el valor del campo  $\phi$  diferente de cero dado por

$$|\phi|^2 = v^2 = \left(\frac{-\mu^2}{4\lambda}\right). \quad (24)$$

Para asegurar la estabilidad del modelo requerimos  $\lambda > 0$ . De esta forma el vacío está degenerado, ya que cada estado con  $|\phi|^2 = v^2$  es un posible candidato. Sin embargo cada vez que se elige un valor para  $\phi$ , dicha selección conduce a un espacio de Hilbert diferente. Una selección dada para el estado base deja un subgrupo  $O(n - 1)$  con simetría no rota,

y que corresponde también a decir que la antigua simetría de la Lagrangiana ya no lo es para el estado base.

Para concretar ideas escojamos al estado base de la forma

$$\phi_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad (25)$$

con lo que coincide con la dirección de la  $n$ -ésima componente de  $\phi$ .

Las fluctuaciones del campo  $\phi$  alrededor del vacío se representan por un desplazamiento radial  $\rho$  y  $(n-1)$  rotaciones ortogonales de magnitud  $\vec{\xi}$

$$\phi = e^{T \cdot \vec{\xi}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v + \rho \end{pmatrix}, \quad (26)$$

donde  $T \cdot \vec{\xi} = T_a \xi^a$  para  $1 \leq a \leq n-1$ ;  $T^a$  son  $n-1$  generadores de  $O(n)$ . Cuando reexpresamos la densidad Lagrangiana en términos de las nuevas variables dinámicas  $\rho$  y  $\vec{\xi}$  tenemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \rho)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\xi})^2 - \frac{\mu^2}{2}(v + \rho)^2 - \lambda(v + \rho)^4. \quad (27)$$

De (27) podemos ver directamente que  $\vec{\xi}$  corresponde a  $(n-1)$  campos sin masa desacoplados. Por otro lado el campo escalar  $\rho$  tiene masa

$$m_\rho^2 = 8\lambda v^2. \quad (28)$$

Los campos  $\vec{\xi}$  conducen a la aparición de partículas sin masa, que se conocen como bosones de Goldstone [3,4]. La aparición de bosones de Goldstone representaba un problema para la aplicación del fenómeno de RES en la física de partículas elementales, ya que dichas partículas no se observan en el espectro conocido. Sin embargo, si el campo escalar

se acopla a un campo de norma surge un sorprendente fenómeno conocido como mecanismo de Higgs [5]. En este caso los bosones de Goldstone desaparecen dando lugar a campos vectoriales masivos, sin que esto altere la invariancia de norma de la teoría. En forma coloquial se dice que el campo vectorial se come a los campos escalares adquiriendo masa. Durante este proceso, el número de grados de libertad de la teoría se preserva; los grados de libertad correspondientes a los campos escalares que desaparecen pasan a convertirse en grados longitudinales de los campos vectoriales.

Para ilustrar el mecanismo de Higgs consideremos una teoría de norma, con grupo de simetría  $O(3)$ , definido por la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + \frac{1}{2}(\mathcal{D}_\mu\phi)^2 - V(\phi), \quad (29)$$

donde utilizamos el tensor de campo definido de la misma forma que en la ec. (16)

$$G_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g\epsilon_{abc}W_\mu^b W_\nu^c, \quad (30)$$

con el índice del espacio-tiempo  $\mu = 0, 1, 2, 3$  y el índice del espacio interno  $a = 1, 2, 3$ . La derivada covariante nuevamente es

$$D_\mu\phi_a = \partial_\mu\phi_a + g\epsilon_{abc}W_\mu^b\phi_c, \quad (31)$$

mientras que el potencial  $V(\phi)$  está dado por (23) con  $\mu^2 < 0$  para dar lugar al RES.

Escogemos por conveniencia el estado base alineado en la tercera dirección del espacio interno, es decir

$$\vec{\phi}_v = v\hat{e}_3. \quad (32)$$

Los campos físicos son  $\phi_1, \phi_2$  y  $\xi = \phi_3 - v$ . La densidad Lagrangiana se puede entonces reexpresar como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}[(\partial_\mu \phi_1)^2 + (\partial_\mu \phi_2)^2 + (\partial_\mu \xi)^2] + v g [(\partial_\mu \phi_1) W_2^\mu - (\partial_\mu \phi_2) W_1^\mu] \\ & + \frac{v^2 g^2}{2} [(W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2] - \frac{1}{4} (\partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i)^2 - 4v^2 \lambda \xi^2 \\ & + \text{términos de tercer y cuarto grado.} \end{aligned} \quad (33)$$

La anterior densidad Lagrangiana contiene términos mezclados en  $W^\mu$  y  $\phi$ , los cuales no son simples de interpretar. Para simplificar la interpretación recordemos que nuestro modelo es invariante ante una transformación de norma, de tal manera que podemos realizar una transformación en la que  $\vec{\phi}$  apunte a lo largo del tercer 'eje de isospín' para cada punto del espacio-tiempo

$$\begin{aligned} \vec{\phi} &= \hat{e}_3 \phi_3 \\ &= \hat{e}_3 (v + \rho), \end{aligned} \quad (34)$$

esta elección de norma se le conoce como "norma unitaria".

En la norma unitaria la densidad Lagrangiana se reduce a

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi)^2 - 4v^2 \lambda \xi^2 + \frac{v^2 g^2}{2} [(W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2] - \frac{1}{4} (\partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i)^2 \\ & + \text{términos de tercer y cuarto grado.} \end{aligned} \quad (35)$$

De la expresión anterior comprobamos que los bosones de Goldstone han desaparecido, mientras que  $W_\mu^1$  y  $W_\mu^2$  han adquirido una masa  $M_W = v g$ . El campo  $\xi$ , conocido como boson de Higgs, tiene una masa  $M_\xi = \sqrt{8v^2 \lambda}$ , mientras que  $W_\mu^3$  permanece con masa cero. Inicialmente tenemos tres campos escalares, (dos bosones de Goldstone) y tres campos vectoriales sin masa. Los grados de libertad se conservan; pero después del RES los dos bosones de Goldstone se transforman en estados de polarización longitudinal de los campos de norma.

El modelo que hemos considerado con simetría  $O(3)$  contiene todas las características del caso no Abelian general. Podemos señalar que aquí un sólo campo vectorial permanece

sin masa debido a que el grupo  $H (= U(1))$  bajo el cual el vacío permanece invariante tiene un sólo generador. En el caso general el número de partículas vectoriales sin masa es igual a  $\dim(H)$ . Por otro lado, los dos campos vectoriales que han adquirido masa lo han hecho absorbiendo los dos modos de Goldstone. Entonces el número de campos vectoriales masivos es igual al número de generadores de  $G$  que no lo son de  $H$ , *i.e.* la dimensión del grupo cociente, lo cual se representa como  $\dim(G/H)$ . Por lo tanto el número de partículas de norma (con y sin masa) es igual a  $\dim(G)$ .

## **Solitones en la teoría de campo.**

### **El concepto de solitón.**

Los nombres de ondas solitarias y solitones se refieren a soluciones de ecuaciones diferenciales no lineales, que representan objetos extendidos. Estas soluciones son configuraciones estables, de energía finita, las cuales no son singulares en ningún punto. Dicho de otra manera: los solitones son paquetes de onda localizados espacialmente que mantienen esta estructura para todo tiempo, es decir que son soluciones no dispersivas [6].

El concepto de solitón juega un papel fundamental en la física donde los fenómenos producidos son explicados por medio de la dinámica de ondas no lineales. Es por esta razón que el concepto de solitón aparece en variados campos de la física.

A diferencia de los paquetes de ondas que se pueden formar en una teoría lineal, los solitones son no dispersivos. Esta propiedad se debe a una compensación entre los efectos no lineales con la contribución dispersiva.

En algunas clasificaciones más restrictivas se requiere que en la colisión entre solitones éstos se comporten como partículas elásticas bajo la dispersión, es decir que los solitones conserven sus propiedades morfológicas después de la colisión. Esta característica ha sido estudiada con cierto detalle sólo en el caso de algunas teorías unidimensionales. En general no la consideraremos como una propiedad indispensable para clasificar alguna solución como solitón.

La mayoría de las teorías de campos de interés en partículas elementales y cosmología son no lineales. Ciertamente, tal es el caso en las teorías de norma. Debido a lo anterior podemos esperar que los solitones sean de relevancia en dichos campos. A pesar de ser soluciones a las ecuaciones clásicas de movimiento, se espera que sean de particular importancia para entender el régimen no-perturbativo de la teoría. Esto se debe a que representaban configuraciones estables que no se pueden obtener perturbativamente a partir del vacío.

Una atractiva posibilidad es interpretar a los solitones como partículas, las cuales no estaban representadas de manera explícita en el Lagrangiano de la teoría.

Entre los ejemplos más conocidos de soluciones tipo solitón en teorías de campos, podemos mencionar:

- i) Kinks y solitones de Sine-Gordon que aparecen en teorías escalares en una dimensión espacial [7].
- ii) Vórtices o “cuerdas” que surgen en teorías de norma y tienen simetría bidimensional [8].
- iii) Monopolos magnéticos, los cuales aparecen en ciertas teorías de norma [9].
- iv) Eskirmiones [10] nacidos de la teoría  $\sigma$  no lineal que representan a los nucleones como solitones en una teoría efectiva de campos escalares.

### **Clasificación topológica de los solitones.**

Los solitones son soluciones de las ecuaciones clásicas de movimiento. Dichas ecuaciones se obtienen a partir del principio de mínima acción ( $\delta S = 0$ ) usando una función Lagrangiana que describe el fenómeno considerado. Por otro lado, la condición de estabilidad de los solitones requiere que  $\delta^2 S > 0$ . De manera más precisa; la condición de estabilidad se obtiene incluyendo fluctuaciones de los campos alrededor de la solución clásica, y reteniendo términos cuadráticos. La condición de estabilidad ahora se expresa

en términos de la la frecuencia de las fluctuaciones pidiendo que ésta sea una cantidad positiva [11].

Por la forma en que es satisfecha la condicion de estabilidad, los solitones pueden ser clasificados en dos tipos: topológicos y no topológicos. Los solitones no topológicos adquieren estabilidad mediante un mecanismo dinámico, por lo que generalmente dependen del tiempo. En algunos casos su estabilidad esta relacionada con la conservación de una carga de Noether. Por otro lado para que existan solitones topológicos es necesario que el vacío sea degenerado. La estabilidad del solitón topológico depende del hecho de que se pueda establecer un mapeo no trivial entre la variedad definida en espacio interno por el mínimo del potencial y el espacio real (ver siguiente sección). Esta propiedad da lugar a una “carga topológica” conservada, la cual no puede ser obtenida por medio del teorema de Noether y representa el número de veces que es cubierta la variedad del espacio real por el espacio interno.

### Carga topológica.

En esta sección ilustraremos por medio de los solitones de Sine-Gordon el concepto de carga topológica. Consideremos para ello la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - V(\phi). \quad (36)$$

Esta densidad describe un campo escalar en  $(1 + 1)$  dimensiones. Vamos a analizar el caso para el cual

$$V(\phi) = \frac{a}{b} (1 - \cos(b\phi)), \quad (37)$$

que corresponde al llamado modelo de Sine-Gordon. La densidad de energía del sistema esta dada como

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + V(\phi). \quad (38)$$

La ecuación de movimiento asociada

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad (39)$$

posee un número infinito de soluciones constantes

$$\phi_c = \frac{2\pi n}{b}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (40)$$

lo cual quiere decir que la ecuación de Sine-Gordon posee un vacío degenerado ya que  $V(\phi_c) = 0$ . Además para estas soluciones la energía es cero, como puede comprobarse directamente al sustituirse (40) en (38).

Nuevamente nos encontramos ante otro caso en el que se produce RES. Si realizamos un desarrollo de Taylor alrededor de  $\phi = 0$  y haciendo  $m^2 = ab$  y  $\lambda = ab^3$  tenemos

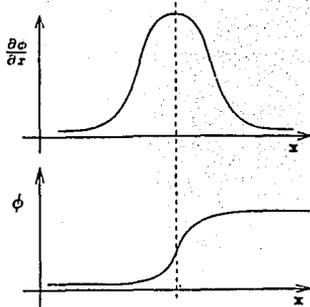
$$V(\phi) = \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \dots \quad (41)$$

por lo que  $m$  lo indentificamos con la masa de la partícula y  $\lambda$  con un acoplamiento de autointeracción.

Es sencillo comprobar que

$$\phi(x) = \frac{4}{b} \arctang(e^{\pm x}), \quad (42)$$

es una solución estática a la ec. (39). En la figura (1) mostramos la forma de esta solución después de haber aplicado una transformación de Lorentz, con lo que obtenemos una onda solitaria propagándose sin cambiar de forma ni de tamaño y por tanto sin disipación.



**Fig.1.** En la gráfica se muestra la derivada del campo escalar  $\phi$ , en la inferior se muestra el perfil del solitón de Sine-Gordon ( $\phi$ ).

Ahora consideremos la siguiente configuración: cuando  $x \rightarrow -\infty$  hagamos tender a  $\phi$  a uno de los ceros de  $V$  de acuerdo a la figura (1) (por ejemplo  $n_1 = 0$ ) y para  $x \rightarrow \infty$  hagamos que  $\phi$  tienda a otro cero diferente, (digamos  $n_2 = 1$ ). Entre ambos ceros existe una región donde  $\phi \neq \frac{2\pi n}{b}$ ,  $\frac{\partial \phi}{\partial x} \neq 0$  y por tanto (38) es una densidad positiva. Supongamos que la configuración es estática, por tanto  $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ . Dadas las condiciones de frontera establecidas para  $\phi$ , esperamos que la energía total sea finita. De hecho es posible encontrar una solución estacionaria a las ecuaciones de movimiento, que cumpla con las condiciones establecidas anteriormente (ec. (42)).

Para una solución estacionaria tenemos que la ecuación de movimiento (39) se reduce

a

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial V}{\partial \phi}, \quad (43)$$

expresión que al ser integrada se convierte en

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 = V(\phi) \quad (44)$$

siendo cero la constante de integración. Sustituyendo (44) en (38) para calcular la energía total del solitón obtenemos

$$\begin{aligned} E &= \int \mathcal{H} dx \\ &= \int_0^{2\pi} [2V(\phi)]^{\frac{1}{2}} d\phi, \end{aligned} \quad (45)$$

donde hemos utilizado los límites dados por (41) para  $n = 0$  y  $n = 1$ . Sustituyendo  $V(\phi)$  de (37) se puede llegar fácilmente a que

$$E = \frac{8m^3}{\lambda} \quad (46)$$

con  $m^2 = ab$  y  $\lambda = ab^3$  como antes.

El solitón de Sine-Gordon es un objeto topológico. Su existencia depende de las propiedades topológicas del espacio (en particular, de su frontera, la cual en este caso es un conjunto discreto). La estabilidad de este solitón es una consecuencia de la topología. Esto implica la existencia de una ley de conservación, la cual puede ser fácilmente establecida si definimos una corriente topológica

$$J^\mu = \frac{b}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi, \quad (47)$$

con  $\mu = 0, 1$ . Es inmediato ver que  $\partial_\mu J^\mu = 0$ . A esta corriente está asociada una carga topológica  $Q$  dada por

$$\begin{aligned}
Q &= \int_{-\infty}^{\infty} J^0 dx \\
&= \frac{b}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx \\
&= \frac{b}{2\pi} [\phi(\infty) - \phi(-\infty)] \\
&= n_2 - n_1 \\
&\equiv N.
\end{aligned} \tag{48}$$

La ecuación (48) es una expresión general. En el caso anterior hemos supuesto  $N = 1$ . El punto importante aquí es el hecho de que  $J^\mu$  no es una corriente de Noether y el que su divergencia sea cero se sigue de forma independiente de las ecuaciones de movimiento.

### Física en (2+1) dimensiones. Aniones.

Se piensa que existen fenómenos físicos en los cuales la dinámica de los procesos relevantes se restringe a planos; es decir, se da en (2+1) dimensiones (dos espaciales y una temporal). Tal es el caso del efecto Hall cuántico y de la superconductividad de alta temperatura. Entonces uno puede preguntarse si existen diferencias fundamentales entre la física en (2+1) dimensiones comparada con la que se conoce en (3+1) dimensiones. Un ejemplo de dicha diferencia entre la física de una u otra dimensión son los aniones, partículas que no son bosones, ni fermiones. Los aniones son ejemplo de excitaciones o cuasi-partículas que sólo podrían existir en sistemas bidimensionales.

El concepto de anión fue introducido por Leinas y Myrheim en 1977 [12]. Pero fue después del trabajo de Wilcsek [13] en 1982 que se empezó a estudiar con más detalle el concepto de anión.

Los fermiones son partículas que poseen espín semi-entero ( $s = \frac{n}{2}\hbar$  con  $n$  entero impar) y cuya función de onda es antisimétrica ante el intercambio de dos fermiones idénticos. Por otro lado, los bosones tienen espín entero ( $s = n\hbar$ ) siendo su función de onda simétrica

ante el intercambio por parejas. De hecho, de acuerdo al teorema espín-estadística, la fase que aparece ante el intercambio de dos partículas idénticas se puede escribir como  $e^{i2\pi/\hbar}$ .

En general, se espera que los aniones sigan cumpliendo con la relación espín-estadística. Pero al tener espín arbitrario, la fase que aparece ante el intercambio de dos aniones podrá también ser arbitraria. El hecho de que el espín no esté cuantizado en sistemas bidimensionales es fácilmente entendible a partir del hecho de que existe un sólo generador de rotaciones en el espacio interno, digamos  $L_z$ , donde  $z$  es la dirección perpendicular al plano. En este caso el grupo de rotaciones es Abeliano y los eigenvalores de  $L_z$  son arbitrarios.

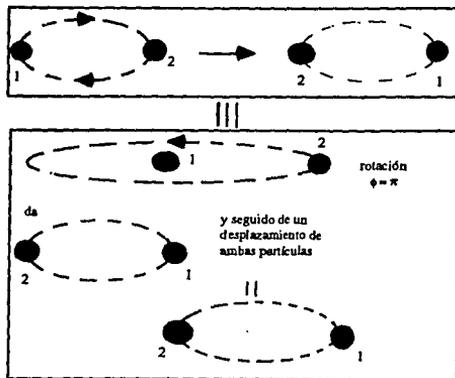
La existencia de aniones depende de la aparición de un nuevo concepto en  $(2 + 1)$  dimensiones; este es el concepto de "rodear". Cuando dos partículas están constreñidas a moverse en el plano (no pudiendo ocupar el mismo sitio) se puede determinar sin ambigüedades si una partícula rodea a la otra dándole una, dos o  $n$  vueltas.

Por lo tanto en  $(2+1)$  dimensiones se puede postular la existencia de una interacción de fase de largo alcance entre partículas, de tal manera que cuando una partícula se mueva alrededor de la otra un ángulo  $\phi$ , la función de onda adquiera una fase

$$e^{i\frac{\theta}{\pi}\phi}, \quad (49)$$

donde  $\theta$  es un número arbitrario, conocido como parámetro estadístico. Como se mencionó anteriormente no existe contradicción alguna al postular la aparición del factor dado por la ecuación (49). Esto se debe a que el ángulo  $\phi$  tiene significado bien definido en dos dimensiones, lo cual no sería cierto en tres dimensiones.

En la práctica se pueden intercambiar dos partículas girando una alrededor de la otra un ángulo  $\phi = \pi$  y realizando una translación, ver figura (2). Después de este proceso la función de onda adquiere la fase  $e^{i\theta}$ . Es claro que los casos particulares de bosones y fermiones corresponderán a  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$  respectivamente.



**Fig.2.** Equivalencia entre intercambio de partículas y el "rodeo" de una de ellas (2) alrededor de la otra (1), seguido de una translación de ambas partículas.

Para  $\theta$  arbitrario se dice que las partículas son aniones y que obedecen una estadística fraccionaria. De acuerdo al teorema de espín-estadística se espera que el espín de dichas partículas sea  $s = \frac{\theta\hbar}{2\pi}$ .

Un doble intercambio de las partículas 1 y 2 correspondería a una rotación de  $\phi = 2\pi$ , ver figura (3a). Es claro que en este caso una partícula rodeó a la otra una vez. Este proceso es topológicamente distinto a uno en el que se rodearán  $n$  veces, mientras que en el caso de tres dimensiones estos procesos se podrían deformar continuamente, para ir del uno al otro.

Con estos ejemplos es fácil entender que las simetrías ante inversiones temporales ( $\mathcal{T}$ ) y paridad ( $\mathcal{P}$ ) se violen. La figura (3b) muestra la inversión temporal del proceso correspondiente al de la figura (3a). En el primer caso la fase que adquiere la función de onda es  $e^{i2\theta}$ , mientras que en el segundo es  $e^{-i2\theta}$ . Claramente  $\mathcal{T}$  se viola.

Una discusión mas detallada del concepto de anión se puede encontrar en la revisión presentada por Aitchinson y Mavromato [14].

En el capítulo 5 de esta tesis presentamos un modelo de teoría de campo que en  $(2+1)$  dimensiones, que tiene soluciones de vórtice (tipo solitón) y como veremos ahí, los vórtices se comportan como aniones.



Fig. 3a.



Fig. 3b.

**Fig.3.** Doble intercambio de partículas llevado a cabo por medio de dos procesos de "rodeo" diferentes. Uno de los procesos puede ser obtenido a partir del otro por medio de una reflexión o una inversión temporal.

## Referencias.

- [1] H. Goldstein: Classical Mechanics. Adisson Wesley, Pu. Co.
- [2] C.N. Yang y R.L. Mills: R.L. Phys. Rev., 96 (1954)191.
- [3] L. Ryder: Quantum field theory, Cambridge University Press (1984).
- [4] J. Goldstone: Nuovo Cimento 19 (1961)154;  
J. Goldstone, A. Salam y S. Weinberg, Phys. Rev. 127 (1962)965.
- [5] P.W. Higgs: Phy. Lett. 12,3 (1964)132.
- [6] R. Rajaraman: Solitons and Instantons. North Holland (1987) Amsterdam.
- [7] J. Rubinstein: J. Math. Phys. 11 (1970)258.
- [8] H.B. Nielsen y P. Olesen: Nucl. Phys. B61 (1973)45.
- [9] G. t'Hooft: Nucl. Phys. B79 (1974)276.;  
A.M. Polyakov: JETP Lett. 20 (1974)194.
- [10] T.H.R. Skyrme: Phys. Rev. Lett.67(1991)314.
- [11] A.R. Bishop: Physica 1D(1980)1.
- [12] J.M. Leinas y J. Myrheim: Il Nuovo Cimento 37B,1(1977).
- [13] F. Wilczek: Phys. Rev. Lett. 48,17 (1982)1144.  
*idem*: Phys. Rev. Lett. 49,14 (1982) 957.
- [14] I. Aitchinson y Mavromato: Contemporary Physics, 32 (1992)219.

### Capítulo 3

## RADIACION PRODUCIDA POR UNA CARGA INTERNA.

El estudio de las teorías clásicas de Yang-Mills (YM) con fuentes externas puede ser importante para un posterior entendimiento de la teoría cuantizada. En particular puede ser de gran utilidad para explorar los aspectos no-perturbativos de la teoría.

En el electromagnetismo clásico, la radiación producida por una fuente puntual acelerada transporta tanto energía como momento, pero la carga total de la fuente permanece constante. En las teorías no Abelianas de Yang-Mills los campos "gluónicos" pueden transportar carga no Abeliana (color) además de energía y momento. En consecuencia, el color de una fuente externa no Abeliana no necesariamente se conserva.

Las interacciones clásicas de una partícula, con carga no Abeliana, y los correspondientes campos de Yang-Mills son de considerable interés físico. Por ejemplo, tenemos al respecto la importante cuestión de si una carga no Abeliana es capaz de radiar. Este es un problema en el cual un formalismo invariante de norma, puede resultar útil para contestar a esta disyuntiva. Otro problema interesante es el relacionado con la interacción retardada entre campos y la fuente, en donde es de interés entender como se modifica el caso no Abeliano.

Con respecto al primer problema, existen en la literatura algunos intentos para darle respuesta. Por ejemplo Drechsler [1,2] conjeturó que una carga no Abeliana no radía energía debido al hecho de que los efectos no lineales mantienen los campos sujetos a las fuentes que los producen.

Trautman [3], por otro lado, encontró una solución particular de las ecuaciones de Yang-Mills en presencia de una fuente puntual externa. Esta solución es muy restrictiva

en el sentido de que la fuente no debe estar acelerada, y su solución es válida sólo para algunos grupos de transformaciones. Adicionalmente, y en contraste a lo encontrado por Drechler, en la solución de Trautman hay una transferencia de energía debida a los campos de Yang-Mills.

Por otro lado, el estudio de las configuraciones en presencia de fuentes externas estáticas ha mostrado que la solución Coulombiana no es la única configuración estática posible, sino que existen varias soluciones con energía menor que la de Coulomb [4-6]. Esto sabemos que no ocurre en el caso Abeliano.

En este capítulo presentamos dos soluciones a las ecuaciones de Yang-Mills con fuentes externas puntuales no Abelianas [7]. La primera corresponde a los potenciales no Abelianos de Liénard-Wiechert encontrados por Trautman. Sin embargo nosotros encontramos que las condiciones que necesitan satisfacer las ecuaciones de movimiento no son tan restrictivas. Para esta solución es necesario que la rotación en el espacio interno de la fuente esté correlacionada con el desplazamiento en el espacio-tiempo. Esta situación es reminiscente de lo que sucede para las soluciones de solitones topológicos.

