9
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"Una propuesta didáctica para el tema de la función cuadrática en el nivel medio superior"

Tesis que para obtener al grado de matemático presenta:

Rosa María Espejel Mendoza

Ciudad Universitaria, D.F.

1993

INDICE

INTRODUCCION

Habiendo estudiado la carrera de matemático, he elegido la opción de dedicarme a la docencia. El campo de la enseñanza es fértil en oportunidades para aplicar los conocimientos adquiridos durante los años de formación en la Facultad de Ciencias y para llevar a cabo actividades que requieren creatividad. Por otra parte, el enfrentarse a los múltiples problemas que implica la labor docente enriquece al educador porque demanda investigación sobre los contenidos de los temas motivo de su enseñanza, y sobre la forma de presentarlos al estudiante para lograr su aprendizaje; le enriquece también como ser humano la interacción con los estudiantes, a quienes tiene la responsabilidad de formar no sólo en el aspecto cognitivo sino también en el afectivo, esto es, en el terreno de los valores.

La institución en la que desempeño mi trabajo es el Colegio de Bachilleres. Allí he detectado entre otros el siguiente problema:
Se carece de textos y otros materiales impresos adecuados a los cursos que en él se imparten, tanto en los contenidos, como en la forma de presentación e interacción con el alumno.
El modelo pedagógico de la Institución exige que los maestros presenten los contenidos de los programas de maneras distintas a las tradicionales, pero los profesores argumentan que, dadas sus condiciones laborales, no tienen tiempo para elaborar materiales, investigar o formular problemas o contextos para impartir los conocimientos.

Mi propuesta es una modesta colaboración a la solución de este problema: he elaborado un fascículo como material de apoyo para el tema La función cuadrática, el cual se ubica en el programa del curso de Matemáticas II del Plan de estudios del Colegio de Bachilleres. Esta propuesta ha tenido su origen en materiales que he empleado en mis cursos y en la observación de las reacciones de los estudiantes ante ellos. Lo anterior me da base para esperar que realmente constituya un apoyo para el aprendizaje del tema.

Como ya he mencionado, mi lugar de trabajo es el Colegio de Bachilleres por lo cual inicio este trabajo con una descripción del modelo educativo de esta Institución, anoto los lineamientos para el área de conocimiento de Matemáticas y proporciono la ubicación del tema al que se aboca mi propuesta en el programa de Matemáticas II. Continúo con la presentación del material que he elaborado, las sugerencias sobre la forma de emplearlo, comentarios sobre la validación de la propuesta y las conclusiones.

1. El MODELO EDUCATIVO DEL COLEGIO DE BACHILLERES

A continuación se resumen las características del modelo educativo del Colegio.

El modelo educativo del Colegio de Bachilleres está constituido por el conjunto de valores, normas, concepciones teóricas y metodológicas que en lo científico, social y pedagógico dan identidad y orientan la práctica educativa de la Institución y determinan tanto su interacción con la sociedad como su estructura organizativa y sus formas de operación.

Los elementos que definen al modelo educativo se encuentra plasmados en los objetivos generales del Colegio, en la estructura académica, el plan y los programas de estudio, en el perfil del egresado que de ellos se desprende y en la concepción pedagógica del Colegio de Bachilleres.

Los objetivos generales del Colegio de Bachilleres

En el Decreto de Creación y Estatuto General del Colegio de Bachilleres están contenidos los objetivos generales de la Institución los cuales se enlistan a continuación:

I. Desarrollar la capacidad intelectual del alumno, mediante la obtención y aplicación de conocimientos.

II. Conceder la misma importancia a la enseñanza que al aprendizaje.

III. Crear en el alumno una conciencia crítica que le permita adoptar una actitud responsable ante la sociedad.

IV. Proporcionar al alumno capacitación y adiestramiento en una técnica o especialidad determinada.

El Colegio se mantiene en un proceso de constante revisión. La interpretación que actualmente se da a los objetivos anotados es la siguiente:

-Por desarrollo de la capacidad intelectual del alumno se entiende el desarrollo, ejercicio y aplicación de las habilidades lógicas y metodológicas que permitan al alumno la búsqueda de información , la apropiación constructiva de los contenidos básicos de diversas disciplinas, la integración de éstos y su aplicación al análisis, la comprensión y la búsqueda de soluciones a los problemas sociales, de manera que pueda acceder a niveles superiores de conocimiento y se convierta en un factor de transformación de su medio natural y social.

-Conceder la misma importancia a la enseñanza que al aprendizaje significa que la responsabilidad de los resultados del proceso de enseñanza-aprendizaje sea compartida por maestros y alumnos lo que implica una relación de cooperación y comunicación en donde el profesor orienta y promueve la actividad del alumno.

-La creación de una conciencia crítica requiere que el proceso de enseñanza -aprendizaje ocurra en un ambiente de libertad y respeto mutuo en donde se dé la reflexión sobre los diversos campos del conocimiento y la comprensión de la realidad como una entidad determinada por multitud de factores.

-La formación que el Colegio proporcione al estudiante debe lograr que comprenda la importancia del trabajo, la responsabilidad que éste implica y las condiciones en que se desarrolla. También debe dotarlo de elementos que le permitan desempeñarse en un trabajo específico.

La Estructura Académica del Colegio de Bachilleres y el Plan de Estudios.

Para cumplir con los objetivos que se ha propuesto, el Colegio posee una estructura académica constituida por tres áreas: Area de Formación Propedeútica, Area de Capacitación para el Trabajo y Area Paraescolar.

De la estructura académica se deriva el Plan de Estudios, el cual está integrado por el Area de Formación Propedeútica y el Area de Capacitación para el Trabajo.

Area Propedeútica

El área propedeútica está organizada en cinco áreas de conocimiento: Matemáticas, Ciencias Naturales, Ciencias Histórico-sociales, Metodología-filosofía y Lenguaje-comunicación.

A su vez, el área propedeútica consta de dos núcleos: el núcleo básico u obligatorio y el núcleo complementario u optativo.

Area de Capacitación para el Trabajo

El Colegio ofrece al estudiante las siguientes capacitaciones, de las cuales debe elegir una a partir del tercer semestre: Administración de Recursos Humanos, Empresas Turísticas, Laboratorista Químico, Dibujo Industrial, Organización y Métodos, Dibujo Arquitectónico y de

Construcción, Biblioteconomía, Contabilidad, Higiene y Seguridad en el Trabajo, Sociedades Cooperativas e Informática.

Perfil del egresado del Colegio de Bachilleres

El tipo de hombre que se quiere formar considerando los objetivos del Colegio y los campos en los que se desenvolverá el egresado: los estudios superiores, el ambiente laboral y la vida cotidiana, determina el contenido del perfil terminal del estudiante.
A continuación se mencionan los aspectos del perfil que tienen relación con el aprendizaje de las matemáticas:

Para integrarse a la educación superior el egresado debe:
-Contar con los contenidos temáticos que son antecedentes para la formación universitaria.
-Poseer las habilidades propias del razonamiento lógico.
-Manejar la metodología científica y los lenguajes español y matemático.
-Conjugar sus habilidades lógicas y metodológicas tanto en la investigación como en la organización y aplicación de conceptos y reglas aprendidos previamente, en la solución de problemas y en la construcción de aprendizajes más complejos.
-Contar con las capacidades de abstracción y simbolización necesarias para la formalización de problemas de la realidad y para el desarrollo del razonamiento.

-Tener una actitud de investigación que lo impulse a la búsqueda constante de información y a la crítica de los contenidos propios del medio con el cual interactúa.

-Poseer una actitud de compromiso y participación en la solución de algunas de las necesidades de la sociedad.

Para integrarse al mundo del trabajo el egresado debe:

-Contar con iniciativa y creatividad para aplicar sus conocimientos y habilidades en la realización de un trabajo y en la solución de problemas inherentes al mismo.

-Aplicar los conocimientos, métodos, técnicas y procedimientos aprendidos, tanto en el área propedeútica como en la de capacitación para el trabajo, en el ámbito laboral.

Para enriquecer su inserción en la vida cotidiana el egresado debe:

-Analizar, valorar, discriminar y reelaborar la diversidad de mensajes informativos que le presenta su medio, de manera que pueda asumir una postura propia en el intercambio de información.

-Aplicar los conocimientos adquiridos en la comprensión y solución de situaciones de su vida cotidiana, en la interacción con su medio social y en la conservación y utilización racional de su medio natural.

La Concepción Pedagógica del Colegio de Bachilleres

La concepción pedagógica del Colegio se resume en las lineas que rigen la práctica educativa de la Institución.

Lineas para la práctica educativa

Del perfil de salida del estudiante del Colegio se derivan cinco líneas que orientan la práctica educativa y definen los aspectos que deben ser considerados en los programas de todas las asignaturas según las características propias de cada una de ellas.

a) Planteamiento de problemas o explicación de fenómenos.

Bajo la hipótesis de que las habilidades intelectuales se desarrollan de mejor manera en el proceso de plantear y resolver problemas y de que durante este proceso se ejercita la metodología científica y se presenta la oportunidad de reconstruir el conocimiento al interactuar con situaciones u objetos problemáticos, se recomienda que como introducción, durante el desarrollo de un tema o al cierre del mismo se planteen problemas. El planteamiento de los problemas debe hacerse considerando la realidad del estudiante (sus conocimientos previos, referentes personales, familiares y sociales, sus expectativas, inquietudes, intereses y necesidades) y los problemas de los cuales se ocupan las ciencias y las humanidades, pero que están próximos a la realidad del educando.

b) Ejercitación de los métodos.

La concepción de los métodos como medios para la producción del conocimiento, cuyo uso adecuado implica la observación, la aplicación de conceptos y reglas, de formas de organizar el pensamiento, de actitudes de crítica, de disposición para el trabajo en equipo y

hábitos de disciplina, confiere a su ejercicio un papel de gran importancia en la formación del estudiante.
El profesor deberá promover el ejercicio de los métodos como organizadores del pensamiento que se traduce en acciones concretas.

c) Apropiación constructiva y producción de conocimientos.
En la medida en que el estudiante aborde problemas,ensaye tentativas de solución, experimente, investigue, obtenga conclusiones y formule conceptos estará construyendo los conocimientos que se integrarán a su bagaje conceptual y a sus estrategias de pensamiento.
El papel del profesor será ayudar a que la relación entre el estudiante y el objeto de estudio sea constructiva, si bien ciertos aspectos deben ser dados o expuestos, sus características y su comportamiento deben ser analizados por el estudiante. El docente orientará el proceso mediante el cual el estudiante relacione datos empíricos con representaciones conceptuales e identifique teorías explicativas o demostrativas.

d) Relaciones de utilidad y aplicaciones actuales.
Es necesario que el educando integre el conocimiento construido, lo relacione con temas previamente aprendidos o que aprenderá y conozca sus aplicaciones, utilidad, relaciones y efectos como base para aprendizajes más complejos, como ejercicio de habilidades lógicas o metodológicas y para la explicación de fenómenos del medio o la solución de problemas.

El papel del profesor en este aspecto será hacer referencia a esas aplicaciones, relaciones y utilidad constantemente y fomentar actividades que pongan al alumno en contacto con ellas.

e) Consolidación, integración y retroalimentación.

La afirmación de los conocimientos construidos mediante su aplicación y ejercitación en situaciones o contenidos nuevos, es lo que se entiende por consolidación. Al aplicar y ejercitar los conocimientos, el estudiante los integrará a su estructura cognitiva y los relacionará con otras disciplinas. La retroalimentación superará las deficiencias y reafirmará los conocimientos.

2. LINEAMIENTOS PARA EL AREA DE CONOCIMIENTO DE MATEMATICAS DEL COLEGIO DE BACHILLERES

Según el modelo educativo del Colegio de Bachilleres, la finalidad del área de Matemáticas es:

" Que el estudiante adquiera los elementos que conforman la cultura básica de las matemáticas: aritmética, álgebra, geometría euclideana, trigonometría, geometría analítica, cálculo diferencial e integral y estadística descriptiva e inferencial, de manera que desarrolle las capacidades y habilidades propias del razonamiento lógico y del pensamiento inductivo- deductivo, indispensable en la comprensión y aplicación de los diferentes métodos y conceptos matemáticos; asi como el dominio del lenguaje de las matemáticas y la construcción de modelos que esta disciplina desarrolla conjuntamente con sus diversos procedimientos de elaboración."

El núcleo básico u obligatorio del área de matemáticas está constituido por la materia Matemáticas organizada para su estudio en las asignaturas siguientes:

- Matemáticas I, cuyos contenidos incluyen temas de aritmética y álgebra elemental.
- Matemáticas II, en donde se estudian las funciones.
- Matemáticas III, que incluye temas de geometría y trigonometría.
- Matemáticas IV, en donde se aborda el estudio de la geometría analítica.

El núcleo optativo está integrado por las materias Cálculo Diferencial e Integral y Estadística Descriptiva e Inferencial.

