

10  
28<sup>a</sup>



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO**

**FACULTAD DE QUIMICA**

**SIMULACION E INTERPRETACION DE UNA  
CURVA DE ENFRIAMIENTO ASOCIADA A LA  
SOLIDIFICACION DE UN HIERRO  
NODULAR EUTECTICO**



**EXAMENES PROFESIONALES  
FAC. DE QUIMICA**

**T E S I S**  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
**INGENIERO QUIMICO METALURGICO**  
P R E S E N T A  
**MARIO LUNA GRANADOS**



**MEXICO, D. F.,**

**1993**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## I N D I C E

### CAPITULO

#### I. INTRODUCCION.

I.1 GENERALIDADES.	2
I.2 POSICION DEL PROBLEMA Y OBJETIVO DE ESTE TRABAJO.	3

#### II. PLANTEAMIENTO DEL MODELO E IMPLEMENTACION DEL PROGRAMA COMPUTARIZADO.

II.1 ANTECEDENTES Y CONSIDERACIONES BASICAS.	8
II.2 PRIMERA ETAPA:ENFRIAMIENTO DE LA ALEACION LIQUIDA.	15
II.3 SEGUNDA ETAPA :ENFRIAMIENTO DURANTE LA SOLIDIFICACION.	18
II.4 TERCERA ETAPA:ENFRIAMIENTO EN EL ESTADO SOLIDO.	26
II.5 ALGORITMO E IMPLEMENTACION DEL PROGRAMA COMPUTACIONAL.	27

#### III. APLICACION DEL MODELO AL ANALISIS DEL EFECTO DE ALGUNAS VARIABLES DE PROCESO SOBRE LA CURVA DE ENFRIAMIENTO Y LA MICROESTRUCTURA OBTENIDA AL SOLIDIFICAR.

III.1 EFECTO DE LA TEMPERATURA DE COLADA.	38
III.2 EFECTO DEL ESPESOR DE LA PLACA.	41

## I N D I C E

III.3 EFECTO DEL COEFICIENTE DE ACUMULACION DE CALOR DEL MATERIAL DE MOLDEO.	44
III.4 EFECTO DE LA INOCULACION.	47
IV.INTERPRETACION DE RESULTADOS.	
IV.1 INTERPRETACION DE LA RELACION ENTRE LA CURVA DE ENFRIAMIENTO OBTENIDA Y LOS EVENTOS TERMICOS QUE ACONTECEN DURANTE EL ENFRIAMIENTO Y LA SOLIDIFICACION DEL HIERRO NODULAR EUTECTICO.	53
IV.2 EFECTO DE LAS VARIABLES DE PROCESO SOBRE LA CURVA DE ENFRIAMIENTO Y LA MICROESTRUCTURA OBTENIDA.	57
IV.2.1 TEMPERATURA DE COLADA	57
IV.2.2 ESPESOR DE PLACA	59
IV.2.3 DIFUSIVIDAD DE CALOR DEL MATERIAL DE MOLDEO	61
IV.2.4 INOCULACION	63
CONCLUSIONES.	67
RECOMENDACIONES.	68
ANEXO I.	69
ANEXO II.	73

## INDICE

ANEXO III.	77
ANEXO IV.	84
ANEXO V.	86
ANEXO VI.	88
BIBLIOGRAFIA.	90

## CAPITULO I

### INTRODUCCION

## I.1 GENERALIDADES.

La obtención e interpretación de curvas de enfriamiento es una de las técnicas experimentales que más ha contribuido a establecer el efecto que tienen diferentes variables de proceso sobre la microestructura observada en piezas fundidas y actualmente es empleada como una herramienta de control de proceso para la manufactura de piezas fundidas en aleaciones ferrosas y no ferrosas. Por ejemplo, en el caso de aleaciones de aluminio las curvas de enfriamiento se utilizan para verificar la eficacia del tratamiento de refinación de grano y modificación sin tener que recurrir al análisis metalográfico<sup>1</sup>. Las curvas de enfriamiento también son empleadas para determinar parámetros importantes en el control de proceso de la producción de piezas fundidas de hierros colados, como lo son el carbono equivalente, la tendencia al blanqueado, la tendencia a la formación de rechupes y eventualmente (partiendo de las temperaturas de líquidus y de transformación eutéctica) se utilizan para predecir algunas propiedades mecánicas en el producto final (dureza y resistencia mecánica<sup>2</sup>).

Las anteriores aplicaciones han sido posibles gracias a la realización de un desarrollo experimental que consistió básicamente en obtener, bajo diferentes condiciones de proceso, las curvas de enfriamiento correspondientes y efectuar análisis metalográficos para detectar los cambios microestructurales producidos por cambios en las condiciones de enfriamiento de la aleación y finalmente asociar sistemáticamente estos cambios con las características de las curvas de enfriamiento.

Sin embargo a pesar de la gran importancia que tienen las curvas de enfriamiento en cuanto a su estrecha relación con la microestructura que presenta la aleación, son contados los

estudios enfocados a profundizar en las razones y principios fundamentales que originan este vínculo, por lo cual la información relativa a curvas de enfriamiento comunmente disponible en la literatura especializada permanece en un nivel de conocimiento empírico matizado por algunas consideraciones teóricas de caracter cualitativo, no del todo explícitas.

## I.2 POSICION DEL PROBLEMA Y OBJETIVO DE ESTE TRABAJO.

Una curva de enfriamiento es el registro cinético de los eventos térmicos que ocurren durante el enfriamiento y solidificación de la aleación. Estos eventos térmicos son a su vez una manifestación de lo que ocurre en el sistema tanto a nivel macroscópico como microscópico. A nivel macroscópico en cuanto a la extracción de calor producida por el gradiente térmico entre el metal y el material de moldeo en contacto con el medio ambiente, y a nivel microscópico con la liberación de calor latente asociada a la solidificación, la cual es un proceso de nucleación y crecimiento.

La fig.I.1 muestra la representación esquemática de una curva de enfriamiento típica de un hierro nodular eutéctico. La línea trazada sobre el plano temperatura-tiempo representa el registro de la evolución, en función del tiempo, de la temperatura promedio de un volumen de metal, la cual es monitoreada por medio de un termopar,<sup>1</sup> desde el inicio del enfriamiento de la aleación líquida en la impresión del molde, hasta que la aleación sólida alcanza la temperatura ambiente. En esta curva podemos distinguir tres etapas;

- I ) Enfriamiento del líquido.
- II ) Solidificación.
- III ) Enfriamiento del sólido.

y cuatro puntos característicos :

- A Punto de inicio de solidificación.
- B Punto de subenfriamiento máximo.
- C Punto de recalcificación máxima.
- D Punto de fin de solidificación.

En la primera etapa, la aleación líquida transfiere calor hacia el molde disminuyendo su temperatura, hasta alcanzar la temperatura eutéctica, momento en el cual finaliza esta etapa. Es a partir de este momento cuando inicia la segunda etapa, asociada a la solidificación, en donde la aleación requiere subenfriarse en cierta medida para que los embriones preexistentes puedan fungir como centros de nucleación. En el punto A aparecen los primeros núcleos y debido al calor latente liberado, la velocidad de enfriamiento (la pendiente de  $T$  con respecto a  $t$ ) comienza a disminuir. El calor latente liberado por el crecimiento de estos núcleos contra resta a la energía extraída por el molde, reflejándose en una paulatina disminución de la velocidad de enfriamiento hasta que esta se vuelve nula en el punto B, punto de subenfriamiento máximo. En la trayectoria descrita por la línea BC el calor latente liberado por el crecimiento de los granos sobrepasa al calor extraído por el molde y esto se refleja con un aumento en la temperatura del metal, fenómeno conocido bajo el nombre de recalcificación. A partir del punto C y debido al inicio del interbloqueo entre granos en crecimiento y al gradual agotamiento de la fase líquida la situación se revierte, y el calor extraído sobrepasa al liberado por solidificación lo cual se refleja con una disminución en la temperatura del sistema, a lo largo de la línea CD hasta que en el punto D la fase líquida desaparece. A partir de este momento comienza la tercera etapa, de enfriamiento en el estado sólido.

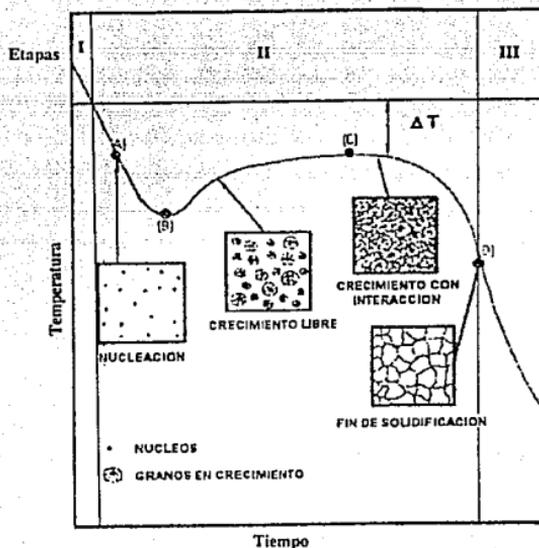


Fig. 1.1 Curva de enfriamiento típica de un hierro nodular eutéctico. Etapas del enfriamiento: I) Enfriamiento del líquido, II) solidificación, III) Enfriamiento en estado sólido.

Es evidente de lo anterior que para elaborar un modelo que simule la historia térmica de una aleación líquida durante su enfriamiento y solidificación se requiere del acoplamiento de un modelo de cinética de solidificación con otro de transferencia de calor.

Dentro de este marco, este trabajo de tesis tiene como objetivo

principal elaborar un modelo matemático que sea capaz de simular la historia térmica, asociada al enfriamiento y solidificación de placas de hierro nodular eutéctico, y a partir de los resultados arrojados por el modelo analizar las características de una curva de enfriamiento típica asociando cada una de sus etapas con los eventos micro y macroscópicos que se efectúan en el sistema. Finalmente con ésta herramienta se pretende efectuar el análisis de los efectos de diferentes variables de proceso (temperatura de colada, espesor de la placa, difusividad térmica del material de moldeo e inoculación) sobre las características de las curvas de enfriamiento y la microestructura asociada, específicamente en lo que se refiere a tamaño de nódulo, radio de esferoides de grafito y de la capa envolvente de austenita.

## CAPITULO II

# PLANTEAMIENTO DEL MODELO E IMPLEMENTACION DEL PROGRAMA COMPUTARIZADO

## II.1 ANTECEDENTES Y CONSIDERACIONES BASICAS.

El micro-macro modelado de la solidificación de hierro nodular, que es el acoplamiento de un modelo de transferencia de calor con otro de cinética de solidificación con el fin de simular la historia térmica del sistema así como la formación de microestructura durante el cambio de fase, aparece en la literatura especializada hasta el año de 1984 en donde se proponen soluciones analíticas y numéricas de los modelos acoplados de transferencia de calor y de cinética de solidificación. Edward Frás<sup>2</sup> y Fredrikson et al<sup>3</sup> llegan a una solución numérica del problema a partir de una solución analítica de la ecuación de Fourier unidimensional sujetos a hipótesis simplificativas similares, mientras que Su et al<sup>3</sup> emplean el método de diferencias finitas para resolver la ecuación de conservación de energía en dos dimensiones.

Debido a que éste trabajo de tesis se basa fundamentalmente en una solución analítica de la ecuación de transferencia de calor se analizaron las hipótesis simplificativas y el procedimiento general seguido por Frás y Fredickson et al, para acoplar el modelo de transferencia de calor con la cinética de solidificación del hierro nodular. Describiremos brevemente los aspectos mas relevantes de estos tratamientos, para posteriormente explicar en detalle el modelo desarrollado en este trabajo.

Ambos tratamientos conciben el enfriamiento de la aleación desde la temperatura de colada hasta la temperatura ambiente como un proceso que se efectua en tres etapas:

- 1 ) Enfriamiento de la aleación en estado líquido.
- 2 ) Solidificación de la aleación.
- 3 ) Enfriamiento de la aleación en estado sólido.

Para cada etapa plantean la ecuación de conservación de energía en el metal particularizando el siguiente balance general de conservación de la energía:

ENERGIA EXTRAIDA		ENERGIA LIBERADA		RAPIDEZ DE CAMBIO
POR	+	POR EL	=	DE LA ENTALPIA
EL MOLDE		CAMBIO DE FASE		DEL METAL.

En donde el termino de energía liberada por el cambio de fase es no nulo sólo en la etapa II.

A partir de las ecuaciones generadas de balance, en donde se expresa la dependencia de la temperatura en función del tiempo, los autores proceden a suponer paralelamente las siguientes hipótesis simplificativas:

(1) La transferencia de calor está limitada por la baja difusividad del material de moldeo, de donde la rapidez de extracción de calor del sistema, para un molde de arena (sand), esta dada por la siguiente expresión:

$$\partial Q / \partial t = \sqrt{(k c_p \rho)} \cdot \pi \cdot t \quad (T - T_0) \quad (\text{II.1})$$

donde :

- $\partial Q / \partial t$  = Flux de calor ( $J/s \text{ m}^2$ )
- $k$  = Conductividad térmica de la arena ( $W/m \text{ } ^\circ K$ )
- $c_p$  = Capacidad calórica de la arena ( $J/Kg \text{ } ^\circ K$ )
- $\rho$  = Densidad de la arena ( $Kg/m^3$ )
- $t$  = Tiempo (seg)
- $T_0$  = Temperatura ambiente ( $^\circ K$ )
- $T$  = Temperatura de la interfase ( $^\circ K$ )

- (2) No existe gradiente de temperatura dentro del metal.
- (3) Las propiedades termofísicas del sistema son constantes.
- (4) Validez de un modelo cinético que expresa a la fracción solidificada (función del radio de nódulo) en función de la temperatura (subenfriamiento) y del tiempo.
- (5) El número de núcleos activos es constante.

Empleando estas hipótesis los autores procedieron a resolver las ecuaciones de balance en las tres etapas con lo cual obtuvieron la dependencia de la temperatura con respecto al tiempo, es decir las curvas de enfriamiento. El problema fundamental se ubica en acoplar a la ecuación de balance de energía un modelo cinético en la etapa II. Es en este acoplamiento donde los autores toman caminos diferentes: por una parte, Frás realiza un cambio de variable y resuelve numéricamente la ecuación de energía en términos del subenfriamiento para la etapa II, utilizando un modelo cinético simplificado, el cual es introducido en la ecuación diferencial a resolver a través de la expresión que establece la variación de la fracción solidificada con respecto al tiempo empleando la ecuación de Johnson Mehl para expresar a la fracción solidificada en función del radio instantáneo de los nódulos en crecimiento. La ecuación diferencial resultante es resuelta mediante un método numérico no especificado por el autor, quien a partir de los resultados obtenidos realiza el análisis de la relación entre la curva de enfriamiento y los eventos térmicos y microestructurales que se realizan dentro del sistema.

Por otra parte, Fredrikson et al procedieron a la solución de la ecuación de conservación de energía en la etapa II empleando otro modelo cinético de donde resulta necesario, para conocer la historia térmica del sistema, la resolución simultánea de dos ecuaciones diferenciales no lineales, resueltas mediante un método numérico tampoco especificado por los autores, quienes, a partir de los resultados arrojados por su modelo analizan el efecto de

diferentes variables de proceso sobre la tendencia al blanqueado del hierro nodular y del hierro gris. En los dos casos se llega a las siguientes conclusiones, en lo que se refiere a la curva de enfriamiento y los efectos que sobre ésta tienen las variables de proceso:

1) Una mayor velocidad de enfriamiento cuando la aleación líquida alcanza la temperatura eutéctica provoca un mayor subenfriamiento. La velocidad de enfriamiento referida anteriormente aumenta conforme :

- a) Disminuye el espesor de la placa que solidifica.
- b) Aumenta la difusividad térmica del material de moldeo.
- c) Disminuye la temperatura de colada.

2) Un mayor número de núcleos activos disminuye el subenfriamiento.

Estas conclusiones, respaldadas por evidencia experimental, constituyen una referencia para probar el modelo que se pretende elaborar.

En esta tesis se procederá a desarrollar detalladamente un micro-macro modelo similar al propuesto por Fras, señalando las omisiones y errores litográficos presentes en el artículo original, los métodos numéricos empleados, así como consideraciones adicionales que no son mencionadas en la literatura y que resultan imprescindibles para que el modelo funcione.

#### PLANTEAMIENTO DEL MODELO.

Se requiere simular la evolución de la temperatura en

función del tiempo para el enfriamiento y solidificación de placas de hierro nodular eutéctico moldeadas en arena mediante la resolución de la ecuación de conservación de energía en el metal y acoplando, durante la solidificación, un modelo que describa la cinética de solidificación de esta aleación, con el fin de explicar la relación entre los eventos microestructurales y la evolución térmica de la aleación durante el cambio de fase.

Para tal efecto, podemos concebir al enfriamiento de la placa desde la temperatura inicial de la aleación líquida hasta la temperatura ambiente, como un proceso que se realiza en tres etapas:

- I) Enfriamiento del líquido.
- II) Solidificación.
- III) Enfriamiento del sólido.

Estas etapas se encuentran representadas esquemáticamente en la figura II.1. La división del proceso en tres etapas se justifica por el hecho de que en las etapas I y III está involucrado únicamente el calor sensible, mientras que en la etapa II se presenta la contribución de calor latente asociado a la solidificación.