Una segunda solución es válida para grupos  $SU(n)$ . En este caso no hay correlación entre la rotación en el espacio interno y el movimiento en el espacio-tiempo. El último puede ser arbitrario, mientras que la rotación debe generarse por una transformación unitaria.

Este capítulo está organizado como sigue. En la sección 1 revisamos las propiedades generales de las ecuaciones de Yang-Mills en presencia de fuentes externas y discutimos el problema de una definición invariante de norma para la carga de color. En la sección 2, presentamos las transformaciones de Newman-Unti; dicho formalismo es particularmente útil para la discusión de efectos retardados, ya que simplifica las expresiones de los potenciales de radiación. Las dos soluciones de Liénard-Wiechert y sus propiedades se discuten en la tercer sección.

## Ecuaciones de Yang-Mills y cargas internas.

La acción de Yang-Mills está dada por la integral sobre el espacio-tiempo del término cinético correspondiente al campo de norma

$$S_{YM} = \int d^4x \mathcal{L}_G \quad (1)$$

con

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}. \quad (2)$$

El subíndice  $G$  en  $\mathcal{L}$  hace mas explícita la dependencia de la densidad Lagrangiana respecto al tensor de campo

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g c_{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (3)$$

donde  $A_\mu^a$  es el potencial vectorial y  $c_{abc}$  las constantes de estructura. En este capítulo los subíndices griegos hacen referencia a las coordenadas espacio-temporales, por tanto toman valores entre 0, 1, 2 y 3; en tanto que las primeras letras latinas como índices hacen referencia a las coordenadas en el espacio interno, por lo que puede tomar valores entre 1 y el número de generadores ( $t^a$ ) del grupo de simetría que estemos considerando. Los generadores  $t^a$  forman una base para el Algebra de Lie de ese grupo de simetría.

Durante el desarrollo de este capítulo utilizaremos la notación matricial

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^\nu &= j_a^\nu t^a, \\ \mathbf{G}^{\mu\nu} &= G_a^{\mu\nu} t^a, \\ \mathbf{A}^\nu &= A_a^\nu t^a, \end{aligned} \quad (4)$$

para la corriente no Abeliana, el tensor de campo y el cuadripotencial respectivamente. Utilizando esta notación es inmediato comprobar que el tensor de campo se puede escribir como

$$\mathbf{G}^{\mu\nu} = \partial^\mu \mathbf{A}^\nu - \partial^\nu \mathbf{A}^\mu + g[\mathbf{A}^\mu, \mathbf{A}^\nu]. \quad (5)$$

Haciendo uso del principio de mínima acción de Hamilton podemos obtener las ecuaciones de movimiento

$$D^\mu \mathbf{G}_{\mu\nu} = 0, \quad (6)$$

conocidas con el nombre de ecuaciones de Yang-Mills sin fuentes [4]. La derivada covariante utilizada anteriormente está dada por

$$D^\mu = \partial^\mu + g[\mathbf{A}^\mu, \quad ]. \quad (7)$$

En el caso en que exista una fuente externa, ésta puede tomarse en cuenta agregando un término extra al Langrangiano de YM de la forma

$$\mathcal{L}_{ext} = 2\text{Tr}(\mathbf{A}_\mu \cdot \mathbf{j}^\mu), \quad (8)$$

Las ecuaciones de movimiento de YM con fuentes son entonces

$$D_\mu \mathbf{G}^{\mu\nu} = \mathbf{j}^\nu. \quad (9)$$

Consideremos ahora las condiciones que se requieren para que las ecuaciones de movimiento sean invariantes de norma. Ante una transformación local definida por la matriz

$$\mathbf{U}(x) = \exp[-i\omega^a(x)t^a] \equiv \exp[-i\mathbf{w}(x)], \quad (10)$$

donde  $\omega^a(x)$  es una función arbitraria real. El potencial vectorial se transforma en la forma

$$\mathbf{A}'^\mu = \mathbf{U}\mathbf{A}^\mu\mathbf{U}^{-1} + i(\partial^\mu\mathbf{U})\mathbf{U}^{-1}, \quad (11)$$

en tanto que  $\mathbf{G}^{\mu\nu}$  se transforma covariantemente, *i.e.*

$$\mathbf{G}'^{\mu\nu} = \mathbf{U}\mathbf{G}^{\mu\nu}\mathbf{U}^{-1}. \quad (12)$$

Consecuentemente, las ecuaciones de movimiento (9) se transformarán de manera covariante, siempre y cuando la corriente externa se transforme covariantemente

$$\mathbf{j}'^\mu = \mathbf{U}\mathbf{j}^\mu\mathbf{U}^{-1}. \quad (13)$$

Sin embargo, en general la acción no es invariante ante estas transformaciones, ya que el término de interacción campo-corriente se transforma como

$$\begin{aligned} \delta \int d^4x \operatorname{Tr}(\mathbf{A}_\mu \mathbf{j}^\mu) &= i \int d^4x \operatorname{Tr}(\mathbf{U}^{-1}(\partial_\mu \mathbf{U})\mathbf{j}^\mu) \\ &= \int d^4x \operatorname{Tr}((\partial_\mu \mathbf{w})\mathbf{j}^\mu) \\ &= - \int d^4x \operatorname{Tr}(\mathbf{w}\partial_\mu \mathbf{j}^\mu), \end{aligned} \quad (14)$$

donde se utilizó el hecho de que  $\mathbf{U}^{-1}(\partial_\mu \mathbf{U}) = -i\partial_\mu \mathbf{w}$ . La ecuación anterior muestra que en general la acción no es invariante de norma, debido a que la corriente externa no se conserva ( $\partial_\mu \mathbf{j}^\mu \neq 0$ ). En principio uno podría imponer la condición  $\partial_\mu \mathbf{j}^\mu = 0$ , pero esta condición no es covariante. Esto significa que en general al acoplar un campo de Yang-Mills a una fuente externa se rompe la invariancia de norma.

Sin embargo, lo que se demuestra de manera directa es que  $\mathbf{j}_\mu$  se conserva de manera covariante, *i.e.*

$$D^\mu \mathbf{j}_\mu = 0. \quad (15)$$

Esto se sigue al aplicar la derivada covariante a la ecuación (9) y del hecho de que se cumple que  $D^\mu D^\nu \mathbf{G}_{\mu\nu} = 0$ .

Por lo tanto, concluimos que las ecuaciones de movimiento (9) se transforman de forma covariante bajo una transformación de norma (10), aún cuando el correspondiente

Lagrangiano no sea invariante de norma. Sin embargo, este Lagrangiano es aún invariante bajo transformaciones globales, y podemos entonces obtener la correspondiente corriente de Noether  $\mathbf{J}_\mu$  (que difiere de  $\mathbf{j}_\mu$ ) como:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}^\nu &= \partial_\mu \mathbf{G}^{\mu\nu} \\ &= \mathbf{j}^\nu - [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{G}^{\mu\nu}],\end{aligned}\tag{16}$$

la cual obviamente se conserva ( $\partial_\mu \mathbf{J}^\mu = 0$ ), ya que  $\partial^\mu \partial^\nu \mathbf{G}_{\mu\nu} = 0$ . A partir de la relación (16), se puede en principio definir la carga de color como

$$\mathbf{I} = \int d^3x \mathbf{J}^0 = - \int_S \mathbf{G}^{0i} dS_i,\tag{17}$$

donde  $S$  es la superficie de una esfera de radio  $R \rightarrow \infty$ . De acuerdo a (16),  $\mathbf{I}$  puede ser interpretada como una carga total, proveniente de la fuente externa, más la carga del campo, i.e.

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_{\text{fuente}} + \mathbf{I}_{\text{campo}},\tag{18}$$

donde:

$$\mathbf{I}_{\text{fuente}} = \int j^0 d^3x, \quad \mathbf{I}_{\text{campo}} = - \int [\mathbf{A}_i, \mathbf{G}^{i0}] d^3x.\tag{19}$$

Bajo las transformaciones de norma (10) y tomando en cuenta la forma en que se transforma  $\mathbf{G}_{\mu\nu}$ , ec. (12), tenemos que  $\mathbf{I}$  no se transforma de manera covariante (i.e.  $\mathbf{I} \rightarrow \mathbf{U}\mathbf{I}\mathbf{U}^{-1}$ ), a menos que las transformaciones de norma se restrinjan a aquellas que cumplan las condiciones [8]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{U}(t, r, \theta, \phi) \rightarrow \mathbf{U}(t, r).\tag{20}$$

Aún cuando se imponga la condición anterior se tiene que la conservación de  $\mathbf{I}$  depende de la norma; ya que si en una norma  $\mathbf{I}$  se conserva, bajo una transformación de norma que

cumpla con la relación dada por (20) se tiene que la nueva corriente  $\mathbf{I}' = \mathbf{U}(t, r)\mathbf{I}\mathbf{U}^{-1}(t, r)$  es dependiente del tiempo. Sólo si restringimos las transformaciones de norma a aquéllas en las cuales, cuando  $r \rightarrow \infty$ ,

$$\mathbf{U}(t, r, \theta, \phi) \rightarrow \mathbf{U}(r), \quad (21)$$

se sigue que la conservación de  $\mathbf{I}$  será invariante de norma.

Para ser menos restrictivos, definiremos la carga de color  $Q$  como

$$Q = \sqrt{\text{Tr}\mathbf{I}^2}, \quad (22)$$

la cual es una carga invariante de norma, bajo transformaciones de norma que cumplan la restricción (20).

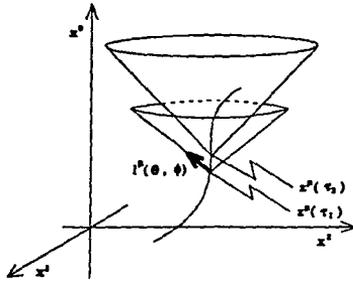
### Transformaciones de Newman-Unti.

En esta sección abordaremos el formalismo de Newman-Unti que nos permitirá escribir de forma elegante las ecuaciones de Yang-Mills, de tal forma que de su estructura podremos inferir directamente ciertas observaciones interesantes. Este formalismo permite discutir de manera sencilla el problema de la radiación de una carga puntual [9] y consiste en realizar una transformación de coordenadas a un sistema de referencia que siga la línea de universo de la partícula. En nuestro caso utilizaremos este formalismo para estudiar la radiación de una “partícula con estructura interna”.

Sea  $z^\mu(\tau)$  la línea de universo de la partícula como función del tiempo propio  $\tau$ . En coordenadas rectangulares  $x^\mu$ , el elemento de línea en el espacio-tiempo de Minkowski se escribe de la forma

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (23)$$

donde  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ .



**Fig.1.** Conos de luz asociados a la línea de universo de una partícula. Se muestran los parámetros utilizados en función de las coordenadas tipo Bondi  $(\tau, r, \theta, \phi)$ .

Podemos asociar un sistema de referencia de coordenadas sujeto a la partícula, ver fig. (1), y definido por las transformaciones de Newman-Unti [10]

$$x^\mu = z^\mu(\tau) + r \frac{l^\mu(\theta, \phi)}{p(\tau, \theta, \phi)}, \quad (24)$$

donde  $p = l^\mu \dot{z}_\mu$  y  $l_\mu$  es un vector nulo el cual satisface

$$l^\mu l_\mu = l^\mu \dot{l}_\mu = l^\mu l_{\mu, \theta} = l^\mu l_{\mu, \phi} = 0. \quad (25)$$

Una representación explícita para  $l^\mu$  esta dada por

$$l^\mu = (1, \sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta). \quad (26)$$

De esta forma, las coordenadas de Minkowski de un punto arbitrario son expresadas en términos de las coordenadas nulas asociadas con el cono de luz que emana de la línea de universo. De (24) tenemos que

$$r = [x^\mu - z^\mu(\tau)] \dot{z}_\mu \quad (27)$$

que es la distancia retardada del evento  $x^\mu$  medida desde la línea de universo ( $r = 0$ ).

El tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  en las coordenadas nulas puede ser calculado fácilmente por medio de (24) y de las leyes de transformación

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}. \quad (28)$$

Con lo anterior el elemento de línea en términos de las coordenadas nulas está dado por la expresión

$$ds^2 = (1 - r \frac{\dot{p}}{p}) d\tau^2 + 2d\tau dr - \frac{r^2}{p^2} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2); \quad (29)$$

la cual es conocida como la forma de Robinson-Trautman del elemento de línea en el espacio de Minkowski [11]. También podemos obtener la expresión en el nuevo sistema de coordenadas de la cuadri-velocidad  $\dot{z}_\mu$  y la cuadri-aceleración  $\ddot{z}_\mu$  de la partícula:

$$\dot{z}_\mu = (\dot{z}_\tau, \dot{z}_r, \dot{z}_\theta, \dot{z}_\phi) = (1, 1 - r \frac{\dot{p}}{p}, 0, 0), \quad (30)$$

y

$$\ddot{z}_\mu = \left( \frac{\dot{p}}{p}, -\frac{\dot{p}}{p}, r \partial_\theta \left( \frac{\dot{p}}{p} \right), r \partial_\phi \left( \frac{\dot{p}}{p} \right) \right). \quad (31)$$

Las ecuaciones de YM en el formalismo de tetradas nulas pueden escribirse utilizando la expresión general para un espacio curvo

$$D_\mu \sqrt{-g} \mathbf{G}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} \mathbf{j}^\nu \quad (32)$$

donde  $g = \text{Det}(\dot{y}_{\mu\nu})$ , para nuestro caso  $\sqrt{-g} = \frac{r^2}{p^2} \sin \theta$  y la derivada covariante  $D_\mu$  está dada por (7). Para una partícula con un grado interno de libertad (color) dado por  $\mathbf{q}(\tau) = q_a(\tau) t^a$  y moviéndose a lo largo de la línea de universo  $z_\mu$ , podemos escribir la corriente de la forma

$$\mathbf{j}^\nu(x) = 4\pi \frac{\mathbf{q}(\tau)}{\sqrt{-g}} \int d\tau \dot{z}^\nu \delta^4(\vec{x} - \vec{z}(\tau)). \quad (33)$$

Por tanto, las ecuaciones de YM (32) quedan ya determinadas para una fuente externa. Ahora pasaremos a estudiar soluciones particulares.

### Potenciales de Liènard-Wiechert para una carga no Abeliانا.

En esta sección consideraremos dos tipos de soluciones de las ecuaciones de Yang-Mills (32) proponiendo formas de potenciales específicos, para las cuales encontramos explícitamente las variables involucradas.

**Caso A.** Análogamente al caso Abeliانا, definamos el potencial de Liènard-Wiechert debido a una carga de color como

$$A_\mu = \frac{\mathbf{q}(\tau)\dot{z}_\mu(\tau)}{r}. \quad (34)$$

Usando (5), (30) y (31) obtenemos el tensor de campo, cuyas componentes distintas de cero están dadas a continuación

$$\begin{aligned} G_{rr} &= \frac{\mathbf{q}}{r^2} + \frac{\dot{\mathbf{q}}}{r}, \\ G_{r\theta} &= \mathbf{q}\partial_\theta\left(\frac{\dot{r}}{p}\right), \\ G_{r\phi} &= \mathbf{q}\partial_\phi\left(\frac{\dot{r}}{p}\right). \end{aligned} \quad (35)$$

Podemos ver en estas expresiones que el tensor de campo se separa en forma natural en tres partes: un campo Coulombiano, un campo debido a la aceleración que depende de  $\dot{\mathbf{p}}$ , y de un término  $\dot{\mathbf{q}}r^{-1}$ . El término  $\dot{\mathbf{q}}r^{-1}$  se debe a la dinámica interna de la fuente. Los potenciales y el tensor de campo están bien definidos fuera de de la línea de universo, i.e., para  $r \neq 0$ . En esta región las ecuaciones de Yang-Mills (32) se cumplen si las siguientes dos condiciones son válidas

$$\dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}] = 0 \quad (36)$$

$$\partial_r \left( \frac{\dot{\mathbf{q}}}{p} \right) = 0. \quad (37)$$

La primera condición se obtiene de la componente temporal de la ecuación (32), i.e.  $\nu = \tau$ , en tanto que la segunda se sigue de la componente radial  $\nu = r$  y utilizando el hecho de que se cumple la siguiente relación [12]

$$\frac{2}{r^2} \partial_r p^{-2} + \nabla^2 \left( \frac{\dot{p}}{p} \right) = 0. \quad (38)$$

Las componentes correspondientes a  $\nu = \theta$  y  $\nu = \phi$  de las ecuaciones de Yang-Mills se satisfacen de forma trivial.

Trautman [3] obtuvo las ecuaciones (36) y (37). Estas se satisfacen obviamente si la fuente de color es estática, i.e.  $\dot{\mathbf{q}} = 0$ . Si la fuente no es estática, entonces deben existir al menos dos generadores **A** y **B** de un grupo, tales que

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{A} \quad (39)$$

y se cumpla la siguiente relación entre  $\mathbf{q}$  y  $p$

$$\mathbf{q}(\tau) = \mathbf{A} \int_{r_0}^r d\tau \frac{p(\tau, \theta, \phi)}{p(r_0, \theta, \phi)} + \mathbf{B}. \quad (40)$$

La segunda de estas dos condiciones se obtienen al integrar (37) y para obtener la primera utilizamos las ecuaciones (36) y (40).

Vemos de la fórmula (40) que la dinámica de la fuente en el espacio interno está correlacionada con el desplazamiento en el espacio-tiempo. Esta es la razón por la que se obtiene una contribución a la radiación de energía proveniente de la rotación de la fuente en el espacio interno (término  $\dot{\mathbf{q}}/r$  en (35)). Es importante señalar que  $\mathbf{q}(\tau)$  es independiente de  $\theta$  y  $\phi$ , por lo que para satisfacer (40), es necesario que  $p$  factorice su dependencia en

el tiempo  $\tau$  y los ángulos  $(\theta, \phi)$ . Para el caso especial de una partícula sin aceleración, la ecuación (40) conduce a una dependencia lineal de la carga de color con el tiempo, esto es

$$\mathbf{q}(\tau) = \mathbf{A}\tau + \mathbf{B}. \quad (41)$$

Las componentes no nulas del vector potencial y del tensor de campo se reducen a

$$\mathbf{A}_r = \mathbf{A}_r = \frac{\mathbf{q}(\tau)}{r} = \frac{\mathbf{A}\tau + \mathbf{B}}{r}, \quad (42)$$

$$\mathbf{G}_{rr} = \frac{\mathbf{A}(\tau + r) + \mathbf{B}}{r^2}. \quad (43)$$

La solución propuesta en (34) satisface las ecuaciones de Yang-Mills (32) para  $r \neq 0$ . Trautman [3] argumentó que el término  $r^{-1}$  en el tensor de campo (35) hace imposible aplicar la ley de Gauss, pero se puede mostrar directamente que si definimos el “campo eléctrico” de Yang-Mills como  $\mathbf{E}^i = \mathbf{G}^{ri}$ , la ley de Gauss puede escribirse como

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} + [\mathbf{A}_i, \mathbf{E}^i] = \mathbf{j}^r. \quad (44)$$

Ahora si integramos (44) alrededor de el origen, el conmutador da una contribución que cancela exactamente el término  $r^{-1}$ , y por lo tanto la ley de Gauss se satisface.

Ahora abordemos el problema de la radiación de color. De acuerdo a (16) y (19) la carga de la fuente y la carga total están dadas por

$$\mathbf{I}_{\text{fuente}} = 4\pi(\mathbf{A}\tau + \mathbf{B}) \quad (45)$$

y

$$\mathbf{I} = 4\pi[\mathbf{A}(\tau + R) + \mathbf{B}] \quad (46)$$

respectivamente, donde  $R$  es el radio del volumen de integración. Entonces  $\mathbf{I}$  es divergente cuando  $R \rightarrow \infty$ , de hecho el término divergente puede ser removido si utilizamos una transformación de norma divergente tal que  $\mathbf{U} = \exp(-r\mathbf{A})$ .

Por otro lado la derivada temporal está bien definida, ya que  $\dot{\mathbf{I}} = \dot{\mathbf{I}}_{\text{fuente}} = 4\pi\mathbf{A}$ . Este resultado sugeriría que la carga total del sistema se radía, pero como no es posible separar en forma invariante de la norma la carga de color de la del campo, sólo es significativo considerar la radiación de la carga total de color. Por lo que si utilizamos la definición invariante para la carga de color (22), obtenemos

$$\dot{Q} = \frac{(4\pi)^2}{Q} \text{Tr}[\mathbf{A}(\mathbf{A}(\tau + R) + \mathbf{B})] = 0. \quad (47)$$

y por tanto no existe radiación de color. En la expresión anterior la traza se cancela debido a que se cumple (39).

Podemos explorar aún sobre el significado de la relación de conmutación (39). Por ejemplo consideremos el grupo SU(2) con el algebra bien conocida de sus generadores

$$[\tau_i, \tau_j] = 2i\epsilon_{ijk}\tau_k; \quad (48)$$

podemos escoger las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  de la forma

$$\mathbf{A} = a(\tau_1 - i\tau_2), \quad \mathbf{B} = \frac{1}{2}\tau_3, \quad (49)$$

donde  $a$  es una constante arbitraria. Se verifica fácilmente que con esta selección de matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  la ecuación (39) se satisface.

Como segundo ejemplo, consideremos los generadores  $X_1, X_2$  y  $X_3$  del grupo Euclideo  $E_2$ , los cuales satisfacen la reglas de conmutación:

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = -X_2, \quad [X_2, X_3] = 0. \quad (50)$$

Seleccionemos ahora las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  en la forma:

$$\mathbf{A} = iaX_2 + aX_3, \quad \mathbf{B} = iX_1 + b_2X_2 + b_3X_3, \quad (51)$$

donde  $a$ ,  $b_2$  y  $b_3$  son constantes arbitrarias. Con esta selección se puede mostrar que las condiciones de conmutación (39) se satisfacen. Por tanto concluimos que los potenciales de Liénard-Wiechert, definidos por la ec. (34), resuelven la ecuación de movimiento (32) si la fuente se alinea a lo largo de algunas direcciones particulares en el espacio interno. Es claro que estas direcciones dependen de la norma.

**Caso B.** Ahora discutiremos una solución válida para el grupo  $SU(n)$ . Supongamos que la fuente evoluciona con el tiempo de acuerdo a la transformación

$$\mathbf{q}(\tau) = \mathbf{V}^{-1}(\tau, \tau_0) \mathbf{q}_0 \mathbf{V}(\tau, \tau_0) \quad (52)$$

donde  $\mathbf{V}(\tau, \tau_0)$  es una matriz de  $SU(n)$ . La derivada temporal de  $\mathbf{q}$  está dada por

$$\dot{\mathbf{q}} = [\mathbf{q}, \mathbf{w}], \quad (53)$$

donde

$$\mathbf{w} = \mathbf{V}^{-1}(\tau) \dot{\mathbf{V}}(\tau). \quad (54)$$

Como deseamos encontrar una solución de las ecuaciones de YM que no sea equivalente bajo una transformación de norma a la considerada en el caso A, una manera de hacer esto es considerando el potencial

$$\mathbf{A}_\mu = \frac{\mathbf{q}(\tau) \dot{z}_\mu(\tau)}{r} - \mathbf{w} \delta_{\mu r}. \quad (55)$$

Veamos que el último término actúa como una transformación temporal dependiente de la norma que alinea la dirección de la fuente en cada tiempo.

Al calcular el tensor de campo obtenemos:

$$\mathbf{G}_{rr} = \frac{\mathbf{q}}{r^2},$$

$$\mathbf{G}_{r\theta} = \mathbf{q} \partial_\theta \left( \frac{\dot{p}}{p} \right),$$

$$\mathbf{G}_{\tau\phi} = \mathbf{q}\partial_\phi\left(\frac{\dot{p}}{p}\right). \quad (56)$$

En este caso las ecuaciones de Yang-Mills son satisfechas sin restricciones adicionales, y entonces la rotación en el espacio interno de la fuente es independiente de su desplazamiento en el espacio-tiempo.

Al calcular la carga total de color utilizando la definición (17) y (22) obtenemos

$$Q^2 = \text{Tr}[\mathbf{q}(\tau)\mathbf{q}(\tau)] = \text{Tr}[\mathbf{q}(\tau_0)\mathbf{q}(\tau_0)] = \text{Tr}[\mathbf{q}_0\mathbf{q}_0], \quad (57)$$

expresión que obviamente es independiente del tiempo, y por tanto tampoco hay radiación de color al igual que en el caso anterior.

Por motivos de completes, antes de concluir este capítulo debemos señalar dos puntos importantes.

1) Si  $\mathbf{q}^\dagger = \mathbf{q}$  i.e. ( $\mathbf{q}$  es hermitiana) entonces se sigue directamente de la ec. (36) que  $\dot{\mathbf{q}} = 0$ .

2) Si  $\mathbf{q}^\dagger \neq \mathbf{q}$  se podría dar la posibilidad de que  $\dot{\mathbf{q}} \neq 0$ . En este caso requeriríamos extender la teoría, ya que entonces estaríamos forzados a aceptar que las  $\mathbf{A}_\mu$ 's y las  $\mathbf{G}_{\mu\nu}$ 's no fueran hermitianas. Tendríamos, por tanto, que modificar adecuadamente (1) y además cambiar la definición dada por la ec. (22) para una carga de color, por una definición hermitiana, como por ejemplo  $Q^2 = \text{Tr}(\mathbf{I} \dagger \mathbf{I})$ . Esta definición da lugar a la posibilidad de tener una carga de color total dependiente del tiempo, en otras palabras podría haber radiación de color, como es posiblemente el caso del ejemplo dado por la ec. (41), donde, con la nueva definición de carga de color obtenemos que  $\dot{Q} = \frac{(4\pi)^2}{2Q} \{2(\tau + R)\text{Tr}([\mathbf{A}^\dagger, \mathbf{A}]\mathbf{B}) + \text{Tr}([\mathbf{B}^\dagger, \mathbf{B}]\mathbf{A}) + \text{Tr}(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{B})\}$ .