El Programa de Matemáticas II

La asignatura Matemáticas II se imparte en el segundo semestre del Plan de Estudios. La intención de la asignatura es :
"A partir del estudio del álgebra de funciones como la lineal y las polinomiales, entre otras, y su relación con la ecuación cuadrática, se continuará desarrollando en el estudiante las habilidades de análisis y de sistematización tanto a nivel conceptual como operativo, enfocadas a establecer las relaciones existentes entre los conceptos algebraicos y de éstos con fenómenos y problemas de la realidad, destacando la importancia de la abstracción y de la generalización que se da en este proceso; para ello se recurrirá al estudio de situaciones problemáticas, a la experiencia previa del estudiante y a la geometría como elementos de apoyo; lo anterior para que el estudiante continúe desarrollando el lenguaje matemático y pueda usarlo en la interpretación y explicación de la realidad, para que comprenda la utilidad de las funciones en el estudio de diversos problemas y avanzar en la formalización de los procedimientos de estructuración del conocimiento matemático."

El programa de la asignatura Matemáticas II está formado por las unidades que se enlistan a continuación:

1. Función lineal y ecuación de primer grado con dos incógnitas.
2. Funciones polinomiales y su representación gráfica.

3. Análisis de funciones: ejemplos interesantes.

El tema del que se ocupa esta propuesta está ubicado en la segunda unidad. Esta unidad incluye el tema 2.1 : "Función polinomial cuadrática, su relación con la ecuación cuadrática", con los siguientes subtemas:

2.1.1 Problemas que conduzcan a una función polinomial cuadrática.

2.1.2 Problemas que conduzcan a una ecuación cuadrática y su relación con la función polinomial cuadrática.

2.1.3 Solución de una ecuación cuadrática: métodos algebraicos y gráficos.

3. UNA PROPUESTA DIDACTICA PARA EL TEMA DE LA FUNCION CUADRATICA

El material que propongo es un fascículo destinado a los estudiantes de bachillerato; en particular está pensado para los estudiantes de segundo semestre del Colegio de Bachilleres.

Enseguida ubico la actividad que he realizado dentro del sistema de enseñanza.

La organización de un sistema de enseñanza comprende los siguientes niveles (D'Hainaut, 1985):

a) Búsqueda de los fines y de los objetivos.

b) Búsqueda de los métodos y de los medios.

c) Evaluación.

Mi propuesta se inserta en la fase de búsqueda de los métodos y los medios.

En la organización de un sistema de enseñanza, una vez que se han determinado los objetivos y se han analizado los recursos de que se dispone y las limitaciones impuestas, se está en condiciones de determinar los métodos y los medios adecuados para alcanzar los resultados que se esperan. Para alcanzar los objetivos el estudiante debe ser inmerso en unas situaciones y un ambiente que favorezcan la adquisición de los aprendizajes propuestos, a través de diversas actividades. El análisis del paso de los objetivos a las situaciones de aprendizaje determina la concepción de una posible secuencia de aprendizaje cuya pertinencia se juzgará mediante la experimentación.

La elaboración de los medios se compone de cuatro aspectos:

-Concepción.

-Realización.

-Experimentación.

-Ajuste.

El material didáctico que propongo ha pasado por las fases de concepción y realización. Actualmente está en la de experimentación para su posterior reajuste. Para su elaboración se han considerado las etapas por las que teóricamente pasa un estudiante en su aprendizaje: inducción, estructuración, consolidación y retroalimentación.

En la etapa de inducción el alumno se pone en contacto con lo que aprenderá con la finalidad de motivarlo para iniciar un nuevo aprendizaje. Aquí conviene plantearle una situación-problema que promueva su actividad para buscar la solución.

En la etapa de estructuración se presenta al estudiante el desarrollo de los contenidos del programa de estudio de manera que revise y organice los conocimientos de que dispone y construya los nuevos conocimientos que necesita para resolver el problema.

La fase de consolidación se lleva a cabo mediante actividades que conduzcan al alumno a integrar, relacionar y generalizar los contenidos de la fase de estructuración.

La retroalimentación tiene como objetivo la confirmación de los contenidos. Aquí el estudiante sintetiza el camino recorrido durante su aprendizaje.

En las páginas siguientes se presenta el material que constituye la propuesta. Se compone de tres capítulos:

1. Problemas que conducen a una función polinomial cuadrática.
2. Problemas que conducen a una ecuación cuadrática y su relación con la función polinomial cuadrática
3. Resolución de ecuaciones cuadráticas.

En el fascículo se aborda el tema de la función cuadrática desde diversos puntos de vista. A partir de una situación problemática y en la búsqueda de la solución se construyen elementos de la teoría , se regresa entonces al problema para resolverlo e interpretar la solución.

Durante el desarrollo del tema se plantean cuestiones que el estudiante debe resolver antes de seguir adelante , con la intención de que reflexione, investigue y participe en la construcción del conocimiento. La solución se presenta en seguida con el objeto de que sepa si ha procedido correctamente o debe corregir su error. El estudiante no es entonces pasivo sino que interactúa con el texto.

Rosa María Espejel Mendoza

LA FUNCION CUADRATICA

México, 1993

INDICE

PROPOSITO

Al terminar el estudio de este fascículo se espera que cuando te enfrentes a una situación problemática que conduzca a una función polinomial cuadrática tengas la capacidad de analizarla, identificar las variables que intervienen en ella, elaborar el modelo matemático que exprese las relaciones entre esas variables, seleccionar entre los diversos métodos de solución que se proponen (tabulación, graficación, ensayo y error, métodos algebraicos y combinaciones de álgebra y geometría), el más adecuado para el caso y que una vez resuelto el problema matemático regreses a la situación del problema a interpretar los resultados para emplearlos en la toma de decisiones.

Con este propósito en el desarrollo del fascículo se parte de varias situaciones que podrían presentarse en la realidad y paulatinamente se va internando en el terreno de la matemática.

Siguiendo este proceso incrementarás tus capacidades de análisis, de abstracción y de razonamiento lógico, entre otras, integrarás los nuevos conocimientos a los que previamente poseías para mejorar tu desempeño en materias que incluyen aplicaciones matemáticas, tendrás bases más firmes para estudios posteriores y te encontrarás mejor armado para enfrentarte a los problemas cotidianos.

INTRODUCCION

El tema que se desarrolla en este fascículo, La Funcion Polinomial Cuadrática y su Representación Gráfica, tiene gran importancia en las matemáticas. Estas funciones son modelos que describen las relaciones entre dos variables que intervienen en diversos fenómenos que al ser humano le interesa comprender por diversas razones, por ejemplo, para aplicar sus descubrimientos al mejoramiento de la calidad de su vida, creando tecnología que le libere de pesadas tareas, que facilite su comunicación con sus semejantes, que le permita viajar con más rapidez, que le ayude a acceder a nuevas y más eficientes formas de producir y aprovechar la energía que requiere para llevar a cabo sus actividades industriales u hogareñas, etc.
En el intento por desentrañar los misterios del Universo, incluso en sus pretensiones de comunicarse con seres de otros mundos, si es que éstos existen, los científicos emplean algunos sencillos conocimientos sobre las funciones cuadráticas y su representación gráfica: la parábola, curva cuyas propiedades se aprovechan para múltiples aplicaciones, una de las cuales observas diariamente en tu ciudad (las antenas parábolicas).
Apropiándote de los conocimientos que en este texto se presentan tú también tendrás más posibilidades de comprender las relaciones funcionales entre las variables que intervienen en diversos fenómenos y podrás aplicar los métodos que en él se proponen para dar solución a problemas en los que intervienen las funciones polinomiales cuadráticas.

CUESTIONAMIENTO GUIA

En los diversos campos de la actividad humana como el comercio, la industria, las ciencias naturales y sociales, la tecnología, etc.,se presentan problemas tales como incrementar los ingresos en un negocio, acertar en el blanco al lanzar proyectiles, calcular la distancia que recorre un cuerpo que se desplaza con movimiento uniformemente acelerado y concentrar la luz del Sol para aprovechar su energía. Para resolver estos problemas, entre muchos otros, tenemos que analizar sus características en un lenguaje de nociones y ecuaciones matemáticas, es decir, construir el modelo matemático correspondiente para estudiarlos como problemas matemáticos.

Ejemplo: EL GIMNASIO ZEUS

En el Gimnasio Zeus hay 150 socios que pagan una cuota mensual de 60 nuevos pesos. El dueño del gimnasio quiere incrementar sus ingresos, por tal motivo ordenó un estudio de mercadotecnia el cual recomienda reducir la cuota, ya que por cada peso que ésta disminuya, se inscribirán cinco nuevos socios.
¿Cuántos pesos debe reducirse la tarifa para obtener la máxima ganancia mensual?

Se inicia la búsqueda de la solución del problema analizando, por medio de una tabla, la variación que sufre el ingreso al variar la reducción en la cuota.

Según el estudio de mercadotecnia realizado, a medida que la cuota se reduzca se inscribirán más socios, sin embargo, ¿bajo qué condiciones un mayor número de socios, pagando una cuota menor, reportará más ganancias?

En la tabla siguiente se han calculado los ingresos correspondientes a varias reducciones en la cuota, en ella x representa el número de pesos que la cuota disminuye.

x	Núm. de socios	Cuota (n$)	Ingreso (n$)
1	155	59	9145
20	250	40	10000
40	350	20	7000

Tabla 1

Observa la tabla.
¿Siempre que se reduce la cuota, aumenta el ingreso?
¿Para qué valor de la reducción se hace máximo el ingreso?

Otra alternativa para buscar la solución consiste en elaborar un modelo algebraico que describa las relaciones entre las reducciones a la cuota y el ingreso, y después aplicar a este modelo los métodos propios de las matemáticas.
Representemos por x al número de pesos que disminuye la cuota y por y al ingreso.
El número de socios cuando la cuota se reduce x pesos es

$$150 + 5x$$

$$60 - x \text{ pesos}$$

El ingreso se obtiene multiplicando el número de socios por la cuota, por lo tanto

$$y = (150 + 5x)(60 - x)$$

Efectuando el producto se obtiene:

$$y = -5x^2 + 150x + 9000$$

La igualdad anterior es un modelo algebraico que representa matemáticamente la relación entre todos los posibles descuentos a la cuota y el ingreso total correspondiente. Esto ya es una gran ventaja, pero exploraremos otras alternativas.

Se dice que este modelo es cuadrático porque contiene el término x^2.

Operando sobre el modelo se puede encontrar la solución al problema matemático para, finalmente, transferir los resultados a la "situación real".

En el desarrollo de este fascículo se emplearán diferentes recursos para resolver problemas en los que, como en el anterior, intervienen modelos cuadráticos.

1. Problemas que conducen a Funciones Polinomiales Cuadráticas

En esta sección se examinarán varios problemas en los cuales intervienen dos cantidades relacionadas por medio de funciones cuadráticas y se ensayarán diversos métodos para resolverlos.

1.1 Modelo Polinomial Cuadrático

Ejemplo 1: EL TERRENO PARA UN GALLINERO

En el jardín de una residencia se quiere destinar una zona rectangular para hacer un gallinero. Se dispone de 17 metros lineales de malla de alambre para cercar la zona. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del rectángulo si se desea abarcar la mayor área posible?

Analicemos las relaciones entre el área y las dimensiones del rectángulo.

a) Construcción del modelo algebraico.

¿Recuerdas cómo se obtiene el área de un rectángulo?

El área de un rectángulo cualquiera se obtiene multiplicando la longitud de su base por la longitud de la altura correspondiente. Representemos por y el área y por x la longitud de la base del rectángulo.

■ *Si el perímetro del rectángulo es igual a 17 metros, ¿cuánto suman las longitudes de la base y de la altura?*

La suma de las longitudes de la base y de la altura del rectángulo es igual a 8.5 m (la mitad del perímetro), abreviadamente:

base + altura = 8.5 , x + altura = 8.5

De este modo una expresión para la altura es:

$$8.5 - x$$

Así tenemos que el área del rectángulo es:

$$y = x\,(8.5 - x)$$

o bien

$$y = -x^2 + 8.5x$$

Modelo algebraico

La igualdad $y = -x^2 + 8.5x$ es un modelo algebraico para el área del rectángulo que estamos considerando. Representa, en el lenguaje del álgebra, la relación entre todas las posibles medidas de la base y el área correspondiente.

Modelo polinomial

El modelo obtenido es un modelo polinomial porque el segundo miembro de la igualdad $y = -x^2 + 8.5x$ es un polinomio en x.

Modelo cuadrático

El modelo $y = -x^2 + 8.5x$ es un modelo polinomial cuadrático o de segundo grado porque el grado del polinomio $-x^2 + 8.5x$ es 2 , esto es, el máximo exponente con el que aparece la variable x es 2, en el término x^2 .

En este modelo intervienen dos variables: **x** y **y** .

El valor de y depende del valor de x , por tal razón, decimos que y es la variable dependiente y x la variable independiente*.

Lo anterior significa que el área del terreno de nuestro problema depende de la longitud de su base.

Por ejemplo, si la longitud de la base del terreno fuera de 6m, el área sería:

$$y = -6^2 + 8.5(6)$$

$$y = -36 + 51$$

$$y = 15 \text{ metros cuadrados}$$

Calcula el valor del área para una base que mida 3 m.

Una vez establecido el modelo algebraico emplearemos diversos métodos para buscar la solución del problema.

1.2 Métodos de Solución

a) Método por tabulación

Investiguemos por medio de una tabla cómo afectan las variaciones de la longitud de la base al área del rectángulo.

Para elaborar la tabla es necesario determinar los valores que puede tomar x.