En la etapa III durante el enfriamiento del sólido pueden presentarse transformaciones de fase adicionales, como por ejemplo una reacción eutéctode, en dicho caso lo anteriormente expresado en cuanto al calor sensible, es válido hasta el momento en que comienza dicha transformación en estado sólido.

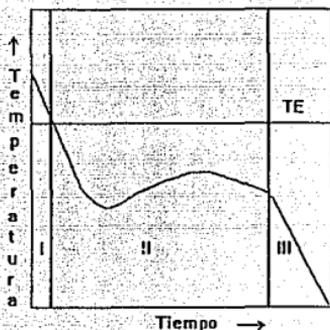


Fig. II.1 Representación esquemática de las tres etapas de enfriamiento del metal.

A continuación se procederá a plantear la ecuación de conservación de energía en el metal para cada etapa así como la solución de las ecuaciones diferenciales resultantes, que obedecen al balance global siguiente, donde el término de generación es no nulo sólo en la etapa II:

$$\begin{array}{l}
 \text{ENERGÍA EXTRAIDA} \\
 \text{POR EL MOLDE} \\
 \text{POR UNIDAD DE TIEMPO}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{l}
 \text{ENERGÍA LIBERADA} \\
 \text{+ POR EL CAMBIO DE FASE} \\
 \text{POR UNIDAD DE TIEMPO}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{l}
 \text{RAPIDEZ DE CAMBIO} \\
 \text{DE LA ENTALPÍA} \\
 \text{DEL METAL.}
 \end{array}$$

En donde, con el fin de simplificar el cálculo de la energía extraída por el molde por unidad de tiempo, para las tres etapas se asumirá que la rapidez de extracción de calor del sistema está

dada por la expresión que se obtiene para el flux de calor en la interfase molde-metal a partir de la resolución de la ecuación de Fourier en una sola dimensión en el molde, con propiedades termofísicas del material de moldeo (arena) constantes y con un espesor de molde semiinfinito (ver anexo I):

$$\partial Q/\partial t = \sqrt{(k c_p \rho) s / \pi \cdot t} \cdot (T - T_0) \quad (\text{II.1})$$

donde :

$$\begin{aligned} \partial Q/\partial t &= \text{Flux de calor (J/s m}^2\text{)} \\ k &= \text{Conductividad térmica de la arena (W/m }^\circ\text{K)} \\ c_p &= \text{Capacidad calorífica de la arena (J/Kg }^\circ\text{K)} \\ \rho &= \text{Densidad de la arena (Kg/m}^3\text{)} \\ t &= \text{Tiempo (seg)} \\ T_0 &= \text{Temperatura inicial del molde (}^\circ\text{K)} \\ T &= \text{Temperatura de la interfase (}^\circ\text{K)} \end{aligned}$$

El empleo de esta expresión implica que suponemos válidas las siguientes hipótesis:

- 1.- La transferencia de calor es controlada por la baja difusividad térmica del molde.
- 2.- No existe gradiente térmico en el metal.
- 3.- La temperatura interfacial molde-metal  $T$  (ec.II.1), es igual a la temperatura del metal en la placa.

Si bien estas hipótesis se pueden objetar por la realidad experimental del sistema, permiten obtener una primera

aproximación, empleando un procedimiento relativamente sencillo lo cual permite bosquejar la metodología general a aplicar en futuros planteamientos con hipótesis menos restrictivas.

A continuación planteamos las ecuaciones de balance de energía en el metal correspondientes a cada una de las etapas, obteniendo en cada caso la ecuación diferencial a resolver así como su solución expresada con ecuaciones que describen a los parámetros de interés para la simulación e interpretación de la curva de enfriamiento. Los detalles de la resolución de las ecuaciones diferenciales generadas se resumen en los anexos II y III.

## II.2 PRIMERA ETAPA: ENFRIAMIENTO DE LA ALEACION LIQUIDA.

Esta primera etapa inicia en el tiempo cero y a la temperatura inicial de la aleación líquida en la impresión del molde, la cual si asumimos un llenado instantáneo del mismo, es igual a la temperatura de colada; esta etapa finaliza cuando la aleación alcanza la temperatura eutéctica ( $1153^{\circ}\text{C}$ ) a un tiempo que denominaremos " $t_1$ ".

Durante esta etapa, la transferencia de calor originada por el gradiente térmico entre el molde y la aleación líquida provoca que la temperatura del líquido caiga. La variación de la temperatura del metal es una función del tiempo y de las propiedades termofísicas del sistema y puede ser deducida a partir del balance de energía en el metal para esta etapa:

ENERGIA EXTRAIDA POR EL MOLDE = CAMBIO DE ENTALPIA DEL METAL  
 POR UNIDAD DE TIEMPO POR UNIDAD DE TIEMPO.

$$(-A \partial Q / \partial t)_{\text{molde}} = (\rho_m C_{pm} V_m \cdot \partial T / \partial t)_{\text{metal}} \quad (\text{II.2})$$

Donde :

A, Area efectiva de extracción de calor.

$\partial Q / \partial t$ , Flujo de calor extraído por el molde.

$\rho_m$ , Densidad del metal.

$C_{pm}$ , Capacidad calorífica del metal.

$V_m$ , Volumen de metal.

$\partial T / \partial t$ , Velocidad de enfriamiento del metal.

El análisis dimensional de la ecuación II.2 generada apartir del balance sería el siguiente :

$$\begin{aligned} (\text{m}^2) (\text{J/s m}^2) &= (\text{Kg/m}^3) (\text{J/Kg } ^\circ\text{K}) (\text{m}^3) (^\circ\text{K/s}) \\ (\text{J/s}) &= (\text{J/s}) \end{aligned}$$

Esta igualdad demuestra que la ecuación (II.2) es dimensionalmente consistente. Por otro lado substituyendo la ecuación (II.1) en la (II.2) obtenemos :

$$-A\sqrt{(kC_p\rho)_s/\pi} \cdot t^{-1/2} \cdot (T-T_0) = \rho_m C_{pm} V_m \cdot (\partial T / \partial t) \quad (\text{II.3})$$

Esta ecuación diferencial establece la dependencia de la temperatura del metal con respecto al tiempo, las propiedades termofísicas del sistema y las condiciones iniciales del proceso. Asumiendo propiedades termofísicas constantes esta ecuación se resuelve por separación de variables (anexo II) proporcionando la siguiente ecuación, que describe la evolución de la temperatura en el metal en función del tiempo durante esta primera etapa:

$$T = T_0 + (T_c - T_0) \exp (K_1 \sqrt{t}) \quad (\text{II.7})$$

donde:

$T_0$  Temperatura a la cual se encuentra el molde.

$T_c$  Temperatura de colada.

$t$  tiempo.

Y la constante  $K_1$  es igual a:

$$K_1 = \frac{-4}{e' \rho_m c_{pm}} \cdot \sqrt{(k\rho c_p)_s / \pi}$$

Esta ecuación describe la evolución de la temperatura de la placa en función del tiempo en la primera etapa, válida en el intervalo  $0 < t < t_1$ .

La expresión que describe la evolución, en función del tiempo, de la velocidad de enfriamiento durante esta etapa se obtiene derivando la ecuación (II.7) con respecto al tiempo:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{K_1}{2\sqrt{t}} \cdot \exp(K_1 \cdot t^{1/2}) \quad (\text{II.8})$$

válida en el intervalo  $0 < t < t_1$ .

Observamos que el límite de validez de las anteriores expresiones es  $t_1$ . Este tiempo puede ser evaluado mediante el uso de la ec.II.7, introduciendo  $T=T_c$  y despejando  $t=t_1$ :

$$t_1 = \left[ -\frac{\rho_m c_{pm} e'}{4\sqrt{(k\rho c_p)_s}} \cdot \ln \left( \frac{T_c - T_0}{T_c - T_0} \right) \right]^2 \quad (\text{II.9})$$

Resumiendo lo obtenido para la etapa I de enfriamiento tenemos las siguientes conclusiones:

La ecuación (II.7) es válida desde  $0 < t < t_1$  donde  $t_1$  es calculada mediante la ecuación (II.9). La historia térmica de la placa en la

etapa I está dada por la expresión (II.7) y la velocidad de enfriamiento de la placa en función del tiempo en esta primera etapa se obtiene de la expresión (II.8).

El flux de calor extraído por el molde se obtiene de la ecuación II.1.

### II.3 SEGUNDA ETAPA: ENFRIAMIENTO DURANTE LA SOLIDIFICACION.

Esta etapa inicia en el tiempo  $t_1$ , cuando la temperatura del metal es la temperatura eutéctica y finaliza en un tiempo " $t_2$ " donde la solidificación ha terminado, es decir cuando el valor de la fracción solidificada tiende a la unidad.

Cuando la temperatura del sistema ha disminuido hasta  $T_E$ , el proceso de solidificación inicia y el balance de energía tiene que ser modificado, para de esta manera contabilizar la liberación de calor latente.

FLUJO DE CALOR EXTRAÍDO POR EL MOLDE	+ FLUJO DE CALOR PROVENIENTE DE LA LIBERACION DE CALOR LATENTE POR SOLIDIFICACION	= VELOCIDAD DE CAMBIO DE ENTALPIA DEL METAL
--	--	---

que expresado matemáticamente, queda :

$$-A \left( \frac{\partial Q}{\partial t} \right) + \Delta H_f \cdot \rho_m \cdot V_m \cdot \left( \frac{\partial f_s}{\partial t} \right) = \rho_m \cdot C_{pm} \cdot V_m \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right) \quad (II.10)$$

Donde:

$\Delta H_f$  Entalpia de fusión.

$f_s$  fracción solidificada.

En análisis dimensional es :

$$\begin{array}{l}
 (\text{J/s}) \quad (\text{J/Kg}) (\text{Kg/m}^3) (\text{m}^3) (\text{1/s}) = (\text{Kg/m}^3) (\text{J/Kg}^\circ\text{K}) (\text{m}^3) (\text{K/s}) \\
 (\text{J/s}) \quad (\text{J/s}) \quad (\text{J/s})
 \end{array}$$

Otra forma de escribir el balance de energía de la ecuación (II.10) es la siguiente, realizando un cambio de variable de  $T$ , la temperatura a  $\Delta T = T_c - T$ , el subenfriamiento :

$$L \cdot dV/dt - A dQ/dt = -\phi d\Delta T/dt \quad (\text{II.11})$$

en donde :

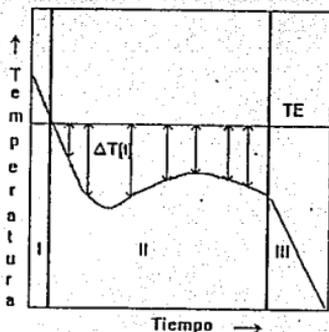
$L$  = Entalpía de solidificación por unidad de volumen ( $\text{J/m}^3$ )

$\phi = C_{pm} V_m \rho_m (\text{J}/^\circ\text{K})$

Las unidades de término  $\phi d\Delta T/dt$  son :

$(\text{J}/^\circ\text{K}) (^\circ\text{K/s}) = (\text{Watts})$

Para conocer la variación de  $\Delta T$  con respecto al tiempo, como se ilustra en la figura, y de este modo poder trazar la curva de enfriamiento es necesario resolver la ecuación diferencial obtenida a partir del balance de energía (II.11).



El significado matemático del subenfriamiento es el siguiente :

$$\Delta T = T_e - T \quad (\text{II.12})$$

donde:

T = temperatura del sistema.

$T_e$  = temperatura eutéctica.

Despejando la temperatura que está en función del tiempo, tenemos que:

$$T(t)_{\text{real}} = T_e - \Delta T(t) \quad (\text{II.13})$$

Si derivamos con respecto al tiempo la expresión anterior:

$$d\Delta T/dt = dT_e/dt - dT/dt$$

como la temperatura  $T_e$  tiene un valor constante y la derivada de una constante es cero tenemos que :

$$dT/dt = -d\Delta T/dt \quad (\text{II.14})$$

En la etapa II, la velocidad de enfriamiento es igual al valor de  $d\Delta T/dt$  multiplicado por -1.

Una vez reconocidos los términos de la ecuación (II.11) necesitamos cuantificar la variación de  $\Delta T$  con respecto al tiempo para lo cual es necesario conocer el término  $LdV/dt$ , donde V es volúmen solidificado y  $dV/dt$  es la velocidad de formación de sólido. Es en este momento donde se requiere de un modelo cinético de solidificación. En este trabajo se emplea el mismo modelo cinético utilizado por Frás cuyos aspectos más generales se describen a continuación.

Explicar los mecanismos de la formación del grafito esferoidal es todavía algo muy complejo. Sin embargo se sabe que existe una relación entre el subenfriamiento de la aleación con respecto a la temperatura de equilibrio eutéctica,  $T_E$ , en el sistema estable Fe-C y la manera en que los núcleos crecen y son transformados en nódulos de grafito en la solución líquida. Durante el crecimiento de éstos esferoides, la concentración de carbono en la solución líquida cambia de acuerdo al grado de subenfriamiento. Algunos investigadores como B. Lux<sup>5</sup> han llegado a la conclusión de que hay una máxima posibilidad de la formación y crecimiento de una fase de austenita de acuerdo con el frente de solidificación del grafito. La austenita crece rápidamente y envuelve la esfera de grafito como una capa continua, formando lo que se conoce como capa envolvente de austenita. Se ha encontrado experimentalmente que la capa envolvente de austenita empieza a aparecer en el momento cuando el radio del esferoide de grafito llega hasta cierta dimensión crítica. La formación de granos eutécticos por éste camino está caracterizado por dos radios,  $R_1$  del esferoide de grafito y  $R_2$  de la capa envolvente de austenita. La velocidad de crecimiento de los nódulos está limitada por la facilidad con que el carbono pueda difundir a través de la capa envolvente de austenita hasta el núcleo de grafito y es en base a esta restricción y a hipótesis simplificativas adicionales, que se obtienen expresiones que describen la dependencia de los radios  $R_1$  y  $R_2$  con respecto a  $t$  y  $\Delta T$ .

La expresión de Johnson-Mehl<sup>6</sup> describe el volumen o fracción solidificada en función del radio de nódulos sólidos que se encuentran en la aleación líquida durante la solidificación, lo que a su vez también es una función del tiempo.

$$V = V_0 [1 - \exp(-4/3 \pi N R_2^3)] \quad (\text{II.15})$$

6

$$f_s = 1 - \exp(-4/3 \pi N R_2^3) = V/V_0 \quad (\text{II.16})$$

donde :

$f_s$  = fracción solidificada =  $(V/V_0)$

$V$  = volumen solidificado

$V_0$  = Volumen total del sistema metal

$N$  = densidad de sitios de nucleación

$R_2$  = radio de nódulo en crecimiento

Empleando el modelo utilizado por Frás, que se explica en mayor detalle en el anexo III, la relación entre el radio de nódulos, la temperatura ( $\Delta T$ ) y el tiempo puede obtenerse de la siguiente ecuación:

$$R = a \sqrt{\Delta T \cdot t} \quad (\text{II.17})$$

donde :

$\Delta T$  = subenfriamiento.

$t$  = tiempo contado apartir del inicio de la solidificación.

$a$  = constante de proporcionalidad cuyo valor es calculado en el anexo III.

Tomando en cuenta el "grain impingement", que es el arresto al crecimiento provocado por la interacción recíproca entre granos en crecimiento, el volumen solidificado instantáneo durante la solidificación es calculado a partir de la ecuación (II.15) en donde el radio de nódulo,  $R_2$ , es una función de tiempo  $t$  y del subenfriamiento  $\Delta T$  implícito en la ecuación (II.17). El valor de la constante  $a$  es de  $7.53 \times 10^{-5} \text{ cm K}^{-1/2} \text{ s}^{-1/2}$  (anexo III).

Substituyendo la ecuación (II.17) en la (II.15) tenemos que:

$$V = V_0 \cdot [1 - \exp(-4/3 \pi N (a\sqrt{t\Delta T})^3)] \quad (II.18)$$

Para obtener la velocidad de solidificación,  $dV/dt$ , es necesario derivar con respecto al tiempo la ecuación (II.18) recordando que  $\Delta T$ , el subenfriamiento, es una función del tiempo. Esta derivación se ve con detalle en el Anexo IV.

Multiplicando el término  $L$ , entalpía de solidificación por unidad de volumen, por la velocidad de formación de sólido,  $dV/dt$ , llegamos a la siguiente expresión:

$$L \cdot \frac{dV}{dt} = L \cdot A \cdot E \cdot [ (t^{1/2} \Delta T^{3/2}) + (t^{3/2} \Delta T^{1/2}) \cdot d\Delta T/dt ] \quad (II.19)$$

Donde :

$$A = 2V_0 \pi N a^3$$

$$E = \exp(-4/3 \pi N a^3 t^{3/2} \Delta T^{3/2})$$

Una vez conocido en términos de las variables de interés  $LdV/dt$ , procedemos a analizar al termino  $dQ/dt$ .

De acuerdo con las hipótesis inicialmente planteadas en éste tratamiento, el flux de calor,  $dQ/dt$ , proveniente del metal que se está enfriando, está controlado por la capacidad "extractora" de calor por parte del molde (ec.II.1).

Si multiplicamos ambos lados de la ecuación II.1 por el área de extracción de calor obtenemos el termino de interés para la ecuación de balance (ec.II.11):

$$A \, dQ/dt = A(T-T_0) \sqrt{(k_c \rho)_s} / \pi(\tau_1 + t) \quad (II.20)$$

Donde :

$\tau_1$  = tiempo para alcanzar la  $T_s$

t = tiempo contado a partir del inicio de solidificación.

