UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

ECUACIONES DE YANG-MILLS Y VARIEDADES DIFERENCIABLES DE DIMENSION CUATRO.

TESIS

que para obtener el grado académico de

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

Presenta:

JOSE LUIS CISNEROS MOLINA

DIRECTOR DE TESIS: Dr. Marcelo Alberto Aguilar González.

1993

INDICE

INTRODUCCIÓN

Actualmente hay una intensa investigación en el campo de las variedades diferenciables de dimensión 4, donde el objetivo principal es dar una clasificación. Para su estudio, a cada variedad se le asocia una forma bilineal simétrica unimodular, definida sobre su segundo grupo de homología $H_2(M; \mathbf{Z})$, llamada forma de intersección de la variedad. En 1949, Whitehead prueba que las variedades de dimensión 4 cerradas, orientadas y simplemente conexas estan clasificadas por su forma de intersección salvo equivalencia homotópica. En 1982, Freedman da una clasificación completa de las variedades topológicas de dimensión 4 simplemente conexas y en 1983, Donalson da restricciones en las formas bilineales que pueden ser formas de intersección de variedades diferenciables de dimensión 4, empleando con mucho éxito, técnicas provenientes de la física de la la teoría de los campos de Yang-Mills, a partir de entonces, se abrió un nuevo camino para el estudio de las variedades diferenciables de dimensión 4 y es la razón por la que muchos topólogos están interesados en estudiar teorias de Norma.

Para la demostración del Teorema de Donalson, se construye un haz vectorial sobre M con fibra $\mathbf{SU(2)}$ correspondiente a la clase de Chern -1 y se estudia el espacio de las conecciones autoduales en dicho haz, que son las conexiones cuya curvatura satisface las ecuaciones de Yang-Mills. Utilizando el Teorema del índice de Atiyah-Singer se demuestra que el espacio de conecciones autoduales es una variedad diferenciable de dimensión cinco. Las singularidades corresponden a conecciones reducibles y cada una tiene una vecindad que es un cono sobre CP^2. Esto permite construir una variedad de dimensión 5, W, tal que su frontera es M y la union ajena de copias de CP^2, posteriormente, mediante un argumento de cobordismo se llega al resultado.

El propósito del presente trabajo, es llegar a entender el teorema de Donalson pero mediante la prueba alternativa que dieron Fintushel y Stern en 1984 utilizando haces vectoriales con fibra $\mathbf{SO}(3)$, en vez de $\mathbf{SU}(2)$ como lo hizo Donalson originalmente, dando como resultado una demostración mas topológica que simplifica considerablemente las cuestiones de análisis involucladas.

A continuación daremos una idea de como se desarrolla el trabajo.

En el Capítulos 0, se describen con mas detalle algunos de los resultados sobre variedades de dimensión 4 previos al teorema de Donalson y se presenta material preliminar sobre formas bilineales simétricas y de formas de intersección.

En los Capítulos 1 y 2, se definen los conceptos de conexión, curvatura y clases características y se dan algunos resultados relacionados con ellos que se emplearán en los capítulos posteriores par el estudio de los espacios de móduli.

En el Capítulo 3 se introducen las ecuaciones de Yang-Mills y el grupo de norma, y se definen los espacios de móduli de conexiones.

En el Capítulo 4 se estudian las $\mathbf{SO}(3)$-conexiones reducibles autoduales, probando su existencia y contándolas salvo equivalencia bajo el grupo de norma.

En el Capítulo 5 se emplean los complejos elípticos y el teorema del índice de Atiyah-Singer para calcular la dimensión del espacio de móduli.

Los Capítulos 6 y 7 presentan un análisis detallado de los espacios de móduli virtuales. El Capítulo 5 estudia al espacio de móduli $\underset{\sim}{\mathcal{B}}$ de las conexiones virtuales, el cual contiene al espacio de móduli $\underset{\sim}{\mathcal{M}}$ de las conexiones virtuales autoduales que se estudia en el Capítulo 6.

En el Capítulo 8 se combinan los resultados anteriores para demostrar el teorema de Donalson.

CAPÍTULO 0

VARIEDADES DE DIMENSIÓN 4

El comenzar las cosas,
es tenerlas medio acabadas.
— CERVANTES, *Don Quijote de la Mancha.* (1615)

1. INTRODUCCION .

En el presente capítulo, daremos un breve panorama sobre los resultados acerca de la clasificación de variedades de dimensión 4, anteriores al Teorema de Donalson. Primero ilustraremos la importancia del papel que juega la forma de intersección en la clasificación de las variedades de dimensión 4, comparándola con el resultado clásico de la clasificación de las superficies cerradas. Posteriormente enunciaremos el Teorema de Freedman, que nos da una clasificación de las variedades topológicas de dimensión 4, y compararemos con algunos resultados que consideran el caso diferenciable.

2. ESPACIOS CON PRODUCTO INTERIOR .

En esta sección, veremos algunas definiciones sobre espacios con producto interior, que nos serán útiles para clasificar a las formas de intersección de las variedades de dimensión 4.

Def: Un *espacio con producto interior* sobre un subanillo A de $\mathbf{R}$, es un A-módulo libre finitamente generado V con una forma bilineal simétrica no degenerada (o *producto interior*) $\mu = \langle\ ,\ \rangle$. Si $v, w \in V$, denotaremos su producto interior por $\mu(v,w)$ o $\langle v,w\rangle$. Un espacio con producto interior es *positivo definido* si $\langle v,v\rangle > 0$ para toda $v \neq 0$, *negativo definido* si $\langle v,v\rangle < 0$, para toda $v \neq 0$ e *indefinido*, si $\langle v,v\rangle$ toma valores positivos y negativos.

Def: Si μ es una forma simétrica bilineal en V, existen dos invariantes fundamentales, el *rango* y la *signatura*, que están definidos de la siguiente manera.

$$\operatorname{rang} V = \dim(V \otimes \mathbf{R}),$$
$$\operatorname{sign} V = \operatorname{rang} V - 2q,$$

donde q es la dimensión máxima de un subepacio de $V \otimes \mathbf{R}$ sobre el cual μ es negativa definida.

Def: Si $\operatorname{rang} V = k$ y consideramos una base de V, podemos representar a $\langle\ ,\ \rangle$ mediante una matriz de $k \times k$ y por lo tanto, podemos asociarle a μ el *determinante* de dicha matriz. Una forma bilineal es *unimodular*, si $|\mu| = 1$.

Def: Dos espacios con producto interior (V, μ) y (V', μ') son *isomorfos* si existe una biyección R-lineal $f: V \to V'$ que

$$\mu'(f(u), f(v)) = \mu(u, v)$$

para toda u y v en V.

Dos elementos u, v de un espacio con producto interior son *ortogonales* si $\mu(u, v) = 0$.

Ejemplo: El espacio con producto interior diagonal, es cualquier A-módulo libre finitamente generado, cuya forma bilineal es (respecto a alguna base) la matriz identidad.

3. CLASIFICACION DE SUPERFICIES CERRADAS .

Una buena motivación hacia la teoría de variedades de dimensión 4, consiste en expresar el teorema clásico de clasificación de superficies cerradas (compactas y sin frontera), en términos de la forma de intersección.

Sea Σ una superficie conexa, compacta y sin frontera y sean γ_1 y γ_2 dos curvas cerradas en Σ. Mediante pequeñas deformaciones, podemos hacer que γ_1 y γ_2 sean transversales, entonces las curvas se intersectarán en un número finito de puntos. Este *número de intersección*, módulo 2, solamente depende de las clases de homología de γ_1 y γ_2 en $\mathrm{H}_1(\Sigma; \mathbf{Z}_2)$, por lo que define una forma simétrica bilineal

$$\mu: \mathrm{H}_1(\Sigma; \mathbf{Z}_2) \times \mathrm{H}_1(\Sigma; \mathbf{Z}_2) \to \mathbf{Z}_2$$

llamada la *forma de intersección* de Σ. Por la dualidad de Poincaré, tenemos que esta forma bilineal es no degenerada. Decimos que μ es de tipo II si $\mu(x, x) = 0$ para toda x y en otro caso, diremos que es de tipo I.

Teorema 0.3.1: *Dos superficies conexas y compactas son difeomorfas, si y sólo si, sus formas de intersección son equivalentes. Las superficies pueden separarse en dos tipos: I y II. Las de tipo I no son orientables y se pueden descomponer como suma conexa de planos proyectivos reales. Las de tipo II son orientables y se pueden descomponer como suma conexa de una esfera y toros.*

I	$\mu \cong \langle 1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle 1 \rangle$	$\Sigma \cong \mathbf{R}P^2 \# \cdots \# \mathbf{R}P^2$
II	$\mu \cong J_2 \oplus \cdots \oplus J_2$	$\Sigma \cong S^2 \#(S^1 \times S^1) \# \cdots \#(S^1 \times S^1)$

con S^2 correspondiendo al caso en que μ es vacía y,

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. VARIEDADES DE DIMENSION 4 SIMPLEMENTE CONEXAS .

La clasificación de estas variedades también está dada en términos de la forma de intersección definida en el grupo de homología de dimensión 2:

$$\mu : \mathrm{H}_2(M;\mathbf{Z}) \times \mathrm{H}_2(M;\mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}.$$

La dualidad de Poincaré implica en este caso que μ es unimodular (esta condición nos dice que induce un isomorfismo entre los grupos H_2 y $\mathbf{H}^2 = \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_2;\mathbf{Z})$). Bajo las hipótesis de que M es una variedad de dimensión 4, simplemente conexa y orientada, toda la información geométrica de M se encuentra en $\mathrm{H}_2(M;\mathbf{Z})$, ya que como $\pi_1(M) = \{0\}$, tenemos que $\mathrm{H}_1(M;\mathbf{Z}) = \{0\}$ (y por lo tanto $\mathbf{H}^3(M;\mathbf{Z}) = \{0\}$ por dualidad de Poincaré). Luego, por el teorema de coeficientes universales, $\mathrm{H}_1(M;\mathbf{Z}) = \{0\}$ implica que $\mathbf{H}^2(M;\mathbf{Z})$ es un grupo abeliano libre y por dualidad de Poincaré, $\mathrm{H}_2(M;\mathbf{Z})$ también lo es. Mediante la dualidad de Poincaré, podemos ver a la forma de intersección definida sobre los grupos de cohomología mediante el producto 'cup' $\cup$

$$(x, y) \mapsto (x \cup y)[M],$$

donde $[M]$ es la clase de orientación de M en $\mathbf{H}^4(M;\mathbf{Z})$ dada por la orientación.

Geométricamente, podemos interpretar a dos clases $x, y \in \mathrm{H}_2(M;\mathbf{Z})$ como dos superficies Σ_1 y Σ_2 en M, puestas en posición general, que se intersectan en un número finito de puntos. A cada punto se le asocia un signo ± 1, dependiendo si concuerdan las orientaciones mediante el isomorfismo canónico

$$TM = T\Sigma_1 \oplus T\Sigma_2,$$

de los haces tangentes en dichos puntos. El *número de intersección* $\mu(x, y)$ está dado por el número de puntos contados con signo.

La importancia del estudio de las formas de intersección de las variedades de dimensión 4 simplemente conexas está reflejada en el resultado clásico de Whitehead.

Teorema 0.4.1: *(Whitehead [20]) Dos variedades de dimensión 4, simplemente conexas, cerradas y orientadas, son homotópicamente equivalentes si y sólo si sus formas de intersección són equivalentes.* ∎

El teorema de Whitehead sugiere hacerse las siguientes preguntas:

- **Existencia:** ¿Cuáles formas bilineales simétricas unimodulares pueden ser formas de intersección de una variedad de dimensión 4 cerrada simplemente conexa?
- ¿Cúantas variedades no equivalentes tienen la misma forma de intersección?

Ambas preguntas pueden hacerse tanto en la categoría topológica como en la diferenciable, donde 'equivalente' significa 'homeomorfo' o 'difeomorfo' respectivamente.

5. CLASIFICACION DE FORMAS BILINEALES .

Por el teorema de Whitehead, tenemos que al clasificar a las formas de intersección, clasificamos a las variedades de dimensón 4 simplemente conexas salvo equivalencia homotópica.

A continuación, enunciaremos los resultados principales sobre la clasificación de formas bilineales simétricas unimodulares, para mayores detalles consultar [13].

Def: Sea μ una forma bilineal simétrica sobre V, μ es de *tipo II* si

$$\mu(v,v) \equiv 0 \pmod 2 \text{ para toda } v \in V;$$

en otro caso, μ es de *tipo I*. Diremos también, que un espacio con producto interior es de tipo I o II de acuerdo con el tipo de su producto interior.

Existe una restricción en cuanto a la signatura de los espacios con producto interior de tipo II.

Proposición 0.5.1: [13, Teo. 5.1, p. 24] *La signatura de un espacio con producto interior de tipo II es un múltiplo de 8.* ∎

Las formas bilineales simétricas unimodulares indefinidas, están completamente determinadas (salvo equivalencia) por su rango y signatura.

Teorema 0.5.2: [13, Teo. 5.3, p. 25] *Sea V un espacio con producto interior sobre $\mathbf{Z}$ con producto interior μ indefinido.*

- *Si μ es de tipo I, entonces*

$$\mu \cong \langle 1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle 1 \rangle \oplus \langle -1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle -1 \rangle,$$

donde $\langle 1 \rangle$ *y* $\langle -1 \rangle$ *son las dos posibles formas de rango 1 y por ser* μ *indefinida, ambas aparecen en la descomposición.*

- *Si* μ *es de tipo II, entonces*

$$\mu \cong H \oplus \cdots \oplus H \oplus E_8 \oplus \cdots \oplus E_8,$$

donde

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E^8 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

y al menos aparece una H. ∎

La clasificación de las formas simétricas unimodulares definidas es mucho mas complicada: Por ejemplo, para las formas de tipo II, se sabe que hay solamente una de rango 8; que hay dos no equivalentes de rango 16; que hay 24 no equivalentes de rango 24; mas de 10^7 no equivalentes de rango 32 y mas de 10^{51} de rango 40.

6. VARIEDADES TOPOLOGICAS .

En el caso topológico, las preguntas de existencia y unicidad planteadas anteriormente fueron totalmente contestadas por Freedman en el siguiente teorema.

Teorema 0.6.1: *(Freedman [5]) Toda forma bilineal simétrica unimodular, es la forma de intersección de una variedad de dimensión 4 simplemente conexa, cerrada y orientada. En el caso de que la forma sea de tipo II, la variedad es única salvo homeomorfismo y en el caso que sea del tipo I, existen exactamente dos clases de homeomorfismo no equivalentes correspondientes a la forma de intersección.* ∎

7. VARIEDADES DIFERENCIABLES .

Al considerer las mismas preguntas en el caso de variedades diferenciables, podemos ver que existe una gran diferencia, ya que es sabido que algunas formas bilineales simétricas unimodulares, no pueden ser formas de intersección de variedades diferenciables de dimensión 4 simplemente conexas, cerradas y orientadas.

Teorema 0.7.1: *(Rochlin* [16]*) Si M es una variedad diferenciable de dimensión 4, simplemente conexa, cerrada y orientada, con forma de intersección μ de tipo II, entonces*

$$\operatorname{sign}\mu \equiv 0 \pmod{16}. \blacksquare$$

Por la Proposición 0.5.1, tenemos que la signatura de una forma de tipo II siempre es múltiplo de 8. Además, formas con signatura congruentes con 8 mod 16 sí existen (por ejemplo, la signatura de E_8 es 8). Por lo tanto, podemos definir el *invariante de Rochlin* $\rho(\mu)$ de una forma unimodular de tipo II como

$$\rho(\mu) = \frac{1}{8}\operatorname{sign}(\mu) \pmod{2}.$$

Las formas con invariante de Rochlin distinto de cero, no pueden ser formas de intersección de variedades diferenciables de dimensión 4 simplemente conexas, cerradas y orientadas.

Otro resultado que restringe a las formas unimodulares para ser formas de intersección de variedades diferenciables de dimensión 4 con las hipótesis mencionadas, para el caso de formas definidas positivas, es el Teorema de Donalson, el cual será nuestro objetivo a lo largo de este trabajo.

Teorema 0.7.2: *(Donalson* [2], [3]*) Si M es una variedad de dimensión 4, cerrada, orientada y simplemente conexa, con forma de intersección positiva definida μ, entonces μ es equivalente a la forma diagonal.* $\blacksquare$

Una característica importante del resultado anterior es que para estudiar variedades diferenciables de dimensión 4 con forma de intersección positiva definida, no hay que enfrentar las dificultades de clasificación de dichas formas.

Comparando los resultados de Freedman y Donalson, podemos ver que hay muchas variedades topológicas que no admiten estructuras diferenciables.

Por último, cabe mencionar que a partir de los resultados de Freedman y Donalson se puede demostrar la existencia de $\mathbf{R}^4$ exóticos.

Teorema 0.7.3: *Existe una variedad homeomorfa pero no difeomorfa a* $\mathbf{R}^4$.

Lo sorpendente de esto es que es la única dimensión para la cual sucede esto: para $n \neq 4$, no existen $\mathbf{R}^n$ exóticos. Ver **[12, p. 5-10]** para un bosquejo de la demostración.

CAPÍTULO 1

CONEXIONES

De todas las Geometrías, la que a mi ser cautiva, es la que proviene de ti.
— JOSE LUIS CISNEROS (1992)

1. INTRODUCCION .

En este capítulo, veremos varias definiciones equivalentes de una conexión en un haz fibrado. Empezaremos por la definición más general y geométrica, hasta llegar a la que emplearemos a lo largo de los demás capítulos para el caso particular de haces vectoriales.

2. CONEXIONES .

Sea $\xi = (E, p, B, F, G)$ un haz fibrado con espacio total E, base M, proyección $p: E \to M$, fibra F y grupo estructural G.

Un haz fibrado equipado con una conexión, puede ser pensado intuitivamente de la siguiente manera. Tenemos una familia $\{F_x\}$ de espacios (fibras)(donde el parámetro x corre sobre el espacio base M) cuya unión es el espacio total E. Dada cualquier trayectoria $\gamma(t)$ con $a \leq t \leq b$, en la base M, la conexión proporciona una regla para el "transporte paralelo" de la fibra F a lo largo de la trayectoria γ de un extremo al otro, es decir, nos da un difeomorfismo

$$\varphi_\gamma: F_{x_0} \to F_{x_1} \qquad x_0 = \gamma(a) \text{ y } x_1 = \gamma(b)$$

que satisface las siguientes condiciones:

(i) φ_γ depende continuamente de la trayectoria γ.

(ii) $\varphi_{\gamma_1\gamma_2} = \varphi_{\gamma_1}\varphi_{\gamma_2}$; $\varphi_{\gamma^{-1}} = (\varphi_\gamma)^{-1}$; y si la trayectoria es constante, entonces φ_γ es la identidad.

(iii) φ_γ es independiente de la parametrización de γ.

A continuación, daremos una definición precisa de una conexión en un haz fibrado y después veremos como a partir de esta definición obtenemos las aplicaciones φ_γ. La idea intuitiva es dar sobre E una familia de direcciones horizontales, es decir, para cada punto $e \in E$, dar una descomposición del espacio tangente a E en e en el subespacio tangente a la fibra F_e y un subespacio "horizontal" Q_e.

Def: Sea $\xi = (E, p, M, F, G)$ un haz fibrado sobre una variedad M. Para cada $e \in E$, sea T_eE el espacio tangente de E en e y T_eF_e el subespcio de T_eE que consiste en los vectores tangentes a la fibra que pasa por e. Una *conexión* en E, es un subhaz Q del haz tangente TE de E, tal que para cada punto $e \in E$, la fibra de Q sobre e, es un subespacio Q_e de T_eE, tal que

(a) $\dim Q_e = m$ con $m = \dim M$,

(b) $T_eE = T_eF_e \oplus Q_e$.

Llamaremos a T_eF_e el *subespacio vertical* y a Q_e el *subespacio horizontal* de T_eE. Un vector $X \in T_eE$ es llamado *vertical* (resp. *horizontal*) si pertenece a T_eF_e (resp. a Q_e). Por (b), todo vector $X \in T_eE$ puede ser escrito de manera única como

$$X = Y + Z, \quad \text{donde} \quad Y \in T_eF_e \text{ y } Z \in Q_e.$$

Llamaremos a Y la *componente vertical* de X y a Z, la *componente horizontal* de X.

En términos de haces vectoriales, la definición anterior puede verse de la siguiente manera. Sea

$$i: F_e \to E$$

la inclusión, entonces tenemos que su diferencial

$$di: TF_e \to TE$$

es un homomorfismo de haces vectoriales.

Sea p^*TM, el haz vectorial sobre E, dado por el producto fibrado ("pull back") del haz tangente de M, $\pi_M: TM \to M$ mediante la proyección $p: E \to M$, expresada en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
p^*TM \arrow[r] \arrow[d, "p^*\pi_M"'] & TM \arrow[d, "\pi_M"] \\
E \arrow[r, "p"'] & M
\end{tikzcd}$$

donde

$$p^*TM = \{ (e, v) \in E \times TM \mid p(e) = \pi_M(v) \}.$$

Para $e \in E$, tenemos que

$$P^*\pi_M^{-1}(e) = \{ (e, v) \in E \times TM \mid v \in \pi_M^{-1}(x),\ p(e) = x \}$$

por lo tanto, $p^*\pi_M^{-1}(e) \cong T_xM$.

Por otro lado, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} TE \arrow[r, "dp"] \arrow[d, "\pi_E"'] & TM \arrow[d, "\pi_m"] \\ E \arrow[r, "p"'] & M, \end{tikzcd}$$

y por la propiedad universal del producto fibrado, tenemos que existe un único homomorfismo de haces

$$\begin{aligned} \varpi\colon TE &\to p^*TM \\ v &\mapsto (\pi_E(v), dp(v)) \end{aligned}$$

que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} TE \arrow[dr, "\varpi"'] & & \\ & p^*TM \arrow[r] \arrow[d, "p^*\pi_M"'] & TM \arrow[d, "\pi_M"] \\ & E \arrow[r, "p"'] & M. \end{tikzcd}$$

Entonces tenemos la siguiente sucesión de haces vectoriales

$$0 \longrightarrow TF_u \xrightarrow{di} TE \xrightarrow{\varpi} p^*TM \longrightarrow 0,$$

que es exacta, ya que $dp\mid_e (T_eF_e) = 0$ y habíamos visto que $p^*\pi_M^{-1}(e) \cong T_xM$. Por lo tanto, se escinde y obtenemos una descomposición de T_eE como suma directa de T_eF_e y $p^*\pi_M^{-1}(e) \cong T_xM$, que corresponde a la descomposición en subespacios horizonteles definida anteriormente. Nótese que distintas escisiones de la sucesión nos dan diferentes descomposiciones, o en otras palabras, distintas conexiones en E.

El método geométrico mas simple de obtener una conexión sobre un haz fibrado, es explotar la existencia de una métrica Riemanniana en E, definiendo la las direcciones horizontales en cada punto de E, como el subespacio de dimensión m del espacio tangente, ortogonal al espacio tangente a la fibra que pasa por dicho punto.

Un método alternativo para definir una conexión, consiste en dar el campo de direcciones horizontales sobre E, mediante una 1-forma diferencial sobre E con valores vectoriales.

Para cada fibra F_e de E (donde $F_e = p^{-1}(x)$, $p(e) = x$ y $x \in M$), definimos una forma con valores en TF_e de la siguiente manera:

$$\bar{\omega}V = V \qquad \text{para toda } V \in T_eF_e.$$

Nótese que $\bar{\omega}$ no se anula en vectores distintos de cero (pues básicamente es la identidad).

Def: Una *conexión* en un haz fibrado, es una 1-forma ω sobre E, con valores en el haz tangente TF_e tal que la restricción de la forma ω a la fibra F_e, es la 1-forma $\bar{\omega}$ definida anteriormente, es decir, si consideramos la inclusión de la fibra F_e en E

$$i: F_e \to E$$

entonces

$$i^*\omega = \bar{\omega}.$$

A continuación, veremos la equivalencia de las dos definiciones de conexión que hemos dado.

Lema 1.2.1: *Sea $\xi = (E, p, M, F, G)$ un haz fibrado sobre una variedad M. Entonces*

(i) Dada cualquier conexión ω sobre ξ, la ecuación $\omega = 0$, define una familia de direcciones horizontales sobre E.

(ii) Recíprocamente, cualquier familia de direcciones horizontales sobre E, está definida por una ecuación de la forma $\omega = 0$, para alguna conexión ω en E.

Dem: ($\Rightarrow$) Sea ω la conexión dada, para $e \in E$, definimos el conjunto

$$Q_e = \{\, X \in T_eE \mid \omega_e X = 0 \,\},$$

veamos que los Q_e definen una familia de direcciones horizontales, verificando que cumplen las propiedades:

(a) $\dim Q_e = m$.

Sea $e \in E$, tenemos que $\dim T_eE$ es $n + m$, donde $m = \dim M$ y $n = \dim F$. Como la restricción de la forma ω_e a los vectores de T_eF_e, es la forma $\bar{\omega}$, que sabemos no se anula para vectores tangentes a T_eF_u distintos de cero, tenemos que $\dim \operatorname{im}\omega_e = n$. Como $Q_e = \ker\omega_e$ y tenemos que

$$\dim \ker\omega_e + \dim \operatorname{im}\omega_e = \dim T_eE$$

entonces

$$\begin{aligned}\dim Q_e &= \dim T_eE - \dim \operatorname{im}\omega_e\\ &= n+m-n\\ &= m.\end{aligned}$$

(b) $T_eE = T_eF_e \oplus Q_e$.

Como $\dim T_eE = \dim T_eF_e + \dim Q_e$, solo hay que verificar que $T_eF_e \cap Q_e = \{0\}$. Supongamos que no es así, entonces existe $X \neq 0$ tal que $X \in T_eF_e \cap Q_e$. Como $X \in Q_e$ tenemos que $\omega_e X = 0$, pero esto contradice el hecho de que si $X \in T_eF_e$ y $X \neq 0$ entonces $\omega_e X \neq 0$.

($\Leftarrow$) Dada una familia de direcciones horizontales, queremos construir una 1-forma en cada punto $e \in E$, con valores en TF_e, que cumple con la propiedad de que restringida a los vectores tangentes a la fibra, coincide con la 1-forma $\bar{\omega}$.

Para cada F_e, tenemos definida la forma $\bar{\omega}$, tal que

$$\bar{\omega}V = V \qquad \text{para toda } V \in T_eF_e.$$

De la propiedad (b) de la familia de direcciones horizontales, tenemos que para cada $e \in E$

$$T_eE = T_eF_e \oplus Q_e,$$

y tenemos definida la proyección

$$\pi\colon T_eE \to T_eF_e,$$

donde $\pi(Q_e) = 0$.

Construimos la forma ω pedida, como la composición

$$T_eE \xrightarrow{\pi} T_eF_e \xrightarrow{\bar{\omega}} T_eF_e,$$

para la cual es claro que cumple con la propiedad de la restricción. ∎

Observación: Hemos visto que una conexión queda definida mediante una 1-forma en E con valores en el haz TF_e. En el caso de que el haz sea un haz principal, es decir, que su fibra coincida con su grupo estructural $F = G$, tenemos que para cada punto $e \in E$, T_eG_e es isomorfo al álgebra de Lie de G, por lo tanto una conexión en un haz principal, queda definida mediante una 1-forma en E con valores en el álgebra de Lie de G. Este punto de vista es el que generalmente se describe en los textos, ver por ejemplo, [**4, Sec. 25**] o [**11, Cap. 2**].

Anteriormente vimos que la proyección $p: E \to M$ induce un homomorfismo lineal, mediante su diferencial $dp\,|_e: T_eE \to T_xM$, para cada $e \in E$, donde $p(e) = x$. Cuando una conexión es dada en E, dp manda al subespacio horizontal Q_e isomorfamente en T_xM.

Un *levantamiento horizontal*, de un campo vectorial X en M, es un único campo vectorial X^* en E que es horizontal y que se proyecta en X, es decir, tal que $dp(X_e^*) = X_{p(e)}$, para toda $e \in E$.

Lema 1.2.2: *Dada una conexión en E y un campo vectorial X en M, existe un único levantamiento horizontal X^* de X.*

Dem: La existencia y unicidad es clara del hecho de que dp es un isomorfismo lineal de Q_e en $T_{p(e)}M$. ∎

3. TRANSPORTE PARALELO .

Dada una conexión en un haz fibrado E, definiremos el transporte paralelo de las fibras a lo largo de una curva γ sobre la base.

Def: Sea $\gamma: [a, b] \to M$ una curva diferenciable por pedazos de clase C^1 en M. Un *levantamiento horizontal* de γ, es una curva horizontal $\gamma^*: [a, b] \to E$ en E, tal que $p(\gamma^*(t)) = \gamma(t)$ para $a \leq t \leq b$. Donde *curva horizontal* en E, significa una curva diferenciable por pedazos de clase C^1, cuyos vectores tangentes son horizontales.

La noción de levantamiento de una curva, corresponde a la noción de levantamiento de un campo vectorial. Si X^* es el levantamiento de un campo vectorial X en M, entonces la curva integral de X^* que pasa por un punto $e_0 \in E$, es el levantamiento de la curva integral de X, que pasa por el punto $x_0 = p(e_0) \in M$. Por lo tanto tenemos la siguiente:

Proposición 1.3.1: *Sea $\gamma(t) = x_t$ con $0 \leq t \leq 1$ una curva de clase C^1 en M. Para cualquier punto arbitrario e_0 de E con $p(e_0) = x_0$, existe un único levantamiento γ^* de γ, que comienza en $\gamma^*(0) = e_0$.* ∎

A continuación, utilizando la Proposición 1.3.1, definimos el transporte paralelo de las fibras de la siguiente manera.

Def: Sea $\gamma(t) = x_t$, con $0 \leq t \leq 1$, una curva diferenciable de clase C^1 en M. Sea e_0 un punto arbitrario de E con $p(e_0) = x_0$. El único levantamiento γ^* de γ que pasa por e_0, tiene como punto final a e_1, tal que $p(e_1) = x_1$. Haciendo variar a e_0 a lo largo de la fibra $p^{-1}(x_0)$, obtenemos una aplicación de la fibra $p^{-1}(x_0)$ en la fibra $p^{-1}(x_1)$, que manda a e_0 en e_1. Denotaremos a esta aplicación por φ_γ y diremos que es el *transporte paralelo* a lo largo de la curva γ.

4. SECCIONES DE HACES VECTORIALES .

A partir de ahora, solamente consideraremos haces vectoriales, ya que son el tipo de haces con los que trabajaremos en los capítulos posteriores. A continuación veremos a las conexiones en un haz vectorial en términos de una derivada covariante de secciones del haz, pero antes de ello, daremos alguna notación y un lema que nos será útil mas adelante.

Sean E y F haces vectoriales reales sobre una variedad Riemanniana C^∞ orientada M. Supondremos siempre, que los haces vectoriales son orientados, que estan equipados con una métrica Riemanniana y por lo tanto, que tienen un producto interior en cada fibra.

Denotaremos por $\Gamma(E)$ o ΓE a las secciones de E, por $\Omega^k = \Gamma(\bigwedge^k T^*M)$ a las k-formas sobre M y por $\Omega^k(E) = \Gamma(\bigwedge^k T^*M \otimes E)$ a las k-formas sobre M con valores en E.

Si $\langle\ ,\ \rangle$ es el producto interior sobre la fibra E_x de E sobre $x \in M$, entonces existe un producto interior inducido sobre $\bigwedge^k T_x^*M$ definido de la siguiente manera.

Sea $x \in M$; $v_1, \ldots, v_k, v_1', \ldots, v_k' \in T_x^*M$. Entonces definimos

$$\langle v_1 \wedge \cdots \wedge v_k, v_1' \wedge \cdots \wedge v_k' \rangle = \det(\langle v_i, v_j' \rangle)$$

donde det denota el determinante.

A su vez, podemos inducir un producto interior sobre $\bigwedge^k T_x^*M \otimes E$

Sea $x \in M$; $v_1, \ldots, v_k, v_1', \ldots, v_k' \in T_x^*M$ y $e, e' \in E_x$. Entonces definimos

$$\langle v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \otimes e, v_1' \wedge \cdots \wedge v_k' \otimes e' \rangle = \langle e, e' \rangle \cdot \det(\langle v_i, v_j' \rangle).$$

Lema 1.4.1: *Sean E y F haces vectoriales sobre M. Entonces la aplicación*

$$T\colon \Gamma\mathrm{Hom}(E,F) \to \mathrm{Hom}_{C^\infty}(\Gamma(E), \Gamma(F))$$

donde

$$T(s)(s')(x) = s(x)(s'(x))$$

es un isomorfismo, para $s \in \Gamma\mathrm{Hom}(E,F)$, $s' \in \Gamma(E)$ y $x \in M$.

Dem: Primero veamos que $T(s) \in \mathrm{Hom}_{C^\infty}(\Gamma(E), \Gamma(F))$.

Sean $s', s'' \in \Gamma(E)$ y $\lambda \in \mathbf{R}$. Entonces

$$\begin{aligned} T(s)(s'+s'')(x) &= s(x)((s'+s'')(x)) \\ &= s(x)(s'(x)+s''(x)) \\ &= s(x)s'(x)+s(x)s''(x) \\ &= T(s)(s')(x)+T(s)(s'')(x) \\ &= (T(s)(s')+T(s)(s''))(x) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} T(s)(\lambda s')(x) &= s(x)((\lambda s')(x)) \\ &= s(x)(\lambda s'(x)) \\ &= \lambda s(x)(s'(x)) \\ &= \lambda T(s)(s')(x). \end{aligned}$$

Como siguiente paso, comprobemos que T es un homomorfismo de $\Gamma\mathrm{Hom}(E,F)$ en $\mathrm{Hom}_{C^\infty}(\Gamma(E),\Gamma(F))$.

Sean $s_1, s_2 \in \Gamma\mathrm{Hom}(E,F)$, $s' \in \Gamma(E)$ y $\lambda \in \mathbf{R}$. Entonces

$$\begin{aligned} T(s_1+s_2)(s')(x) &= (s_1+s_2)(x)(s'(x)) \\ &= (s_1(x)+s_2(x))(s'(x)) \\ &= s_1(x)(s'(x))+s_2(x)(s'(x)) \\ &= T(s_1)(s')(x)+T(s_2)(s')(x) \\ &= (T(s_1)+T(s_2))(s')(x) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} T(\lambda s_1)(s')(x) &= (\lambda s_1)(s'(x)) \\ &= \lambda s_1(x)(s'(x)) \\ &= \lambda T(s_1)(s')(x). \end{aligned}$$

Por último, veamos que T es un isomorfismo dando su inversa

$$T^{-1}\colon \mathrm{Hom}_{C^\infty}(\Gamma(E),\Gamma(F)) \longrightarrow \Gamma\mathrm{Hom}(E,F).$$

Sea $f \in \mathrm{Hom}_{C^\infty}(\Gamma(E), \Gamma(F))$, $x \in M$ y $e \in E_x$. Si $s' \in \Gamma(E)$ tal que $s'(x) = e$, entonces T^{-1} está dada por

$$T^{-1}(f)(x)(e) = f(s')(x).$$

Veamos que efectivamente es la inversa, ya que

$$\begin{aligned}(T^{-1} \circ T)(s)(x)(e) &= T^{-1}(T(s))(x)(e) \\ &= T(s)(s')(x) \\ &= s(x)(s'(x)) \\ &= s(x)(e)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(T \circ T^{-1})(f)(s')(x) &= T(T^{-1}(f))(s')(x) \\ &= T^{-1}(f)(x)(s'(x)) \\ &= f(s')(x). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

5. CONEXIONES,DERIVADA COVARIANTE Y CURVATURA .

Sea E un haz vectorial sobre una variedad M dotado de una conexión. Sea $\gamma(t) = x_t$, con $a \leq t \leq b$ una curva en M y γ^* su levantamiento horizontal respecto a la conexión. Sea $s \in \Gamma(E)$ y sea $\dot{x}_t$ el vector tangente a γ en x_t. Entonces, para cada t fija, la ***derivada covariante*** $\nabla_{\dot{x}_t} s$ de s en la dirección de $\dot{x}_t$ está definida por

$$\nabla_{\dot{x}_t} s = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}[\varphi_t^{t+h}(s(x_{t+h})) - s(x_t)],$$

donde $\varphi_t^{t+h}: p^{-1}(x_{t+h}) \to p^{-1}(x_t)$ denota el dezplazamiento paralelo de la fibra $p^{-1}(x_{t+h})$ a lo largo de γ de x_{t+h} a x_t. Por lo tanto, $\nabla_{\dot{x}_t} s \in p^{-1}(x_t)$ para toda t y define una sección de E a lo largo de γ. La sección s es *paralela*, es decir, la curva $s(x_t)$ en E es horizontal, si y sólo si $\nabla_{\dot{x}_t} s = 0$ para toda t.