---

* *La estructura del problema determina cual es la variable independiente y cual es la variable dependiente.*

- *¿Cuál sería el área del terreno para $x = 0$ metros?*
  ¿Puede ser $x = 2.5$ metros, $x = 4.75$ metros, $x = 8.16$ metros?
  Si la base midiera 8.5 m, ¿cuál sería el área?

Habrás llegado a la conclusión de que el conjunto de todos los posibles valores para x está formado por todos los números reales mayores o iguales que cero y menores o iguales que 8.5, ya que la altura siempre debe ser mayor o igual a cero.

El conjunto anterior se denota

$$\{ x \in R \ / \ 0 \leq x \leq 8.5 \}.$$

Puede usarse también la notación de intervalos:

$$[0,8.5]$$

la cual representa a todos los números reales que hay entre cero y 8.5 e incluye a 0 y 8.5.

Su representación gráfica es la siguiente:

Intervalo [0,8.5]

____________________[____________________________________]________________

0 8.5

Figura 1

- *Haz una lista de 30 números reales entre cero y 8.5.*
  ¿Cuántos números reales x, tales que $0 < x < 8.5$, existen?

Una vez que se ha determinado el conjunto de valores admisibles para la variable independiente, se procederá a elaborar la tabla asignando a x algunos de los valores permitidos. Los correspondientes valores de y se obtienen sustituyendo los de x en la igualdad

$y = -x^2 + 8.5x$.

x (base en metros)	y (área en m^2)
0	0
1	7.5
2	13
3	--
4	18
4.5	18
5	17.5
6	--
7	10.5
8	4
8.5	0

Tabla 2

Anota los números que faltan en la tabla.

Observa la tabla.

¿Cómo varía el área del rectángulo al variar la longitud de su base?

En la tabla 2 se aprecia que desde $x = 0$ metros hasta $x = 4$ metros el área aumenta y para $x > 4.5$ el área disminuye.

¿Cuál es el mayor valor para el área que se encuentra en la tabla?
¿Es el mayor valor posible?
¿Crees que para todos los valores de x comprendidos entre 4 y 4.5, esto es, para toda x tal que $4 < x < 4.5$, el área se mantenga igual a $18m^2$?

La información que la tabla nos proporciona es muy limitada; ella sugiere que la medida x de la base para la cual se obtiene el valor máximo del área se encuentra entre 4 y 4.5 metros, es decir, $4 < x < 4.5$.

b) Método gráfico

Construyendo una gráfica podrán apreciarse con más claridad las relaciones entre la base y el área del rectángulo.

Para elaborar la gráfica localizamos en el plano cartesiano los puntos correspondientes a los pares de números que se encuentran en la tabla 2.

Sobre el eje horizontal se ubican los valores de la variable independiente x (longitud de la base), y sobre el eje vertical los de la variable dependiente y (área).

Podemos obtener más puntos considerando otros valores de x entre 0 y 8.5, más aun, el conjunto de los números reales mayores que 0 y menores que 8.5 es infinito , así que en realidad la gráfica consta de un número infinito de puntos; si se dibujaran todos se obtendría una linea sin interrupciones. Por eso, una vez ubicados los puntos, los unimos por medio de una linea continua (Fig. 2).

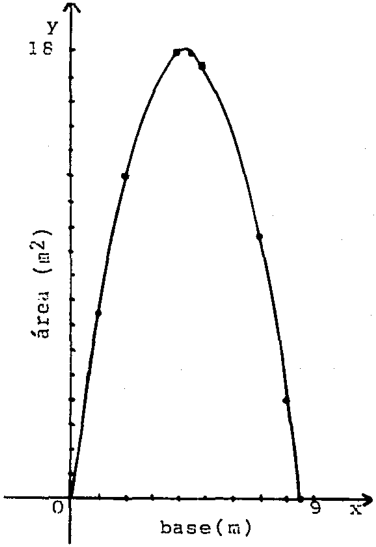

Figura 2

$$y = -x^2 + 8.5x$$

La gráfica que hemos obtenido es una porción de una curva llamada parábola.

El punto más alto de esta parábola se llama vértice

Observa la gráfica.

¿Para cuáles valores de x el área del rectángulo va aumentando?

¿En cuál intervalo de valores de x el área va disminuyendo?

¿Qué relación hay entre el vértice de la parábola y el valor máximo del área?

De la gráfica se infiere que:

a) El área crece para valores de x desde 0 hasta un número entre 4 y 4.5 a partir del cual disminuye.

b) La ordenada (y) del vértice es el valor máximo del área y su abscisa (x), es la longitud de la base que hace máxima el área del rectángulo.

Por lo tanto, encontrando las coordenadas del vértice tendremos la solución a nuestro problema.

¿Cómo pueden determinarse las coordenadas del vértice?

Sabemos por la gráfica que la abscisa,x , del vértice está entre 4 y 4.5, y que su ordenada, y , es un poco mayor que 18.

La gráfica nos proporciona únicamente una solución aproximada.

Ensayemos otro método.

c) Método de aproximaciones sucesivas

Calculando y para valores de x entre 4 y 4.5 podremos aproximarnos más a las coordenadas del vértice.

Utilidad de la calculadora.

El empleo de una calculadora puede ayudar a agilizar los cálculos, pero debe seguirse la secuencia de las operaciones en el orden correcto desde el punto de vista matemático, además de usar eficientemente las funciones del artefacto tales como: memoria, paréntesis, potencias, etc.

Ensayemos algunos valores de x tales que $4 < x < 4.5$.

Por ejemplo:

Si $x = 4.1$, $y = -4.1^2 + 8.5(4.1) = 18.04$.

Para este valor de x el área es mayor que 18, el mayor valor del área que aparece en la tabla 2, pero, ¿ es el valor máximo de y?

Prueba para $x = 4.4$, obtendrás que $y = 18.04$.

Entonces debe ser $4.1 < x < 4.4$

Calculando y para $x = 4.2$ se obtiene $y = 18.06$.

Para este valor de x el área es mayor aún.

Probemos para $4.2 < x < 4.4$.

Por ejemplo: si $x = 4.3$, entonces $y = 18.06$.

En este caso obtenemos la misma área que cuando $x = 4.2$, luego,

$4.2 < x < 4.3$

En la tabla siguiente se resumen los resultados :

x	y
4.1	18.04
4.2	18.06
4.3	18.06
4.4	18.04

Tabla 3

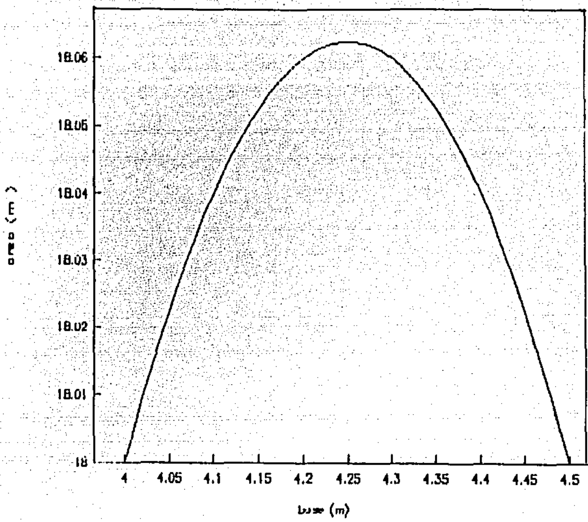

Figura 3

Comprueba los resultados anteriores. Puedes usar calculadora. Si tus resultados no coinciden con los que están anotados en el texto, revisa la secuencia de tus operaciones; es importante que aprendas a usar correctamente el valioso auxiliar que este instrumento representa.

La figura 3 muestra una ampliación de la zona de la gráfica de $y = -x^2 + 8.5\,x$ para $4 \leq x \leq 4.5$

Examinando la tabla 3 y la figura 3 se concluye que el valor de x para el cual es máxima el área (y), está entre 4.2 y 4.3.

Por este método, mediante ensayos y errores, es posible acercarse a las coordenadas del vértice tanto como se desee.

■ *Ensaya con otros valores de x entre 4.2 y 4.3.*

Analizando las aproximaciones sucesivas que se han obtenido, ¿tienes alguna conjetura acerca de cuál es el valor de x que maximiza el área?

d) Combinación de álgebra y geometría.

Los métodos que hasta ahora hemos usado nos han permitido hallar soluciones aproximadas para nuestro problema, pero si nos interesa encontrar la solución exacta necesitamos emplear otros recursos. La combinación de álgebra y geometría lograda con la introducción del sistema de coordenadas cartesianas constituye una herramienta muy valiosa para la resolución de una gran variedad de problemas.

A continuación se estudiarán de manera informal algunas propiedades de la parábola y su relación con los modelos polinomiales cuadráticos

Algunas propiedades de la parábola

Anteriormente se determinó que las coordenadas (x,y) del vértice de la parábola que se obtiene al graficar la relación $y = -x^2+8.5x$ proporcionan el valor de x que hace máxima el área del rectángulo correspondiente al problema del terreno, y el valor máximo, y, de ésta; ciertas propiedades de esta curva constituyen la clave para encontrarlas.

■ *Realiza la siguientes actividades:*

•*En papel cebolla copia la gráfica de $y = -x^2 + 8.5x$ (Figura 3).*

·*Dóblala a lo largo tratando de hacer coincidir las dos mitades de la parábola.*

·*Marca el doblez.*

·*Sobre el doblez traza una recta.*

La recta que has trazado sobre el doblez divide a la figura en dos partes tales que una es la imagen de espejo de la otra, por lo que se dice que la parábola tiene simetría reflexiva o axial (con respecto a un eje).

La recta determinada por el doblez es el eje de simetría de la parábola.

En la parábola que nos ocupa el eje de simetría es vertical, esto es, paralelo al eje "Y".

¿Qué puntos de la parábola coinciden al doblarla por su eje de simetría?

En tu respuesta estarán entre otros:

(0,0) y (8.5,0)

(4,18) y (4.5,18)

Se dice que estos son puntos simétricos de la parábola.

Compara las ordenadas de los pares de puntos simétricos de la parábola. ¿Cómo son éstas?

Habrás advertido que dos puntos simétricos de una parábola con eje de simetría paralelo al eje "Y" tienen la misma ordenada.

Por otra parte, examinando la copia de la gráfica en el papel cebolla y doblándola por el eje de simetría, se advierte que:

1) El eje de simetría pasa por el punto medio de cada uno de los segmentos que unen dos puntos simétricos.

2) El vértice de la parábola está sobre el eje de simetría.

De las aseveraciones 1 y 2 , y del hecho de que el eje de simetría de la parábola que estamos estudiando es paralelo al eje "Y" , deducimos que:

La abscisa del vértice de una parábola con eje de simetría vertical es igual a la abscisa del punto medio del segmento que une a un par cualquiera de puntos simétricos.

¿Adviertes la importancia del último enunciado?

En el se encuentra la clave para obtener la base del rectángulo de área máxima, la cual es precisamente la solución del problema en estudio.

Tomemos dos puntos simétricos de la parábola, por ejemplo:

$$P(4,18) \quad y \quad P'(4.5,18)$$

El valor de la abscisa, x , del punto medio del segmento $\overline{PP'}$ es el promedio de las abscisas de sus extremos.

Entonces:

$$x = \frac{4 + 4.5}{2} = 4.25$$

¿Qué relación tiene este resultado con el vértice de la parábola relativa al problema que se intenta resolver ?
¿Cuál es entonces la solución del problema?

¡ EUREKA !*

La abscisa del vértice es $x = 4.25$ y 4.25 metros es exactamente la medida de la base que se requiere para obtener el área máxima del rectángulo que constituye el terreno para el gallinero.

Calcula la altura del rectángulo con una base de 4.25 m.
¿Qué clase de rectángulo es éste?
El área máxima del terreno se obtiene sustituyendo a x por 4.25 en $y = -x^2 + 8.5x$.
Calcula el área máxima del terreno del problema 2.
¿Qué relación hay entre el área máxima y las coordenadas del vértice?

1.3 Los Modelos como Dispositivos de Predicción.

Los modelos matemáticos nos permiten hacer predicciones, imitando los efectos de las variaciones de una cantidad sobre otras relacionadas con ella.
En el ejemplo siguiente analizaremos las relaciones entre el tiempo y la distancia recorrida por un cuerpo con el fin de predecir su comportamiento en una situación determinada.

** Se cuenta que el científico griego Arquímedes (287-212 a.C.), descubrió una ley fundamental de la hidrostática mientras se bañaba. La alegría que este hecho le causó lo impulsó a salir corriendo desnudo a la calle exclamando: "¡Eureka!" "¡Eureka!" , lo que significa: "¡lo he hallado!" "¡lo he hallado!".*

Ejemplo 2: UN AVION EN LA PISTA DE DESPEGUE

Un avión que parte del reposo, avanza sobre la pista de despegue de un aeropuerto con una trayectoria rectilínea. Durante los primeros 12 segundos, a intervalos de dos segundos, se registra la distancia recorrida obteniéndose la siguiente
tabla:

tiempo (segundos)	desplazamiento (metros)
0	0
2	15
4	60
6	135
8	240
10	375
12	540

Tabla 3

La pista es tal que permite un recorrido máximo de 1500 metros antes del despegue.
¿En qué tiempo llegará el avión al límite de la pista si continúa desplazándose con el mismo patrón que siguió los primeros 12 segundos?

a) Modelos a partir de datos experimentales.
A partir de los datos experimentales trataremos de encontrar un modelo que describa la relación entre el tiempo y el desplazamiento (distancia medida en una dirección determinada) del avión.
En este problema intervienen dos variables: el tiempo (t) y el desplazamiento (s).
¿Cuál de las variables consideras que es la independiente y cuál la dependiente?