Por otro lado si recordamos el significado del subenfriamiento obtenemos una expresión que permite calcular la rapidez de extracción de calor en términos del subenfriamiento sustituyendo la expresión (II.12) en (II.20).

$$A \cdot dQ/dt = \sqrt{(k\rho c_p)_s} \cdot A \cdot (T_E - \Delta T - T_0) / \sqrt{\pi(t+t_1)} \quad (\text{II.21})$$

Sustituyendo lo encontrado hasta el momento en la ecuación (II.11) de balance de energía, obtenemos a la ecuación de balance en términos del subenfriamiento ( $\Delta T$ ), del tiempo ( $t$ ), de las propiedades termofísicas del sistema y de la cinética de solidificación del hierro nodular eutéctico:

$$\begin{aligned} & LAE(\Delta T^3 \cdot t)^{1/2} + LAE(\Delta T \cdot t^3)^{1/2} dT/dt - \sqrt{(k\rho c_p)_s} \cdot A \cdot (T - T_0) \cdot \sqrt{\pi(t+t_1)} \\ & = -\phi d\Delta T/dt \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

Rearreglando y despejando  $d\Delta T/dt$  de la expresión anterior (Anexo V), se obtiene la siguiente ecuación diferencial, que describe a la dependencia del subenfriamiento,  $\Delta T$ , con respecto al tiempo, las propiedades termofísicas del sistema y la cinética de solidificación del hierro nodular eutéctico:

$$\frac{d\Delta T}{dt} = \frac{(-\sqrt{(k\rho c_p)_s} \cdot A (T_E - \Delta T - T_0)) + LAE (\pi \Delta T^3 t^{(t+t_1)})^{1/2}}{\sqrt{\pi(t+t_1)} \cdot (\phi + LAE (\Delta T t^3)^{(t+t_1)})^{1/2}} \quad (\text{II.23})$$

Esta es la ecuación a resolver para poder simular la segunda etapa de enfriamiento. Como se puede observar ésta ecuación diferencial no se puede resolver por un método analítico, por lo tanto es necesario recurrir a un método numérico. En este caso utilizamos el método de Euler (ver anexo VI) para calcular el subenfriamiento en el paso actual de calculo en función del subenfriamiento

anterior y de la derivada del subenfriamiento con respecto al tiempo, calculada en el paso anterior:

$$\Delta T_{i+1} = \Delta T_i + \delta t (\partial \Delta T / \partial t)_{t_i}$$

Es conveniente mencionar en este momento que la ecuación diferencial reportada por Frás en el artículo que constituye la columna vertebral de nuestro modelo presenta importantes errores tipográficos. La ecuación reportada por Frás es la siguiente:

$$\frac{d(\Delta T)}{dt} = \frac{b_2 \cdot F (T_E - \Delta T - T_0) - AE (\pi \Delta T^3 t^{(i+1)})^{1/2}}{\sqrt{\pi t^{(i+1)}} \cdot (\phi - AE (\Delta T t^{(i+1)})^{1/2}}$$

donde :

$$b_2 = -\sqrt{(k\rho c_p)_s}$$

F = Area (A)

Esta expresión comparada con la propuesta en el presente trabajo tienen dos diferencias principalmente. La primera es el signo negativo presente antes del término AE y la segunda es precisamente que en el término AE no está incluido el calor latente de solidificación (L).

Como se había mencionado anteriormente, en el trabajo original propuesto por Frás se detectaron algunos errores tipográficos como lo son el signo negativo, que por medio de el desarrollo matemático de la ec.II.23 se puede confirmar; y por otro lado la omisión del calor latente de solidificación, L, que no se puede omitir, ya que en un proceso de solidificación de una aleación siempre estará presente esta propiedad en la evolución térmica del sistema.

Una vez calculado en cada paso de tiempo, el nuevo

subenfriamiento, este dato es empleado para calcular el nuevo radio de nódulo (ec.II.17), la nueva fracción solidificada (ec.II.16), el nuevo radio de núcleo de grafito (anexo III) y la nueva temperatura (ec.II.12). Si se desea puede calcularse con éste dato la velocidad de extracción de calor (ec.II.20) y la velocidad de liberación del calor latente asociada al incremento en fracción solidificada (ec.II.19).

El calculo termina cuando la fracción solidificada alcanza el valor de 0.99, en el tiempo "ts", momento en el cual inicia la tercera etapa, el enfriamiento de la aleación sólida.

#### II.4 TERCERA ETAPA: ENFRIAMIENTO EN EL ESTADO SOLIDO.

Esta etapa inicia al terminar la solidificación, en el tiempo ts, obtenido de la etapa anterior, tiempo en el cual la fracción solidificada alcanza el valor de 0.99, a una temperatura Ts.

Un balance de energía, similar al planteado en la etapa I, y la solución analítica de la ecuación diferencial resultante, con las condiciones iniciales, T=Ts cuando t=ts, arroja la siguiente expresión:

$$T = T_0 + (T_s - T_0) \exp \left[ - 2 b_2 F (\sqrt{t} - \sqrt{t_s}) / \phi \sqrt{\pi} \right] \quad (\text{II.25})$$

o bien:

$$T = T_0 + (T_s - T_0) \cdot \exp ( K_1 \cdot (\sqrt{t} - \sqrt{t_s}) ) \quad (\text{II.26})$$

donde :

$$K_1 = -2b_2F/\phi\sqrt{\pi}$$

La ecuación II.26 describe la evolución, con respecto al tiempo,

de la temperatura de la placa metálica sólida. Derivando la ecuación II.26 con respecto al tiempo obtenemos la ecuación II.27 que describe la evolución de la velocidad de enfriamiento de la placa, en la etapa III, en función del tiempo:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{K_1(T_s - T_0) \cdot \exp(\sqrt{t} - \sqrt{t_s})}{2\sqrt{t}} \quad (\text{II.27})$$

## II.5 ALGORITMO E IMPLEMENTACION DEL PROGRAMA COMPUTARIZADO.

Como se mencionó el modelo propuesto concibe el proceso de enfriamiento de la placa infinita como un proceso que se realiza en tres etapas. Habiendo derivado para cada etapa, las ecuaciones que relacionan a la temperatura con el tiempo procedemos a mostrar el algoritmo utilizado para la elaboración del programa computarizado.

En las figuras II.5.1, II.5.2 y II.5.3 se muestran los diagramas de flujo que permiten obtener la información concerniente al enfriamiento del metal en las etapas I, II y III respectivamente.

### ALGORITMO DEL PROGRAMA :

#### PRIMERA ETAPA ( $0 < t < t_1$ ) :

- Cálculo de  $t_1$  (ec.II.9)
- Generación de  $z$  puntos  $T(t)$  (ec.II.7)
- Generación de  $dT/dt$  (ec.II.8)
- Graficación de  $dQ/dt$ (ec.II.1)

#### SEGUNDA ETAPA ( $0 < t < t_s$ ) :

- Resolución numérica de la ec.II.23 para evaluar el nuevo  $\Delta T$
- Cálculo de la nueva  $T(t)$  (ec.II.13)
- Cálculo de  $dT/dt$  (ec.II.14)

- Calculo de  $R_{i+1}$  (ec.II.16)
- Calculo de  $R_{1+i}$  (ec.II.17)
- Calculo de  $dQ/dt$  (ec.II.21)
- Calculo de  $f_s$  (ec.II.16)

TERCERA ETAPA (  $t > t_s$  ) :

- Calculo de  $T(t)$  (ec.II.26)
- Calculo de  $dT/dt$  (ec.II.27)
- Calculo de  $dQ/dt$  (ec.II.1)

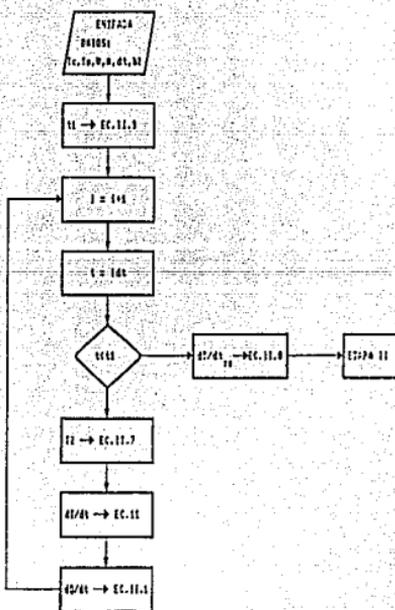


Fig.II.5.1 Diagrama de flujo en la etapa I.

En la figura II.5.1 se muestra la parte inicial del programa, incluyendo la introducción de datos y la primera etapa de enfriamiento.

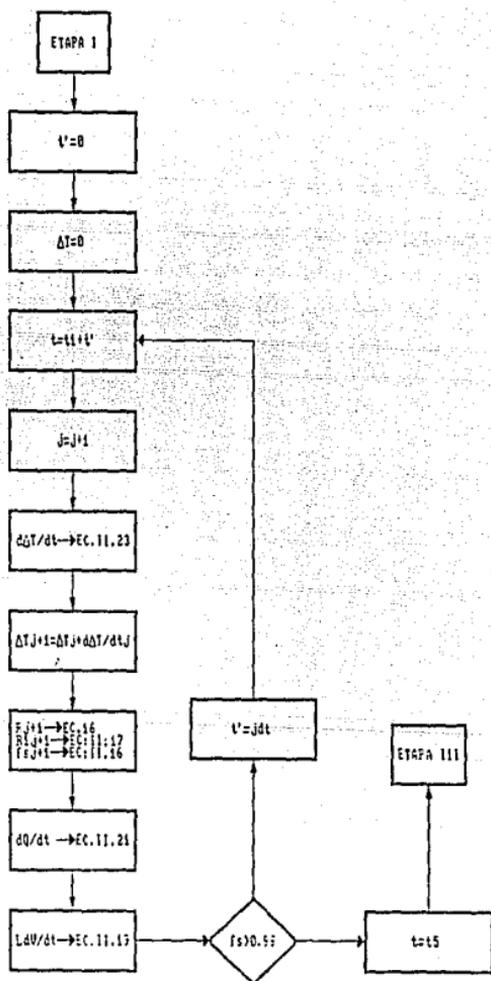
Los datos requeridos por el programa son la temperatura inicial del molde, la temperatura de colada, el volumen de la placa, el area efectiva de extracción de calor de la placa, el coeficiente de transferencia de calor del molde (arena) y el incremento de tiempo en cada paso de calculo. En la primera etapa se calcula  $t_1$ , el tiempo que tardará el metal en alcanzar la temperatura eutéctica con el fin de establecer los límites de ésta primera etapa a la cual corresponden las ecuaciones II.1, II.7, II.8, y II.9.

En esta primera etapa el programa debe generar, para el trazado de la curva de enfriamiento,  $n$  puntos  $(t, T)$  donde  $n$  es aproximadamente igual a  $t_1/\delta t$ . Una vez que  $t > t_1$  se calcula la velocidad de enfriamiento en ese instante, que corresponde al inicio de la solidificación.

En la figura II.5.2 se muestra el diagrama de flujo asociado a la etapa II de enfriamiento, mediante la ec.II.23 obtenemos el nuevo subenfriamiento, ec.II.13 la nueva temperatura, ec.16 el nuevo radio de nódulo, ec.II.17 el nuevo radio de núcleo de grafito, ec.II.21 el flux de calor extraído por el molde, ec.II.19 y la rapidez de evolución de calor latente que prevalece en ese paso de tiempo.

En el momento en que la fracción solidificada alcanza el valor de 0.99 finaliza esta etapa, el tiempo y la temperatura del sistema en ese momento son respectivamente  $t_s$  y  $T_s$ , el tiempo de fin de solidificación y la temperatura de fin de solidificación.

La figura II.5.3 representa el diagrama de flujo para el enfriamiento de la aleación en el estado sólido.



j. II. 5.2 Diagrama de flujo para la etapa II.

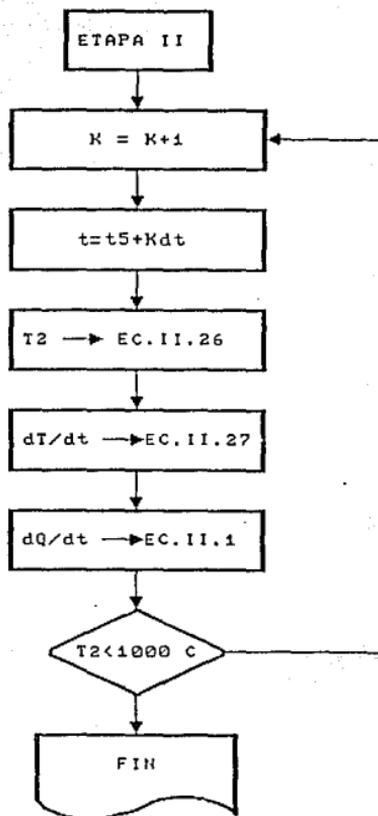


Fig.II.5.3 Diagrama de flujo para la etapa III.

Con los datos concernientes a la temperatura y el tiempo de fin de solidificación obtenidos al finalizar la segunda etapa se procede a la evaluación de la temperatura en función del tiempo en la etapa III mediante la ec.II.26 así como la de velocidad de

enfriamiento ec.II.27 y el flux de calor extraido por el molde ec.II.1. Cuando la temperatura del sistema alcanza 1000 °C finaliza el calculo.

El programa fué escrito en basic, de modo tal que permitiera obtener gráficamente los siguientes parámetros en función del tiempo, durante el enfriamiento y solidificación de las placas de hierro nodular eutéctico:

- (a) T y  $dT/dt$  vs tiempo.
- (b)  $dQ/dt$  y  $LdV/dt$  vs tiempo.
- (c) R,  $R_1$  y  $f_s$  vs tiempo.

Las gráficas proporcionadas por el programa bajo diferentes condiciones de proceso son presentadas en el capítulo siguiente.

**III. APLICACION DEL MODELO AL  
ANALISIS DEL EFECTO DE ALGUNAS  
VARIABLES DE PROCESO SOBRE LA  
LA CURVA DE ENFRIAMIENTO Y LA  
MICROESTRUCTURA OBTENIDA.**

#### APLICACION DEL MODELO.

El modelo anteriormente descrito fue traducido a un programa computarizado con el fin de emplearlo para analizar el efecto de algunas variables de proceso sobre las características de las curvas de enfriamiento.

El programa elaborado proporciona lo siguiente:

- a) La curva de enfriamiento ( $T$  vs  $t$ ) y la evolución de la velocidad de enfriamiento ( $dT/dt$  vs  $t$ ).
- b) La evolución de la velocidad extracción de calor ( $dQ/dt$  vs  $t$ ).
- c) La velocidad de generación del calor latente de solidificación ( $LdV/dt$  vs  $t$ ).
- c) La evolución de la fracción solidificada y la evolución, durante la solidificación de los radios característicos de nódulo ( $R_1$  y  $R_2$  vs  $t$ , donde  $R$  = radio del nódulo ( $C+\gamma$ )  $R_1$  = radio de gráfita).

A continuación se procederá a mostrar los resultados arrojados por el modelo para la solidificación de placas de hierro nodular eutéctico coladas bajo condiciones específicas de proceso. En este capítulo se mencionan las características generales encontradas en cada caso así como las tendencias en las curvas obtenidas, asociadas al cambio en diversas variables de proceso, para en el capítulo IV proceder a la interpretación de estos resultados.

Con el fin de analizar el efecto de las variables: temperatura de colada, espesor equivalente de la placa, difusividad de calor del material de moldeo y efecto de la inoculación, se procedió a simular la solidificación de placas de hierro nodular

eutéctico. Las condiciones de referencia son las siguientes: volumen  $200 \text{ cm}^3$ , área efectiva de transferencia de calor  $180 \text{ cm}^2$ , espesor equivalente  $2.2 \text{ cm}$ , coeficiente de difusividad de calor del molde ( $\sqrt{\kappa\rho C\pi}$ )  $0.1 \text{ J/cm}^2\text{s}^\circ\text{C}$ , número de núcleos  $2 \times 10^6 \text{ cm}^{-3}$  y temperatura de colada  $1200^\circ\text{C}$ . El incremento de tiempo utilizado para todos los casos fue de  $0.1 \text{ seg}$ .

Los resultados obtenidos del programa elaborado para esta primera simulación se muestra en la fig.III.1.