Sea X un campo vectorial en M y s una sección de E. Entonces la ***derivada covariante*** $\nabla_X s$ de s en la dirección de X, se define de la siguiente manera. Sea $\gamma(t) = x_t$ una curva integral de X, es decir $\dot{x}_t = X(x_t)$ para toda t. Entonces definimos

$$\nabla_X s = \nabla_{\dot{x}_t} s.$$

Proposición 1.5.1: *Sean X y Y campos vectoriales de M, s y s' secciones de E. Entonces*

(1) $\nabla_X(s+s') = \nabla_X s + \nabla_X s'$,

(2) $\nabla_X(\lambda s) = (X\lambda)\cdot s + \lambda \cdot \nabla_X s$, *donde* λ *es una función en* M *con valores reales.*

Dem: Tenemos que (1) es inmediato de la definición y (2) se sigue de que

$$\varphi_t^{t+h}(\lambda(x_{t+h})\cdot s(x_{t+h})) = \lambda(x_{t+h})\cdot \varphi_t^{t+h}(s(x_{t+h})). \quad \blacksquare$$

Todo lo anterior, lo podemos interpretar en términos de formas diferenciables con valores en E. Sea s sección de E, es decir $s \in \Gamma(E) = \Omega^0(E)$, para cada campo vectorial X en M, obtenemos mediante la derivada covariante una nueva sección $\nabla_X s \in \Omega^0(E)$. Entonces, podemos ver a la derivada covariante como un operador que manda 0-formas con valores en E (secciones de E) a 1-formas con valores en E (para cada campo vectorial en M obtenemos una sección de E). Entonces definimos una *conexión* d^E en E, como un homomorfismo $\mathbf{R}$-lineal $\mathrm{d}^E\colon \Omega^0(E) \to \Omega^1(E)$ el cual, por la Proposición 1.5.1, es una derivación, es decir, satisface la regla de Leibniz

$$\mathrm{d}^E(\sigma_1 \otimes \sigma_2) = d\sigma_1 \otimes \sigma_2 + \sigma_1 \wedge \mathrm{d}^E\sigma_2$$

donde $\sigma_1 \in \Omega^0$, $\sigma_2 \in \Omega^0(E)$ y d es la derivada exterior en el complejo de De Rham

$$0 \to \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \xrightarrow{d} \cdots$$

De ahora en adelante, esta será la definición de conexión que usaremos.

Podemos extender una conexión d^E a una aplicación $\mathbf{R}$-lineal

$$\mathrm{d}^E\colon \Omega^k(E) \to \Omega^{k+1}(E)$$

definiendo

$$\mathrm{d}^E(\sigma_1 \otimes \sigma_2) = d\sigma_1 \otimes \sigma_2 + (-1)^k \sigma_1 \wedge \mathrm{d}^E\sigma_2$$

para $\sigma_1 \in \Omega^k$ y $\sigma_2 \in \Omega^0(E)$.

Lema 1.5.2: $\mathrm{d}^E \circ \mathrm{d}^E\colon \Omega^0(E) \to \Omega^2(E)$ *es* $C^\infty(M)$*-lineal.*

Dem: Sea $s \in \Omega^0(E)$ y $f \in C^\infty(M)$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^E \circ \mathrm{d}^E(fs) &= \mathrm{d}^E(df \otimes s + f\mathrm{d}^E s)\\ &= ddf \otimes s - df \wedge \mathrm{d}^E s + df \wedge \mathrm{d}^E s + f\mathrm{d}^E\mathrm{d}^E s\\ &= f\mathrm{d}^E\mathrm{d}^E s. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Los Lemas 1.4.1 y 1.5.2 nos permiten ver a $\mathrm{d}^E \circ \mathrm{d}^E$ de diferentes maneras:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^E \circ \mathrm{d}^E &\in \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\Omega^0(E), \Omega^2(E)) \\ &= \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\Gamma(E), \Gamma(\textstyle\bigwedge^2 T^*M \otimes E)) \\ &\cong \Gamma(\mathrm{Hom}(E, \textstyle\bigwedge^2 T^*M \otimes E) \\ &\cong \Gamma(E^* \otimes (\textstyle\bigwedge^2 T^*M \otimes E)) \\ &\cong \Gamma(\textstyle\bigwedge^2 T^*M \otimes E \otimes (E^* \otimes E)) \\ &\cong \Gamma(\textstyle\bigwedge^2 T^*M \otimes E \otimes \mathrm{Hom}(E, E)) \\ &= \Omega^2 \mathrm{Hom}(E, E). \end{aligned}$$

Def: La *curvatura* $R = R(\mathrm{d}^E)$ de la conexión d^E, está definida como

$$R = \mathrm{d}^E \circ \mathrm{d}^E \in \Omega^2 \mathrm{Hom}(E, E).$$

A continuación, daremos las expresiones locales para d^E y R.

Sea E el haz vectorial trivial de dimensión k sobre M. Sea $s = (s_1, \ldots, s_k)$ un marco para E, es decir, una k-ada de secciones $s_i \in \Gamma(E)$ que generan a la fibra de E en cada punto. Entonces

$$\mathrm{d}^E s_i = \sum_{j=1}^{k} \theta_{ij} \otimes s_j \in \Gamma(T^*M \otimes E)$$

donde cada θ_{ij} es una 1-forma sobre M. La matriz $k \times k$ de 1-formas $\theta = (\theta_{ij})$, es llamada la *matriz de conexión* de d^E respecto al marco s.

Si $\sigma \in \Gamma(E)$, entonces $\sigma = \sum_{i=1}^{k} f_i s_i$, donde $f_i \in \mathrm{C}^\infty(M)$, por lo que podemos pensar a σ como una k-ada de funciones C^∞ sobre M, es decir, $\sigma = (f_1, \ldots, f_k)$. De manera análoga, si $\omega \in \Omega^l(E)$, entonces ω puede verse como una k-ada $(\omega_1, \ldots, \omega_k)$ de l-formas sobre M. Si $\sigma = (f_1, \ldots, f_k) \in \Gamma(E)$, entonces $d\sigma = (df_1, \ldots, df_k) \in \Omega^1(E)$ y

$$\mathrm{d}^E \sigma = d\sigma + \sigma\theta \in \Omega^1(E). \tag{$\natural$}$$

Si $s = (s_1, \ldots, s_k)$ es un marco para E, podemos representar a $R(\mathrm{d}^E)$ como una matriz $k \times k$ Θ de 2-formas

$$R(\mathrm{d}^E) s_i = \mathrm{d}^E \circ \mathrm{d}^E s_i = \sum_{j=1}^{k} \Theta_{ij} \otimes s_j$$

llamada la *matriz de curvatura* para d^E respecto al marco s.

Lema 1.5.3: *La matriz de curvatura de* d^E *puede ser expresada en términos de la matriz de conexión como*

$$\Theta = d\theta - \theta \wedge \theta.$$

Dem: Aplicando directamente la definición de d^E tenemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^E \circ \mathrm{d}^E(s_i) &= \mathrm{d}^E(\sum_j \theta_{ij} \otimes s_j) \\
&= \sum_j d\theta_{ij} \otimes s_j - \sum_j \theta_{ij} \wedge \mathrm{d}^E s_j \\
&= \sum_j d\theta_{ij} \otimes s_j - \sum_l \theta_{il} \wedge \mathrm{d}^E s_l \\
&= \sum_j d\theta_{ij} \otimes s_j - \sum_l \theta_{il} \wedge \sum_j \theta_{lj} \otimes s_j \\
&= \sum_j (d\theta_{ij} - \sum_l \theta_{il} \wedge \theta_{lj}) \otimes s_j. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Def: Dada una conexión d^E sobre E, definimos una conexión $\mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)}$ en $\mathrm{Hom}(E,E)$ como sigue. Sea $L \in \Omega^0\mathrm{Hom}(E,E)$ y $\phi \in \Gamma(E)$. Entonces definimos

$$\mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)}(L)(\phi) = \mathrm{d}^E(L\phi) - L\mathrm{d}^E\phi.$$

Es fácil verificar que

$$\mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)} L \in \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\Omega^0(E), \Omega^1(E)) \cong \Omega^1\mathrm{Hom}(E,E).$$

Esta definición se extiende de manera única a $\Omega^i\mathrm{Hom}(E,E)$ para toda i, de la siguiente manera. Sea $L \in \Omega^i\mathrm{Hom}(E,E)$ y $\phi \in \Gamma(E)$. Definimos

$$\mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)}(L)(\phi) = \mathrm{d}^E(L\phi) + (-1)^i L\mathrm{d}^E(\phi).$$

La representación local de $\mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)}$ puede darse en términos de la representación local de d^E. Supongamos que d^E tiene matriz de conexión θ y veamos a $L \in \Omega^i\mathrm{Hom}(E,E)$ como una matriz de $k \times K$ de i-formas. Entonces por ($\natural$) tenemos que

$$\mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)} L = dL + (-1)^i L\theta - \theta L$$

es una matriz de $k \times k$ de $(i+1)$-formas.

Teorema 1.5.4: [Identidad de Bianchi] $\mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)}R = 0$.

Dem:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)}R &= \mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)}(\mathrm{d}^E\mathrm{d}^E) \\ &= \mathrm{d}^E(\mathrm{d}^E\mathrm{d}^E) - (\mathrm{d}^E\mathrm{d}^E)\mathrm{d}^E = 0. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

En los siguientes resultados escogeremos una base local, en la cual, la matriz de conexión se anula en un punto y veremos como se transforma la curvatura bajo cambios de base.

Lema 1.5.5: *Sea E un haz vectorial sobre una variedad M y d^E una conexión en E. Entonces, para cada $x \in M$, existe una base local para E, tal que la matriz de conexión de 1-formas asociada, se anula en x.*

Dem: Sea $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ una vecindad localmente trivial de E y sea $s' = (s'_1, \ldots, s'_k)$ una base local arbitraria para E, en la cual, d^E tiene matriz de conexión local θ'. Supongamos que escogemos una nueva base local $s = As'$, donde A es un automorfismo local de E. Entonces

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^E s_i &= \sum_{j=1}^{k} \mathrm{d}^E(A_{ij}s'_j) \\ &= \sum_{j=1}^{k}(dA_{ij}s'_j + A_{ij}\mathrm{d}^E s'_j) \\ &= \sum_{j=1}^{k}(dA_{ij} + \sum_{l=1}^{k} A_{il}\theta'_{lj})s'_j \\ &= \sum_{j=1}^{k}(dA_{ij} + \sum_{l=1}^{k} A_{il}\theta'_{lj}) \sum_{m=1}^{k} B_{jm}s_m \\ &= \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{m=1}^{k} dA_{ij}B_{jm} + \sum_{l=1}^{k}\sum_{m=1}^{k} A_{il}B_{jm}\right)s_m\end{aligned}$$

donde la matriz $B = (B_{ij})$ es la matriz inversa de A ($B = A^{-1}$), por lo tanto, $\theta = A\theta' A^{-1} + (dA)A^{-1}$ con θ la matriz de conexión local respecto a s.

Sea $x_1, \ldots, x_n$ un sistema de coordenadas locales en U_α dada por una parametrización h, tal que $h(0) = x$. Si denotamos por ϑ' a la matriz de conexión $\vartheta' = \theta' \circ h$ bajada a $\mathbf{R}^n$ mediante la parametrización, entonces tenemos que

$$\vartheta'_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \vartheta'_{ij}(e_k)dx_k$$

donde $e_1, \ldots, e_n$ son la base canónica de $\mathbf{R}^n$ y por lo tanto $\vartheta'_{ij}(e_k) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, por lo que podemos escribir

$$\vartheta'_{ij}(x') = \sum_{k=1}^{n} \vartheta'_{ij}(e_k)(x')dx_k\,.$$

para $x' \in h^{-1}(U_\alpha)$. Sea

$$A_{ij}(x') = \delta_{ij} - \sum_{k=1}^{n} \vartheta'_{ij}(e_k)(0)x_k \qquad A(x') = (A_{ij}(x'))_{i=1,\dots,k}^{j=1,\dots,k}.$$

Entonces tenemos que

$$dA(0) = -\vartheta'(0)$$

ya que

$$\begin{aligned} dA_{ij}(0) &= d\delta_{ij} - \sum_{k=1}^{n} d(\vartheta_{ij}(e_k)(x')x_k) \mid_0 \\ &= -\sum_{k=1}^{n}(d\vartheta'_{ij}(e_k) \mid_0 \cdot(0) + \vartheta'_{ij}(e_k)(0)dx_k \mid_0) \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \vartheta'_{ij}(e_k)(0)dx_k \mid_0 \\ &= -\vartheta'_{ij}(0) \end{aligned}$$

y $A(0) = \mathrm{Id}$ por que $A_{ij}(0) = \delta_{ij}$. Cambiando a la nueva base $s(x') = A(x')s'(x')$, obtenemos una nueva matriz de conexión local ϑ tal que

$$\vartheta(0) = A(0)\vartheta'(0)A^{-1}(0) + (dA)(0)A^{-1}(0) = \vartheta'(0) - \vartheta'(0) = 0.$$

Componiendo a ϑ con h^{-1} obtenemos una matriz de conexión local de 1-formas sobre M $\theta = \vartheta \circ h^{-1}$ tal que $\theta(x) = 0$. ∎

Lema 1.5.6: *Si en la base local* s', d^E *tiene matriz de curvatura* R' *y* $s = As'$ *es un cambio de base, entonces la nueva matriz de curvatura es* $R = AR'A^{-1}$.

Dem: En términos de la matriz de conexión θ', la primera parte de la demostración del Lema 1.5.5, muestra que la nueva matriz de conexión es $\theta = A\theta'A^{-1} + (dA)A^{-1}$. Así

$$\begin{aligned} R &= d\theta - \theta \wedge \theta \\ &= d(A\theta'A^{-1} + (dA)A^{-1}) - (A\theta'A^{-1} + (dA)A^{-1}) \wedge (A\theta'A^{-1} + (dA)A^{-1}) \\ &= d(A\theta'A^{-1}) + d((dA)A^{-1}) - (A\theta'A^{-1} + (dA)A^{-1}) \wedge A\theta'A^{-1} \\ &\quad - (A\theta'A^{-1} + (dA)A^{-1}) \wedge (dA)A^{-1} \\ &= dA\theta'A^{-1} + A(d\theta')A^{-1} - A\theta'(dA^{-1}) - dAdA^{-1} - A\theta'A^{-1} \wedge A\theta'A^{-1} \\ &\quad - (dA)A^{-1} \wedge A\theta'A^{-1} - A\theta'A^{-1} \wedge (dA)A^{-1} - (dA)A^{-1} \wedge (dA)A^{-1} \\ &= dA\theta'A^{-1} + A(d\theta')A^{-1} - A\theta'(dA^{-}) - dAdA^{-1} - A(\theta' \wedge \theta')A^{-1} \\ &\quad - (dA)\theta'A^{-1} - A\theta'A^{-1}(dA)A^{-1} - (dA)A^{-1}(dA)A^{-1} \\ &= A(d\theta')A^{-1} - A(\theta' \wedge \theta')A^{-1} - A\theta'((dA^{-1}) \\ &\quad + A^{-1}(dA)A^{-1}) - (dA)((dA^{-1}) + A^{-1}(dA)A^{-1}) \\ &= A(d\theta' - \theta' \wedge \theta')A^{-1} \end{aligned}$$

ya que de la identidad $0 = d(AA^{-1}) = (dA)A^{-1} + A(dA^{-1})$ tenemos que

$$A^{-1}(dA)A^{-1} + (dA^{-1}) = A^{-1}(0) = 0. \blacksquare$$

CAPÍTULO 2

CLASES CARACTERÍSTICAS

Ave matemática,
nivelada es
como una ruleta
que baja y que sube
feliz, a cordel.
— RAMON LOPEZ VELARDE (1932)

1. INTRODUCCION .

En este capítulo, enunciaremos algunos resultados sobre clases características (la mayoría de ellos sin demostración), que usaremos en los capítulos posteriores, para mayores referencias consultar [**14**].

2. CLASES CARACTERISTICAS .

Sea ξ un $\mathbf{F}$-haz vectorial de dimensión n, sobre un espacio topológico X, donde $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ ó $\mathbf{C}$. Para un haz vectorial real ξ, existe la k-ésima clase de Stiefel-Whitney $w_k(\xi) \in \mathbf{H}^k(X;\mathbf{Z}_2)$ y la k-ésima clase de Pontrjagin $p_k \in \mathbf{H}^{4k}(X;\mathbf{Z})$. Para un haz vectorial complejo ξ, existe la k-ésima clase de Chern $c_k(\xi) \in \mathbf{H}^{2k}(X;\mathbf{Z})$. Estas dan clases totales

$$w(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(\xi) \in \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathbf{H}^k(X;\mathbf{Z}_2)$$
$$p(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\xi) \in \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathbf{H}^{4k}(X;\mathbf{Z})$$
$$c(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\xi) \in \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathbf{H}^{2k}(X;\mathbf{Z})$$

Las clases totales, son multiplicativas (posiblemente módulo elementos de orden 2) respecto a las sumas de Whitney:

$$w(\xi \oplus \eta) = w(\xi) \cdot w(\eta)$$
$$p(\xi \oplus \eta) = p(\xi) \cdot p(\eta) \text{ módulo elementos de orden 2}$$
$$c(\xi \oplus \eta) = c(\xi) \cdot c(\eta)$$

Si ξ es un haz trivial de cualquier dimensión, $w(\xi) = 1$, $p(\xi) = 1$ y $c(\xi) = 1$ siempre que estas clases estén definidas.

3. HACES PROYECTIVOS .

Sea $\xi = (E, \pi, X)$ un $\mathbf{F}$-haz vectorial sobre X, donde $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ ó $\mathbf{C}$. Sea $\mathbf{P}(E) = E - s_0(X)/\sim$, donde $s_0: X \to E$ es la sección cero, y si $e_1, e_2 \in E_x = \pi^{-1}(x)$ y $e_1, e_2 \neq 0$, entonces $e_1 \sim e_2$ si existe $\lambda \in F$ tal que $e_1 = \lambda e_2$. Sea $\pi_P: \mathbf{P}(E) \to X$ la aplicación inducida por la proyección $\pi: E \to X$. Llamaremos a $\mathbf{P}(\xi) = (\mathbf{P}(E), \pi_P, X)$ el ***haz proyectivo sobre*** X, asociado con ξ. La fibra sobre un punto $x \in X$ es $\pi_P^{-1}(x) = \mathbf{P}(E_x)$, es el espacio proyectivo de la fibra E_x.

El haz ξ puede ser "jalado" mediante la aplicación $\pi_P: \mathbf{P}(E) \to X$, para dar un haz $\pi_P^*(\xi)$ sobre $\mathbf{P}(E)$

$$\begin{tikzcd} \pi_P^*(\xi) \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbf{P}(E) \arrow[r, "\pi_P"'] & X. \end{tikzcd}$$

El espacio total de $\pi_P^*(\xi)$ es

$$\pi_P^*(E) = \{ (l, e) \mid \pi_P(l) = \pi(e) \} \subset \mathbf{P}(E) \times E$$

e incluye al espacio total

$$\eta(E) = \{ (l, e) \mid \pi_P(l) = \pi(e) \text{ y } e \in l \} \subset \pi_P^*(E)$$

de un haz lineal $\eta(\xi)$ sobre $\mathbf{P}(E)$.

Un producto interior sobre ξ, induce uno sobre $\pi_P^*(\xi)$, respecto a este producto interior, $\eta(\xi)$ tiene un complemento ortogonal $\eta(\xi)^{\perp}$. La idea del principio de descomposición, es descomponer haces de manera sucesiva. Con objeto de cubrir los casos real y complejo al mismo tiempo, definimos

$$\Lambda = \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{si } \mathbf{F} = \mathbf{C} \\ \mathbf{Z}_2 & \text{si } \mathbf{F} = \mathbf{R} \end{cases}$$
$$d(\mathbf{F}) = \dim_{\mathbf{R}} \mathbf{F}.$$

Nótese que $\mathbf{H}^*(\mathbf{P}(\xi); \Lambda)$ es un módulo sobre $\mathbf{H}^*(X; \Lambda)$, la estructura de módulo, está dada por el homomorfismo de anillos de cohomología

$$\pi_P^*: \mathbf{H}^*(X; \Lambda) \to \mathbf{H}^*(\mathbf{P}(\xi); \Lambda).$$

Teorema 2.3.1: [Teorema de la base (Leray-Hirsch)] *El módulo* $\mathbf{H}^*(\mathbf{P}(\xi); \Lambda)$ *es un módulo libre sobre* $\mathbf{H}^*(X; \Lambda)$, *con base* $1, y, \ldots, y^{n-1}$, *donde* $y \in \mathbf{H}^{d(\mathbf{F})}(\mathbf{P}(\xi); \Lambda)$, $n = \dim \xi$ *y* $y = c_1(\eta(\xi))$ *si* $\mathbf{F} = \mathbf{C}$, *y* $y = w_1(\eta(\xi))$ *si* $\mathbf{F} = \mathbf{R}$. ∎

Teorema 2.3.2: [Principio de descomposición] *Dado cualquier haz vectorial sobre X, existe un espacio $F(\xi)$ y una aplicación $f: F(\xi) \to X$ tal que $f^*(\xi)$ es una suma de haces lineales y*

$$f^*: \mathbf{H}^*(X; \Lambda) \to \mathbf{H}^*(F(\xi); \Lambda)$$

es un monomorfismo en cohomología.

Dem: Este teorema se demuestra por inducción sobre dim ξ. Si dim $\xi = 1$, entonces $F(\xi) = X$ y no hay nada que hacer. Supongamos que dim $\xi = n$ y que el teorema es cierto para dim $\xi < n$. Formamos el haz proyectivo $\mathbf{P}(\xi) = (\mathbf{P}(E), \pi_P, X)$ y lo descomponemos mediante el haz lineal $\eta(\xi)$. Entonces

$$\pi_P^*(E) = \eta(E) \oplus \eta(E)^\perp$$

y dim $\eta(E)^\perp = n - 1$, entonces usamos la hipótesis de inducción. ∎

La conclusión de este teorema, es que para trabajar con clases características, es suficiente con considerar los haces lineales.

4. CLASES DE STIEFEL-WHITNEY .

Las clases de Stiefel-Whitnet, pueden definirse axiomáticamente, para mayores detalles, ver **[14, Cap. 4]**. Sea ξ un haz vectorial real, sobre un espacio topológico X.

1. **Axioma de existencia:** Para cada $k \geq 0$, existe una *clase de Stiefel-Whitney*

$$w_k(\xi) \in \mathbf{H}^k(X; \mathbf{Z}_2).$$

2. **Axioma de naturalidad:** La clase total $w(\xi) = \sum w_k(\xi) \in \mathbf{H}^*(X; \mathbf{Z}_2)$ es natural respecto a las aplicaciones, es decir, si $f: X \to Y$ es continua, entonces

$$f^*(w(\xi)) = w(f^*(\xi)).$$

3. **Axioma de la suma de Whitnet:** Si ξ y η son haces vectoriales reales sobre X, entonces

$$w_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{i=0}^{k} w_i(\xi) \cup w_{k-i}(\eta)$$

donde $\cup$ denota al producto 'cup'.

4. **Axioma de normalización:** Sea γ_n^1 el haz lineal canónico sobre $\mathbf{P}^n$, cuyo espacio total es el subconjunto $E \subset \mathbf{P}^n \times \mathbf{R}^{n+1}$, que consiste en las parejas $([x], v) \in \mathbf{P}^n \times \mathbf{R}^{n+1}$ en las cuales v es un múltiplo de x y cuya proyección $\pi: E \to \mathbf{P}^n$ está dada por $\pi([x], v) = [x]$.

La fibra sobre un punto $[x] \in \mathbf{P}^n$ es la linea que pasa por x y $-x$ en $\mathbf{R}^{n+1}$ y hereda la estructura de espacio vectorial.

El axioma de normalización, nos dice que para el haz lineal canónico γ_1^1 sobre $\mathbf{P}^1$, la primera clase de Stiefel-Whitney $w_1(\gamma_1^1)$ es distinta de cero.

Los axiomas anteriores tienen las siguientes consecuencias inmediatas (ver [**14, Cap. 4**]:

Lema 2.4.1: *Si ξ y η son isomorfos, entonces $w_k(\xi) = w_k(\eta)$.* ∎

Lema 2.4.2: *Si ϵ^n es un haz trivial de dimensión n, entonces $w_k(\epsilon^n) = 0$ para $k > 0$.* ∎

Lema 2.4.3: *Si ϵ^n es un haz trivial de dimensión n y ξ es cualquier haz vectorial con el mismo espacio base, entonces $w_k(\epsilon^n \oplus \xi) = w_k(\xi)$.* ∎

5. CLASES DE CHERN .

Definiremos también a las clases de Chern axiomáticamente. Sea ξ un haz vectorial complejo sobre X.

1. **Axioma de existencia:** Para cada $k \geq 0$ existe una *clase de Chern*

$$c_k(\xi) \in \mathrm{H}^{2k}(X; \mathbf{Z})$$

   y $c_0(\xi) = 1$.

2. **Axioma de naturalidad:** La clase total $c(\xi) = \sum c_k(\xi) \in \mathrm{H}^*(X; \mathbf{Z})$ es natural respecto a las aplicaciones, es decir, si $f: Y \to X$ es continua, entonces

$$f^*(c(\xi)) = c(f^*(\xi)).$$

3. **Axioma de la suma de Whitney:** Si $\xi_1, \ldots, \xi_q$ son haces vectoriales complejos sobre X, entonces

$$c(\xi_1 \oplus \cdots \oplus \xi_q) = \prod_{k=1}^{q} c(\xi_k).$$

4. **Axioma de normalización:** si ξ es un $\mathbf{F}$-haz vectorial sobre X, denotaremos por ξ^* al haz vectorial dual $\mathrm{Hom}(\xi, \mathbf{F})$ sobre X. Consideremos a $\mathbf{C}^n$ como un $\mathbf{C}$-haz vectorial sobre un punto y definimos a $\mathbf{P}(\mathbf{C}^n)$ y a $\eta(\mathbf{C}^n)$ como en la sección 3. Definimos también a $\eta^*(\mathbf{C}^n)$, como el dual de $\eta(\mathbf{C}^n)$. Sea $i: \mathbf{P}(\mathbf{C}^{n-1}) \to \mathbf{P}(\mathbf{C}^n)$ la inclusión, y sean

$$[\mathbf{P}(\mathbf{C}^n)] \in \mathrm{H}_{2n-2}(\mathbf{P}(\mathbf{C}^n); \mathbf{Z}),$$
$$[\mathbf{P}(\mathbf{C}^{n-1})] \in \mathrm{H}_{2n-4}(\mathbf{P}(\mathbf{C}^{n-1}); \mathbf{Z}),$$

las clases fundamentales. El axioma de normalización pide que

$$c_1(\eta^*(\mathbf{C}^n)) \cap [\mathbf{P}(\mathbf{C}^n)] = i_*[\mathbf{P}(\mathbf{C}^{n-1})].$$

Lema 2.5.1: **[10, p. 246]** *Sobre un espacio paracompacto, la reducción mod 2 de $c_1(\xi)$ es $w_2(\xi)$, para un haz lineal complejo ξ.* ∎

Sea $\bar{\xi}$ es el haz vectorial complejo sobre X, conjugado del haz ξ. Entonces tenemos los siguientes resultados:

Lema 2.5.2: **[14, Lema 15.4, p. 176]** *Para todo haz vectorial complejo ξ, la complejificación $\xi \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ del haz vectorial real subyacente, es canónicamente isomorfo a la suma de Whitney $\xi \oplus \bar{\xi}$.* ∎

Lema 2.5.3: **[14, Lema 14.9, p. 168]** *La clase de Chern $c_k(\bar{\xi})$ es igual a $(-1)^k c_k(\xi)$. Sea $\bar{\xi}$ es el haz vectorial complejo conjugado de ξ.* ∎

6. CLASES DE PONTRJAGIN .

Def: Las *clases de Pontrjagin* de un haz vectorial real ξ, están definidas por

$$p_i(\xi) = (-1)^i c_{2i}(\xi \otimes \mathbf{C}),$$

donde c_{2i} denota la $2i$-ésima clase de Chern del haz vectorial complejo $\xi \otimes \mathbf{C}$.

Observación: La reducción mod 2 de $p_i(\xi)$ es $w_{2i}(\xi)^2$ (ver **[14, p. 181]**).

7. LA CLASE DE EULER .

A continuación, daremos algunos resultados sobre la clase de Euler, que usaremos en el capítulo 4.

Def: Una *orientación* en un espacio vectorial real V de dimensión $n > 0$, es una clase de equivalencia de bases, donde dos bases (ordenadas) $v_1, \ldots, v_n$ y $v_1', \ldots, v_n'$ son equivalentes, si y sólo si la matriz (a_{ij}) definida por la ecuación

$$v_i' = \sum a_{ij} v_j$$

tiene determinante positivo.

Evidentemente, todo espacio vectorial V tiene precisamente dos orientaciones distintas.

Nótese que el espacio coordenado $\mathbf{R}^n$ tiene una orientación canónica, correspondiente a su base ordenada canónica.

En topología algebraica, es costumbre especificar la orientación de un simplejo, escogiendo algún orden en sus vértices. Nuestro concepto de orientación, está relacionado con esto, de la siguiente manera. Sea Δ^n un n-simplejo, encajado linealmente en el espacio vectorial V de dimensión n, con vértices ordenados $A_1, \ldots, A_n$. Entonces, tomando el vector de A_0 a A_1, como el primer vector de la base, al vector de A_1 a A_2 como el segundo, y así sucesivamente, obtenemos la orientación correspondiente para el espacio vectorial V.

Sea $V_0 = V - \{0\}$. Nótese que la elección de una orientación para V, corresponde a la elección de uno de los dos posibles generadores para el grupo de homología singular $\mathrm{H}_n(V, V_0; \mathbf{Z})$. De hecho, sea Δ^n el n-simplejo estandar, con vértices canónicamente ordenados. Escojamos algún encaje lineal

$$\sigma: \Delta^n \to V$$

que preserve la orientación y que mande el baricentro de Δ^n al vector cero (y por lo tanto, mandará a la frontera de Δ^n en V_0). Entonces σ es un n-simplejo singular, que representa a un elemento en el grupo de n-ciclos relativos $Z_n(V, V_0; \mathbf{Z})$. La clase de homología de este n-ciclo σ, es el generador fundamental μ_V para el grupo de homología $\mathrm{H}_n(V, V_0; \mathbf{Z})$.

Análogamente, el grupo de cohomología $\mathbf{H}^n(V, V_0; \mathbf{Z})$ asociado con un espacio vectorial V, tiene un generador fundamental, que denotaremos por u_V, determinado por la ecuación

$$u_V(\mu_V) = +1.$$

Ahora consideremos un haz vectorial ξ con fibra de dimensión $n > 0$.

Def: Una *orientación* para ξ, es una función que asigna una orientación a cada fibra F de ξ, sujeta a la siguiente condición de compatibilidad local. Para todo punto x_0 en el espacio base, debe existir un sistema de coordenadas locales $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ con $x_0 \in \mathbf{U}_\alpha$ y $\varphi_\alpha: U_\alpha \times \mathbf{R}^n \to \pi^{-1}(U_\alpha)$, tal que para cada fibra $F = \pi^{-1}(x)$ sobre U_α, el homomorfismo $y \mapsto \varphi(x, y)$ de $\mathbf{R}^n$ a F, preserva la orientación. (O equivalentemente, existen secciones $s_1, \ldots, s_n: U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha)$, tales que la base $s_1(x), \ldots, s_n(x)$ determina la orientación requerida de $\pi^{-1}(x)$ para cada $x \in U_\alpha$).

En términos de cohomología, esto significa que a cada fibra F se le asigna un generador fundamental

$$u_F \in \mathbf{H}^n(F, F_0; \mathbf{Z}).$$

La condición de compatibilidad local, implica que para cada punto en el espacio base, existe una vecindad U_α y una clase de cohomología

$$u \in \mathbf{H}^n(\pi^{-1}(U_\alpha), \pi^{-1}(U_\alpha)_0; \mathbf{Z})$$

tal que, para cada fibra F sobre U_α, la restricción

$$u \mid_{(F,F_0)} \in \mathbf{H}^n(F, F_0; \mathbf{Z})$$

es igual a u_F.

Sea E un haz vectorial orientado de dimensión n sobre un espacio topológico X, y sea E_0 igual a E menos la sección cero.

Teorema 2.7.1: [14, Teo. 9.1, p. 97] *El grupo de cohomología*

$$\mathbf{H}^i(E, E_0; \mathbf{Z})$$

es 0 *para* $i < n$ *y existe una única clase (la clase de Thom)*

$$u \in \mathbf{H}^n(E, E_0)$$

cuya restricción a (E_x, E_{0x}), *da la clase de orientación*

$$o_x \in \mathbf{H}^n(E_x, E_{0x}; \mathbf{Z})$$

de la fibra E_x *para toda* $x \in X$. *Además la aplicación*

$$\begin{gathered}\mathbf{H}^k(E; \mathbf{Z}) \to \mathbf{H}^{k+n}(E, E_0; \mathbf{Z})\\ y \mapsto y \cup u\end{gathered}$$

es un isomorfismo para cada $k \in \mathbf{Z}$. *(Llamaremos a la clase* u, *la clase fundamental de cohomología).*

En lenguaje mas técnico, $\mathbf{H}^*(E, E_0; \mathbf{Z})$ es un $\mathbf{H}^*(E; \mathbf{Z})$-módulo libre sobre un generador u de grado n. ∎

Tenemos que la proyección $\pi: E \to X$ induce un isomorfismo

$$\mathbf{H}^k(X) \to \mathbf{H}^k(E),$$

ya que la sección cero es un encaje de X como retracto por deformación de E con retracción π.

Por lo tanto, tenemos que $\mathbf{H}^{k+n}(E, E_0; \mathbf{Z})$ es isomorfo al grupo de cohomología $\mathbf{H}^k(X; \mathbf{Z})$ del espacio base. De hecho, el isomorfismo de Thom

$$\phi\colon \mathbf{H}^k(X; \mathbf{Z}) \to \mathbf{H}^{k+n}(E, E_0; \mathbf{Z})$$

puede ser definido por la fórmula

$$\phi(x) = (\pi^* x) \cup u.$$

Ejemplo: Sea X un punto. Entonces $E = \mathbf{R}^n$, $E_0 = \mathbf{R}^n - \{0\}$ y

$$\mathbf{H}^i(E, E_0) = \mathbf{H}^i(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - \{0\}) = \begin{cases} \mathbf{Z} & i = n \\ 0 & i \neq n \end{cases}$$

Proposición 2.7.2: *Si $g\colon E \to E$ es un automorfismo que invierte la orientación, entonces $g^*(u) = -u$.*

Dem: Es suficiente tomar a X como un punto. Para ver esto, sea $i_x\colon x \to X$ la inclusión de un punto. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H}^i(E, E_0) & \longrightarrow & \mathbf{H}^i(E) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_x^*} \\ \mathbf{H}^i(E_x, E_{0x}) & \longrightarrow & \mathbf{H}^i(E_x) \end{array}$$

Así, $i_x^*(u) = o_x \in \mathbf{H}^n(E_x, E_{0x})$.

Por hipótesis, $g_x^* o_x = -o_x$. Como $i_x^*(g^* u) = g_x^* i_x^*(u) = -o_x$, la clase $-g^*(u)$ se restringe a o_x para toda $x \in X$. Por la unicidad en el Teorema 2.7.1, tenemos que $-g^*(u) = u$ y $g^*(u) = -u$. ∎

Definiremos ahora una nueva clase característica. Dado un haz vectorial orientado E, la inclusión $(E, \emptyset) \subset (E, E_0)$, induce un homomorfismo de restricción

$$r^*\colon \mathbf{H}^*(E, E_0; \mathbf{Z}) \to \mathbf{H}^*(E; \mathbf{Z}).$$

En particular, aplicando este homomorfismo a la clase fundamental $u \in \mathbf{H}^n(E, E_0; \mathbf{Z})$, obtenemos una nueva clase de cohomología

$$u\,|_E \in \mathbf{H}^n(E; \mathbf{Z}),$$

Además, tenemos que $\mathbf{H}^n(E; \mathbf{Z})$ es isomorfo de manera canónica, al grupo de cohomología $\mathbf{H}^n(X; \mathbf{Z})$ del espacio base.

Def: Sea $s_0\colon X \to E$ la sección cero. Definimos la *clase de Euler* de E, por $e(E) = s_0^* r^*(u)$, donde $r^*\colon \mathbf{H}^n(E, E_0) \to \mathbf{H}^n(E)$ es la aplicación inducida por la inclusión, y $s_0^*\colon \mathbf{H}^n(E) \to \mathbf{H}^n(X)$ es la aplicación inducida por s_0.

Proposición 2.7.3: *Sea $g: E \to E$ un automorfismo de haces que invierte la orientación. Entonces* $2e(E) = 0$.

Dem: Por la Proposición 2.7.2, tenemos que $g^*(u) = -u$. El siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g"] & E \\ X \arrow[u, "s_0"] \arrow[r, "="'] & X \arrow[u, "s_0"'] \end{tikzcd}$$

induce el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathbf{H}^n(E, E_0) \arrow[r, "r^*"] \arrow[d, "g^*"] & \mathbf{H}^n(E) \arrow[r, "s_0^*"] \arrow[d, "g^*"] & \mathbf{H}^n(X) \arrow[d, "="] \\ \mathbf{H}^n(E, E_0) \arrow[r, "r^*"] & \mathbf{H}^n(E) \arrow[r, "s_0^*"] & \mathbf{H}^n(X). \end{tikzcd}$$

Por lo tanto,

$$s_0^* r^*(-u) = s_0^* r^* g^* u = s_0^* r^* u = e(E)$$

pero

$$s_0^* r^*(-u) = -s_0^* r^*(u) = -e(E)$$

por lo tanto $e(E) = -e(E)$. ∎

Observación: Para n impar, la aplicación antípoda en cada fibra, invierte la orientación, por lo tanto $2e(e) = 0$ en este caso, por el resultado anterior.

8. CONEXIONES Y CLASES DE PONTRJAGIN .

En esta sección, definiremos las clases de Pontrjagin de un haz vectorial E, en términos de la curvatura de una conexión en E.

Primero daremos algunos preliminares algebraicos. Sea $M(k, \mathbf{R})$ las matrices de $k \times k$ con entradas reales.