Ya que el desplazamiento de un cuerpo depende del tiempo que dura el movimiento, la variable dependiente es s y la independiente es t.

Gráfica de la relación.

Traza en el plano cartesiano los puntos correspondientes a los datos de la tabla 3 (emplea una hoja de papel milimétrico para conseguir más exactitud).

¿Deben unirse los puntos dibujados? ¿Por qué?

¿Qué tipo de figura se ha obtenido?

En la figura 4, correspondiente a la gráfica de la relación entre el tiempo recorrido y el desplazamiento, se unen los puntos ya que no se pasa bruscamente de, por ejemplo, 2 a 4 segundos, sino que el tiempo va tomando todos los valores intermedios entre 2 y 4 segundos.

La figura que se obtiene es la "mitad" de una parábola.

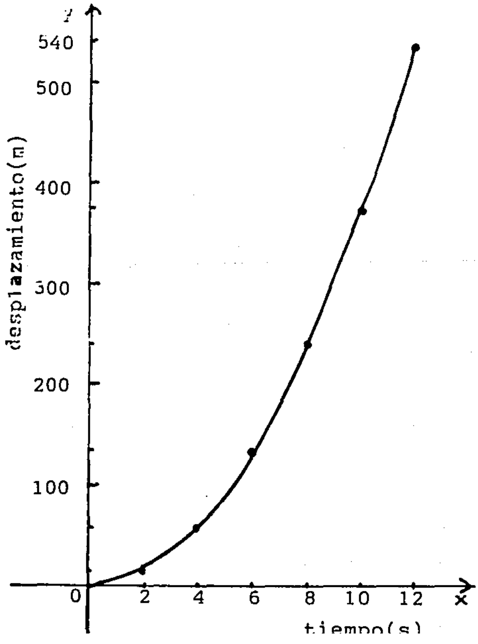

Figura 4

$y = 3.75x^2$

Analicemos la tabla 3 tratando de descubrir un patrón para el comportamiento del desplazamiento al variar el tiempo.

¿Qué aprecias a primera vista en la tabla 3?

En la tabla se observa que al aumentar el tiempo aumenta la distancia recorrida por el avión.

En este caso, ¿el desplazamiento es directamente proporcional al tiempo?

Dividendo algunos valores del desplazamiento entre el tiempo correspondiente (distinto de cero) se encontrará la respuesta a la última pregunta.

$$\frac{15}{2} = 7.5 \qquad \frac{60}{4} = 15 \qquad \frac{135}{6} = 22.5 \qquad \frac{240}{8} = 30$$

Las razones de diferentes valores del desplazamiento a los tiempos correspondientes no son iguales, luego, la distancia no es directamente proporcional al tiempo. Esto significa que el movimiento del avión no es uniforme, es decir que no viaja con una velocidad constante. Sin embargo, existe cierta regularidad en el comportamiento de las razones que se calcularon.

¿Encuentras algún patrón que te permita determinar cuál será el cociente del siguiente par de números de la tabla 3?

Observa que :

$$\frac{15}{2} = 7.5 = (1)7.5 = \frac{1}{2}(2)(7.5); \qquad \frac{60}{4} = 15 = (2)7.5 = \frac{1}{2}(4)(7.5)$$

$$\frac{135}{6} = 22.5 = (3)7.5 = \frac{1}{2}(6)(7.5); \qquad \frac{240}{8} = 30 = (4)7.5 = \frac{1}{2}(8)(7.5)$$

Esto es, $$\frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo}} = \frac{1}{2}(t)(7.5)$$

O bien:

$$\frac{s}{t} = \frac{1}{2}(7.5)t$$

Despejando de la igualdad anterior a s se obtiene:

$$s = \frac{1}{2}(7.5)t^2 \quad \ldots(1)$$

La igualdad (1), es un modelo que describe la relación entre la distancia y el tiempo en el movimiento del avión del problema en estudio. Es un modelo polinomial cuadrático "hecho a la medida". Puede simplificarse para obtener:

$$s = 3.75\ t^2$$

Si de esta última igualdad se despeja la constante 3.75, se obtiene:

$$\frac{s}{t^2} = 3.75$$

lo cual significa que, en el caso del problema que nos ocupa, <u>el desplazamiento es directamente proporcional al cuadrado del tiempo</u>.

Pero s/t es la velocidad, luego $s/t^2 = v/t = 3.75$.

Lo anterior significa que la velocidad es directamente proporcional al tiempo, es decir, que la velocidad aumenta por un factor constante: 3.75.

Esta característica es propia de una clase de movimiento: el <u>movimiento rectilíneo uniformemente acelerado</u>.

b) Modelos "listos para usarse" o estandarizados.

Si en un libro de Física buscamos una fórmula que relacione el desplazamiento y el tiempo en el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, encontraremos:

$$s = v_0\ t + \frac{1}{2}\ at^2$$

En donde s es el desplazamiento, v_0 es la velocidad inicial ,a es la aceleración y t el tiempo.

La fórmula anterior es un modelo "listo para usarse"; ha sido establecida para aplicarse a <u>cualquier</u> situación en donde intervenga un movimiento del mismo tipo que el del avión del problema.

En el caso que se analiza, la velocidad inicial (v0) es igual a cero, por lo que la fórmula se reduce a :

$$s = \frac{1}{2}\ at^2$$

Si en esta fórmula se sustituye la variable a por 7.5 coincidirá con la fórmula que obtuvimos a partir del análisis de los datos experimentales .

Comprueba que la fórmula es válida para todos los valores del tiempo anotados en la tabla 3.

Lee nuevamente el texto del problema que tratamos de resolver.

¿Cuál es la pregunta del problema?

En el enunciado del problema se nos pide encontrar el tiempo que tardará el avión en llegar al límite de la pista: 1500 m

¿Cómo emplearías la fórmula (1) para encontrar la solución del problema?

Para encontrar el tiempo que tomaría al avión llegar al límite de la pista, sustituimos en la igualdad (1) a la variable s por 1500.

Así $$1500 = \frac{1}{2}\, 7.5\, t^2$$

o $$1500 = 3.75\, t^2$$

La igualdad anterior es una <u>ecuación de segundo grado o cuadrática con una incógnita: t</u>.

Despejar t de esta ecuación es muy sencillo.

Trata de resolver la ecuación $1500 = 3.75\, t^2$.

El proceso de solución de la ecuación anterior es el siguiente:

$$\frac{1500}{3.75} = t^2$$

$$400 = t^2$$

Entonces t es un número que elevado al cuadrado es igual a 400.

¿Cuál es ese número?

Hay dos números que cumplen la condición dada : 20 y -20.

Recuerda que:

Si un número real t es tal que $t^2 = x$ (x real no negativo), entonces t es una raíz cuadrada de x . Si t es positivo o cero, entonces es la raíz cuadrada principal de x y se denota $t = \sqrt{x}$; si t es negativo, entonces es la raíz cuadrada negativa de x y se denota por $t = -\sqrt{x}$.

■ ¿Es correcto escribir $\sqrt{4} = \underline{+}2$?

¿Por qué?

La ecuación $s = 3.75\ t^2$ tiene dos soluciones:

$$t' = 20 \qquad y \qquad t'' = -20$$

Sin embargo, ¿tiene sentido en el problema que estamos investigando un tiempo igual a -20 segundos? ¿cómo interpretarías un tiempo negativo?. La solución del problema es la siguiente:

<u>El tiempo que el avión tardaría en llegar al límite de la pista es igual a 20 segundos</u>.

1.4 <u>Concepto de Función Polinomial Cuadrática</u>.

En las secciones anteriores se resolvieron problemas en los que se relacionan dos conjuntos de números. A cada número de un primer conjunto D se le asocia el único número de un segundo conjunto I que satisface las condiciones establecidas por el modelo matemático.

En el ejemplo 1 sobre el terreno para un gallinero, a cada elemento x del conjunto $D = \{ x \in R \ / \ 0 < x < 8.5 \}$ de todas las posibles medidas de la base, se le hace corresponder un único número y del conjunto $I = \{ x \in R \ / \ 0 < x < 18.0625 \}$ de todos los posibles valores del área.

El criterio para determinar qué elemento de I corresponde a un elemento dado de D lo proporciona la igualdad:

$$y = -x^2 + 8.5x$$

Cada valor que adopte x en esta igualdad determinará un valor único de y.

Una correspondencia como la establecida en el ejemplo 1 se dice que es una <u>función</u>.

A las funciones se les asigna alguna letra para identificarlas. Generalmente se usan las letras f, g y h, en ciertas ocasiones con subíndices.

El primer conjunto (D) es llamado <u>dominio o conjunto de definición</u> de la función.

El segundo conjunto (I) se dice que es el <u>rango</u> o la <u>imagen</u> de la función.

Si f es una función, al elemento y de su rango que corresponde a un elemento x de su dominio se le llama <u>imagen de x bajo la función f</u> o <u>valor de f en x</u> y se denota por **y = f(x)**.

El criterio mediante el cual se determina la imagen f(x) de cualquier elemento x de D es la <u>regla de correspondencia de la función</u>.

Por ejemplo, en la función f surgida del problema del terreno para el gallinero, la imagen de 3 es 16.5, esto es,

$$f(3) = -3^2 + 8.5(3) = 16.5.$$

De lo anterior se desprende que para definir una función debe proporcionarse su dominio y su regla de correspondencia. El rango puede determinarse a partir del dominio y la regla.

En las funciones numéricas de una variable real , funciones en donde tanto el dominio como el rango son conjuntos de números reales, suele indicarse únicamente la regla de correspondencia. En tal caso el dominio es considerado como el máximo subconjunto de R (el conjunto de todos los números reales) en que pueda aplicarse la regla de correspondencia.

Determina el dominio, la regla de correspondencia y el rango de:
a)La función que se establece en el problema del ejemplo 2: Un avión en la pista de despegue.
b)La función que se origina en el cuestionamiento guía.

Las reglas de correspondencia de las funciones de los problemas del cuestionamiento guía, del ejemplo 1 y del ejemplo 2 son respectivamente:

a) $y = -5x^2 + 150x + 9000$ b) $y = -x^2 + 8.5x$ c) $d = 3.75t^2$

Estas igualdades tienen dos variables. La dependiente está despejada en el primer miembro de cada igualdad. El segundo miembro es, en todos les casos, un polinomio de segundo grado o cuadrático en la variable dependiente.

En resumen, todas las igualdades tienen la forma:
$y = ax^2 + bx + c$ en donde $a \neq 0$, para que el término de segundo grado realmente exista.

Completa el siguiente cuadro anotando los coeficientes a,b y c de cada uno de los polinomios.

	a	*b*	*c*
$-5x^2 + 150x + 9000$			
$-x^2 + 8.5\ x$			
$3.75t^2$			

Las funciones que han aparecido durante el desarrollo de este fascículo son funciones polinomiales cuadráticas.

Funciones polinomiales cuadráticas

Las funciones cuya regla de correspondencia es una igualdad de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ en donde a, b y c son números reales, $a \neq 0$, son llamadas funciones polinomiales cuadráticas o simplemente funciones cuadráticas.

1.5 Gráficas de funciones cuadráticas

Durante el estudio de las situaciones problemáticas que se han planteado en este trabajo se elaboraron las gráficas de las funciones cuadráticas definidas por : a) $y = -x^2 + 8.5x$ (Fig. 5) y b) $y = 3.75\ x^2$ (Fig. 6).

En ambos casos se obtuvieron parábolas con eje de simetría vertical (paralelo al eje "Y").

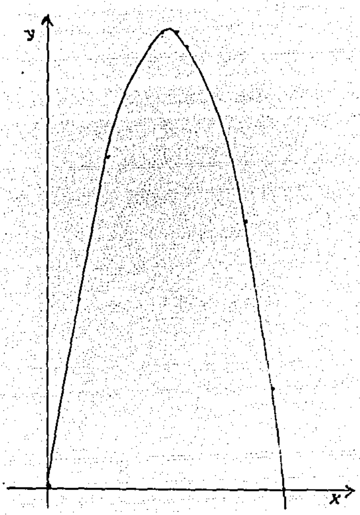

Figura 5

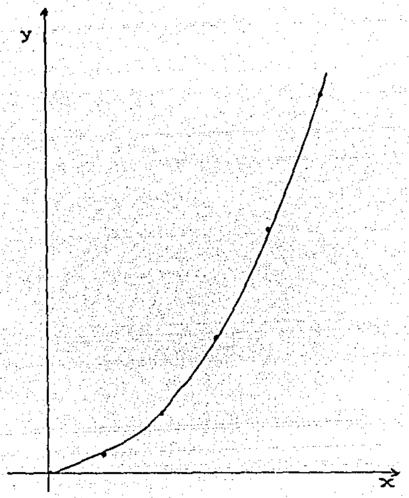

Figura 6

■ *Esboza la gráfica de la función cuadrática definida por: $y = -5x^2 + 150x + 9000$ (problema del cuestionamiento guía), completando previamente la siguiente tabla :*

x	0	10	20	30	40	50	60
y							

Tabla 5

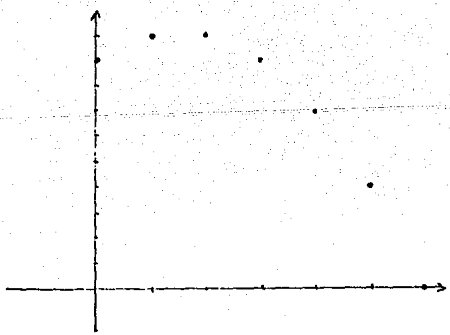

Figura 7

¿Deben unirse los puntos por medio de una línea?