En la fig.III.1.a se muestra la evolución de la velocidad de enfriamiento y de la temperatura de la aleación en función del tiempo. En la curva de enfriamiento distinguimos como aspectos característicos: la temperatura de colada (punto 0), inicio de solidificación (punto 1), al subenfriamiento máximo (punto 2), a la máxima recalcancia (punto 4) y al fin de solidificación (punto 5), así como la longitud de la trayectoria del sistema en la etapa II que va desde 1 hasta 5. La trayectoria de 1 a 5 está caracterizada por una primera región en donde la temperatura del sistema disminuye conforme transcurre el tiempo, 1-2, un mínimo en temperatura, 2, una región en la cual el sistema aumenta su temperatura conforme transcurre el tiempo, 2-3, (región de recalcancia), un máximo en temperatura del sistema, 4, y otra región donde la temperatura disminuye conforme transcurre el tiempo, 4-5, hasta que finaliza la solidificación, y comienza el enfriamiento del sólido<sup>5</sup> (etapa III). Paralelamente la curva que describe la evolución de la velocidad de enfriamiento de la aleación (fig.III.1.b) muestra el siguiente comportamiento. Al inicio del proceso de enfriamiento la velocidad de enfriamiento es alta, del orden de  $-7^\circ\text{C/s}$ , conforme transcurre el proceso la velocidad de enfriamiento va disminuyendo hasta el momento en el cual se hace nula y posteriormente positiva (se convierte en una velocidad de calentamiento), conservándose positiva en un intervalo de tiempo definido por la trayectoria que va desde 2

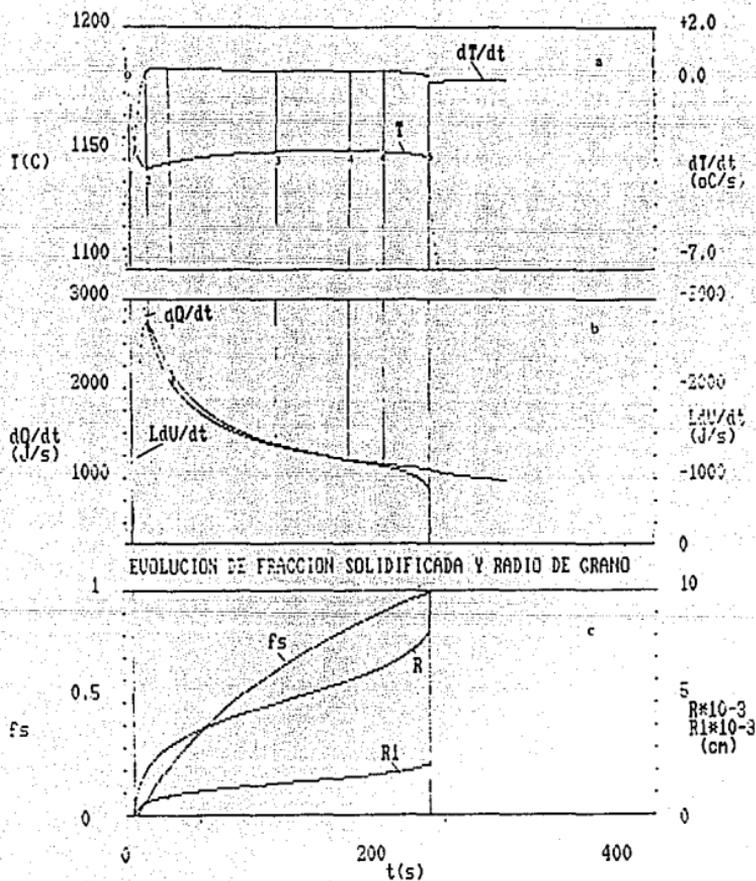


Fig. III.1 Condiciones de referencia ; Temperatura de colada : 1200°C,  
 Coeficiente de difusividad de calor : 0.1 J/cm<sup>2</sup> s °C ; espesor  
 de placa : 2.2 cm , numero de nucleos :  $2 \times 10^6$  cm<sup>-3</sup>,  
 $(dT/dt)_0 = -8.120401$  °C/s

hasta el punto 3', en donde vuelve a adoptar un valor nulo hasta el punto 4', apartir del cual vuelve a presentar valores negativos y con este comportamiento se mantiene hasta el fin de cálculo.

En la figura III.1.b se muestran la velocidad de extracción de calor,  $dQ/dt$  y la velocidad de evolución de calor latente,  $LdV/dt$  en función del tiempo. Para el primer caso se observa que  $dQ/dt$  disminuye continuamente desde el inicio del proceso, mostrando un comportamiento regular lo cual se explica analizando la ec.II.1, que describe a la velocidad de extracción de calor en función del tiempo, las propiedades termofísicas de la arena y la diferencia entre la temperatura instantánea del metal y la temperatura inicial del molde para las tres etapas de enfriamiento.

Esta ecuación muestra que conforme transcurre el tiempo y disminuye la temperatura del sistema, la velocidad de extracción de calor va a disminuir en una relación ( directa con respecto a  $T-T_0$  y una relación inversamente proporcional a  $\sqrt{t}$  ) directamente proporcional al cociente  $(T-T_0)/\sqrt{t}$ . Por otra parte se observa que la evolución de calor latente, una vez que el sistema entra en la etapa II, se manifiesta inicialmente con valores muy pequeños y conforme el sistema continúa subenfriándose esta velocidad aumenta hasta un máximo, ubicado en el tiempo que corresponde al punto 2 de la curva de enfriamiento, cuando el sistema alcanza su máximo subenfriamiento. Conforme el sistema comienza la recalcancia, la velocidad de evolución de calor disminuye paulatinamente y muestra esta tendencia hasta finalizar la solidificación.

Es interesante notar que la comparación de las figuras III.1.a y III.1.b permiten constatar que la placa se enfría cuando  $dQ/dt > LdV/dt$ , (0-2), (4'-5), recalcesce cuando  $LdV/dt > dQ/dt$  (2-3') y se mantiene constante cuando  $LdV/dt = dQ/dt$  (3'-4') y que el máximo de la curva  $LdV/dt$  coincide con el punto de máximo

subenfriamiento.

La figura III.1.C muestra la evolución de la fracción solidificada,  $f_s$ , el radio exterior del nódulo,  $R_2$ , y el radio del núcleo de grafito,  $R_1$ . En esta figura podemos observar que estos parámetros son evaluados a partir del inicio de la etapa II.

Al inicio de la solidificación se observa que el radio exterior del nódulo crece rápidamente y conforme transcurre el tiempo, la velocidad de crecimiento ( $\Delta R$  en un  $\Delta T$  dado) decrece proporcionando a la curva  $R_2$  vs  $t$  una curvatura inicial negativa. Llega un momento de la solidificación donde esta curvatura es nula y posteriormente se hace positiva, dando a la curva de  $R$  en función de  $t$  la forma característica de "S" invertida, mencionada con frecuencia en la literatura. La curva correspondiente al radio de núcleo de grafito evoluciona de una manera similar pero con curvaturas menos pronunciadas. Por otra parte la fracción solidificada aumenta de 0 hasta 1 conforme avanza la solidificación y la línea que describe la dependencia de  $f_s$  con respecto al tiempo muestra una curvatura negativa a lo largo de la solidificación.

### III.1 EFECTO DE LA TEMPERATURA DE COLADA.

Para analizar el efecto de la temperatura de colada sobre la curva de enfriamiento asociada a una placa de dimensiones fijas se procedió a simular el enfriamiento de la placa, vaciando a dos temperaturas de colada: 1250 °C y 1175 °C, manteniendo las otras variables fijas (condiciones de referencia). Las figuras 3.2 y 3.3 muestra los resultados arrojados por el modelo incluyendo a las curvas de enfriamiento y los eventos térmicos y microestructurales asociados.

Comparando las figuras III.1, III.2 y III.3 se puede constatar que conforme aumenta la temperatura de colada se observan las

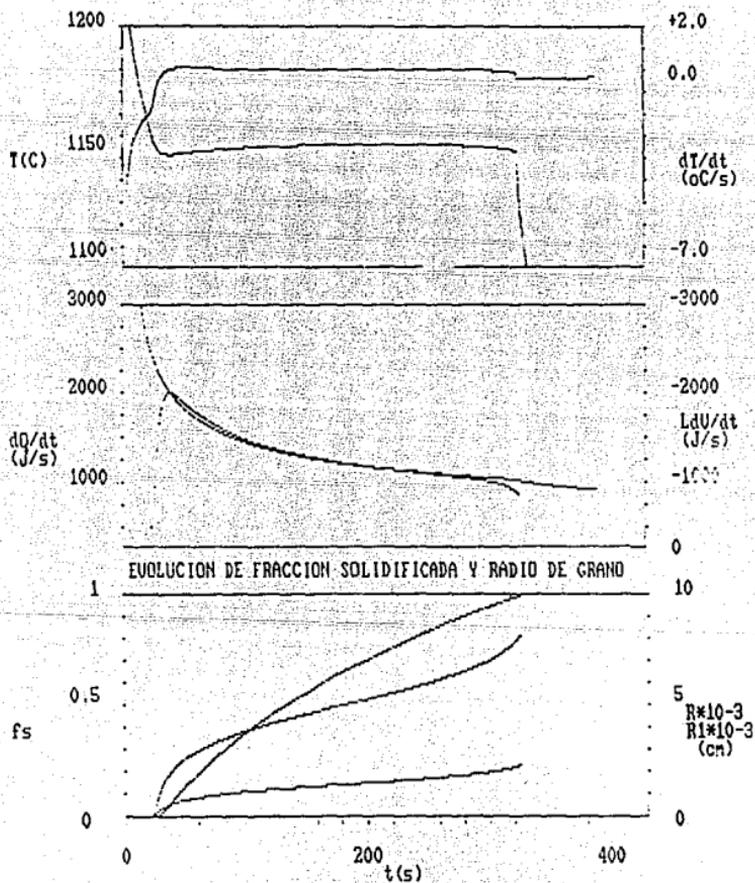


Fig.III.2 Efecto de la temperatura de colada.

$T_c$  1250 °C

$dT/dt$   $\pi$  -4.317462 °C/seg

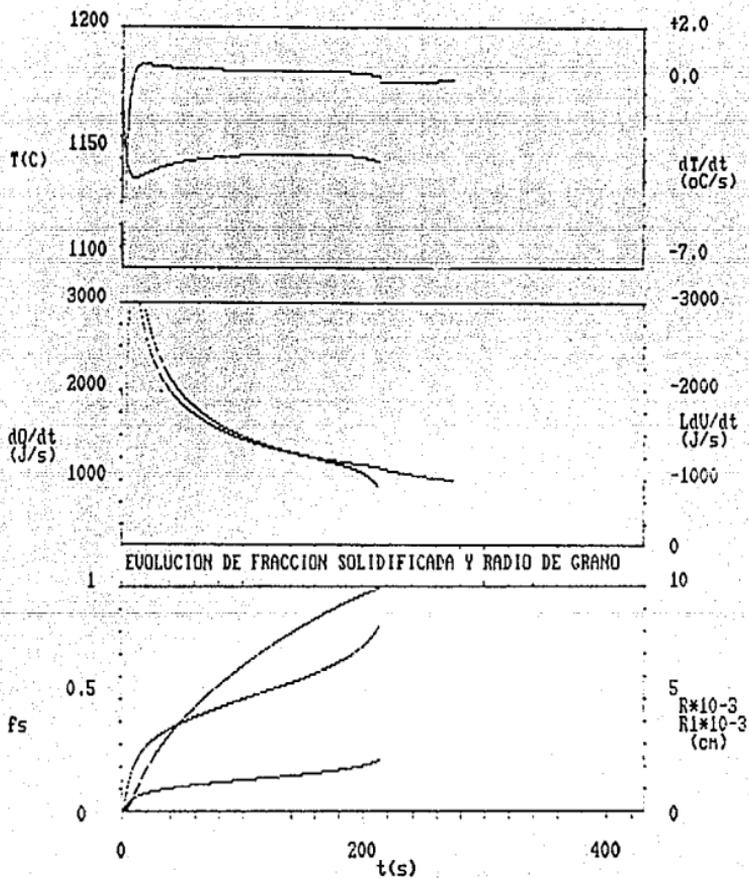


Fig.III.3 Efecto de la temperatura de colada.

$T_c$  1175 °C

$dT/dt$   $\approx$  -17.16247 °C/seg

siguientes tendencias:

- Aumenta el tiempo de solidificación.
  - Disminuye  $(dT/dt)_{T=T_0}$ , la velocidad de enfriamiento al inicio de la etapa II.
  - Disminuye el subenfriamiento máximo.
  - Disminuye el valor máximo que presenta la curva de evolución de calor latente  $(LdV/dt)$ .
  - Se incrementa el tiempo que tardan los nódulos en alcanzar sus dimensiones finales.
  - Los radios característicos de nódulo ( $R$  y  $R_1$ ) al final de la solidificación son los mismos en los tres casos. (ver nota 1 al final de este capítulo).
- La interpretación de estos resultados se verá con detalle en el siguiente capítulo.

### III.2 EFECTO DEL ESPESOR DE PLACA.

En el caso del efecto en el espesor de placa se procedió a simular la solidificación de dos placas bajo las mismas condiciones de referencia pero con espesores equivalentes de 1.6 cm y 3.3 cm. Los resultados obtenidos de la simulación se muestran en las figuras III.4 y III.5 respectivamente. Comparando estos resultados con la figura III.1 se observa que asociado a un aumento en el espesor de la placa, se presentan las siguientes tendencias:

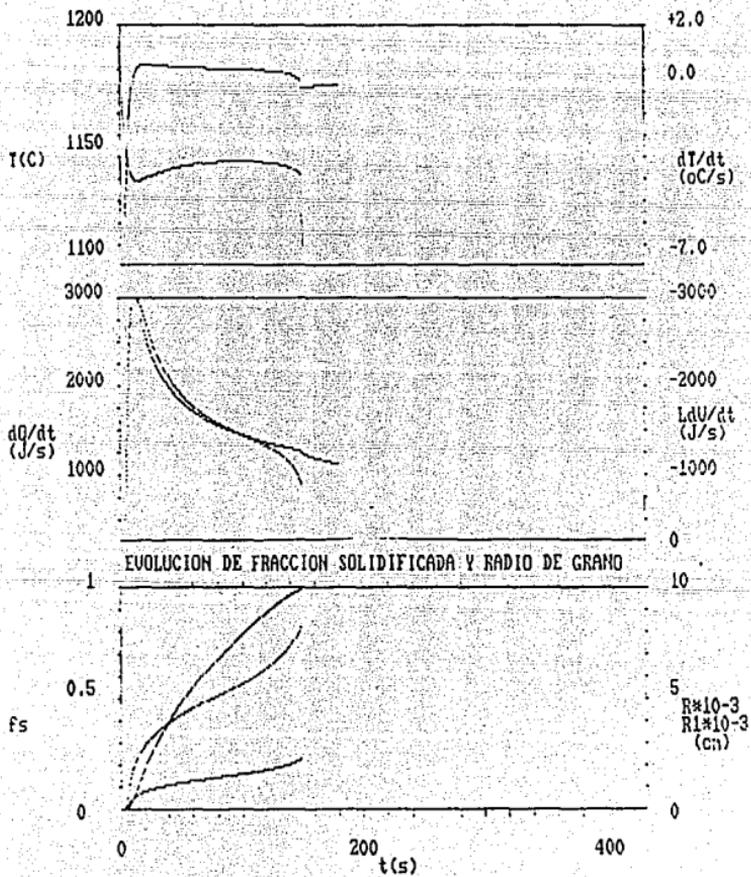


Fig.III.4 Efecto del espesor de placa.

Espeor equivalente 1.6 cm

$dT/dt \approx -14.43627 \text{ } ^\circ\text{C/seg}$

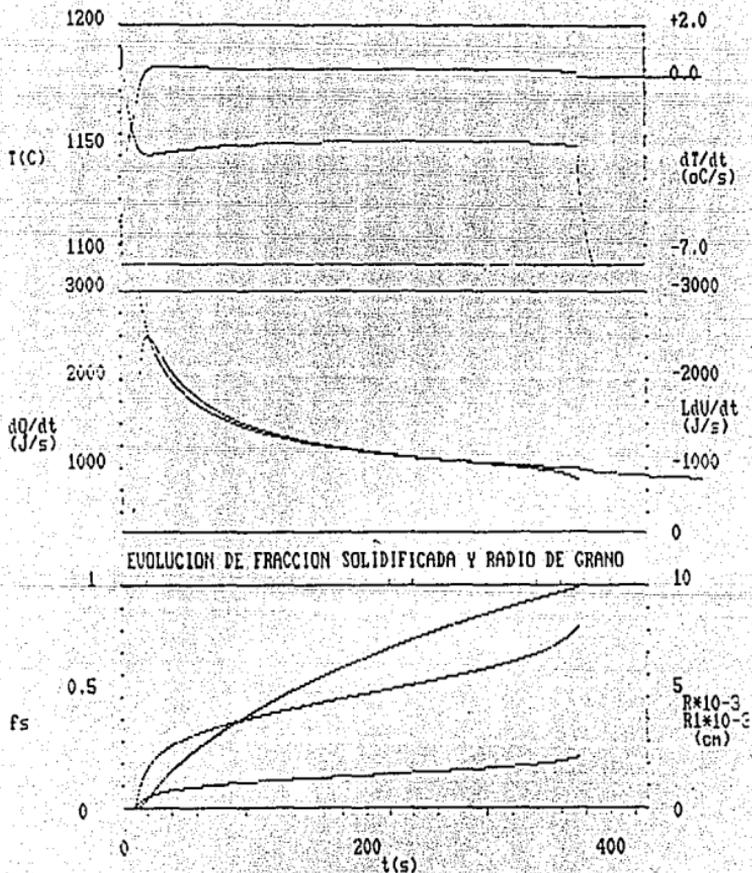


Fig. III.5 Efecto del espesor de placa.

Esesor equivalente 1.3 cm

$dT/dt \approx -3.97056$  °C/seg

- Aumenta el tiempo de solidificación.
- Disminuye el subenfriamiento máximo.
- Disminuye la velocidad de enfriamiento al inicio de la etapa II  $(dT/dt)_{T=T_c}$ .
- Disminuye el máximo de la curva de la velocidad de evolución de calor latente  $(LdV/dt)$ .
- Se incrementa el tiempo que tarda el nódulo en alcanzar sus dimensiones finales.
- Los radios característicos del nódulo son los mismos en los tres casos. (ver nota 1 al final de este capítulo).