## Conclusiones.

En éste capítulo discutimos en forma detallada el concepto de radiación de color. Se propuso una definición invariante para la carga total de color en la ecuación (22). La separación de la carga total en una contribución de la fuente mas una contribución del campo no es invariante de norma. Por tanto, sólo aquellas proposiciones relacionadas con la carga de color total son físicamente significativas.

Presentamos dos soluciones para la radiación de una carga no Abeliana en movimiento, llegando a la conclusión de que en ninguna de ellas se produce radiación de color. La primera es una simple generalización del potencial de Liénard-Wiechert para el caso no Abeliano. Para satisfacer las ecuaciones de movimiento, en este caso, la dinámica interna debe estar correlacionada con el desplazamiento en el espacio-tiempo. Como un resultado de esta correlación, una fuente estática rotando en su espacio interno radiará energía.

La segunda solución es válida para grupos  $SU(n)$  y requiere que la rotación interna de la fuente deba ser generada por transformaciones unitarias. Los potenciales en este caso añaden a la expresión usual de Liénard-Wiechert una contribución que actúa como una transformación de norma temporal que alinea la fuente en cada instante de tiempo.

Sería interesante encontrar soluciones explícitas que produzcan radiación de color; éste es un punto de estudio en futuras investigaciones.

El formalismo presentado en este capítulo fue utilizado para estudiar una fuente puntual con carga de color, pero puede ser adaptado para estudiar la radiación producida por fuentes extendidas en especial para configuraciones solitónicas en Teoría de Campo.

## Referencias.

- [1] W. Drechsler and A. Roseblum: Phys. Lett. B, **106**, 81(1981).
- [2] W. Drechsler: Phys. Lett. B, **90**, 258(1980).
- [3] A. Trautman: Phys. Rev. Lett., **46**, 875(1981).
- [4] Yang, C.N. y Mills, R.L. Phys. Rev., **96** (1954)191.
- [5] P. Skivie and N. Weiss: Phys. Rev. D, **18**, 3809(1978);  
*idem*: Phys. Rev. D, **20**, 487(1979).
- [6] R. Jakiw, L. Jacobs and C. Rebbi: Phys. Rev. D, **20**, 474(1979).
- [7] J. Escalona, M. Torres y A. Antillón: Il Nuovo Cimento, **107**(1992)9-16.
- [8] C. H. Lai and C. H. Oh: Phys. Rev. D, **29**, 1805(1984);  
*idem*: Phys. Rev. D, **33**, 1133(1986).
- [9] E. J. Newman: J. Math. Phys. **15**,44(1974).
- [10] E. T. Newman and T.W. J. Unti: J. Math. Phys., **4**, 1467(1963).
- [11] I. Robinson and A. Trautman: Proc. Roy. Soc. (London), **265**, 463(1962).
- [12] A. Held, E. T. Newman and R. Posadas: J. Math. Phys., **11**, 3145(1970).

## Capítulo 4

### SISTEMAS MULTISOLITONICOS EN $(1 + 1)$ DIMENSIONES.

Uno de los aspectos interesantes a estudiar sobre los solitones es su comportamiento bajo la interacción de campos externos o bajo interacciones con otros solitones del mismo tipo. En este capítulo abordaremos el análisis, en  $(1+1)$  dimensiones, de la dinámica de solitones bajo pequeñas perturbaciones debidas ya sea a campos externos débiles o a la interacción entre solitones separados por grandes distancias.

En la primera sección realizamos una breve revisión sobre soluciones estáticas tipo solitón en  $(1 + 1)$  dimensiones y sus propiedades más importantes, las cuales serán utilizadas en las siguientes secciones. En la segunda sección encontramos las ecuaciones de movimiento que describen la posición del solitón, así como las fluctuaciones alrededor de la configuración de solitón, cuando el mismo se encuentra bajo la acción de un campo externo. En una aproximación lineal se encuentra que la posición del solitón cumple con una ecuación tipo Abraham-Lorentz. Estos resultados apoyan la interpretación del solitón como una partícula extendida. En la tercera sección discutimos las ecuaciones de movimiento para un sistema de solitones. Finalmente en la última sección estudiamos el potencial de interacción para un sistema kink-antikink, encontrando que asintóticamente el potencial es del tipo Yukawa.

## Soluciones estáticas tipo solitón en (1+1) dimensiones.

A continuación presentamos algunos aspectos importantes de las soluciones tipo solitón en (1+1) dimensiones, los cuales serán de utilidad en otras secciones de este capítulo.

Consideremos una teoría de campo escalar en (1 + 1) dimensiones cuya densidad Lagrangiana esta dada como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x \phi)^2 - V(\phi). \quad (1)$$

La ecuación de movimiento asociadas al Lagrangiano anterior tienen la forma

$$\partial_t^2 \phi - \partial_x^2 \phi + V'(\phi) = 0. \quad (2)$$

La energía es una cantidad conservada y está dada por la expresión

$$E = \int dx \left[ \frac{1}{2}(\partial_t \phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x \phi)^2 + V(\phi) \right] \quad (3)$$

que puede ser obtenida a partir de la componente  $T^{00}$  del tensor de energía-momento, que proviene de la expresión

$$T^{\mu\nu} = -\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi + g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (4)$$

Como el teorema de Derrick [1] establece la existencia de soluciones tipo solitón estático para una teoría escalar definida por la ec. (1), con  $V(\phi) > 0$  y  $V(\phi) = 0$  en el vacío, siempre y cuando la dimensión del espacio real es igual a uno, que es nuestro caso, llamemos a esa solución precisamente  $\phi_s(x)$ , la cual por tanto satisface la ecuación

$$\partial_x^2 \phi_s - V'(\phi_s) = 0. \quad (5)$$

Supondremos que el potencial  $V(\phi)$  está acotado por abajo y que el mínimo se hace coincidir con cero, de tal manera que si  $\phi = v_i$  representa un mínimo se tiene que  $V(v_i) = 0$ .

La condición de energía finita requiere que cuando  $x \rightarrow \pm\infty$  el campo tienda a alguno de los mínimos  $\phi \rightarrow v_i$ . Por otro lado, la estabilidad del solitón requiere que el mínimo sea degenerado (al menos deben de existir  $v_1$  y  $v_2$  con  $v_1 \neq v_2$ ) y que  $\phi$  tienda a diferentes vacíos en  $+\infty$  y  $-\infty$ ; i.e.  $\phi(+\infty) = v_i \neq \phi(-\infty) = v_j$ . Sujeta a las condiciones anteriores se puede resolver la ecuación (5); multiplicando por  $\partial_x \phi_s$  e integrando se obtiene

$$(\partial_x \phi_s)^2 = 2V(\phi_s), \quad (6)$$

donde la constante de integración es cero debido a la condición de que  $\partial_x \phi_s = V(\phi_s) = 0$  en  $x = -\infty$ .

La ecuación (6) constituye el teorema de Virial que se puede obtener también del teorema de Derrick [1]. A partir de la ecuación (6) y después de una integración tenemos que

$$x - x_0 = \pm \int_{\phi_s(x_0)}^{\phi_s(x)} \frac{d\phi}{[2V(\phi)]^{1/2}}. \quad (7)$$

Esta ecuación nos permite, en algunos casos, obtener explícitamente las soluciones solitónicas  $\phi_s$ . Una vez conocido  $\phi_s$ , la masa del solitón  $M_s$  se define como el valor de la energía en reposo. A partir de la ecuación (3) tenemos que

$$\begin{aligned} M_s &= \int dx \left[ \frac{1}{2} (\partial_x \phi_s)^2 + V(\phi_s) \right] \\ &= \int dx (\partial_x \phi_s)^2 = 2 \int dx V(\phi_s), \end{aligned} \quad (8)$$

donde para obtener el segundo renglón utilizamos el teorema del Virial (6).

Para discutir la estabilidad del solitón es conveniente hacer notar que podemos definir la corriente topológica conservada  $j_\mu$  (que no es de Noether) como

$$j^\mu = \frac{1}{c} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi, \quad (9)$$

donde  $\epsilon^{\mu\nu}$  es el símbolo de Levi-Civita en dos dimensiones y  $c$  es una constante de normalización. Obviamente  $j_\mu$  es una corriente conservada:  $\partial^\mu j_\mu = 0$ . La carga  $Q$  esta dada por

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} dx j_0 = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi = \frac{1}{c} [\phi(\infty) - \phi(-\infty)]. \quad (10)$$

Los solitones serán estables debido a la conservación de la carga. De la expresión anterior notamos que una carga diferente de cero requiere  $\phi(\infty) \neq \phi(-\infty)$ . Como en  $+\infty$  y  $-\infty$ ,  $\phi$  debe coincidir con el vacío, comprobamos que éste debe ser degenerado. La constante  $c$  se puede elegir de tal manera que  $Q$  pueda tomar valores  $+1$  y  $-1$ ; que se identifican como las cargas asociadas al solitón y al antisolitón respectivamente.

Hasta aquí tenemos el formalismo general y a continuación consideraremos los siguientes ejemplos.

1) "Kinks". Estos solitones aparecen al considerar el potencial

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} \left( \phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2. \quad (11)$$

Análogamente al ejemplo que vimos en la sección sobre "rompimiento espontáneo de la simetría", del capítulo 2, este potencial conduce a un RES para los valores  $\frac{m^2}{\lambda} > 0$ . El potencial anterior tiene doble degeneración en el vacío, i.e. el estado base puede tener dos valores

$$|\phi_0| = \pm \frac{m^2}{\lambda} = \pm v. \quad (12)$$

La expresión analítica para los kinks se obtiene al sustituir el potencial (11) en la ecuación (7) y después de invertir se obtiene

$$\phi_{(K)} = \pm \frac{m^2}{\sqrt{\lambda}} \tanh \left( \frac{m}{\sqrt{2}} x \right), \quad (13)$$

que representa un kink o antikink colocado en el origen. La posición del kink se puede cambiar al punto  $x_0$ , reemplazando  $x \rightarrow x - x_0$ .

Sustituyendo la solución anterior en la ecuación (8) se obtiene la masa del kink

$$M_K = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{m^3}{\lambda}. \quad (14)$$

2) Solitones de Sine-Gordon. Reciben este nombre las soluciones de las ecuaciones de movimiento, correspondientes a un potencial

$$V(\phi) = \frac{m^4}{\lambda} \left[ \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m}\phi\right) - 1 \right]. \quad (15)$$

Este potencial presenta degeneración infinita en el estado base, ya que estos se localizan en

$$|\phi_0| = 2\pi n \frac{m}{\sqrt{\lambda}}, \quad n \text{ entero}, \quad (16)$$

lo que conduce a un RES con degeneración infinita.

En este caso, la solución de solitón se obtiene al sustituir (15) en la ecuación (7)

$$\phi_{SG} = \pm \frac{4m}{\sqrt{\lambda}} \tan^{-1}\left(e^{mx}\right), \quad (17)$$

y la masa asociada está dada por

$$M_{SG} = 8 \frac{m^3}{\lambda}. \quad (18)$$

En las ecuaciones (13) y (17) el signo más corresponde a la solución de solitón, en tanto que el signo menos está asociado a las soluciones antisolitónicas.

## Soliton en un campo externo.

En la sección anterior discutimos el caso de un solitón estático aislado. Ahora nos interesa considerar el caso en el cual los solitones son sujetos a alguna perturbación. Esta perturbación se puede deber a una influencia (fuerza) externa, tal como la interacción con otro solitón. Se puede considerar al solitón como una partícula extendida. Nos interesa conocer la dinámica de esta partícula. En este capítulo consideraremos el caso de perturbaciones débiles, lo cual permitirá en general que el solitón mantenga su identidad; esto incluirá el caso de fuerzas externas débiles, o la interacción entre solitones muy alejados.

Primeramente notamos que una vez conocida la solución estática de un solitón en posición  $x_0$  (i.e.  $\phi_s(x - x_0)$ ), la invariancia de Lorentz de la teoría nos permite construir una solución que se mueva con velocidad constante  $v$ . Dicha solución está dada por

$$\phi_s\left(\frac{x - (x_0 + vt)}{\sqrt{1 - v^2}}\right), \quad (19)$$

que representa un solitón colocado en el punto  $x_0 + vt$ , que se mueve con velocidad constante  $v$ , consideramos aquí que la velocidad de la luz  $c = 1$ . Supongamos ahora que existe una fuerza actuando sobre el solitón, debido a la presencia de un campo externo

$$F = -\frac{\partial V_{ext}}{\partial z}, \quad (20)$$

donde  $z = z(t)$  representa la posición del solitón. Nótese que en los ejemplos de la sección anterior, la posición del solitón coincide con el punto en el cual el campo escalar se anula. Supondremos en general que  $\phi_s(x = z(t)) = 0$ . Analizaremos ahora la dinámica del solitón en presencia de la fuerza externa. La nueva acción se modificará con la contribución del potencial externo, i.e.

$$S(\phi, z) = \int \mathcal{L} dx dt - \int V_{ext} dt. \quad (21)$$

Nótese que la acción dada por (21) es una funcional del campo  $\phi(x, t)$  y de la posición  $z(t)$ . El campo  $\phi(x, t)$  se escribirá como la contribución del solitón centrada en  $z(t)$  del solitón, más una posible fluctuación  $\chi$

$$\phi(x, t) = \phi_s(x - z(t)) + \chi(x - z(t), t). \quad (22)$$

De tal manera que los grados dinámicos de libertad serán ahora la posición del solitón  $z(t)$  y el campo de fluctuaciones  $\chi$ . Las correspondientes ecuaciones de movimiento se determinarán al aplicar el principio de mínima acción a la  $S$  que se obtiene después de sustituir (22) en (21).

Para obtener la acción efectiva  $S(\chi, z)$  necesitamos evaluar:

$$\begin{aligned} \partial_t \phi(x, t) &= -\dot{z} \partial_\xi \phi - \dot{z} \partial_\xi \chi + \partial_t \chi \\ &= -\dot{z} \partial_\xi (\phi_s + \chi) + \partial_t \chi \end{aligned} \quad (23)$$

donde se definió  $\xi = x - z(t)$ . Por otro lado

$$\partial_x \phi = \partial_\xi \phi_s + \partial_\xi \chi, \quad (24)$$

es decir, consideraremos a  $\xi$  y a  $t$  como variables independientes. Sustituyendo estas relaciones en la acción (21) y utilizando para  $\mathcal{L}$  la ecuación (1), tenemos que  $S$  se puede expresar como

$$\begin{aligned} S(\chi, z) &= \int dx dt \left\{ \frac{1}{2} [\dot{z}^2 (\partial_\xi (\phi_s + \chi))^2 + (\partial_t \chi)^2 - 2\dot{z} (\partial_t \chi) \partial_\xi (\phi_s + \chi) - (\partial_\xi \phi_s)^2 - (\partial_\xi \chi)^2 \right. \\ &\quad \left. - 2(\partial_\xi \phi_s)(\partial_\xi \chi)] - [V(\phi_s) + \chi \frac{\partial V}{\partial \phi} + \frac{1}{2} \chi^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}] \right\} \\ &\quad - \int dt V_{\text{ext}}(z). \end{aligned} \quad (25)$$

Para obtener la expresión anterior hemos realizado un desarrollo de Taylor alrededor de la solución  $\phi_s$  para el potencial  $V(\phi)$  reteniendo términos cuadráticos en  $\chi$ .

Utilizando la ecuación de movimiento (5) para  $\phi_s$ , e integrando por partes se tiene

$$S = \int dt \left[ \frac{1}{2} \bar{M}_s \dot{z}^2 - V_{ext} \right] - \int dt \int d\xi \left[ \dot{z} \partial_t \chi \partial_\xi (\phi_s + \chi) \right] \\ + \int dt \int d\xi \left[ \frac{1}{2} [(\partial_t \chi)^2 - (\partial_\xi \chi)^2 - \chi^2 V''(\phi_s)] \right], \quad (26)$$

donde se definió la masa del solitón  $\bar{M}_s$  como

$$\bar{M}_s = \int d\xi [\partial_\xi (\phi_s + \chi)]^2. \quad (27)$$

Es importante notar que  $\bar{M}_s$  coincide con la masa estática del solitón  $M_s$ , ecuación (8) en el límite no perturbativo, en el que se desprecian las fluctuaciones ( $\chi = 0$ ). En el caso general la ecuación (27) muestra que las fluctuaciones alrededor del solitón modificarán la masa efectiva del mismo.

Al realizar la variación de la acción con respecto a la variable  $z$  obtenemos, por el principio de mínima acción, la ecuación de movimiento para la posición del solitón

$$\bar{M}_s \ddot{z} = - \frac{\partial V_{ext}}{\partial z} + \int d\xi (\partial_\xi \phi_s + \partial_\xi \chi) \partial_t \chi, \quad (28)$$

por simplicidad se consideró  $\bar{M}_s$  constante. Al realizar la variación con respecto a  $\chi$  se obtiene

$$(\partial_t^2 - \partial_\xi^2) \chi + \frac{\partial^2 V(\phi_s)}{\partial \phi_s^2} \chi = J(\xi), \quad (29)$$

donde la fuente  $J$  está dada por

$$J(\xi) = \frac{\partial}{\partial t} [\dot{z} \partial_\xi (\phi_s + \chi)] + 2 \dot{z} \partial_t \chi. \quad (30)$$

Las ecuaciones (28) y (29) constituyen las ecuaciones de movimiento para la posición del solitón y para las fluctuaciones, respectivamente. Estas ecuaciones están obviamente acopladas y dependen de la configuración del solitón  $\phi_s$ . La ecuación (28) muestra que

en presencia de un campo externo la posición de un solitón  $z(t)$  cumple con la Ley de Newton, en la cual aparece además de la fuerza externa una fuerza o contribución extra, proveniente de la fluctuación. Una posible interpretación del efecto de este término se presenta posteriormente. En el caso en que se desprecian las fluctuaciones ( $\chi = 0$ ), la ecuación (28) se reduce a

$$M_s \ddot{z} = -\frac{\partial V_{ext}}{\partial z}, \quad (31)$$

donde se tomó en cuenta que en este caso  $\tilde{M}_s = M_s$ . El hecho de que el solitón cumple con la Ley de Newton muestra que la interpretación de éste como una partícula extendida es válida. La ecuación (31) fue obtenida en la referencia [2]. En nuestro caso demostramos que al considerar las fluctuaciones, la masa del solitón se modifica y aparece una fuerza extra, que como se verá es disipativa.

La ecuación para las fluctuaciones (29) es una ecuación tipo onda en presencia de un potencial (término  $\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$ ) producido por el solitón y con una fuente  $J$  que depende de la velocidad y de la aceleración del solitón. Es conveniente considerar primero la ecuación homogénea ( $\dot{z} = 0, J = 0$ ) que está dada por

$$[\partial_t^2 - \partial_\xi^2 + V''(\phi_s)]\chi = 0. \quad (32)$$

Esta es la ecuación usual que se encuentra en el estudio de la estabilidad de los solitones en (1+1) dimensiones [3].

Debido a la invariancia temporal se puede proponer una solución a la ecuación (32) como superposición de modos normales

$$\chi(\xi, t) = \sum_n \tilde{a}_n e^{-i\omega_n t} \chi_n(\xi), \quad (33)$$

donde las  $\tilde{a}_n$ 's son coeficientes complejos y las  $\chi_n$ 's y  $\omega_n$ 's satisfacen una ecuación de eigenvalores

$$-\partial_{\xi}^2 \chi_n + \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \chi_n = \omega_n^2 \chi_n, \quad (34)$$

que es una ecuación de Schrodinger unidimensional con potencial  $V''(\phi_s)$ . El sistema será estable si ninguna de las frecuencias  $\omega_n$  es negativa. Se puede demostrar que tal es el caso [3] en nuestro problema; de hecho existe siempre una solución de frecuencia cero  $\omega_0 = 0$  (modo cero), que es la menor de las frecuencias.

La existencia del modo cero es fácil de demostrar. Si la ecuación del solitón (5) la reescribimos como

$$\partial_{\xi\xi} \phi_s = \frac{\partial V}{\partial \phi_s}, \quad (35)$$

entonces al diferenciar respecto a  $\xi$  obtenemos

$$\partial_{\xi\xi}(\partial_{\xi} \phi_s) = \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_s^2} (\partial_{\xi} \phi_s) \quad (36)$$

y al comparar las ecuaciones (36) y (34) encontramos que  $\partial_{\xi} \phi_s$  es solución de la ecuación (34) con frecuencia  $\omega_0 = 0$ . Por lo tanto la solución de frecuencia cero  $\chi_0$  se puede escribir como

$$\chi_0 = N \partial_{\xi} \phi_s, \quad (37)$$

para alguna constante de normalización  $N$ . Es interesante hacer notar que para el caso del kink y de Sine-Gordon la ecuación (34) se puede resolver explícitamente determinando así el espectro ( $\omega_k$ ) y sus correspondientes eigenfunciones ( $\chi_k$ ) [3]. Las funciones  $\chi_0$  y  $\chi_k$  forman un conjunto completo de funciones que son mutuamente ortogonales entre sí. En particular pueden ser utilizadas para construir el propagador de la ecuación (32). El propagador retardado lo podemos escribir como [4]:

$$\Delta_R(\xi, t; \xi', t') = \theta(t - t') \{ \chi_0(\xi) \chi_0(\xi') + \left| \sum_k \chi_k(\xi', t') \chi_k^*(\xi, t) + C.C. \right| \}, \quad (38)$$

$k$  puede representar un índice continuo sustituyendo entonces la suma por la integral. Es inmediato demostrar que la expresión (38) corresponde a la función de Green de la ecuación (32), ya que una sustitución directa de una en otra da

$$[\partial_t^2 - \partial_\xi^2 - V''(\phi_s)] \Delta_R(\xi, t; \xi', t') = \delta(t - t')\delta(\xi - \xi'), \quad (39)$$

donde se usó la propiedad de completéz de las funciones  $\chi_0$  y  $\chi_k$

$$\chi_0(\xi)\chi_0(\xi') + \left[ \sum_k \chi_k(\xi', t)\chi_k^*(\xi, t) + C.C. \right] = \delta(\xi - \xi'). \quad (40)$$

Las soluciones (33) de la ecuación homogénea (32) son el equivalente de las soluciones de ondas en un medio, de las ecuaciones de Maxwell; sólo que en el presente caso las fluctuaciones (ondas) suceden en presencia de un solitón. Ahora estamos interesados en analizar la solución de la ecuación inhomogénea. Tomando en cuenta que conocemos la función de Green (propagador) de la ecuación (29) tenemos que la solución a la ecuación inhomogénea se puede escribir como

$$\chi(\xi, t) = \int dt' \int d\xi' \Delta_R(\xi, t; \xi', t') J(\xi', t'), \quad (41)$$

donde el propagador está dado en la ecuación (38) y la fuente  $J$  en la ecuación (30). Como la fuente depende en general de  $\chi$ , la ecuación (41) es una ecuación integral para  $\chi$ , cuya solución no es fácil de determinar. Sin embargo, ahora consideremos una aproximación lineal, es decir despreciamos cualquier término cuadrático en  $\dot{z}$ , en  $\chi$  o en  $\dot{z}\chi$ . En este caso la fuente queda aproximada como

$$J(\xi, t) \approx \frac{\partial}{\partial t} [\dot{z}\partial_\xi \phi_s] = \dot{z} \frac{\chi_0}{N}. \quad (42)$$

El último término se obtiene utilizando la ec.(37). Al sustituir en la ecuación (41) obtenemos

$$\chi(\xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d\xi' \Delta_R(\xi, t; \xi', t') \ddot{z}(t') \frac{\chi_0(\xi')}{N}. \quad (43)$$

Esta expresión que se puede evaluar explícitamente al utilizar la expresión para  $\Delta_R$  dada en (38) y las relaciones de ortogonalidad:

$$\int d\xi \chi_0(\xi) \chi_0(\xi) = 1, \quad \int d\xi \chi_0(\xi) \chi_k(\xi) = 0, \quad (44)$$

obteniendo  $\chi(\xi, t) = (\dot{z}(t) - \dot{z}(-\infty))N^{-1} \chi_0(\xi)$ . Si suponemos que  $\dot{z}(-\infty) = 0$ , llegamos finalmente a

$$\chi(\xi, t) = \dot{z}N^{-1} \chi_0(\xi), \quad (45)$$

que muestra que la fluctuación en la aproximación lineal es proporcional a  $\dot{z}$  y al modo cero. En el caso del kink,  $N^2 = \frac{3\lambda}{2\sqrt{2}m}$ .