Los puntos del esbozo de la gráfica de la función definida por $y = -5x^2 + 150x + 9000$ no se unen ya que x toma únicamente valores enteros (no se admite que la cuota disminuya fracciones de un peso). La gráfica consta de un número finito de puntos, aunque no se han dibujado todos.

Las funciones como esta, cuya gráfica es un conjunto de puntos aislados, se llaman funciones discretas.

De cualquier manera, los puntos de la gráfica de la función del problema del Gimnasio Zeus están dispuestos sobre una parábola con eje vertical y esto no es casual:

Las gráficas de todas las funciones cuadráticas son parabólicas. El eje de simetría de las parábolas involucradas en las gráficas de las funciones cuadráticas es paralelo al eje "Y".

Las propiedades de las parábolas se han aprovechado en múltiples aplicaciones. Seguramente conoces la antenas parabólicas para captar las señales de T.V. procedentes de satélites artificales.

a) Vértice de la gráfica de una función cuadrática.

En diversas situaciones, como las de los problemas del Gimnasio Zeus y del terreno para el gallinero se necesita conocer el valor máximo o mínimo de una función cuadrática. Hemos observado que este valor es precisamente la ordenada, y, del vértice de la parábola que constituye la gráfica de la función. Debido a lo anterior, es necesario encontrar procedimientos para obtener con exactitud las coordenadas del vértice de las parábolas con eje vertical.

Realizando la siguiente actividad obtendremos interesantes resultados. Si dispones de una calculadora con graficador o de un programa para computadora que grafique funciones, empléalos y te simplificarán el trabajo.

■ *Traza las gráficas de las funciones cuyas reglas de correspondencia se dan a continuación, considerando como su dominio de definición al conjunto R de los números reales.*

a) $y = x^2$ *b)* $y = x^2 + 2$ *c)* $y = x^2 - 3$

d) $y = (x + 3)^2$ *e)* $y = (x - 2)^2$ *f)* $y = 3x^2$

g) $y = 1/3\ x^2$ *h)* $y = -x^2$ *i)* $y = -x^2 + 2$

j) $y = (x + 3)^2 + 2$

Comparemos las gráficas de las funciones de los incisos desde b hasta j con la gráfica de $y = x^2$ (inciso a).

x	y
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

Tabla 6

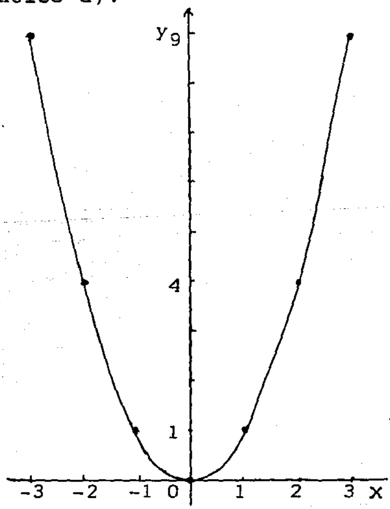

Figura 8

La gráfica de $y = x^2$ es una parábola con las siguientes características:

a) Cóncava hacia arriba (se "abre" hacia arriba).

b) Eje de simetría: el eje "Y".

c) Vértice en el origen.

Gráfica de $y = x^2 + 2$ (figura 9)

Esta gráfica es igual a la de $y = x^2$ pero traladada 2 unidades hacia arriba.

b) Su eje de simetría coincide con el eje "Y".

a) Es cóncava hacia arriba, es decir, se "abre" hacia arriba.

c) Su vértice es el punto V(0,2).

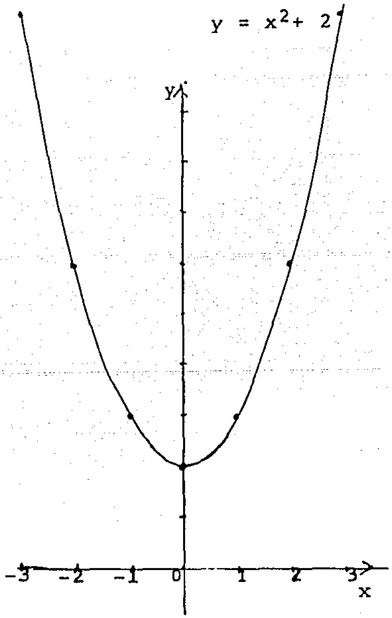

Figura 9

Traza la gráfica de $y = x^2 - 3$ *, anota sus características y compárala con la de* $y = x^2$*.*

Generalización.

La gráfica de la función definida por $y = x^2 + c$ es una parábola igual a la gráfica de $y = x^2$ pero con una traslación vertical c unidades hacia arriba si $c > 0$ y $|c|$ unidades hacia abajo si $c < 0$.

Aplicando los resultados del párrafo anterior determina la concavidad, la ecuación del eje de simetría y las coordenadas del vértice de las parábolas determinadas por:

a) $y = x^2 + 6$ *b)* $y = x^2 - 1/3$

Trata de llevar a cabo este ejercicio sin dibujar las gráficas.

Gráfica de $y = (x + 3)^2$ (figura 10)

Esta gráfica ha resultado igual a la de $y = x^2$ pero trasladada 3 unidades a la izquierda.

a) Es cóncava hacia arriba.

b) Su eje de simetría es la recta paralela al eje "Y" tal que todos sus puntos tienen abscisa $x = -3$. Ningún punto fuera de esa recta tiene abscisa igual a -3. Por lo anterior se dice que la ecuación del eje de simetría es $x = -3$.

c) El vértice de la parábola está en $(-3,0)$

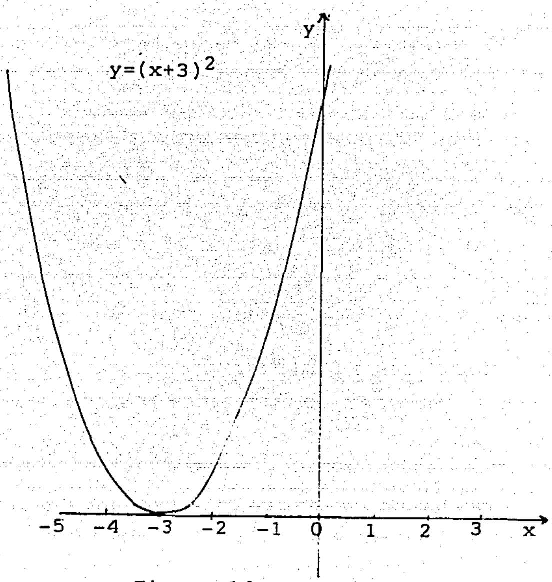

Figura 10

Traza la gráfica de $y = (x-2)^2$. Compárala con la de $y = x^2$ y determina su concavidad, la ecuación de su eje de simetría y las coordenadas de su vértice.

Generalización.

Del análisis de las dos últimas gráficas se concluye que la gráfica de la función definida por $y = (x + k)^2$ es igual a la de $y = x^2$ pero trasladada k unidades a la izquierda si k es positivo y $-k$ unidades a la derecha si k es negativo. Entonces la parábola tiene las siguientes características:

a) Es cóncava hacia arriba.

b) Su eje de simetría tiene por ecuación $x = -k$.

c) Su vértice es el punto V(-k, 0).

Sin trazar las gráficas determina la concavidad, la ecuación del eje de simetría y las coordenadas del vértice de las parábolas siguientes:

a) $y = (x + 4)^2$ *b)* $y = (x - 5)^2$

Gráfica de $y = 3x^2$

x	y
-3	27
-2	12
-1	3
0	0
1	3
2	12
3	27

Tabla 7

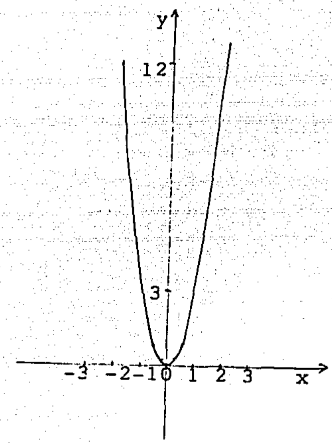

Figura 11

Compara la tabla 6 con la tabla 7. ¿Qué adviertes acerca de los valores de y ?

Cada valor de y en la tabla 6 está multiplicado por 3 en la tabla 7. Esto produce un alargamiento o expansión de la gráfica de $y = x^2$. La concavidad, el eje de simetría y el vértice no se alteran.

Ahora traza tú la gráfica de $y = 1/3 \ x^2$. Analízala y compárala con la de $y = x^2$.

Generalización.

Del análisis de las dos últimas gráficas se desprende que la gráfica de $y = ax^2$ es la de $y = x^2$ expandida por el factor a, si $a > 1$ y contraída por el factor a , si $0 < a < 1$.

La concavidad, el eje de simetría y las coordenadas del vértice no se alteran.

Determina la concavidad, la ecuación del eje de simetría y las coordenadas del vértice de las gráficas de :

a) $y = 5x^2$ *b)* $y = 2/3\ x^2$

Gráfica de $y = -x^2$

Esta gráfica es la reflexión de la gráfica de $y = x^2$ a través del eje "X".

El eje de simetría y el vértice no cambian de posición; pero la concavidad de la parábola sí; ahora es hacia abajo.

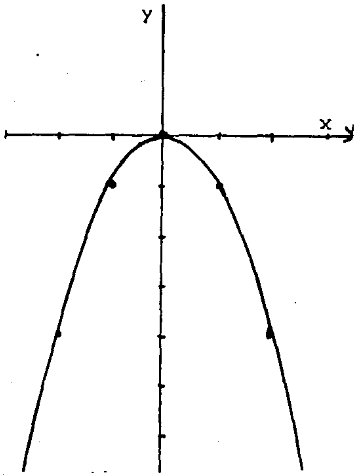

Figura 12

$y=-x^2$

Elabora la gráfica de $y = -x^2 + 2$. Analiza sus propiedades, en especial la concavidad.
¿Qué relación encuentras entre el signo del coeficiente de x^2 y la concavidad de las parábolas que se han trazado?

Generalización

El signo del coeficiente de x^2 en la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ determina la concavidad de su gráfica. Si a es positivo la concavidad es hacia arriba y si a es negativo entonces la parábola es cóncava hacia abajo.

Durante el desarrollo de esta sección hemos estudiado varios casos particulares de gráficas de funciones cuadráticas y hemos llegado a formular generalizaciones claras y razonables. El estudio detallado de estas generalizaciones se hará en el curso de geometría analítica.

De acuerdo con los resultados que hemos obtenido es posible determinar ciertas características de las funciones cuadráticas a partir del examen de su regla de correspondencia.

Ejemplo.

Obtener: a) las coordenadas del vértice y b) la ecuación del eje de simetría y determinar la concavidad de la parábola dada por:

$$y = (x - 3)^2 - 1$$

Solución.

La gráfica de $y = (x - 3)^2 - 1$ es igual a la de $y = x^2$ trasladada 3 unidades hacia la derecha y una unidad hacia abajo.

a) El vértice de la parábola cuya ecuación es $y = x^2$ es el punto $V(0,0)$. Como a cada uno de sus puntos, al vértice se le han aplicado los "movimientos" descritos, de manera que el vértice de la parábola representada por $y = (x - 3)^2 - 1$ es $V'(3, -1)$

b) Todos los puntos del eje de la parábola tienen su abscisa igual a la del vértice, entonces la ecuación del eje de simetría es $x = 3$.

c) La concavidad de la parábola depende del signo del coeficiente de x^2, dado que en este caso es positivo, la concavidad es hacia arriba.

Determina a) las coordenadas del vértice, b) la ecuación del eje de simetría y c) la concavidad de la gráficas de las funciones dadas por:

1) $f(x) = (x - 4)^2 + 5$ *2)* $g(x) = -2(x + 5)^2 - 3$

Corrobora tus respuestas trazando las gráficas de estas funciones.

De los resultados de los incisos anteriores se infiere que:

La gráfica de la función $f(x) = a(x + h)^2 + k$ en donde a, h y k son números reales cualesquiera, $a \neq 0$, es una parábola con eje de simetría paralelo al eje "Y", con vértice en el punto $V = (-h, k)$ y cuyo eje de simetría tiene la ecuación $x = -h$. La concavidad de la parábola hacia arriba si $a>0$ y hacia abajo si $a<0$.

El problema que se nos presenta ahora es:

¿Cómo obtener las coordenadas del vértice de la gráfica de una función cuadrática definida por una ecuación de la forma $y=ax^2+bx+c$?