### III.3 EFECTO DEL COEFICIENTE DE ACUMULACION DE CALOR DEL MATERIAL DE MOLDEO.

En el caso del efecto de la difusividad de calor del material de moldeo ( $b_1 = \sqrt{(k\rho c_p)_s}$ ) la simulación se efectuó con dos coeficientes: 0.08 y 0.12. Los resultados arrojados por el modelo se pueden observar en las figuras 3.6 y 3.7 respectivamente. Comparando estos resultados con la fig.III.1, notamos las siguientes tendencias:

Al aumentar la difusividad de calor,

- Disminuye el tiempo de solidificación.
- Aumenta la velocidad de enfriamiento al inicio de la etapa II  $(dT/dt)_{T=T_c}$ .

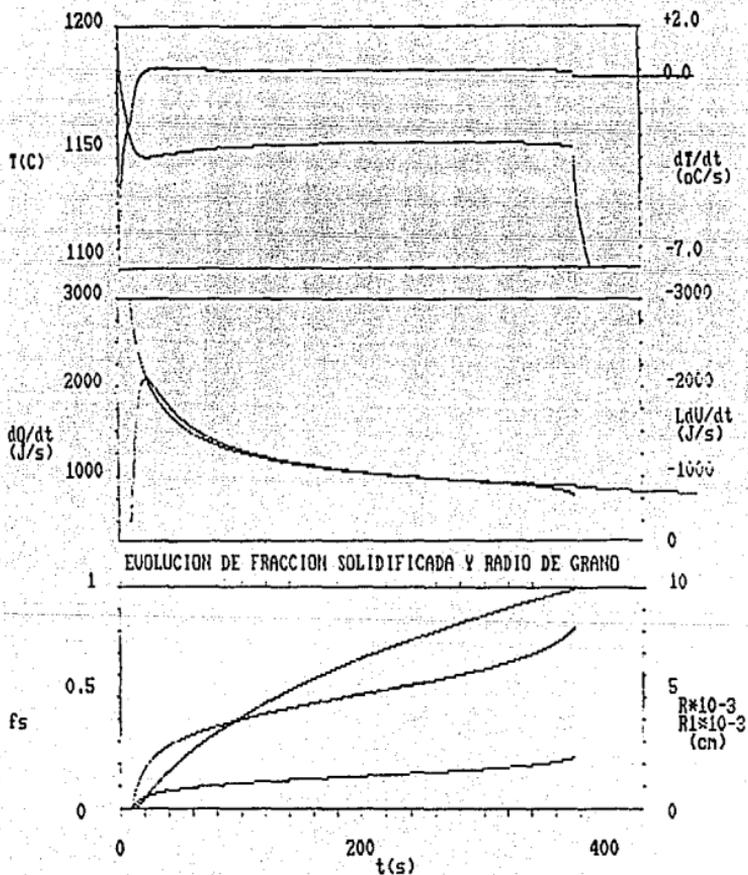


Fig.III.6 Efecto del coeficiente de difusividad de calor del material de moldeo(b1).

$$b1 \ 0.008 \text{ J/cm}^2$$

$$dT/dt \approx -5.197057 \text{ }^\circ\text{C/seg}$$

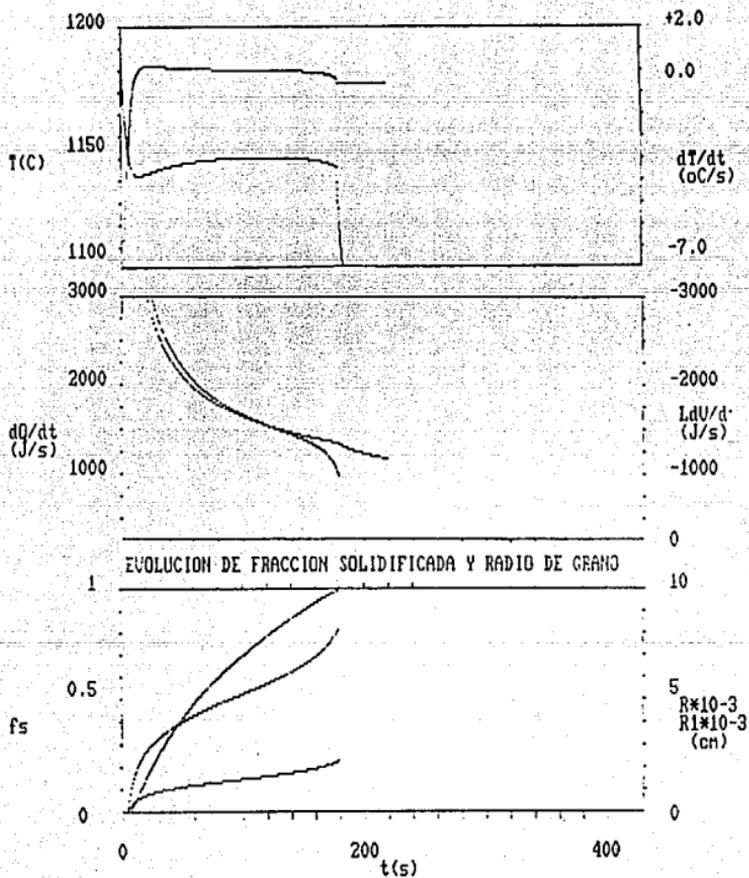


Fig.III.7 Efecto del coeficiente de difusividad de calor del material de moldeo(b1).

b1  $0.12 \text{ J/cm}^2$

$dT/dt \approx -11.69338 \text{ }^\circ\text{C/seg}$

- Aumenta el subenfriamiento máximo.
- Aumenta el máximo de la velocidad de evolución de calor latente ( $Ldv/dt$ ).
- Disminuye el tiempo que tardan los nódulos en alcanzar sus dimensiones finales.
- Los radios característicos de nódulo son iguales en los tres casos. (Ver nota 1 al final de este capítulo).

#### III.4 EFECTO DE LA INOCULACION.

Con respecto al número de núcleos activos, se simuló la solidificación de la placa colada a  $1200^{\circ}\text{C}$ , con un coeficiente de difusividad de calor ( $\sqrt{\kappa\rho c_p}$ ) de 0.1 y un espesor equivalente de 2.2. cm.

La figura III.8 corresponde a un 100% más de núcleos con respecto al de referencia, la figura III.9 representa el caso de un 50% menos que el de referencia.

El análisis comparativo de las figuras III.1, III.8 y III.9 revela que conforme aumenta el número de núcleos activos, se presentan las siguientes tendencias:

- Disminuye el tiempo de solidificación.
- Se mantiene inalterada la velocidad de enfriamiento al inicio de la etapa II  $(dT/Dt)_{T=T_e}$ .
- Disminuye el subenfriamiento máximo.
- Aumenta el máximo de la curva de la velocidad de evolución de

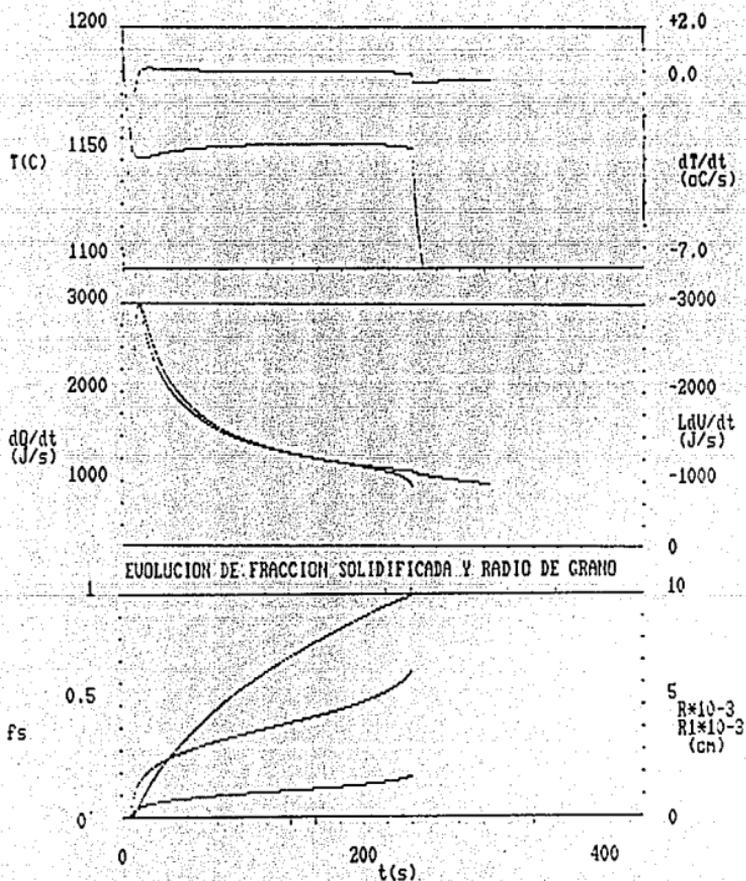
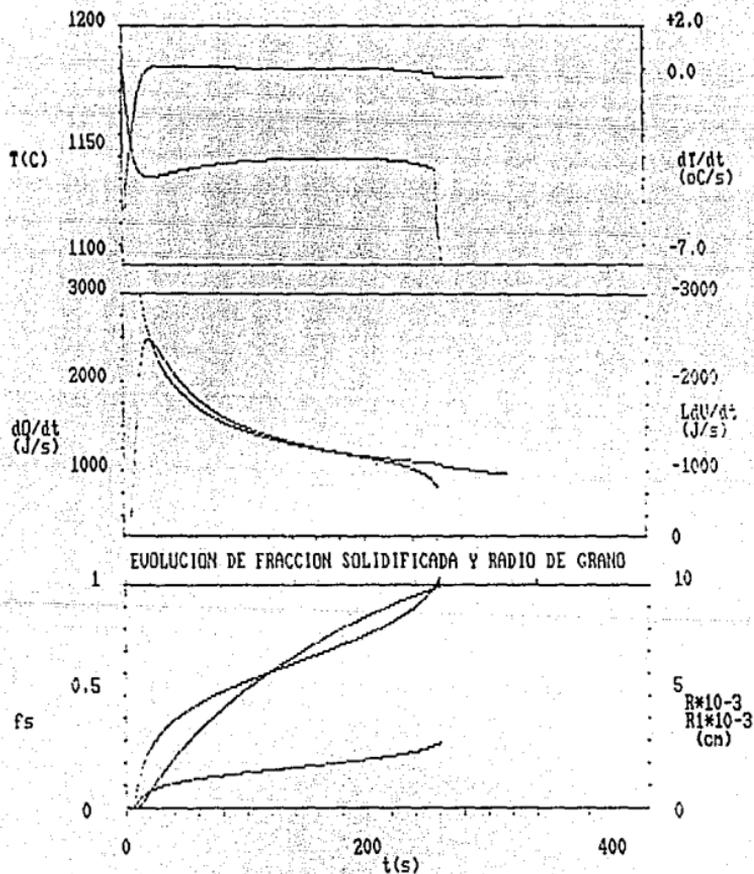


Fig. III-8 Efecto de la inoculación.

N 1034 -

$dT/dt$   $\approx$  -8.120401 °C/seg



EVOLUCION DE FRACCION SOLIDIFICADA Y RADIO DE GRANO

Fig. III.9 Efecto de la inoculación.

N 50A -

$dT/dt = -8.120 \pm 0.1$  °C/seg

calor latente.

- Disminuyen los radios característicos de nódulo una vez finalizada la solidificación. (ver nota 1).

- Disminuye el tiempo en que los nódulos alcanzan su dimensión final.

En el siguiente capítulo se procederá a explicar las tendencias encontradas que manifiestan los efectos que, sobre el proceso de solidificación, tienen las variables analizadas, a la luz del micro-macro modelo elaborado.

Nota 1: Entre las limitaciones de este modelo se encuentra el suponer un número fijo de núcleos activos. Experimentalmente se ha encontrado que el número de núcleos activos aumenta conforme se incrementa la velocidad de enfriamiento al inicio de la etapa II, lo cual se puede explicar a partir de la teoría convencional de nucleación, en donde a partir de realizar un análisis de la energía libre asociada al embrión en crecimiento como un compromiso entre la energía libre asociada al volumen del embrión que promueve el crecimiento, y de la energía interfacial asociada a la interfase embrión-seno de metal líquido, que lo inhibe, se llega a expresiones que definen al radio crítico del embrión en función de las propiedades fisicoquímicas del sistema y en función del subenfriamiento. De aquí se deriva que a mayores subenfriamientos disminuye el radio crítico del embrión, lo cual posibilita que un mayor número de embriones pasen a la categoría de núcleos conforme aumenta el subenfriamiento, aspecto que está muy relacionado con la inercia térmica (velocidad de enfriamiento) con la que la aleación inicia su solidificación. En suma si este modelo contabilizara la dependencia del número de

núcleos con respecto a la velocidad de enfriamiento al inicio de la solidificación, indicaría que a mayor temperatura de colada, el radio de nódulo es mayor (menor número de núcleos activos) a mayor difusividad de calor del material de molde el radio final de nódulo es menor (mayor número de núcleos activos), a mayor espesor de la pieza el radio final de nódulo es mayor y en fin en la medida que el cambio de la variable de proceso provoca un incremento en la velocidad de enfriamiento al inicio de la solidificación, esto promueve mayores subenfriamientos y con esto la activación de un mayor número de núcleos. Existen teorías recientes de nucleación, apoyadas en datos experimentales, que permiten introducir este efecto en el micro-macro modelo, y todos ellos de alguna manera evidencian el hecho de que la nucleación cesa en el momento en que el sistema alcanza su máximo subenfriamiento, el cual es una función, como lo hemos visto, de las condiciones de extracción de calor latente, lo cual depende del número de núcleos activos y de la velocidad con que éstos crecen.

#### IV. INTERPRETACION DE RESULTADOS

En este capítulo procederemos a interpretar los resultados obtenidos del modelo con el fin último de relacionar a los eventos térmicos y microestructurales con la forma final que adopta la curva de enfriamiento.

En la primera parte de este capítulo procederemos a interpretar desde un punto de vista general y a la luz del modelo propuesto los resultados arrojados por el programa para la simulación del enfriamiento y solidificación de placas de hierro nodular eutéctico coladas bajo condiciones específicas de proceso.

Posteriormente realizaremos la interpretación del efecto que tienen las variables de proceso analizadas sobre las características de la curva de enfriamiento obtenida mencionando la manera en que los eventos térmicos y microestructurales que acontecen durante el enfriamiento y solidificación afectan a la curva de enfriamiento.

#### IV.1 INTERPRETACION DE LA RELACION ENTRE LA CURVA DE ENFRIAMIENTO Y LOS EVENTOS TERMICOS Y MICROESTRUCTURALES QUE ACONTECEN DURANTE EL ENFRIAMIENTO Y SOLIDIFICACION DEL HIERRO NODULAR EUTECTICO.

Para la siguiente interpretación analizaremos en detalle los resultados obtenidos en la simulación de la placa de referencia(fig.IV.1).

Al inicio del proceso de enfriamiento y debido al choque térmico del metal, a la temperatura de colada, con el material de moldeo, a temperatura ambiente, la velocidad de extracción de calor es muy elevada, fig.IV.1.b,(ec.II.1), lo cual provoca a su vez que la rapidez con que desciende la temperatura de la aleación líquida ( $dT/dt$ ) sea también elevada ( $-7^{\circ}\text{C}$  aprox.fig.IV.1.a), hecho que se refleja en un rápido descenso en la temperatura del sistema, fig.IV.1.a, siendo en estos momentos iniciales donde se presenta la mayor caída de temperatura del metal (Notar que la

temperatura del sistema y el eje de la temperatura se confunden, debido a la escala utilizada, hasta los  $1185^{\circ}\text{C}$ , siendo que la temperatura de colada es de  $1200^{\circ}\text{C}$ .

Conforme transcurre el tiempo y hasta que el sistema alcanza la temperatura eutéctica, la velocidad de extracción de calor  $dQ/dt$  disminuye paulatinamente por las razones mencionadas en el capítulo anterior, lo cual a su vez provoca una disminución en la velocidad de enfriamiento de la aleación líquida ( $dT/dt$ ) con lo cual cada vez es más lenta la velocidad con que desciende la temperatura de la aleación líquida. Una vez que la aleación líquida se ha subenfriado en cierta medida, aparecen los primeros núcleos de grafito (punto 1). Al inicio del crecimiento de éstos núcleos la velocidad de formación de sólido, proporcional a  $R^2$  (ec.16), es pequeña por lo que la velocidad de evolución de calor latente ( $LdV/dt = (L/V)df_s/dt$ ) es también pequeña con respecto a la velocidad de extracción de calor, lo cual causa que la temperatura del metal subenfriado siga cayendo, aunque cada vez a menor velocidad, debido al aumento progresivo en la velocidad de formación de sólido, la cual se incrementa conforme aumenta el subenfriamiento provocando un incremento en la velocidad de evolución de calor latente de solidificación. Llega un momento en este proceso en el cual la velocidad de evolución de calor latente se iguala con la velocidad de extracción de calor, y la velocidad de enfriamiento se hace nula, con lo que el sistema alcanza su máximo grado de subenfriamiento. Es de notarse que este punto coincide con el máximo de la curva  $LdV/dt$ . Lo anterior se explica por el hecho de que la velocidad de crecimiento, función del subenfriamiento, es máxima cuando el subenfriamiento alcanza su valor más elevado. Apartir de este momento la velocidad de evolución de calor latente excede a la velocidad de extracción de calor lo cual provoca que  $dT/dt$  sea positivo y que la temperatura del sistema aumente, disminuyendo el subenfriamiento, la velocidad de evolución de calor latente, y en consecuencia la velocidad de

crecimiento del nódulo (fig. IV.1.c) remarcando la curvatura negativa de la curva  $R_2$  vs  $t$  al inicio de la etapa II.