Def: Un *polinomio invariante* sobre $M(k, \mathbf{R})$ es una función

$$P: M(k, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$$

que puede expresarse como un polinomio en las entradas de la matriz y satisface

$$P(TXT^{-1}) = P(X)$$

para toda matriz no singular T. Llamaremos I, al álgebra de polinomios invariantes.

Ejemplo:

1) La traza

$$\begin{aligned} M(k,\mathbf{R}) &\to \mathbf{R} \\ A=(A_{ij}) &\mapsto \sum A_{ii} = \text{traza}(A). \end{aligned}$$

2) El determinante

$$\begin{aligned} M(k,\mathbf{R}) &\to \mathbf{R} \\ A &\mapsto \det(A). \end{aligned}$$

3) Sumas de potencias de eigenvalores

$$\begin{aligned} M(k,\mathbf{R}) &\to \mathbf{R} \\ A &\mapsto \text{traza}(A^i) = e_i(A) \end{aligned}$$

4) Funciones simétricas elementales de eigenvalores

$$\begin{aligned} M(k,\mathbf{R}) &\to \mathbf{R} \\ A &\mapsto \check{c}_i(A) \end{aligned}$$

donde

$$\det(\mathrm{Id} + tA) = \sum_{i=0}^{k} \check{c}_i(A) t^i.$$

Los ejemplos anteriores, generan a I como anillo de polinomios.

Proposición 2.8.1: [14, Lema 6, p. 299] $I = \mathbf{R}[\check{c}_1, \ldots, \check{c}_k]$. ∎

Aplicaremos los polinomios anteriores a la matriz de curvatura. Si E es un haz vectorial de dimensión k sobre M, entonces la forma local para la curvatura R de una conexión d^E es

$$\Theta = d\theta - \theta \wedge \theta$$

una matriz de $k \times k$ de 2-formas. Sea $P\colon M(k,\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, un polinomio invariante de grado i. Entonces $P(R)$ es una $2i$-forma sobre M. Como $P(ABA^{-1}) = P(B)$, tenemos que $P(R) \in \Omega^{2i}$ está bien definido.

Afirmamos que $P(R)$ es una forma cerrada, es decir, su derivada exterior $dP(R)$ se anula. Esto es consecuencia del siguiente resultado:

Lema 2.8.2: **[8, p. 402-3]** *Sea I_n los polinomios invariantes bajo conjugación de grado n con dominio $M(k,\mathbf{R})$, y sea $P \in I_n$. Entonces existe un polinomio n-lineal invariante bajo conjugación*

$$\tilde{P}\colon \underbrace{M(k,\mathbf{R}) \times \cdots \times M(k,\mathbf{R})}_{n} \to \mathbf{R}$$

con $P(A) = \tilde{P}(A,\ldots,A)$ para toda $A \in M(k,\mathbf{R})$. ∎

Ejemplo: Si $P \in I_2$, entonces

$$\tilde{P}(A,B) = \frac{1}{2}(P(A+B) - P(A) - P(B)).$$

Corolario 2.8.3: $dP(R) = 0$.

Dem: Fijemos $x_0 \in M$, el Lema 1.5.5 nos permite escojer una base local para E tal que si θ es la matriz de conexión local correspondiente, entonces $\theta(x_0) = 0$. Por el Lema 2.8.2, existe un polinomio i-lineal tal que $P(R) = \tilde{P}(R,\ldots,R)$. Como $\tilde{P}$ es i-lineal y el grado de R es par,

$$dP(R) = \sum_{j=1}^{i} \tilde{P}(R,\ldots,R,dR,R,\ldots,R)$$

(donde el término dR aparece en el j-ésimo lugar); entonces

$$dR(x_0) = -d\theta(x_0) \wedge \theta(x_0) + \theta(x_0) \wedge d\theta(x_0) = 0.$$

En este cálculo, R es la matriz de 2-formas localmente representada por Θ y dR es la matriz de 3-formas obtenida aplicando la derivada exterior a las coordenadas de la matriz. Entonces

$$dP(R)(x_0) = \sum_{j=1}^{i} \tilde{P}(R(x_0),\ldots,R(x_0),dR(x_0),R(x_0),\ldots,R(x_0)) = 0. \quad ∎$$

Sea P cualquier polinomio invariante de grado i. Sea E un haz vectorial sobre una variedad M C^∞ y d^E una conexión sobre E con curvatura R. Hemos demostrado que $P(R)$ determina un elemento $[P(R)] \in \mathbf{H}^{2i}(M;\mathbf{R})$.

Def: Sea E un haz vectorial sobre una variedad M. Sea d^E una conexión en E con curvatura R. Definimos $p_k(E)$, la *k-ésima clase de Pontrjagin* de E, como la clase de cohomología

$$p_k(E) = \left[(-1)^k \tilde{c}_{2k}\left(\frac{i}{2\pi}R\right)\right] \in \mathbf{H}^{4k}(M;\mathbf{R})$$

donde $\tilde{c}_i$ denota la i-ésima función simétrica elemental. Esta definición es independiente de la conexión d^E (ver **[14, p. 298]**) y es consistente con la definición topológica de $p_k(E)$ dada anteriormente. Frecuentemente, omitiremos los corchetes.

9. CONEXIONES Y CLASES DE CHERN .

Anteriormente expresamos las clases de Pontrjagin de un haz vectorial real E, en términos de la curvatura de una conexión en E. Ahora haremos lo mismo para las clases de Chern de haces vectoriales complejos.

Def: Supongamos que E es un haz vectorial complejo de dimensión compleja n, sobre una variedad M y que E tiene un producto interior Hermitiano. Entonces E es también un haz vectorial real sobre M de dimensión real $2n$ y con producto interior real. Una Un-conexión en E, es una aplicación $\mathbf{C}$-lineal $\mathrm{d}^E\colon\Omega^0(E) \to \Omega^1(E)$ que se extiende a una aplicación $\mathbf{C}$-lineal $\mathrm{d}^E\colon\Omega^i(E) \to \Omega^{i+1}(E)$ para $i \geq 0$, que satisface la regla de Leibniz y también la condición de ortogonalidad de una conexión. Expresada como una matriz real, la matriz de conexión local de d^E es antisimétrica; como matriz compleja es antihermitiana.

Def: Sea E un haz vectorial complejo sobre una variedad M con una conexión Hermitiana d^E. Definimos $c_k(E)$, la *k-ésima clase de Chern* de E, como la clase de cohomología

$$c_k(E) = \left[\check{c}_k\left(\frac{i}{2\pi}R(\mathrm{d}^E)\right)\right] \in \mathbf{H}^{2k}(M,\mathbf{R}).$$

donde $\check{c}_k$ es la k-ésima función simétrica elemental. Al igual que la definición de las clases de Pontrjagin, esta definición concuerda con la definición topológica.

CAPÍTULO 3

ECUACIONES DE YANG-MILLS

Yo también busqué mi ecuación,
cuando el conocimiento no me inspiraba
la sospecha de una descomposición cerebral.
— RAMON LOPEZ VELARDE (1923)

1. INTRODUCCION .

En el presente capítulo, definiremos la noción de conexión ortogonal en un haz vectorial E sobre una variedad M y formaremos el espacio $\mathcal{C} = \mathcal{C}(E)$ de conexiones ortogonales en un haz vectorial E sobre una variedad M. Definiremos también la funcional de Yang-Mills, que es una función $\mathcal{YM}: \mathcal{C} \to \mathbf{R}$, y daremos una cota inferior para los valores de esta función, en términos de la primera clase de Pontrjagin de M. Posteriormente, veremos que los puntos críticos de la funcional de Yang-Mills son las conexiones que satisfacen las ecuaciones de Yang-Mills. Definiremos también al grupo de norma $\mathcal{G} = \mathcal{G}(E)$ que actúa sobre los espacios $\mathcal{C}$ de conexiones y $\mathcal{A} = \mathcal{A}(E)$ de conexiones autoduales, por lo que podemos definir los espacios de móduli $\mathcal{B} = \mathcal{C}/\mathcal{G}$ y $\mathcal{M} = \mathcal{A}/\mathcal{G}$, como los espacios de órbitas de dicha acción. En los siguientes capítulos, estudiaremos las estructuras local y global de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{M}$ y veremos como están relacionadas con invariantes del haz vectorial original y la variedad M.

2. LA FUNCIONAL DE YANG-MILLS .

Sea E un haz vectorial sobre una variedad M, cerrada y orientada. Recordemos que estamos haciendo la suposición de que todos los haces vectoriales son orientables y que están provistos de una métrica Riemanniana. En el Capítulo 1, vimos que la métrica Riemanniana en E, induce una sobre $\bigwedge^k T^*M \otimes E$. Esta a su vez, induce un producto interior $\mathcal{L}_2$ sobre $\Omega^k(E)$ mediante

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_{x \in M} \langle \phi(x), \psi(x) \rangle d(\mathrm{vol}), \qquad \phi, \psi \in \Omega^k(E).$$

Def: Si E es cualquier haz vectorial, tenemos que

$$\Omega^i(E) = \Gamma(\bigwedge^k T^*M \otimes E) \cong \Gamma(\bigwedge^k T^*M) \otimes \Gamma(E) = \Omega^i \otimes_{\Omega^0} \Omega^0(E).$$

Existe una aplicación

$$(\, , \,) \colon \Omega^i(E) \times \Omega^j(E) \to \Omega^{i+j}$$

dada por

$$(s_1 \otimes s_1', s_2 \otimes s_2')(x) = s_1(x) \wedge s_2(x) \langle s_1'(x), s_2'(x) \rangle$$

para $s_1 \otimes s_1' \in \Omega^i \otimes_{\Omega^0} \Omega^0(E) \cong \Omega^i(E), s_2 \otimes s_2' \in \Omega^j \otimes_{\Omega^0} \Omega^0(E) \cong \Omega^j(E)$ y $x \in M$. Nótese que la definición de $(\, , \,)$ depende de la definición de la métrica Riemanniana original $\langle \, , \, \rangle$.

Lema 3.2.1: *Si* $\sigma_1, \sigma_1' \in \Omega^i$ *y* $\sigma_2, \sigma_2' \in \Omega^0(E)$, *entonces*

$$\langle \sigma_1 \otimes \sigma_2, \sigma_1' \otimes \sigma_2' \rangle = \langle ((\sigma_1 \otimes \sigma_2), \sigma_2'), \sigma_1' \rangle.$$

Dem:

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_1 \otimes \sigma_2, \sigma_1' \otimes \sigma_2' \rangle &= \int_{x \in M} \langle (\sigma_1 \otimes \sigma_2)(x), (\sigma_1' \otimes \sigma_2')(x) \rangle d(\mathrm{vol}) \\
&= \int_{x \in M} \langle \sigma_1(x) \otimes \sigma_2(x), \sigma_1'(x) \otimes \sigma_2'(x) \rangle d(\mathrm{vol}) \\
&= \int_{x \in M} \langle \sigma_2(x), \sigma_2'(x) \rangle \langle \sigma_1(x), \sigma_1'(x) \rangle d(\mathrm{vol}) \\
&= \int_{x \in M} \langle \langle \sigma_2(x), \sigma_2'(x) \rangle \sigma_1(x), \sigma_1'(x) \rangle d(\mathrm{vol}) \\
&= \int_{x \in M} \langle (\sigma_1 \otimes \sigma_2, \sigma_2')(x), \sigma_1'(x) \rangle d(\mathrm{vol}) \\
&= \langle (\sigma_1 \otimes \sigma_2, \sigma_2'), \sigma_1' \rangle. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Def: Sea E un haz vectorial sobre una variedad diferenciable M con una métrica Riemanniana $\langle \, , \, \rangle$. Sea d^E una conexión en E. Decimos que d^E es *ortogonal* respecto a $\langle \, , \, \rangle$, si

$$d(s_1, s_2) = (\mathrm{d}^E s_1, s_2) + (s_1, \mathrm{d}^E s_2)$$

para toda $s_1, s_2 \in \Omega^0(E)$.

Lema 3.2.2: *Sea* d^E *una conexión ortogonal en un haz vectorial sobre una variedad* M. *Entonces la matriz de conexión local* θ *de* d^E *respecto a un marco ortogonal, es antisimétrica.*

Dem: La matriz de conexión local, dado un marco ortogonal, está definida por

$$\mathrm{d}^E s_i = \sum_{j=1}^{k} \theta_{ij} \otimes s_j,$$

como d^E es ortogonal, tenemos que

$$\begin{aligned}
d(s_i, s_j) &= (d^E s_1, s_2) + (s_1, d^E s_2) \\
0 = d\langle s_i, s_j\rangle &= (\sum_{l=1}^{k} \theta_{il} \otimes s_l, s_j) + (s_i, \sum_{m=1}^{k} \theta_{jm} \otimes s_m) \\
&= \sum_{l=1}^{k} (\theta_{il} \otimes s_l, s_j) + \sum_{m=1}^{k} (s_i, \theta_{jm} \otimes s_m) \\
&= \sum_{l=1}^{k} \theta_{il} \langle s_l, s_j\rangle + \sum_{m=1}^{k} \langle s_i, s_m\rangle \\
&= \theta_{ij} + \theta_{ji}
\end{aligned}$$

por lo tanto $\theta_{ij} = -\theta_{ji}$, es decir, θ es antisimétrica. ∎

Def: Si E es un haz vectorial sobre una variedad diferenciable M, definimos $\mathcal{C} = \mathcal{C}(E)$ como el *espacio de conexiones ortogonales* en E.

Hasta ahora, $\mathcal{C}$ es solamente un conjunto, mas adelante veremos que tiene estructura de espacio afín.

Def: Dada una métrica sobre E, existe una métrica inducida en $\mathrm{Hom}(E, E)$. Sea $A, B \in \mathrm{Hom}(E_x, E_x)$, con $x \in M$. Definimos el producto interior $\langle\ ,\ \rangle$ en la fibra sobre x por

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{traza}(A^t B).$$

Este producto interior, junto con el producto interior sobre $\bigwedge^k T^*M$, dado por la métrica Riemanniana sobre M, induce un producto interior $\langle\ ,\ \rangle$ y una norma $\|\cdot\|$ en $\Omega^k\mathrm{Hom}(E, E)$.

Def: La *funcional de Yang-Mills* $\mathcal{YM}: \mathcal{C} \to \mathbf{R}$ está definida por

$$\mathcal{YM}(d^E) = \frac{1}{2}\|R\|^2,$$

donde d^E es una conexión ortogonal en E y R es su curvatura.

Queremos encontrar una cota inferior para los valores de la funcional de Yang-Mills, para esto necesitamos los siguientes lemas y definiciones.

Lema 3.2.3: *Si* d^E *es una conexión ortogonal en* E *con curvatura* R, *entonces*

$$p_1(E) = -\frac{1}{8\pi^2}\mathrm{traza}(R \wedge R).$$

Dem: Recordemos que $p_1(E) = -\tilde{c}_2\left(\frac{i}{2\pi}R\right)$, donde $\tilde{c}_2$ es la segunda función simétrica elemental de los eigenvalores de R. Tenemos que para toda matriz A

$$\tilde{c}_2(A) = \frac{1}{2}((\mathrm{traza}A)^2 - \mathrm{traza}A^2).$$

Como d^E es ortogonal, cualquier matriz de conexión local es antisimétrica. Esto implica que la forma local $d\theta - \theta \wedge \theta$ para R es antisimétrica y por lo tanto tiene traza cero. Se sigue que

$$\begin{aligned} p_1(E) &= -\check{c}_2\left(\frac{i}{2\pi}R\right) \\ &= \frac{1}{2}\text{traza}\left(\frac{i}{2\pi}R\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\text{traza}\left(-\frac{1}{4\pi^2}R^2\right)^2 \\ &= -\frac{1}{8\pi^2}\text{traza}(R \wedge R). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Def: El operador $*$ de Hodge, $*\colon \bigwedge^i V \to \bigwedge^{n-i} V$ está definido como sigue. Sea $e_1, \dots, e_n$ una base ortonormal orientada positivamente de V. Entonces $*$ está definido por la ecuación

$$e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \langle v, v' \rangle = v \wedge *v'$$

para $v, v' \in \bigwedge^i V$. Nótese que $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ es la clase de orientación de V, la cual denotaremos por orient.

Lema 3.2.4: $*^2 = (-1)^{i(n-i)}\colon \bigwedge^i V \to \bigwedge^i V$

Dem: De la definición se sigue que si $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ es la clase de orientación, entonces

$$*(e_1 \wedge \cdots \wedge e_i) = e_{i+1} \wedge \cdots \wedge e_n$$

y

$$*(e_{i+1} \wedge \cdots \wedge e_n) = (-1)^{i(n-i)} e_1 \wedge \cdots \wedge e_i.$$

Lo mismo sucede para todos los básicos $e_{l_i} \wedge \cdots \wedge e_{l_i}$ con $1 \le l_1 < \cdots < l_i \le n$ de $\bigwedge^i V$, por lo que el resultado se sigue en general. $\blacksquare$

Corolario 3.2.5: *Si* $\dim V = 4k$, *entonces* $*\colon \bigwedge^{2k} V \to \bigwedge^{2k} V$ *es una isometría de orden 2.*

Dem:

$$\begin{aligned} \text{orient}\langle *v, *v' \rangle &= *v \wedge **v' \\ &= *V \wedge v' \\ &= v' \wedge *v \\ &= \text{orient}\langle v', v \rangle \\ &= \text{orient}\langle v, v' \rangle \end{aligned}$$

por lo tanto $\langle *v, *v' \rangle = \langle v, v' \rangle$. $\blacksquare$

Lema 3.2.6: *Sea V un espacio vectorial con producto interior $\langle\ ,\ \rangle$. Si $T: V \to V$ es una isometría, entonces sus valores propios son 1 y -1 únicamente.*

Dem: Sea λ un eigenvalor y v un eigenvector asociado a λ, es decir, $Tv = \lambda v$. Como T es isometría

$$\begin{aligned} \langle v, v\rangle &= \langle Tv, Tv\rangle \\ &= \langle \lambda v, \lambda v\rangle \\ &= |\lambda^2|\langle v, v\rangle \end{aligned}$$

por lo que $\lambda^2 = 1$ y por lo tanto $\lambda = \pm 1$. ∎

Lema 3.2.7: *Sea T es una isometría y $_+V$ y $_-V$ los eigenespacios correspondientes a los eigenvalores 1 y -1. Entonces $V = {_+V} \oplus {_-V}$ es una descomposición ortogonal.*

Dem: El hecho de que V es la suma directa de los eigenespacios, es un resultado conocido de algebra lineal. Veamos que $_+V$ y $_-V$ son ortogonales. Sea $v_1 \in {_+V}$, es decir $Tv_1 = v_1$ y $v_2 \in {_-V}$, es decir, $Tv_2 = -v_2$. Como T es isometría

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_2\rangle &= \langle Tv_1, Tv_2\rangle \\ &= \langle v_1, -v_2\rangle \\ &= -\langle v_1, v_2\rangle \end{aligned}$$

por lo que $\langle v_1, v_2\rangle = 0$. ∎

Def: Sea $\dim V = n = 4k$ y sean $\bigwedge_+ V$ y $\bigwedge_- V$ los eigenespacios de $*$ correspondientes a los eigenvalores 1 y -1 respectivamente. Por los Lemas 3.2.6 y 3.2.7 $\bigwedge^{2k} V = \bigwedge_+ V \oplus \bigwedge_- V$ es una descomposición ortogonal.

Supongamos que W es otro espacio vectorial con producto interior $\langle\ ,\ \rangle$. Entonces $V \otimes W$ tiene un producto interior natural definido por $\langle v \otimes w, v' \otimes w'\rangle = \langle v, v'\rangle\langle w, w'\rangle$. Podemos extender $*$ de $\bigwedge^i V$ a $\bigwedge^i V \otimes W$ mediante $* \otimes \mathrm{Id}$, es decir, si $a \in \bigwedge^i V$ y $b \in W$, entonces $*(a \otimes b) = *a \otimes b$. Esto da la extensión

$$*\colon \bigwedge^i V \otimes W \to \bigwedge^{n-i} V \otimes W.$$

Si $\dim V = 4k$, entonces $*^2 = \mathrm{Id}$, y $*$ es una isometría, por lo que tenemos nuevamente una descomposición ortogonal

$$\bigwedge^{2k} V \otimes W = (\bigwedge\nolimits_+ V \otimes W) \oplus (\bigwedge\nolimits_- V \otimes W).$$

A continuación, la definición anterior la extenderemos a haces vectoriales.

Def: Sea E' un haz vectorial de dimensión n sobre una variedad M. Supongamos que E' y M tienen métricas Riemannianas. Definimos

$$*: \Omega^i(E') \to \Omega^{n-i}(E')$$

como sigue. Sea $\sigma \in \Omega^i(E')$ y $x \in M$. Entonces $(*\sigma)(x) = *(\sigma(x))$.

Aplicamos este nuevo operador de Hodge $*$, al caso en el que $E' = \mathrm{Hom}(E, E)$, donde E es un haz vectorial sobre una variedad M de dimensión 4. El operador de Hodge $*$ actúa sobre $\bigwedge^2 T^*M \otimes \mathrm{Hom}(E,E)$ y sobre $\Omega^2\mathrm{Hom}(E,E)$ para dar descomposiciones ortogonales

$$\bigwedge^2 T^*M \otimes \mathrm{Hom}(E,E) = (\bigwedge\nolimits_+ T^*M \otimes \mathrm{Hom}(E,E)) \oplus (\bigwedge\nolimits_- T^*M \otimes \mathrm{Hom}(E,E))$$

y

$$\Omega^2\mathrm{Hom}(E,E) = \Omega_+\mathrm{Hom}(E,E) \oplus \Omega_-\mathrm{Hom}(E,E).$$

En particular, la curvatura $R = R(\mathrm{d}^E)$ de una conexión d^E en E, se descompone como $R = R_+ + R_-$, donde $*R_+ = R_+$ y $*R_- = -R_-$.

Esta descomposición será usada para encontrar la cota inferior de la funcional de Yang-Mills $\mathcal{YM}$, pero antes de ello, veamos algunas definiciones mas.

Def: Sea M una variedad de dimensión 4 y sea E un haz vectorial sobre M. Una conexión ortogonal d^E en E es *autodual* (respectivamente *antiautodual*) si su curvatura satisface $*R = R$ (respectivamente $*R = -R$).

Def: Definimos $\mathcal{A} = \mathcal{A}(E)$ como el *espacio de conexiones autoduales* sobre E.

Lema 3.2.8: *Sea E un haz vectorial sobre una variedad M de dimensión 4 cerrada y orientada, equipada con una métrica Riemanniana. Sea d^E una conexión ortogonal en E con curvatura R. Entonces*

$$\mathcal{YM}(\mathrm{d}^E) = \frac{1}{2}(\|R_+\|^2 + \|R_-\|^2).$$

Dem:

$$\begin{aligned}
\mathcal{YM}(\mathrm{d}^E) &= \frac{1}{2}\|R\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\langle R, R\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle R_+ + R_-, R_+ + R_-\rangle \\
&= \frac{1}{2}(\langle R_+, R_+\rangle + \langle R_+, R_-\rangle + \langle R_-, R_+\rangle + \langle R_-, R_-\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(\langle R_+, R_+\rangle + \langle R_-, R_-\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(\|R_+\|^2 + \|R_-\|^2). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Def: Extenderemos las definiciones de traza y traspuesta de $\mathrm{Hom}(E,E)$ a $\bigwedge^i(T^*M)\otimes \mathrm{Hom}(E,E)$. Para $a\in \bigwedge^i(T^*M)$ y $b\in \mathrm{Hom}(E,E)$ definimos

$$\mathrm{traza}(a\otimes b) = a\,\mathrm{traza}(b)$$
$$(a\otimes b)^t = a\otimes b^t$$

Lema 3.2.9: *Si* $\phi,\psi\in \bigwedge^i(T^*M)\otimes \mathrm{Hom}(E,E)$. *Entonces*

$$\mathrm{orient}\langle\phi,\psi\rangle = \mathrm{traza}(\phi^t\wedge *\psi).$$

Dem: Sean $a,a'\in \bigwedge^i(T^*M)$ y $b,b'\in \mathrm{Hom}(E,E)$. Usando el producto interior en $\mathrm{Hom}(E,E)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{orient}\langle a\otimes b, a'\otimes b'\rangle &= \mathrm{orient}\langle a,a'\rangle \mathrm{traza}(b^tb') \\
&= (a\wedge *a')\mathrm{traza}(b^tb') \\
&= \mathrm{traza}((a\wedge *a')\otimes b^tb') \\
&= \mathrm{traza}((a\otimes b^t)\wedge(*a'\otimes b')) \\
&= \mathrm{traza}((a\otimes b)^t\wedge *(a'\otimes b')). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 3.2.10: *Sea E un haz vectorial real sobre una variedad M de dimensión 4, cerrada y orientada, y sea* d^E *cualquier conexión ortogonal en* E. *Entonces*

$$\mathcal{YM}(\mathrm{d}^E)\geq 4\pi^2 p_1(E)[M]$$

donde $[M]$ es la clase de orientación de M.

Dem: Si d^E es ortogonal, entonces $R^t=-R$. Por el Lema 3.2.3 tenemos

$$\begin{aligned}
p_1(E)[M] &= \int_M -\frac{1}{8\pi^2}\mathrm{traza}(R\wedge R) \\
&= -\frac{1}{8\pi^2}\int_M \mathrm{traza}(R\wedge R) \\
&= \frac{1}{8\pi^2}\int_M \mathrm{traza}(-R\wedge R) \\
&= \frac{1}{8\pi^2}\int_M \mathrm{traza}(R^t\wedge R) \\
&= \frac{1}{8\pi^2}\int_M \mathrm{traza}(R^t\wedge **R) \\
&= \frac{1}{8\pi^2}\int_M \langle R,*R\rangle d(\mathrm{vol}) \\
&= \frac{1}{8\pi^2}\int_M \langle R_+ + R_-, *(R_+ + R_-)\rangle d(\mathrm{vol}) \\
&= \frac{1}{8\pi^2}\int_M (\langle R_+,R_+\rangle - \langle R_-,R_-\rangle) d(\mathrm{vol}) \\
&= \frac{1}{8\pi^2}(\|R_+\|^2 - \|R_-\|^2)
\end{aligned}$$

por el Lema 3.2.8 tenemos:

$$p_1(E)[M] \leq \frac{1}{8\pi^2}(\|R_+\|^2 + \|R_-\|^2)$$
$$\leq \frac{1}{4\pi^2}\mathcal{YM}(\mathrm{d}^E). \quad \blacksquare$$

3. LAS ECUACIONES DE YANG-MILLS .

Las ecuaciones de Yang-Mills dan condiciones sobre una conexión de manera mas o menos análoga a las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Mostraremos que los puntos críticos de la funcional de Yang-Mills son las soluciones de las ecuaciones de Yang-Mills.

Def: Sea E un haz vectorial sobre una variedad M cerrada y orientada y sea d^E una conexión en E. La *adjunta* de d^E

$$\delta^E\colon \Omega^{i+1}(E) \to \Omega^i(E)$$

está definida por $\langle \mathrm{d}^E\phi, \psi\rangle = \langle \phi, \delta^E\psi\rangle$ para toda $\phi \in \Omega^i(E)$ y $\psi \in \Omega^{i+1}(E)$. El *Laplaciano* de d^E

$$\Delta^E\colon \Omega^i(E) \to \Omega^i(E)$$

está definido por

$$\Delta^E = \delta^E\mathrm{d}^E + \mathrm{d}^E\delta^E.$$

Def: Una conexión d^E en E es llamada *conexión de Yang-Mills*, si cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes es satisfecha.

1) $\delta^{\mathrm{Hom}(E,E)}R = 0.$

2) $\Delta^{\mathrm{Hom}(E,E)}R = 0.$

Las ecuaciones 1) y 2) son llamadas las *ecuaciones de Yang-Mills*. Su equivalencia depende de la identidad de Bianchi (Teorema 1.5.4) ya que

$$\Delta^{\mathrm{Hom}(E,E)}R = \delta^{\mathrm{Hom}(E,E)}\mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)}R + \mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)}\delta^{\mathrm{Hom}(E,E)}R = 0$$

de donde

$$-\delta^{\mathrm{Hom}(E,E)}\mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)}R = \mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)}\delta^{\mathrm{Hom}(E,E)}R$$

pero por la identidad de Bianchi $\mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)}R = 0$ por lo que

$$\mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)}\delta^{\mathrm{Hom}(E,E)}R = 0,$$

entonces, para toda $\phi \in \Omega^2\mathrm{Hom}(E,E)$ tenemos que

$$0 = \langle 0, \phi\rangle = \langle \mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)}\delta^{\mathrm{Hom}(E,E)}R, \phi\rangle = \langle \delta^{\mathrm{Hom}(E,E)}R, \mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)}\phi\rangle$$

por lo tanto

$$\delta^{\mathrm{Hom}(E,E)}R = 0.$$

Para ver la otra implicación, se sigue el razonamiento inverso.

Def: Una conexión ortogonal d^E es un *punto crítico* de la funcional de Yang-Mills, si para cualquier curva $f(t)$ en $\mathcal{C}$ tal que $\mathcal{YM}(f(t))$ es C^∞ y $f(0) = \mathrm{d}^E$, entonces

$$\frac{d}{dt}\mathcal{YM}(f(t)) \mid_{t=0} = 0.$$

Para ver quienes son los puntos críticos de la funcional de Yang-Mills, necesitamos los siguientes resultados.

Def: Sea $\mathbf{o}^E = \{ L \in \mathrm{Hom}(E,E) \mid L^t = -L \}$, donde L^t es la traspuesta de L.

Lema 3.3.1: *El espacio $\mathcal{C}(E)$ de conexiones ortogonales en E es isomorfo a $\Omega^1(\mathbf{o}^E)$. Si d^E es cualquier conexión ortogonal, el isomorfismo $\Omega(\mathrm{d}^E)\colon \Omega^1(\mathbf{o}^E) \to \mathcal{C}(E)$ está dado por*

$$\Omega(\mathrm{d}^E)(A) = \mathrm{d}^E + A.$$

Dem: Sea $\mathrm{d}^{E'}$ cualquier conexión ortogonal en E y sea $A = \mathrm{d}^{E'} - \mathrm{d}^E$. Supongamos que $f \in C^\infty(M)$ y $s \in \Gamma(E)$. Entonces

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}^{E'} - \mathrm{d}^E)(fs) &= df \otimes s + f \wedge \mathrm{d}^{E'}s - df \otimes s - f \wedge \mathrm{d}^E \\ &= f(\mathrm{d}^{E'} - \mathrm{d}^E)(s)\end{aligned}$$

por lo tanto $A(fs) = fA(s)$. Así, $A \in \mathrm{Hom}_{C^\infty}(\Omega^0(E), \Omega^1(E)) = \Omega^1\mathrm{Hom}(E,E)$. Como d^E y $\mathrm{d}^{E'}$ son ortogonales, $A \in \Omega^1(\mathbf{o}^E)$, por lo que $\mathrm{d}^{E'} = \Omega(\mathrm{d}^E)(A)$.

Recíprocamente, dado un elemento $A \in \Omega^1(\mathbf{o}^E)$, obtenemos una nueva conexión ortogonal $\mathrm{d}^{E'} = \mathrm{d}^E + A$, es decir, una conexión, cuya matriz de conexión local es $\theta + A$, si la matriz de conexión local para d^E es θ. Por lo que $\Omega(\mathrm{d}^E)^{-1}(\mathrm{d}^{E'}) = A$. ∎

Veamos como cambia la curvatura de una conexión bajo traslaciones.

Lema 3.3.2: *Para $A \in \Omega^1(\mathbf{o}^E)$, las curvaturas de d^E y $\mathrm{d}^E + A$ están relacionadas por*

$$R(\mathrm{d}^E + A) = R(\mathrm{d}^E) + \mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)}A - A \wedge A.$$

Dem: Sea θ la matriz de conexión local para d^E. Entonces $\theta + A$ es la matriz de conexión local para $\mathrm{d}^E + A$. Formando la representación local de R tenemos

$$\begin{aligned} R(\mathrm{d}^E + A) &= d(\theta + A) - (\theta + A) \wedge (\theta + A) \\ &= d\theta + dA - \theta \wedge \theta - \theta \wedge A - A \wedge \theta - A \wedge A \\ &= (d\theta - \theta \wedge \theta) + (dA - A \wedge \theta - \theta \wedge A) - A \wedge A \\ &= R(\mathrm{d}^E) + \mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)} A - A \wedge A. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Prpoposición 3.3.3: *Los puntos críticos de la funcional de Yang-Mills, son exactamente las soluciones de las ecuaciones de Yang-Mills.*

Dem: Sea d^E una conexión sobre E. Primero mostraremos que si d^E es un punto crítico de la funcional de Yang-Mills, entonces

$$\delta^{\mathrm{Hom}(E,E)} R(\mathrm{d}^E) = 0.$$

Sea $A \in \Omega^1(\mathbf{o}^E)$ y $\mathrm{d}_t^E = \mathrm{d}^E + tA$. Por el Lema 3.3.2, la conexión d_t^E tiene curvatura

$$R(\mathrm{d}_t^E) = R(\mathrm{d}^E) + t\mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)} A - t^2 A \wedge A$$

y

$$\mathcal{YM}(\mathrm{d}_t^E) = \frac{1}{2} \|R(\mathrm{d}_t^E)\|^2 = \frac{1}{2} \int_M \langle R(\mathrm{d}_t^E), R(\mathrm{d}_t^E) \rangle d(\mathrm{vol}).$$

Entonces, con $f(t) = \mathrm{d}_t^E$,

$$\begin{aligned} \mathcal{YM}(f(t)) &= \frac{1}{2} \int_M \langle R(\mathrm{d}_t^E), R(\mathrm{d}_t^E) \rangle d(\mathrm{vol}) \\ &= \frac{1}{2} \int_M \langle R(\mathrm{d}^E) + t\mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)} A - t^2 A \wedge A, R(\mathrm{d}^E) + t\mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)} A - t^2 A \wedge A \rangle d(\mathrm{vol}) \\ &= \frac{1}{2} \int_M \langle R(\mathrm{d}^E), R(\mathrm{d}^E) \rangle d(\mathrm{vol}) + t \int_M \langle R(\mathrm{d}^E), \mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)} A \rangle d(\mathrm{vol}) \\ &\quad - t^2 \int_M \langle R(\mathrm{d}^E), A \wedge A \rangle d(\mathrm{vol}) + \frac{t^2}{2} \int_M \langle \mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)} A, \mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)} A \rangle d(\mathrm{vol}) \\ &\quad - t^3 \int_M \langle \mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)} A, A \wedge A \rangle d(\mathrm{vol}) + \frac{t^4}{2} \int_M \langle A \wedge A, A \wedge A \rangle d(\mathrm{vol}) \end{aligned}$$

de donde tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{YM}(f(t)) \mid_{t=0} &= \int_M \langle R(\mathrm{d}^E), \mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)} A \rangle d(\mathrm{vol}) \\ &= \int_M \langle \delta^{\mathrm{Hom}(E,E)} R(\mathrm{d}^E), A \rangle d(\mathrm{vol}) = 0 \end{aligned}$$

para toda $A \in \Omega^1(\mathbf{o}^E)$, por lo tanto $\delta^{\mathrm{Hom}(E,E)} R = 0$. El argúmento es totalmente reversible.
$\blacksquare$

4. EL GRUPO DE NORMA .

Dado un haz vectorial E, definiremos un grupo $\mathcal{G} = \mathcal{G}(E)$ que actúa sobre el espacio $\mathcal{C} = \mathcal{C}(E)$ de conexiones en E.

Def: Denotaremos por $G = \mathbf{O}$, $\mathbf{SO}$ y $\mathbf{U}$ a los grupos de Lie de las matrices ortogonales, ortogonales especiales y unitarias respectivamente y por $g = \mathbf{o}$, $\mathbf{so}$ y $\mathbf{u}$ sus correspondientes álgebras de Lie.

La expresión G-*haz vectorial* se refiere a un haz vectorial con grupo estructural G. Si E es un G-haz vectorial, entonces una G-conexión en E es una conexión ortogonal en E si $G = \mathbf{O}$ o $G = \mathbf{SO}$; y una conexión Hermitiana si $G = \mathbf{U}$.

Def: Un haz vectorial con grupo estructural G da origen a un haz $\mathbf{G}_E$ de grupos de Lie y un haz asociado $\mathbf{g}^E$ de álgebras de Lie. Las definiciones explícitas para las distintas opciones de G son las siguientes:

1. $G = \mathbf{O}$. Sea E un $\mathbf{O}$-haz vectorial, es decir, un haz vectorial real. Entonces
$$\mathbf{o}^E = \{ L \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(E,E) \mid L^t = -L \},$$
$$\mathbf{O}_E = \{ L \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(E,E) \mid L^t = L^{-1} \},$$
donde L^t es la traspuesta de L.

2. $G = \mathbf{SO}$. Sea E un $\mathbf{SO}$-haz vectorial, es decir, un haz vectorial real orientado. Entonces
$$\mathbf{so}^E = \mathbf{o}^E,$$
$$\mathbf{SO}_E = \{ L \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(E,E) \mid L^t = L^{-1} \text{ y } L \text{ preserva orientación} \}.$$

3. $G = \mathbf{U}$. Sea E un $\mathbf{U}$-haz vectorial, es decir, un haz vectorial complejo. Entonces
$$\begin{aligned}\mathbf{u}^E &= \{ L \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(E,E) \mid L^t = -L \text{ como elementos de } \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(E,E) \} \\ &= \{ L \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(E,E) \mid \bar{L}^t = -L \} \\ \mathbf{U}_E &= \{ L \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(E,E) \mid L^t = L^{-1} \text{ como elementos de } \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(E,E) \} \\ &= \{ L \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(E,E) \mid \bar{L}^t = L^{-1} \}.\end{aligned}$$
donde L^t es la traspuesta real y $\bar{L}^t$ es la traspuesta compleja.