Por ejemplo:

Determinar las coordenadas del vértice de la parábola cuya ecuación es $y = 2x^2 + 4x + 3$.

Si encontramos una ecuación equivalente a $y = 2x^2 + 4x + 3$, pero que tenga la forma $y = a(x + h)^2 + k$, entonces el vértice será el punto $V(-h,k)$.

Tratemos de darle a $y = 2x^2 + 4x +3$ la forma indicada.

Separemos del segundo miembro de la ecuación al binomio $2x^2 + 4x$.

Factorizando al binomio (caso del factor común) obtenemos

$$2x^2 + 4x = 2(x^2 + 2x)$$

Si agregamos al binomio que está dentro del paréntesis $(x^2 +2x)$ el término adecuado, lo transformaremos en un trinomio cuadrado perfecto.

¿Cuál es el término que necesitamos agregar?

El termino 1^2, esto es, el coeficiente de x dividido entre 2 y elevado al cuadrado, completa el trinomio cuadrado perfecto.

Entonces $\quad x^2 +2x + 1 = (x + 1)^2$

Así que $\quad x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1$

y $\quad 2(x^2 + 2x) = 2[\ (x + 1)^2 - 1]$

$\quad 2(x^2 + 2x) = 2(x + 1)^2 - 2$

Entonces $\quad 2x^2 + 4x = 2(x + 1)^2 - 2$

Sustituyendo el resultado anterior en la ecuación de la parábola:

$y = 2x^2 + 4x + 3$

obtenemos $$y = 2(x+1)^2 - 2 + 3$$

$$y = 2(x+1)^2 + 1$$

La ecuación anterior tiene la forma deseada, por lo tanto las coordenadas del vértice son: $x = -1$; $y = 1$.

■ Comprueba trazando la gráfica de la función $y = 2x^2 + 4x + 3$ que las coordenadas del vértice son: $x = -1$ $y = 1$

Apliquemos el proceso anterior a la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ en donde a, b y c son números reales cualesquiera, $a \neq 0$.

Factorizando el binomio $ax^2 + bx$ obtenemos

$$ax^2 + bx = a(x^2 + \frac{b}{a}x)$$

Agregamos al bimonio $x^2 + \frac{b}{a}x$ la mitad de $\frac{b}{a}$ elevada al cuadrado:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Factorizamos el trinomio cuadrado perfecto:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Entonces $$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$$

Sustituyendo este resultado en $a(x^2 + \frac{b}{a}x)$ obtenemos

$$a(x^2 + \frac{b}{a}x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right]$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}$$

Entonces $$ax^2 + bx = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}$$

Sustituyendo este resultado en $y = ax^2 + bx + c$ obtenemos:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

Pero $$\frac{-b^2}{4a} + c = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Luego $$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Por lo tanto:

Las coordenadas del vértice son :

$$\boxed{x = -\frac{b}{2a} \quad ; \quad y = \frac{4ac - b^2}{4a}}$$

b) Valor extremo de una función cuadrática.

El valor extremo absoluto de una función cuadrática con dominio igual a R es su valor máximo o mínimo, según el caso.

Anteriormente se ha visto que la ordenada del vértice de la gráfica de una función cuadrática, es el valor máximo o mínimo de la función, por ello los resultados de esta sección nos permiten hallar el valor extremo de la función.

Calcula el valor máximo de la función, con dominio R dada por:

$$y = -5x^2 + 15x + 9000$$

A partir de este resultado, resuelve el problema del Cuestionamiento Guía.

Solución. La reducción en la tarifa para la cual se obtiene el máximo ingreso es de N$15. El ingreso máximo es de N$1125.

c) <u>Intersecciones de la gráfica de una función cuadrática con los ejes coordenados</u>

Ejemplo 3. LA TRAYECTORIA DE UN PROYECTIL

Desde un minisubmarino que flota en el mar se dispara un proyectil dirigido a un barco cuyo punto más cercano se encuentra a 13 dam de distancia del punto de partida del proyectil. El punto de partida del proyectil está al ras del agua. La trayectoria que éste sigue en el aire está dada por :

$$y = -x^2 + 12x - 20$$

donde *y* representa la altura del proyectil cuando su distancia a cierto punto de una playa cercana es x (las unidades empleadas son decámetros).

1) ¿Alcanza el proyectil al barco?

2) Si no es así, ¿a qué distancia del punto de lanzamiento entra el proyectil al agua?

Para resolver este problema emplearemos los conocimientos adquiridos a lo largo del desarrollo de este fascículo.

¿Cuál es el modelo matemático para la trayectoria del proyectil?

El modelo matemático para la trayectoria que sigue el proyectil está dado en el problema: $y = -x^2 + 12x - 20$

La igualdad anterior determina la altura, y , a la que el proyectil está sobre la superficie del agua, cuando su distancia al eje de las ordenadas ("Y") es x.

Por ejemplo, cuando el proyectil se encuentra a una distancia horizontal de 5 dam , su altura es de :

$$y = -5^2 + 12(5) - 20$$
$$y = -25 + 60 - 20$$
$$y = 15 \text{ dam}$$

Examinando el modelo dado en el enunciado del problema podemos obtener mucha información acerca de la trayectoria del proyectil.

¿Qué clase de función determina la igualdad $y = -x^2 + 12x - 20$? ¿Qué figura debe obtenerse al graficarla?

La igualdad $y = -x^2 + 12x - 20$ determina una función cuadrática, ya que tiene la forma $y = ax^2 + bx + c$.

La gráfica de esta función, como la de toda función cuadrática, es una parábola con eje de simetría vertical.

¿Cómo es la concavidad de la parábola?

Para analizar problemas surgidos de situaciones como esta, podemos sustituir el escenario real de los hechos por un bosquejo sobre papel.

Traza un bosquejo en donde aparezcan las posiciones relativas del submarino, el barco y la trayectoria del proyectil.

Bosquejo de la situación que se describe en el problema.

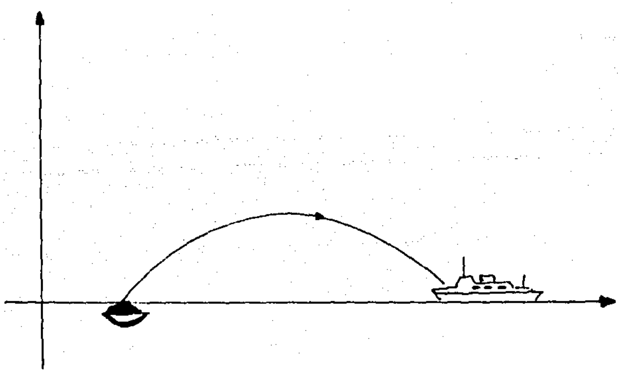

Figura 13

Observa el bosquejo, ¿cuál es la altura del proyectil en el momento en que hace contacto con el agua?, en otras palabras, ¿cuánto vale y cuándo el proyectil toca el agua?

En el momento en que el proyectil toca el agua   y = 0

La interseccion de la gráfica de una función con el eje "X" es el conjunto de los puntos de la gráfica en donde y = 0.

¿A qué distancia se encuentra el proyectil del origen del plano cartesiano al hacer contacto con el agua?

La respuesta a la pregunta anterior está dada por el valor de x cuando y es igual a 0 en la igualdad $y = -x^2 + 12x - 20$.

Si hacemos $y = 0$ en la igualdad anterior, obtenemos la ecuación de segundo grado con una incógnita:

$$0 = -x^2 + 12x - 20$$

Por la propiedad de simetría de la igualdad

$$-x^2 + 12x - 20 = 0$$

Esta es un ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ en donde $a \neq 0$

¿Cuánto valen los coeficientes a, b y c.

Como todos los coeficientes son diferentes de cero se dice que la ecuación es completa.

Para resolverla podemos emplear diferentes métodos.

Resolución por factorización

En el curso de Matemáticas I estudiaste varios casos de factorización, entre ellos la de un trinomio de la forma $x^2 + ax + b$. Recuerda que cuando un trinomio de este tipo tiene coeficientes enteros podemos intentar una factorización de la forma:

$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n) \quad \text{con } m \text{ y } n \text{ enteros.}$$

La suma de m y n debe ser igual al coeficiente b, y su producto debe ser igual al número c.

Para resolver el problema del ejemplo 3 (trayectoria de un proyectil), usaremos la factorización que se mencionó en el párrafo anterior.

El primer miembro de la ecuación $-x^2 + 12x - 20 = 0 \; \ldots \; (1)$ es el trinomio:

$$-x^2 + 12x - 20$$

Factoricémoslo:

$$-x^2 + 12x - 20 = -1(x^2 - 12x + 20)$$

$$-x^2 + 12x - 20 = -1(x - 2)(x - 10)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (1) obtenemos:

$$-1(x - 2)(x - 10) = 0$$

Multiplicando por -1 a los dos miembros de la ecuación se obtiene $(x - 2)(x - 10) = 0$.

Para que el producto de dos números reales cualesquiera a y b sea igual a cero, entonces a, o bien b, tiene que ser cero.

Aplicando esta propiedad a

$$(x - 2)(x - 10) = 0$$

se deduce que $x - 2 = 0$ o bien $x - 10 = 0$

Si $x - 2 = 0$ entonces $x = 2$

y, si $x - 10 = 0$ entonces $x = 10$

La ecuación $-x^2 + 12x - 20$ ha sido resuelta. Tiene dos soluciones o raíces : $x = 2$ y $x = 10$

Comprueba sustituyendo en $-x^2 + 12x - 20 = 0$ *a x, primero por 2 y después por 10 , que estos valores son ambos soluciones o raíces de la ecuación.*

¿Qué significado tienen las dos soluciones de la ecuación para el problema del submarino?

El proyectil partió del punto (2,0) y entró al agua en el punto (10,0).

¿Cuál es la distancia entre el punto de partida del proyectil y el punto en donde éste entra al agua?

¿Alcanza o no el proyectil al barco?

¿Por qué?

Ceros de una función.

Para resolver problemas que, como el anterior, conducen a funciones cuadráticas,es decir, a funciones cuya regla de correspondencia es de la forma $f(x)=ax^2 + bx + c$, frecuentemente es necesario encontrar el valor de x (la abscisa) de los puntos en donde la gráfica de la función corta al eje "X". Estos valores de x se llaman ceros de la función y son las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ porque en esos puntos $f(x) = 0$.

¿Cuáles son los ceros de la función $f(x) = -x^2 + 12x - 20$ *en el problema que acabamos de resolver?*

Intersección con el eje"Y"

La intersección de la gráfica de una función con el eje "Y" es el conjunto de los puntos de la gráfica en donde $x = 0$.

Encuentra las intersección de la gráfica de $f(x) = -x^2 + 12x - 20$ con el eje "Y". Traza la gráfica f señalando los puntos de intersección con los ejes coordenados.

2. Problemas que conducen a una ecuación cuadrática y su relación con la función polinomial cuadrática.

Durante el desarrollo de este fascículo ha sido necesario resolver varias ecuaciones cuadráticas con una incógnita.

Para encontrar el tiempo que un avión, que partió del reposo y se desplaza con movimiento uniformemente acelerado, tarda en recorrer 1500 metros resolvimos la ecuación: $3.75t^2 = 1500$...(1)

Para encontrar la abscisa del punto de partida de un proyectil y la del punto en donde el mismo entra al agua, resolvimos la ecuación

$-x^2 + 12x - 20 = 0$...(2)

En la siguiente sección abordaremos la resolución de ecuaciones cuadráticas de una manera sistemática.

3. Resolución de Ecuaciones Cuadráticas.

3.1 Métodos algebraicos

a) Resolución de ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + c = 0$

En este tipo de ecuaciones el coeficiente (b) del término de primer grado es igual a cero, mientras que a y c son diferentes de cero.

La ecuación (1)... $3.75t^2 = 1500$ puede adoptar esta forma escribiéndola así: $3.75t^2 - 1500 = 0$

En ecuaciones como esta la incógnita se despeja fácilmente.

Realiza las siguientes actividades:

1)Revisa el proceso que se siguió para resolver esta ecuación en el problema del ejemplo 2 (página 44).

2)Resuelve las ecuaciones que a continuación se anotan siguiendo el mismo procedimiento: a) $12x^2 - 1452 = 0$; b) $15x^2 = 735$.

¿Cuántas soluciones encontraste para cada una de las ecuaciones?

¿Cuáles son los ceros de las funciones a) $f(x) = 12x^2 - 1452$ y b) $g(x) = 15x^2 - 735$?, en otras palabras, ¿cuáles son las abscisas de los puntos de intersección de las gráficas de estas funciones con el eje "x"?

3)Comprueba tus resultados en las gráficas de las funciones f y g.

4)Resuelve la ecuación $4x^2 + 36 = 0$. ¿Cuántas soluciones encontraste?

5)Traza la gráfica de la función $f(x) = 4x^2 + 36$.

¿Cuáles son los ceros de la función?

6)Redacta tus conclusiones sobre los resultados de las actividades 4 y 5.

La solución de una ecuación de la forma $ax^2 + c = 0$, con $a = 0$, se obtiene mediante el procedimiento siguiente:

$$ax^2 + c = 0$$

$$ax^2 = -c$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

Si x es cualquier número real, ¿puede ser x^2 negativo?

¿Es $-\dfrac{c}{a}$ positivo o negativo?