La aleación prosigue su recalcancia disminuyendo el subenfriamiento lo cual disminuye gradualmente la velocidad de evolución de calor latente hasta que se vuelve a igualar a la velocidad de extracción de calor, en el punto 4. En el período comprendido entre (3') y (4') sobre la curva de enfriamiento, a la escala de la gráfica, el subenfriamiento se mantiene aproximadamente constante por lo cual la velocidad de crecimiento del nódulo también se mantiene aproximadamente constante y esto corresponde a la región central de la línea de  $R_2$  vs  $t$ , aproximadamente lineal.

Debido al interbloqueo entre granos en crecimiento y al gradual agotamiento de la fase líquida, la velocidad de evolución de calor latente empieza a caer por debajo de la velocidad de extracción de calor, provocando que  $dT/dt$  sea negativo lo cual se refleja en una caída en la temperatura de la aleación a partir del punto 4', lo que causa un aumento en el subenfriamiento del líquido remanente y en consecuencia un aumento en la velocidad de crecimiento lo cual se refleja en la aparición de una curvatura positiva en la curva  $R_2$  vs  $t$  en los últimos momentos de la solidificación. Debido a la poca cantidad de líquido remanente y al valor elevado de  $f_s$ , ec.16, en esta última fase de la solidificación la velocidad de evolución de calor latente no alcanza a contrarrestar a la velocidad de extracción de calor y el sistema se sigue enfriando hasta agotar completamente la fase líquida, en el punto 5 de la figura IV.1, momento en el que finaliza la solidificación y comienza la etapa de enfriamiento de sólido, el cual proseguirá su enfriamiento por el gradiente térmico presente entre la placa y el molde en contacto con el medio ambiente.

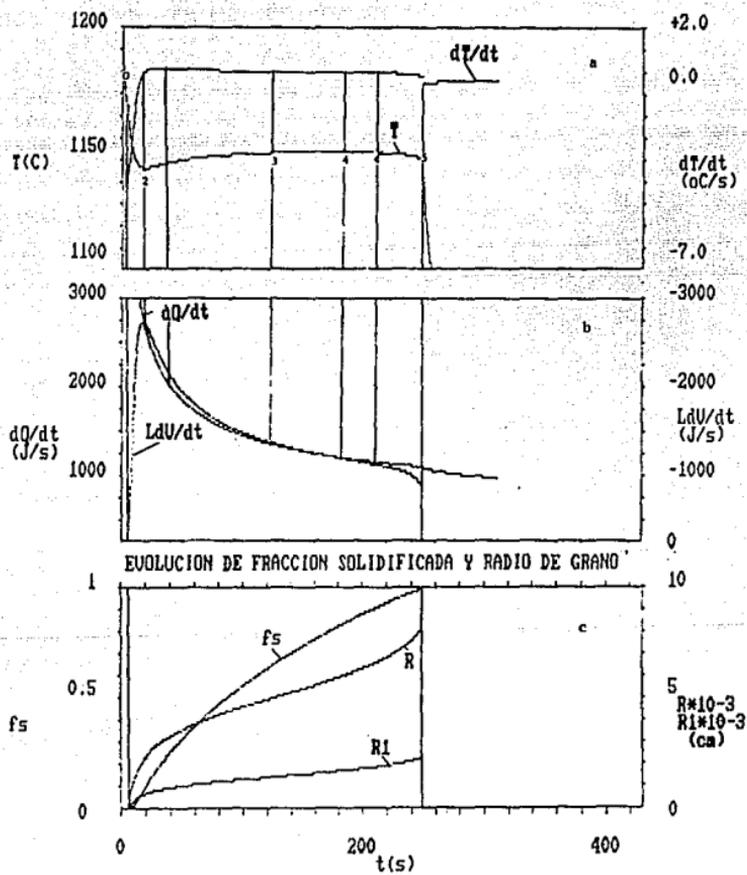


Fig. IV.1 Resultados obtenidos de la simulación del enfriamiento y solidificación de la placa de referencia

## IV.2 EFECTO DE LAS VARIABLES DE PROCESO SOBRE LA CURVA DE ENFRIAMIENTO Y LA MICROESTRUCTURA OBTENIDA.

### IV.2.1 TEMPERATURA DE COLADA.

Al aumentar la temperatura de colada aumenta la cantidad de calor sensible que tiene que extraer el molde para disminuir la temperatura de la aleación hasta que ésta alcance la temperatura eutéctica, por lo que el material de moldeo se satura térmicamente en un menor tiempo. Debido a esto aumenta el tiempo necesario para enfriar la aleación desde la temperatura de colada hasta la temperatura eutéctica  $t_1$ , y la velocidad de extracción de calor al inicio de la etapa II, una función que es inversamente proporcional a  $\sqrt{t_1}$  va a disminuir, reflejándose este hecho en una disminución en la velocidad de enfriamiento al inicio de la etapa II.

A medida que continúa el enfriamiento, y el sistema cruza la temperatura eutéctica, el metal se subenfria, aparecen los núcleos y debido a su crecimiento, aumenta paulatinamente la velocidad de evolución de calor latente hasta que esta velocidad iguala a la velocidad de extracción de calor en el tiempo que corresponde a la posición del máximo subenfriamiento. Sin embargo como la velocidad de extracción de calor era relativamente pequeña al inicio de la etapa II, debido al aumento de la temperatura de colada la intersección de las dos curvas se da a un valor menor de  $LdV/dt$  (disminuye el máximo de esta curva) y disminuye también el subenfriamiento máximo ya que el incremento necesario en la velocidad de evolución de calor latente asociado al subenfriamiento inicial del inicio en la etapa II para contrarrestar a la velocidad de extracción de calor fué menor, y la extracción de calor impuesta por el molde en contacto con el medio ambiente disminuyó su capacidad de subenfriar al líquido al

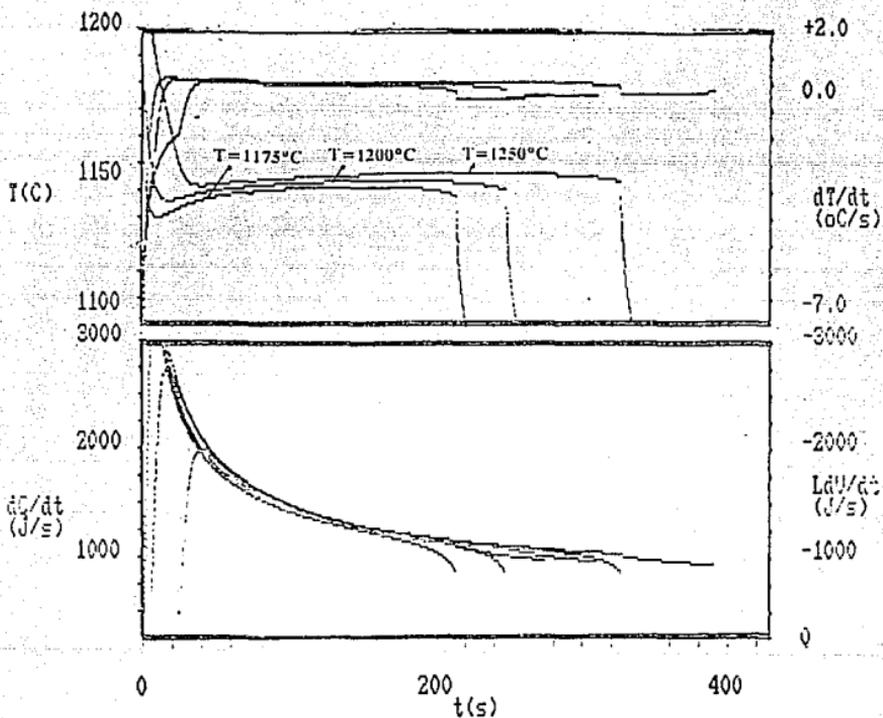


Fig. IV.2 Efecto de la temperatura de colada sobre el subenfriamiento máximo, tiempo de solidificación y posición del máximo de la velocidad de evolución de calor latente de solidificación.

inicio de la solidificación. Este menor subenfriamiento se refleja en una disminución en la velocidad de crecimiento de los núcleos y en la velocidad de formación de sólido lo cual tras como consecuencia el incremento en el tiempo necesario para que los núcleos alcancen su dimensión final, es decir para que finalice la solidificación.

En la figura IV.2 se muestra claramente el efecto del incremento en la temperatura de colada sobre el subenfriamiento máximo, el tiempo de solidificación y la posición del máximo en la velocidad de extracción de calor.

Con respecto a los radios característicos de nódulo que se presentan al final de la solidificación, ya en la nota 1, al final del capítulo III, se menciona que una limitación de este modelo es asumir un número de núcleos constante cuando en la realidad, el número de núcleos es una función de las condiciones de enfriamiento durante el inicio de la solidificación. Experimentalmente se ha encontrado que una mayor temperatura de colada disminuye el número de núcleos activos, aumentando el radio final de los nódulos.

#### IV.2.2 EFECTO DEL ESPESOR DE LA PLACA.

Al aumentar el espesor de la placa aumenta el tiempo de inicio de solidificación,  $t_1$ , y esto es debido a que el molde debe extraer una mayor cantidad de calor sensible debido a la mayor masa asociada a la placa de mayor espesor. Esto provoca que el molde se sature térmicamente en mayor medida cuando el sistema alcanza la temperatura eutéctica. El término saturación térmica se entiende como la disminución en la capacidad extractora de calor por parte del molde debido a su baja difusividad térmica y aunado a esto la absorción de una cantidad de calor elevada lo cual reduce notoriamente el gradiente térmico entre el molde y el metal

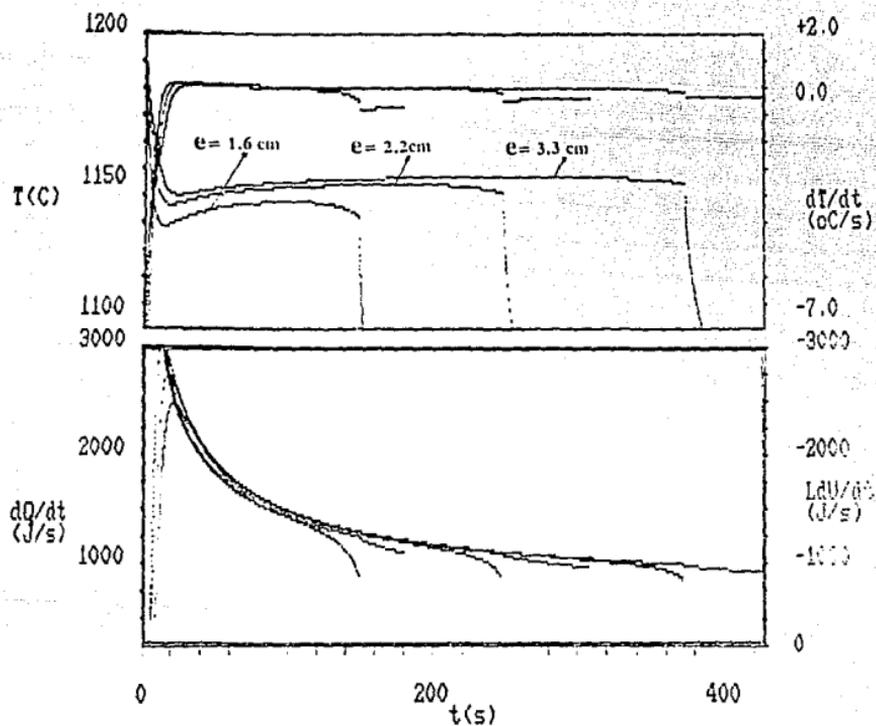


Fig. IV.3 Efecto del espesor de la placa sobre el subenfriamiento máximo, tiempo de solidificación y posición del máximo de la velocidad de evolución de calor latente de solidificación.

en la vecindad de la interfase.

Esto se traduce en un menor valor en la velocidad de enfriamiento cuando el metal alcanza la temperatura eutéctica, lo cual provoca un efecto similar al de un aumento en la temperatura de colada, es decir una disminución en el máximo de la curva de evolución de calor latente, una disminución en el subenfriamiento máximo, menor velocidad de crecimiento y en consecuencia un incremento en el tiempo necesario para efectuar la etapa II.

En la fig.IV.3 se muestra claramente el efecto de un aumento en el espesor de placa sobre el subenfriamiento máximo, el tiempo de solidificación y el máximo de  $LdV/dt$ .

En este caso también se aplica el comentario incluido al finalizar la sección IV.2.1 referente al número de núcleos activos y a las dimensiones finales de los nódulos. Un mayor espesor de placa, al provocar una menor velocidad de enfriamiento al inicio de la etapa II provoca una disminución de el número de núcleos activos y en consecuencia un radio mayor al final de la solidificación, lo que no predice este modelo al suponer un número núcleos constante.

#### IV.2.3 EFECTO DE LA DIFUSIVIDAD DE CALOR ( $\sqrt{k\rho c_p}$ ) DEL MATERIAL DE MOLDEO.

Al aumentar el coeficiente  $b_1$ , es decir la difusividad de calor se incrementa la capacidad de extracción de calor por parte de el material de moldeo, ya que la velocidad de extracción de calor,  $AdQ/dt$ , es directamente proporcional a la difusividad de calor del material de moldeo(ec.II.1), de donde, aumentando este coeficiente, disminuye  $t_1$ , el tiempo necesario para que la placa disminuya su temperatura hasta la temperatura eutéctica. Esto necesariamente provoca que la velocidad de enfriamiento al inicio de la solidificación se incremente, lo que promueve un aumento en el subenfriamiento máximo y asociado a este aumento mayores

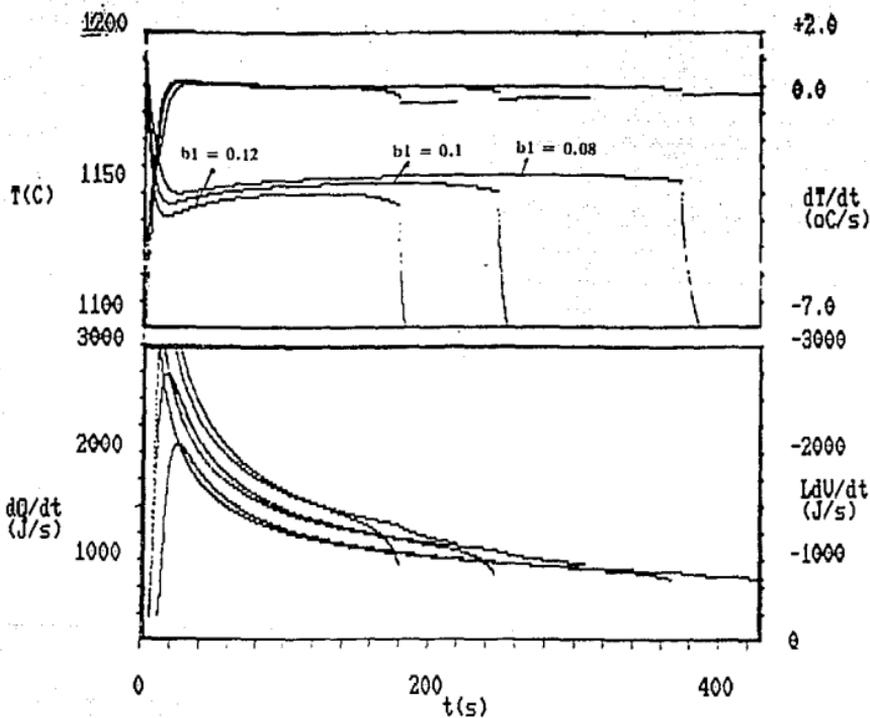


Fig. IV.4 Efecto de la difusividad de calor del material de molde sobre el subenfriamiento máximo, tiempo de solidificación y posición del máximo de la velocidad de evolución de calor latente de solidificación.

velocidades de crecimiento de los núcleos, hecho que se refleja en un aumento en la posición del máximo  $LdV/dt$ . El aumento en la capacidad del material de moldeo para subenfriar a la aleación líquida causa entonces una disminución en el tiempo necesario para que los núcleos alcancen sus dimensiones finales, es decir en el tiempo de solidificación.