Pasamos ahora a considerar la ecuación de movimiento para  $z$ ; Manteniendo los términos lineales en  $\chi$  y sustituyendo la expresión (45) para  $\chi$  en la ecuación (28) obtenemos

$$M\ddot{z} = -\frac{\partial V_{ext}}{\partial z} + \frac{d}{dt} \int d\xi \ddot{z}N^{-1} \chi_0(\xi) \partial_\xi \phi_s(\xi). \quad (46)$$

Utilizando la ecuación (37) y la condición de normalización (44) para  $\chi_0$  llegamos finalmente a

$$M\ddot{z} = -\frac{\partial V_{ext}}{\partial z} + N^{-2} \ddot{z}. \quad (47)$$

Es interesante notar que la ecuación de movimiento toma la forma de una ecuación tipo Abraham-Lorentz [5] donde el último término proporcional a  $\ddot{z}$  representa la reacción de radiación que induce un frenado en el solitón debido a la pérdida de energía radiada, con tiempo característico

$$\tau = \frac{N-2}{M}. \quad (48)$$

### Ecuaciones de movimiento para un sistema de solitones.

En la sección anterior consideramos la ecuación de movimiento para un solitón en presencia de una fuerza externa. La dinámica de un solitón puede también ser afectada por la presencia de otros solitones. Aunque en algunos casos particulares existen soluciones exactas para sistemas de varios solitones en (1+1) dimensiones, en nuestro caso nos interesa el estudio cuando existen varios solitones muy alejados entre sí. Entre otras razones, las técnicas estudiadas podrán ser aplicadas a sistemas multisolitónicos en otras dimensiones donde no existen soluciones exactas, además de que nos permitirán determinar la naturaleza de las interacciones entre solitones.

A continuación vamos a obtener las ecuaciones de movimiento para un conjunto de solitones. Para ello partiremos de la suposición de que existe una solución  $\phi_s(x - x_1)$  estática que representan un solitón en la posición  $x_1$  que cumple con la ecuación (5)

$$\partial_x^2 \phi_s - V'(\phi_s) = 0, \quad (49)$$

y que satisface las condiciones de frontera adecuadas. Podemos notar que en todos los casos de interés conocidos, el solitón tiene la característica de que el campo  $\phi_s$  se anula en la posición del solitón. Por lo tanto definiremos la posición del solitón  $x = x_1$ , de acuerdo a la condición  $\phi_s(x = x_1) = 0$ .

En el caso de una configuración de  $n$ -solitones esperamos que la posición del  $i$ -ésimo solitón sea una variable dinámica  $x_i(t)$ , que cambiará con el tiempo debido a la interacción con los otros solitones. Una solución exacta  $\phi_e(x, x_1, \dots, x_n)$  a este problema debería satisfacer la ecuación de movimiento dependiente del tiempo

$$\partial_t^2 \phi_c - \partial_x^2 \phi_c + V'(\phi_c) = 0. \quad (50)$$

En ausencia de una solución exacta, buscaremos una solución aproximada a través de un ansatz

$$\phi_c = \phi_c(x, x_1, \dots, x_n), \quad (51)$$

que cumpla con varias condiciones:

- i)  $\phi_c$  se debe de anular en cada posición de un solitón, i.e.  $\phi_c(x = x_i) = 0$ .
- ii) cuando los solitones están muy alejados, cerca de la posición de cada solitón (antisolitón) el campo  $\phi_c$  deberá ser similar a la configuración de un solo solitón.
- iii)  $\phi_c$  deberá cumplir con las condiciones de frontera adecuadas a la configuración de  $n$ -solitones.

De manera similar a lo que hacíamos en la sección anterior, al campo  $\phi_c$  se le podría agregar una fluctuación  $\chi$ , que como vimos da lugar de manera efectiva a efectos de reacción de radiación en la ecuación de movimiento de la posición del solitón. En lo que sigue despreciaremos esos efectos, de tal manera que no incluiremos la fluctuación ( $\chi = 0$ ).

La dinámica de  $x_i(t)$  se determinará a partir de las ecuaciones de movimiento que se obtengan al sustituir (51) en la acción

$$S = \int dt \int dx \mathcal{L}(\phi_c, \partial_\mu \phi_c). \quad (52)$$

Al tomar las variaciones respecto a  $x_i$  obtenemos

$$H_{ij} \dot{v}_j + v_j \left[ \frac{\partial H_{ij}}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial H_{ji}}{\partial x_i} \right] v_l = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (53)$$

donde

$$H^{ij}(x_1, \dots, x_n) = \int dx \left( \frac{\partial \phi_c}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial \phi_c}{\partial x_j} \right), \quad (54)$$

$$U(x_1, \dots, x_n) = \int dx \left[ \frac{1}{2} (\partial_x \phi_c)^2 + V(\phi_c) \right] - nM_s \quad (55)$$

y

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} \quad (56)$$

En la expresión para el potencial de interacción, hemos sustraído la masa del sistema de  $n$  solitones. Nótese que en el caso en que  $\phi_c$  cumple con la relación del Virial, ecuación (6), el potencial se reduce a

$$U(x_1, \dots, x_n) = 2 \int dx V(\phi_c) - nM_s \quad (57)$$

Las ecuaciones (53) representan un conjunto de  $n$  ecuaciones acopladas de movimiento para las posiciones  $x_i(t)$  de los solitones. En general aparece un término cuadrático en las velocidades.

Es interesante, por su simplicidad, considerar el caso de dos solitones ( $n = 2$ ). El origen se selecciona de tal manera que  $x_2 = \frac{z}{2}$  y  $x_1 = -\frac{z}{2}$ , donde  $z$  representa la coordenada relativa. Restando las dos ecuaciones (53) correspondientes a  $i = 1$  e  $i = 2$  y utilizando el hecho de que  $H_{11} = H_{22} = -H_{12} = -H_{21}$  se obtiene

$$M_s \ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z}, \quad (58)$$

donde  $M = 2H_{22}$ . Hay que notar que en este caso los términos proporcionales a  $\dot{z}^2$  se cancelan. La ecuación (58) muestra que, dentro de la presente aproximación, el movimiento relativo se describe por la ecuación de Newton, con el potencial de interacción dado en la ecuación (55).

## Potenciales de interacción entre dos solitones.

A continuación utilizaremos los resultados de la sección anterior para calcular el potencial de interacción entre un solitón y un antisolitón para el caso del kink. Para ello utilizaremos dos ansatz: uno tipo suma y otro tipo producto. Recordamos que dichos ansatz deben cumplir, al menos, con tres condiciones:

- i) anularse en la posición del solitón o antisolitón,
- ii) coincidir con la configuración de un solitón aislado cerca de la posición del mismo, cuando el otro solitón está muy alejado y
- iii) cumplir con las condiciones de frontera adecuadas.

Los potenciales así calculados serán comparados con los calculados por Rajaraman [6]. A continuación calcularemos el potencial para un sistema kink-antikink.

Las soluciones para un kink  $\phi_c(x)$  o un antikink  $\bar{\phi}_c(x)$  están dadas por la ecuación (13). Ver figura (1)

No es posible contruir una configuración tipo kink-kink que cumpla con las tres condiciones requeridas para el ansatz. Sin embargo una configuración tipo kink-antikink como la mostrada en la figura (1) cumple con dichas condiciones. En particular se anula en las posiciones  $x = \frac{z}{2}$  y  $x = -\frac{z}{2}$  correspondientes a las posiciones del kink y del antikink respectivamente. En  $x \rightarrow -\infty$ ,  $\phi \rightarrow -\frac{m}{\sqrt{\lambda}}$  tal y como corresponde a la cercanía de un kink y en  $x \rightarrow \infty$ ,  $\phi \rightarrow -\frac{m}{\sqrt{\lambda}}$  correspondiendo a la cercanía de un antikink.

Podemos construir un ansatz tipo suma de la forma

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi_k(x + \frac{z}{2}) + \bar{\phi}_k(x - \frac{z}{2}) + \text{Cte.} \\ &= \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \{ \tanh[\frac{m}{\sqrt{2}}(x + \frac{z}{2})] - \tanh[\frac{m}{\sqrt{2}}(x - \frac{z}{2})] - 1 \} \end{aligned} \quad (59)$$

donde la constante se seleccionó como  $-\frac{m}{\sqrt{\lambda}}$  y se agregó para cumplir con las condiciones de frontera mencionadas y para que  $\phi(x = \frac{z}{2}) = \phi(x = -\frac{z}{2}) = 0$ . Al sustituir el ansatz (59) en la expresión (55) encontramos el potencial de interacción kink-antikink correspondiente al ansatz de suma

$$U^*(R) = -\frac{M_k}{4} \operatorname{sech}^4\left(\frac{mR}{\sqrt{2}}\right) \left[1 + \tanh\left(\frac{\sqrt{2}mR}{4}\right)\right], \quad (60)$$

donde  $R$  es la separación kink-antikink,  $R \equiv z$  y  $M_k$  es la masa de un kink dada por la ecuación (14). Es de particular importancia considerar la expresión asintótica ( $mR \gg 1$ )

$$U^*(R) \approx -12M_k e^{-\sqrt{2}mR}. \quad (61)$$

Las expresiones (60) y (61) muestran que el potencial kink-antikink es atractivo y que asintóticamente es un potencial tipo Yukawa con intensidad  $12M_k$  y alcance  $\frac{1}{\sqrt{2}m}$ .

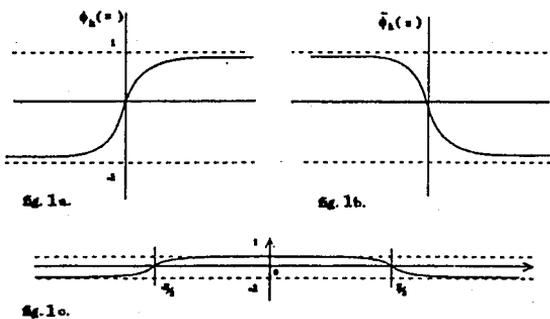


Fig.1. Configuraciones solitónicas. Se construye una configuración kink-antikink a partir de un kink (izquierda) centrado en  $-\frac{z}{2}$  y un antikink (derecha) centrado en  $\frac{z}{2}$ . En la gráfica se han normalizado los campos escalares.

Un ansatz tipo producto

$$\phi(x) = \phi_k(x + \frac{z}{2})\bar{\phi}_k(x - \frac{z}{2}), \quad (62)$$

tambi3n cumple con las condiciones requeridas. Al sustituir este ansatz en la ecuaci3n (55) obtenemos el potencial kink-antikink correspondiente

$$\begin{aligned} U^P(R) = & -\frac{M_k}{2} \{ \tanh^2(\sqrt{2}mR) [\operatorname{sech}^2(\frac{\sqrt{2}}{2}mR) \tanh(\frac{\sqrt{2}}{2}mR) + 2 \tanh(\frac{\sqrt{2}}{2}mR) + 2] \\ & + 6 \operatorname{sech}^4(\sqrt{2}mR) [\frac{\sqrt{2}}{2}mR - \tanh(\frac{\sqrt{2}}{2}mR)] \\ & - 3 \operatorname{sech}^2(\frac{\sqrt{2}}{2}mR) \operatorname{sech}^2(\sqrt{2}mR) \tanh(\sqrt{2}mR) \} \end{aligned} \quad (63)$$

con  $z' = \frac{1}{\sqrt{2}}mR$ . Asint3ticamente obtenemos

$$U^P(R) \approx -2M_k e^{-\sqrt{2}mR}, \quad (64)$$

que corresponde nuevamente a un potencial tipo Yukawa. Las expresiones asint3ticas dadas en las f3rmulas (61) y (64) coinciden con los resultados obtenidos por Amado, Liu y Wong [3].

Una deducci3n alternativa del potencial de interacci3n kink-antikink es la dada por Rajaraman [3], la cual ahora presentamos y compararemos con los resultados anteriores.

Consideremos la acci3n definida en la forma

$$S = \int dx \frac{1}{2} \{ (\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi) + \lambda_1 \phi(x) \delta(x - x_1) + \lambda_2 \phi(x) \delta(x - x_2) \}, \quad (65)$$

que corresponde al mismo tipo de sistemas definido por la densidad Lagrangiana dada en (1), pero ahora introducimos la condici3n de que los solitones est3n sujetos por fuerzas externas de tal modo que sus posiciones est3n fijas en  $x_1$  y  $x_2$ . Esto se logra introduciendo los multiplicadores de Lagrange  $\lambda_1, \lambda_2$ . Para comprobarlo realizamos variaciones en  $\lambda_1, \lambda_2$  obteniendo

$$\frac{\delta S}{\delta \lambda_1} = \int dx \quad \phi(x)\delta(x - x_1) = \phi(x_1) = 0 \quad (66a)$$

$$\frac{\delta S}{\delta \lambda_2} = \int dx \quad \phi(x)\delta(x - x_2) = \phi(x_2) = 0, \quad (66b)$$

que muestra que  $\phi$  se anula en  $x_1$  y  $x_2$ , lo cual como se había discutido representa las condiciones que determinan las posiciones de los solitones.

Tomando ahora las variaciones respecto a  $\phi$  tenemos que la ecuación estática de movimiento es

$$-(\partial_x^2 \phi) + V'(\phi) = \lambda_1 \delta(x - x_1) + \lambda_2 \delta(x - x_2). \quad (67)$$

Integrando esta ecuación alrededor de  $x_i$ , y suponiendo que  $\phi$  es continua obtenemos las condiciones:

$$\left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{b_1} - \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{a_1} \right] = -\lambda_1 \quad (68a)$$

$$\left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{b_2} - \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{a_2} \right] = -\lambda_2 \quad (68b)$$

donde  $a_i = x_i - \epsilon$  y  $b_i = x_i + \epsilon$ ,  $i = 1, 2$ . Nuevamente elegimos:  $x_1 = -\frac{x}{2}$ ,  $x_2 = \frac{x}{2}$ . Por simetría, ver figura (1), seleccionamos  $\lambda_1 = -\lambda_2 \equiv \lambda_0$ .

Si consideramos primero la región del espacio en la que  $x < x_1$  tenemos que en la ecuación de movimiento (67) el miembro derecho se anula. Si ahora imponemos las condiciones de frontera  $\phi \rightarrow -\frac{m}{\sqrt{\lambda}}$ ,  $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$  en  $x \rightarrow -\infty$  tal y como corresponde a un kink cercano, tenemos que en la región  $x < x_1$  la ecuación (67) se puede integrar dando la misma solución que en (13)

$$\phi(x) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh\left(\frac{mx}{\sqrt{2}}\right), \quad x < x_1, \quad (69)$$

sólo que esta solución es válida para  $x < x_1$ . Ahora en el punto  $x_1$  se introduce una discontinuidad en la derivada. Notemos que de acuerdo a (69)  $\frac{d\phi}{dx}(x_1 - \epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{m}{\sqrt{\lambda}}$ , mientras que en  $x_1 + \epsilon$  escribiremos la derivada con  $\frac{d\phi}{dx}(x_1 + \epsilon) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \alpha$ , de tal manera que  $\lambda = \alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Si ahora se integra (67) entre  $x_1$  y  $x = 0$  sujeto a las condiciones anteriores se obtiene

$$x + \frac{z}{2} = \int_0^{\phi(x)} \frac{d\phi}{(\frac{1}{2}\phi^4 - \phi^2 + \alpha^2)^{1/2}} \quad x_1 < x < 0. \quad (70)$$

La constante  $\alpha$  se determina utilizando un criterio de simetría, notamos que de la figura (1) se espera que en  $x = 0$ , la derivada de  $\phi$  se anule ( $\frac{d\phi(0)}{dx} = 0$ ). A partir de (70) obtenemos dos posibles soluciones a esta condición:

$$\phi(0) \equiv a^2 = 1 + (1 - 2\alpha)^{1/2} \quad (71a)$$

$$\phi(0) \equiv b^2 = 1 - (1 - 2\alpha)^{1/2}. \quad (71b)$$

Se selecciona el menor valor  $\phi(0) = b$  en base de que se espera que una configuración kink-antikink tienda a reducir el valor del campo en medio de los solitones. Tomando en cuenta estos resultados tenemos que la ecuación (70) se puede integrar para dar

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}z &= \int_0^b \frac{d\phi}{(\frac{1}{2}\phi^4 - \phi^2 + \alpha^2)^{1/2}} \\ &= \sqrt{2} \int_0^b \frac{d\phi}{[(\phi^2 - \alpha^2)(\phi^2 - b^2)]^{1/2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{a} \mathcal{K}(b/a) \end{aligned} \quad (72)$$

donde  $\mathcal{K}$  es la integral elíptica de primer especie. La ecuación (72) es una ecuación implícita que determina  $\alpha$  como función de la separación  $z$  entre los solitones.

La energía del sistema se obtiene al sustituir las expresiones anteriores en la ecuación (3). De hecho no es necesario invertir la expresión (72), ya que se puede obtener explícitamente el potencial

$$U(R) = \frac{m^3}{\lambda} \left\{ \frac{\sqrt{2}a}{3} [(a^2 + b^2)\mathcal{E}(b/a) - (a^2 - b^2)\mathcal{K}(b/a)] + \frac{1}{4}R(1 - \alpha^2) \right\} \quad (73)$$

donde nuevamente se separa el potencial por medio de la fórmula  $E = 2M_k + U$  y  $\mathcal{E}$  es la integral elíptica de segunda especie. En la región asintótica ( $mR \gg 1$ ) se obtiene la expresión

$$U(R) \approx -12M_k e^{-\sqrt{2}mR} \quad (74)$$

que corresponde al potencial tipo Yukawa de la ec.(61).

En figura (2) se comparan las expresiones para  $U(R)$  calculado por el ansatz de suma, producto, así como el método de Rajaraman. Si bien los potenciales difieren en general, se encuentra que en los tres casos coinciden en la región asintótica ( $mR \gg 1$ ). Es en esta región donde los resultados tienen relevancia, ya que cuando los solitones se acercan, es de esperarse que no mantengan su identidad y por lo tanto el concepto de potencial de interacción no esté bien definido.

Es interesante hacer notar que métodos similares a los empleados en este capítulo para obtener el potencial de interacción entre solitones, se pueden emplear en casos más complicados. Por ejemplo el potencial de interacción nucleón-nucleón ha sido evaluado numéricamente a partir del ansatz tipo producto en el contexto del modelo de Skyrme [7].

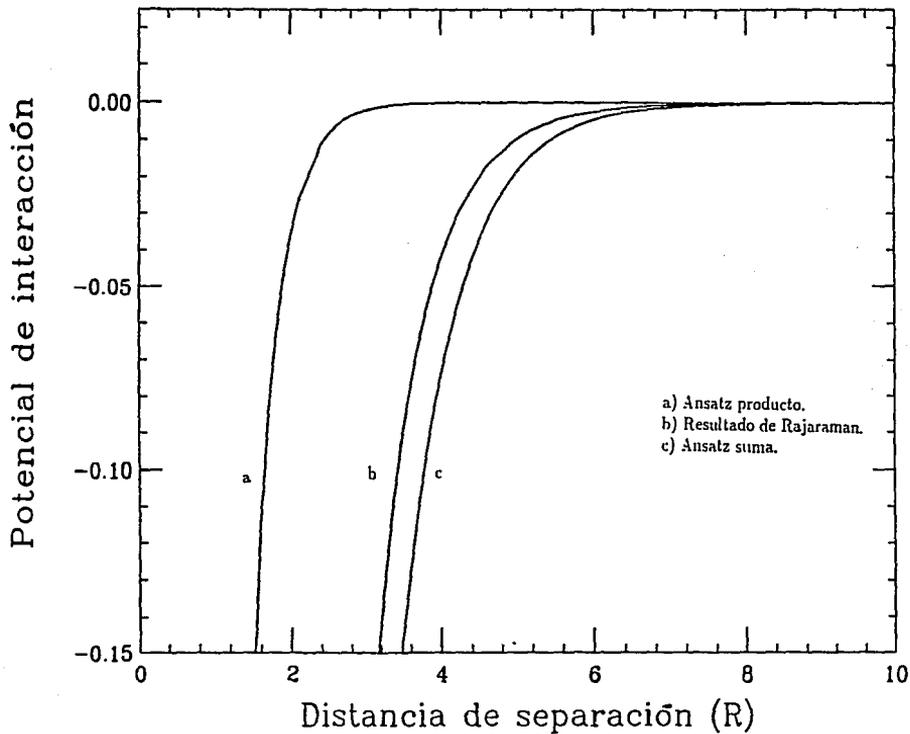


Fig.2. Potencial de interacción entre kink-antikink, en función de la distancia de separación. El potencial está expresado en unidades de la masa del kink ( $c=1$ ), en tanto que la distancia de separación está normalizada en unidades de  $\frac{1}{\sqrt{2m}}$ .

## Conclusiones.

Señalaremos los puntos más importantes del presente capítulo, en el cual hemos trabajado con solitones en  $(1 + 1)$  dimensiones.

Primeramente hemos considerado la dinámica de un solitón en un campo externo débil. En este caso se propuso como ansatz una función que consiste en la solución estática centrada en la posición del solitón más una fluctuación  $\chi$ . Los grados dinámicos de libertad asociados son la posición del solitón  $z(t)$  y el campo de fluctuaciones  $\chi$ . La fuerza externa fué representada por el término  $V_{ext}$  agregado a la densidad Lagrangiana.

Despreciando términos cuadráticos en  $\dot{z}$  y en  $\chi$ , además de términos cruzados  $\dot{z}\chi$  la ecuación de movimiento para  $z$  se reduce a una ecuación del tipo Abraham-Lorentz, ya que contiene una contribución proveniente de la "reacción de radiación".

Con las mismas aproximaciones la ecuación de movimientos para las fluctuaciones queda expresada como una ecuación diferencial parcial de segundo orden, la que resolvimos analíticamente utilizando la función de Green (propagador retardado). La solución que se obtuvo es proporcional a la velocidad del solitón y al modo cero.

El segundo problema que se consideró fué el análisis de las ecuaciones de movimiento para un sistema de solitones. En este caso, sabemos que existe una función que representa la solución para un solitón estático. Como no existe una solución exacta para describir un sistema de  $n$  solitones proponemos un ansatz para buscar una solución aproximada. Determinamos las ecuaciones de movimiento asociados al sistema de solitones. La dinámica correspondiente esta caracterizada por las ecuaciones de Newton dadas en la ec. (53). Las ecuaciones contienen en general una contribución proporcional al cuadrado de las velocidades. Sin embargo las ecuaciones se simplifican notablemente al considerar el caso particular de dos solitones expresado en términos de la coordenada relativa (ec. (58)).

Finalmente, en este capítulo analizamos el potencial de interacción kink-antikink, para ello utilizamos los resultados hallados anteriormente (ec. (57)) empleando dos ansatz (uno tipo suma y otro tipo producto de funciones que representan al sistema de dos solitones).

Encontramos en cada caso que el potencial kink-antikink es atractivo y proporcional a la masa del solitón. En el régimen asintótico, en el que los dos solitones se encuentran muy alejados, ambos resultados se reducen a un potencial tipo Yukawa (ecuaciones (61) y (64)).

Un punto interesante para ser abordado en un trabajo futuro consiste en el análisis del problema de cuantización de un sistema de solitones y el papel que juega el modo cero en diversos esquemas de cuantización.

## Referencias.

- [1] G.H. Derrick: *J. Math. Phys.* 5(1964)1252; ver también W. Marciano y H. Pagels: *Phys. Rep.* 36,3(1978)138,pag. 232.
- [2] A.R. Bishop: *Physica 1D*(1980)1.
- [3] R. Rajaraman: *Phys. Rev. D* 15(1977)2866.
- [4] C. Itzykson y J.B. Zuber: *Quantum Field Theory*. Mc.Graw-Hill (1980).
- [5] J.D.Jackson, *Classical Electrodynamics*. John-Wiley and sons, N.Y. (1975).
- [6] R. Rajaraman. *Solitons and Instantons*. North Holland (1987) Amsterdam.
- [7] Amado, Liu y Wong: *Phys. Rev. Lett.* 63(1989)852;  
*idem*: *Phys. Rev. C* 39(1989)2317.
- [8] T.S. Walhout y J. Wambach: *Phys. Rev. Lett.* 67(1991)314.

**Capítulo 5**  
**VORTICES DE CHERN-SIMON**  
**CON MOMENTO MAGNETICO ANOMALO.**

La resistividad eléctrica de muchos metales y aleaciones decae rápidamente a cero cuando el material es enfriado a temperaturas suficientemente bajas. Este fenómeno fue observado por primera vez en Leiden por Kamerlingh Onnes.

En el estado superconductor, la resistividad eléctrica es exactamente cero, cuando se aplica una corriente continua, o al menos tan próxima a cero que se han observado corrientes eléctricas persistentes, sin atenuación, en anillos superconductores durante mucho tiempo.

Las propiedades magnéticas de los superconductores son también sorprendentes. Es un hecho experimental el que un material superconductor inmerso en un campo magnético débil se comporta como un diamagneto perfecto, con inducción magnética igual a cero en el interior. Cuando una muestra se coloca en un campo magnético y se enfría por debajo de la temperatura de transición en la que se produce la superconductividad, el flujo magnético originalmente presente, es expulsado de la muestra. Este fenómeno es conocido como efecto Meissner.

Un campo magnético aplicado a un superconductor, si es suficientemente intenso destruye la superconductividad del material. Existe un valor crítico del campo magnético aplicado ( $B_c$ ) para que tenga lugar la destrucción de la superconductividad, este valor depende de la temperatura. A la temperatura crítica  $T_c$ , el valor de  $B_c$  es cero.

Para muchos materiales superconductores, la magnetización producida en un cilindro sólido largo, bajo la acción de un campo magnético longitudinal, de intensidad menor que

$B_c$ , exhibe un comportamiento lineal con respecto al campo magnético. A estos materiales se les llama superconductores tipo I. Existen otros materiales cuya magnetización depende linealmente del campo magnético aplicado hasta un valor  $B_{c1}$  a partir de este valor la magnetización va decayendo hasta llegar a cero en  $B_{c2}$ . ( $B_{c1} < B_c < B_{c2}$ ). A este otro tipo de materiales se les conoce como superconductores del tipo II.