El número $-\dfrac{c}{a}$ puede ser positivo o negativo (o cero), ya que representa al inverso aditivo de $\dfrac{c}{a}$.

Si $-\dfrac{c}{a} > 0$ (positivo), entonces tiene dos raíces cuadradas reales , y por lo tanto, la ecuación $ax^2 + c = 0$ tiene dos soluciones reales:

$$x' = \sqrt{-\frac{c}{a}} \qquad\qquad x'' = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Si $-\dfrac{c}{a} < 0$ (negativo), entonces la ecuación no tiene soluciones reales.

¿Cuál es la solución de la ecuación si $-\dfrac{c}{a} = 0$

b) <u>Resolución de ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$.</u>

En el proceso de resolución de un problema que conduce a una función cuadrática, podemos encontrarnos con ecuaciones cuadráticas.

Por ejemplo:

Si en el problema del Cuestionamiento Guía sobre el Gimnasio Zeus, se desea saber para qué descuento en la cuota se obtiene el mismo ingreso que cuando no se rebaja ésta, puede seguirse el procedimiento que sigue:

Cuando la cuota no disminuye se obtiene un ingreso de 9000 nuevos pesos así que en $y = -5x^2 + 150x + 9000$ hacemos $y = 9000$, con lo que obtenemos la ecuación cuadrática con una incógnita:

$$9000 = -5x^2 + 150x + 9000$$

Resolvamos esta ecuación:

Sumando -9000 a ambos miembros de la ecuación obtenemos

$$0 = -5x^2 + 150\ x$$

Por la propiedad simétrica de la igualdad

$$-5x^2 + 150x = 0$$

Factorizando el primer miembro de la ecuación (caso del factor común) obtenemos $5x\ (-x + 30) = 0$.

Observa el primer miembro de la ecuación; es el producto de dos factores. Para que el producto de $5x$ y $-x+30$ sea igual a cero es necesario que $5x = 0$ ó $-x + 30 = 0$

Resuelve la ecuación $5x = 0$, obtendrás $x = 0$.

Resolviendo la ecuación $-x + 30 = 0$ encontrarás $x = 30$.

Entonces la ecuación tiene dos soluciones:

$$x' = 0 \quad y \quad x'' = 30.$$

¿Cómo interpretas este resultado en el problema que estamos estudiando?

Para un descuento de N$30 se obtiene el mismo ingreso que si no se hace descuento alguno.

Analicemos el procedimiento que se usó para resolver la ecuación $-5x^2 + 150x = 0$.

La ecuación (2) tiene la forma $ax^2 + bx = 0$

Las ecuaciones de este tipo se resuelven, como en el caso de la ecuación del problema, factorizando el primer miembro de la ecuación:

$$x\ (ax + b) = 0$$

La igualdad anterior implica que

$x = 0$, lo que significa que ya se tiene una solución de la ecuación,

o bien $ax + b = 0$

Si $ax + b = 0$, entonces $x = \frac{-b}{a}$

Resumiendo:

Cualquier ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx = 0$, $a \neq 0$ tiene dos soluciones:

$$x = 0 \qquad y \qquad x = \frac{-b}{a}$$

No conviene tratar de memorizar las fórmulas anteriores, es preferible seguir el proceso que emplea la factorización.

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $9x^2 - 72x = 0$ *b)* $5x^2 = 65x$

c) <u>Resolución de ecuaciones cuadráticas completas</u>

<u>Método por factorización</u>

Una ecuación cuadrática completa tiene la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con a,b y c distintos de cero.

Un ejemplo de este tipo de ecuación es la que se resolvió en el problema del minisubmarino: $-x^2 + 12x - 20 = 0$.

Localiza en el fascículo la parte que contiene la resolución de la ecuación $-x^2 + 12x - 20 = 0$ *(páginas 65 y 66) y revísala cuidadosamente.*

Algunas ecuaciones cuadráticas completas pueden resolverse por factorización, como la del problema del minisubmarino, por lo que es importante conocer los diferentes casos de factorización de un trinomio de la forma:

$$ax^2 + bx + c.$$

Repasa los procedimientos para factorizar trinomios de segundo grado que aprendiste en Matemáticas I.

Resuelve por factorización, las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 2x - 15 = 0$ *b)* $4x^2 - 2x - 12 = 0$

Método de completar un trinomio cuadrado perfecto.

Las ecuaciones cuadráticas pueden resolverse por el método de completar un trinomio cuadrado perfecto.

A continuación resolveremos simultáneamente las ecuaciones

$$5x^2 - 6x - 2 = 0 \qquad \text{y} \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

por el método de "completar cuadrados".

$$5x^2 - 6x - 2 = 0 \qquad\qquad ax^2 + bx + c = 0$$

$$5x^2 - 6x = 2 \qquad\qquad ax^2 + bx = -c$$

$$x^2 - \frac{6}{5}x = \frac{2}{5} \qquad\qquad x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}$$

$$x^2 - \frac{6}{5}x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} + \frac{9}{25}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{19}{25}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Como $\frac{19}{25} > 0$

Si $b^2 - 4ac > 0$

$$x - \frac{3}{5} = \sqrt{\frac{19}{25}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = \frac{\sqrt{19}}{5} + \frac{3}{5}$$

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x' = \frac{3 + \sqrt{19}}{5}$$

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

o bien

$$x - \frac{3}{5} = -\frac{\sqrt{19}}{5} \qquad\qquad x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

de donde:

$$x'' = \frac{3 - \sqrt{19}}{5} \qquad\qquad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La resolución de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ por el método de completar el trinomio cuadrado perfecto da origen a la siguiente:

e) Fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad a \neq 0 \; ; \; b^2 - 4ac \geq 0}$$

Resuelve la siguiente ecuación por el método de "completar cuadrados" y empleando la fórmula general. Compara las soluciones.

<u>El discriminante de una ecuación cuadrática.</u>

Observa que en la fórmula general aparece una raíz cuadrada:

$$b^2 - 4ac$$

Recuerda que la raíz cuadrada de un número negativo no es un número real, entonces $b^2 - 4ac$ debe ser un número positivo o cero.

Esta expresión es llamada el <u>discriminante de la ecuación</u> porque de su signo depende el tipo de soluciones que tenga la ecuación.

La interpretación gráfica de las soluciones de las ecuaciones cuadráticas nos ayudará a comprender el papel que desempeña el discriminante.

Grafiquemos las siguientes funciones:

1) $f_1(x) = x^2 + 2x - 15$ 2) $f_2(x) = x^2 + 2x + 15$

3) $f_3(x) = 4x^2 + 4x + 1$

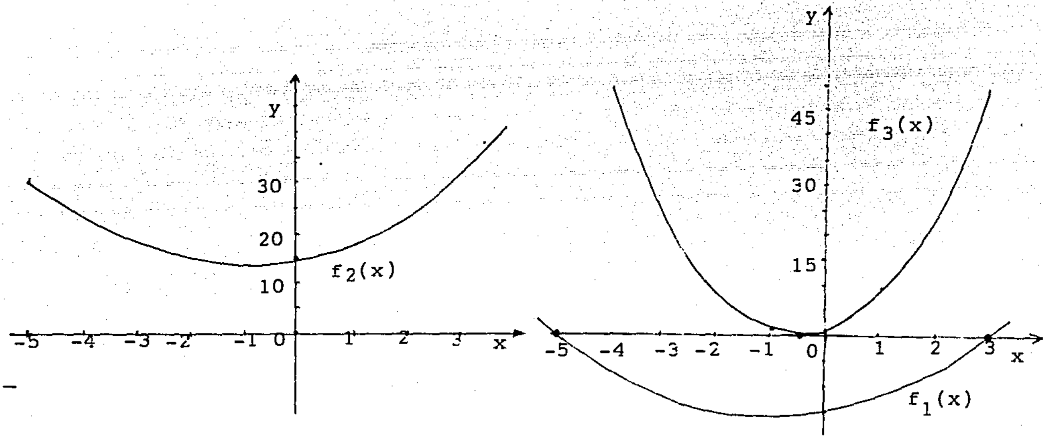

Figura 14

Las soluciones de las ecuaciones 1) $x^2 + 2x - 15 = 0$,

2) $x^2 + 2x + 15 = 0$ y 3) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

son las abscisas de los puntos de intersección de las gráficas de las funciones de los incisos 1, 2 y 3 respectivamente con el eje "X".

Generalización

Las abscisas de los puntos de intersección de la gráfica de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ con el eje x son las soluciones de la ecuación

Basándote únicamente en la lectura de la gráfica determina cuántas soluciones tiene y cuáles son éstas, cada una de las ecuaciones de los incisos 1,2 y 3.

Calcula el discriminante de las ecuaciones de los incisos 1, 2 y 3 y trata de determinar su relación con el tipo de soluciones que tienen éstas.

De la actividad anterior pueden extraerse las siguientes conclusiones:

En la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas interviene el radical $b^2 - 4ac$. El radicando $b^2 - 4ac$ es el discriminante de la ecuación.

-Si $b^2 - 4ac$ es un número negativo , entonces no tiene raíces cuadradas reales y la ecuación no tiene soluciones reales.

-Si $b^2 - 4ac$ es positivo, entonces tiene dos raíces cuadradas y la ecuación tiene dos soluciones.

-Si $b^2 - 4ac$ es cero, entonces tiene una raíz cuadrada real: cero.

En este caso la ecuación tiene dos soluciones iguales o una raíz doble.

Si se calcula el discriminante de una ecuación antes de intentar resolverla puede evitarse un trabajo extra.

b) <u>Solución gráfica de ecuaciones cuadráticas</u>

En la sección anterior se resolvieron gráficamente varias ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, ahora se estudiará otra manera de resolver gráficamente ecuaciones cuadráticas.

Ejemplo 1 .

Resolver gráficamente la ecuación $x^2 + 2x = 15$.

Método de solución.

a) Traza en la misma figura las gráficas de las funciones

$f(x) = x^2 + 2x$ y $g(x) = 15$.

b) Lee las coordenadas de los puntos de intersección de las gráficas

c) Las abscisas de los puntos de intersección: $x' = -5$, $x'' = 3$ son las soluciones de la ecuación.

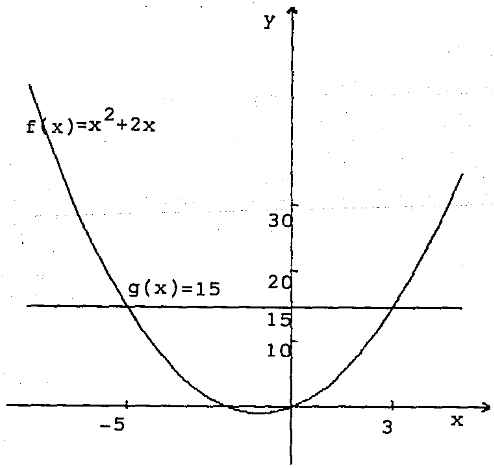

Figura 15

Ejemplo 2. Resolver gráficamente la ecuación $x^2 = -2x + 15$.

Para encontrar las soluciones seguimos el método del ejemplo 1; graficamos las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = -2x + 15$ y leemos las abscisas de los puntos de intersección de las gráficas: $x' = -5$, $x''=3$ éstas son las soluciones de la ecuación $x^2 = -2x + 15$.

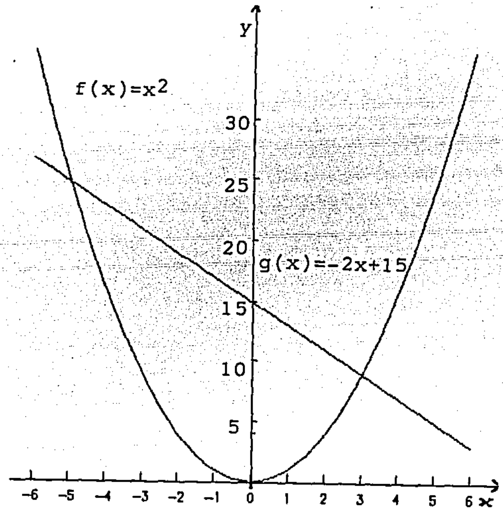

Figura 16

Observa que las ecuaciones $x^2 + 2x = 15$, $x^2 = -2x + 15$ y $x^2 + 2x - 15 = 0$ son equivalentes, luego, despejando al término independiente o despejando a x^2 y graficando las funciones de ambos lados de la igualdad podemos también resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

Ajuste de curvas.

Analiza la situación siguiente:

En una región de Africa, considerada de reserva ecológica, un grupo de biólogos ha obtenido datos sobre la relación entre el número de animales herbívoros y el número de animales depredadores y los ha graficado (Fig. 17). Ellos desean construir un modelo matemático que se ajuste a los datos que han recabado.

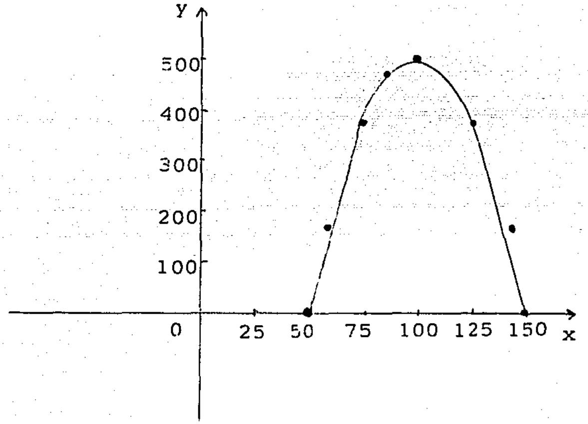

Figura 17

Como los puntos de la gráfica tienen una disposición parabólica se traza la parábola que se ajuste mejor a la serie de puntos.