Def: El *grupo de norma* $\mathcal{G} = \mathcal{G}(E)$ de E es el grupo de secciones C^∞ de $\mathbf{G}_E$,
$$\mathcal{G} = \Gamma(\mathbf{G}_E).$$

Un elemento $g \in \mathcal{G}$ es un isomorfismo de haces vectoriales $g: E \longrightarrow E$. Si E es un G-haz vectorial sobre M, $x \in M$ y E_x es la fibra sobre x, entonces $g|_{E_x}$ está en G.

Def: Extenderemos ahora la definición de $\mathcal{C}(E)$. Si E es un G-haz vectorial, entonces $\mathcal{C}(E)$ es el espacio de G-conexiones en E. Argumentos análogos a lo del Lema 3.3.1 muestran que

$$\mathcal{C}(E) \cong \Omega^1(\mathbf{g}^E).$$

Def: El grupo de norma $\mathcal{G} = \mathcal{G}(E)$ actúa sobre el espacio $\mathcal{C} = \mathcal{C}(E)$ de conexiones en E como sigue. Sean $g \in \mathcal{G}$ y $\mathrm{d}^E \in \mathcal{C}$. Entonces

$$g(\mathrm{d}^E) = g\mathrm{d}^E g^{-1}.$$

Nótese que

$$R(g(\mathrm{d}^E)) = g(\mathrm{d}^E) \circ g(\mathrm{d}^E) = (g\mathrm{d}^E g^{-1})(g\mathrm{d}^E g^{-1}) = gRg^{-1}.$$

Es fácil ver que algunas de las construcciones que hemos dado son invariante bajo el grupo de norma:

Lema 3.4.1:

1. *Para* $g \in \mathcal{G}$, $\|R(g(\mathrm{d}^E))\| = \|R(\mathrm{d}^E)\|$.
2. *La funcional de Yang-Mills* $\mathcal{YM}$ *es invariante bajo* $\mathcal{G}(E)$.
3. $\mathcal{G}(E)$ *preserva autodualidad.*

Dem: Sea R la matriz de curvatura de d^E respecto a un s, por el Lema 1.5.6 bajo un cambio de base $s' = As$ tenemos que $R' = ARA^{-1}$. Entonces

$$\|R(g(\mathrm{d}^E))\| = \|gRg^{-1}\| = \|R'\| = \|R(\mathrm{d}^E)\|$$

probando así a 1. Los incisos 2 y 3 son inmediatos de 1. ∎

Ahora podemos definir los espacios de móduli $\mathcal{B}$ y $\mathcal{M}$ que serán estudiados extensivamente mas adelante.

Def: El espacio de móduli $\mathcal{B} = \mathcal{B}(E)$ de G-conexiones en un G-haz vectorial E, es el espacio de órbitas $\mathcal{B} = \mathcal{C}(E)/\mathcal{G}(E)$. El espacio de móduli $\mathcal{M} = \mathcal{M}(E)$ de G-conexiones autoduales en un G-haz vectorial E, es el espacio de órbitas $\mathcal{M} = \mathcal{A}(E)/\mathcal{G}(E)$.

CAPÍTULO 4

SO3-CONEXIONES

Fulminado por el soez disparate de la eclíptica,
prescindí del cálculo diferencial y del integral,
resignándome a aprovechar, con modestia, la magia
de dentro y de fuera.
— RAMON LOPEZ VELARDE (1923)

1. INTRODUCCION .

Def: El grupo de norma $\mathcal{G} = \mathcal{G}(E) = \Gamma(\mathbf{G}_E)$ actúa sobre el espacio de G-conexiones por conjugación. Adoptaremos la convención de que una vez que un haz vectorial se ha especificado que es un G-haz vectorial entonces implicitamente supondremos que $\mathcal{G} = \mathcal{G}(E)$ es el grupo de norma $\Gamma(\mathbf{G}_E)$ y que una conexión en E es una G-conexión.

Def: el grupo de isotropía de la acción de $\mathcal{G}$ de una conexión d^E es denotado por $\Gamma(\mathrm{d}^E)$ esto es,

$$\Gamma(\mathrm{d}^E) = \{g \in \mathcal{G} | g\mathrm{d}^E g^{-1} = \mathrm{d}^E\} = \{g \in \mathcal{G} | \mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)} g = 0\}$$

ya que $g\mathrm{d}^E g^{-1} = \mathrm{d}^E$ si y sólo si $g\mathrm{d}^E = \mathrm{d}^E g$ y esto sucede si y sólo si $0 = \mathrm{d}^E g - g\mathrm{d}^E = \mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)} g$.

Cuando $\dim(E) = n$ y $G = \mathbf{SO}$, es decir, E es un $\mathbf{SO}(n)$-haz vectorial, diremos sólamente que d^E es una $\mathbf{SO}$-conexión, en lugar de una $\mathbf{SO}(n)$-conexión..

Def: Para el caso especial $n = 3$, decimos que una $\mathbf{SO}(3)$-conexión d^E es *irreducible* si:

1) Existe un $\mathbf{SO}(2)$-haz vectorial L, tal que

$$E = L \oplus \epsilon$$

donde ϵ es el haz trivial de dimensión 1.

2) Existe una $\mathbf{SO}(2)$-conexión d^L en L tal que

$$\mathrm{d}^E = \mathrm{d}^L \oplus d^1$$

donde $d^1 = d$ es la derivada exterior en ϵ.

El objetivo de este capítulo, es relacionar la topología de E con las clases de equivalencia del grupo de norma de las conexiones reducibles en E. Primero veremos que el grupo de isotropía de cualquier **SO**-conexión sobre un **SO**-haz vectorial E, puede ser identificado por restricción a la fibra, con un subgrupo compacto de $\mathbf{SO}(\dim\ E)$.

Posteriormente, relacionaremos la reducibilidad de una $\mathbf{SO}(3)$-conexión con su grupo de isotropía. El resultado final cuenta el número de clases de equivalencia de conexiones reducibles sobre un $\mathbf{SO}(3)$-haz vectorial sobre una variedad M cerrada y orientada de dimensión 4, con forma de intersección positiva definida y $\mathrm{H}_1(M;\mathbf{Z}_2)=0$.

2. EL KERNEL DE LAS CONEXIONES .

En esta sección, E es un haz vectorial Riemanniano sobre una variedad compacta y conexa M y d^E es una conexión ortogonal en E. Estableceremos las propiedades de $\ker \mathrm{d}^E$ que tienen consecuencias geométricas fundamentales para los espacios de móduli de conexiones.

Def: Para $x \in M$

$$h_x^E\colon \Omega^0(E) \to E_x$$

denota la evaluación en X. Cuando no haya confusión respecto a x, abreviaremos h_x^E por h_x.

Teorema 4.2.1: $\ker \mathrm{d}^E$ *es de dimensión finita. Si* $s_1, s_2 \in \ker \mathrm{d}^E$ *y* $s_1(x) = s_2(x)$, *entonces* $s_1 = s_2$.

Dem: Escojamos un marco local $s=(s_1,\ldots,s_m)$ para E, donde $m = \dim\ E$. Respecto a este marco, d^E puede representarse por una matriz $\theta(\theta_{ij})$ de 1-formas en E, por lo tanto

$$\mathrm{d}^E s_i = \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij} \otimes s_j.$$

La ecuación $\mathrm{d}^E\phi = 0$, da origen a un sistema de ecuaciones de $m \times m$

$$(\S) \qquad d\phi + \theta\phi = 0.$$

Restringiendo esta ecuación a una curva $\gamma(t)$ en M, obtenemos la ecuación de primer orden

$$\frac{d\phi}{dt} + \theta(\gamma'(t)) \cdot \phi(\gamma(t)) = 0$$

cuyas soluciones están determinadas por $\phi(0)$. ∎

Corolario 4.2.2: *La restricción* $h_x^E|_{\ker \mathrm{d}^E}\colon \ker \mathrm{d}^E \to E_x$ *es una isometría sobre su imagen.*

Dem: Como d^E es una conexión ortogonal

$$d(s_1, s_2) = (\mathrm{d}^E s_1, s_2) + (s_1, \mathrm{d}^E s_2) = 0$$

para $s_1, s_2 \in \ker \mathrm{d}^E$, por lo tanto $(s_1, s_2) = \langle s_1(x), s_2(x)\rangle$ para toda $x \in M$. Así

$$\langle s_1, s_2 \rangle = \int_M (s_1, s_2) = \langle s_1(x), s_2(x)\rangle. \quad \blacksquare$$

A continuación, damos una caracterización alternativa de $\Gamma(\mathrm{d}^E)$.

Proposición 4.2.3: $\Gamma(\mathrm{d}^E) = \{\, g \in \Omega^0(\mathrm{Hom}(E,E)) \mid g^t g = 1,\ \mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)} g = 0 \,\}$.

Dem: Sólamente hay que recordar que $\mathbf{G}_E = \{\, g \in \mathrm{Hom}(E,E) \mid g^t = g^{-1} \,\}$, $\mathcal{G} = \Gamma(\mathbf{G}_E)$ y que $\Omega^0(\mathrm{Hom}(E,E)) = \Gamma(\mathrm{Hom}(E,E))$. $\blacksquare$

Corolario 4.2.4: *Para* $x \in M$, *la aplicación* $h_x = h_x^{\mathrm{Hom}(E,E)}$ *manda a* $\Gamma(\mathrm{d}^E) \subset \mathcal{G}(E) \subset \Omega^0(\mathrm{Hom}(E,E))$ *inyectivamente sobre un subgrupo cerrado (y por lo tanto compacto) de*

$$\mathbf{SO}(E_x) \subset \mathrm{Hom}(E,E).$$

Dem: De la Proposición 4.2.3 $\Gamma(\mathrm{d}^E)$ es un subespacio cerrado de $\ker \mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)}$. Aplicando el Corolario 4.2.2 para $\mathrm{Hom}(E,E)$, este subespacio es aplicado inyectivamente sobre su imagen, que es cerrada en $W = h_x \ker \mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)}$ y por lo tanto en $\mathrm{Hom}(E_x, E_x)$ por que W es cerrado en $\mathrm{Hom}(E_x, E_x)$. $\blacksquare$

3. REDUCIBILIDAD Y GRUPOS DE ISOTROPIA .

A continuación, demostraremos un teorema que relaciona la reducibilidad de una $\mathbf{SO}(3)$-conexión d^E en E, con su subgrupo de isotropía $\Gamma(\mathrm{d}^E)$. Para ello, necesitamos algunos resultados preliminares sobre la clase de Euler.

Sea E un haz vectorial complejo de dimensión N sobre un espacio topológico X. Usaremos la notación $e(E) \in \mathrm{H}^n(X)$ para denotar la clase de Euler de E.

Nuestro primer resultado relaciona la existencia de mapeos que invierten la orientación, con la clase de Euler.

Teorema 4.3.1: **[14, p. 158]** *Si E es un haz vectorial complejo de dimensión n, entonces $c_n(E) = e(E)$.* ∎

Corolario 4.3.2: *Si L es un haz lineal complejo con una métrica Hermitiana que admite un automorfismo de haces real lineal, que invierte la orientación, entonces $2c_1(L) = 0$.*

Dem: Es in mediato de la Proposición 2.7.3 y del Teorema 4.3.1. ∎

Corolario 4.3.3: *Si L es un haz lineal complejo no trivial sobre X, con $\mathrm{H}_1(X;\mathbf{Z}_2) = 0$, entonces L no admite un automorfismo de haces que invierta la orientación.*

Dem: La hipótesis de que $\mathrm{H}_1(X;\mathbf{Z}_2) = 0$ y el Teorema de los coeficientes Universales, implica que $\mathbf{H}^2(X;\mathbf{Z})$ no tiene 2-torsión. Como L es no trivial, $c_1(L) \neq 0$ en $\mathbf{H}^2(X)$ y no es un elemento de orden 2. El resultado se sigue del Corolario 4.3.2. ∎

A continuación, damos una reformulación del Corolario 4.3.3 que usaremos mas adelante.

Lema 4.3.4: *Sea L un haz lineal complejo sobre un espacio topológico X cuya primera clase de Chern no es de orden 2 en $\mathrm{H}^2(X;\mathbf{Z})$. Entonces L no admite un automorfismo real lineal que invierta la orientación en las fibras.* ∎

Un haz lineal complejo con una métrica Hermitiana, sobre un espacio topológico X, es por definición un $\mathbf{U}(n)$-haz vectorial. Como $\mathbf{U}(1) = \mathbf{SO}(2)$, L es un $\mathbf{SO}(2)$-haz vectorial. Entonces $E = L \oplus \epsilon$ es un $\mathbf{SO}(3)$-haz vectorial. Recordemos que $\mathcal{G} = \mathcal{G}(E) = \Gamma(\mathbf{SO}_E)$; por lo tanto si $g \in \mathcal{G}$ y $x \in X$, entonces para $h_x = h_x^{\mathrm{Hom}(E,E)}$, tenemos que $\det h_x(g) = 1$.

Corolario 4.3.5: *Sea L un haz lineal complejo no trivial sobre una variedad deferenciable compacta M, con $\mathrm{H}_1(M;\mathbf{Z}_2) = 0$. Sea $E = L \oplus \epsilon$ y sea H un subgrupo de $\mathcal{G}(E)$ que manda a ϵ en sí mismo. Entonces H manda a L en sí mismo y $h_x^{\mathrm{Hom}(E,E)}(H) \subset \mathbf{SO}(2) \subset \mathbf{SO}(3)$, para cada $x \in M$.*

Dem: Como $L = \epsilon^{\perp}$ (el complemento ortogonal de ϵ), H preserva el producto interior y H manda a ϵ en sí mismo, entonces H manda a L en sí mismo. Entonces $h_x^{\mathrm{Hom}(L,L)}(H) \subset \mathbf{O}(2)$ para toda $x \in M$. Sea $g \in H$, como $\mathbf{g} \in \mathcal{G}(E)$, $h_x^{\mathrm{Hom}(E,E)}(g) \in \mathbf{SO}(3)$ por lo que

$$h_x^{\mathrm{Hom}(E,E)}(g) = \begin{pmatrix} h_x^{\mathrm{Hom}(L,L)}(g) & 0 \\ 0 & h_x^{\mathrm{Hom}(\epsilon,\epsilon)}(g) \end{pmatrix} \in \mathbf{SO}(3)$$

donde $h_x^{\mathrm{Hom}(L,L)}$ es una matriz ortogonal de 2×2, y

$$h_x^{\mathrm{Hom}(\epsilon,\epsilon)}(g) = \det h_x^{\mathrm{Hom}(L,L)}(g) = \pm 1.$$

Afirmamos que $\det h_x^{\mathrm{Hom}(L,L)}(g) = 1$, si no, $\det h_x^{\mathrm{Hom}(L,L)}(g) = -1$ y g invertiría la orientación sobre las fibras de L, lo que contradice el Corolario 4.3.4. por lo tanto, $h_x^{\mathrm{Hom}(E,E)}$ mada a H en un subgrupo de $\mathbf{SO}(2) \subset \mathbf{SO}(3)$. ∎

Corolario 4.3.6: *Sean M, L y ϵ como en el Corolario 4.3.5. Sea $E = L \oplus \epsilon$, donde L es no trivial. Si d^E es una conexión reducible en E, entonces $\Gamma(\mathrm{d}^E) = S^1$.*

Dem: Si d^E es reducible, entonces $\mathrm{d}^E = \mathrm{d}^L \oplus d$. Tenemos que $S^1 = \mathbf{SO}(2) \subset \mathcal{G}$ y actúa rotando cada fibra de L la misma cantidad, mediante la multiplicación compleja, y trivialmente sobre ϵ. Si $g \in S^1$ y $\sigma \in \Omega^0(E)$

$$\mathrm{d}^E(g\sigma) = dg \otimes \sigma + g\mathrm{d}^E\sigma = g\mathrm{d}^E\sigma$$

por lo que

$$\mathrm{d}^E g = g\mathrm{d}^E$$

es decir, $g(\mathrm{d}^E) = g\mathrm{d}^E g^{-1} = \mathrm{d}^E$, por lo tanto $g \in \Gamma(\mathrm{d}^E)$.

Por otro lado, si $g \in \Gamma(\mathrm{d}^E)$, entonces

$$\begin{aligned} g\mathrm{d}^E g^{-1} &= \mathrm{d}^E \\ g(\mathrm{d}^L \oplus d)g^{-1} &= \mathrm{d}^L \oplus d \\ g\mathrm{d}^L g^{-1} \oplus g d g^{-1} &= \mathrm{d}^L \oplus d \end{aligned}$$

por lo tanto, g fija a ϵ y rota a L. Como $g(\mathrm{d}^E) = g\mathrm{d}^E g^{-1} = \mathrm{d}^E$ tenemos que $g\mathrm{d}^E = \mathrm{d}^E g$, entonces, para toda $\sigma \in \Omega^0(E)$ tenemos que

$$g\mathrm{d}^E(\sigma) = \mathrm{d}^E(g\sigma) = dg \otimes \sigma + g\mathrm{d}^E\sigma,$$

entonces, $dg = 0$, de donde g es constante para toda $x \in M$, por lo que $g \in S^1$ y por lo tanto $\Gamma(\mathrm{d}^E) = S^1$. ∎

Teorema 4.3.7: *Sea E Un $\mathbf{SO}(3)$-haz vectorial sobre una variedad compacta M de dimensión 4, con $\mathrm{H}_1(M; \mathbf{Z}_2) = 0$. Sea d^E una conexión ortogonal en E. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) d^E *es una conexión reducible sobre* E.

(2) $\Gamma(\mathrm{d}^E) \cong S^1 = \mathbf{SO}(2)$.

(3) $\Gamma(\mathrm{d}^E) \neq \{\mathrm{Id}\}$.

Dem: (1) ⇒ (2). Corolario 4.3.6. (2) ⇒ (3). Obvio. (3) ⇒ (1). Por hipótesis, existe $g \in \Gamma(\mathrm{d}^E)$ tal que $g \neq \mathrm{Id}$. Sobre cada punto $x \in M$, $g_x|_{E_x}$ tiene un eigenvector real. Como

$g \in \Gamma(\mathrm{d}^E)$, tenemos que $\mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)}g = 0$, es decir, g es una sección de $\mathrm{Hom}(E,E)$ que es paralela, por lo tanto el eigenvalor λ es constante a lo largo de M. El correspondiente eigenespacio η, es una recta real en cada fibre de E, que junto con su complemento ortogonal $L = \eta^{\perp}$ da una descomposición $E = L \oplus \eta$, donde L es un $\mathbf{O}(1)$-haz vectorial.

Sea H el subgrupo de $\mathcal{G}(E)$ que manda a η en sí mismo, entonces, como $\mathrm{H}_1(M;\mathbf{Z}_2) = 0$, por el Corolario 4.3.5 tenemos que $h_x^{\mathrm{Hom}(E,E)}g' \in \mathbf{SO}(2)$ para toda $g' \in H$, por lo tanto L es un $\mathbf{SO}(2)$-haz vectorial y $\eta \cong \epsilon$.

Falta ver que existe una descomposición $\mathrm{d}^E = \mathrm{d}^L + d$, donde $\mathrm{d}^L = \mathrm{d}^E|_{\Omega^0(L)}$. Como $g \in \Gamma(\mathrm{d}^E)$, G conmuta con d^E. Si $s \in \Omega^0(\epsilon)$ entonces $g\mathrm{d}^E s = \mathrm{d}^E gs = \mathrm{d}^E \lambda s = \lambda \mathrm{d}^E s$, por lo que $\mathrm{d}^E s \in \Omega^i(\epsilon)$. Ahora veamos que d^E manda a $\Omega^0(L)$ en $\Omega^1(L)$. Como $\Omega^i(L) = (\Omega^i(\epsilon))^{\perp}$, basta ver que $\langle \mathrm{d}^E s, s_1\rangle = 0$ para toda $s \in \Omega^0(L)$ y $s_1 \in \Omega^1(\epsilon)$.

Sea $s_1 = s_{11} \otimes s_{12} \in \Omega^1(\epsilon)$ donde $s_{11} \in \Omega^1$, $s_{12} \in \Omega^0(\epsilon)$. Por el isomorfismo

$$\Omega^1 \otimes_{\Omega^0} \Omega^0(\epsilon)$$

es suficiente considerar elementos de esta forma. Tenemos que

$$\langle \mathrm{d}^E s, s_{11} \otimes s_{12}\rangle = \langle (\mathrm{d}^E s, s_{12}), s_{11}\rangle$$

como $(s, s_{12}) = 0$ y d^E es ortogonal, tenemos que

$$d(s, s_{12}) = (\mathrm{d}^E s, s_{12}) + (s, \mathrm{d}^E s_{12}) = 0.$$

Recordemos que $\mathrm{d}^E s_{12} \in \Omega^1(\epsilon)$ y $s \in \Omega^0(L)$. Así, $(s, \mathrm{d}^E s_{12}) = 0$ y por lo tanto $(\mathrm{d}^E s, s_{12}) = 0$. Esto implica que $\langle \mathrm{d}^E s, s_{11} \otimes s_{12}\rangle = 0$, terminando así las demostración. ∎

4. SO(2)-CONEXIONES .

En esta sección, veremos la relación entre las $\mathbf{SO}(2)$-conexiones y las $\mathbf{U}(1)$-conexiones.

Sea V un espacio vectorial real orientado de dimensión 2 con un producto interior. V tiene una estructura compleja compatible con su orientación definida de la siguiente manera. Sea $i = \sqrt{-1}$ y $V \in v$. Definimos iv como el único vector en $\langle v\rangle^{\perp}$ cuya norma es igual a la norma de v y tal que el par ordenado (v, iv) concuerde con la orientación dada en V. Si expresamos a v por $v = (v_1, v_2)$, donde v_1 y v_2 son las coordenadas de v en una base de V, tenemos que $iv = (-v_2, v_1)$.

Supongamos que E es un haz vectorial real orientado de dimensión 2 sobre una variedad M. Usando la definición anterior, podemos definir una multiplicación por i sobre las fibras de E. Esto da a E la estructura de un Haz vectorial complejo.

Sea d^E una $\mathbf{SO}(2)$-conexión en E y sea θ su matriz de conexión local. Como las $\mathbf{SO}(2)$-conexiones son ortogonales, θ es antisimétrica, entonces

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & -\theta' \\ \theta' & 0 \end{pmatrix}$$

donde θ' es una 1-forma real en M, entonces, por la estructura inducida en E tenemos que $\theta = i\theta'$ ya que si $v = (v_1, v_2)$

$$\theta v = \begin{pmatrix} 0 & -\theta' \\ \theta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\theta' v_2 \\ \theta' v_1 \end{pmatrix}$$
$$i\theta = i\begin{pmatrix} \theta' v_1 \\ \theta' v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\theta' v_2 \\ \theta' v_1 \end{pmatrix}$$

por lo tanto, θ es lineal compleja usando el isomorfismo de espacios vectoriales $\mathbf{R}^2 \cong \mathbf{C}$. Por lo que d^E es una $\mathbf{U}(1)$-conexión en E visto como un haz vectorial complejo con matriz de conexión anti-hermitiana $\theta = i\theta'$ donde θ' es una 1-forma real en M.

Recíprocamente, dada una $\mathbf{U}(1)$-conexión d^E en un haz vectorial complejo E, la matriz de conexión local θ satisface que $\theta = i\theta'$ por ser anti-hermitiana, donde θ' es una 1-forma real en M. Viendo a E como un haz vectorial real, d^E es una $\mathbf{SO}(2)$-conexión con matriz de conexión local

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & -\theta' \\ \theta' & 0 \end{pmatrix}.$$

Def: Sea E un haz vectorial complejo de dimensión 1 sobre una variedad M. Sea $\mathcal{C}$ el espacio de $\mathbf{U}(1)$-conexiones (equivalentemente $\mathbf{SO}(2)$-conexiones) en E. Tenemos una aplicación

$$\tau : \mathcal{C} \to \Omega^2 = \Gamma(\textstyle\bigwedge^2 T^*M)$$

dado por

$$\tau(\mathrm{d}^E) = c_1\left(\tfrac{i}{2\pi} R(\mathrm{d}^E)\right) = \tfrac{i}{2\pi} R(\mathrm{d}^E),$$

una 2-forma representante de $c_1(E)$, la primera clase de Chern de E.

Lema 4.4.1: *Sea L un haz lineal complejo sobre una variedad M con $\mathrm{H}_1(M; \mathbf{Z}_2) = 0$. Entonces*

$$\mathcal{G}(L) = \{\, e^{if} \mid f \in C^\infty(M) \,\}.$$

Dem: Sea $g \in \mathcal{G}$ y $x \in M$. Entonces la aplicación $g(x)\colon L_x \to L_x$ es un elemento de $\mathrm{U}(L_x) \cong \mathrm{U}(1) \cong S^1$. Como U(1) es conmutativo, tenemos una aplicación $g\colon M \to S^1$. Bajo la aplicación cubriente $\mathbf{R} \to S^1 : t \mapsto e^{it}$, g levanta a una aplicación $f\colon M \to \mathbf{R}$, si y sólo si $g_*\colon \pi_1(M) \to \pi_1(S^1)$ tiene imagen cero. Sim embargo, $\pi_1(S^1) = \mathbf{Z}$ en abeliano, por lo tanto, g_* se factoriza a través de $[\pi_1(M), \pi_1(M)]$ para dar una aplicación

$$\pi_1(M) \,/\, [\pi_1(m), \pi_1(M)] = \mathrm{H}_1(M;\mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}$$

es decir, un elemento de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathrm{H}_1(M;\mathbf{Z}),\mathbf{Z})$. Como $\mathbf{H}^1(M;\mathbf{Z}) = 0$ (por que $\mathrm{H}_1(M;\mathbf{Z}_2) = 0$)

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathrm{H}_1(M;\mathbf{Z}),\mathbf{Z}) = 0$$

y g_* es la aplicación trivial. Por lo tanto $g = e^{if}$ para alguna $f \in C^\infty(M)$. ∎

Proposición 4.4.2: *Sea L un haz lineal complejo sobre una variedad M con $\mathrm{H}_1(M;\mathbf{Z}_2) = 0$. Entonces la aplicación τ definida anteriormente, da una correspondencia uno a uno entre las clases de equivalencia de conexiones Hermitianas en L y 2-formas en M representantes de $c_1(L)$.*

Dem: Primero veamos que τ está bien definida sobre las clases de equivalencia de las conexiones Hermitianas en L. Sea d^L una conexión Hermitiana en L con matriz de conexión local compleja θ. Entonces $\theta = i\theta'$, donde θ' es una 1-forma real en M. Por lo tanto, $\theta \wedge \theta = -\theta' \wedge \theta' = 0$ y como $R = d\theta - \theta \wedge \theta$, entonces $R = d\theta$ y

$$\tau(\mathrm{d}^L) = c_1\left(\tfrac{i}{2\pi}R(\mathrm{d}^L)\right) = \tfrac{i}{2\pi}R(\mathrm{d}^L) = \tfrac{i}{2\pi}d\theta.$$

Sea $f \in C^\infty(M)$, $g = e^{if} \in \mathcal{G}$, $s \in \Omega^0(L)$. Entonces

$$\begin{aligned} g\mathrm{d}^L g^{-1} &= e^{if}\mathrm{d}^L e^{-if}s \\ &= e^{if}(de^{-if} \otimes s + e^{-if} \wedge \mathrm{d}^L s) \\ &= e^{if}(-ie^{-if}df \otimes s + e^{-if} \wedge \mathrm{d}^L s) \\ &= -idf \otimes s + \mathrm{d}^L s \end{aligned}$$

por lo quela matriz de conexión local de $e^{if}\mathrm{d}^L e^{-if}$ es $-idf + \theta$. Entonces

$$\tau(g\mathrm{d}^L g^{-1}) = \tfrac{i}{2\pi}(-id^2 f + d\theta) = \tfrac{i}{2\pi}d\theta = \tau(\mathrm{d}^L).$$

Ahora veamos que τ es inyectiva. Supongamos que d^L y $\mathrm{d}^{L'}$ son conexiones en L y que $\tau(\mathrm{d}^L) = \tau(\mathrm{d}^{L'}$. Usando el Lema 3.3.1, sabemos que $\mathrm{d}^{L'} - \mathrm{d}^L = A \in \Omega^1(\mathbf{so}^L)$. Como $\mathbf{so}^L$ es un haz lineal real sobre M y $\mathrm{H}^1(M;\mathbf{Z}) = 0$, $\mathbf{so}^L$ es trivial.

Entonces $A = iA'$, donde A' es una 1-forma real en M. Si $\theta = i\theta'$ es la matriz de conexión local de d^L, entonces $i(\theta' + A')$ es la matriz de conexión local de $\mathrm{d}^{L'}$, por lo que $\tau(\mathrm{d}^{L'}) = \frac{-1}{2\pi}(d\theta' + dA')$. Pero $\tau(\mathrm{d}^{L'}) = \tau(\mathrm{d}^L) = \frac{-1}{2\pi}d\theta'$ por lo que $dA' = 0$. Como $\mathbf{H}^1(M;\mathbf{Z}) = 0$, existe una $f \in C^\infty(M)$ con $df = A'$. Entonces $\mathrm{d}^{L'} = \mathrm{d}^L + idf$ y por nuestros cálculos anteriores, $\mathrm{d}^{L'} = e^{-if}\mathrm{d}^L e^{if}$, por lo que $\mathrm{d}^{L'}$ es equivalente a d^L bajo el grupo de norma.

Finalmente, veamos que τ es suprayectiva. Sea Ω una 2-forma que representa a $c_1(L)$. Sea d^L una conexión en L con matriz de conexión local θ. Entonces $\tau(\mathrm{d}^L) = \frac{i}{2\pi}d\theta = \Omega + d\omega$ para alguna $\omega \in \Omega^1$. Sea $\mathrm{d}^{L'} = \mathrm{d}^L - \frac{2\pi}{i}\omega$. Entonces $\tau(\mathrm{d}^{L'}) = \tau(\mathrm{d}^L - \frac{2\pi}{i}\omega) = \frac{i}{2\pi}d\theta - d\omega = \Omega + d\omega - d\omega = \Omega$. Esto completa la prueba. ∎

5. EXISTENCIA DE so(2)-CONEXIONES AUTODUALES .

Hasta ahora, sólamente hemos definido a las $\mathbf{SO}(2)$-conexiones autoduales, pero no hemos demostrado que existen. El resultado principal de esta sección prueba su existencia usando algunos preliminares de la Teoría de Hodge. Las $\mathbf{SO}(2)$-conexiones autoduales serán usadas posteriormente para construir $\mathbf{SO}(3)$-conexiones reducibles autoduales.

Sea L un haz lineal complejo L sobre una variedad Riemanniana M cerrada y orientada de dimensión 4, y sea d^L una conexión Hermitiana en L. Recordemos que d^L es autodual si $*R(\mathrm{d}^L) = R(\mathrm{d}^L)$. Por lo tanto d^L es autodual si y sólo si

$$\tau(\mathrm{d}^L) = \frac{i}{2\pi}R(\mathrm{d}^L) = \frac{i}{2\pi} * R(\mathrm{d}^L) = *\tau(\mathrm{d}^L).$$

Como

$$c_1(L) = \left[\frac{i}{2\pi}R(\mathrm{d}^L)\right] = [\tau(\mathrm{d}^L)] \in \mathbf{H}^2(M;\mathbf{R}),$$

$*\tau(\mathrm{d}^L) = \tau(\mathrm{d}^L)$ implica que $*c_1(L) = c_1(L)$. Veremos que el recíproco es cierto.

Cada Ω^i en el complejo de De Rham de M, hereda un producto interior de la métrica Riemanniana de M. El Teorema de Hodge dice que respecto a este producto interior

$$\Omega^i = H^i \oplus \mathrm{im} d \oplus \mathrm{im}\delta$$

donde H^i es el subespacio de i-formas armónicas, es decir, el espacio

$$H^i = \{\, \omega \in \Omega^i \mid \Delta\omega = 0 \,\},$$

y además, que $H^i \cong \mathbf{H}^i$ el i-ésimo grupo de cohomología de De Rham. (Nótese que $d\colon \Omega^i \to \Omega^{i+1}$ es la derivada exterior en el complejo de De Rham, $\delta\colon \Omega^{i+1} \to \Omega^i$ es la adjunta de d y $\Delta = \delta d + d\delta$ es el Laplaciano). El Teorema de Hodge implica que cada clase de cohomología tiene un único representante armónico.

Proposición 4.5.1: *Sea $\delta\colon \Omega^{i+1} \to \Omega^i$ la adjunta de $d\colon \Omega^i \to \Omega^{i+1}$, la derivada exterior del complejo de De Rham. Sea $*\colon \Omega^i \to \Omega^{n-i}$ el operador de Hodge. Entonces*

(1) $\delta = (-1)^{in+1} * d*$.

(2) $*\Delta = \Delta *$.

Dem: Para probar (1), sea $\delta' = - * d*$ y sean $\alpha \in \Omega^i$ y $\beta \in \Omega^{i+1}$. Recordemos del Lema 3.2.4, que $*^2 = (-1)^{i(n-i)}$. Entonces

$$\begin{aligned} d\alpha \wedge *\beta - \alpha \wedge *\delta'\beta &= d\alpha \wedge *\beta - (-1)^{in+1}\alpha \wedge * * d * \beta \\ &= d\alpha \wedge *\beta + (-1)^{in}(-1)^{i(n-i)} d * \beta \\ &= d\alpha \wedge *\beta + (-1)^{in+in-i^2} d * \beta \\ &= d\alpha \wedge *\beta + (-1)^{i} d * \beta \\ &= d(\alpha \wedge *\beta) \end{aligned}$$

ya que si i es par, también lo es i^2. Integrando ambos miembros tenemos

$$\int_M (d\alpha \wedge *\beta - \alpha \wedge *\delta'\beta) = 0$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_M d\alpha \wedge *\beta &= \int_M \alpha \wedge *\delta'\beta \\ \int_M \langle d\alpha, \beta\rangle d(\mathrm{vol}) &= \int_M \langle \alpha, \delta'\beta\rangle d(\mathrm{vol}) \\ \langle d\alpha, \beta\rangle &= \langle \alpha, \delta'\beta\rangle \end{aligned}$$

es decir, d y δ' son adjuntos, por lo tanto $\delta = \delta'$.

Ahora probemos (2). Por (1) tenemos

$$\begin{aligned} \Delta &= \delta d + d\delta \\ \Delta &= (-1)^{in+1}(*d * d + d * d*) \\ *\Delta &= (-1)^{in+1}(* * d * d + *d * d*) \\ *\Delta &= (-1)^{in+1}((-1^{i(n-i)} d * d + *d * d*) \\ *\Delta &= (-1)^{in+1}(d * d * * + *d * d*) \\ *\Delta &= d\delta * + \delta d* \\ *\Delta &= \Delta * . \ \blacksquare \end{aligned}$$

Proposición 4.5.2: *Toda 2-forma armónica es auto dual si M tiene forma de intersección positiva definida.*

Dem: Recuérdese que el operador $*$ actúa en Ω^2 como una isometría de orden 2, por lo que induce una descomposición ortogonal $\Omega^2 = \Omega_+ \oplus \Omega_-$, donde

$$\Omega_\pm = \{\, x \in \Omega^2 \mid *x = \pm x \,\}.$$

Los elementos de Ω_+ son llamados *formas autoduales*. Por el Lema 4.5.1, $*$ preserva formas armónicas, por lo que induce una descomposición ortogonal $H^2 = H_+ \oplus H_-$. Supongamos que M tiene forma de intersección positiva definida. Sea $x \in H^2$ y supongamos que $*x = \pm x$. Entonces

$$\begin{aligned} q(x) = [x] \cdot [x] &= \int_M x \wedge x \\ &= \int_M x \wedge ** x \\ &= \int_M \langle x, *x \rangle d(\mathrm{vol}) \\ &= \pm \|x\|^2. \end{aligned}$$

Nótese que q es la forma cuadrática asociada con la forma de intersección. Así, q es $\pm$ definida sobre $H_\pm$, por lo que $H^2 = H_+$, es decir, toda 2-forma armónica es autodual. ∎

Corolario 4.5.3: *Sea M una variedad Riemanniana cerrada, con forma de intersección positiva definida, tal que $\mathrm{H}_1(M; \mathbf{Z}_2) = 0$. Entonces cualquier haz lineal complejo no trivial L sobre M tiene una conexión autodual, que es única salvo equivalencia bajo el grupo de norma. Es decir, $\mathcal{A}(L) \,/\, \mathcal{G}(L)$ es un punto.*

Dem: Primero supongamos que d^L es autodual. Entonces $\tau(\mathrm{d}^L) = \frac{i}{2\pi} R(\mathrm{d}^L)$ es una 2-forma cerrada por ser un representante de $c_1(L)$. Como es autodual tenemos

$$\begin{aligned} \Delta\tau(\mathrm{d}^L) &= \delta d\tau(\mathrm{d}^L) + d\delta\tau(\mathrm{d}^L) \\ &= d\delta\tau(\mathrm{d}^L) \\ &= (-1)^{in+1} d * d * \tau(\mathrm{d}^L) \\ &= (-1)^{in+1} d * d\tau(\mathrm{d}^L) \\ &= 0 \end{aligned}$$

entonces, $\tau(\mathrm{d}^L)$ es una 2-forma armónica y por lo tanto, única en su clase de De Rham. Por la Proposición 4.4.2, el conjunto de conexiones autoduales en L cae en una clase de equivalencia del grupo de norma.