Los superconductores del tipo II tienen propiedades superconductoras hasta un valor del campo  $B_{c2}$ . Entre el campo crítico inferior  $B_{c1}$  y el campo crítico superior  $B_{c2}$ , la densidad del flujo del campo magnético es diferente de cero y se dice que el efecto Meissner es incompleto, pues el campo magnético atraviesa el material conformando estructuras tubulares. A estas estructuras se les conoce con el nombre de vórtices o tubos de flujo magnético.

Se han propuesto teorías y modelos para explicar el comportamiento de los superconductores y en particular para entender el comportamiento dinámico de los vórtices. De entre éstos, destaca la teoría propuesta por Bardeen, Cooper y Schieffer (conocido como teoría BCS [1]), teoría microscópica que explica el estado superconductor por medio de la dinámica de parejas de electrones acoplados. Anterior a la teoría BCS existía un modelo fenomenológico propuesto por Ginzburg y Landau que permitía entre otras cosas, modelar el efecto Meissner. Traducido al lenguaje de la teoría de campo, el modelo de Landau-Ginzburg corresponde a uno de electrodinámica escalar Abelian, es decir incluye un campo escalar con interacción  $\phi^4$  y un campo vectorial (fotón). Debido al rompimiento espontáneo de la simetría, el campo vectorial se vuelve masivo.

El modelo de Ginzburg-Landau admite soluciones del tipo de solitones topológicos. Estas soluciones estudiadas por primera vez por Abrikosov [2] de hecho corresponden a los vórtices mencionados anteriormente. En forma posterior, en 1973 Nielsen y Olesen demostraron [3] que la generalización relativista del modelo de Landau-Ginzburg también admitía soluciones tipo vórtice. El trabajo de Nielsen y Olesen fue sumamente importante, ya que marcó el inicio del estudio de los llamados defectos topológicos, o de manera más

general, de solitones (topológicos y no topológicos) en el contexto de la teoría de campos. Para una revisión ver por ejemplo la referencia [4]. Otro trabajo que requiere mención especial es el de Bogomol'nyi [5] que dió lugar al llamado límite autodual o límite de Bogomol'nyi. Este límite permite encontrar integrales de movimiento que reducen las ecuaciones de campo de ecuaciones diferenciales de segundo orden a primero, lo cual permite calcular analíticamente la energía del solitón. Este límite existe, dependiendo del Lagrangiano, para una elección específica tanto del potencial como de los parámetros (constantes de acoplamiento del modelo). Por ejemplo, para los vórtices de Nielsen y Olesen, el límite de Bogomol'nyi se obtiene, para un potencial  $\phi^4$  con rompimiento espontáneo de simetría, cuando las masas del campo escalar y vectorial se hacen coincidir. En este caso el límite de Bogomol'nyi es de relevancia física ya que de hecho marca un punto de separación entre vórtices del tipo I y II [6,7] en donde los vórtices experimentan fuerzas entre sí atractivas y repulsivas.

Como se mencionó en el capítulo 2, la dinámica de sistemas en  $(2 + 1)$  dimensiones puede ser muy diferente comparada al caso de  $(3 + 1)$  dimensiones, esta situación se hará patente en las siguientes secciones.

En este capítulo estudiaremos las soluciones tipo vórtice de un modelo de electrodinámica escalar generalizada en  $(2 + 1)$  dimensiones. Este modelo acopla un campo de Higgs, representado por un campo escalar complejo ( $\phi$ ), con un campo electromagnético ( $F_{\mu\nu}$ ). Además de incluir un término de Chern-Simons, resulta novedoso hacer ver que en  $(2 + 1)$  dimensiones se puede incluir una interacción del campo de norma con el "momento magnético anómalo" del campo escalar. Primeramente estudiaremos las propiedades generales del modelo. Mostramos que las ecuaciones de movimiento se simplifican al imponer una condición sobre las constantes de acoplamiento del sistema, con lo que se obtiene el llamado "límite puro de Chern-Simons". Como vimos en el capítulo 2, dependiendo del tipo de potencial para el campo de Higgs tendremos o no RES. En este capítulo trabajaremos en dos regimenes diferentes. Para uno de ellos aparecerá el fenómeno del RES

("fase rota"), en este caso las soluciones solitónicas asociadas serán de carácter topológico. En la fase simétrica no tendremos RES y por tanto en esta situación, no existen solitones topológicos. Sin embargo encontramos que existen solitones no topológicos como solución a las ecuaciones de movimiento. En ambos casos analizaremos los aspectos dinámicos que se presentan.

### Presentación del modelo.

Comenzamos por definir la teoría escribiendo la densidad Lagrangiana asociada:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{4}\epsilon^{\mu\nu\alpha}A_{\mu}F_{\nu\alpha} + \frac{1}{2}|\mathcal{D}_{\mu}\phi|^2 - V(|\phi|). \quad (1)$$

El primer término de esta densidad Lagrangiana es el conocido término de Maxwell, a partir del cual se pueden obtener las ecuaciones de la electrodinámica al utilizar el principio de mínima acción. El tensor de campo está definido de la manera usual

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}, \quad (2)$$

en nuestro caso  $\mu = 0, 1, 2$ , ya que trabajaremos en  $(2 + 1)$  dimensiones. La métrica la tomaremos de la forma  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$ .

El segundo término de la densidad Lagrangiana es el llamado término de Chern-Simons (CS) [8-12]. Este término es responsable de la presencia de importantes propiedades en esta teoría, como haremos ver durante el desarrollo de este capítulo, por el momento nos limitamos a señalar algunos aspectos.

Al construir la densidad Lagrangiana correspondiente al campo de norma, ésta debe ser un escalar bajo transformaciones de Lorentz, para que describa un sistema relativista. También, deseamos que la teoría sea invariante bajo transformaciones de norma. De las posibles combinaciones entre el campo de norma y el vector potencial, además del término de Maxwell, el término de Chern-Simons cumple con ambas condiciones.

En apariencia  $\mathcal{L}$  dado por (1) no es invariante de norma, sin embargo consideremos la transformación

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \Lambda(x), \quad (3)$$

donde  $\Lambda(x)$  es una función escalar arbitraria, claramente

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}; \quad (4)$$

en consecuencia la densidad Lagrangiana para el campo de norma  $\mathcal{L}_F = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  queda transformada como

$$\mathcal{L}'_F = \mathcal{L}_F - \frac{\kappa}{2} \partial_\mu (\epsilon^{\mu\nu\lambda} F_{\nu\lambda} \Lambda) - \frac{\kappa}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \Lambda \partial^\mu (F^{\nu\lambda}). \quad (5)$$

El tercer término del miembro derecho se anula en virtud de las relaciones de Bianchi

$$\epsilon_{\mu\nu\lambda} \partial^\mu (F^{\nu\lambda}) = 2\epsilon_{\mu\nu\lambda} \partial^\mu \partial^\nu A^\lambda = 0. \quad (6)$$

Es claro que las acciones correspondientes a  $\mathcal{L}_f$  y  $\mathcal{L}'_f$  difieren por un término de superficie, con lo cual las ecuaciones de movimiento resultan ser invariantes bajo esta transformación. Es decir la teoría es invariante de norma.

Para tratar de entender la procedencia del término de CS, retornemos a una situación física en (3+1) dimensiones. Cuando se construye la densidad Lagrangiana correspondiente a la electrodinámica clásica, se impone que dicha densidad sea una cantidad escalar bajo transformaciones de paridad ( $\mathcal{P}$ ) e inversión temporal ( $\mathcal{T}$ ). La única combinación cuadrática posible para el tensor de campo electromagnético, que además es invariante de Lorentz, es precisamente el término de Maxwell. Sin embargo, en principio, podríamos ser menos restrictivos y aceptar términos que violen  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{T}$ . En cuyo caso la combinación cuadrática  $F_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}$  puede ser incluida en la densidad Lagrangiana de Maxwell, con

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \quad (7)$$

el tensor dual de  $F_{\mu\nu}$ , ( $\mu$  y  $\nu$  toman valores entre 0 y 3, por el momento). Este término es explícitamente covariante, aunque como ya dijimos viola paridad y reversibilidad temporal. Sin embargo hay otra razón por lo cual usualmente no se incluye en el Lagrangiano, y es que se puede escribir como una divergencia de una corriente  $W_\mu$ . A continuación mostramos que el término de CS puede ser obtenido de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_e &= \frac{\kappa}{4} F_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} \\ &= \frac{\kappa}{2} \epsilon_{\rho\sigma\mu\nu} \partial^\rho A^\sigma (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= \kappa \epsilon_{\rho\sigma\mu\nu} \partial^\rho (A^\sigma \partial^\mu A^\nu) \\ &= \kappa \partial^\rho W_\rho, \end{aligned} \quad (8)$$

donde  $W_\rho = \epsilon_{\rho\sigma\mu\nu} A^\sigma \partial^\mu A^\nu$  y para reexpresar  $\mathcal{L}_e$  como una divergencia hemos utilizado la definición del tensor electromagnético y la propiedad de antisimetría del tensor de Levi-Civita.

Sin embargo, si ahora consideramos que nuestro espacio de  $(2+1)$  dimensiones corresponde a una superficie que es frontera del correspondiente espacio de  $(3+1)$  dimensiones, vemos que al considerar la acción correspondiente a  $\mathcal{L}_e$ , obtenemos

$$\begin{aligned} S_e &= \int d^4x \quad \kappa \partial^\rho W_\rho \\ &= \int_S d^3x \quad \kappa \eta^\rho W_\rho \\ &= \int d^3x \quad \kappa \epsilon_{\mu\nu\alpha} A^\mu F^{\nu\alpha}, \end{aligned} \quad (9)$$

$\eta^\rho$  es el vector normal a la superficie  $S$ . El integrando de el último miembro derecho es idéntico al término de Chern-Simons, después de hacer la identificación

$$\eta^\rho \epsilon_{\rho\mu\nu\alpha} \equiv \epsilon_{\mu\nu\alpha}. \quad (10)$$

El término de Chern-Simons hereda la propiedad de violar la invariancia ante transformaciones de paridad y reversibilidad temporal. En la sección sobre simetrías y leyes de conservación de este capítulo, demostraremos explícitamente este hecho.

Antes de proseguir debemos señalar que el tensor dual en  $(2 + 1)$  dimensiones correspondiente al tensor dual  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ , definido por (7), es el pseudovector

$$F_\mu \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}, \quad (11)$$

donde nuevamente los índices toman valores de 0 a 2.

Volviendo a la presentación de la densidad Lagrangiana consideraremos ahora el tercer término de la ec. (1). Definimos la derivada covariante generalizada en la forma

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu - i\frac{g}{4}\epsilon_{\mu\nu\alpha}F^{\nu\alpha} \equiv \partial_\mu - ieA_\mu - i\frac{g}{2}F_\mu. \quad (12)$$

Los dos primeros términos de ésta derivada provienen del acoplamiento minimal mencionado en la sección sobre “Teoría de norma” del capítulo 2. La posibilidad de incluir el tercer término se debe nuevamente al hecho de que estamos considerando  $(2 + 1)$  dimensiones. El nuevo término obviamente respeta la invariancia de Lorentz y de norma, aunque viola  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{T}$  al combinar un vector  $A_\mu$  con un pseudovector  $F_\mu$ . En lo que resta del capítulo a la constante de acoplamiento  $g$  le llamaremos momento magnético anómalo (MMA). La inclusión del MMA para campos bosónicos ha sido considerado en las referencias [13 y 14].

Para fundamentar la denominación de MMA para  $g$ , consideremos el acoplamiento de Pauli para un campo fermiónico ( $\psi$ ) el cual esta dado por la expresión

$$g\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi F_{\mu\nu}, \quad (13)$$

donde  $\sigma^{\mu\nu} = -\frac{1}{2i}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ . Como en  $(2 + 1)$  dimensiones las matrices de Dirac satisfacen el algebra del grupo  $SO(2, 1)$  dada por

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -2i\epsilon^{\mu\nu\alpha}\gamma_\alpha, \quad (14)$$

entonces

$$g\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi F_{\mu\nu} = g\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha}\bar{\psi}\gamma_\alpha\psi F_{\mu\nu}, \quad (15)$$

por lo que la ecuación de Dirac en (2+1) dimensiones incluyendo el MMA se puede escribir como

$$i\gamma^\mu D_\mu\psi = m\psi \quad (16)$$

donde  $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu - i\frac{g}{2}F_\mu$  es la derivada covariante generalizada dada en la ec. (12). Por lo tanto, es una propiedad específica de un espacio de (2 + 1) dimensiones, que el acoplamiento de Pauli se pueda incorporar en una derivada covariante generalizada. Esta derivada covariante se puede usar sin una referencia explícita al espín de la partícula, en particular se puede usar para campos escalares. El factor  $g$  por lo tanto puede interpretarse como el momento magnético anómalo.

Finalmente el cuarto término que aparece en la densidad Lagrangiana es el correspondiente al potencial. En este trabajo analizaremos casos particulares del potencial más general renormalizable en (2 + 1) dimensiones, dado por la expresión

$$V(|\phi|) = a_2|\phi|^2 + a_4|\phi|^4 + a_6|\phi|^6. \quad (17)$$

Este potencial posee un vacío simétrico (fase simétrica) en  $|\phi| = 0$  cuando  $a_2 > 0$ . Mientras que tendrá un vacío asimétrico en  $|\phi| \equiv v$ , que da lugar al rompimiento espontáneo de la simetría (RES), cuando  $a_2 < 0$ . Los otros dos coeficientes  $a_4$  y  $a_6$  son mayores que cero.

Si suponemos que el campo  $\phi$  coincide con uno de los vacíos de la teoría (e.g.  $|\phi| = v$ ), se tiene que la derivada covariante se puede escribir como

$$\frac{1}{2}|\mathcal{D}_\mu\phi|^2 = \frac{1}{2}[e^2v^2A_\mu A^\mu + \frac{g^2v^2}{16}\epsilon_{\mu\nu\alpha}\epsilon^{\mu\beta\gamma}F^{\nu\alpha}F_{\beta\gamma} + \frac{egv^2}{2}\epsilon^{\mu\beta\gamma}A_\mu F_{\beta\gamma}]. \quad (18)$$

El primer término de ésta derivada corresponde al mecanismo usual de generación de masa ( $M = ev$ ) para el campo de norma. Mientras que podemos ver que el último término de (18), generado por el rompimiento de simetría, es un término tipo Chern-Simons con masa topológica  $\kappa' = ev^2g$  la cual obviamente depende del parámetro de ruptura de simetría  $v$ . En la referencia [12] se considera un modelo sin término explícito de CS y con una derivada covariante generalizada del tipo  $D_\mu\phi = [\partial_\mu - ieA_\mu - \frac{ig}{4}\epsilon_{\mu\nu\alpha}\frac{F^{\nu\alpha}}{|\phi|}]\phi$  en lugar de la expresión dada en (12). El término de CS inducido en ese caso por el rompimiento espontáneo de la simetría era de la forma  $\frac{eg}{4}\epsilon^{\mu\nu\alpha}A_\mu F_{\nu\alpha}$ , que no depende del parámetro  $v$  del RES. Las propiedades del término de CS, como el acoplamiento al momento magnético serán considerados nuevamente en la sección sobre "simetrías y leyes de conservación", de este capítulo.

Una vez determinada la densidad Lagrangiana podemos utilizar el principio de Hamilton de mínima acción y obtener las ecuaciones de movimiento:

$$[g^{\mu\nu}\partial^\rho + \frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}]F_{\rho\mu} = J^\nu + \frac{g}{2e}\epsilon^{\nu\rho\mu}\partial_\rho J_\mu \quad (19a)$$

$$\mathcal{D}_\mu\mathcal{D}^\mu\phi = -2\frac{\delta V}{\delta\phi^*}, \quad (19b)$$

donde hemos utilizado la definición para la corriente

$$J_\mu = -\frac{ie}{2}[\phi^*(\mathcal{D}_\mu\phi) - \phi(\mathcal{D}_\mu\phi)^*]. \quad (20)$$

La ecuación (19b) tiene la forma usual para la ecuación de movimiento de un campo escalar, aunque la derivada covariante incluye ahora la contribución del MMA. Mientras que la ecuación (19a) generaliza a las ecuaciones de Maxwell: el término de CS modifica la contribución de  $F_{\mu\nu}$ , mientras que debido a  $g$  la corriente adquiere una contribución extra  $\frac{g}{2e}\epsilon^{\nu\rho\mu}\partial_\rho J_\mu$ . Como veremos posteriormente  $J_\mu$  es una corriente conservada de Noether

( $\partial^\mu J_\mu = 0$ ); la ecuación (19a) sugiere que se puede definir una nueva corriente ( $\mathcal{J}_\mu$ ) de la forma

$$\mathcal{J}_\mu = J_\mu + \frac{g}{2e} \epsilon_{\mu\nu\alpha} \partial^\nu J^\alpha, \quad (21)$$

que obviamente también es una corriente conservada, ya que

$$\partial^\mu \mathcal{J}_\mu = \partial^\mu J_\mu + \frac{g}{2e} \epsilon_{\mu\nu\alpha} \partial^\mu \partial^\nu J^\alpha = 0. \quad (22)$$

De hecho es interesante hacer ver que si utilizamos como corriente a  $\mathcal{J}_\mu$  y suponemos una fuente puntual estática  $J_\mu = eg_{\mu 0} \delta(\vec{r})$ , ( $g_{\mu\nu}$  es el tensor métrico) se puede calcular el momento magnético de acuerdo a la definición usual

$$\begin{aligned} \int d^2x \quad \epsilon_{ij} x^i \mathcal{J}^j &= -\frac{g}{2} \epsilon^{ij} \int d^2x \quad \epsilon_{j1x_i} \partial^i \delta(\vec{r}) \\ &= -g \end{aligned} \quad (23)$$

donde  $\epsilon_{ij} \equiv \epsilon_{0ij}$ . La ecuación anterior es otra forma de mostrar la relación de  $g$  con un momento magnético. Para obtener una mayor comprensión de las "nuevas ecuaciones de Maxwell", resulta conveniente escribir (19a) en componentes. Las componentes para las cuales  $\nu = 0$  de la ecuación (19a) pueden reescribirse utilizando las definiciones para los campos eléctrico y magnético

$$E_i = F_{0i} \quad \text{y} \quad B = \epsilon_{12} F^{12} \quad (24)$$

obteniendo

$$\nabla \cdot \vec{E} - \kappa B = \rho + \frac{g}{2e} \epsilon^{ik} \partial_i J_k, \quad (25)$$

expresión que constituye la ley modificada de Gauss.

En este caso a la divergencia de  $\vec{E}$  contribuye no sólo la densidad de carga; sino que debido al término de CS contribuye el campo magnético  $B$  y debido al MMA contribuye la "tercera componente" del rotacional de  $\vec{J}$  (que se puede interpretar como vorticidad).

La ecuación (25) implica importantes propiedades para los vórtices que podemos entender desde ahora. Supongamos que tenemos una estructura (vórtice) con flujo magnético localizado alrededor del origen. Su carga  $Q$  y flujo magnético  $\Phi$  se pueden calcular de acuerdo a:

$$\begin{aligned} Q &= \int d^2x \rho, \\ \Phi &= \int d^2x B. \end{aligned} \tag{26}$$

En presencia de RES,  $A_\mu$  será masivo, por lo que tanto  $\vec{E}$ , y  $\vec{J}$  decaerán exponencialmente, con lo cual la integral de superficie del primer término de la izquierda y el segundo de la derecha de la ecuación (25) se anularán. Con lo cual se obtiene la relación

$$-\kappa\Phi = Q, \tag{27}$$

Esta es una relación importante; nos dice que en presencia del término de CS todo tubo de flujo tendrá carga eléctrica. Esto hay que contrastarlo con los vórtices de Landau-Ginzburg que son neutros.

Finalmente es interesante observar que al escribir las componentes espaciales de (19a) obtenemos

$$\epsilon_{ij}\partial^j B + \kappa\epsilon_{ij}E^j = J_i + \frac{g}{2}\epsilon_{ij}\partial^j \rho, \tag{28}$$

que es la generalización de la ley de Ampere.

## Modos de propagación de los campos.

Si nos encontramos en el vacío y escogemos  $\phi = ve^{i\chi}$ , con  $\chi = 0$ , fijando de esta forma la norma, tenemos que la derivada covariante de  $\phi$  está dada por

$$\mathcal{D}_\mu \phi = -i[eA_\mu + \frac{g}{2}F_\mu]v \quad (29)$$

con  $F_\mu$  dado por (11). La expresión correspondiente para la corriente en este caso es

$$J_\mu = -e^2v^2[eA_\mu + \frac{g}{2}F_\mu]. \quad (30)$$

Las ecuaciones de movimiento (19) aceptan como solución potenciales vectoriales electromagnéticos propagándose como ondas planas

$$A_\mu \propto \varepsilon_\mu e^{ik \cdot x} \quad (31)$$

con  $k = (\omega, \vec{k})$ ,  $x = (t, \vec{x})$  y  $\varepsilon_\mu$  es el vector de polarización. Supondremos por simplicidad, que la onda se propaga a lo largo del eje  $x$ , i.e.  $\vec{k} = (k_x, 0)$ .

Al sustituir (31) en (19a) y utilizando (29) y (30) se puede encontrar que

$$[ag_{\mu\nu} + bk_\mu k_\nu + ic\varepsilon_{\mu\lambda\nu}k^\lambda]e^\nu = 0 \quad (32)$$

donde  $a = e^2v^2 - k \cdot k(1 - \frac{v^2g^2}{4})$ ,  $b = 1 - \frac{v^2g^2}{4}$  y  $c = ev^2g + k_x$ . Para que la ecuación (32) tenga soluciones no triviales se requiere que el determinante de la matriz que multiplica al vector de polarización  $e^\nu$  se anule. Con ello llegamos a la relación de dispersión

$$\omega^2 = m_{1,2}^2 + |\vec{k}|^2, \quad (33)$$

que tiene la forma usual para la relación de dispersión de un campo masivo. Lo que es novedoso es que existen dos soluciones para las masas de las partículas vectoriales, dadas por

$$m_{1,2} = \frac{\pm(\kappa + egv^2) + \sqrt{(\kappa + egv^2)^2 + 4e^2v^2(1 - \frac{g^2v^2}{4})}}{2(1 - \frac{g^2v^2}{4})}. \quad (34)$$

La existencia de dos masas para las partículas vectoriales, implican la existencia de dos polarizaciones en la propagación del campo. Estos resultados son consecuencia de la violación de la simetría de paridad. El Lagrangiano rompe esta simetría como ya lo hemos discutido anteriormente y lo mostramos explícitamente en la sección siguiente.

Para encontrar las polarizaciones de las ondas correspondientes a los modos de propagación se tienen que determinar los eigenvectores  $\epsilon_\mu$ , una vez que se determinaron los correspondientes eigenvalores. El resultado es

$$\epsilon_\mu = (\mp \frac{|\vec{k}|}{m_{1,2}}, \mp \frac{\omega}{m_{1,2}}, i)\epsilon, \quad (35)$$

donde  $\epsilon$  es una constante arbitraria y el signo  $- (+)$  corresponde a  $m_1 (m_2)$ . A partir de la expresión  $E_i = F_{0i}$ , es directo determinar el campo eléctrico

$$\vec{E} = E_0(\pm i \frac{m_{1,2}}{\omega}, 1)e^{ik \cdot x}. \quad (36)$$

Recordamos que la onda se propaga a lo largo del eje  $x$ . Por lo que en el caso de que  $m_{1,2} = 0$ , la polarización es transversal, tal y como se debía esperar. Sin embargo, en general se tendrán dos ondas elípticamente polarizadas. El modo asociado a  $m_1$  difiere del asociado a  $m_2$  debido a la violación de la paridad.

Resulta interesante considerar varios casos particulares para los valores de las masas  $m_{1,2}$ :

- i) Cuando los términos que violan  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{T}$  se anulan ( $\kappa = g = 0$ ) se tiene que  $m_1 = m_2 = ev$ , que es el resultado usual del RES.
- ii) En ausencia del RES ( $v = 0$ ) y del MMA ( $g = 0$ ) se obtiene:  $m_1 = \kappa$  y  $m_2 = 0$ . El hecho de que el fotón tenga una masa  $\kappa$ , en ausencia de RES en una teoría que sin

embargo es de norma da lugar a las llamadas “Topological Massive Gauge Theories” [15].

- iii) Para tener fotones con dos modos de propagación diferentes ( $m_1 \neq m_2$ ) se requiere incluir RES y al menos uno de los dos términos que violan P y T. Si se incluye RES y CS se reproduce el resultado de Paul y Khare [16]

$$m_{1,2} = \pm \frac{\kappa}{2} + \sqrt{\frac{\kappa^2}{4} + e^2 v^2}. \quad (37)$$

- iv) Existe una relación particular entre  $\kappa$  y  $g$  ( $\kappa = -egv^2$ ) para los cuales los valores de la masa vuelven a estar degenerados

$$m_{1,2} = \frac{ev}{\sqrt{1 - \frac{g^2 v^2}{4}}} \quad (38)$$

- v) De particular interés para nuestra discusión futura del “límite puro de CS” es el caso particular en el que  $g = -\frac{2e}{\kappa}$  y para el cual

$$m_1 = \kappa \frac{e^2 v^2}{\kappa^2 - e^2 v^2}, \quad (39a)$$

$$m_2 = \kappa. \quad (39b)$$

Como veremos cuando estudiemos vórtices en el límite puro de CS el modo correspondiente a  $m_2$  se desacopla de la teoría y sólo el correspondiente a  $m_1$  se manifiesta.