#### IV.2.4 EFECTO DE LA INOCULACION.

Un incremento en el número de núcleos activos afecta directamente a la velocidad de formación de sólido, ya que al analizar la ecuación II.15 se observa que existe una relación directamente proporcional entre la velocidad de formación del sólido y el número de núcleos activos. Esto se refleja en un incremento en la rapidez con que la velocidad evolución de calor latente aumenta, y en consecuencia, un aumento en el máximo de la curva  $LdV/dt$  y una disminución en el tiempo en que se cruzan las curvas de velocidad de extracción de calor y de velocidad de evolución de calor latente, ya que un mayor número de núcleos en crecimiento a un subenfriamiento dado, libera una mayor cantidad de energía por unidad de tiempo. Esto causa una disminución en el subenfriamiento máximo y con esto una reducción en la velocidad de crecimiento de los núcleos, lo cual se puede constatar comparando las figuras III.8 y III.9 en donde se observa que para el caso de un mayor número de núcleos activos la velocidad de crecimiento del nódulo cae más rápidamente en la etapa inicial a pesar de que en ambos casos el tiempo de inicio de solidificación,  $t_1$ , es el mismo. Apesar de esta disminución en la velocidad de crecimiento ( $dR/dt$ ), el hecho de la presencia de un mayor número de núcleos en crecimiento provoca un agotamiento más rápido del líquido remanente (una mayor velocidad de formación de sólido) y la interacción entre granos provoca una disminución más rápida de

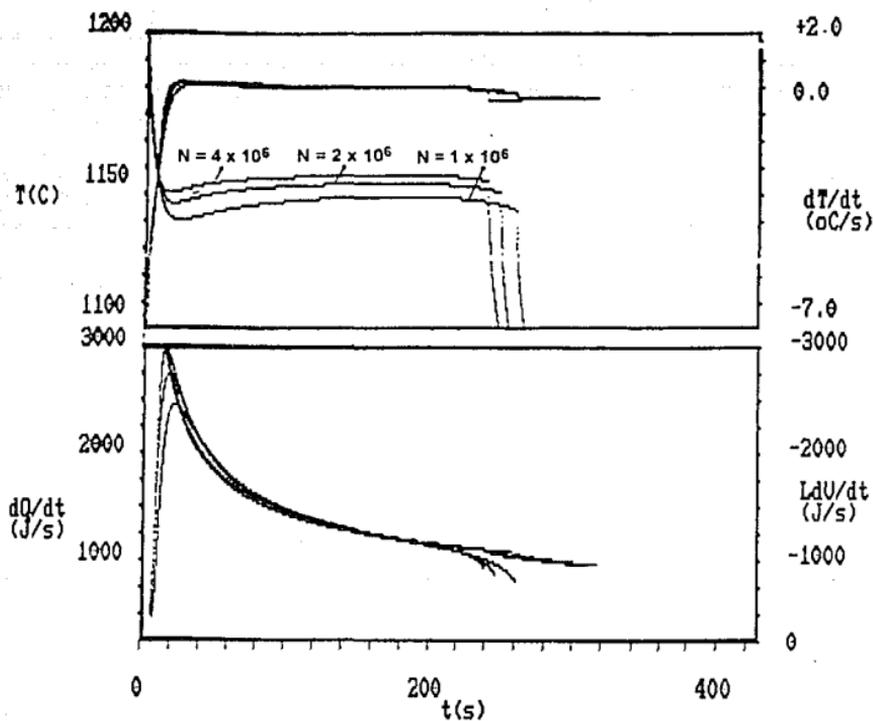


Fig. IV.5 Efecto del número de núcleos activos sobre el subenfriamiento máximo, tiempo de solidificación y posición del máximo de la velocidad de evolución de calor latente de solidificación.

la velocidad de evolución de calor latente al final de la solidificación lo que se refleja en una disminución en el tiempo de solidificación y en el radio final de nódulo.

En la fig.IV.5 se muestran traslapados las figuras III.8 y III.9 para evidenciar mas claramente los cambios referidos con anterioridad.

En suma el incremento en núcleos activos modifica la historia térmica del sistema durante la solidificación disminuyendo el subenfriamiento máximo y el tiempo de solidificación asi como las dimensiones de la celda eutéctica.

En resumen se observó que la historia térmica del sistema, y con esto, las características microestructurales de la aleación una vez finalizada la solidificación, se ven afectadas por las propiedades termofísicas del material de moldeo, por la temperatura de colada, por las dimensiones y geometría de la pieza y por la introducción de un mayor número de núcleos activos mediante el tratamiento de inoculación.

Con respecto a esto último un mayor número de núcleos activos disminuye el subenfriamiento máximo y disminuye las dimensiones finales de los nódulos (aumenta el conteo de los nodulos) disminuyendo también el tiempo de solidificación.

En relación al resto de las variables mencionadas, se encontró que éstas afectan la velocidad de enfriamiento al inicio de la solidificación lo cual a su vez determina junto con el número de núcleos activos el subenfriamiento máximo de la aleación. Un mayor subenfriamiento es promovido por una disminución en la temperatura de colada, una disminución en el espesor equivalente de la placa y por un aumento en la difusividad de calor del material de moldeo.

Una limitación importante del modelo es el hecho de no tomar en cuenta la dependencia del número de núcleos activos con respecto a

las condiciones de enfriamiento al inicio de la solidificación. De haberse tomado en cuenta esta dependencia y por tanto del hecho experimentalmente encontrando de que el número de núcleos activos se incrementa conforme aumenta la velocidad de enfriamiento al inicio de la etapa II, una disminución en la temperatura de colada, una disminución en el espesor equivalente de la pieza y un aumento en la difusividad de calor del material de moldeo hubiera indicado una disminución en el radio final de nódulo, así como, apesar de mostrar un aumento en el subenfriamiento máximo con respecto a las condiciones de referencia, dicho aumento sería menor al calculado por el presente modelo ya que el incremento en el número de núcleos activos, como lo observamos en la sección IV.2.4, disminuye el subenfriamiento.

## CONCLUSIONES

Se elaboró un modelo matemático que permite simular las curvas de enfriamiento asociadas al enfriamiento y solidificación de placas de hierro nodular eutéctico coladas en moldes de arena. Este modelo acopla un modelo de cinética de solidificación de hierro nodular eutéctico con otro modelo simplificado de transferencia de calor, permitiendo ligar a la historia térmica del sistema con los eventos térmicos y microestructurales que acontecen en la pieza durante su enfriamiento y solidificación.

El modelo muestra que los cambios en variables de proceso que promueven un aumento en la velocidad de enfriamiento de la aleación al inicio de la solidificación provocan un aumento en el subenfriamiento máximo. Una disminución en la temperatura de colada, un aumento en la difusividad de calor del material de moldeo y una disminución en el espesor equivalente de la placa provocan el efecto antes mencionado.

Un incremento en el número de núcleos activos mediante el tratamiento de inoculación disminuye el subenfriamiento máximo y el tiempo de solidificación aumentando el conteo de nódulos.

Los resultados encontrados concuerdan cualitativamente con lo reportado en la literatura aunque debido a que este modelo no considera la dependencia del número de núcleos con respecto a la velocidad de enfriamiento, al gradiente térmico dentro del metal, a la dependencia de la propiedades termofísicas con respecto a la temperatura y a muchos otros factores asociados al problema real, que es muy complejo, es de esperarse diferencias cuantitativas.

Este trabajo constituye un primer paso para la incursión

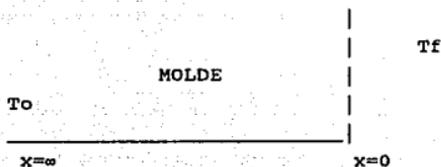
dentro de un nuevo campo en el modelado de solidificación, el cual ha sido denominado micro-macro modelado, cuyo objetivo es establecer un vínculo cuantitativo entre las condiciones de proceso y la microestructura que presenta el producto de fundición.

#### RECOMENDACIONES

La continuación de este trabajo consiste en utilizar la resolución numérica de la ecuación de conservación de energía para eliminar la hipótesis de gradiente térmico constante en el metal, un modelo cinético más actualizado, propiedades termofísicas dependientes de la temperatura y recopilar o generar información relativa a la dependencia del número de núcleos activos con respecto a la velocidad de enfriamiento al inicio de la solidificación.

## ANEXO I

Para la resolución de la ecuación de conducción de calor en el molde se asume flujo de calor unidireccional, estado inestable, el molde es considerado semiinfinito, las propiedades termofísicas del material de moldeo son constantes.



$$\nabla k \nabla T = \rho \delta (CpT) / \delta t$$

Donde:

$$K = \text{cte}; Cp = \text{cte.}$$

$$k \nabla^2 T = \rho Cp \delta T / \delta t$$

$$\nabla^2 T = (\rho Cp / K) \delta T / \delta t$$

$$\alpha = K / \rho Cp$$

$$\nabla^2 T = 1/\alpha (\delta T / \delta t)$$

$$\delta^2 T / \delta x^2 + \delta^2 T / \delta y^2 + \delta^2 T / \delta z^2 = 1/\alpha (\delta T / \delta t)$$

Para flujo de calor unidireccional se obtiene:

$$\delta^2 T / \delta x^2 = 1/\alpha (\delta T / \delta t) \quad A$$

Condiciones límites:

en  $X=0$   $T=T_f$  y en  $X=\infty$   $T=T_0$

Para la solución dicha ecuación, se empleará la función error, la cual está dada por:

$$T = A + B \operatorname{erfc} (x/2(at)^{1/2})$$

A continuación se realizará la comprobación de que la función es una solución de la ecuación A.

Antecedentes matemáticos:

$$\operatorname{erf}(f(y)) = (2/(\pi)^{1/2}) \int_0^{f(y)} e^{-m^2} dm$$

$$\operatorname{erfc}(f(y)) = 1 - \operatorname{erf}(f(y)) = (2/(\pi)^{1/2}) \int_{f(y)}^{\infty} e^{-m^2} dm$$

$$\operatorname{erf}(0) = 0 \quad ; \quad \operatorname{erfc}(0) = 1$$

$$\operatorname{erf}(\infty) = 1 \quad ; \quad \operatorname{erfc}(\infty) = 0$$

$$\operatorname{erf}(-f(y)) = -\operatorname{erf}(f(y))$$

$$\operatorname{erfc}(-f(y)) = 1 + \operatorname{erf}(f(y))$$

Se requiere obtener las siguientes diferenciales:

$$dT/dt \quad ; \quad \delta T/\delta x \quad ; \quad \delta^2 T/\delta^2 x = \delta/\delta x (\delta T/\delta x)$$

Las funciones error pueden ser diferenciadas e integradas, para diferenciarlas podemos utilizar la regla de Leibnitz para la diferenciación de integrales:

$$\delta/\delta y \left( \int_{f_2(y)}^{f_1(y)} e^{-m^2} dm \right) = \delta/\delta y (f_1(y)) e^{-f_1^2(y)} - \delta/\delta y (f_2(y)) e^{-f_2^2(y)}$$

esto es, la derivada de una integral definida, cuyos límites inferior y superior son representados por funciones, es igual a la derivada de el límite superior, multiplicada por el argumento de la integral evaluada en el límite superior, menos la derivada del límite inferior.

Aplicando esta regla al segundo término a la derecha de la siguiente ecuación:

$$T = A + B \operatorname{erfc}(x/2(\alpha t)^{1/2}) \quad f(x) = x/2(\alpha t)^{1/2}$$

$$\delta/\delta x (B \operatorname{erfc}(x/2(\alpha t)^{1/2})) = \delta/\delta x (B/2(\alpha t)^{1/2} \int_{x/2\alpha t}^{\infty} 1/2e^{-m^2} dm)$$

$$B/2(\pi)^{1/2} \delta/\delta x (\int_{-\infty}^{\infty} e^{-m^2} dm) - \delta/\delta x (x/2(\alpha t)^{1/2}) e^{-(x/2(\alpha t)^{1/2})^2}$$

$$2B/(\pi)^{1/2} \delta/\delta x (\int_{x/2(\alpha t)}^{\infty} 1/2e^{-m^2} dx) = B/(\pi)^{1/2} (-1/(\alpha t)^{1/2}) e^{-x^2/4\alpha t}$$

$$\delta T/\delta x = -B/(\alpha \pi t)^{1/2} e^{-x^2/4\alpha t}$$

$$\delta^2 T/\delta x^2 = \delta/\delta x (-B/(\alpha \pi t)^{1/2}) e^{-x^2/4\alpha t}$$

$$= -B/(\alpha \pi t)^{1/2} \delta/\delta y e^{-x^2/4\alpha t}$$

$$= -B/(\alpha \pi t)^{1/2} e^{-x^2/4\alpha t} (-x/2\alpha t)$$

$$(\delta^2 T/\delta x^2 = Bx/2(\pi)^{1/2} \alpha^{3/2} t^{3/2} e^{-x^2/4\alpha t})^2$$

$$\delta T/\delta x = 2B/(\pi)^{1/2} \delta/\delta t (\int_{x/2(\alpha t)}^{\infty} 1/2 e^{-m^2} dm)^2$$

$$\begin{aligned} \delta T / \delta x &= 2B / (\pi)^{1/2} \delta / \delta t (\omega) e^{-\omega} - (\delta / \delta t (x/2(\alpha t)^{1/2}) e^{-x^2 / 4\alpha t} \\ &= - ( -Bx/2(\pi)^{1/2} (\alpha)^{1/2} t^{3/2} ) e^{-x^2 / 4\alpha t} \\ (\delta T / \delta t &= Bx/2(\pi\alpha)^{1/2} (\alpha)^{1/2} t^{3/2} ) e^{-x^2 / 4\alpha t} \end{aligned}$$

sustituyendo valores en la ecuación de conducción:

$$\alpha \delta^2 T / \delta x^2 = \delta T / \delta t$$

$$\begin{aligned} \alpha \delta^2 T / \delta x^2 &= \alpha (Bx/2(\pi)^{1/2} (\alpha)^{1/2} t^{3/2} ) e^{-x^2 / 4\alpha t} \\ &= Bx/2(\pi\alpha)^{1/2} t^{3/2} e^{-x^2 / 4\alpha t} \end{aligned}$$

$$(Bx/2(\pi\alpha)^{1/2} t^{3/2} e^{-x^2 / 4\alpha t} = -Bx/(\pi\alpha)^{1/2} t^{3/2} e^{-x^2 / 4\alpha t}^2$$

Por lo tanto la función error es una solución de la ecuación diferencial

$$\alpha \delta^2 T / \delta x^2 = \delta T / \delta t$$

La velocidad de flujo de calor de la intercara metal-molde está dada por:

$$(q/A)_{x=0} = -K_m (\delta T / \delta x)_{x=0}$$

$$T = T_M + (T_0 - T_M) \operatorname{erfc} x/2(\alpha t)^{1/2}$$

$$(q/A)_{x=0} = (K \rho C_p / \pi t)^{1/2} (T_M - T_0)$$

## A N E X O II

Una vez substituyendo la ecuación II.1 en la II.2 obtenemos la ecuación II.3:

$$-A\sqrt{(kC_p\rho)_w/\pi} \cdot t^{-1/2} \cdot (T-T_0) = \rho_m c_{pm} V_m \cdot (\partial T/\partial t) \quad (II.3)$$

Para poder resolverla es necesario separar variables:

$$\frac{-A}{\rho_m c_{pm} V_m} \cdot \sqrt{(kC_p\rho)_w/\pi} \cdot t^{-1/2} dt = \frac{dT}{(T-T_0)} \quad (4)$$

$$\text{ctes} \int_{t=0}^t t^{-1/2} dt = \int_{T=T_c}^T \frac{dT}{(T-T_0)} \quad (5)$$

De esta forma la ecuación (5) queda integrada de la siguiente forma:

$$\ln \frac{(T-T_0)}{(T_c-T_0)} = \frac{-2A}{\rho_m c_{pm} V_m} \cdot \sqrt{(kC_p\rho)_w/\pi} \cdot t^{1/2} \quad (6)$$

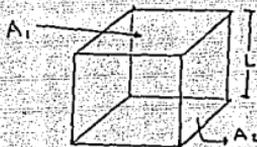
Sacando exponencial a ambos lados de la ecuación:

$$(T-T_0)/(T_c-T_0) = \exp \left( (-2A/\rho_m c_{pm} V_m) \cdot \sqrt{(kC_p\rho)_w/\pi} \cdot t^{1/2} \right) \quad (7)$$

Dejamos T de la ecuación (7):

$$T = T_0 + (T_c - T_0) \exp \left( (-2A / \rho_m c_{pm} V_a) \cdot \sqrt{(k c_p \rho) S / \pi} \cdot t^{1/2} \right) \quad (8)$$

Recordando el concepto de módulo de solidificación para el caso de una placa infinita como se muestra en la siguiente figura:



Donde el volumen es igual a  $L^3$ , el área efectiva total de transferencia es  $A_1 + A_2 = 2L^2$  que a su vez es igual a la superficie de extracción de calor,  $S = 2L^2$ .

Entonces el módulo queda definido como:

$$M = \text{Volumen} / \text{sup. de extracción de calor} = L^3 / 2L^2 = L/2$$

Para placas infinitas tenemos entonces que:

$$M = V/A = e/2$$

Donde  $e$  = espesor de la placa infinita equivalente.

Si decimos que  $k_1$  es igual a las constantes de la exponencial para simplificar la ecuación (8) y además incorporamos el concepto de espesor equivalente, la ec. (8) queda de la siguiente manera:

$$T = T_0 + (T_c - T_0) \exp(k_1 \sqrt{t}) \quad (9)$$

donde :

$$K_1 = \frac{-4}{e \cdot \rho_m \cdot c_{pm}} \cdot \sqrt{(k\rho c_p)_s / \pi}$$

La ecuación (9) proporciona la temperatura del metal en función del tiempo para la etapa I considerando el volumen de la pieza y el área efectiva de transferencia de calor, traducido a un espesor equivalente de placa infinita con propiedades termofísicas constantes.