Recíprocamente, sea y el único representante armónico de $c_1(L)$ y sea d^L una conexión con $\tau(\mathrm{d}^L) = y$. Entonces por la Proposición 4.4.2, d^L es única salvo equivalencia bajo el grupo de norma. De la Proposición 4.5.2, tenemos que $*\tau(\mathrm{d}^L) = \tau(\mathrm{d}^L)$, por lo que $*R(\mathrm{d}^L) = R(\mathrm{d}^L)$, lo que significa que L tiene una conexión autodual. ∎

6. ESPACIOS CON PRODUCTO INTERIOR .

Desarrollaremos algunos resultados y notación sobre espacios con producto interior. Estos resultados serán usados para contar las clases de isomorfismo de haces lineales complejos que descomponen a un $\mathbf{SO}(3)$-haz vectorial.

Sea V un espacio con producto interior positivo definido sobre $\mathbf{Z}$. Si $v_1, v_2 \in V$, denotaremos con $\langle v_1, v_2\rangle$ o con $v_1 \cdot v_2$, el producto interior de v_1 con v_2. También usaremos v^2 para $v \cdot v$.

Def: Sean $v_1 = (a_1, \ldots, a_n), v_2 = (b_1, \ldots, b_n) \in V$ expresados en coordenadas respecto a una base de V, donde $\operatorname{rang} V = n$. Decimos que $v_1 \equiv v_2 \pmod 2$ si $a_i \equiv b_i \pmod 2$ con $1 \leq i \leq n$.

Def: Un vector $e \in V$ es *minimal* si para todo $v \in V$ con $v \equiv e \pmod 2$ se tiene que $e^2 \leq v^2$.

Def: Sea V un espacio con producto interior positivo definido sobre $\mathbf{Z}$. Definimos una relación de equivalencia $\sim$ en V como sigue: si $v, v' \in V$, decimos que $v \sim v'$ si $v \equiv v' \pmod 2$ y $v^2 = v'^2$. También definimos $\mu: V \to \mathbf{Z}$ por

$$\mu(v) = \tfrac{1}{2}\#\{\, v' \in V \mid v' \sim v \,\}.$$

donde $\#$ denota cardinalidad.

Ejemplo: Consideremos el espacio con producto interior diagonal $\langle 1\rangle \oplus \cdots \oplus \langle 1\rangle$. Los vectores minimales tienen la forma $e = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k)$ donde $\epsilon_i = 0$ o ± 1. Sea n el número de ± 1 en el vector minimal particular e. Entonces $\mu(e) = \frac{1}{2}2^n = 2^{n-1}$. Por lo tanto $\mu(e)$ es par, al menos que e tenga solamente un ± 1, en dicho caso $\mu(e) = 1$ y $e^2 = 1$.

Ejemplo: Sea E_8 el espacio con producto interior que consiste en el grupo abeliano $\mathbf{Z}^8$ y la matriz

$$E^8 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ordenemos los vectores de la base $v_1, \ldots, v_8$ y sea $e = v_6$. Entonces $e^2 = 2$, e es minimal, pero $\mu(e) = 1$. Comparando con el ejemplo anterior, concluimos que E_8 no es isomorfo al espacio con producto interior diagonal.

La siguiente proposición, caracteriza el espacio con producto interior diagonal, en términos del invariante μ.

Proposición 4.6.1: *Un espacio con producto interior V sobre $\mathbf{Z}$ es diagonal, si y sólo si, para cada vector minimal $e \in V$ con $e^2 > 1$, $\mu(e)$ es par.*

Dem: "$\Rightarrow$" Esta condición es cierta para el espacio con producto interior diagonal, por el ejemplo visto anteriormente.

"$\Leftarrow$" Supongamos que V no es diagonal. Queremos encontrar un vector minimal e con $e^2 \geq 2$ y $\mu(e)$ impar.

Sea $v \in V$ un vector unitario. Entonces $V = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^{\perp}$. (Como $\mathbf{Z}$ no es un campo, necesitamos un vector unitario para poder definir el complemento ortogonal). Si despues del proceso de descomponer inductivamente a V mediante vectores unitarios tenemos que

$$V = \langle v_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_n \rangle$$

donde $n = \mathrm{rang} V$, tendríamos que V es diagonal, lo que contradice nuestra suposición. Por lo tanto, V tiene un sumando U en el cual todos los vectores distintos de cero tienen longitud $v^2 \geq 2$. Sea $e \in U$ un vector de longitud mínima. Si $v \sim e$, entonces $v \equiv e \pmod 2$, por lo que existe un vector $w \in U$, tal que $v = e + 2w$. Entonces

$$e^2 = v^2 = (e + 2w)^2 = e^2 + 4e \cdot w + 4w^2$$

por lo tanto $w \cdot (w + e) = 0$. Entonces

$$e^2 = v^2 = (e + 2w)^2 = ((e + w) + w)^2 = (e + w)^2 + w^2.$$

Como e tiene longitud mínima en U, esto implica que $w = 0$ o $w = -e$. Esto significa que si $v \sim e$, entonces $v = \pm e$ y $\mu(e) = 1$. Esto completa la prueba. ∎

7. so(2)-CONEXIONES REDUCIBLES AUTODUALES .

Sea M una variedad cerrada, orientada de dimensión 4 con $\mathrm{H}_1(M; \mathbf{Z}_2) = 0$. Sea E un $\mathbf{SO}(3)$-haz vectorial no trivial sobre M. Nuestro objetivo es contar el número de clases de equivalencia bajo el grupo de norma, de las conexiones autoduales reducibles sobre E, bajo la hipótesis adicional de que M tiene forma de intersección positiva definida.

Lema 4.7.1: *Sean* d_1^E *y* d_2^E *conexiones reducibles en* E, *definidas por las descomposiciones* $E = L_1 \oplus \epsilon_1$ *y* $E = L_2 \oplus \epsilon_2$. *Supongamos que* d_1^E *y* d_2^E *son equivalentes bajo el grupo de norma, es decir, existe* $g \in \mathcal{G}$ *con* $g d_1^E g^{-1} = d_2^E$. *Entonces* g *manda a* L_1 *en* L_2 *y por lo tanto da un isomorfismo de haces vectoriales* $L_1 \cong L_2$ *(que posiblemente no preserve la orientación), por lo que* L_2 *es isomorfo a* L_1 *o a* $\bar{L}_1$ *como haz lineal complejo.*

Dem: Si d^E es cualquier conexión reducible en E definida por la descomposición $E = L \oplus \epsilon$, entonces para cualquier $\gamma \in \Gamma(d^E)$ con $\gamma \neq 1$, tenemos que $\epsilon = \{ v \in R | \gamma v = v \}$. Sea $v \in \epsilon_2$ y $1 \neq \gamma \in \Gamma(d_1^E)$. Como $d_2^E = g d_1^E g^{-1}$, $\Gamma(d_2^E) = g\Gamma(d_1^E)g^{-1}$, por lo que $g\gamma g^{-1} \in \Gamma(d_2^E)$. Por lo tanto, si $v \in \epsilon_2$, tenemos que $g\gamma g^{-1}(v) = v$, por lo tanto $\gamma g^{-1} v = g^{-1} v$ y $g^{-1} v \in \epsilon_1$. Esto implica que g^{-1} manda a ϵ_2 en ϵ_1, y equivalentemente g manda a L_1 en L_2. Por lo que L_1 y L_2 son haces vectoriales complejos que vistos como haces vectoriales reales son isomorfos y por lo tanto L_2 es isomorfo a L_1 o a $\bar{L}_1$. ∎

El grupo $\mathbf{Z}_2$ actúa en el conjunto de haces lineales complejos sobre M. Un generador de $\mathbf{Z}_2$ actúa mandando a un haz lineal complejo a su complejo conjugado. Sea E un $\mathbf{SO}(2)$-haz sobre M. El conjunto $\mathcal{S}$ de clases de isomorfismo de haces lineales complejos sobre M que descomponen a E, es un subconjunto $\mathbf{Z}_2$-invariante (como veremos en el siguiente Lema).

El grupo $\mathbf{Z}_2$ también actúa en $\mathbf{H}^2(M;\mathbf{Z})$. Un generador de $\mathbf{Z}_2$ actúa por multiplicación por -1. El subconjunto

$$\mathcal{S}' = \{ v \in \mathbf{H}^2(M;\mathbf{Z}) \mid v^2 = p_1(E) \text{ y } v \equiv w_2(E) \pmod 2 \}$$

es $\mathbf{Z}_2$-invariante.

Lema 4.7.2: *La primera clase de Chern define un isomorfismo*

$$c_1 : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'.$$

Dem: Supongamos que $E = L \oplus \epsilon$, donde L es un haz lineal complejo sobre M. Entonces

$$\begin{aligned} p_1(E) &= p_1(L) && \text{Por que } E = L \oplus \epsilon, \\ &= -c_2(L \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}) && \text{por definición de } p_1(L), \\ &= -c_2(L \otimes \bar{L}) && \text{por el Lema 2.5.2,} \\ &= -c_1(L)c_1(\bar{L}) && \text{por el axioma de la suma,} \\ &= c_1(L)^2 && \text{por el Lema 2.5.3.} \end{aligned}$$

En general, la clase superior de Stiefel-Whitney de un haz vectorial complejo es la clase superior de Chern (mod 2) (ver [**14, Prop. 9.5, p. 99**]) por lo tanto $w_2(E) = w_2(L) = c_1(L) \pmod 2$. Por lo tanto la aplicación

$$\mathcal{S} \to \mathcal{S}' : L \mapsto c_1(L)$$

es $\mathbf{Z}_2$-invariante por que $c_1(\bar{L}) = -c_1(L)$. Esta aplicación es una correspondencia uno a uno por que los $\mathbf{SO}(3)$-haces vectoriales sobre una variedad de dimensión 4, están clasificados por p_1 y w_2 **[7, p. 223]** y los haces lineales complejos sobre una variedad, están clasificados por c_1 (**[10, Teo 3.4, p. 236]**). ∎

Sea L un haz lineal complejo sobre M y $E = L \oplus \epsilon$. Sea

$$\mathcal{S}(L) = \mathcal{S} \;/\; \mathbf{Z}_2 = \{\, [L'] \mid L' \text{ es un haz lineal complejo, } L' \oplus \epsilon \cong L \oplus \epsilon \,\} \;/\; \mathbf{Z}_2.$$

donde $[L']$ denota la clase de isomorfismo de L. Denotaremós a la cardinalidad de $\mathcal{S}(L)$ por $\rho(L)$.

Lema 4.7.3: *Supongamos que M tiene una forma de intersección positiva definida. Entonces el conjunto de clases de equivalencia bajo el grupo de norma de conexiones reducibles autoduales en E, están en correspondencia uno a uno, con el conjunto de clases de equivalencia de haces lineales complejos que descomponen a E bajo la acción de $\mathbf{Z}_2$, es decir,*

$$\mathcal{A}(E)_{red}/\mathcal{G}(E) \cong \mathcal{S}(L).$$

Dem: Supongamos que L descompone a E. Sea d^L una $\mathbf{SO}(2)$-conexión autodual en L. Esta conexión existe y es única salvo equivalencia bajo el grupo de norma, por el Corolario 4.5.3. Entonces $\mathrm{d}^E = \mathrm{d}^L \oplus d$ es una conexión reducible autodual en E.

Supongamos ahora que l_1 y L_2 son haces lineales complejos que descomponen a E y que sus correspondientes conexiones reducibles d_1^E y d_2^E son equivalentes bajo el grupo de norma. Entonces por el Lema 4.7.1, L_1 yL_2 son isomorfos como haces vectoriales reales. Por lo tanto L_2 es isomorfo a L_1 o a $\bar{L}_1$.

Combinando los Lemas 4.7.2 y 4.7.3 obtenemos el siguiente

Teorema 4.7.4: *Sea M una variedad cerrada y orientada de dimensión 4, con forma de intersección positiva definida y $\mathrm{H}_1(M;\mathbf{Z}_2) = 0$. Sea $E = L \oplus \epsilon$. Entonces el número de clases de equivalencia de conexiones reducibles autoduales en E bajo el grupo de norma, es igual a*

$$\rho(L) = \tfrac{1}{2}\#\{\, y \in \mathbf{H}^2(M;\mathbf{Z}) \mid y^2 = c_1(L)^2 \text{ y } y \equiv c_1(L)^2 \pmod 2 \,\}.$$

Dem: Por los Lemas 4.7.2 y 4.7.3 tenemos que

$$\#(\mathcal{A}(E)_{red} \;/\; \mathcal{G}(E)) = \#\mathcal{S}(L) = \rho(L) = \#(\mathcal{S} \;/\; \mathbf{Z}^2)) = \#(\mathcal{S}' \;/\; \mathbf{Z}^2).$$

Por hipótesis, $H_1(M;\mathbf{Z}_2)=0$, por lo tanto $\mathbf{H}^2(M;\mathbf{Z})$ no tiene elementos distintos del cero que sean anulados por 2. Como $0\notin \mathcal{S}'\subset \mathrm{H}^2(M;\mathbf{Z})$, tenemos que $\#(\mathcal{S}'/\mathbf{Z}_2)=\frac{1}{2}\#\mathcal{S}'$. Haciendo la observación de que $p_1(E)=c_1(L)^2$ y que $w_2(E)\equiv c_1(L) \pmod 2$, el teorema queda probado. ∎

Observación: Sea V el cociente de $\mathbf{H}^2(M;\mathbf{Z})$ por su subgrupo de torsión T. Entonces V es un grupo abeliano libre. a forma de intersección en V, le da estructura de espacio con producto interior; por lo tanto la aplicación $\mu\colon V\to\mathbf{Z}$ queda definida, entonces

$$\rho(L)=\mu(c_1(L))\cdot|\mathrm{H}_1(M;\mathbf{Z})|$$

es el número de clases de equivalencia bajo el grupo de norma, de conexiones reducibles en $E=L\oplus\epsilon$. Esto se sigue del Teorema 4.7.4 y del hecho de que $\mathrm{H}_1(M;\mathbf{Z})\cong T$ es un grupo de exponente impar.

Este resultado será usado posteriormente para ver que $\rho(L)$ cuenta las singularidades del espacio de móduli $\mathcal{M}(E)$.

CAPÍTULO 5

EL INDICE DE LOS COMPLEJOS FUNDAMENTALES

Siento que hay un isomorfismo entre la esencia de la Geometría y el amor que por tí siento: es invariante bajo transformaciones y bajo cada una de ellas se descubre una nueva parte de su inconmensurable belleza.
— JOSE LUIS CISNEROS (1992)

1. INTRODUCCION .

En este capítulo desarrollaremos los preliminares necesarios para definir los complejos elípticos y para establecer el Teorema de Atiyah-Singer. Introduciremos el complejo fundamental, asociado a una conexión autodual en un $\mathbf{SO}$-haz vectorial sobre una variedad compacta, orientada, de dimensión cuatro. Aunque algunos de los resultados no lo requieren, supondremos también, que $\mathrm{H}_1(M;\mathbf{Z}_2)=0$. En la sección final, calcularemos el índice del complejo fundamental. Este resultado será usado para calcular la dimensión del espacio de móduli virtual perturbado $\underset{\sim}{\mathcal{M}}'$.

2. OPERADORES DIFERENCIALES SOBRE HACES VECTORIALES .

Empezaremos introduciendo la terminología de operadores diferenciales. Como esta es una noción local, primero daremos las definiciones en los haces triviales y despues las generalizaremos a haces vectoriales arbitrarios.

Sean A y B espacios vectoriales sobre $\mathbf{F}=\mathbf{R}$ ó $\mathbf{C}$ y sea U un subconjunto abierto de $\mathbf{R}^n$. Sea $E=U\times A$ y $F=U\times B$.

Def: Un operador $\mathbf{F}$-lineal $D\colon\Gamma(E)\to\Gamma(F)$ es un *operador diferencial* de orden k sobre F, si para cada n-ada $\alpha(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ de enteros no negativos, existe una aplicación $L_\alpha\colon U\to \mathrm{Hom}(A,B)$ tal que para todo $f\in\Gamma(E)$, se tiene que $D(f)=\sum_{|\alpha|\leq k}L_\alpha D^\alpha f$, donde $|\alpha|=\sum_{i=1}^n\alpha_i$ y

$$D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_1}^{\alpha_1}\ldots\partial {x_n}^{\alpha_n}}.$$

Def: Sean $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$, $y^\alpha = y_1^{\alpha_1} \ldots y_n^{\alpha_n}$, y $v = (x, y) \in U \times \mathbf{R}^n$. Definimos

$$\sigma_v(D) = \sum_{|\alpha|=k} y^\alpha L_\alpha(x): A \to B.$$

La aplicación

$$\begin{aligned} \sigma(D): U \times \mathbf{R}^n &\to \mathrm{Hom}(A, B) \\ v &\mapsto \sigma_v(D) \end{aligned}$$

es llamada el *símbolo* de D.

Def: El operador diferencial D es *elíptico*, si $\sigma_v(D)$ es un isomorfismo para todo $v = (x, y)$ con $y \neq 0$.

A continuación, tomaremos estas definiciones locales y las extenderemos a haces vectoriales.

Sean E y F $\mathbf{F}$-haces vectoriales sobre una variedad diferenciable M y sea $\pi: T^*M \to M$ la proyección.

Def: Una aplicación $\mathbf{F}$-lineal $D: \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ es un *operador diferencial* de orden k sobre $\mathbf{F}$, si para cada carta coordenada $U \subset M$ sobre la cual E y F son triviales, $D|_U$ es un operador diferencial de orden k en el sentido de la definición anterior.

Def: Sea $x \in M$ y $v \in T_x^*M$. Definimos

$$\sigma_v(D): E_x \to f_x$$

como sigue. Sea $e \in E_x$ y $s \in \Gamma(E)$ con $s(x) = e$. Sea $g \in C^\infty(M)$ con $g(x) = 0$ y $dg(x) = v$. Entonces

$$\sigma_v(D) = D\left(\tfrac{g^k}{k!} s\right)(x) \in F_x.$$

Nótese que del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \pi^*E \arrow[r] \arrow[d, "\pi^*"'] & E \arrow[d] \\ T^*m \arrow[r, "\pi"'] & M \end{tikzcd}$$

tenemos que $e_x \cong (\pi^*E)_v$ y análogamente $f_x \cong (\pi^*)_v$. Por lo tanto, la aplicación $v \mapsto \sigma_v(D)$, define un elemento $\sigma(D) \in \Gamma(\pi * E, \pi^*F)$, que es el Símbolo de D.

Def: D es un *operador elíptico* si $\sigma_v(D)$ es un isomorfismo para toda $x \in M$ y $v \in T^*M$ con $v \neq 0$.

Ejemplo: Una conexión $\mathrm{d}^E: \Omega^l(E) \to \Omega^{l+1}(E)$ es un operador diferencial lineal de primer orden. En particular, d^E tiene la siguiente descripción local. Sea $s_1, \ldots, s_k$ una base local para E sobre una carta $U \subset M$. Sea θ la matriz de conexión respecto a esta base local. Para $x \in U$, y $j = 1, \ldots, n = \dim M$, definimos $L_j(x): E_x \to T_x^*M \otimes E_x$ por $L_j(x)s_i = dx_j \otimes s_i$ para $i = 1, \ldots, k$. Entonces

$$\mathrm{d}^E|_U = \sum_{j=1}^{n} L_j \tfrac{\partial}{\partial x_j} + \theta.$$

Ahora calcularemos el símbolo de $\mathrm{d}^E: \Omega^l(E) \to \Omega^{l+1}(E)$. Sea $\omega \otimes e \in \bigwedge^l T_X^*M \otimes E_x$, $v \in T_x^*M$ y $g \in C^\infty(M)$ con $g(x) = 0$ y $dg(x) = v$; y sea $s \in \Omega^l(E)$ con $s(x) = \omega \otimes e$. Entonces

$$\begin{aligned}\sigma_v(\mathrm{d}^E)(\omega \otimes e) &= \mathrm{d}^E(gs)(x) \\ &= dg(x) \otimes s(x) + g(x)(\mathrm{d}^E s)(x) \\ &= (v \wedge \omega) \otimes e.\end{aligned}$$

3. COMPLEJOS ELIPTICOS .

Def: Sean E^i, con $i = 1, \ldots, n$, $\mathbf{F}$-haces vectoriales sobre una variedad M, junto con los operadores diferenciales $d^i: \Gamma(E^i) \to \Gamma(E^{i+1})$ sobre $\mathbf{F}$ con $d^{i+1} \circ d^i = 0$ para toda i. Dicha colección es llamada un *complejo* y es denotado por

$$\underline{E} = (E^i, d^i) \qquad i = 1, \ldots, n$$

o

$$\underline{E}: \qquad \cdots \longrightarrow \Gamma(E^i) \xrightarrow{d^i} \Gamma(E^{i+1}) \xrightarrow{d^{i+1}} \Gamma(E^{i+2}) \longrightarrow \cdots.$$

Asociada con un complejo $\underline{E}$, está la sucesión de símbolos, definida para toda $x \in M$ y $v \in T_x^*M$ por

$$\cdots \longrightarrow E_x^i \xrightarrow{\sigma_v(d^i)} E_x^{i+1} \xrightarrow{\sigma_v(d^{i+1})} E_x^{i+2} \longrightarrow \cdots$$

donde $\sigma_v(d^i)$ es el símbolo del operador diferencial d^i.

Def: El complejo $\underline{E}$ sobre M es *elíptico*, si la sucesión de símbolos es exacta, para toda $x \in M$ y $v \in T_x^*M$ con $v \neq 0$.

Ejemplo: Supongamos que $D: \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ es un operador diferencial elíptico. Sea $E^0 = E$, $E^1 = F$ y $d^0 = D$. Entonces

$$\underline{E} = (E^i, d^i) \qquad i = 0, 1$$

es un complejo elíptico.

Ejemplo: El complejo de De Rham $\underline{E} = (\bigwedge^i T^*M, d^i)$, donde

$$d^i\colon \Gamma(\bigwedge^i T^*M) \to \Gamma(\bigwedge^{i+1} T^*M)$$

es la derivada exterior, es un complejo elíptico.

Para ver que la sucesión de símbolos asociada al complejo de De Rham es exacta, nótese que $\Gamma(\bigwedge^i T^*M) = \Omega^i(\epsilon)$ y $d^i\colon \Omega^i(\epsilon) \to \Omega^{i+1}(\epsilon)$ es una conexión. Entonces por el Ejemplo de la sección anterior

$$\sigma_v(d^i) = (v \wedge \cdot)\colon \bigwedge^i T_x^*M \to \bigwedge^{i+1} T_x^*M.$$

Proposición 5.3.1: *Sea A cualquier espacio vectorial de dimensión n y $a \in A$, con $a \neq 0$, entonces la sucesión*

$$0 \longrightarrow \bigwedge^0 A \xrightarrow{a\wedge\cdot} \bigwedge^1 A \xrightarrow{a\wedge\cdot} \bigwedge^2 A \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigwedge^n A \longrightarrow 0$$

es exacta.

Dem: † Sea $b \in \operatorname{im} a \wedge \cdot$, entonces $b = a \wedge c$, para alguna c y $a \wedge b = a \wedge a \wedge c = 0$, por lo tanto, $\operatorname{im} a \wedge \cdot \subset \ker a \wedge \cdot$.

Para ver que $\ker a \wedge \cdot \subset \operatorname{im} a \wedge \cdot$, primero consideremos el caso en que a es el primer elemento de una báse ordenada de A. Sea $0 \neq b \in \bigwedge^k A$ expresado como combinación lineal de las k-formas básicas como

$$b = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} b_{i_1 \ldots i_k} x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_k},$$

si $b \in \ker a \wedge \cdot$, tenemos que

$$a \wedge b = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} b_{i_1 \ldots i_k} a \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_k} = 0,$$

entonces, $a \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_k} = 0$ para cada $b_{i_1 \ldots i_k} \neq 0$, por lo tanto $x_{i_1} = a$ y tenemos que

$$b = a \wedge \sum_{2 \leq i_2 < \ldots < i_k \leq n} b_{i_1 \ldots i_k} x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_k},$$

concluyendo así, que $\ker a \wedge \cdot \subset \operatorname{im} a \wedge \cdot$ y por lo tanto, que la sucesión es exacta.

Para el caso general, solamente basta con completar una base para A con a como primer elemento básico. ∎

---

† Demostración de Miguel Angel Zárate Reyes.

Corolario 5.3.2: *La sucesión de símbolos*

$$\cdots \longrightarrow \bigwedge^i T_x^*M \xrightarrow{v\wedge\cdot} \bigwedge^{i+1} T_x^*M \longrightarrow \cdots$$

es exacta para $v \neq 0$.

Dem: Inmediato de la Proposición 5.3.1. ∎

Una propiedad esencial de un complejo elíptico $\underline{E}$ de $\mathbf{F}$-haces vectoriales, es que el i-ésimo grupo de homología

$$H^i(\underline{E}) = \ker d^i \;/\; \mathrm{im}\; d^{i-1}$$

es un espacio vectorial de dimensión finita, por lo tanto

$$\mathrm{ind}_{\mathbf{F}}(\underline{E}) = \sum (-1)^i \dim_{\mathbf{F}} H^i(\underline{E})$$

está definido.

Un complejo $\underline{E}$ de $\mathbf{R}$-haces vectoriales, da un complejo $\underline{E} \otimes \mathbf{C}$ de $\mathbf{C}$-haces vectoriales, haciendo el producto tensorial sobre $\mathbf{R}$ con $\mathbf{C}$. Por el Teorema de coeficientes Universales tenemos

$$\mathrm{ind}_{\mathbf{R}}(\underline{E}) = \mathrm{ind}_{\mathbf{C}}(\underline{E} \otimes \mathbf{C}).$$

La necesidad de la relación anterior, es que el Teorema del índice de Atiyah-Singer, calcula el índice $\mathrm{ind}_{\mathbf{C}}$ de una sucesión elíptice da haces vectoriales complejos, en términos de invariantes topológicos. Por otro lado, necesitamos $\mathrm{ind}_{\mathbf{R}}(\underline{E})$, donde $\underline{E}$ es el complejo fundamental de los haces vectoriales reales que definiremos mas adelante.

Sea M una variedad cerrada y orientada de dimensión cuatro, con forma de intersección positiva definida. Sea E un haz vectorial real orientado de dimensión k, sobre M. Suponemos que E y T^*M tienen un productos interiores que inducen un producto interior en $\Omega^i(E)$.

Sea d^E una $\mathbf{SO}(k)$-conexión autodual en E. Sea

$$\mathbf{so}^E = \{\, L \in \mathrm{Hom}(E, E) \mid L^t = -L \,\}$$

y sea $\Omega_-(\mathbf{so}^E)$ el eigenespacio correspondiente al eigenvalor -1 de

$$*\colon \Omega^2(\mathbf{so}^E) \to \Omega^2(\mathbf{so}^E)$$

donde $*$ es el operador de Hodge. Tenemos el *complejo fundamental*

$$(\star) \qquad \underline{E}: \qquad 0 \longrightarrow \Omega^0(\mathbf{so}^E) \xrightarrow{d^0} \Omega^1(\mathbf{so}^E) \xrightarrow{d^1} \Omega_-(\mathbf{so}^E) \longrightarrow 0,$$

donde $d^0 = \mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)}\Big|_{\mathbf{so}^E} = \mathrm{d}^{\mathbf{so}^E}$, $\mathrm{pr}_-\colon \Omega^2(\mathbf{so}^E) \to \Omega_-(\mathbf{so}^E)$ es la proyección y $d^1 = \mathrm{pr}_- \circ \mathrm{d}^{\mathbf{so}^E}$.

Si $\mathbf{h}$ es un haz de álgebras de Lie, el corchete de Lie, induce una aplicación de haces

$$Ad\colon \mathbf{h} \to \mathrm{Hom}(\mathbf{h}, \mathbf{h})$$

definida en cada fibra por $Ad(a)(b) = [a, b]$. A su vez, esta aplicación induce otra en las formas

$$\widetilde{Ad}\colon \Omega^i(\mathbf{h}) \to \Omega^i(\mathrm{Hom}(\mathbf{h}, \mathbf{h})).$$

dada por $\widetilde{Ad}(s \otimes a)(b) = s \otimes [a, b]$ para $s \in \Omega^i$, $a, b \in \Omega^0(\mathbf{h})$.

Aplicaremos esto al caso $\mathbf{h} = \mathbf{so}^E$.

Lema 5.3.3: $\widetilde{Ad}\, R(\mathrm{d}^E) = R(\mathrm{d}^{\mathbf{so}^E})$.

Dem: Para $L \in \Omega^0(\mathbf{so}^E)$,

$$\begin{aligned} R(\mathrm{d}^{\mathbf{so}^E})(L)) &= \mathrm{d}^{\mathbf{so}^E}(\mathrm{d}^{\mathbf{so}^E}(L)) \\ &= \mathrm{d}^{\mathbf{so}^E}(\mathrm{d}^E L - L\mathrm{d}^E) \\ &= \mathrm{d}^E(\mathrm{d}^E L - L\mathrm{d}^E) + (\mathrm{d}^E L - L\mathrm{d}^E)\mathrm{d}^E \\ &= \mathrm{d}^E\mathrm{d}^E L - L\mathrm{d}^E\mathrm{d}^E \\ &= [R(\mathrm{d}^E), L] \\ &= \widetilde{Ad}\, R(\mathrm{d}^E)(L). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lema 5.3.4: $d^1 d^0 = 0$.

Dem:

$$\begin{aligned} d^1 d^0 &= \mathrm{pr}_- \mathrm{d}^{\mathbf{so}^E}\mathrm{d}^{\mathbf{so}^E} \\ &= \mathrm{pr}_- \widetilde{Ad}\, R(\mathrm{d}^E) \\ &= \widetilde{Ad}\mathrm{pr}_- R(\mathrm{d}^E) \\ &= 0 \end{aligned}$$

por que d^E es autodual. $\blacksquare$

Este Lema implica que la sucesión $(\star)$ es un complejo, por lo que queda justificado el llamarle complejo fundamental. El i-ésimo grupo de cohomología de este complejo es denotado por $H^i(\mathrm{d}^E)$, es decir,

$$H^i(\mathrm{d}^E) = \ker d^i \;/\; \mathrm{im}\, d^{i-1} = H^i(\underline{E}).$$

Sea $\mathrm{so}^E_{\mathbf{C}} = \mathrm{so}^E \otimes \mathbf{C}$. d^0 y d^1 se extienden de manera única a operadores diferenciales complejos

$$d^0_{\mathbf{C}}: \Omega^0(\mathrm{so}^E_{\mathbf{C}}) \to \Omega^1(\mathrm{so}^E_{\mathbf{C}})$$

y

$$d^1_{\mathbf{C}}: \Omega^1(\mathrm{so}^E_{\mathbf{C}}) \to \Omega_-(\mathrm{so}^E_{\mathbf{C}}).$$

Nótese que $d^1_{\mathbf{C}} = \mathrm{pr}^{\mathbf{C}}_- \circ \mathrm{d}^{\mathrm{so}^E}_{\mathbf{C}}$, donde $\mathrm{pr}^{\mathbf{C}}_-$ y $\mathrm{d}^{\mathrm{so}^E}_{\mathbf{C}}$ son las extensiones complejas lineales de pr_- y $\mathrm{d}^{\mathrm{so}^E}$ respectivamente. Esto nos da el *complejo fundamental complejo*

$$\underline{E} \otimes \mathbf{C}: \qquad 0 \longrightarrow \Omega^0(\mathrm{so}^E_{\mathbf{C}}) \xrightarrow{d^0_{\mathbf{C}}} \Omega^1(\mathrm{so}^E_{\mathbf{C}}) \xrightarrow{d^1_{\mathbf{C}}} \Omega_-(\mathrm{so}^E_{\mathbf{C}}) \longrightarrow 0.$$

Es claro que $d^1_{\mathbf{C}} \circ d^1_{\mathbf{C}} = 0$. La sucesión de símbolos asociada a este complejo es

$$0 \longrightarrow \mathrm{so}^E_{\mathbf{C}x} \xrightarrow{\sigma_v(d^0_{\mathbf{C}})} T^*_x M \otimes \mathrm{so}^E_{\mathbf{C}x} \xrightarrow{\sigma_v(d^1_{\mathbf{C}})} \bigwedge\nolimits_- T^*_x M \otimes \mathrm{so}^E_{\mathbf{C}x} \longrightarrow 0,$$

donde $\sigma_v(d^i_{\mathbf{C}})$ es la única extensión lineal compleja de $\sigma(d^i)$.

Para ver que el complejo fundamental complejo es elíptico, necesitamos el siguiente:

Lema 5.3.5: *Sea A un espacio vectorial real orientado de dimensión cuatro, con un producto interior. sea $\bigwedge_- A$ el eigenespacio correspondiente al eigenvalor -1 de*

$$*: \bigwedge\nolimits^2 A \to \bigwedge\nolimits^2 A.$$

Sea $v \in A$ con $v \neq 0$. Entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow \bigwedge\nolimits^0 A \xrightarrow{v\wedge\cdot} \bigwedge\nolimits^1 A \xrightarrow{\mathrm{pr}_-\circ(v\wedge\cdot)} \bigwedge\nolimits_- A \longrightarrow 0$$

es exacta.

Dem: Como vimos en el segundo ejemplo de esta sección, la sucesión

$$0 \longrightarrow \bigwedge\nolimits^0 A \xrightarrow{a\wedge\cdot} \bigwedge\nolimits^1 A \xrightarrow{a\wedge\cdot} \bigwedge\nolimits^2 A \xrightarrow{a\wedge\cdot} \bigwedge\nolimits^3 A \xrightarrow{a\wedge\cdot} \bigwedge\nolimits^4 A \longrightarrow 0$$

es exacta. Por la definición de $*$, si $v, w \in A$,entonces $*(v \wedge w) = v \wedge w$ implica que $v \wedge w = 0$, ya que

$$\begin{aligned} v \wedge w \wedge *(v \wedge w) &= \langle v \wedge w, v \wedge w \rangle e_1 \wedge \cdots \wedge e_4 \\ v \wedge w \wedge v \wedge w &= \langle v \wedge w, v \wedge w \rangle e_1 \wedge \cdots \wedge e_4 \\ 0 &= \langle v \wedge w, v \wedge w \rangle e_1 \wedge \cdots \wedge e_4 \end{aligned}$$

por lo tanto $\|v \wedge w\|^2 = 0$ y $v \wedge w = 0$.

Entonces tenemos que

$$\ker((v \wedge \cdot)\colon \bigwedge^1 A \to \bigwedge^2 A) = \ker(\mathrm{pr}_- \circ (v \wedge \cdot)\colon \bigwedge^1 A \to \bigwedge_- A).$$

Es suficiente ver que $\mathrm{pr}_- \circ (v \wedge \cdot)\colon \bigwedge^1 A \to \bigwedge_- A$ es sobre. Dado $v \in A$ con $v \neq 0$, es claro que al normalizar a v no afecta a $\mathrm{im}\,\mathrm{pr}_- \circ (v \wedge \cdot)$, entonces, por el proceso de Gram-Schmidt, podemos suponer que $v = v_1$, donde (v_1, v_2, v_3, v_4) es una base ortonormal orientada positivamente de A. Como $*(v_i, v_j) = (v_k, v_l)$ si (i, j, k, l) es una permutación par de $(1, 2, 3, 4)$, $\bigwedge_\pm A$ tiene base

$$(v_1 \wedge v_2 \pm v_3 \wedge v_4, v_1 \wedge v_3 \pm v_4 \wedge v_2, v_1 \wedge v_4 \pm v_2 \wedge v_3).$$

Así, $(v_1 \wedge \cdot)\colon \bigwedge^1 A \to \bigwedge_- A$ es sobre, ya que

$$\begin{aligned}
\mathrm{pr}_-(v_1 \wedge v_2) &= \frac{1}{2}(v_1 \wedge v_2 - v_3 \wedge v_4)\\
\mathrm{pr}_-(v_1 \wedge v_3) &= \frac{1}{2}(v_1 \wedge v_3 - v_4 \wedge v_2)\\
\mathrm{pr}_-(v_1 \wedge v_4) &= \frac{1}{2}(v_1 \wedge v_4 - v_2 \wedge v_3). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Proposición 5.3.6: *El complejo fundamental complejo $\underline{E} \otimes \mathbf{C}$ es elíptico.*

Dem: Tenemos que demostrar que la sucesión de símbolos

$$0 \longrightarrow so^E_{\mathbf{C}x} \xrightarrow{\sigma_v(d^0_{\mathbf{C}})} T^*_x M \otimes so^E_{\mathbf{C}x} \xrightarrow{\sigma_v(d^1_{\mathbf{C}})} \bigwedge\nolimits_- T^*_x M \otimes \mathrm{so}^E_{\mathbf{C}x} \longrightarrow 0,$$

es exacta para toda $x \in M$ y $v \in T^*_x M$, con $v \neq 0$.

Como $\sigma_v(d^0) = v \otimes \mathrm{Id}$, $\sigma_v(d^0_{\mathbf{C}}) = v \otimes \mathrm{Id}$. Para calcular $\sigma_v(d^1_{\mathbf{C}})$ usaremos los siguientes hechos:

1. Supongamos que E_1 y E_2 son haces vectoriales sobre una variedad M y $h\colon E_1 \to E_2$ es una aplicación de haces vectoriales. Existe una aplicación inducida $\Gamma(h)\colon \Gamma(E_1) \to \Gamma(E_2)$ en las secciones. La aplicación $\Gamma(h)$ es un operador diferencial de orden 0 y

$$\sigma_v(\Gamma(h)) = h\,|_{(E_1)_x}\colon (E_1)_x \to (E_2)_x$$

para toda $x \in M$ y $v \in T^*_x M$.