## Simetrías y leyes de conservación.

A continuación presentaremos las simetrías de nuestro modelo y mostraremos las cantidades conservadas asociadas. Como veremos existen simetrías discretas y simetrías continuas en el modelo considerado.

### A) Simetrías discretas.

Consideremos primeramente una transformación de paridad con respecto al eje  $y$  definida por  $\mathbf{r} = (x, y) \rightarrow \mathbf{r}' = (-x, y)$ . Para aplicar esta transformación a la densidad Lagrangiana, ec.(1), necesitamos observar que bajo la transformación tenemos que:

$$\mathcal{P}A^0(t, \mathbf{r})\mathcal{P}^{-1} = +A^0(t, \mathbf{r}')$$

$$\mathcal{P}A^1(t, \mathbf{r})\mathcal{P}^{-1} = -A^1(t, \mathbf{r}')$$

$$\mathcal{P}A^2(t, \mathbf{r})\mathcal{P}^{-1} = +A^2(t, \mathbf{r}')$$

$$\mathcal{P}\phi(t, \mathbf{r})\mathcal{P}^{-1} = +\phi(t, \mathbf{r}')$$

$$\mathcal{P}F^{01}(t, \mathbf{r})\mathcal{P}^{-1} = -F^{01}(t, \mathbf{r}')$$

$$\mathcal{P}F^{02}(t, \mathbf{r})\mathcal{P}^{-1} = +F^{02}(t, \mathbf{r}')$$

$$\mathcal{P}F^{12}(t, \mathbf{r})\mathcal{P}^{-1} = -F^{12}(t, \mathbf{r}').$$

Al aplicar la transformación de paridad al término de CS, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \frac{\kappa}{4} \epsilon^{\mu\nu\alpha} A_\mu F_{\nu\alpha} \mathcal{P}^{-1} &= \mathcal{P} \frac{\kappa}{2} [A^0 F^{12} + A^1 F^{02} - A^2 F^{01}] \mathcal{P}^{-1} \\ &= \frac{\kappa}{2} [-A^0 F^{12} - A^1 F^{02} + A^2 F^{01}] \\ &= -\frac{\kappa}{4} \epsilon^{\mu\nu\alpha} A_\mu F_{\nu\alpha}, \end{aligned} \quad (40)$$

En tanto que para los términos provenientes de la derivada covariante

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\mathcal{D}_\mu \phi|^2 &= \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + e^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi + \frac{eg}{2} \epsilon^{\mu\beta\gamma} A_\mu F_{\beta\gamma} \phi^* \phi \\ &\quad - ie A_\mu (\partial^\mu \phi^*) \phi + ie A_\mu (\partial^\mu \phi) \phi^* - i \frac{g}{4} \epsilon^{\mu\beta\gamma} F_{\beta\gamma} (\partial^\mu \phi^*) \phi \\ &\quad + i \frac{g}{4} \epsilon^{\mu\beta\gamma} F_{\beta\gamma} (\partial^\mu \phi) \phi^* + \frac{g^2}{8} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \phi^* \phi], \end{aligned} \quad (41)$$

al aplicarles la transformación de paridad sólo conservan el signo los términos que son cuadráticos en  $A_\mu$  y  $F_{\mu\nu}$ , y los acoplamientos entre  $A_\mu$  y las parciales del campo escalar. Entonces resulta que la densidad Lagrangiana no es invariante bajo la transformación de paridad debido a que el término de CS así como los términos lineales en  $g$  cambian de signo bajo la transformación. Esto se debe a que en la densidad Lagrangiana se combinan vectores con pseudovectores.

Por otro lado, al considerar la transformación de inversión temporal  $t' = -t$ , nuevamente el Lagrangiano no es invariante debido a los mismos términos, esto lo vemos si consideramos las reglas de transformación siguientes:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}A^0(t, \mathbf{r})\mathcal{T}^{-1} &= -A^0(t', \mathbf{r}) \\ \mathcal{T}A^1(t, \mathbf{r})\mathcal{T}^{-1} &= -A^1(t', \mathbf{r}) \\ \mathcal{T}A^2(t, \mathbf{r})\mathcal{T}^{-1} &= -A^2(t', \mathbf{r}) \\ \mathcal{T}\phi(t, \mathbf{r})\mathcal{T}^{-1} &= +\phi(t', \mathbf{r}) \\ \mathcal{T}F^{01}(t, \mathbf{r})\mathcal{T}^{-1} &= +F^{01}(t', \mathbf{r}) \\ \mathcal{T}F^{02}(t, \mathbf{r})\mathcal{T}^{-1} &= +F^{02}(t', \mathbf{r}) \\ \mathcal{T}F^{12}(t, \mathbf{r})\mathcal{T}^{-1} &= -F^{12}(t', \mathbf{r}) \end{aligned}$$

que al ser aplicadas, por ejemplo al término de CS obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\frac{\kappa}{4}e^{\mu\nu\alpha}A_\mu F_{\nu\alpha}\mathcal{T}^{-1} &= \mathcal{T}\frac{\kappa}{2}[A^0F^{12} - A^1F^{02} + A^2F^{01}]\mathcal{T}^{-1} \\ &= \frac{\kappa}{2}[A^0F^{12} + A^1F^{02} - A^2F^{01}]. \end{aligned} \quad (42)$$

En este caso el primer término dentro del paréntesis cuadrado es el único que no cambia. Al aplicar la transformación a (41), los términos cuadráticos en las parciales y los campos electromagnéticos no cambian de signo, pero existen otros términos como los provenientes del acoplamiento al momento magnético los cuales sí cambian de signo, de lo que se sigue entonces que también la densidad Lagrangiana viola la simetría de inversión temporal, debido a los términos de CS y MMA.

## B) Tensor de energía momento.

Ahora pasemos a discutir el tensor de energía-momento  $T_{\mu\nu}$ . Debido a que el Lagrangiano es invariante ante transformaciones de Lorentz, esperamos que  $T_{\mu\nu}$  sea una cantidad conservada. En nuestro caso resultó mas conveniente calcular  $T_{\mu\nu}$  a partir del formalismo usual de la Relatividad General, el cual entre otras ventajas, nos da directamente un  $T_{\mu\nu}$  simétrico.

Consideremos que tenemos la acción en un espacio con curvatura no nula

$$S = \int d^3x \sqrt{\tilde{g}} \tilde{\mathcal{L}} \quad (43)$$

donde  $\tilde{g}$  es el determinante del tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  y  $\tilde{\mathcal{L}}$  es la adaptación covariante de la densidad Lagrangiana dada en la ec. (1), de tal manera que  $S$  sea una cantidad escalar ante transformaciones generales de coordenadas. Ante una transformación infinitesimal de  $g_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}, \quad (44)$$

la acción  $S$  cambiará. El tensor de energía-momento se define de acuerdo a la relación [17]:

$$\delta S = \frac{1}{2} \int d^3x \sqrt{\tilde{g}} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (45)$$

La forma covariante de la densidad Lagrangiana  $\tilde{\mathcal{L}}$ , está dada por

$$\tilde{\mathcal{L}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{4} \frac{\epsilon^{\mu\nu\alpha}}{\sqrt{\tilde{g}}} A_\mu F_{\nu\alpha} + \frac{1}{2} |\tilde{\mathcal{D}}_\mu \phi|^2 - V(|\phi|), \quad (46)$$

con la derivada covariante dada por

$$\tilde{\mathcal{D}}_\mu = \partial_\mu - ie A_\mu - i \frac{g}{4} \frac{\epsilon_{\mu\nu\alpha}}{\sqrt{\tilde{g}}} F^{\nu\alpha}. \quad (47)$$

Nótese que la única modificación en el Lagrangiano fue la sustitución  $\epsilon^{\mu\nu\alpha} \rightarrow \frac{\epsilon^{\mu\nu\alpha}}{\sqrt{g}}$ ; debido a que la última cantidad es la que se transforma como tensor contravariante ante una transformación general de coordenadas.

Para obtener el tensor de momento-energía, calculamos primero la variación del tensor de campo. Estamos variando  $g_{\mu\nu}$  manteniendo cualquier tensor covariante fijo, con lo cual

$$\begin{aligned}\delta F^{\mu\nu} &= F_{\rho\sigma} \delta(g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}) \\ &= F_{\rho\sigma} g^{\mu\rho} \delta g^{\nu\sigma} + F_{\rho\sigma} g^{\nu\sigma} \delta g^{\mu\rho}.\end{aligned}\quad (48)$$

Para calcular  $\delta g^{\nu\sigma}$  podemos utilizar el hecho de que

$$0 = \delta(g_{\lambda\kappa} g^{\kappa\sigma}) = g_{\lambda\kappa} \delta g^{\kappa\sigma} + g^{\kappa\sigma} \delta g_{\lambda\kappa} \quad (49)$$

y entonces

$$\delta g^{\nu\sigma} = -g^{\nu\lambda} g^{\kappa\sigma} \delta g_{\lambda\kappa}, \quad (50)$$

por lo tanto

$$\delta F^{\mu\nu} = -F^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} \delta g_{\lambda\kappa} + F^{\nu\lambda} g^{\mu\kappa} \delta g_{\lambda\kappa}. \quad (51)$$

De manera similar un vector contravariante  $B^\mu$  se transforma como

$$\delta B^\mu = -g^{\mu\lambda} B^\kappa \delta g_{\lambda\kappa}. \quad (52)$$

Además se tiene [17] que

$$\delta \tilde{g} = \tilde{g} g^{\lambda\kappa} \delta g_{\lambda\kappa}. \quad (53)$$

Con estos elementos es directo calcular la variación de  $S$  e identificar  $T_{\mu\nu}$  de acuerdo a la ecuación (45) para obtener

$$T^{\mu\nu} = \left(1 - \frac{g^2}{4}|\phi|^2\right) \left(F^\mu F^\nu - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}F_\alpha F^\alpha\right) + \frac{1}{2} \left(\nabla^\mu \phi (\nabla^\nu \phi)^* - g^{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}|\nabla^\alpha \phi|^2 - V(|\phi|)\right] + H.C.\right), \quad (54)$$

donde la expresión ha sido escrita en términos de los campos duales (11) y la derivada con el acoplamiento mínimo  $\nabla_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ , el cual incluye solamente al campo  $A_\mu$ .

Es importante hacer notar que el término de CS, así como los términos lineales en el MMA no contribuyen a  $T_{\mu\nu}$ . Esto se debe a que la contribución de dichos términos a la acción es independiente de la métrica. En el caso del término de CS, éste es un resultado bien conocido [15].

### C) Corriente conservada.

Finalmente si aplicamos una transformación de fase global, definida en el grupo de simetría  $U(1)$  haciendo

$$\phi \rightarrow e^{-i\alpha} \phi, \quad (55)$$

resulta que bajo esta transformación la densidad Lagrangiana es invariante y la cantidad conservada en este caso es la corriente  $J^\mu$  ( $\partial_\mu J^\mu = 0$ ) dada por (20).

## Soluciones tipo vórtice a las ecuaciones de campo.

### Ansatz y ecuaciones de campo.

Debido a la naturaleza de los vórtices, estamos interesados en encontrar soluciones con simetría rotacional cilíndrica, ver figura (1), para ello proponemos el siguiente ansatz

$$\begin{aligned} A_0(\rho) &= \bar{h}(\rho), & \vec{A}(\rho) &\equiv -\frac{(a(\rho) - n)}{c\rho} \hat{\theta}, \\ \phi(\rho, \theta) &= \bar{f}(\rho) e^{-in\theta}, \end{aligned} \quad (56)$$

donde  $\rho$  y  $\theta$  son coordenadas cilíndricas en el plano  $xy$ , con  $n$  un entero para que la función  $\phi$  sea univaluada.

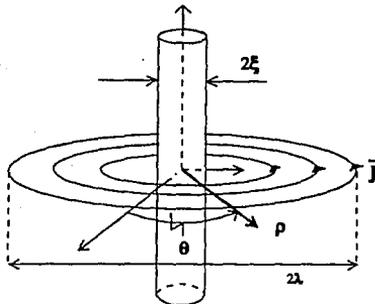


Fig.1. Tubo de flujo magnético. Se muestra la interpretación geométrica de los parámetros utilizados posteriormente en los cálculos numéricos.

A  $n$  se le denomina número de revolución del vórtice y corresponde a los diferentes mapeos no equivalentes topológicamente (grupo de homotopía) que se pueden establecer entre el espacio físico (círculo en el plano  $xy$ ) y el espacio interno. Para entender lo anterior, consideremos que existe RES; a medida que nos alejamos del centro del vórtice sobre el

círculo de radio  $R$  ( $S_R$  con  $R \rightarrow \infty$ ), el campo  $\phi$  debe tender al vacío ( $|\phi| \rightarrow v$ ). De acuerdo a la ecuación (56) vemos que sobre el círculo  $S_R$  el campo  $\phi$  está caracterizado por una fase ( $e^{-in\theta}$ ), por lo cual se puede considerar un elemento del grupo  $U(1)$ . O equivalentemente, podemos decir que la fase corresponde a puntos en un círculo  $S_1$ . De esta manera cuando se recorra una vez el círculo  $S_R$  ( $\theta$  cambie de 0 a  $2\pi$ ) tendremos que el círculo  $S_1$  será recorrido  $n$  veces.

Al sustituir el ansatz en las ecuaciones de movimiento (19), obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas de segundo orden. De la ecuación de movimiento del campo de norma con componente  $\nu = 0$  se obtiene

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left\{ \left(1 - \frac{g^2}{4} \bar{f}^2\right) \rho \frac{d\bar{h}}{d\rho} - \frac{g}{2} a \bar{f}^2 - \kappa \frac{(a-n)}{e} \right\} = e \bar{f}^2 \left( e \bar{h} + \frac{g}{2} \frac{a'}{\rho} \right), \quad (57a)$$

mientras que de cualquiera de las componentes  $\nu = 1, 2$

$$\frac{d}{d\rho} \left\{ \left(1 - \frac{g^2}{4} \bar{f}^2\right) \frac{1}{\rho} \frac{da}{d\rho} - \kappa \bar{h} - \frac{eg}{2} \bar{f}^2 \bar{h} \right\} = \frac{e \bar{f}^2}{\rho} \left( a + \frac{g}{2} \rho \bar{h}' \right), \quad (57b)$$

en tanto que de la ecuación de movimiento de el campo escalar se encuentra

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d\bar{f}}{d\rho} \right) = \frac{\bar{f}}{\rho^2} \left[ a + \frac{g}{2} \rho \bar{h}' \right]^2 - \bar{f} \left( e \bar{h} + \frac{g}{2} \frac{a'}{\rho} \right)^2 + \frac{\delta V(\bar{f})}{\delta \bar{f}}. \quad (57c)$$

Para estas ecuaciones no conocemos solución analítica. Sin embargo es posible determinar su comportamiento asintótico.

Con RES la condición de energía finita requiere que en el límite  $\rho \rightarrow \infty$ ;  $|\phi| \rightarrow v$  o de acuerdo a (56)  $f \rightarrow v$ . Así mismo, la condición de energía finita implica que  $\bar{h}(\infty) \rightarrow 0$ ,  $a(\infty) \rightarrow 0$ . Debido a que todos los campos son masivos, esperamos que las funciones se aproximen a su valor asintótico exponencialmente. Tomando en cuenta lo anterior es inmediato obtener las soluciones asintóticas (para  $\rho \rightarrow \infty$ ):

$$\bar{h}(\rho) = \frac{1}{\rho} [a_1 e^{-m_1 \rho} + a_2 e^{-m_2 \rho}], \quad (58a)$$

$$a(\rho) = a_1 e^{-m_1 \rho} + a_2 e^{-m_2 \rho}, \quad (58b)$$

$$\bar{f}(\rho) = v - f_\infty e^{-m_s \rho}, \quad (58c)$$

donde  $a_{1,2}$  y  $f_\infty$  son constantes,  $m_{1,2}$  son las masas dadas por las ecuación (34)

$$m_v = \frac{\pm(\kappa + egv^2) + \sqrt{(\kappa + egv^2)^2 + 4e^2v^2(1 - \frac{g^2v^2}{4})}}{2(1 - \frac{g^2v^2}{4})} \quad (59)$$

y la masa escalar  $m_s$ , depende del potencial. En el caso en que  $V(\phi) = \frac{\eta}{4}(\phi^2 - v^2)^2$  tenemos que

$$m_s = \sqrt{2\eta v^2}. \quad (60)$$

Como ya hemos hecho ver anteriormente, el que existan dos masas para el campo vectorial se debe a que el sistema viola paridad y que a su vez existen dos posibles polarizaciones del campo electromagnético.

El análisis completo de los vórtices descritos por el sistema de ecuaciones (57) se ha propuesto para un trabajo futuro. En lo que resta del trabajo consideramos solamente el límite puro de CS.

## Límite puro de Chern-Simons.

A continuación vamos a ver que bajo una condición específica para las constantes de acoplamiento de la teoría las ecuaciones de movimiento se simplifican. Para ello retomemos las ecuaciones de movimiento para el campo de norma dadas por (19a),

$$[g^{\mu\nu}\partial^\rho + \frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}]F_{\rho\mu} = J^\nu + \frac{g}{2e}\epsilon^{\nu\rho\mu}\partial_\rho J_\mu, \quad (61)$$

Al multiplicar (61) por  $\epsilon_{\mu\nu\alpha}$  y utilizando la expresión para el vector dual

$$F_\mu \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \quad (11)$$

vemos que las ecuaciones de movimiento, del campo de norma se pueden reescribir como

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha}\partial^\mu [F^\alpha + \frac{g}{2e}J^\alpha] = J_\nu - \kappa F_\nu. \quad (62)$$

Es directo ver que cuando la siguiente relación se cumple

$$\kappa = -\frac{2e}{g}, \quad (63)$$

las ecuaciones (62) admiten como solución a las soluciones de la ecuación

$$F_\mu = \frac{J_\mu}{\kappa}. \quad (64)$$

Estas son ecuaciones diferenciales de primer orden y coinciden con las dadas en el llamado límite puro de CS.

En trabajos anteriores se había considerado la ecuación (64) [10,11,18], sin embargo en aquellos casos no se incluía el MMA ( $g = 0$ ) y el término de Maxwell se omitía desde un principio. En nuestro caso incluimos todos los términos, obteniendo el límite puro de CS para una relación particular entre la masa de CS y el MMA ( $\kappa = -\frac{2e}{g}$ ).

De la ecuación (64) y de la identidad de Bianchi para el tensor  $F_\mu$  ( $\partial^\mu F_\mu = 0$ ), se sigue de forma inmediata la conservación de la corriente  $J^\mu$  (i.e.  $\partial_\mu J^\mu = 0$ ).

### Vórtices en la fase rota.

En lo sucesivo analizaremos los vórtices en el límite puro de CS, por lo cual las ecuaciones de movimiento para el campo de norma estarán dadas por

$$F_\mu = \frac{J_\mu}{\kappa}, \quad (64)$$

mientras que la ecuación para el campo escalar no se modifica

$$\frac{1}{2} \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \phi = -\frac{\delta V}{\delta \phi^*}. \quad (19b)$$

Como vimos en la sección anterior  $\kappa$  y  $g$  se relacionan de acuerdo a

$$\kappa = -\frac{2e}{g}. \quad (63)$$

Primeramente estudiaremos la fase rota (con RES), para lo cual tomaremos una forma explícita para el potencial escalar

$$V = \frac{e^2 \eta^2}{8} (|\phi|^2 - v^2)^2. \quad (65)$$

Sustituyendo el ansatz (56) con  $\bar{h} = vh(\rho)$  y  $\bar{f} = vf(\rho)$  en las ecuaciones (64) y (19b) obtenemos:

$$\frac{dh}{dr} = -\frac{\lambda a f^2}{r(1 - \lambda^2 f^2)}, \quad (66a)$$

$$\frac{da}{d\rho} = -\frac{\lambda h f^2 r}{(1 - \lambda^2 f^2)^2}, \quad (66b)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \frac{df}{dr} \right] = \frac{f}{(1 - \lambda^2 f^2)^2} \left( \frac{a^2}{r^2} - h^2 \right) + \frac{\eta^2}{2} f(f^2 - 1), \quad (66c)$$

donde hemos definido  $r = ev\rho$  y  $\lambda = \frac{ev}{\kappa}$ . Las dos primeras ecuaciones provienen de (64) en tanto que la tercera proviene de (19b).

Cuando el ansatz es sustituido en la componente del tensor  $T^{00}$  obtenemos la energía en la forma

$$\mathcal{E} = \frac{e^2 v^4}{2} \int_0^\infty r dr \left[ (1 - \lambda^2 f^2) [(h')^2 + \left(\frac{a'}{r}\right)^2] + (fh)^2 + (f')^2 + \left(\frac{fa}{r}\right)^2 + \frac{r^2}{4} (1 - f^2)^2 \right]. \quad (67)$$

Resulta de suma importancia determinar el comportamiento asintótico de los campos. Primeramente pedimos que los campos sean no singulares en el origen, esto implica, de acuerdo al ansatz (56) que  $a(0) = n$ ,  $f(0) = 0$ , mientras que no está determinado el valor para  $h$  en el origen por lo cual proponemos  $h(0) = h_0$ . Proponiendo para estas funciones un desarrollo en serie de potencias cerca del origen, se puede determinar:

$$h(r) = h_0 - \frac{f_n^2}{2} r^{2|n|} + \mathcal{O}(r^{2|n|+2}), \quad (68a)$$

$$a(r) = n - \frac{h_0 f_n^2}{2(|n|+1)} r^{2|n|+2} + \mathcal{O}(r^{2|n|+4}), \quad (68b)$$

$$f(r) = f_n r^{|n|} + \frac{(2a_2/\kappa^2 - h_0^2) f_n}{4(1+|n|)} r^{|n|+2} + \mathcal{O}(r^{|n|+4}), \quad (68c)$$

donde  $f_n$  y  $h_0$  son constantes que no pueden ser determinadas a partir del comportamiento de los campos cerca del origen, sólo numéricamente se podrán fijar por los requerimientos impuestos por las condiciones de frontera para  $r \rightarrow \infty$ . Aquí  $a_2$  es el coeficiente del término  $|\phi|^2$  en el potencial dado por (17).

Por otro lado, las condiciones de frontera en infinito se determinan a partir de que la energía (67) sea finita. Esto nos conduce a pedir que para  $r \rightarrow \infty$  el integrando de (67) se anule, lo que implica:  $f(\infty) = 1$  y  $a(\infty) = 0$  y  $h(\infty) = 0$ .

Con estas condiciones es ahora posible determinar el desarrollo asintótico de los campos en  $r \rightarrow \infty$ :

$$a(r) \approx a_{\infty} e^{-\tilde{m}_v r}, \quad (69a)$$

$$h(r) \approx \frac{a_{\infty}}{r} e^{-\tilde{m}_v r}, \quad (69b)$$

$$f(r) \approx 1 - f_{\infty} e^{-\tilde{m}_s r}. \quad (69c)$$

En las expresiones anteriores notamos que  $\tilde{m}_v$  y  $\tilde{m}_s$ , corresponde a las masas escalar y vectoriales adimensionales, i.e.:

$$\tilde{m}_v = \frac{m_v}{ev} = \frac{\lambda}{1 - \lambda^2}, \quad (70a)$$

$$\tilde{m}_s = \frac{m_s}{ev} = \eta. \quad (70b)$$

El valor para  $m_v$  corresponde al obtenido a partir del resultado general en el límite  $\kappa = -\frac{2e}{g}$ . Aquí comprobamos que de los dos posibles valores para la masa vectorial sólo aparece uno, el otro se desacopla de la teoría.

### Cantidades cuantizadas en la fase rota.

En esta sección veremos que a los vórtices se les puede asignar ciertas propiedades físicas o "cargas". Tales propiedades son: flujo magnético, carga eléctrica, espín y magnetización. Las tres primeras tienen la característica de que no dependen de la solución explícita de las ecuaciones (66), y al depender exclusivamente de las condiciones de frontera se pueden calcular explícitamente. Debido a esto se denominan cargas topológicas.

Sustituyendo el ansatz (56) en las expresiones (24) para el campo eléctrico y magnético se obtiene:

$$E_i = -\hat{r}_i v \frac{dh}{d\rho} = -\hat{r}_i e v^2 \frac{dh}{dr} \quad i = 1, 2. \quad (71a)$$

$$B = \frac{1}{e\rho} \frac{da}{d\rho} = \frac{ev^2}{r} \frac{da}{dr}, \quad (71b)$$

donde  $\hat{r}_i$  son las componentes cartesianas del vector unitario en la dirección radial y  $r = e v \rho$ . De estas ecuaciones observamos que el campo eléctrico apunta en la dirección radial, mientras que el campo magnético es una cantidad escalar (apunta en la "dirección perdida").