La velocidad de enfriamiento de la placa en la etapa I está dada por la derivada de la expresión (9):

$$\frac{dT}{dt} = d \left[ T_0 + (T_c - T_0) \frac{\exp(-K_1 \cdot t^{1/2})}{dt} \right] \quad (10)$$

$$\frac{dT}{dt} = (T_c - T_0) \exp(-K_1 \cdot t^{1/2}) \left( -\frac{1}{2} K_1 t^{-1/2} \right)$$

Reordenando términos:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{K_1}{2\sqrt{t}} \cdot \exp(-K_1 \cdot t^{1/2}) \quad (11)$$

Para establecer el valor de  $dT/dt$  cuando  $T=T_E$  debemos conocer el tiempo  $t_1$  al cual el sistema alcanza la temperatura eutéctica, para lo cual de la ecuación (6) despejamos a  $t$ :

$$t = \left[ -\frac{\rho_m \cdot c_{pm} \cdot V_m}{2AV(k\rho c_p/\pi)} \cdot \ln(T - T_0 / T_c - T_0) \right]^2 \quad (12)$$

Y evaluando el tiempo  $t_1$  que tarda la placa en enfriarse desde la  $T_0$  hasta alcanzar la  $T_E = 1153 \text{ }^\circ\text{C}$ :

$$t_1 = \left[ -\frac{\rho_m c_{pm} e'}{4\sqrt{(k\rho c_p)_m/\pi)} \cdot \ln ( T_E - T_0 / T_c - T_0 ) \right]^2 \quad (13)$$

Substituyendo el valor obtenido de la ecuación (13) para  $t_1$  en la ecuación (11) obtenemos la velocidad de enfriamiento de la placa cuando esta alcanza la  $T_E$ :

$$dT/dt|_{t=t_1} = \frac{-2(T_c - T_0)}{e \rho_m c_{pm}} \sqrt{(k\rho c_p)_m/\pi} \cdot t_1^{1/2} \cdot \exp(-K \cdot t_1^{1/2}) \quad (14)$$

### A N E X O III

El número de núcleos activos esta en función del tiempo de acuerdo con la siguiente relación:

$$N = A + b \left( \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{T_e} \right)^2$$

El crecimiento de los granos en un sistema eutéctico nodular puede ser concebido como un problema de crecimiento de partículas de grafito limitado por la difusión de carbono a través de una fase intermedia (austenita), ver fig A.2, aquí empleamos los modelos usados por Frás, obtenidos de la resolución de las ecuaciones de Fick.

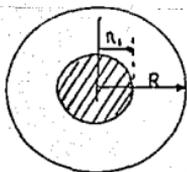


Fig A.2. Difusión de carbono en austenita.

Existen diferentes concentraciones de carbón en cada punto del sistema en función de T. Es decir el Perfil de concentraciones. (ver fig.A.3)



Fig. A.3 Representación esquemática de un grano eutéctico en un rango de contenido de carbón.

Para conocer  $\partial V/\partial t$  es necesario que sepamos la razón en que  $R$ , el radio de los nódulos, depende del tiempo y la temperatura.

Recordemos el segmento del diagrama de fases Fe-C en la sección eutéctica de acuerdo a la figura A.4:

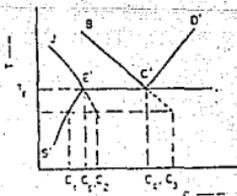


Fig. A.4 Fragmento del diagrama de fases al equilibrio de la aleación Fe-C.

Ahora bien, si consideramos líneas rectas las curvas del diagrama de fases, para que de este modo determinar las concentraciones en función del subenfriamiento  $\Delta T$ .

$$\Delta T = T_E - T = 1153 - T$$

$$C_1 = C_E - \Delta T / m_1$$

$$C_2 = C_E + \Delta T / m_2$$

$$C_3 = C_C + \Delta T / m_3$$

Donde  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  son las pendientes de las líneas S'E', JE' y BC' y sus valores son:

$$m_1 = 300^\circ\text{C}/\%$$

$$m_2 = 182^\circ\text{C}/\%$$

$$m_3 = 112^\circ\text{C}/\%$$

Las concentraciones que son fijas (en % peso) y que además se conocen son:

$$C_E' = 2.08$$

$$C_C' = 4.26$$

$$C_A = 100$$

De la resolución de las ecuaciones de Fick se obtienen las relaciones entre los radios:

$$R/R_1 = \sqrt[3]{\xi} \quad (15)$$

donde:

R = radio del nódulo (C+r)

R<sub>1</sub> = radio de grafito

La dependencia de R con respecto al tiempo obedece una ley del tipo:

$$R = \beta \sqrt{t} \quad (16)$$

y

$$\beta = \left[ 2 D (C_2 - C_1) / (C_3 - C_2) \left( \sqrt[3]{\xi} - 1 \right) \right]^{1/2} \quad (17)$$

$$\xi = (C_4 - C_1) / (C_3 - C_2) \quad (18)$$

Donde D = coeficiente de difusión de carbón en austenita<sup>2</sup> y su valor es de  $7 \cdot 10^{-6}$  cm<sup>2</sup>/seg. C<sub>4</sub>-C<sub>1</sub>, está ilustrado en la figura A.3. Substituyendo los valores correspondientes en la ecuación (17) tenemos que:

$$\xi = \left[ 100 - (C_4 - \Delta T/m_1) / (4.26 + \Delta T/m_3) - (2.08 + \Delta T/m_2) \right]$$

$$\xi = \left[ 100 - 2.08 + (\Delta T/300) / (4.26 + \Delta T/112) - (2.08 + \Delta T/118) \right]$$

$$\xi = ( 97.92 + \Delta T/300 / 2.18 + \Delta T/191.2 )$$

$$\beta = \left[ 2 D (C_2 - C_1) / (C_3 - C_2) \left( \sqrt[3]{\xi} - 1 \right) \right]^{1/2}$$

$$C_2 - C_1 = (2.08 + \Delta T/182) - (2.08 - \Delta T/300)$$

$$C_2 - C_1 = \Delta T ( 1/182 + 1/300 ) = \Delta T ( 8.827839 \cdot 10^{-3} )$$

$$C_2 - C_3 = ( 4.26 + \Delta T/112 ) - ( 2.08 + \Delta T/182 ) = 2.18 + \Delta T/291.2$$

sustituyendo estos valores en la ecuación (17) y (18) respectivamente tenemos que:

$$\beta = [ 2(7 \cdot 10^{-6}) (8.827839 \cdot 10^{-3} \Delta T) / (2.18 + \Delta T/291.2) (\sqrt[3]{\xi} - 1) ]^{1/2}$$

y

$$\xi = 97.92 + (\Delta T/300) / 2.18 + (\Delta T/291.2)$$

de la ecuación (16) el término  $\beta$  esta determinado por la siguiente expresión:

$$\beta = a \sqrt{\Delta T} \quad (19)$$

La forma general de escribir (19) puede ser:

$$\beta = a \cdot \Delta T^n \quad (20)$$

si sacamos logaritmos naturales a la ecuación (20):

$$\ln \beta = \ln a + n \ln \Delta T$$

Analizando la expresión anterior la relacionamos con la ecuación

de una línea recta. El siguiente paso será conocer el valor de la constante  $a$  mediante una regresión lineal, sabiendo que el valor de  $n$  es de 0.5.

Graficando  $\ln \beta$  vs  $\ln \Delta T$  obtenemos los siguientes resultados :

$\Delta T$	$\ln \Delta T$	$\ln \beta$
0.1	-2.302585093	-10.66673125
0.2	-2.609437912	-10.32027211
0.3	-1.203972804	-10.11765411
0.4	-0.916290730	- 9.973927426
0.5	-0.931477800	- 9.862470094
0.6	-0.510825600	- 9.771423752
0.8	-0.223143551	- 9.627811566
1.0	0.000000000	- 9.516468611
2.0	-0.693114786	- 9.170386866
2.1	0.741937347	- 9.146757931
2.3	0.832909122	- 9.101500673

Haciendo la regresión anteriormente mencionada obtenemos los siguientes resultados:

número de incrementos: 19

valor de  $a = -9.493016745$

valor de  $b = 0.4936041382$

valor de  $r = 0.912183$

valor de  $a = 7.5376 \times 10^{-5}$

Si combinamos la ecuación (16) y (19) obtenemos una relación importante

$$R = a \cdot \Delta T^{1/2} \cdot \sqrt{t} = a \cdot \Delta T^{1/2} \cdot t^{1/2}$$

que es lo mismo que :

$$R = a \sqrt{\Delta T \cdot t} \quad (21)$$

#### A N E X O IV

Tomando en cuenta que el subenfriamiento es función del tiempo,  $\Delta T(t)$ , la derivada de la ecuación (II.18) queda de la siguiente forma:

$$\frac{dv}{dt} = v_0 \left[ \frac{d}{dt} (1 - \exp(-4/3 \pi N (a\sqrt{t\Delta T})^3)) \right] \quad (22)$$

$$\frac{dv}{dt} = v_0 \left[ \frac{d}{dt} ( - \exp(-4/3 \pi N a^3 t^{3/2} \Delta T^{3/2}) ) \right] \quad (23)$$

donde la derivada de la exponencial con respecto al tiempo es:

$$\frac{d}{dt} ( - \exp(-4/3 \pi N a^3 t^{3/2} \Delta T^{3/2}) ) = - \exp(-4/3 \pi N a^3 t^{3/2} \Delta T^{3/2}) \cdot \frac{d}{dt} (-4/3 \pi N a^3 t^{3/2} \Delta T^{3/2})$$

y la derivada del argumento de la exponencial es:

$$d/dt(-4/3 \pi N a^3 t^{3/2} \Delta T^{3/2}) = -4/3 \pi N a^3 \cdot (d(t^{3/2} \Delta T^{3/2})/dt)$$

$$d( t^{3/2} \Delta T^{3/2}/dt ) = t^{3/2} (d\Delta T^{3/2}/dt) + \Delta T^{3/2} ( dt^{3/2}/dt )$$

$$= t^{3/2} (3/2 \Delta T^{1/2} d\Delta T/dt) + \Delta T^{3/2} 3/2 t^{1/2}$$

si sustituimos lo anterior en la ecuación (23):

$$\frac{dv}{dt} = v_0 \left[ -\exp(-4/3 \pi N (av\sqrt{\Delta T})^3) \cdot (-4/3 \pi N a^3) (3/2 t^{3/2} \Delta T^{1/2} \frac{d\Delta T}{dt}) + 3/2 \Delta T^{3/2} t^{1/2} \right]$$

$$\frac{dv}{dt} = 2v_0 \pi N a^3 (\exp(-4/3 \pi N (av\sqrt{\Delta T})^3) \cdot (t^{1/2} \Delta T^{3/2} + t^{3/2} \Delta T^{1/2} \frac{d\Delta T}{dt}))$$

$$\frac{dv}{dt} = 2v_0 \pi N a^3 (\exp(-4/3 \pi N a^3 t^{3/2} \Delta T^{3/2})) \cdot (t^{1/2} \Delta T^{3/2} + t^{3/2} \Delta T^{1/2} \cdot \frac{d\Delta T}{dt})$$

Si se establecen las siguientes identidades con el fin de compactar la ecuación (23):

$$A = 2v_0 \pi N a^3$$

$$E = \exp(-4/3 \pi N a^3 t^{3/2} \Delta T^{3/2})$$

La ecuación queda de la siguiente forma:

$$\frac{dv}{dt} = A \cdot E \cdot [ (t^{1/2} \Delta T^{3/2}) + (t^{3/2} \Delta T^{1/2}) \cdot \frac{d\Delta T}{dt} ]$$

## A N E X O V

Si en la ecuación de balance de energía para la etapa II:

$$L \frac{dv}{dt} - A \frac{dQ}{dt} = -\phi \frac{d\Delta T}{dt}$$

sustituimos las ecuaciones correspondientes a los términos de  $Ldv/dt$  y de  $AdQ/dt$  obtenemos la ecuación (II.22):

$$LAE(\Delta T^3 \cdot t)^{1/2} + LAE(\Delta T \cdot t^3)^{1/2} \frac{d\Delta T}{dt} - \sqrt{(k\epsilon\rho)_s} \cdot A \cdot (T-T_0) \cdot \sqrt{\pi(t+t_1)} = -\phi \frac{d\Delta T}{dt} \quad (\text{II.22})$$

simplificando términos queda de la siguiente forma :

$$\frac{LAE(\Delta T^3 \cdot t)^{1/2} - (\sqrt{(k\epsilon\rho)_s} \cdot A \cdot (T-T_0) / \sqrt{\pi(t+t_1)})}{\cdot d\Delta T/dt \cdot \sqrt{\pi(t+t_1)}} = -(\phi + LAE(\Delta T \cdot t^3)^{1/2})$$

$$LAE(\Delta T^3 \cdot t)^{1/2} \cdot \sqrt{\pi(t+t_1)} - \sqrt{(k\epsilon\rho)_s} \cdot A \cdot (T-T_0) = -\sqrt{\pi(t+t_1)} (\phi + LAE(\Delta T \cdot t^3)^{1/2} \cdot d\Delta T/dt)$$

Despejamos  $d\Delta T/dt$  de la expresión anterior :

$$\frac{d\Delta T}{dt} = \frac{(-\sqrt{(k\epsilon\rho)_s} \cdot A \cdot (T-T_0) + LAE(\pi \Delta T^3 t(t+t_1))^{1/2})}{\phi \sqrt{\pi(t+t_1)} + LAE(\pi \Delta T t^3 (t+t_1))^{1/2}}$$

Finalmente haciendo la sustitución de  $T = T_E - \Delta T$  en la ecuación anterior la expresión final es la siguiente :

$$\frac{d\Delta T}{dt} = \frac{(-\sqrt{k\rho c_p) \cdot A(T_E - \Delta T - T_0) + LAE (\pi \Delta T^2 t_{(t+t1)})^{1/2}}}{\sqrt{\pi(t+t1)} \cdot (\phi + LAE (\Delta T^2 t_{(t+t1)})^{1/2})}$$

## A N E X O VI

### METODO DE EULER :

El método de Euler tiene una simple interpretación geométrica:

$$f(x_0, y(x_0)) = dy/dx$$

Donde se generarán aproximaciones de  $y$  en varios puntos, llamados puntos de red, en el intervalo  $(a, b)$  distribuidos uniformemente. Esta condición se puede garantizar escogiendo un entero positivo  $N$  y seleccionando los puntos de red  $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_N)$

donde

$$x_i = a + ih \quad \text{para cada } i=0, 1, 2, \dots, N.$$

La distancia común entre los puntos,  $h = (b-a)/N$  se llama tamaño de paso. Donde  $N$  es el número de etapas en que se divide el intervalo total.

Mientras  $N \rightarrow \infty$  la solución es más exacta.

$$y_{i+1} = y_i + (\partial y / \partial x)_i * h = y_i + hf_i$$

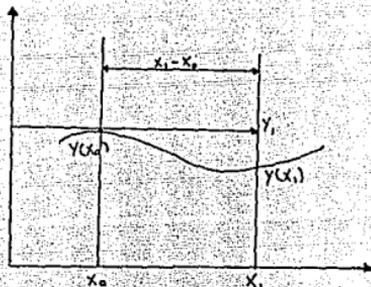
$$x_i = x_0 + ih$$

La solución a través del intervalo  $(x_0, x_1)$  se asume que sigue la línea tangente a  $y(x)$  en  $x_0$ .

$$y(x_1) = y(x_0) + (x_1 - x_0) dy/dx$$

similar a una serie de Taylor truncada en el primer término.

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x/1! df(x)/dx + \dots$$



Cuando el método de Euler es aplicado repetidamente a través de varios intervalos, la solución numérica traza un polígono segmentado con lados de pendiente  $f_i, i = 1, 2, 3, \dots$

## BIBLIOGRAFIA

1. Proceedings of the AFS/CFI conference on Thermal Analysis of Molten Aluminium. December 11-12, 1984, 20-32.
2. Fris Edward, A Computer Aided Simulation of The Kinetics of Solidification of The Eutectic Ductile Cast Iron, The Physical Metallurgy of Cast Iron Ed. North Holland, New York, 1984, 191-199.
3. H. Fredriksson, I.L. Svensson. Computer simulation of the structure formed during solidification of cast iron. The physical metallurgy of cast iron. Ed. North Holland, New York, 1984, 273-283.
4. D. Stefanescu. Solidification of Flake, compacted/vermicular and spheroidal graphite cast irons as revealed by thermal analysis an directional solidification experiments. Idem 3, 151-162.
5. K.C. Su, I. Ohnaka. Computer simulation of nodular cast iron. Idem 3, 181-189.
6. B. Carnahan. Applied numerical methods. 1979, New York, Wiley
7. P. Thevoz, J.L. Desbiolles. Modeling of equiaxed microstructure formation in casting. Metallurgical Transaction A. Vol.20A, 1989, 311-321.
8. R.A. Krivanek, C.E. Mobley. A computer model for the solidification of cast.iron chill test. AFS Transactions, Vol.85, 1984, 311-317.
9. G. Upadhy, D. K. Banerjee. Heat transfer solidification kinetics modeling of structural transitions. AFS Transactions, Vol.90, 1988, 699-706.
10. D.M. Stefanescu, G. Upadhy. Heat transfer-solidification kinetics modeling of solidification of castings. Metallurgical Transactions A. Vol.21A, 1990, 997-1005.
11. Fris Edward Control de Calidad del Hierro Mediante el Termoanálisis, Gestión Tecnológica. Serie Metalurgia. N° 3, mayo 1986, 21-27