2. El símbolo de la composición de dos operadores diferenciales, es la composición de los símbolos.

Por definiciíon $d^1_{\mathbf{C}} = \mathrm{pr}^{\mathbf{C}}_{-} \circ \mathrm{d}^{\mathrm{so}^E}_{\mathbf{C}}$ donde $\mathrm{pr}^{\mathbf{C}}_{-}$ es la aplicación sobre las secciones, inducido por

$$\mathrm{pr}^{\mathbf{C}}_{-}: \bigwedge^2 T^*M \otimes \mathrm{so}^E_{\mathbf{C}} \to \bigwedge_- T^*M \otimes \mathrm{so}^E_{\mathbf{C}}.$$

Por el hecho 1, $\mathrm{pr}^{\mathbf{C}}_{-}$ es un operador diferencial de orden 0 con símbolo

$$\mathrm{pr}^{\mathbf{C}}_{-}: \bigwedge^2 T^*M \otimes \mathrm{so}^E_{\mathbf{C}} \to \bigwedge_- T^*M \otimes \mathrm{so}^E_{\mathbf{C}}.$$

Hemos visto que $\sigma_v(\mathrm{d}^{\mathrm{so}^E}) = (v \wedge \cdot) \otimes \mathrm{Id}$, como $\sigma_v(\mathrm{d}^{\mathrm{so}^E_{\mathbf{C}}}) = (v \wedge \cdot) \otimes \mathrm{Id}$. Por el hecho 2, $\sigma_v(d^1_{\mathbf{C}}) = \mathrm{pr}^{\mathbf{C}}_{-} \circ (v \wedge \cdot) \otimes \mathrm{Id}$. Por lo tanto, la sucesión de símbolos es

$$0 \longrightarrow so^E_{\mathbf{C}x} \xrightarrow{(v\wedge\cdot)\otimes\mathrm{Id}} T^*_xM \otimes so^E_{\mathbf{C}x} \xrightarrow{\mathrm{pr}^{\mathbf{C}}_{-}\circ(v\wedge\cdot)\otimes\mathrm{Id}} \bigwedge_- T^*_xM \otimes \mathrm{so}^E_{\mathbf{C}x} \longrightarrow 0$$

que es exacta si y sólo si la sucesión

$$0 \longrightarrow \bigwedge^0 T^*_xM \xrightarrow{v\wedge} \bigwedge^1 T^*_xM \xrightarrow{\mathrm{pr}_-\circ(v\wedge\cdot)} \bigwedge_- T^*_xM \longrightarrow 0$$

es exacta, pero por el Lema 5.3.5 esto se cumple. ∎

Como el complejo fundamental es elíptico, los grupos de cohomología son espacios vectoriales de dimensión finita. Por lo tanto podemos definir

$$\mathrm{ind}\,\mathrm{d}^E = \sum_{i=0}^{2}(-1)^i \dim_{\mathbf{R}} H^i(\mathrm{d}^E) = \mathrm{ind}_{\mathbf{R}}(E).$$

Ahora calcularemos el índice del complejo fundamental

$$0 \longrightarrow \Omega^0(\mathrm{so}^E_{\mathbf{C}}) \xrightarrow{d^0_{\mathbf{C}}} \Omega^1(\mathrm{so}^E_{\mathbf{C}}) \xrightarrow{d^1_{\mathbf{C}}} \Omega_-(\mathrm{so}^E_{\mathbf{C}}) \longrightarrow 0.$$

La herramienta principal para hacer esto, es el Teorema del índice de Atiyah-Singer, pero antes necesitamos algunos preliminares.

4. G-HACES PRINCIPALES .

En esta sección definiremos los G-haces principales y veremos como construir clases características. En particular, seremos capaces de definir la clase del índice.

Def: Sea G un grupo topológico. Un *G-haz principal* sobre un espacio topológico X es un espacio topológico P con una acción libre de G cuyo espacio de órbitas P/G es X.

Sea $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ ó $\mathbf{C}$. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbf{F}$ con $\dim_{\mathbf{F}} V = n$. Supongamos que V es una representación de G, es decir, existe un homomorfismo $\rho: G \to \mathrm{GL(n, V)}$. Supongamos que $\rho(G) \subset \mathbf{O}(n)$ si $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ y que $\rho(G) \subset \mathbf{U}(N)$ si $\mathbf{F} = \mathbf{C}$.

Dado un G-haz principal sobre X, formamos

$$P \times_G V = P \times V/(p,v) \sim (pg^{-1}, \rho(g)v)$$

para $p \in P$, $v \in V$ y $g \in G$. Entonces $P \times_G V$ es un haz vectorial sobre X con proyección $\pi: P \times_G V \to X = P/G$ definido por $\pi([p,v]) = [p]$.

De esta construcción, obtenemos una función $V \mapsto P \times_G V$ de las representaciones de G a los haces vectoriales sobre X. Clases caracteristicas de estos haces vectoriales, dan clases de cohomología en $\mathbf{H}^*(X)$.

Dado un haz vectorial E sobre X y un polinomio invariante bajo el grupo de Weil del grupo estructural de E asociado, existe una clase de cohomología en

$$\mathbf{H}^{**}(X;\mathbf{Q}) = \prod_{i=0}^{\infty} \mathbf{H}^i(X;\mathbf{Q})$$

que contiene a las clases características de E. Veamos algunos ejemplos de esto.

Def: Sea E unj $\mathbf{U}(n)$-haz vectorial sobre un espacio topológico X. Sea $f(x_1,\ldots,x_n)$ una serie de potencias formal en $x_1,\ldots,x_n$ invariante bajo permutaciones de las coordenadas, es decir, f es una serie de potencias simétrica.

Sean $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ las funciones simétricas elementales en n variables. Entonces

$$f(x_1,\ldots,x_n) = h(\sigma_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\sigma_n(x_1,\ldots,x_n))$$

para alguna serie de potencias h. Definimos

$$f(E) = h(c_1(E),\ldots,c_n(E)) \in \mathbf{H}^{**}(X;\mathbf{Q}),$$

donde $c_i(E)$ es la i-ésima clase de Chern de E.

Ejemplo: Sea

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} e^{x_i} = n + \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{2!} + \cdots.$$

Entonces $f(E)$ está definida por $\mathrm{ch}(E) \in \mathbf{H}^{**}(X;\mathbf{Q})$, donde

$$\mathrm{ch}(E) = n + c_1(E) + \frac{1}{2!}(c_1(E)^2 - 2c_2(E)) + \cdots.$$

Def: Sea E un $\mathbf{O}(m)$-haz vectorial sobre X y sea $n = [m/2]$. Sea $f(x_1^2,\ldots,x_n^2)$ una serie de potencias simétrica, en las variables

$$x_1^2,\ldots,x_n^2.$$

Entonces

$$f(x_1^2,\ldots,x_n^2) = h(\sigma_1(x_1^2,\ldots,x_n^2),\ldots,\sigma_n(x_1^2,\ldots,x_n^2))$$

para alguna serie de potencias h. Definimos

$$f(E) = h(p_1(E),\ldots,p_n(E)) \in \mathbf{H}^{**}(X;\mathbf{Q}))$$

donde $p_i(E)$ es la i-ésima clase de Pontrjagin de E.

Ejemplo: Sea

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{-x_i}{1-e^{x_i}} \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1-e^{-x_i}}.$$

Claramente f es simétrica en $x_1,\ldots,x_n$ e invariante bajo las substituciones

$$(x_1,\ldots,x_n) \mapsto (x_1,\ldots,x_{i-1},-x_i,x_{i+1},\ldots,x_n),$$

por lo que f es simétrica en $x_1^2,\ldots,x_n^2$. Definimos

$$\mathcal{I}(x_1^2,\ldots,x_n^2) = f(x_1,\ldots,x_n).$$

Llamaremos a $\mathcal{I}(E)$ la *clase del índice* de E.

Un cálculo simple usando el principio de escisión (Teorema 2.3.2) nos da la siguiente:

Proposición 5.4.1: [1, p. 556]

$$\mathcal{I}(E) = 1 - \frac{p_1(E)}{12} + \text{ términos de orden superior. } \blacksquare$$

Daremos una idea de la prueba de la Proposición:

$$\frac{x}{1-e^{-x}} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + \cdots;$$

por lo tanto

$$\frac{-x}{1-e^{x}} \cdot \frac{x}{1-e^{-x}} = 1 - \frac{x^2}{12} + \cdots.$$

Usando el principio de escisión y el hecho de que p_j es la j-ésima función simétrica elemental de x_i^2. Tómese $j=1$.

Def: Sea E un $\mathbf{SO}(2m)$-haz vectorial sobre X y sea $f\left(\prod_{i=1}^m x_i\right)$ una serie de potencias en una variable $\prod_{i=1}^m x_i$. Definimos

$$f(E) = f(e(E)) \in \mathbf{H}^{**}(X;\mathbf{Q}),$$

donde $e(E)$ es la clase de Euler de E.

Desarrollaremos algunos resultados para describir estas clases de cohomología.

Sea G un grupo topológico y sea $E(G)$ un complejo CW contraible, sobre el cual G actúa libre y celularmente.

Ejemplo: Sea $G = S^1$. Entonces S^1 actúa libremente en S^{2n-1} para toda $n \geq 1$ y $S^1 \subset S^3 \subset S^5 \subset \ldots$. Definimos $S^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^{2n-1}$. Entonces S^1 actúa libremente en S^∞ mediante la multiplicación compleja. El primer grupo de homotopía distinto de cero de S^{2n-1} es π_{2n-1}. Por lo tanto $\pi_*(S^\infty) = 0$ y por un Teorema de J. H. C. Whitehead, S^∞ es contraible. Por lo tanto $S^\infty = E(S^1)$.

Mas detalles acerca de los resultados mencionados mas adelante están en **[1]**

Teorema 5.4.2: *Si $E(G)$ y $E(G')$ son complejos CW contraibles sobre los cuales G actúa libremente, entonces son G-homotópicamente equivalentes.* ∎

Si $H \subset G$ y $E(G)$ es dado, podemos tomar $E(H)$ como $E(G)$. Los G-espacios $E(G)$ denotan G-haces principales. Denotamos $E(G)/G$ por B_G.

Consideremos el grupo $\mathbf{U}(n)$. El toro maximal de $U(n)$ es $T = T^n$, donde

$$T^n = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix} : \quad t_i \in S^1 \right\}.$$

El T-haz principal es

$$E(T) = \underbrace{E(S^1) \times \cdots \times E(S^1)}_{n}$$

donde T actúa de la manera obvia sobre $E(T)$. Entonces

$$B_T = E(T)/T = \prod_{i=1}^{n} E(S^1)/S^1 = \prod_{i=1}^{n} S^\infty/S^1 = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{C}P^\infty.$$

Por lo tanto $\mathbf{H}^{**}(B_T; \mathbf{Q})$ es el anillo de series de potencias sobre $\mathbf{Q}$ en las variables

$$z_1, \ldots, z_n$$

donde $z_i \in \mathbf{H}^2(B_T; \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}[[z_1, \ldots, z_n]]$.

Sea t_i la representación compleja de dimensión 1 de T que actúa sobre los complejos, mediante la multiplicación compleja en la i-ésima coordenada:

$$(t_1, \ldots, t_n) \cdot v = t_i v.$$

Sea $\overline{t_i} = E(T) \times_T t_i$, un haz lineal complejo sobre B_T.

Teorema 5.4.3: *$z_i = c_1(\overline{t_i})$, por lo tanto*

$$\mathbf{H}^{**}(B_T;\mathbf{Q}) = \mathbf{Z}[[c_1(\overline{t_1}),\ldots,c_1(\overline{t_n})]]. \blacksquare$$

Si G y G' son grupos topológicos y $\rho: G \to G'$ es un homomorfismo continuo, entonces existe una aplicación inducida $B_\rho: B_G \to B_{G'}$. Esta aplicación B_ρ induce a su vez otra en cohomología

$$B_\rho^*: \mathbf{H}^{**}(B_{G'};\mathbf{Z}) \to \mathbf{H}^{**}(B_G;\mathbf{Z}).$$

Def: Sea G un grupo topológico compacto y conexo con toro máximo T. Definimos el grupo de Weil $W = W(G)$ de G por $W(G) = N(T)/T$, donde $N(T)$ es el normalizador de T. Nótese que W es finito y actúa sobre $\mathbf{H}^{**}(B_T;\mathbf{Q})$.

Teorema 5.4.4: *Si $\rho: T \hookrightarrow G$ es la inclusión, entonces*

$$\begin{aligned} B_\rho^*\mathbf{H}^{**}(B_G;\mathbf{Q}) &= \mathbf{H}^{**}(B_T;\mathbf{Q})^W \\ &= \{\, x \in \mathbf{H}^{**}(B_T;\mathbf{Q}) \mid w \cdot x = x \text{ para toda } w \in W \,\}. \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 5.4.5: *Sea P un G-haz principal sobre X. Entonces existe una aplicación $h_P: X \to B_G$, bien definida salvo homotopía, tal que $h_P^*(E(G)) = P$.* $\blacksquare$

Def: Sean $z \in \mathbf{H}^{**}(B_G;\mathbf{Q})$ y P un G-haz principal sobre X con $P = h_P^*(E(G))$. Definimos

$$z(P) = h_P^*(z) \in \mathbf{H}^{**}(X;\mathbf{Q}).$$

Ejemplo: Si $G = \mathbf{U}(n)$, entonces $N(T) = S_n \cdot T$ (producto semidirecto de S_n y T), donde S_n es el grupo de permutaciones de n letras y $W = S_n$ actúa sobre

$$\mathbf{H}^{**}(B_;\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}[[z_1,\ldots,z_n]]$$

permutando las variables $z_1,\ldots,z_n$. Así, $B_\rho^*\mathbf{H}^{**}(B_G;\mathbf{Q})$ es el anillo de series de potencias simétricas sobre $\mathbf{Q}$ en las variables $z_1,\ldots,z_n$, donde $z_i = c_1(\overline{t_i})$.

Supongamos que f es una serie de potencias simétrica en las variables $x_1,\ldots,x_n$. Sea $V = \mathbf{C}^n$ con la ación usual de $G = \mathbf{U}(N)$ y su toro maximal T. Formemos los haces vectoriales $E(G)\times_G V \to B_G$ y $E(T)\times_T V \to B_T$. Sea $B_\rho: B_G \to B_T$. De los axiomas de las clases de Chern tenemos que

$$c_j(E(T)\times_T V) = \sigma_j(c_1(\overline{t_1}),\ldots,c_1(\overline{t_n})).$$

donde σ_j es la j-ésima función simétrica elemental. Después de identificar a $\mathbf{H}^{**}(B_G;\mathbf{Q})$ con $B_\rho^*\mathbf{H}^{**}(B_T;\mathbf{Q})$, tenemos que

$$c_j(E(G)\times_G V)=\sigma_j(c_1(\overline{t_1}),\ldots,c_1(\overline{t_n})).$$

De lo anterior tenemos que $f(E(G)\times_G V)=f(c_1(\overline{t_1}),\ldots,c_1(\overline{t_n}))$. Además, si P es un haz principal sobre X con $h_P^*(E(G))=P$ y $E=P\times_G V$, entonces

$$f(P\times_G V)=h_P^*f(E(G)\times_G V)=f(E(G)\times_G V)(P).$$

Ahora sea $G=\mathbf{SO}(2m)$. El toro maximal de G es

$$T=\left\{\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 & & & \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \cos\theta_m & -\operatorname{sen}\theta_m \\ & & & \operatorname{sen}\theta_m & \cos\theta_m\end{pmatrix} : 0\le\theta_j<2\pi\right\}$$

que podemos identificar con T^m por

$$(e^{i\theta_1},\ldots,e^{i\theta_m})\mapsto \operatorname{diag}\begin{pmatrix}\cos\theta_j & -\operatorname{sen}\theta_j\\ \operatorname{sen}\theta_j & \cos\theta_j\end{pmatrix}.$$

Sea t_j la representación compleja de dimensión 1 de T, dada por $(e^{i\theta_1},\ldots,e^{i\theta_n})\cdot z=e^{i\theta_j}z$ para $z\in\mathbf{C}$ y sea $\overline{t_j}$ como antes. Entonces $\mathbf{H}^{**}(B_T;\mathbf{Q})=\mathbf{Q}[[z_1,\ldots,z_m]]$ para $z_j=c_1(\overline{t_j})$ que en particular, es un dominio entero. Sea $f(z_1^2,\ldots,z_m^2)$ una serie de potencias simétrica en las variables z_j^2, y sea $g(z_1\ldots z_m)$ una serie de potencias en la única variable $z_1\ldots z_m$. Si existe una serie de potencias $u(x_1,\ldots,x_m)$ tal que $gu=f$, entonces u es única. En este caso, definimos $f/g=u\in\mathbf{H}^{**}(B_T;\mathbf{Q})$. Como f y g son invariantes bajo W, f/g también lo es y

$$f/g\in\mathbf{H}^{**}(B_T;\mathbf{Q})^W=\mathbf{H}^{**}(B_G;\mathbf{Q}).$$

Además, si $P\to X$ es cualquier G-haz principal con $P=h_P^*(E(G))$, entonces

$$(f/g)(P)=h_P^*(f/g)\in\mathbf{H}^{**}(X;\mathbf{Q})$$

está bien definida.

Nótese que si $\rho: H\to G=\mathbf{SO}(2m)$ es un homomorfismo y $f/g\in\mathbf{H}^{**}(B_G;\mathbf{Q})$, entonces $B_\rho^*(f/g)\in\mathbf{H}^{**}(B_H;\mathbf{Q})$. De hecho

$$B_\rho^*(f)=B_\rho^*(f/g)B_\rho^*(g0,$$

por lo tanto, si $B_\rho^*(g) \neq 0$, escribimos

$$B_\rho^*(f/g) = \frac{B_\rho^*(f)}{B_\rho^*(g)}.$$

Def: Definiremos $\mathrm{ch}(A)$, donde A es una representación compleja de $\mathbf{U}(n)$ de dimensión m. Formemos el haz vectorial

$$E_{\mathbf{U}(n)} \times_{\mathbf{U}(n)} A \to B_{\mathbf{U}(n)},$$

y sea T el toro maximal de $\mathbf{U}(n)$. La restricción de A a T es $A|_T = L_1 \oplus \cdots \oplus L_m$, donde L_i es una representación de T de dimensión 1. Para cada i, formamos el haz vectorial $E_T \times_T L_i \to B_T$, y sea $u_i = c_1(E_T \times_T L_i)$. Definimos

$$\mathrm{ch}(A) \in \mathbf{H}^{**}(B_{\mathbf{U}(n)}; \mathbf{Q})$$

como el elemento en

$$\mathbf{H}^{**}(B_{\mathbf{U}(n)}; \mathbf{Q})^W$$

representado por $\sum_{i=1}^m e^{u_i}$.

Def: Supongamos que A es una representación compleja de dimensión m de un grupo de Lie H, por lo tanto, hay un homomorfismo $\rho: H \to \mathbf{U}(m)$. Sea $\mathbf{C}^m$ la representación usual de $\mathbf{U}(m)$. Definimos

$$\mathrm{ch}(A) = B_\rho^* \mathrm{ch}(\mathbf{C}^m) \in \mathbf{H}^{**}(B_H; \mathbf{Q}).$$

5. EL TEOREMA DEL INDICE DE ATIYAH-SINGER .

Necesitamos una definición más, antes de poder enunciar el Teorema del Índice de Atiyah-Singer. Sea H un grupo de Lie compacto y sea $\rho: H \to \mathbf{SO}(2l)$ un homomorfismo. Sea $V = \mathbf{R}^{2l}$ con la acción usual de $\mathbf{SO}(2l)$. Mediante ρ podemos ver a V como una representación de H. Ahora supongamos que X es una variedad compacta, orientada de dimensión $2l$ y que existe un H-haz principal P sobre X tal que $TX \cong P \times_H V$ como haz vectorial orientado sobre X. Sean $M^0, M^1, \ldots, M^n$ representaciones complejas de H, y sean $\phi_i: V \to \mathrm{Hom}(M^i, M^{i+1})$ aplicaciones H-equivariantes, tales que la sucesión

$$0 \longrightarrow M^0 \xrightarrow{\phi_0(\xi)} M^1 \xrightarrow{\phi_1(\xi)} \cdots \xrightarrow{\phi_{n-2}(\xi)} M^{n-1} \xrightarrow{\phi_{n-1}(\xi)} M^n \longrightarrow 0$$

es exacta para toda $\xi \in V$ con $\xi \neq 0$.

Def: Si $\underline{E} = (E^i, d^i)$ es un complejo de haces vectoriales sobre X, tal que $E^i = p \times_H M^i$ y la sucesión de símbolos de $\underline{E}$ es la sucesión anterior, decimos que la sucesión de símbolos de $\underline{E}$ está asociada con la H-estructura de X.

Teorema 5.5.1: [1, Teo. 2.17] *Sea $\rho: H \to \mathbf{SO}(2l)$ un homomorfismo tal que el toro maximal de H no tiene vectores fijos distintos de cero. Entonces $B\rho^*(e) \neq 0$. Sea X una variedad cerrada, orientada, de dimensión $2l$ con una H-estructura dada por ρ y P. Sea $\underline{E}$ el complejo elíptico sobre X cuya sucesión de símbolos está asociada con la H-estructura. Entonces*

$$\mathrm{ind}_{\mathbf{C}}\underline{E} = (-1)^l \left[\frac{\sum(-1)^i \mathrm{ch} M^i}{B_\rho^*(e)}(P) \cdot \mathcal{I}(TX)\right]([X]).$$

Donde $\mathcal{I}(TX)$ está definido en la Proposición 5.4.1 con $E = TX$. ∎

Apliquemos este Teorema al complejo fundamental (complejo)

$$\underline{F} \otimes \mathbf{C}: \qquad 0 \longrightarrow \Omega^0(\mathrm{so}^E_{\mathbf{C}}) \xrightarrow{d^0_{\mathbf{C}}} \Omega^1(\mathrm{so}^E_{\mathbf{C}}) \xrightarrow{d^1_{\mathbf{C}}} \Omega_-(\mathrm{so}^E_{\mathbf{C}}) \longrightarrow 0.$$

con sucesión de símbolos

$$0 \longrightarrow \bigwedge^0 T^*_x M \otimes \mathrm{so}^E_{\mathbf{C}x} \xrightarrow{(v\wedge\cdot)\otimes\mathrm{Id}} \bigwedge^1 T^*_x M \otimes \mathrm{so}^E_{\mathbf{C}x} \xrightarrow{\mathrm{pr}_-\circ(v\wedge\cdot)\otimes\mathrm{Id}} \bigwedge_- T^*_x M \otimes \mathrm{so}^E_{\mathbf{C}x} \longrightarrow 0,$$

para $0 \neq v \in T^*_x M$.

Sea

$$\begin{aligned} F^0 &= \bigwedge^0 T^*M \otimes \mathbf{so}^E, \\ F^1 &= \bigwedge^1 T^*M \otimes \mathbf{so}^E, \\ F^2 &= \bigwedge_- T^*M \otimes \mathbf{so}^E. \end{aligned}$$

y sea $M^i = F^i_x \otimes \mathbf{C}$ para cada $x \in M$. Para aplicar el Teorema a $\underline{F} \otimes \mathbf{C}$ necesitamos definir un grupo de Lie compacto H, una H-estructura de módulo en M^i y un homomorfismo $\rho: H \to \mathbf{SO}(4)$ tal que

1) Existe un H-haz principal P sobre M con $TM \cong P \times_H V$, donde $V = \mathbf{R}^4$ con la acción de H inducida por la acción usual de $\mathbf{SO}(4)$.

2) Las aplicaciones $\phi_i: T^*_x M = V \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M^i, M^{i+1})$ son H-equivariantes, donde $h \in H$ actúa en $L \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M^i, M^{i+1})$ por

$$(hL)(m) = hL(h^{-1}m)$$

para $m \in M^i$.

3) $F^i \otimes \mathbf{C} = P \times_H M^i$.

Lo anterior nos lo proporciona el siguiente:

Lema 5.5.2: *Sea M una variedad diferenciable cerrada y orientada, de dimensión 4. Sea F un $\mathbf{SO}(k)$-haz vectorial sobre M. Sea $H = \mathbf{SO}(4) \times \mathbf{SO}(k)$. Entonces existe un H-haz principal P sobre M, tal que $P \times_H V \cong TM$ y $P \times_H W \cong F$. Donde $V = \mathbf{R}^4$ con la acción de H inducida por la proyección $H \to \mathbf{SO}(4)$ y W es alguna representación de $\mathbf{SO}(k)$ con la acción de H inducida por la proyección $H \to \mathbf{SO}(k)$.* ∎

Sea M una variedad diferenciable, cerrada, orientada, de dimensión 4 con forma de intersección positiva definida. Sea $E = L \oplus \epsilon$, donde L es un haz lineal complejo, ϵ el haz real trivial y $\mathbf{so}^E \subset \mathrm{Hom}(E, E)$ es un haz real orientado de dimensión tres. De hecho $E \cong \mathbf{so}^E$ como veremos mas adelante. Así

$$\mathbf{so}^E \otimes \mathbf{C} \cong (L \oplus L^*) \oplus \epsilon_{\mathbf{C}}.$$

Por el Lema 5.5.2, para $H = \mathbf{SO}(4) \times \mathbf{SO}(3)$, tenemos un H-haz principal P sobre M con $P \times_H \mathbf{R}^4 = TM \cong T^*M$ y

$$P \times_H \mathbf{R}^3 = \mathbf{so}^E \cong E.$$

Tenemos que $\mathbf{SO}(k)$ actúa en $\mathbf{R}^k$ en la forma usual. Entonces $\bigwedge^i \mathbf{R}^4 \otimes \mathbf{C}$ y $\bigwedge_- \mathbf{R}^4 \otimes \mathbf{C}$ son H-módulos complejos mediante la proyección sobre $\mathbf{SO}(4)$. De manera análoga, $\mathbf{R}^3 \otimes \mathbf{C}$ es un H-módulo complejo, mediante la proyección sobre $\mathbf{SO}(3)$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \textstyle\bigwedge^i T^*M \otimes \mathbf{C} &= P \times_H \textstyle\bigwedge^i \mathbf{R}^4 \otimes \mathbf{C}, \\ \textstyle\bigwedge_- T^*M \otimes \mathbf{C} &= P \times_H \textstyle\bigwedge_- \mathbf{R}^4 \otimes \mathbf{C}, \\ \mathbf{so}^E \otimes \mathbf{C} &= P \times_H \mathbf{R}^3 \otimes \mathbf{C}. \end{aligned}$$

Tomando los productos tensoriales adecuados, obtenemos el punto 3) anterior.

Para verificar el punto 2), tenemos que ver que las aplicaciones

$$\begin{aligned} T_x^*M &\to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M^i, M^{i+1}) \\ v &\mapsto \phi_i(v) \end{aligned}$$

en la sucesión de símbolos

$$0 \longrightarrow M^0 \xrightarrow{\phi_0(v)} M^1 \xrightarrow{\phi_1(v)} M^2 \longrightarrow 0$$

para $F \otimes \mathbf{C}$ son h-equivariantes. En detalle, esta sucesión de símbolos es

$$0 \longrightarrow \textstyle\bigwedge^0 T_x^*M \otimes \mathbf{so}_x^E \otimes \mathbf{C} \xrightarrow{(v\wedge\cdot)\otimes \mathrm{Id}} \textstyle\bigwedge^1 T_x^*M \otimes \mathbf{so}_x^E \otimes \mathbf{C} \xrightarrow{\mathrm{pr}_-\circ(v\wedge\cdot)\otimes \mathrm{Id}} \textstyle\bigwedge_- T_x^*M \otimes \mathbf{so}_x^E \otimes \mathbf{C} \longrightarrow 0.$$

El cálculo de que ϕ_0 es H-equivariante, es el siguiente. Sea $n \otimes w \in M^0$, donde $n \in \bigwedge^0 T_x^* M$ y $w \in \mathbf{so}_x^E \otimes \mathbf{C}$. Entonces

$$\begin{aligned}\phi_0(hv)(n \otimes w) &= (hv \wedge n) \otimes w \\ &= (hv \wedge hh^{-1}n) \otimes hh^{-1}w \\ &= h[(v \wedge h^{-1}n) \otimes h^{-1}w] \\ &= h[\phi_0(v)(h^{-1}n \otimes h^{-1}w)] \\ &= h\phi_0(v)[h^{-1}(n \otimes w)] \\ &= (h\phi_0)(n \otimes w),\end{aligned}$$

por lo tanto ϕ_0 es equivariante. Un argumento similar, muestra que ϕ_1 también es H-equivariante.

A continuación, haremos el cálculo de $\mathrm{ind}_{\mathbf{R}}(E) = \mathrm{ind}_{\mathbf{C}}(E \otimes \mathbf{C})$. Primero calcularemos $\mathrm{ch}(M^i)(P)$. Nótese que M^i como H-módulo complejo, es el producto tensorial sobre $\mathbf{C}$ de

$$N^i = \bigwedge^i \mathbf{C}^4 = \bigwedge^i \mathbf{R}^4 \otimes \mathbf{C}$$

y $\mathbf{C}^3 = \mathbf{R}^3 \otimes \mathbf{C}$ para $i = 0, 1$ y de

$$N^2 = \bigwedge_- \mathbf{C}^4 = \bigwedge_- \mathbf{R}^4 \otimes \mathbf{C}$$

y $\mathbf{C}^3$ para $i = 2$. Esto implica

$$\mathrm{ch}(M^i)(P) = \mathrm{ch}(N^i \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}^3)(P) = \mathrm{ch}(N^i)(P)\mathrm{ch}(\mathbf{C}^3)(P).$$

Sea $P = h^* E_H$, donde $h = h_P$ (ver Teorema 5.4.5). Entonces

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(\mathbf{C}^3)(P) &= h^* B_\rho^* \mathrm{ch}(E_{\mathbf{U}}(3) \times_{\mathbf{U}} (3)\mathbf{C}^3) \\ &= h^* \mathrm{ch}(E_H \times_H \mathbf{C}^3) \\ &= \mathrm{ch}(P \times_H \mathbf{C}^3) \\ &= \mathrm{ch}(E \otimes \mathbf{C}) \\ &= \mathrm{ch}(L \oplus L^* \oplus \epsilon_{\mathbf{C}}) \\ &= e^{c_1(L)} + e^{-c_1(L)} + 1 \\ &= 3 + c_1(L)^2 + \text{términos de orden superior} \\ &\in \mathbf{H}^{**}(M; \mathbf{Q}).\end{aligned}$$

Ahora calcularemos $\mathrm{ch}(N^i)(P)$. Sea $T = S^1 \times S^1$ el toro maximal de $\mathbf{SO}(4)$. Tenemos que

$$\begin{aligned}N^0|_T &= 1 \\ N^1|_T &= t_1 + t_1^{-1} + t_2 + t_2^{-1} \\ N^2|_T &= 1 + t_1 t_2^{-1} + t_1^{-1} t_2.\end{aligned}$$

para $(t_1, t_2) \in T$.

Sea $x = c_1(\overline{t_1}) \in \mathbf{H}^{**}(B_T; \mathbf{Q})^W = \mathbf{H}^{**}(B_{\mathbf{SO}(4)}; \mathbf{Q})$ y $y = c_1(\overline{t_2}) \in \mathbf{H}^{**}(B_{\mathbf{SO}(4)}; \mathbf{Q})$. Entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(N^0) &= B_\rho^*(e^0) = 1 \in \mathbf{H}^{**}(B_H; \mathbf{Q})\\ \operatorname{ch}(N^1) &= B_\rho^*(e^x + e^{-x} + e^y + e^{-y}) \in \mathbf{H}^{**}(B_H; \mathbf{Q})\\ \operatorname{ch}(N^2) &= B_\rho^*(1 + e^{x-y} + e^{-(x-y)}) \in \mathbf{H}^{**}(B_H; \mathbf{Q}).\end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}\frac{\sum(-1)^i \operatorname{ch}(N^i)}{B_\rho^*(e)}(P)&\\ &= h^* B_\rho^*\left[\frac{1-(e^x+e^{-x}+e^y+e^{-y})+(1+e^{x-y}+E^{-(x-y)})}{xy}\right]\\ &= h^* B_\rho^*\left[-2-\frac{1}{6}(2(x^2+y^2)-3xy) + \text{términos de grado} > 4\right]\\ &= -2-\frac{1}{6}(2p_1(TM-3e(TM)) \in \mathbf{H}^{**}(M; \mathbf{Q}).\end{aligned}$$

Multiplicando por $\operatorname{ch}(\mathbf{C}^3)(P)$ tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\sum(-1)^i \operatorname{ch}(M^i)}{B_\rho^*(e)}(P)&\\ &= (3 + c_1(L)^2[M] + \text{términos superiores})\left(-2-\frac{1}{6}(2p_1(TM)-3e(TM))\right).\end{aligned}$$

Para completar el cálculo, nótese que por el Teorema de la signatura de Hirzebruch

$$\frac{p_1(TM)}{3}([M]) = \operatorname{sign}(M) = \dim_{\mathbf{Q}} \mathrm{H}_2(M; \mathbf{Q}),$$

ya que suponemos que M tiene forma de intersección positiva definida. Como $\mathrm{H}_1(M; \mathbf{Z}_2) = 0$,

$$e(TM)[M] = 2 + \dim_{\mathbf{Q}} \mathrm{H}_2(M; \mathbf{Q}).$$

Finalmente, recordemos de la Proposición 5.4.1, que

$$\mathcal{I}(TM) = 1 - \frac{p_1(TM)}{12} + \text{términos de orden superior}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{ind}_{\mathbf{C}}(E \otimes \mathbf{C}) &= \left[\frac{\sum(-1)^i \operatorname{ch}(M^i)}{B_\rho^*(e)}(P) \cdot \mathcal{I}(TM)\right]([M])\\ &= \left[-2c_1(L)^2 - \tfrac{3}{6}(2p_1(TM)-3e(TM)) + 6\tfrac{p_1(TM)}{12}\right]([M])\\ &= \left[-2c_1(L)^2 - \tfrac{3}{2}\left(\tfrac{p_1(TM)}{3} - e(TM)\right)\right]([M])\\ &= -2c_1(L)^2[M] + 3\\ &= -2p_1(E)[M] + 3\end{aligned}$$

(ver demostración del Teorema 4.7.2). Juntando todos los cálculos anteriores hemos probado el siguiente:

Teorema 5.5.3: *Sea L un haz de linea complejo sobre una variedad M compacta, orientada de dimensión 4, cuya forma de intersección es positiva definida. Supongamos que* $\mathrm{H}_1(M;\mathbf{Z}_2)=0$. *Si* $E+L\oplus\epsilon$ *y* d^E *es cualquier conexión autodual en* E, *entonces*

$$\mathrm{ind}\,\mathrm{d}^E=\mathrm{ind}_{\mathbf{R}}\underline{E}=\mathrm{ind}_{\mathbf{C}}\underline{E}\otimes\mathbf{C}=-2c_1(L)^2[M]+3. \blacksquare$$

CAPÍTULO 6

EL ESPACIO DE MÓDULI VIRTUAL DE CONEXIONES VIRTUALES

Mística integral,
melómano alfiler sin fe de erratas,
que yendo de puntillas por el globo
las libélulas atas y desatas.
— RAMON LOPEZ VELARDE (1932)

1. INTRODUCCION .

A lo largo de este capítulo emplearemos la siguiente notación. Sea M una variedad diferenciable cerrada, orientada, de dimensión 4, con forma de intersección positiva definida y tal que $\mathrm{H}_1(M;\mathbf{Z}_2)=0$. Sea E un $\mathbf{SO}(3)$-haz vectorial sobre M. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{G} &= \Gamma(\mathbf{SO}_E) = \text{ el grupo de norma}\\
\mathcal{C} &= \mathcal{C}(E) \cong \Omega^1(\mathrm{so}^E) = \text{ el espacio de } \mathbf{SO}(3)\text{-conexiones en } E\\
\mathcal{A} &= \mathcal{A}(E) = \text{ el espacio de } \mathbf{SO}(3)\text{-conexiones autoduales en } E\\
\mathcal{B} &= \mathcal{B}(E) = \mathcal{C}/\mathcal{G} = \text{ el espacio de móduli de conexiones}\\
\mathcal{M} &= \mathcal{M}(E) = \mathcal{A}/\mathcal{G} = \text{ el espacio de móduli de conexiones autoduales.}
\end{aligned}$$

Nuestro objetivo es entender la estructura de los espacios de móduli $\mathcal{M}$ y $\mathcal{B}$. Para ello, introduciremos una serie de normas en $\Omega^r(E)$, llamadas normas de Sobolev, y consideraremos completaciones respecto a esas normas. A los espacios completados, los denotaremos subrayando el símbolo del espacio respectivo.

Estamos interesados en la estructura del espacio de móduli virtual, de las conexiones virtuales autoduales. En este capítulo, trataremos al espacio de móduli virtual $\underline{\mathcal{B}}$, y en el siguiente a $\underline{\mathcal{M}}$.

La topología de $\underline{\mathcal{B}}$ está determinada por las propiedades del grupo de transformaciones de la $\underline{\mathcal{G}}$-acción en $\underline{\mathcal{C}}$ (que esencialmente está determinada por la $\mathcal{G}$-acción sobre $\mathcal{C}$). Por ejemplo, los puntos singulares de $\underline{\mathcal{B}}$, corresponden a las órbitas $\underline{\mathcal{G}}x$ de puntos x en $\underline{\mathcal{C}}$, donde el grupo de isotropía $\underline{\mathcal{G}}_x$ en x es no trivial. Para determinar los puntos singulares, debemos describir los grupos de isotropía $\underline{\mathcal{G}}_x$ para $x \in \underline{\mathcal{C}}$.