Si calculamos el flujo magnético de acuerdo a la expresión usual

$$\Phi = \int B d^2 x, \quad (72)$$

reescribiendo la diferencial de área  $d^2 x$  en coordenadas cilíndricas  $d^2 x = 2\pi \rho d\rho = \frac{2\pi}{e^2 v^2} r dr$  y utilizando la ecuación (71b) se obtiene

$$\Phi = \int B d^2 x = \frac{2\pi}{e} \int_{r=0}^{r=\infty} \frac{da}{dr} = a(\infty) - a(0). \quad (73)$$

La ecuación (73) implica que el flujo depende de las condiciones de frontera las cuales fueron determinadas en la sección anterior, con lo que se obtiene

$$\Phi = n \frac{2\pi}{e}, \quad (74)$$

y comprobamos así que el flujo magnético se puede evaluar explícitamente y que es una cantidad cuantizada. Como vemos de esta relación y de las ecuaciones (68), el "número de vorticidad"  $n$ , es una buena etiqueta para clasificar en clases las diferentes configuraciones de energía finita (vórtices). De hecho  $n$  es un invariante topológico. Además, la cuantización del flujo garantiza la estabilidad de los solitones de la teoría. De las consideraciones anteriores se sigue que las soluciones solitónicas son de carácter topológico.

Para calcular la carga eléctrica, partimos de la definición que involucra la densidad de carga  $\rho$

$$Q = \int \rho d^2x \equiv \int J_0 d^2x. \quad (75)$$

Utilizando la expresión (20) para la corriente y el ansatz (56), obtenemos

$$Q = -2\pi v \int_0^\infty r dr f^2 \left( h - \frac{\lambda}{r} \frac{da}{dr} \right). \quad (76)$$

Utilizando la ecuación (66b) llegamos a que

$$\begin{aligned} Q &= \frac{2\pi\kappa}{e} \int_0^\infty \frac{da}{dr} dr \\ &= -\kappa \left( \frac{2\pi n}{e} \right) \\ &= -\kappa \Phi, \end{aligned} \quad (77)$$

que comprueba la relación esperada entre carga y flujo magnético (ecuación (27)).

Otra variable dinámica que también presenta cuantización debido a las características topológicas del sistema es el espín que se define a través de la relación

$$s = \int \epsilon_{ij} x^i T^{0j} d^2x. \quad (78)$$

Sustituyendo el ansatz (56) en la expresión para las componentes  $T^{0i}$  obtenemos

$$T^{0i} = e^2 v^4 \frac{\epsilon^{ij} r^j}{r^2} \left[ \left( 1 - \frac{g^2 v^2}{4} f^2 \right) \frac{da}{dr} \frac{dh}{dr} + ahf^2 \right], \quad (79)$$

con lo cual el espín se puede escribir como

$$\begin{aligned} s &= -\frac{2\pi e v}{\lambda} \int_0^\infty a \frac{da}{dr} dr \\ &= -\frac{\pi\kappa}{e^2} [a^2(\infty) - a^2(0)] \\ &= \pi\kappa \left( \frac{n}{e} \right)^2. \end{aligned} \quad (80)$$

De la expresión anterior podemos observar que fijando  $\frac{\Phi}{2\pi}$ , los valores que puede tener el espín son discretos. Sin embargo éstos no coinciden con los valores usuales para bosones o fermiones ( $s = \frac{m}{2}$ ,  $m$  entero). De hecho variando  $\frac{\Phi}{2\pi}$ , el valor de  $s$  puede ser arbitrario. Debido a esta razón, los vórtices se pueden indentificar como aniones. El espín se puede expresar como función de  $\Phi$  y  $Q$  utilizando las ecuaciones (74) y (77) obteniendo

$$s = \frac{Q\Phi}{2\pi}. \quad (81)$$

Esta relación es muy interesante porque nos indica que, aunque  $s$  sea arbitrario, cumple con la relación espín-estadística. Por un lado sabemos que para partículas idénticas de espín  $s$  al realizar un doble intercambio, la función de onda debe adquirir una fase  $e^{i2\pi s}$ . Por otro lado, de nuestra discusión de la sección sobre "física en  $(2+1)$  dimensiones", del capítulo 2, el doble intercambio es equivalente a rotar un vórtice alrededor del otro un ángulo  $2\pi$ . Pero, como los vórtices tienen tanto carga eléctrica como flujo magnético, al realizar la operación anterior aparece una fase de Bohm-Aharonov  $e^{iQ \int \vec{A} \cdot d\vec{r}} = e^{iQ\Phi}$ . Comparando las dos fases llegamos al resultado de la ecuación (81).

Finalmente calculamos la magnetización, ésta es obtenida a partir de la definición usual  $\mathcal{M} = \frac{1}{2} \int d^2x \epsilon^{jk} x_j J_k$  de donde se puede deducir, utilizando la ec. (30) y el ansatz (56) que

$$\mathcal{M} = \frac{2\pi}{e^2 \lambda^2} \int_0^\infty r h(r) dr. \quad (82)$$

En contraste con las tres cantidades anteriores la magnetización no es una cantidad topológica; es necesario resolver (numéricamente) las ecuaciones diferenciales para evaluar  $\mathcal{M}$ .

## Vórtices en la fase rota. Análisis numérico.

Encontrar soluciones analíticas a ecuaciones diferenciales no lineales es frecuentemente un trabajo difícil de llevar a cabo. Aún resolver numéricamente dicho tipo de ecuaciones es en ocasiones una tarea complicada. A continuación describimos el método [19] que utilizamos para resolver las ecuaciones (66). La ventaja inmediata de este método es su relativa sencillez.

El problema al que nos enfrentamos es: una vez especificados los valores del número de vorticidad  $n$  y de los parámetros  $\eta$  y  $\lambda$  resolver las ecuaciones (66) sujetas a condiciones de frontera en cero e infinito, ecuaciones (68) y (69) respectivamente. Si se conocieran los valores de los parámetros  $h_0$  y  $f_n$  en las ecuaciones (68), simplemente tendríamos que integrar las ecuaciones desde  $r = 0$ , hasta un valor de  $r$  suficientemente grande. Sin embargo,  $h_0$  y  $f_n$  se deben determinar de tal forma que las funciones se aproximen asintóticamente en  $r \rightarrow \infty$  al valor correcto. Alternativamente si se conocieran el valor de  $a_\infty$  y  $f_\infty$ , las ecuaciones (69) se podrían integrar inversamente desde " $r = \infty$ " hasta " $r = 0$ ".

El método que utilizaremos combina ambas posibilidades, dando ciertos valores iniciales para  $h_0$ ,  $f_n$ ,  $a_\infty$ ,  $f_\infty$  se integran las ecuaciones en dos intervalos:

- 1) desde  $r = R_{min}$  (cerca de cero) hasta un valor intermedio  $r = R_{int}$
- 2) en el segundo intervalo se integra inversamente desde un valor grande de  $r$  ( $R_f$ ) hasta  $R_{int}$ .

Comparando los valores de las funciones y sus derivadas en el punto de intersección de los intervalos ( $R_{int}$ ), se varía el valor de  $h_0$ ,  $f_n$ ,  $a_\infty$ ,  $f_\infty$  hasta que se hacen coincidir.

Como primer paso, el sistema de ecuaciones (66) lo reexpresamos como un sistema de ecuaciones acopladas de primer orden. Utilizando la función auxiliar  $k$ , definida por medio de la relación  $r \frac{df}{dr} = k$ , tenemos que las ecuaciones a resolver son:

$$\frac{dh}{dr} = -\frac{\lambda a f^2}{r(1 - \lambda^2 f^2)}, \quad (83a)$$

$$\frac{da}{dr} = -\frac{\lambda h f^2 r}{(1 - \lambda^2 f^2)}, \quad (83b)$$

$$\frac{df}{dr} = \frac{k}{r}, \quad (83c)$$

$$\frac{dk}{dr} = \frac{fr}{(1 - \lambda^2 f^2)^2} \left( \frac{a^2}{r^2} - h^2 \right) + \frac{\eta^2}{2} f(f^2 - 1)r. \quad (83d)$$

Como mencionamos estas ecuaciones se resuelven en el intervalo  $r \in [R_{min}, R_{int}]$ , en tanto que para  $r \in [R_{int}, R_f]$  dejamos evolucionar el sistema de forma inversa con respecto de la variable  $r$ , reexpressando el sistema de ecuaciones en términos de la variable  $x = \frac{1}{r}$ , quedando en la forma:

$$\frac{d\tilde{h}}{dx} = \frac{\lambda \tilde{a} \tilde{f}^2}{x(1 - \lambda^2 \tilde{f}^2)}, \quad (84a)$$

$$\frac{d\tilde{a}}{dx} = \frac{\lambda \tilde{h} \tilde{f}^2 x^3}{x^3(1 - \lambda^2 \tilde{f}^2)}, \quad (84b)$$

$$\frac{d\tilde{f}}{dx} = \frac{\tilde{k}}{x}, \quad (84c)$$

$$\frac{d\tilde{k}}{dx} = \frac{\tilde{f}}{(1 - \lambda^2 \tilde{f}^2)^2} \left( \frac{\tilde{a}^2}{x} - \frac{\tilde{h}^2}{x^3} \right) + \frac{\eta^2}{2} \frac{\tilde{f}(\tilde{f}^2 - 1)}{x^3}, \quad (84d)$$

con  $x \in (\frac{1}{R_f}, \frac{1}{R_{int}})$ . La tilde en las funciones indica que éstas están siendo evaluadas en el segundo intervalo. Aquí  $R_{int}$  es un valor intermedio del intervalo  $(R_{min}, R_f)$  y  $R_f$  se selecciona suficientemente grande para que los valores de las funciones hayan, en buena aproximación, obtenido sus valores asintóticos. El siguiente paso es el de encontrar soluciones físicamente aceptables utilizando una rutina para resolver ecuaciones diferenciales, dados los valores de los parámetros  $h_0$ ,  $f_n$ ,  $a_\infty$  y  $f_\infty$  que determinan los valores de las funciones en  $R_{min}$  y  $R_f$ . Ahora el problema se traduce en buscar los valores de los parámetros para los cuales las soluciones son satisfactorias. Esto podría intentarse por el método de ensayo y error, pero resulta impracticable. En lugar de esto adaptaremos una rutina que

minimice la diferencia de las funciones y sus derivada en el punto intermedio  $R_{int}$ . Esto se logra definiendo la función

$$F = \sum_i \left[ \left( f_i(R_{int}) - \tilde{f}_i\left(\frac{1}{x_{int}}\right) \right)^2 + \left( f'_i(R_{int}) - \tilde{f}'_i\left(\frac{1}{x_{int}}\right) \right)^2 \right], \quad (85)$$

con  $f_i = h, a, k, f$  y  $\tilde{f}_i = \tilde{h}, \tilde{a}, \tilde{k}, \tilde{f}$  para  $i = 1, 2, 3, 4$  respectivamente y  $x_{int} = \frac{1}{R_{int}}$ . Obsérvese que  $F$  depende implícitamente de  $h_0, f_n, a_\infty, f_\infty$ .

Un problema que se presenta frecuentemente durante el proceso numérico de minimización consiste en que para determinados valores de los parámetros alguna de las soluciones crece muy rápido, de tal forma que el algoritmo de la rutina de integración no alcanza el valor final de la variable de integración. Este problema se reduce apreciablemente si

- a) se utiliza un programa de minimización que imponga cotas a la variación de los parámetros, tal es el caso del programa llamado MINUIT perteneciente a la biblioteca del CERN, el cual fué utilizado en nuestros cálculos,
- b) se varían los valores para  $R_{int}$  y  $R_f$ , de tal forma que se logre encontrar la función  $F$ . Un valor pequeño para la función  $F$  significa que se obtuvo una buena solución numérica para las ecuaciones diferenciales. En los cálculos realizados se pudo obtener  $F \approx 1 \times 10^{-14}$ .

Como se mencionó anteriormente las soluciones obtenidas dependen paramétricamente de  $n, \eta$  y  $\lambda$ . En las figuras (2a) a la (2g) mostramos las soluciones con tres conjuntos de parámetros diferentes. De la figura (2a) hasta la (2d) tenemos las soluciones para  $n = 1$  y  $\lambda = 0.5$ , para distintos valores de  $\eta$ , mientras que las figuras (2e) y (2f) corresponden a  $n = 1, \eta = 0.5$  para  $\lambda = 0.3$  y  $\lambda = 0.7$  respectivamente. Finalmente la figura (2g) corresponde a la solución obtenida para  $n = 2, \eta = 0.5$  y  $\lambda = 0.5$ . En todas estas gráficas  $R_f = 12$ .

Para el análisis de estas gráficas es conveniente recordar que las masas (adimensionales) escalares y vectoriales se pueden expresar en función de  $\lambda$  y  $\eta$  como:

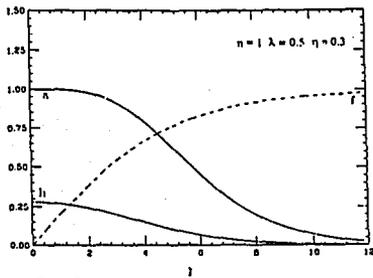


fig. 2a.

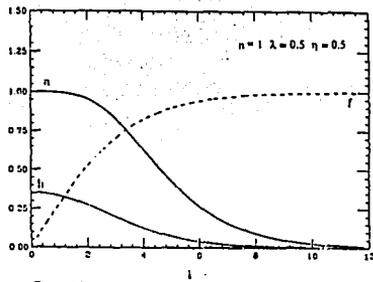


fig. 2b.

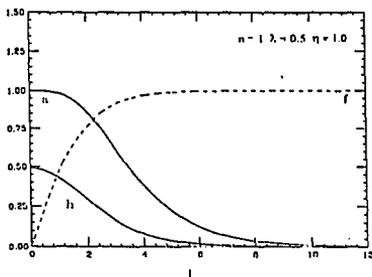


fig. 2c.

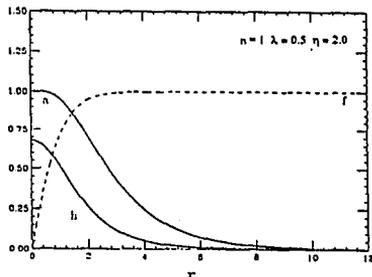


fig. 2d.

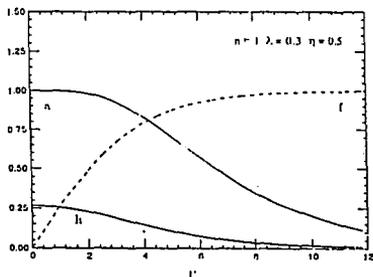


fig. 2e.

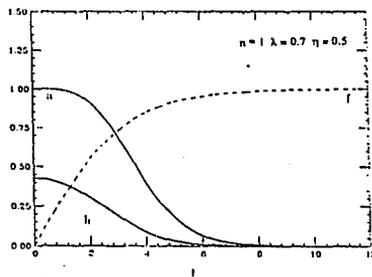


fig. 2f.

fig. 2a-2f. Se muestran las gráficas de las soluciones numéricas, para diferentes valores de los parámetros.

$$\tilde{m}_s = \eta \quad \text{y} \quad \tilde{m}_v = \frac{\lambda}{1 - \lambda^2}.$$

Consideremos primero las gráficas (1a-1d). Notamos que al incrementar  $\eta$  (el alcance del campo escalar disminuye)  $f$  alcanza su valor asintótico  $f \rightarrow 1$  más rápidamente. Debido al hecho de que la masa vectorial no cambia, podríamos esperar que el alcance de  $a$  y  $h$  no se modificara. Sin embargo de las gráficas observamos que aunque con menos sensibilidad que  $f$ , el alcance de  $a$  y  $h$  cambia con  $\eta$ . Mientras que los valores de las funciones  $a$   $f$  están fijos en el origen ( $a(0) = n; f(0) = 0$ ), el valor de  $h(0) = h_0$  cambia; de las figuras observamos que  $h_0$  crece con  $\eta$ .

Al comparar las figuras (2e) y (2f) observamos que  $h_0$  aumenta al crecer  $\lambda$ . Como un aumento de  $\lambda$  implica un aumento de la masa vectorial es entendible que el alcance de los campos  $a$  y  $h$  disminuya al aumentar  $\lambda$ .

El conocimiento de las soluciones numéricas ahora nos permite calcular cantidades tales como: la energía, los campos eléctrico y magnético, la magnetización, el radio medio de los vórtices y la energía de interacción entre vórtices.

1) **Energía.** Para calcularla hacemos uso de la ecuación (67). Es conveniente definir una energía adimensional

$$\epsilon = \frac{2\mathcal{E}}{e^2 v^4}. \quad (86)$$

La densidad de energía  $\frac{d\epsilon}{dr}$  se define de tal manera que

$$\epsilon = \int_0^\infty \frac{d\epsilon}{dr} dr. \quad (87)$$

En la figura (3) mostramos la densidad de energía para  $n = 1$  y  $\lambda = 0.5$  y diferentes valores de  $\eta$ . La distribución muestra que la energía está concentrada cerca del centro del vórtice ( $r = 0$ ). Notamos que al aumentar la masa escalar la anchura de la distribución

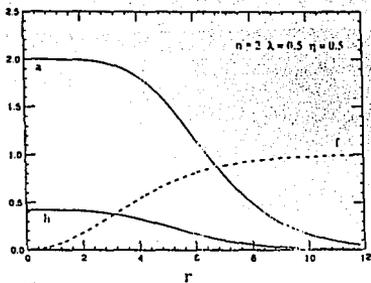


fig. 2g.

Fig.2g. Gráfica de una solución numérica para vorticidad  $\eta = 2$ .

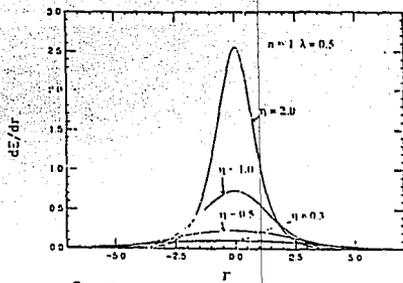


fig. 3.

Fig.3. Se muestra la densidad de la energía, para diferentes valores de la masa escalar ( $\eta$ ).

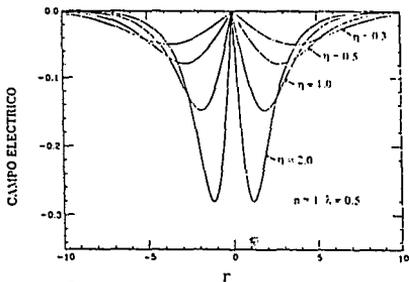


fig. 4a.

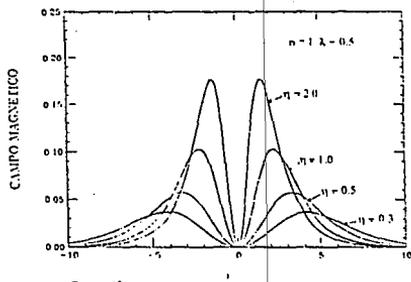


fig. 4b.

Fig.4. Comportamiento de los campos eléctrico y magnético para diversos valores de la masa escalar.

de energía disminuye y el máximo de la distribución aumenta. El resultado neto es que la energía total (area bajo la curva) crece con  $\eta$ , esto se muestra en la gráfica (6b).

**2) Campos eléctrico y magnético.** Las expresiones para los campos eléctrico y magnético están dados en las ecuaciones (71). En las gráficas presentamos los campos eléctrico y magnético en unidades de  $\frac{1}{ev^2}$ , es decir

$$\frac{E}{ev^2} = \frac{dh}{dr}, \quad (88)$$

$$\frac{B}{ev^2} = \frac{1}{r} \frac{da}{dr}, \quad (89)$$

donde  $E$  es la magnitud radial del campo eléctrico. Las gráficas correspondientes a estas variables se muestran en las figuras (4a) y (4b) para  $n = 1, \lambda = 0.5$  y diferentes valores de  $\eta$ . De dichas gráficas podemos observar que la densidad del campo magnético para los vórtices se encuentra localizado en un anillo. Tanto el espesor como el radio del anillo aumentan al disminuir  $\eta$ . Sin embargo en todos los casos el área bajo la curva debe dar el mismo valor, ya que representa el flujo magnético, que de acuerdo a la ecuación (74) está cuantizado y es independiente de  $\lambda$  y  $\eta$ . La distribución del campo magnético contrasta con la del modelo relativista de Landau-Ginzburg, en donde se tiene que la densidad de campo magnético presente el máximo en el origen [2] o centro del vórtice, a partir del cual decae. Por lo tanto en nuestro caso, de una manera más precisa podríamos decir que los vórtices representan anillos de flujo, en lugar de tubos de flujo. El campo eléctrico exhibe el mismo comportamiento anular.

**3) Magnetización.** Esta se calcula a partir de la ecuación (82). Es conveniente definir la magnetización adimensional  $m = \frac{e^2 \lambda^2}{2\pi} \mathcal{M}$ . En las figuras (5a) y (5b) se muestra el comportamiento de la magnetización, como función de  $\lambda$  y  $\eta$ . Como puede verse en estas figuras. Esto está de acuerdo con el hecho de que se espera que la magnetización aumente con el radio del vórtice.

**4) Radio Medio.** Ya que la densidad de energía de las soluciones está concentrada

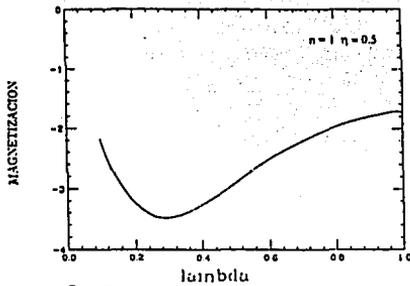


fig. 5a.

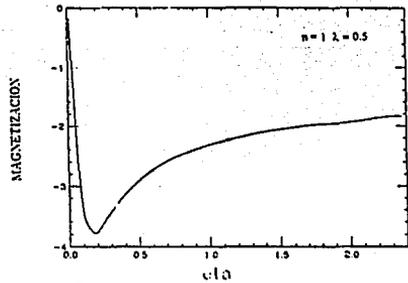


fig. 5b.

Fig.5. En las gráficas se puede apreciar el comportamiento de la magnetización en función de los parámetros  $\lambda$  y  $\eta$  respectivamente.

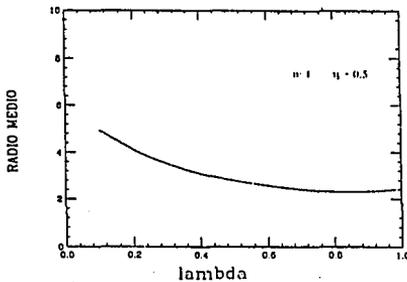


fig. 6a.

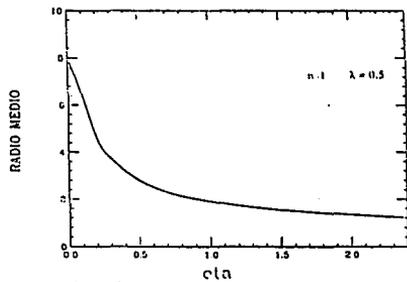


fig. 6b.

Fig.6. Gráficas del radio medio en función de  $\lambda$  y  $\eta$  respectivamente.

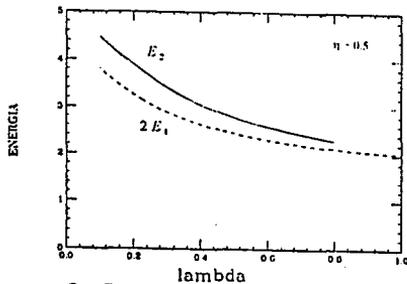


fig. 7a.

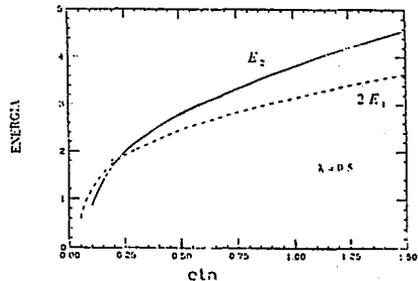


fig. 7b.

Fig.7. Se muestran las gráficas de la energía correspondientes a dos vórtices alejados infinitamente y la energía para dos vórtices superpuestos.

en una región finita del espacio, esto nos sugiere que podemos utilizar como factor de peso para definir un radio medio en la forma

$$\langle r \rangle \equiv \frac{\int r T^{00} d^2 x}{\int T^{00} d^2 x}. \quad (90)$$

Este radio medio caracteriza la extensión del solitón. Las gráficas correspondientes se presentan en las figuras (6a) y (6b) para  $n = 1$ . De ahí vemos que el radio crece conforme los parámetros  $\lambda$  y  $\eta$  se reducen. Los resultados están de acuerdo con el hecho de que el alcance de los campos es del orden del inverso de las masas,

**5) Energía de interacción.** Hasta ahora hemos considerado las propiedades estáticas de vórtices aislados. Otros dos temas que requerirían especial atención es el relativo a la estabilidad de las soluciones y el de la interacción entre vórtices. Aquí consideramos brevemente el segundo punto.

Como se mencionó en la introducción a este capítulo, la transición entre superconductores del tipo I al tipo II coincide con el punto en el que los vórtices son no interactuantes (transición entre fuerza repulsiva a fuerza atractiva). Un método analítico para encontrar esta transición es buscar el límite de Bogomol'nyi. Sin embargo para el presente modelo en la fase rota, dicho límite no existe (ver siguiente sección).

Debido a lo anterior es necesario estudiar numéricamente la interacción entre vórtices. Dicho estudio para una separación arbitraria entre dos vórtices es sumamente complicada, no obstante, podemos obtener un criterio simple para saber si los vórtices (cada uno con vorticidad  $n = 1$ ) se atraen o se repelen. Para ello comparamos la energía de dos vórtices que se mantienen muy alejados, con la correspondiente energía cuando los vórtices se encuentran superpuestos en el mismo punto.