La curva corta al eje "X" en $x = 50$ y $x = 150$ así que estos valores de x deben ser las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$.

La regla de correspondencia de la función debe ser de la forma

$y = ax^2 + bx + c$.

El producto $(x - 50)(x - 150)$ origina, igualado a cero, una ecuación cuadrática cuyas soluciones son $x = 50$ y $x = 150$.

Esta es $x^2 - 200x + 7500 = 0$

Esto nos hace pensar que la función que buscamos tiene por regla de corespondencia a la ecuación:

$$y = x^2 - 200x + 7500 \ldots (1)$$

Si a la ecuación (1) le damos la forma común para encontrar las coordenadas del vértice de su gráfica, obtenemos:

$$y = (x - 100)^2 - 2500 \ldots (2)$$

Por lo tanto, el vértice está en (100 , -2500).

Pero en la figura 21 se advierte que el vértice de la gráfica de una función que describa la relación entre los animales herbívoros y los depredadores debe ser V(100, 500).

¿Cómo es la concavidad de la gráfica de (2)?, ¿es así como la necesitamos?

Si multiplicamos al segundo miembro de (2) por -1 cambiará su concavidad.

¿En donde está el vértice ahora?

El vértice de $y = -1(x - 100)^2 + 2500 \ldots (3)$ está en (100, 2500), pero lo necesitamos en (100, 500).

¿Cómo podemos acortar la gráfica de (3)?

Del estudio de la sección correspondiente al vértice de la gráfica de una función cuadrática sabemos que si multiplicamos al segundo miembro de la igualdad (3) por un número positivo menor que 1, la gráfica se acortará.

Multiplicando al segundo miembro de (3) por 1/5 obtenemos:

$$y = -\frac{1}{5}(x - 100)^2 + 500$$

Las coordenadas del vértice de la gráfica de la última ecuación son justamente las que necesitamos: (100, 500). Los puntos de intersección de la gráfica de esta ecuación con el eje "X" son (50,0) y (150,0).

Por lo tanto, la función que se ajusta a los datos recabados está dada por :

$$f(x) = -\frac{1}{5}(x - 100)^2 + 500$$

Comprueba que la función anterior se ajusta a los datos del problema calculando algebraicamente las coordenadas de los puntos de intersección de se gráfica con el eje "X" y trazando su gráfica.

RECAPITULACION

- La resolución de problemas puede abordarse por distintos métodos, entre los cuales tenemos la formación de modelos geométricos, numéricos, algebraicos y mixtos.

- Los modelos polinomiales cuadráticos son modelos algebraicos que tienen la forma $y = ax^2 + bx + c$ en donde a, b y c representan números reales, $a \neq 0$. y es la variable dependiente y x es la variable independiente.

- Las funciones polinomiales cuadráticas establecen una correspondencia de R a R (R conjunto de los números reales) asociando a cada número real, el número real obtenido por medio de la regla $f(x) = ax^2 + bx + c$ en donde a,b y c son números reales $a = 0$.

- El conjunto de todos los posibles valores de x, según el contexto del problema, es el dominio y el de los valores correspondientes de y es el rango de la función.

- La gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ es una parábola con eje vertical. Su vértice tiene por coordenadas :

$$x = -\frac{b}{2a} \quad ; \quad y = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

■ Una función cuadrática tiene su valor máximo o mínimo, según el caso, en la abscisa del vértice de su gráfica. La ordenada de éste es el valor máximo o mínimo de la función.

■ Asociadas a las funciones cuadráticas están las ecuaciones cuadráticas, las cuales toman la forma $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

■ La fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ; \; a \neq 0 .$$

■ El discriminante de $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$ es: $b^2 - 4ac$. De su signo depende la naturaleza de las soluciones de la ecuación.

ACTIVIDADES DE CONSOLIDACION

Verifica el aprendizaje que has alcanzado realizando las siguientes actividades:

1. Resuelve las siguientes ecuaciones emplendo el método que en cada caso se indica:

Por factorización.

a) $x^2 - x - 6 = 0$ b) $2x^2 + 7x - 4 = 0$

Completando cuadrados.

c) $x^2 - 10x + 5 = 0$ d) $4x^2 - 8x + 5 = 0$

Empleando la fórmula general.

e) $2x^2 + x - 105 = 0$ f) $10x^2 + 9x - 7 = 0$

Gráficamente, despejando a x^2.

g) $x^2 + x -12 = 0$ h) $6x^2 - 5x - 6 = 0$

2. Resuelve los siguientes problemas:

a) Las dimensiones de las pantallas de las televisiones se dan en el comercio por la medida de su diagonal. Si la razón del largo al ancho debe ser de 4/3 , ¿cuáles son las dimensiones (largo y ancho) de la pantalla de una televisión de 14 pulgadas?

b) La velocidad (V) de escape de un planeta depende de su radio (R) y del valor de la aceleración (g) debida a su gravedad. La fórmula

$V^2 = 2gR$ expresa la relación que existe entre esas cantidades. ¿Cuál es la velocidad de escape, en km/s, en un planeta cuyo radio mide 5000 km y en donde $g = 0.002$ km/s^2?

c) Un grupo de estudiantes compró una calculadora con graficador que costó 600 nuevos pesos. Inicialmente el grupo se componía de x alumnos, pero al anexarse otros cinco, la cantidad que cada uno tenía que pagar se redujo en 10 nuevos pesos. ¿De cuántos alumnos constaba el grupo inicial?

3. Para cada una de las funciones $f(x) = -x^2 + 2x + 8$,
$g(x) = -x^2 + 6x$ y $h(x) = x^2 - 4x - 5$

a) Determina las coordenadas del vértice, las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes, la concavidad y la ecuación del eje de simetría de la gráfica de la función

b) Aplicando los resultados del inciso anterior bosqueja la gráfica.

c) Determina el valor máximo o mínimo de la función.

d) Calcula los ceros de la función.

4. Un cohete es disparado verticalmente hacia arriba desde una torre de lanzamiento de 20 m de altura con una velocidad inicial de 250 m/s. La aceleración ($g \approx 9.8$ m/s^2) debida a la gravedad de la Tierra, afecta a su movimiento.

Se desea determinar la altura del cohete en diferentes instantes.

a) Investiga en un libro de Física la fórmula que relaciona el desplazamiento y el tiempo en el tipo de movimiento del cohete.

b) Construye el modelo para el caso del cohete adaptando la fórmula.

c) Elabora una tabla con valores aceptables

d) Traza la gráfica.

e) A partir del modelo que obtuviste calcula la altura máxima, sobre el suelo, que alcanza el cohete .

f) ¿En cuántos segundos alcanza su altura máxima?

LINEAMIENTOS DE AUTOEVALUACION

Soluciones a las actividades de consolidación.

1. a) $x' = 3$; $x' = -2$ b) $x' = 1/2$; $x'' = -4$

   c) $x' = 5 + \sqrt{20}$; $x'' = 5 - \sqrt{20}$ d) no tiene solucion real

   e) $x' = -15/2$; $x'' = 7$ f) $x' = 1/2$; $x'' = -7/5$

   g) $x' = -4$; $x'' = 3$ g) $x' = -2/3$; $x'' = 3/2$

2. a) largo: 11.2 pulgadas ancho: 8.4 pulgadas

   b) 10 km/s

   c) 15 alumnos

3. $f(x) = -x^2 + 2x + 8$

Vértice	$V(1,9)$
Intersección con "X"	$(-2,0)$ $(4,0)$
Intersección con "Y"	$(0,8)$
Concavidad	hacia abajo
Eje de simetría	$x = 1$

Valor máximo	$f(1) = 9$
Ceros	$x = -2 \quad x = 4$

$$g(x) = -x^2 + 6x$$

Vértice	$V(3,9)$
Intersección con "X"	$(0,0) \quad (6,0)$
Intersección con "Y"	$(0,0)$
Concavidad	hacia abajo
Eje de simetría	
Valor máximo	$g(3) = 9$
Ceros	$x = 0 \quad x = 6$

$$h(x) = x^2 - 4x - 5$$

Vértice	$V(2,-9)$
Intersección con "X"	$(-1,0) \quad (5,0)$
Intersección con "Y"	$(0,-5)$
Concavidad	hacia arriba
Eje de simetría	$x = 2$
Valor mínimo	$h(2) = -9$
Ceros	$x = -1 \quad x = 5$

4. b) $h = -4.9t^2 + 250t + 20$ e) $h \approx 3208.7$ m f) $t \approx 25.5$ s

BIBLIOGRAFIA

1. Barnett, Raymond A.: Algebra y Trigonometría, 2ª edición en español. Trad. Diego Edmundo Barahona Peña y Ma. González Cerezo. Ed. Mc.GRAW - HlLL, México, 1978.

2. Phillips, Elizabeth . Butts, Thomas. Shaughnessy M.: Algebra con Aplicaciones. Ed. Harla, México, 1978.

3. Schools Council : Modelos Polinomiales. Ed. CECSA, México, 1985.

4. Stollberg, Robert. Física, fundamentos y fronteras. Trad. Rafael Póstigo, Publicaciones Cultural, México, 1979.

5. Swokowski, Earl.: Algebra y Trigonometria con Geometría Analítica, Trad. María Trigueros, Grupo Editorial Iberoamérica, México 1988.

3.1 Sugerencias sobre el empleo del fascículo en la clase.

Este material podría ser empleado para trabajar en clase organizando a los alumnos en grupos pequeños. Ellos podrían analizar el texto deteniéndose en los párrafos señalados con el símbolo para contestar a las preguntas o llevar a cabo las actividades indicadas antes de continuar con la lectura del texto.

Las soluciones a los problemas y las preguntas se proporcionan generalmente en seguida, para que los alumnos requieran de un mínimo de asesoría.

Conviene recomendar a los alumnos que sean honestos con ellos mismos y realicen un esfuerzo por hallar la solución antes de consultar las respuestas.

El material puede ser empleado en el sistema abierto. En este caso el estudiante puede llevar a cabo el estudio del texto de manera individual u organizando círculos de estudio. Plantearán sus dudas al consultor cuando se entrevisten con él.

El profesor que prefiere el método expositivo podría emplear el material como guía para la conducción de su exposición indicando a los alumnos las actividades que se sugieren en el fascículo.

3.2 Validación

La evaluación del material didáctico propuesto se efectuará llevándolo a la práctica y observando cómo los estudiantes reaccionan ante él.
Los resultados de los exámenes que se apliquen a los estudiantes serán también un indicador de la eficacia del material, aunque ellos son influidos por múltiples factores.
Las opiniones de los alumnos vertidas en entrevistas o cuestionarios serán también de utilidad para juzgar la pertinencia de la propuesta.

4 CONCLUSIONES

Aunque las condiciones laborales son difíciles, es posible que el profesor realice un esfuerzo para investigar y elaborar materiales relativos a su práctica docente.

La ventaja de que el profesor elabore sus materiales es que éstos son más adecuados a las condiciones de la institución en que realiza su práctica docente y a sus propias características.

Cuando el maestro confecciona un material investiga profundizando en el tema, lo cual puede dar por resultado que descubra aspectos importantes relacionados con el aprendizaje del contenido que no había advertido antes.

Por lo señalado anteriormente considero que es necesario complementar los libros de texto con materiales como el que se propone.

BIBLIOGRAFIA

Barnett, Raymond A.: Algebra y Trigonometría. Trad. Diego Edmundo Barahona, Mc Graw Hill, México, 1986.

Beggs, Robert I. Métodos avanzados y modelos. Trad. José Cervantes Malo, U.T.E.H.A., México, 1972.

Colegio de Bachilleres: El modelo educativo del Colegio de Bachilleres, México, 1993.

Colegio de Bachilleres: Programa de la asignatura Matemáticas II, México, 1992.

Compagnon, Pierre. Mathématiques 1^{re} A_1 et B, Collection "Fractale". Bordas, París, 1988.

Demana Franklin. College Algebra and Trigonometry, Addison-Wesley, USA, 1992.

Kramer, Arthur D.: Fundamentos de Matemáticas, un enfoque para técnicos. Trad. Ma. de Lourdes Fournier, McGraw-Hill, México, 1983.

Kurosch, A. G. Ecuaciones algebraicas de grados arbitrarios. Editorial Mir, Moscú.

Nichols, Eugene D.: Algebra 1. Trad. Andrés Sestier, CECSA, México, 1980.

Phillips, Elizabeth: Algebra con Aplicaciones.Trad. Martha de Garay, Harla, México, 1991.

School Council Sixth Form Mathematics Proyect. Modelos Polinomiales. Trad. Marco Antonio Valencia, CECSA, México, 1978.

Swokowski, Earl.: Algebra y trigonometría con geometría analítica. Trad. María Trigueros, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1988.

Stollberg, Robert: Física, fundamentos y fronteras. Trad. Rafael Póstigo. Publicaciones Cultural, México, 1979.