2. CONEXIONES VIRTUALES .

En esta sección, extenderemos la noción de conexión, usando las completaciones de Sobolev y les llamaremos conexiones virtuales en E.

Sea E un haz vectorial sobre cualquier variedad diferenciable M, y supongamos que E y M tienen métricas Riemannianas. Sea d^E una conexión en E.

Def: La *k-norma de Sobolev* en $\Omega^r(E)$, está definida por

$$\|\phi\|_k^2 = \int_M (\|\phi\|^2 + \|\mathrm{d}^E\phi\|^2 + \cdots + \|(\mathrm{d}^E)^k\phi\|^2)$$

para $\phi \in \Omega^r(E)$ y $k \geq 0$. Métricas y conexiones equivalentes dan normas equivalentes.

Def: Sea $\Omega_k^r(E)$ el espacio de Hilbert obtenido al completar a $\Omega^r(E)$ respecto a la k-norma de Sobolev.

La razón para trabajar con $\Omega_k^r(E)$ en vez de $\Omega^r(E)$, es que en el espacio completado, podemos emplear herramientas de análisis, como lo son, los teoremas de la función implícita e inversa, el teorema de la aplicación abierta y resultados de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales. Para que este análisis sea útil, tenemos que asegurar que el espacio de conexiones completado se comporta bien respecto a la acción (completada) del grupo de norma. Esto lo haremos después de establecer algunos resultados preliminares.

Tres teoremas de análisis respecto a las completaciones de Sobolev, son esenciales para extender el desarrollo de las conexiones y las transformaciones de norma. Estos son los teoremas de encaje de Sobolev, los cuales enunciaremos sin demostración (ver [**12, Apéndice I**]).

Def: Un operador en un espacio de Hilbert se llama *totalmente continuo* cuando transforma toda sucesión débilmente convergente en una convergente fuertemente.

Sea E un haz vectorial Riemanniano sobre una variedad compacta de dimensión 4.

Teorema 6.2.1: *Sea $k-2>l$ y sea $C^l(E)$ el espacio de secciones de E con l derivadas continuas. Entonces $\Omega_k(E) \subset C^l(E)$ y en particular, existen encajes totalmente continuos $\Omega_4(E) \subset C^1(E)$ y $\Omega_3(E) \subset C^0(E)$.* ∎

Sean E y F haces vectoriales Riemannianos sobre M.

Teorema 6.2.2: [Relaciones bilineales] *El producto tensorial puntual, produce una aplicación bilineal continua*

$$\Omega_k(E) \otimes \Omega_l(F) \to \Omega_l(E \otimes F)$$

para $0 \leq l \leq k$, *con* $k \geq 3$. ∎

Teorema 6.2.3: [Teorema de Rellich] *Si* $k \geq l$, *entonces la inclusión* $\Omega_k(E) \subset \Omega_l(E)$ *es continua y si* $k > l$ *es completamente continua.* ∎

A continuación, fijaremos la notación y las siguientes abreviaciones:

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{G}}(E) &= \mathcal{G}_4(E) = \underline{\mathcal{G}} \\ \underline{\Omega}^i(E) &= \Omega^i_{4-i}(E) \quad i = 0, 1, 2 \\ \underline{\Omega}^i(\epsilon) &= \underline{\Omega}^i \quad \text{el espacio completado de } i\text{-formas en } M \\ \underline{\Omega}^2_-(\mathbf{so}^E) &= \text{ cerradura de } \Omega^2_-(\mathbf{so}^E) \text{ en } \underline{\Omega}^2_-(\mathbf{so}^E). \end{aligned}$$

Empleando las relaciones bilineales obtenemos una aplicación bilineal continua

$$\underline{\Omega}^0(E) \otimes \underline{\Omega}^1(\mathbf{so}^E) \to \underline{\Omega}^1(E)$$

y representa a $\underline{\Omega}^1(\mathbf{so}^E)$ como un espacio de operadores lineales de $\underline{\Omega}^0(E)$ a $\underline{\Omega}^1(E)$. Fijemos una conexión base d_0^E en E. Entonces $d_0^E + A: \underline{\Omega}^0(E) \to \underline{\Omega}^1(E)$ es un operador diferencial de primer orden, siempre que $A \in \underline{\Omega}^1(\mathbf{so}^E)$. Definimos

$$\underline{\mathcal{C}}(E) = \{\, d_0^E + A: \underline{\Omega}^0(E) \to \underline{\Omega}^1(E) \mid A \in \underline{\Omega}^1(\mathbf{so}^E) \,\}.$$

Llamaremos a $\underline{\mathcal{C}}(E)$ el espacio de *conexiones virtuales* en E. Damos a $\underline{\mathcal{C}}(E)$ una topología tal que $A \mapsto d_0^E + A$ es un homeomorfismo de $\underline{\Omega}^1(\mathbf{so}^E)$ a $\underline{\mathcal{C}}(E)$. Desde ahora, usaremos la notación d^E para conexiones virtuales.

La aplicación

$$R_-: \Omega^1(\mathbf{so}^E) \to \Omega^2_-(\mathbf{so}^E)$$

se extiende a una aplicación

$$R_-: \underline{\Omega}^1(\mathbf{so}^E) \to \underline{\Omega}^2_-(\mathbf{so}^E).$$

Sean

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{A}}(E) &= \{\, d^E \in \mathcal{C}(E) \mid R_-(d^E) = 0 \,\} = \underline{\mathcal{A}} \\ \underline{\mathcal{M}}(E) &= \underline{\mathcal{A}}(E)/\underline{\mathcal{G}}(E) = \underline{\mathcal{A}}/\underline{\mathcal{G}} = \underline{\mathcal{M}} \\ \underline{\mathcal{B}}(E) &= \underline{\mathcal{C}}(E)/\underline{\mathcal{G}}(E) = \underline{\mathcal{C}}/\underline{\mathcal{G}} = \underline{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Teorema 6.2.4: *$\underline{\mathcal{G}}$ es un grupo de Lie modelado sobre un espacio de Hilbert y la acción de $\mathcal{G}$ en $\mathcal{C}$ se extiende a una acción diferenciable de $\underline{\mathcal{G}}$ en $\underline{\mathcal{C}}$.*

Dem: Para un bosquejo de la demostración véase [**12, Teorema 7.10,p. 22**]. ∎

Def: Una conexión virtual reducible d^E, se define directamente para un **SO**(3)-haz vectorial E. Se requiere que $E = L \oplus \epsilon$ para un haz lineal complejo L y $\mathrm{d}^E = \mathrm{d}^L \oplus d$, donde d^L es la conexión virtual en L. El conjunto de conexiones reducibles virtuales es denotado por $\underline{\mathcal{C}}_{red}$. Los puntos en el complemento $\tilde{\underline{\mathcal{C}}} = \underline{\mathcal{C}} - \underline{\mathcal{C}}_{red}$ son llamados *conexiones virtuales irreducibles.*

Obsérvese que las conexiones virtuales son automáticamente ortogonales por definición, es decir, satisfacen

$$d(s_1, s_2) = (\mathrm{d}^E s_1, s_2) + (s_1, \mathrm{d}^E s_2)$$

para $s_i \in \underline{\Omega}^0(E)$.

A continuación, se darán dos teoremas que proporcionan propiedades esenciales de las conexiones, necesarias para estudiar los espacios completados.

Teorema 6.2.5: *Sea $\mathrm{d}^E\colon \underline{\Omega}^0(E) \to \underline{\Omega}^1(E)$ una conexión virtual en E, donde E es un haz vectorial Riemanniano sobre una variedad M compacta, conexa y orientada de dimensión 4. Entonces*

(i) $\ker \mathrm{d}^E$ *es de dimensión finita y* d^E *tiene rango cerrado. Si* $s_1, s_2 \in \ker \mathrm{d}^E$ *y* $s_1(x) = s_2(x)$, *para alguna* $x \in M$, *entonces* $s_1 = s_2$.

(ii) Si d^E *es una conexión,* $\ker \mathrm{d}^E \subset \Omega^0(E)$ *(es decir, las secciones en* $\ker \mathrm{d}^E$ *son* C^∞*).*

(iii) Para cada $k = 1, 2, 3, 4$, *existen constantes* c_k *tales que*

$$\|s\|_k \leq c_k \|\mathrm{d}^E s\|_{k-1}$$

para toda $s \in (\ker \mathrm{d}^E)^\perp$.

Dem:

(i) La demostración es esencialmente la misma que la del Teorema 4.2.1.

(ii) El que $\ker \mathrm{d}^E \subset \Omega^0(E)$ cuando d^E es una conexión, se sigue del hecho de que las soluciones del sistema de ecuaciones (§) en el Teorema 4.2.1, con $\phi \in \Omega^0(E)$, caen en $\Omega^0(E)$. Ver [9].

(iii) SEa $d_0^E = D$ una conexión fija en E. Entonces $d^E = D + A$ para alguna $A \in \Omega^1(\mathrm{so}^E)$. Para $u \in \Omega^0(E)$ y $0 \leq s \leq 3$,

$$\begin{aligned}\|u\|_{s+1}^2 &= \int_M (\|u\|^2 + \|Du\|^2 + \cdots + \|D^{s+1}u\|^2) \\ &= \int_M \|u\|^2 + \int_M (\|Du\|^2 + \cdots + \|D^{s+1}u\|^2) \\ &= \|u\|_0^2 + \|Du\|_s^2.\end{aligned}$$

Por otro lado tenemos que $\|u\|_0^2 \leq \|u\|_s^2$, entonces

$$\|u\|_{s+1}^2 \leq \|u\|_s^2 + \|Du\|_s^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|_s^2 + \|Du\|_s^2,$$

por lo tanto

$$(*) \qquad \|u\|_{s+1} \leq \|u\|_s + \|Du\|_s.$$

De la desigualdad triangular

$$\Big| \|A\| - \|B\| \Big| \leq \|A - B\|$$

aplicada a $A = Du$ y $B = -Au$, tenemos

$$\Big| \|Du\|_s - \|Au\|_s \Big| = \Big| \|Du\|_s - \| - Au\|_s \Big| = \leq \|Du - (-Au)\|_s = \|Du + Au\|_s,$$

por lo tanto,

$$\|Du\|_s \leq \|Du + Au\|_s + \|Au\|_s.$$

Como la multiplicación por A es un operador acotado, existe $c_1 > 0$ en $\mathbf{R}$, tal que

$$\|Au\|_s \leq c_1 \|u\|_s,$$

por lo que

$$\|Du\|_s \leq \|Du + Au\|_s + c_1\|u\|_s.$$

Combinando con $(*)$ tenemos que

$$\begin{aligned}\|u\|_{s+1} &\leq \|Du + Au\|_s + (c_1 + 1)\|u\|_s \\ &\leq (c_1 + 1)(\|Du + Au\|_s + \|u\|_s).\end{aligned}$$

Si hacemos $c_2 = c_1 + 1$, entonces

$$(**) \qquad \|u\|_{s+1} \leq c_2(\|Du + Au\|_s + \|u\|_s).$$

La desigualdad (**) implica que existe una constante c_s, tal que

$$\|u\|_{s+1} \leq c_s(\|Du + Au\|_s),$$

para toda $u \in \ker(D+A)^{\perp} = K$. Si no es así, entonces para cada $n \in \mathbf{N}$ existiría $u_n \in K$ tal que

$$\|u_n\|_{s+1} > n\|Du_n + Au_n\|_s.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\|u_n\|_{s+1} = 1$ para toda n. Entonces tenemos una sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$, tal que $\|u_n\|_{s+1} = 1$ y $\|Du_n + Au_n\|_s < \frac{1}{n}$ para toda $n \in \mathbf{N}$.

La sucesión $\{u_n\}$ converge debilmente en $\Omega^0_{s+1}(E)$ a un elemento de $\ker(D+A)$, y como cada $u_n \in K$, tiene que ser al cero. Entonces por el Lema de Rellich, $\{u_n\}$ converge fuertemente a 0 en $\Omega^0_s(E)$. Pero por (**), $\|u_n\|_{s+1}$ converge a 0 , lo que es una contradicción con la suposición de que $\|u_n\|_{s+1} = 1$ para toda $n \in \mathbf{N}$. ∎

Sea $h^E_x : \Omega^0(E) \to E_x$ la evaluación en $x \in M$.

Corolario 6.2.6: *La restricción $h^E_x|_{\ker \mathrm{d}^E} \to E_x$ es una isometría sobre un subespacio lineal de E_x.*

Dem: La misma del Corolario 4.2.2. ∎

3. GRUPOS DE ISOTROPÍA .

En esta sección usaremos las propiedades de las conexiones virtuales establecidas en la sección anterior, para describir los grupos de isotropía de la $\underline{\mathcal{G}}(E)$-acción en $\underline{\mathcal{C}}(E)$ y $\underline{\mathcal{A}}(E)$. Dos de los resultados principales, son análogos exactos de los Teoremas 4.3.7 y 4.7.3. Las pruebas son las mismas, excepto por apropiadas substituciones de las propiedades de las conexiones virtuales en las pruebas del Capítulo 4.

Def: El subgrupo de isotropía de $\underline{\mathcal{G}}$ de una conexión virtual $\mathrm{d}^E \in \underline{\mathcal{C}}$ está definida como

$$\Gamma(\mathrm{d}^E) = \{\, g \in \underline{\mathcal{G}} \mid g\mathrm{d}^E g^{-1} = \mathrm{d}^E \,\}.$$

A continuación, daremos otra descripción de $\Gamma(\mathrm{d}^E)$. Sea $\mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)}$ la conexión virtual en $\mathrm{Hom}(E,E)$ inducida por la conexión virtual d^E en E. Entonces

$$(\dagger) \qquad \Gamma(\mathrm{d}^E) = \{\, g \in \Omega^0(\mathrm{Hom}(E,E)) \mid g^t g = 1, \quad \mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)} g = 0 \,\}.$$

Nótese que esta definición concuerda con nuestra notación previa para $\Gamma(\mathrm{d}^E)$ cuando d^E es una conección. En este caso $\mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)}$ es una conexión en $\mathrm{Hom}(E,E)$, por lo que el Teorema 6.2.5 (ii) se aplica a la descripción anterior de $\Gamma(\mathrm{d}^E)$ y muestra que $\Gamma(\mathrm{d}^E) \subset \Omega^0(\mathrm{Hom}(E,E))$.

Para uso posterior, pondremos esto en terminología de grupos de transformaciones. Sea $\underline{\mathcal{G}}_x$ (respectivamente $\mathcal{G}_x$) el grupo de isotropía en $x \in \underline{\mathcal{C}}$ ($x \in \mathcal{C}$) respecto a la $\underline{\mathcal{G}}$-acción en $\underline{\mathcal{C}}$ ($\mathcal{G}$-acción en $\mathcal{C}$). Entonces

(i) $\underline{\mathcal{G}}_x = \Gamma(\mathrm{d}^E)$ para $x = \mathrm{d}^E \in \underline{\mathcal{C}}$ por definición de $\Gamma(\mathrm{d}^E)$.

(ii) Si $x \in \mathcal{C} \subset \underline{\mathcal{C}}$, $\mathcal{G}_x = \underline{\mathcal{G}}_x$ por el Teorema 6.2.5 (ii).

Por lo tanto d^E denota a una conección virtual en E, y si d^E es una conexión, emplearemos la misma notación.

Corolario 6.3.1: *Sea $x \in M$. Entonces la evaluación en x dada por*

$$h_x^{\mathrm{Hom}(E,E)} : \underline{\mathcal{G}} \to \mathbf{SO}(E_x)$$

manda a $\Gamma(\mathrm{d}^E)$ inyectivamente en un subgrupo cerrado de $\mathbf{SO}(E_x)$.

Dem: Se sigue del Corolario 6.2.6 (con $\mathrm{Hom}(E,E)$ en vez de E) y de (†). ∎

Como en el caso de las conexiones autoduales, existen grupos de cohomología asociados con las conexiones virtuales autoduales. Si d^E es cualquier conexión autodual, el complejo fundamental asociado a ella es

$$(\ddagger) \qquad 0 \longrightarrow \Omega^0(\mathfrak{so}^E) \xrightarrow{d^1 = \mathrm{d}^{\mathfrak{so}^E}} \Omega^1(\mathfrak{so}^E) \xrightarrow{d^2 = d_- = \mathrm{pr}_- \circ \mathrm{d}^{\mathfrak{so}^E}} \underline{\Omega}^2(\mathfrak{so}^E) \longrightarrow 0.$$

Este complejo es elíptico, es decir, su sucesión de símbolos es exacta, ya que la sucesión de símbolos es independiente de la conexión virtual, y hemos visto en el Capítulo 5 que la sucesión de símbolos de una conexión autodual es exacta.

Como el complejo (‡) es elíptico, sus grupos de cohomología son de dimensión finita y los denotaremos por

$$H^i(\mathrm{d}^E) = \ker d^i / \mathrm{im}\, d^{i-1}.$$

Nuevamente debemos notar que esta definición coincide con la definición del Capítulo 4 cuando d^E es una conexión.

Para el resto de este sección, E es un $\mathbf{SO}(3)$-haz vectorial sobre una variedad M compacta, conexa y orientada de dimensión 4, con forma de intersección positiva definida y $\mathrm{H}_1(M;\mathbf{Z}_2) = 0$.

A continuación damos dos teoremas que muestran que los resultados del Capítulo 4 no cambian al hacer la completación de Sobolev.

Teorema 6.3.2: *Sea* d^E *una conexión virtual en* E. *Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) d^E *es reducible.*

(ii) $\Gamma(\mathrm{d}^E) \cong S^1 \cong \mathbf{SO}(2)$.

(iii) $\Gamma(\mathrm{d}^E) \neq \{\mathrm{Id}\}$.

Recuérdese del Lema 4.7.3, que el grupo $\mathbf{Z}_2$ actúa en el conjunto de clases de isomorfismo de haces lineales complejos: el generador τ de $\mathbf{Z}_2$ manda a un haz lineal complejo a su conjugado complejo. Sea L un haz lineal complejo sobre M y $E = L \oplus \epsilon$. Sea

$$\mathcal{S}(L) = \{\, [L'] \mid L' \text{ es un haz lineal complejo, } L' \oplus \epsilon \cong L \oplus \epsilon \,\}/\mathbf{Z}_2,$$

donde $[L']$ denota la clases de isomorfismo de L.

Teorema 6.3.3: *El conjunto de* $\underline{\mathcal{G}}(E)$*-clases de equivalencia de conexiones virtuales reducibles autoduales en* $E = L \oplus \epsilon$, *está en correspondencia uno a uno con el conjunto de* $\mathbf{Z}_2$*-clases de equivalencia de haces lineales complejos que descomponen a* E, *es decir*

$$\underline{\mathcal{A}}(E)_{red}/\underline{\mathcal{G}}(E) \cong \mathcal{S}(L).$$

Para ilustrar como las pruebas del Capítulo 4 se adaptan aquí, mencionaremos los puntos claves en la prueba del Teorema 6.3.3. (Su prueba imita la del Lema 4.7.3).

(1) Sea L un haz lineal complejo sobre M. Entonces

$$\tau: \underline{\mathcal{C}}(L)/\underline{\mathcal{G}}(L) \to \{\, x \in \Omega^2(\epsilon) \mid [x] = c_1(L) \,\}$$

es un isomorfismo. Aquí, $\tau(\mathrm{d}^E) = c_1(\frac{i}{2\pi}R(\mathrm{d}^E)) = \frac{i}{2\pi}R(\mathrm{d}^E)$.

(2) $\underline{\mathcal{A}}(L)/\underline{\mathcal{G}}(L)$ es un punto. (Compárese con el Corolario 4.5.3).

(3) $\underline{\mathcal{G}}(L) = \{\, e^{if}: M \to S^1 \mid f \in \underline{\Omega}^0(\epsilon) \,\}$. (Compárese con el Lema 4.4.1).

Las demostraciones de los Teoremas 6.3.2 y 6.3.3, son son exáctamente las mismas para sus análogos 4.3.7 y 4.7.3. El Teorema 6.2.5 nos da propiedades necesarias de las conexiones virtuales, necesarias para demostrar 6.3.2 y 6.3.3, de la misma manera que su análogo, el Teorema 4.2.1 nos sirvió para demostrar 4.3.7 y 4.7.3.

En el siguiente teorema, describiremos los resultados anteriores, es términos de grupos de transformaciones.

Teorema 6.3.4: *La $\underline{\mathcal{G}}(E)$-acción en $\underline{\mathcal{C}}(E)$ y $\underline{\mathcal{A}}(E)$ tiene las siguientes propiedades:*

(1) Hay exactamente dos clases de grupos de isotropía de la acción de $\underline{\mathcal{G}}(E)$ en $\underline{\mathcal{C}}(E)$, que son $\{\mathrm{Id}\}$ y S^1.

(2) $\underline{\mathcal{A}}(E)^{(H)}/\underline{\mathcal{G}}(E) = \underline{\mathcal{A}}(E)_{red}/\underline{\mathcal{G}}(E)$ es finito para $h = S^1$. (Compárese con el Lema 4.7.3 y el Teorema 4.7.4). Donde

$$\underline{\mathcal{A}}(E)^{(H)} = \{\, x \in \underline{\mathcal{A}}(E) \mid \underline{\mathcal{G}}(E)_x \cong H \,\}. \quad \blacksquare$$

4. LA TOPOLOGIA DE $\underline{\mathcal{B}}$.

El resultado principal de esta sección es el teorema de las rebanadas, que describe las vecindades $\underline{\mathcal{G}}(E)$-invariantes de las $\underline{\mathcal{G}}(E)$-órbitas de los puntos de $\underline{\mathcal{C}}(E)$. Como resultado de este teorema, obtenemos la descripción del espacio de órbitas $\underline{\mathcal{B}}(E) = \underline{\mathcal{C}}(E)/\underline{\mathcal{G}}(E)$.

Nótese que cualquier conexión virtual $\mathrm{d}^E \in \underline{\mathcal{C}}(E)$ determina un isomorfismo

$$\underline{\Omega}(\mathrm{d}^E)\colon \underline{\Omega}^1(\mathbf{so}^E) \to \underline{\mathcal{C}}$$

dado por $\underline{\Omega}(\mathrm{d}^E)(A) = \mathrm{d}^E + A$ para toda $A \in \underline{\Omega}^1(\mathbf{so}^E)$. Obsérvese que $\underline{\Omega}(\mathrm{d}^E)(0) = \mathrm{d}^E$. El grupo $\underline{\mathcal{G}}$ actúa en $\underline{\mathcal{C}}$ por $g \cdot \mathrm{d}_1^E = g\mathrm{d}_1^E g^{-1}$, para $\mathrm{d}_1^E \in \underline{\mathcal{C}}$ y $g \in \underline{\mathcal{G}}$. Existe una única acción de $\underline{\mathcal{G}}$ en $\underline{\Omega}^1(\mathbf{so}^E)$ para la cual $\underline{\Omega}(\mathrm{d}^E)$ es un isomorfismo equivariante. Si es equivariante, entonces

$$\begin{aligned}
\underline{\Omega}(\mathrm{d}^E)(g \cdot A) &= g \cdot \underline{\Omega}(\mathrm{d}^E)(A) \\
\underline{\Omega}(\mathrm{d}^E)^{-1}\underline{\Omega}(\mathrm{d}^E)(g \cdot A) &= \underline{\Omega}(\mathrm{d}^E)^{-1} g \cdot \underline{\Omega}(\mathrm{d}^E)(A) \\
g \cdot A &= \underline{\Omega}(\mathrm{d}^E)^{-1} g \cdot (\mathrm{d}^E + A) \\
&= \underline{\Omega}(\mathrm{d}^E)^{-1} g(\mathrm{d}^E + A)g^{-1} \\
&= g(\mathrm{d}^E + A)g^{-1} - \mathrm{d}^E \\
&= g\mathrm{d}^E g^{-1} + gAg^{-1} - \mathrm{d}^E g g^{-1} \\
&= (g\mathrm{d}^E - \mathrm{d}^E g)g^{-1} + gAg^{-1} \\
&= -(\mathrm{d}^{\mathbf{so}^E} g)g^{-1} + gAg^{-1},
\end{aligned}$$

ya que $\underline{\Omega}(\mathrm{d}^E)^{-1}(\mathrm{d}_1^E) = \mathrm{d}_1^E - \mathrm{d}^E$ y $\mathrm{d}^{\mathbf{so}^E} = \mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)}\,|_{\mathbf{so}^E}$.

Entonces, tenemos que la naturaleza local de las órbitas de la $\underline{\mathcal{G}}$-acción en $\underline{\mathcal{C}}$, es equivalente a la naturaleza local de la órbita de la $\underline{\mathcal{G}}$-acción en $\underline{\Omega}^1(\mathbf{so}^E)$.

Sea $\Gamma = \Gamma(\mathrm{d}^E)$ el $\underline{\mathcal{G}}$ grupo de isotropía de $\mathrm{d}^E \in \underline{\mathcal{C}}$. Obsérvese que

$$\begin{aligned}
\ker \delta^{\mathbf{so}^E} &= \{\, A \in \underline{\Omega}^1(\mathbf{so}^E) \mid \delta^{\mathbf{so}^E} A = 0 \,\} \\
\mathcal{O}'(\mathrm{d}^E, \varepsilon) &= \{\, A \in \ker \delta^{\mathbf{so}^E} \mid \|A\|_3 < \varepsilon \,\}
\end{aligned}$$

son subespacios de Γ-invariantes de $\Omega^1(\mathbf{so}^E)$, donde Γ actúa por

$$g \cdot A = gAg^{-1}, \qquad g \in \Gamma, \quad A \in \Omega^1(\mathbf{so}^E).$$

Además, $\underline{\Omega}(\mathrm{d}^E)$ manda a $\mathcal{O}'(\mathrm{d}^E, \varepsilon)$ isomorfa y equivariantemente en

$$\mathcal{O}(\mathrm{d}^E, \varepsilon) = \{\, \mathrm{d}^E + A \mid \delta^{\mathbf{so}^E} A = 0,\ \|A\|_3 < \varepsilon \,\}.$$

Cuando trabajemos con el espacio de órbitas $X/\underline{\mathcal{G}}$ de una $\underline{\mathcal{G}}$-acción sobre un espacio X, usaremos $[x] \in X/\underline{\mathcal{G}}$ para denotar el punto de $X/\underline{\mathcal{G}}$ determinado por $x \in X$.

Sea $\underline{\mathcal{G}} \times_\Gamma \mathcal{O}(\mathrm{d}^E, \varepsilon)$ el espacio de órbitas de la Γ-acción sobre $\underline{\mathcal{G}} \times \mathcal{O}(\mathrm{d}^E, \varepsilon)$, definida por $\gamma(g, x) = (g\gamma^{-1}, \gamma x)$, donde $[g, x]$ denota el punto en el espacio de órbitas, determinado por (g, x).

Teorema 6.4.1: [Teorema de las rebanadas para $\underline{\mathcal{C}}$] *Sean $\mathrm{d}^E \in \underline{\mathcal{C}}$, $\Gamma = \Gamma(\mathrm{d}^E)$ y $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña. Entonces la aplicación*

$$\underline{\mathcal{G}} \times_\Gamma \mathcal{O}(\mathrm{d}^E, \varepsilon) \to \underline{\mathcal{C}},$$

definida por $[g, x] \mapsto g \cdot x$ con $x \in \mathcal{O}(\mathrm{d}^E, \varepsilon)$, es un isomorfismo equivariante, sobre una vecindad abierta equivariante, de la $\underline{\mathcal{G}}$-órbita de d^E.

De la discusión anterior, este teorema nos da un teorema equivalente para $\underline{\Omega}^1(\mathbf{so}^E)$ que enunciaremos de manera mas formal, para introducir la notación para la demostración.

La aplicación $\psi: \underline{\mathcal{G}} \times \ker \delta^{\mathbf{so}^E} \to \Omega^1(\mathbf{so}^E)$ definida por $\psi(g, A) = g \cdot A$, para $g \in \underline{\mathcal{G}}$ y $A \in \ker \delta^{\mathbf{so}^E}$, induce las aplicaciones

$$\tilde{\psi}: \underline{\mathcal{G}} \times_\Gamma \ker \delta^{\mathbf{so}^E} \to \underline{\Omega}^1(\mathbf{so}^E)$$

y

$$\tilde{\psi}^\varepsilon: \underline{\mathcal{G}} \times_\Gamma \mathcal{O}'(\mathrm{d}^E, \varepsilon) \to \Omega^1(\mathbf{so}^E)$$

para $\varepsilon > 0$.

Teorema 6.4.2: [Teorema de las rebanadas para $\underline{\Omega}^1(\mathrm{so}^E)$] *Sean $\mathrm{d}^E \in \underline{\mathcal{C}}$, $\Gamma = \Gamma(\mathrm{d}^E)$ y $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña. Entonces la aplicación*

$$\tilde{\psi}^\varepsilon: \underline{\mathcal{G}} \times_\Gamma \mathcal{O}'(\mathrm{d}^E, \varepsilon) \to \Omega^1(\mathbf{so}^E)$$

es un encaje abierto equivariante, sobre una vecindad de la $\underline{\mathcal{G}}$-órbita de $0 \in \underline{\Omega}^1(\mathbf{so}^E)$.

Probaremos el Teorema 6.4.1, demostrando el enunciado equivalente 6.4.2, para ello, veamos primero algunos lemas.

Lema 6.4.3: *El espacio tangente en* d^E *de la órbita de* d^E *bajo* $\underline{\mathcal{G}}$, *es* $T_{\mathrm{d}^E}\underline{\mathcal{G}}\mathrm{d}^E = \operatorname{im}\mathrm{d}^{\mathbf{so}^E}$ *y* $T_1\Gamma(\mathrm{d}^E) = \ker \mathrm{d}^{\mathbf{so}^E}$, *donde*

$$\mathrm{d}^{\mathbf{so}^E} : \Omega^0(\mathbf{so}^E) \to \Omega^1(\mathbf{so}^E).$$

Dem: Definimos $i{:}\underline{\mathcal{G}} \to \underline{\mathcal{C}} : g \mapsto g\mathrm{d}^E g^{-1}$, por lo tanto, la imagen de i es la órbita de d^E. Sea di la diferencial de i. Ahora consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} T_1\underline{\mathcal{G}} & \xrightarrow{di} & T_{\mathrm{d}^E}\underline{\mathcal{C}} \\ \| & & \| \\ \Omega^0(\mathbf{so}^E) & \xrightarrow{\mathrm{d}^{\mathbf{so}^E}} & \Omega^1(\mathbf{so}^E). \end{array}$$

La igualdad $T_1\Gamma(\mathrm{d}^E) = \ker \mathrm{d}^{\mathbf{so}^E}$ se sigue de consideraciones generales que probaremos en el lema siguiente. Primero verifiquemos que el diagrama anterior conmuta, para ello, notemos que $g_t = e^{t\gamma}$ para $\gamma \in \Omega^0(\mathbf{so}^E)$ es una curva que pasa por 1 en $\underline{\mathcal{G}}$ cuya tangente en el origen es identificada con γ bajo el isomorfismo $\Omega^0(\mathbf{so}^E) \cong T_1\underline{\mathcal{G}}$. Entonces para $s \in \underline{\Omega}^0(\mathbf{so}^E)$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{t\gamma}\mathrm{d}^E e^{-t\gamma}(s)\,|_{t=0} &= \gamma e^{t\gamma}\mathrm{d}^E e^{-t\gamma}(s) - e^{t\gamma}\mathrm{d}^E\gamma e^{-t\gamma}(s)\,|_{t=0} \\ &= \gamma \mathrm{d}^E(s) - \mathrm{d}^E\gamma(s) \\ &= -\mathrm{d}^{\mathbf{so}^E}\gamma(s) \end{aligned}$$

por otro lado,

$$di(\gamma) = \frac{d}{dt}e^{t\gamma}\mathrm{d}^E e^{-t\gamma}\,|_{t=0} = -\mathrm{d}^{\mathbf{so}^E}(\gamma). \quad \blacksquare$$

Lema 6.4.4: *Sea* G *un grupo de Lie, que actúa diferenciablemente en una variedad* X. *Sea* $x_0 \in X$ *y sea* i *la composición*

$$G \to Gx_0 \hookrightarrow X : g \mapsto gx_0.$$

Entonces $T_1Gx_0 = \ker di$, *donde* Gx_0 *es el grupo de isotropía de* x_0.

Dem: Para cualquier $v \in T_1G$, sea $\gamma_t(v)$ una curva en G con

$$\gamma_0(v) = 1, \qquad \frac{d}{dt}\gamma_t(v)\,|_{t=0} = v.$$

Entonces $\gamma_t(v)$ determina un campo vectorial V_v sobre X por

$$V_v(x) = \frac{d}{dt}\gamma_t(v)(x)\,|_{t=0}.$$

Nótese que

$$V_v(x_0) = \frac{d}{dt}(v)(x_0)\,|_{t=0} = di(v).$$

Los puntos fijos de X bajo la curva, son precisamente los ceros del campo vectorial, es decir

$$X^{\gamma_t(v)} = \{ x \in X \mid V_v(x) = 0 \}.$$

Si $v \in \ker di$, entonces $V_v(x_0) = 0$, por lo tanto, x_0 es fijado por $\gamma_t(v)$ y $v \in T_1 G x_0$. El argumento es reversible. ∎

El Lema 6.4.3, implica que $\mathrm{d}^{\mathrm{so}^E}$ tiene rango cerrado, por lo tanto, $\mathrm{im}\, \mathrm{d}^{\mathrm{so}^E}$, el espacio tangente a la órbita, tiene un complemento ortogonal. Entonces $\Omega^1(\mathrm{so}^E) = \mathrm{im}\, \mathrm{d}^{\mathrm{so}^E} \oplus \ker \delta^{\mathrm{so}^E}$.

Def: Sea $\psi : \underline{\mathcal{G}} \times \ker \delta^{\mathrm{so}^E} \to \underline{\mathcal{C}} \cong \Omega^1(\mathrm{so}^E)$ definido como antes por

$$\psi(g, A) = g \cdot A = -[\mathrm{d}^{\mathrm{so}^E}(g)]g^{-1} + gAg^{-1} \in \Omega^1(\mathrm{so}^E).$$

Calculemos la diferencial de ψ en $(1,0)$. Nótese que

$$d\psi_{(1,0)} : T_1\underline{\mathcal{G}} \oplus \ker(\delta^{\mathrm{so}^E}) \to T_0\Omega^1(\mathrm{so}^E) = \Omega^1(\mathrm{so}^E).$$

Como $\Omega^1(\mathrm{so}^E) = \mathrm{im}\, \mathrm{d}^{\mathrm{so}^E} \oplus \ker(\delta^{\mathrm{so}^E})$, podemos considerar a la diferencial como la aplicación

$$d\psi_{(1,0)} : \underline{\Omega}^0(\mathrm{so}^E) \oplus \ker(\delta^{\mathrm{so}^E}) \to \mathrm{im}\, \delta^{\mathrm{so}^E}.$$

Sea $\gamma \in \underline{\Omega}^0(\mathrm{so}^E)$, y sea A_t una curva en $\ker \delta^{\mathrm{so}^E}$ tal que

$$\frac{d}{dt} A_t \mid_{t=0} = a.$$

Sabemos que

$$\psi(e^{t\gamma}, A_t) = -[\mathrm{d}^{\mathrm{so}^E}(e^{t\gamma})]e^{-t\gamma} + e^{t\gamma} A_t e^{-t\gamma},$$

por lo que

$$\begin{aligned} d\psi_{(1,0)}(\gamma, a) &= \frac{d}{dt}(\psi(e^{t\gamma}, A_t)) \mid_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(-[\mathrm{d}^{\mathrm{so}^E} e^{t\gamma}]e^{-t\gamma} + e^{t\gamma} A_t e^{-t\gamma}) \mid_{t=o} \\ &= -\mathrm{d}^{\mathrm{so}^E}(\gamma) + a \\ &\in \mathrm{im}\, \mathrm{d}^{\mathrm{so}^E} \oplus \ker \delta^{\mathrm{so}^E}. \end{aligned}$$

Así, $d\psi_{(1,0)} = (-\mathrm{d}^{\mathrm{so}^E}, \mathrm{Id})$; y por lo tanto, una condición necesaria y suficiente para que $d\psi_{(1,0)}$ sea un isomorfismo, es que $T_1\Gamma(\mathrm{d}^E) = \ker \mathrm{d}^{\mathrm{so}^E} = 0$. Del Teorema 6.3.3, este es el caso si y sólo si d^E es irreducible. Bajo esta condición, ψ es un difeomorfismo local en $(1,0)$.

El caso reducible es similar, excepto que ahora tenemos que tomar en cuenta los grupos de isotropía. Si d^E es reducible, entonces $\ker \mathrm{d}^{\mathbf{so}^E}$ es de dimensión uno y genera el grupo $\exp(\ker \mathrm{d}^{\mathbf{so}^E})$. Donde $\exp\colon T_1\underline{\mathcal{G}} \to \underline{\mathcal{G}}$ es la aplicación exponencial.

Def: Denotaremos a $\exp((\ker \mathrm{d}^{\mathbf{so}^E})^\perp) \subset \underline{\mathcal{G}}$ por $\Gamma^\perp$, que es una subvariedad de codimensión 1 de $\underline{\mathcal{G}}$ cerca del elemento identidad de $\underline{\mathcal{G}}$. Definimos

$$\psi_0\colon \Gamma^\perp \times \ker \delta^{\mathbf{so}^E} \to \Omega^1(\mathbf{so}^E)$$

por $\psi_0 = \psi\,|_{\Gamma^\perp \times \ker \delta^{\mathbf{so}^E}}$.

Nótese que $d\psi_{0(1,0)}$ es un isomorfismo, por lo que es un difeomorfismo local en $(1,0)$.