Sea  $E_n$  la energía para una configuración con vorticidad  $n$ . Para la configuración de dos vórtices (cada uno con  $n = 1$ ) cuya separación tiende a infinito, la energía total es  $2E_1$ . Mientras que la energía cuando los vórtices están superpuestos en el mismo punto es  $E_2$ . Es ahora conveniente definir la cantidad

$$\Delta E = E_2 - 2E_1, \quad (91)$$

de tal manera que para  $\Delta E > 0$  los vórtices se repelen, mientras que para  $\Delta E < 0$  se atraen.

Las figuras (7a) y (7b) muestran las gráficas de  $E_2$  y  $2E_1$  como función de  $\lambda$  y  $\eta$  respectivamente. En la primera,  $\eta$  se mantiene fija ( $\eta = 0.5$ ), mientras que en la segunda  $\lambda = 0.5$ . En la figura (7a) no parece haber intersección entre  $E_2$  y  $2E_1$  por otro lado en la figura (7b) las dos curvas se intersectan en  $\eta_0 \approx 0.2$ . La gráfica queda entonces dividida en las dos regiones:

- a) la región con  $\eta > \eta_0$  se tiene  $\Delta E > 0$  y por lo tanto la fuerza es repulsiva entre los vórtices.
- b) la región  $\eta < \eta_0$ , donde se tiene  $\Delta E < 0$  y en consecuencia la fuerza es de carácter atractivo.

Este resultado muestra que existen puntos en el plano  $\eta$  vs.  $\lambda$  en los cuales hay transición entre "superconductores" tipo I a tipo II. Una caracterización completa de qué regiones del plano corresponde a tipo I y cuáles a tipo II es un trabajo que se planea a futuro.

### Límite de Bogomol'nyi en la fase simétrica.

El límite de Bogomol'nyi no existe en la fase rota de la presente teoría. Sin embargo si se considera la fase simétrica (sin RES) con un potencial escalar de la forma  $V(\phi) = \frac{m^2}{2}|\phi|^2$  el límite de Bogomol'nyi existe para un valor particular de  $m$ . Es interesante comprobar que en dicho caso la teoría admite soluciones tipo solitón (o vórtice) que son de carácter no-topológico.

El presente límite fue encontrado en la referencia [14]. Aquí presentamos dichos resultados con algunos desarrollos complementarios.

Consideremos entonces el límite de Bogomol'nyi para nuestras ecuaciones de movimiento. Para ello volvamos a la funcional de la energía (67). Como ahora no tendremos RES, es conveniente escribir  $\bar{h} = \frac{\kappa}{e}h$  y  $\bar{f} = \frac{\kappa}{e}f$ , en lugar de  $\bar{h} = vh$  y  $\bar{f} = vf$ . Con esto la energía está dada por

$$E = \frac{\kappa^2}{2e^2} \int d^2x \left[ (1-f^2) \left[ (\bar{h}')^2 + \left( \frac{a'}{\kappa\rho} \right)^2 \right] + (\kappa fh)^2 + (f')^2 + \left( \frac{fa}{\rho} \right)^2 + \frac{2e^2}{\kappa^2} V(f) \right], \quad (92)$$

donde las primas denotan diferenciación con respecto a  $\rho$ .

La funcional de energía será positiva definida para configuraciones de solitón que cumplan con la condición  $\max(f) < 1$  para  $r \in (0, \infty)$ . La funcional de energía puede reescribirse a la Bogomol'nyi, para obtener

$$E = \int d^2x \left[ \frac{(1-f^2)}{2e^2 f^2} \left( \frac{a'}{\rho} \mp \frac{\kappa^2 f^2}{(1-f^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^2 + \frac{\kappa^2}{2e^2} \left( f' \pm \frac{fa}{\rho(1-f^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^2 + V(f) - \frac{\kappa^4}{2e^2} f^2 \right] \pm \frac{\kappa^2}{e} \Phi, \quad (93)$$

donde el campo  $h$  ha sido eliminado utilizando las ecuaciones de movimiento (66a) y (66b).

Siempre que el potencial sea escogido como  $V(|\phi|) = \frac{m^2}{2} |\phi|^2$  con el valor crítico  $m = \kappa$ , i. e. cuando las masas escalar y topológica son iguales, entonces se tiene una cota inferior de la energía

$$E \geq \frac{\kappa^2}{e} |\Phi| = \frac{\kappa}{e} Q \quad (94)$$

que se satura cuando se satisfacen las ecuaciones de Bogomol'nyi

$$\frac{a'}{r} = \pm \frac{f^2}{(1-f^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (95a)$$

$$f' = \mp \frac{fa}{r(1-f^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (95b)$$

donde ahora se introduce la coordenada adimensional  $r = \kappa\rho$ . La ecuación para  $h$  se puede integrar explícitamente para obtener

$$h = \mp(1 - f^2)^{1/2}. \quad (96)$$

En este límite las componentes  $T_{\rho\rho}$  y  $T_{\theta\theta}$  del tensor de energía-momento se anulan; los solitones topológicos ciertamente no existen, pero la teoría admite solitones no topológicos.

A continuación analizamos estas soluciones.

Combinando las ecuaciones (95a) y (95b), obtenemos

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \frac{df}{dr} \right] = \frac{1}{f(1 - f^2)} \left[ \left( \frac{df}{dr} \right)^2 - f^4 \right]. \quad (97)$$

Si consideramos el caso para  $f$  pequeña podemos aproximar  $(1 - f^2)^{-1} \approx 1$  en la ecuación (97) que se reduce a la ecuación de Liouville, con simetría rotacional, cuya solución es

$$f(r) = \frac{2N}{r} \left[ \left( \frac{r}{r_0} \right)^N + \left( \frac{r_0}{r} \right)^N \right]^{-1}, \quad (98)$$

donde  $N$  y  $r_0$  son constantes arbitrarias.

Regresando al caso de  $f$  arbitraria, tenemos para valores grandes de  $r$ ,  $f(\infty) \rightarrow 0$  debido a que la energía debe ser finita. En este caso el valor  $a(\infty) = -\alpha$  no está restringido a un cierto valor. El comportamiento a grandes distancias de las soluciones conduce a

$$f(r) = \frac{C}{r^\alpha} - \frac{C^3}{4(\alpha - 1)^2 r^{3\alpha - 2}} + \mathcal{O}(r^{-5\alpha + 4}), \quad (99a)$$

$$a(r) = -\alpha + \frac{C^2}{2(\alpha - 1)r^{2\alpha - 2}} - \mathcal{O}(r^{-4\alpha + 4}). \quad (99b)$$

En este caso se tienen dos categorías de soluciones:

i)  $n = 0$ , de tal forma que  $a(0)$  debe anularse para que la solución sea no-singular, pero  $f(0) = f_0$  y por tanto su valor no está restringido. Estos son solitones no topológicos

caracterizados por el valor del flujo magnético  $\Phi = \frac{2\pi}{e}|\alpha|$ , el cual no requiere estar cuantizado. El comportamiento a grandes distancias está dado por las ecuaciones (35), en tanto que para  $r \rightarrow 0$  obtenemos una solución en serie de potencias

$$f(r) = f_0 - \frac{f_0^3}{4(1-f_0^2)}r^2 + \frac{f_0^5(4-f_0^2)}{64(1-f_0^2)^3}r^4 + \mathcal{O}(r^6), \quad (100a)$$

$$a(r) = -\frac{f_0^2}{2(1-f_0^2)^{\frac{1}{2}}}r^2 + \frac{f_0^4(2-f_0^2)}{16(1-f_0^2)^{\frac{3}{2}}}r^4 + \mathcal{O}(r^6). \quad (100b)$$

Soluciones aceptables tipo solitón existen para valores de  $f_0$  en el rango  $0 < f_0 < 1$ . El comportamiento a pequeñas y grandes distancias de las soluciones está relacionado ya que dado el valor de la función en cero, éstas tendrán la evolución al infinito que dependerá de este valor. Cuando  $f_0 \ll 1$  la solución tipo Liouville se hace exacta, y uno encuentra que  $\alpha \rightarrow 2$ ; los coeficientes  $N$  y  $r_0$  de la solución de Liouville (34) se pueden evaluar obteniendo  $N = 1$  y  $r_0 = \frac{2}{f_0}$ . En tanto que, cuando  $f_0 \rightarrow 1$  encontramos integrando numéricamente que  $\alpha \rightarrow 1.755$ . Por lo tanto, el flujo magnético varía continuamente entre  $\Phi = 0.877(4\pi/e)$  y  $\Phi = 4\pi/e$ . Un ejemplo de este tipo de soluciones se muestra en la figura (8).

ii)  $n \neq 0$ . En este caso  $f(0)$  debe anularse y  $a(0) = n$ . A grandes distancias se comporta de la misma forma que los solitones no topológicos ecuación (99). El comportamiento a distancias cortas es similar a las soluciones tipo vórtice, y pueden ser obtenidas de las ecuaciones (68) con las substituciones:  $a_2 = \kappa^2/2$  y  $h_0 = 1$ . Siguiendo a Jackiw *et.al.* [11] nos referiremos a esas soluciones como vórtices no topológicos. Para cada entero  $n$ , habrá un conjunto continuo de soluciones correspondientes al rango  $0 < f_n < f_n^{max}$ . Para valores tales que  $f_n > f_n^{max}$  no hay solución real a las ecuaciones de campo (95), dado que la condición  $f < 1$  no se satisface para toda  $r$ . Para  $f_n \ll 1$ ,  $f(r)$  es pequeña para toda  $r$  y puede por lo tanto ser aproximada por la solución (98) de la ecuación de Liouville. En particular podemos determinar el comportamiento de la solución a la ecuación (99) para  $r$  grandes, con  $\alpha \rightarrow n + 2$ ;  $N = n + 1$ ,  $r_0^{n+1} = \frac{f_n}{2(n+1)}$ . De hecho, este valor es una

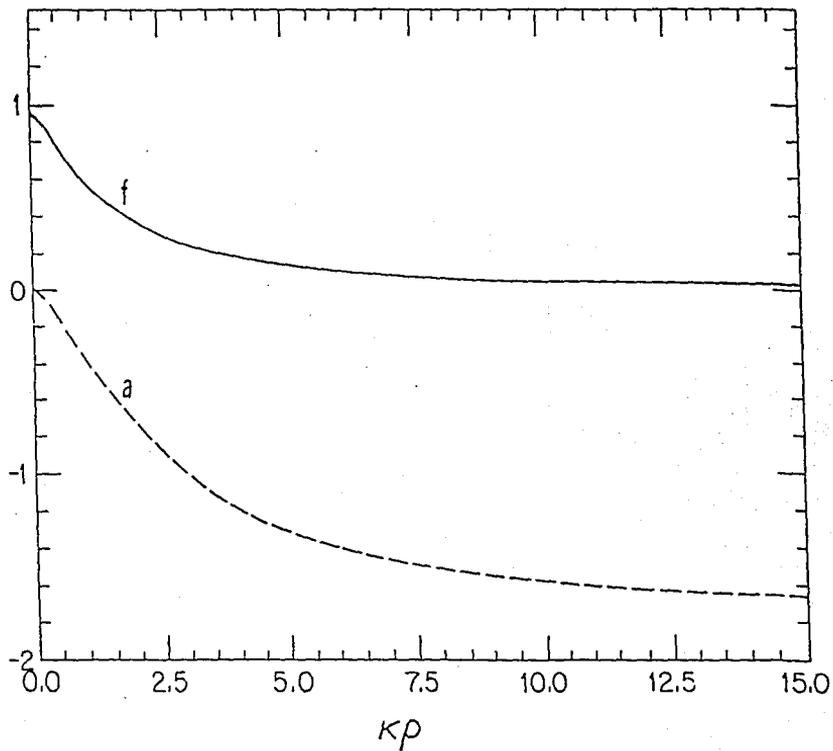


Fig.8. Se muestra una solución solitónica no topológica con vorticidad cero.

cota superior, dado que  $\alpha < n + 2$ . Por otro lado, cuando  $f_n \rightarrow f_n^{max}$  se encontró que  $\alpha$  tiende al mínimo valor  $\alpha^{min}$ . Por lo tanto, para cada entero  $n$  el flujo varía continuamente entre  $\Phi_n^{min} = \frac{2\pi}{e} [n + \alpha_n^{min}]$  y  $\Phi_n^{max} = \frac{4\pi}{e} [n + 1]$ ; es decir tanto el flujo magnético como el espectro de energía consiste, para cada  $n$ , de bandas de anchura finita. Para vorticidad  $n = 1$  y  $n = 2$  encontramos numéricamente que  $\alpha_1^{min} = 2.126$  y  $\alpha_2^{min} = 3.052$ . Un ejemplo de vórtice no-topológico se presenta en la figura (9).

Ecuaciones similares de Bogomol'nyi aparecen en un modelo CS de Higgs sin término de Maxwell y sin contribución al momento magnético, para un potencial de sexto orden cuando los parámetros se escogen para hacer que las masas vectorial y escalar sean iguales [10,11]. Algunas diferencias deben ser señaladas. Primero, el modelo previo acepta solitones topológicos y no topológicos. En el presente modelo el límite de Bogomol'nyi aparece para un potencial  $\phi^2$  cuando las masas escalar y topológica son iguales, y por lo tanto permite solo solitones no topológicos. En el límite para  $f$  pequeñas tienen la misma solución de Liouville. Pero, mientras que en el primer caso el flujo varía entre  $\Phi = 4\pi(n + 1)/e$  y  $\infty$ , en el modelo presente el espectro de flujo consiste de bandas de ancho finito con el valor  $\Phi = 4\pi(n + 1)/e$  correspondiente a la cota superior. La energía del solitón en las referencias [10,11] fué dado por  $E = e v^2 |\Phi|$ . Nosotros tenemos resultado similares (ec. (94)), pero  $\kappa/e$  reemplaza el parámetro de rompimiento de simetría  $v$  en la expresión para la energía del solitón. Lo que es notable de los solitones no topológicos discutidos en este trabajo es que es el primer ejemplo de solitones para un potencial escalar  $\phi^2$ .

Consideremos la energía de interacción entre dos solitones con cargas  $Q_1$  y  $Q_2$  del mismo signo y que se encuentran separados por una distancia infinita. De acuerdo a la ecuación (94) la energía total de ambos vórtices es  $E = \frac{\kappa}{e}(Q_1 + Q_2)$ . Si ambos vórtices se superponen en el mismo punto, debido a la conservación de carga, la configuración resultante representará una solución tipo vórtice de carga  $Q_1 + Q_2$ . Entonces de acuerdo a la ecuación (94) la energía total será de nuevo  $E = \frac{\kappa}{e}(Q_1 + Q_2)$ . Por tanto, concluimos que los vórtices en este caso no interactúan entre ellos.

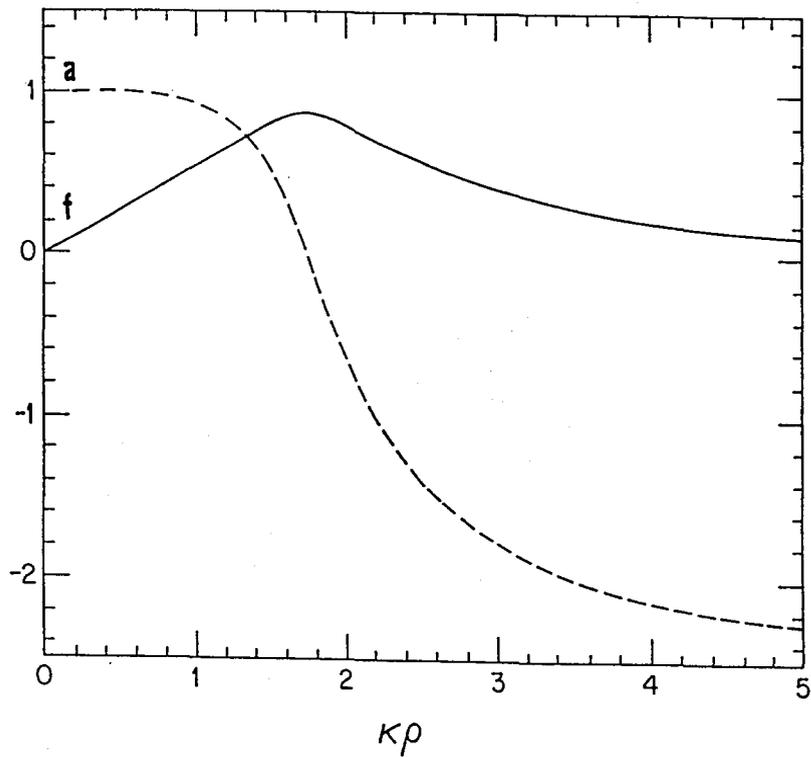


Fig.9. En este caso tenemos un vórtice no topológico con vorticidad igual a uno.

La condición  $m = \kappa$  representa una transición entre fases de una en la cual los vórtices se atraen a otra en la que los vórtices se repelen. Esta transición es similar a la transición entre superconductores del tipo I al tipo II. De hecho, lo que hemos demostrado es que en la presente teoría para un potencial del campo escalar de la forma  $V(|\phi|) = \frac{m^2}{2}|\phi|^2$  la atracción entre vórtices debido a la interacción a través del campo escalar tiene la misma magnitud que la repulsión producida por el campo vectorial. Por tanto, cuando el rango de las dos interacciones es la misma ( $m = \kappa$ ) los vórtices dejan de interactuar. Por otro lado si el rango de la interacción escalar es más pequeña que el rango de la interacción vectorial ( $m > \kappa$ ) el potencial entre vórtices es repulsivo, mientras que para  $m < \kappa$  el potencial es atractivo.

Para terminar esta sección señalaremos los puntos complementarios al trabajo ya referido [14]:

- a) Se muestra una solución explícita para la función  $h(r)$ .
- b) Se presentan los valores de los coeficientes  $N$  y  $r_0$  para las soluciones de la ecuación de Liouville (98), tanto para soluciones de vórticidad  $n = 0$  como  $n \neq 0$ .
- c) Se enfatiza el hecho de que el flujo magnético y el espectro de la energía consiste en bandas para una  $n$  dada.

## Conclusiones.

A continuación señalaremos los puntos más importantes encontrados en este capítulo y mencionaremos las cuestiones que han quedado pendientes para un trabajo futuro.

Hemos presentado un modelo de electrodinámica escalar en  $(2+1)$  dimensiones. Además de los términos usuales del modelo de Nielsen-Olesen, se muestra que es posible agregar dos nuevos términos a la densidad Lagrangiana: a) Un término de Chern-Simons y b) un acoplamiento al campo escalar que se interpreta como el momento magnético anómalo. Con la inclusión de estos dos términos la teoría permanece invariante de norma e invariante de Lorentz, sin embargo se rompe la simetría de paridad y la de reversibilidad temporal.

La posibilidad de incluir el término de Chern-Simons y el momento magnético anómalo para un campo escalar es una peculiaridad del modelo, que se debe al hecho de restringir el espacio a dos dimensiones espaciales. La razón para denominar momento magnético anómalo al acoplamiento introducido para  $\phi$  se debe a que la introducción del acoplamiento tipo Pauli para un campo fermiónico en  $(2+1)$  dimensiones puede incorporarse a la derivada covariante, la cual puede en general utilizarse tanto para campos fermiónicos como bosónicos.

Obtuvimos la correspondiente ley de Gauss generalizada y como consecuencia importante de esta generalización se tiene que en presencia de rompimiento espontáneo de simetría, toda estructura con flujo magnético posee a su vez carga eléctrica (ec. (27)). Este hecho debe compararse con los vórtices encontrados por Nielsen-Olesen [3] que tienen flujo magnético pero son neutros. También encontramos la ley de Ampère modificada.

Al estudiar los modos de propagación de los campos vectoriales se encontraron dos soluciones correspondientes a masas diferentes (ecuaciones (33) y (34)). Estos modos de propagación corresponden a dos polarizaciones elípticas diferentes. Este resultado proviene del hecho de que la teoría viola paridad.

La teoría propuesta es invariante de Lorentz, lo cual implica que el tensor de energía-momento ( $T_{\mu\nu}$ ) es una cantidad conservada. El método utilizado para determinar  $T_{\mu\nu}$

consiste en escribir la acción en forma covariante para curvatura arbitraria, para después realizar la variación de la acción con respecto a la métrica. En este caso se encontró que la masa de CS ( $\kappa$ ) y los términos lineales en el momento magnético anómalo no contribuyen explícitamente a  $T_{\mu\nu}$  (ec. (54)).

Se encontró que para una relación particular entre masa topológica y el momento magnético anómalo ( $\kappa = -\frac{2e}{g}$ ) las ecuaciones para el campo de norma se reducen de ecuaciones diferenciales de segundo orden a primer orden. Las ecuaciones encontradas (ec. (64)) coinciden con el llamado "límite puro de Chern-Simons". El análisis que se presentó para las soluciones de vórtices se restringieron a este límite.

Para el potencial escalar consideramos dos fases de simetría. En la fase rota, el potencial es del tipo  $\phi^4$ , lo cual conduce a la existencia de soluciones solitónicas de carácter topológico. Mostramos que estos vórtices poseen cantidades topológicamente conservadas como son el flujo magnético, la carga eléctrica y el espín. Además de ser una cantidad conservada encontramos que el espín toma valores arbitrarios, conduciendo a la posibilidad de que los vórtices sean entidades aniónicas.

Las soluciones solitónicas encontradas se obtuvieron mediante análisis numérico. Las ecuaciones de movimiento se parametrizaron en términos de dos constantes:  $\eta$ , la cual resulta ser la masa escalar y  $\lambda$  que a su vez está relacionada con la masa vectorial. En términos de estas constantes se encontraron los campos eléctrico y magnético, la magnetización y la energía.

Uno de los resultados obtenidos fué que al aumentar la masa escalar el alcance del campo escalar disminuye. Así mismo se encontró que el alcance del potencial vectorial disminuye conforme aumenta  $\lambda$ .

Se encontró que el campo magnético se localiza en un anillo cuyo espesor y radio aumentan al disminuir la masa escalar.

Para estudiar la energía de interacción entre vórtices, se comparó el valor de la energía cuando los vórtices se encuentran muy alejados ( $2E_1$ ) con la correspondiente energía de

dos vórtices superpuestos ( $E_2$ ). En una gráfica de energía *vs.*  $\eta$  (la masa escalar), con  $\lambda$  fija se encuentra dividida en dos regiones a la derecha y a la izquierda de  $\eta_0 \approx 0.2$ . Para  $\eta > \eta_0$  tenemos que la fuerza entre vórtices es de carácter repulsivo y en la región donde  $\eta < \eta_0$  la fuerza es de carácter atractivo.

En la fase simétrica consideramos un potencial  $\phi^2$  y por consecuencia no existe degeneración del vacío. Las soluciones solitónicas son de carácter no topológico. Por medio del límite de Bogomol'nyi se encuentra una cota inferior a la energía que es directamente proporcional a la carga del vórtice.

Existen varios puntos que son de interés estudiar, tales como la estabilidad del sistema considerando fluctuaciones alrededor de las soluciones clásicas, la cuantización del sistema, la interacción entre vórtices, la existencia de sistemas multisolitónicos y la correspondiente generalización a teorías no Abelianas.

## Referencias.

- [1] Barden, Cooper y Schrieffer: Phys. Rev. 106(1957)162;  
*idem*: Phys. Rev. 108(1957)1175.
- [2] A. A. Abrikosov: Zh. Eksp. Teor. Fiz. 20(1950)1064 [Sov. Phys. JETP 5(1957)1174].
- [3] H. B. Nielsen and P. Olesen: Nucl. Phys. B61(1973)45.
- [4] R Rajaraman: Solitons and Instantons. North-Holland (1987) Amsterdam.
- [5] E. B. Bogomol'nyi: Yad. Fiz. 24, (1976)861 [Sov. J. Nucl. Phys. 24, (1976)449].
- [6] L. Jacobs, A. Khare, C.N. Kumar y S.K. Paul: Int. J. Mod. Phys., 6,19(1991)3441.
- [7] H. J. de Vega and F. A. Schaposnik: Phys. Rev. D14(1976)1100.
- [8] S. K. Paul and A. Khare: Phys. Lett. B174(1986)420.
- [9] C. N. Kumar and A. Khare: Phys. Lett. B178(1986)395;  
H. de Vega and F. A. Schaposnik, Phys. Rev. Lett. 56(1986)2564.
- [10] J. Hong, Y. Kim and P. Y. Pac: Phys. Rev. Lett. 64(1990)2230;  
R. Jackiw and E. J. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 64(1990)2234.
- [11] R. Jackiw, K. Lee and E. J. Weinberg: Phys. Rev. D42(1990)3488.
- [12] S. K. Paul and A. Khare: Phys. Lett. B193(1987)253;  
X. G. Wen and A. Zee, Phys. Rev. B41(1990)240.
- [13] J. Stern: Phys. Lett. B265(1991)119; I. Kogan: Phys. Lett. B262(1991)83.
- [14] M. Torres: Phys. Rev.D46,6(1992)2295.
- [15] S. Deser, R. Jackiw y S. Templeton: Phys. Rev. Lett. 48,975(1982);  
*idem*: Ann. Phys. (N.Y.) 140,372(1982).
- [16] S.K. Paul y A. Khare: Phys. Lett. B 178,395(1986).
- [17] S. Weinberg: Gravitation and Cosmology. John Wiley and Sons, (1972) USA.
- [18] G. W. Semenoff: Phys. Rev. Lett. 61(1988)517.
- [19] A. Antillón, J. Escalona y M. Torres: por publicarse.