Demostración del Teorema 6.4.2: Como $\bar{\psi}$ es equivariante, el teorema queda demostrado si se prueba que la diferencial $d\psi_{[1,0]}$ es un isomorfismo y que

(i) $\bar{\psi}[g, A_1] = \bar{\psi}[1, A_2] \Rightarrow [g_1, A_1] = [1, A_2]$ donde $\|A_1\|_3$ y $\|A_2\|_3$ son suficientemente pequeños.

Para comprobar esto, veremos a la aplicación ψ_0 como la composición

$$\Gamma^\perp \times \ker \delta^{\mathbf{so}^E} \xrightarrow{\psi_0'} \underline{\mathcal{G}} \times_\Gamma \ker \delta^{\mathbf{so}^E} \xrightarrow{\bar{\psi}} \Omega^1(\mathbf{so}^E).$$

donde $\psi_0'(1, A) = [1, A]$.

Hemos visto que la aplicación ψ_0 es un isomorfismo local en $(1,0)$ y que su diferencial es la identidad. Se puede ver que lo mismo sucede para $d\psi_0'$ en $(1,0)$, y por lo tanto $d\psi_{(1,0)}$ es un isomorfismo.

Verificaremos (i) en dos pasos. Primero mostraremos que

(ii) $\bar{\psi}[g, A] = \bar{\psi}[1, A_2] \Rightarrow [g_1, A_1] = [1, A_2]$ si y $\|g_1 - 1\|_4$ son suficientemente pequeños.

Entonces veremos que

(iii) $g = g_1\gamma$ donde $\gamma \in \Gamma$ y $\|g_1 - 1\|_4$ es pequeño si $\bar{\psi}[g, A_1] = \bar{\psi}[1, A_2]$ y $\|A_1\|_3$, $\|A_2\|_3$ son suficientemente pequeños.

Como la diferencial en $(1,1)$ de la multiplicación $m\colon \Gamma^\perp \times \Gamma \to \underline{\mathcal{G}}$ es la identidad, m es un isomorfismo local. Esto quiere decir, que si $\|g - 1\|_4$ es pequeño, existe una $\gamma \in \Gamma$ y $\gamma^\perp \in \Gamma^\perp$ con $\|\gamma^\perp - 1\|_4$ pequeña, tal que $\gamma^\perp\gamma = g$. Entonces bajo la suposición de (ii)

$$\begin{aligned}\psi_0(\gamma^\perp, \gamma A_1) &= \bar{\psi}[\gamma^\perp\gamma, A_1]\\ &= \bar{\psi}[1, A_2]\\ &= \psi_0(1, A_2).\end{aligned}$$

Como ψ_0 es un isomorfismo local en $(1,0)$ y $(\gamma^\perp, \gamma A_1) = (1, A_2)$, aplicando ψ_0' a esta igualdad, obtenemos la conclusión de (ii).

Ahora veamos (iii). La suposición de que $\bar{\psi}[g, A_1] = \bar{\psi}[1, A_2]$ implica

$$-(\mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)} g) g^{-1} + g A_1 g^{-1} = A_2,$$

es decir, $\mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)} g = g A_2 - A_1 g$. Como

$$\underline{\mathcal{G}} \subset \Omega^0(\mathrm{Hom}(E,E)) = \ker \mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)} \oplus (\ker \mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)})^\perp$$

podemos expresar a g como la suma $g = \gamma_0 + g_0$, donde $\gamma_0 \in \ker \mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)}$ y $g_0 \in (\ker \mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)})^\perp$. Como d^E es una conexión, el Lema 6.2.5 implica que existe una constante c_1 tal que

$$\begin{aligned}
\|g_0\|_1 &\le c_1 \|\mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)} g_0\|_0 \\
&= c_1 \|\mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)} g\|_0 \\
&= c_1 \|g A_1 - A_2 g\|_0 \\
&\le c_1 (\|g A_1\|_0 + \|A_2 g\|_0 \\
&\le c_1 (\|A_1\|_0 + \|A_2\|_0) \\
&< 2 c_1 \varepsilon
\end{aligned}$$

si $A_i \in \mathcal{O}'(\mathrm{d}^E, \varepsilon)$, con $i = 1, 2$. Este mismo argumento puede ser repetido cuatro veces, para obtener la estimación $\|g_0\|_4 < c^* \varepsilon$ para alguna constante c^*.

Ahora veremos que existe una $\gamma \in \Gamma$ tal que $\|\gamma_0 - \gamma\|_4$ es pequeña. Para cualquier $x \in M$, el homomorfismo

$$h_x : \Omega^0(\mathrm{Hom}(E,E)) \to \mathrm{Hom}(E_x, E_x) = V$$

manda a $\ker \mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)}$ isométricamente, sobre un subespacio lineal W de V por el Corolario 6.2.6.También manda a $\underline{\mathcal{G}}$ en un subgrupo de $G = \mathbf{SO}(\dim E_x)$ y a Γ isomorfamente en

$$h_x(\Gamma) = \{\, w \in W \mid w^t w = 1 \,\}.$$

Recordemos que $\|z\| = \mathrm{traza}(z^t z)$ para $z \in V$. Esto significa que si $z \in W$ y $z^t z$ está cerca de 1, $\|z\|$ está cerca de $\|1\|$ y por lo tanto está acotada. Como W es de dimensión finita, esto implica que si $z \in W$ y $z^t z$ está cerca de 1, z está cerca de $h_x(\Gamma)$. Aplicando esto a $h_x(\gamma_0)$ concluimos que existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\|h_x(\gamma) - h_x(\gamma_0)\|$ es pequeña. Como $h_x : \ker \mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)} \to W$ es una isometría, $\|\gamma - \gamma_0\|_4$ es pequeña. Por lo tanto tenemos

$$g = \gamma + (\gamma_0 - \gamma) + g_0 = (1 + (\gamma_0 - \gamma + g_0)\gamma^{-1})\gamma$$

donde $\gamma \in \Gamma$ y $g_1 = 1 + (\gamma_0 - \gamma + g_0)\gamma^{-1}$ está cerca de 1 en $\| \; \|_4$. Esto completa la prueba de (iii), y por lo tanto la demostración de Teorema. ∎

5. $\underline{\mathcal{B}}$ ES HAUSDORFF .

Para ver que $\underline{\mathcal{B}}$ es Hausdorff, necesitamos el siguiente

Lema 6.5.1: [12, Cor. 10.20, p. 36-7] *Para una conexión* $\mathrm{d}^E \in \underline{\mathcal{C}}$ *fija, existe un polinomio* $\varepsilon(x,y)$ *tal que si* $g \in \underline{\mathcal{G}}$, $A_1, A_2 \in \underline{\Omega}^1(\mathbf{so}^E)$ *y*

$$g(\mathrm{d}^E + A_1)g^{-1} = \mathrm{d}^E + A_2,$$

entonces $\|g\|_4 \le \varepsilon(\|A_1\|_3, \|A_2\|_3)$. ∎

Si $\underline{\mathcal{B}}$ no es Hausdorff, existe una sucesión de conexiones $\{\mathrm{d}_n^E\}$ y $\{\bar{\mathrm{d}}_n^E\}$ en $\underline{\mathcal{C}}$ que convergen a d^E y a $\bar{\mathrm{d}}^E$ en $\underline{\mathcal{C}}$ respectivamente, tales que $g_n \mathrm{d}_n^E g_n^{-1} = \bar{\mathrm{d}}_n^E$ para alguna $g_i \in \underline{\mathcal{G}}$, y $\bar{\mathrm{d}}^E = \mathrm{d}^E + \bar{A}$ para $\bar{A} \in \underline{\Omega}^1(\mathbf{so}^E)$.

Sean $\{A_n\}$ y $\{\bar{A}_n\}$ sucesiones en $\underline{\Omega}^1(\mathbf{so}^E)$, con $\mathrm{d}_n^E = \mathrm{d}^E + A_n$, $\bar{\mathrm{d}}_n^E = \mathrm{d}^E + \bar{A}_n$, $A_n \to 0$ y $\bar{A}_n \to \bar{A}$, donde la convergencia es tomada respecto a la 3-norma de Sobolev $\|\ \|_3$. En particular, las sucesiones $\{A_n\}$ y $\{\bar{A}_n\}$ están uniformemente acotadas en $\|\ \|_3$, por lo que el lema implica que $\{g_n\}$ está uniformemente acotada en $\|\ \|_4$. Un teorema de Rellich implica que existe una subsucesíon de $\{g_n\}$ que es una sucesión de Cauchy en $\|\ \|_3$. Nótese que

$$\mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)} g_n = g_n A_n - \bar{A}_n g_n.$$

Por el Teorema de Rellich, $\{\mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)} g_n\}$ tiene una subsucesión de Cauchy

$$\{\mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)} g_{n_k}\}$$

en la norma $\|\ \|_3$. Como $\{g_n\}$ y las derivadas son de Cauchy en $\|\ \|_3$, $\{g_n\}$ tiene una subsucesión de Cauchy en $\|\ \|_4$ que converge a un punto $g \in \mathcal{G}_4 = \underline{\mathcal{G}}$. Pero entonces, $g\mathrm{d}^E g^{-1}\mathrm{d}^E = \bar{\mathrm{d}}^E$, lo que contradice el hecho de que d^E y $\bar{\mathrm{d}}^E$ no están en la misma $\underline{\mathcal{G}}$-órbita.

Del Teorema de las rebanadas 6.4.1 y de la discusión anterior tenemos el siguiente:

Teorema 6.5.2: [Teorema de estructura] [12, Teo. 10.4]

1. $\underline{\mathcal{B}} = \underline{\mathcal{C}}/\underline{\mathcal{G}}$ *es Hausdorff.*

2. $\tilde{\underline{\mathcal{B}}} = \tilde{\underline{\mathcal{C}}}/\underline{\mathcal{G}}$ *tiene estructura de variedad de Hilbert, con cartas locales* $\mathcal{O}(\mathrm{d}^E, \varepsilon) \cong \pi\mathcal{O}(\mathrm{d}^E, \varepsilon)$ *para* ε *suficientemente pequña, que depende de* d^E *en* $\tilde{\underline{\mathcal{C}}}$. *Donde* $\pi: \tilde{\underline{\mathcal{C}}} \to \tilde{\underline{\mathcal{B}}}$ *es la proyección sobre las órbitas y* $\tilde{\underline{\mathcal{C}}} = \underline{\mathcal{C}} - \underline{\mathcal{C}}_{red}$.

3. $\pi: \tilde{\underline{\mathcal{C}}} \to \tilde{\underline{\mathcal{B}}}$ *es una* $\underline{\mathcal{G}}$*-fibración principal.*

4. *Para* $\mathrm{d}^E \in \underline{\mathcal{C}}_{red}$, *la aplicación* $\pi: \mathcal{O}(\mathrm{d}^E, \varepsilon)/\Gamma(\mathrm{d}^E) \to \underline{\mathcal{B}}$ *es un homeomorfismo sobre una vecindad de* $[\mathrm{d}^E] \in \underline{\mathcal{B}}$ *y un difeomorfismo en el complemento del grupo de isotropía* $\underline{\mathcal{G}}_x$. ∎

Observación: Como $\underline{\mathcal{B}}$ es Hausdorff, las $\underline{\mathcal{G}}$-órbitas son subconjuntos cerrados de $\underline{\mathcal{C}}$.

CAPÍTULO 7

EL ESPACIO DE MÓDULI VIRTUAL DE CONEXIONES AUTODUALES

Imagination is more important than knowledge.
— EINSTEIN (?)

1. INTRODUCCION .

Sea M una variedad diferenciable, cerrada, orientada, de dimensión 4, con forma de intersección positiva definida y $\mathrm{H}_1(M;\mathbf{Z}_2) = 0$. Sea L un haz lineal complejo sobre M con $c_1(L)^2[M] > 1$. Sea $E = L \oplus \epsilon$ y $\underline{\mathcal{C}} = \underline{\mathcal{C}}(E)$. Nótese que la condición de que $c_1(L)^2[M] > 1$ implica que $c_1(L)$ tiene orden finito en $\mathrm{H}^2(M;\mathbf{Z})$.

El espacio de móduli virtual $\underline{\mathcal{M}} = \underline{\mathcal{M}}(E)$ de conexiones virtuales autoduales, es el espacio e $\underline{\mathcal{G}}$-órbitas del conjunto de ceros de la aplicación equivariante

$$R_-: \underline{\mathcal{C}} \to \Omega^2_-(\mathrm{so}^E).$$

Existen algunas dificultades con la topología de $\underline{\mathcal{M}}$, pero una pequeña perturbación equivariante R'_- de R_- tiene un conjunto de ceros cuyo espacio de órbitas $\underline{\mathcal{M}}' = \underline{\mathcal{M}}'(E)$ tiene propiedades topológicas interesantes. El análisis de $\underline{\mathcal{M}}'$ nos da restricciones sobre las formas bilineales que son formas de intersección de variedades de dimensión 4.

El objetivo de este capítulo, es demostrar los siguientes teoremas.

Teorema 7.1.1: *Si* $0 < c_1(L)^2[M] < 4$, *el espacio de m'oduli* $\underline{\mathcal{M}}(E)$ *es compacto.*

Teorema 7.1.2: *Supongamos que*

$$\underline{\mathcal{M}}(E) = \{\, \mathrm{d}^E \in \underline{\mathcal{C}} \mid R_-(\mathrm{d}^E) = 0 \,\}/\underline{\mathcal{G}}$$

es compacto. Entonces existe una perturbación compacta $R'_- = R_- + \sigma$ *tal que el espacio de móduli perturbado*

$$\underline{\mathcal{M}}'(E) = \{\, \mathrm{d}^E \in \underline{\mathcal{C}} \mid R'_-(\mathrm{d}^E) = 0 \,\}/\underline{\mathcal{G}}$$

es una variedad diferenciable compacta con $\mu(c_1(L)) \cdot |\mathrm{H}_1(M;\mathbf{Z})|$ *singularidades definidas por las* $\underset{\sim}{\mathcal{G}}$*-órbitas de las conexiones autoduales reducibles. Cada punto singular, tiene una vecindad homeomorfa a un cono sobre* $\mathbf{C}P^{d-1}$*, donde* $d = c_1(L)^2[M] - 1$*. La dimensión de* $\underset{\sim}{\mathcal{M}}'$ *es*

$$-\operatorname{ind} \mathrm{d}^E = 2d - 1 = 2c_1(L)^2[M] - 3.$$

2. REPRESENTACIONES DEL GRUPO DE ISOTROPIA .

Las representaciones $H^*(\mathrm{d}^E)$ de $\Gamma(\mathrm{d}^E)$ con d^E una conexión autodual, juegan un papel muy importante en el análisis del espacio de móduli virtual de las conexiones autoduales. En esta sección describiremos dichas representaciones.

Recordemos que $E = L \oplus \epsilon$ es un $\mathbf{SO}(3)$-haz vectorial reducible sobre M. El producto cruz vectorial, define un isomorfismo de haces vectoriales $E \cong \mathbf{so}^E$ para cualquier $\mathbf{SO}(3)$-haz vectorial E, no solamente para haces reducibles. En el caso reducible, es fácil verificarlo y ver que el isomorfismo es $\Gamma(\mathrm{d}^E)$-equivariante para cualquier $\mathbf{SO}(3)$-conexión virtual en E.

Proposición 7.2.1: *Sea* $E = L \oplus \epsilon$*. Existe un isomorfismo* $\Gamma = \Gamma(\mathrm{d}^E)$ *equivariante* $I: E \to \mathbf{so}^E$ *definido sobre la fibra* E_x *para* $x \in M$ *por*

$$I_x(v,t)(w,u) = (itw + vu, -\Re\langle w, v\rangle),$$

donde $\Re$ *denota la parte real de un número complejo,* $\langle\ ,\ \rangle$ *denota la métrica Hermitiana en* L*, y*

$$(v,t) \in L_x \oplus \epsilon_x \cong \mathbf{C} \oplus \mathbf{R},$$
$$(w,u) \in L_x \oplus \epsilon_x \cong \mathbf{C} \oplus \mathbf{R}.$$

Dem: Es fácil ver que $I_x(v,t)$ es antisimétrica, $\Gamma(\mathrm{d}^E)$-equivariante y un isomorfismo sobre las fibras.

El isomorfismo I y la descomposición de E da una descomposición de los Γ-módulos

$$\Omega^p(\mathrm{so}^E) = \Omega^p(L) \oplus \Omega^p(\epsilon).$$

(Como ϵ es el haz trivial, $\Omega^p(\epsilon)$ es el espacio de p-formas sobre M.)

Proposición 7.2.2: *La descomposición anterior, inducida por la conexión reducible* d^E *en* E, *es* Γ*-equivariante, donde* Γ *actúa trivialmente sobre* $\Omega^p(\epsilon)$ *y mediante la multiplicación compleja sobre* $\Omega^p(L)$. *Las aplicaciones lineales*

$$\mathrm{d}^{\mathrm{so}^E}\colon \Omega^p(\mathrm{so}^E) \to \Omega^{p+1}(\mathrm{so}^E)$$

preservan la descomposición y se restringen a

$$\mathrm{d}^{\mathrm{so}^E}\colon \Omega^p(\epsilon) \to \Omega^{p+1}(\epsilon)$$

y

$$\mathrm{d}^{\mathrm{so}^E}\colon \Omega^p(L) \to \Omega^{p+1}(L)$$

donde la primera aplicación es la derivada exterior y la segunda es lineal compleja y por lo tanto, conmuta con Γ. ∎

A continuación, veremos algunos resultados, que junto con la Proposición 7.2.2, nos ayudarán a describir la homología $H^*(\mathrm{d}^E)$ del complejo fundamental

$$0 \longrightarrow \Omega^0(\mathrm{so}^E) \xrightarrow{\mathrm{d}^{\mathrm{so}^E}} \Omega^1(\mathrm{so}^E) \xrightarrow{\mathrm{d}_-^{\mathrm{so}^E}} \Omega^2_-(\mathrm{so}^E) \longrightarrow 0$$

de una conexión virtual autodual d^E. Si d^E es reducible, entonces de la Proposición 7.2.2 obtenemos descomposiciones

$$(\bullet) \qquad \begin{aligned} H^1(\mathrm{d}^E) &= H^1(\mathrm{d}^E|_L) \oplus H^1(\epsilon) \\ H^2(\mathrm{d}^E) &= H^2(\mathrm{d}^E|_L) \oplus H^2_-(\epsilon), \end{aligned}$$

donde $H^2_-(\epsilon) = H^2_-(M)$ es el espacio de 2-formas armónicas antiautoduales, o equivalentemente, el subespacio de $H^2(M)$ sobre el cual la forma de intersección es negativa definida. Esto nos da la siguiente:

Proposición 7.2.3: *Sea* M *una variedad de dimensión 4 compacta, con forma de intersección positiva definida y* $\mathrm{H}_1(M;\mathbf{Z}_2) = 0$. *Sea* L *un haz lineal complejo sobre* M *y* d^E *una conexión virtual reducible en* $E = L \oplus \epsilon$. *Entonces* $H^1(\mathrm{d}^E) \cong \mathbf{C}^{k+d}$, $H^2(\mathrm{d}^E) \cong \mathbf{C}^k$ *para* $d = c_1(L)^2[M] - 1$ *y para alg'un entero* k*; además,* $\Gamma(\mathrm{d}^E) = S^1$ *actúa sobre* $H^1(\mathrm{d}^E)$ *y* $H^2(\mathrm{d}^E)$ *mediante la multiplicación compleja. Finalmente,* $H^0(\mathrm{d}^E) = \mathbf{R}$.

Dem: $H^1(\epsilon) = H^1(M) = 0$ y $H^2_-(\epsilon) = H^2_-(M) = 0$, ya que $\mathrm{H}_1(M;\mathbf{Z}_2) = 0$ y M tiene forma de intersección positiva definida. De la descomposición $(\bullet)$ y de la Proposición 7.2.2, tenemos que para $i > 0$, $H^i(\mathrm{d}^E) = H^i(\mathrm{d}^E|_L)$ es un espacio vectorial complejo sobre el cual

$\Gamma(\mathrm{d}^E)$ actúa mediante la multiplicación compleja. Por el Lema 6.4.3, el espacio tangente a la identidad de $\Gamma(\mathrm{d}^E)$ es $\ker \mathrm{d}^{\mathfrak{so}^E} = H^0(\mathrm{d}^E)$; por lo tanto $H^0(\mathrm{d}^E) = \mathbf{R}$. Por el Teorema 5.5.3,

$$\begin{aligned}\operatorname{ind} \mathrm{d}^E &= 1 - \dim H^1(\mathrm{d}^E) + \dim H^2(\mathrm{d}^E)\\ &= -2c_1(L)^2[M] + 3;\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\dim H^1(\mathrm{d}^E) - \dim H^2(\mathrm{d}^E) = 2c_1(L)^2[M] - 2.$$

Como "dim" significa dimensión real, las dimensiones complejas de estos dos espacios vectoriales, difieren por $c_1(L)^2[M] - 1$. ∎

Proposición 7.2.4: *Si E es un $\mathbf{SO}(3)$-haz vectorial sobre una variedad M compacta, orientada, de dimensión 4, con $\mathrm{H}_1(M;\mathbf{Z}_2) = 0$ y d^E es una conexión virtual irreducible en E, entonces $H^0(\mathrm{d}^E) = 0$.*

Dem: Se sigue del Lema 6.4.3 y del hecho de que en este caso $\Gamma(\mathrm{d}^E) = \{\mathrm{Id}\}$. ∎

3. EL TEOREMA DE TRANSVERSALIDAD .

Sea N una variedad diferenciable de Hilbert, sobre la cual actúa un grupo de Lie de Hilbert $\mathcal{H}$ diferenciablemente. Supongamos que $\mathcal{H}$ preserva el producto interior sobre las fibras de TN. La representación en rebanadas de $\mathcal{H}_x$ para $x \in N$ es

$$S_x = (T_x\mathcal{H}x)^{\perp} \subset T_xN,$$

que es el complemento ortogonal en T_xN del espacio tangente de la órbita $\mathcal{H}x$. Para una $\varepsilon > 0$ fija (que puede variar con x), sea

$$O_x = \{\, v \in S_x \mid \|v\| < \varepsilon \,\}.$$

Una *función de corte* $\rho\colon O_x \to [0,1]$ es una $\mathcal{H}_x$-aplicación diferenciable que vale 1 en una vecindad del 0, y 0 para $\|v\| \geq \varepsilon/2$.

Sea W una representación de $\mathcal{H}$, y $f\colon N \to W$ una aplicación diferenciable equivariante, también llamada $\mathcal{H}$-aplicación.

Def: Definimos λf como la colección de aplicaciones $\mathcal{H}_x$-lineales

$$\lambda f_x = df_x\,|_{S_x}\colon S_x \to W.$$

Def: $f\colon N \to W$ es *Fredholm por rebanadas* si λf_x es Fredholm para toda $x \in N$.

Def:

$$K_x(f) = \ker \lambda f_x,$$
$$L_x(f) = (\mathrm{im}\lambda f_x)^{\perp},$$
$$L_x(f)^{\perp} = \mathrm{im}\lambda f_x.$$

Si f es Fredholm por rebanadas,

$$S_x = K_x(f) \oplus K_x(f)^{\perp},$$
$$W = L_x(f) \oplus L_x(f)^{\perp},$$

y $\lambda f_x: K_x(f)^{\perp} \to L_x(f)^{\perp}$ es un isomorfismo de representaciones de espacios de Hilbert de $\mathcal{H}_x$.

Sea V y W representaciones de espacios de Hilbert de un grupo de Lie compacto H. Supongamos que $f: V \to W$ es H-equivariante y diferenciable.

Lema 7.3.1: *Sea λf_0 Fredholm. Entonces existe una aplicación diferenciable que es H-equivariante $\Phi: K_0(f) \to L_0(f)$ definida en una vecindad de $0 \in K_0(f)$ y un difeomorfismo local H-equivariante $F: (V,0) \to (V,0)$ tal que*

$$f \circ F = (\Phi, \lambda f_0): V = K_0(f) \oplus K_0(f)^{\perp} \to L_0(f) \oplus L_0(f)^{\perp} = W.$$

Expresaremos lo anterior, diciendo que f y $(\Phi, \lambda f_0)$ tienen gérmenes equivalentes en 0.

Dem: Sea p_1 la proyección de V sobre $K_0(f)^{\perp}$ y de W en $L_0(f)^{\perp}$. Sea p_0 la proyección sobre sus complementos ortogonales. Definimos $G: (V,0) \to (V,0)$ por

$$G = \mathrm{Id} + (\lambda f_0)^{-1} p_1 (f - \lambda f_0).$$

Como $dG_0 = \mathrm{Id}$, G es un H-difeomorfismo local. Sea F una inversa local cerca del 0. Sea

$$\Phi = p_0 \circ f \circ F: K_0(f) \to L_0(f).$$

Entonces $f \circ F = (\Phi, \lambda f_0)$ o equivalentemente $f = (\Phi, \lambda f_0) \circ G$. Entonces

$$\begin{aligned}(\Phi, \lambda f_0) \circ G &= (p_0 f F G, \lambda f_0 G) \\ &= (p_0 f, \lambda f_0 + p_1 f - p_1 \lambda f_0) \\ &= (p_0 f, p_1 f). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

El siguiente lema es una consecuencia inmediata del Lema 7.3.1 y de las definiciones.

Lema 7.3.2: *Sea $f: N \to W$ una $\mathcal{H}$-aplicación Fredholm por rebanadas. Entonces para cada $x \in N$, existe una $\mathcal{H}_x$-aplicación $\Phi_x: K_x(f) \to L_x(f)$ definida en una vecindad de $0 \in K_x(f)$ tal que $f|_{O_x}$ y*

$$(\Phi_x, \lambda f_x): S_x = K_x(f) \oplus K_x(f)^{\perp} \to L_x(f) \oplus L_x(f)^{\perp} = W$$

tienen gérmenes equivalentes en 0 especto a $\mathcal{H}_x$. ∎

Diremos que el teorema de las rebanadas se cumple para N, o que N tiene rebanadas, si existe un $\mathcal{H}$-encaje $O_x \to N$ que manda al 0 en x y que se extiende a un $\mathcal{H}$-encaje abierto de $\mathcal{H} \times_{\mathcal{H}_x} O_x \to N$. Para el caso en que N tiene rebanadas, la topología local de $N/\mathcal{H}$ alrededor de un punto $[x] \in N/\mathcal{H}$ (con representante $x \in N$) es la misma que la topología local de $O_x/\mathcal{H}_x$ alrededor del $[0]$.

Si P es un subespacio invariante de N, y H es un subgrupo de $\mathcal{H}$, sea

$$P^{(H)} = \{ x \in N \mid \mathcal{H}_x \cong H \}.$$

Posteriormente, usaremos el siguiente principio en varias ocasiones: las $\mathcal{H}$-aplicaciones $\mathcal{H} \times \Gamma P \to W$ están en correspondencia uno a uno con las Γ-aplicaciones $P \to W$. La correspondencia de $\mathcal{H}$-aplicaciones a Γ-aplicaciones, está definida mediante la restricción a P. Aquí, W es un $\mathcal{H}$-espacio, A es un Γ-espacio, y Γ es un subgrupo de $\mathcal{H}$.

Haremos las siguientes suposiciones acerca de las $\mathcal{H}$-variedades N para que cumplan el teorema de transversalidad:

(♣)

(i) N tiene rebanadas.

(ii) $N/\mathcal{H}$ es Hausdorff.

(iii) Hay exactamente dos clases de isomorfismo de grupos de isotropía, $\{\mathrm{Id}\}$ y H, donde H es un grupo de Lie compacto.

Teorema 7.3.3: [**Teorema de transversalidad equivariante**] *Sea W una representación de Hilbert de $\mathcal{H}$ y sea $f: N \to W$ una $\mathcal{H}$-aplicación diferenciable que tiene las siguientes propiedades:*

(i) f es Fredholm por rebanadas.

(ii) Para cada $x \in f^{-1}(0)$ con $\mathcal{H}_x \neq 1$

(a) $K_x(f)^{\mathcal{H}_x} = 0$ y

(b) *existe una $\mathcal{H}$-aplicación lineal supreyectiva $J_x: K_x(f) \to L_x(f)$;*

(iii) *$f^{-1}(0)/\mathcal{H}$ es compacto;*

(iv) *$f^{-1}(0)^{(H)}/\mathcal{H}$ es un conjunto finito. Entonces existe una perturbación compacta f' de f que es equivariante y transversal a 0, que satisface las condiciones (i)-(iv) y tal que $f'^{-1}(0)$ cumple con*

(v) *$f'^{-1}(0)^{(H)} = f^{-1}(0)^{(H)}$;*

(vi) *el teorema de las rebanadas se cumple para $f'^{-1}(0)$;*

(vii) *si $x \in N$ y $\mathcal{H}_x \neq 1$, la representación por rebanadas en x es $\ker J_x$. Además, si $\Sigma = f'^{-1}(0)^{(H)}/\mathcal{H} = f^{-1}(0)^{(H)}/\mathcal{H}$, entonces $f'^{-1}(0)^{(H)}/\mathcal{H} - \Sigma$ es una variedad diferenciable y Σ es el conjunto de puntos singulares de $f'^{-1}(0)/\mathcal{H}$. Si $x \in f'^{-1}(0)$, denotaremos su clase en Σ por $[x]$. Entonces $\mathcal{H}_x \cong H$ y una vecindad de $[x]$ en $f'^{-1}(0)^{(H)}$ es isomorfa a $\ker J_x/\mathcal{H}_x$, donde a $[0]$ le corresponde $[x]$. En particular, $\dim f'^{-1}(0)^{(H)}/\mathcal{H} = \dim \ker J_x - \dim H$ para toda $x \in f'^{-1}(0)^{(H)}$. Finalmente, $f'^{-1}(0)^{(H)}/\mathcal{H}$ es compacto.*

Dem: La demostración la haremos en 2 pasos.

Paso 1: Hacer a f equivariantemente transversal a 0 en $N^{(H)}$.

Sea $x \in N^{(H)}$ con $f(x) = 0$ y sin pérdida de generalidad, supongamos que $\mathcal{H}_x = H$. Como f es Fredholm por rebanadas, por el Lema 7.3.2 tenemos que el germen en 0 de $f|_{O_x}$, es equivalente al germen en 0 de $(\Phi_x, \lambda f_x)$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que ambos gérmenes son iguales. Sea ρ una función de corte en O_x, y denotemos por σ^x a la única aplicación de N a W que satisface

$$\operatorname{sop} \sigma^x \subset \mathcal{H} \times_H O_x$$
$$\sigma^x|_{O_x} = \rho(J_x - \Phi_x, 0).$$

Sea $f' = f + \sigma^x$ temporalmente. Entonces el germen en 0 de $f'|_{O_x}$ es el germen en 0 de $(J_x, \lambda f_x)$, que es suprayectivo, y por lo tanto transversal a 0. Como f' es equivariante, tenemos que:

(a) f' es transversal a 0 en una $\mathcal{H}$-vecindad de la órbita $\mathcal{H}x$.

(b) Cada punto $z \in \mathcal{H}x$ tiene una rebanada en $f'^{-1}(0)$ cuya representación en rebanadas en $\ker J_x$.

Por (iv), existe un conjunto finito F de puntos de N con grupo de isotropía isomorfo a H, tal que $f^{-1}(0)^{(H)} = \bigcup_{x \in F} \mathcal{H}x$. Como N/H es Hausdorff, existen vecindades $\mathcal{H} \times_{\mathcal{H}_x} O_x$

de $x \in F$ disjuntas dos a dos. Repetimos la construcción anterior para cada punto $x \in F$. Sea

$$f' = f + \sum_{x \in F} \sigma^x.$$

Entonces

$$f' \mid_{O_x} = ((1-\rho)\Phi_x + \rho J_x, \lambda f_x);$$

por lo que el germen en 0 de $f' \mid_{O_x}$ es el mismo que el germen en 0 de $(J_x, \lambda f_x)$ y por lo tanto, f' es transversal a 0 en $0 \in O_x$. Si $z \in O_x$ y $f'(z) = 0$, entonces $\lambda f_x(z) = 0$; por lo que $z \in K_x(f)$. Si z es fijada por $\mathcal{H}$, entonces por (ii)(a), $z = 0$. Esto muestra que f' es transversal a 0 en $N^{(H)}$, ya que f y f' coinciden fuera de

$$\bigcup \mathcal{H} \times_{\mathcal{H}_x} O_x,$$

y $f^{-1}(0)^{(H)}$ está contenida en esta unión.

La función perturbada f' tiene las siguientes propiedades adicionales:

(c) $f'^{-1}(0)^{(H)} = f^{-1}(0)^{(H)}$.

(d) Cada $x \in f'^{-1}(0)^{(H)}$ tiene una vecindad en $f'^{-1}(0)$ y su representación por rebanadas en x es $\ker J_x$.

(e) $\Lambda/\mathcal{H}$ está contenida en un subconjunto compacto del complementeo de

$$\{\, [x] \mid x \in F \,\}$$

en $f'^{-1}(0)/\mathcal{H}$. Donde Λ es el conjunto de puntos de $f'^{-1}(0)$ donde f' no es transversal a 0. Esta propiedad usa la suposición de que $f^{-1}(0)/\mathcal{H}$ es compacto y la forma explícita de f' en las rebanadas donde f y f' difieren.

(f) f' es Fredholm por rebanadas. Esta propiedad se sigue del hecho de que $\sigma^x \mid_{O_x}$ tiene rango de dimensión finita para $x \in F$.

Ahora, denotaremos por f a f'.

Paso 2: Hacer a f transversal a 0 en $N - N^{(H)}$.

Por la propiedad (e), Λ está contenida en la unión de una cantidad finita de vecindades por rebanadas

$$\{\, \mathcal{H} \times O_{x_i} \mid i = 1, 2, \ldots, m \,\}$$

que no intersectan $N^{(H)}$. (Nótese que $\mathcal{H}_x = 1$ para $x \in N - N^{(H)}$.) Supongamos que $f \mid_{O_{x_i}} = (\Phi_{x_i}, \lambda f_{x_i})$, ya que tienen el mismo germen en 0. (Entonces $(w, 0)$ es un valor regular de $f\,|_{O_{x_i}}$ si y sólo si w es un valor regular de Φ_{x_i}.) Sea ρ_i una función de corte para O_{x_i} y $w_i \in L_{x_i}$, y sea

$$\sigma_{w_i}: N \to W$$

la única finción $\mathcal{H}$-invariante, que es igual a $\rho_i w_i$ en O_{x_i}, con soporte en $\mathcal{H} \times O_{x_i}$. Sea

$$f'(w) = f + \sum_{i=1}^{m} \sigma_{w_i}$$

para

$$w = (w_1, \ldots, w_m) \in L_{x_1} \times \cdots \times L_{x_m} = \mathbf{R}^A.$$

(Recordemos que cada L_{x_i} es un espacio vectorial de dimensión finita por que f es Fredholm por rebanadas.) Extendamos cada ρ_i a una aplicación equivariante de N a $\mathbf{R}$ con soporte en $\mathcal{H} \times O_{x_i}$. Sea $D_A(\delta) = \{\, x \in \mathbf{R}^A \mid \|x\| < \delta \,\}$. Definimos

$$\tilde{f}: N \times D_A(\delta) \to W$$

por $\tilde{f}(x, w) = f(w)(x)$ para $x \in N$, $w \in \mathbf{R}^A$. Veremos que $\tilde{f}$ es transversal a 0 para δ suficientemente pequeña.

Fuera de la unión de los soportes de ρ_i (usados para definir σ_{w_i}), $\tilde{f}(\cdot, w) = f$ y f es transversal a 0 en este conjunto. Supongamos que $\tilde{f}(x, w) = 0$ y que x está en el soporte de ρ_i (que está contenido en $\mathcal{H} \times O_{x_i}$). Tenemos que en O_{x_i}, $\tilde{f} = f + \sigma + \rho_i w_i$, donde $\sigma = \sum_{j \neq i} \sigma_{w_j}$ es uniformemente C^1. Como σ es $\mathcal{H}$-equivariante, es uniformemente pequeño en $\mathcal{H} \times O_{x_i}$. Esto garantiza que la diferencial $d(f + \sigma)_x$ permanece transversal a $L_{x_i} \subset W$. La diferencial total $d\tilde{f}_{(x,w)}$ manda al subespacio L_{x_i} de $T_{(x,w)}N \times D_A(\delta)$, en $L_{x_i} \subset W_1$ (ya que x está en el soporte de ρ_i); por lo tanto, $d\tilde{f}_{(x,w)}$ es suprayectiva y $\tilde{f}$ es transversal a 0.

Como $\tilde{f}$ es $\mathcal{H}$-equivariante y $\mathcal{H}$ actúa libremente en $N - N^{(H)}$, por el Teorema de Sard para familias, tenemos que $\tilde{f}(\cdot, w)$ es transversal a 0 para casi toda $w \in D_A(\delta)$. Para aplicar el Teorema de Sard, tenemos que hacer uso de la equivalencia de las $\mathcal{H}$-aplicaciones de $N - N^{(H)}$ a W y las secciones del haz

$$(N - N^{(H)}) \times_{\mathcal{H}} W \to N - N^{(H)}/\mathcal{H}.$$

La conclusión, es que para casi todo w, $\tilde{f}(w)$ es transversal a 0 y

$$\{\, x \in N - N^{(H)} \mid \tilde{f}(w)(x) = 0 \,\}/\mathcal{H}$$

es una variedad diferenciable. Entonces

$$\{\, x \in N - N^{(H)} \mid \tilde{f}(w)(x) = 0 \,\}$$

es una $\mathcal{H}$-variedad diferenciable con rebanadas, ya que la proyección de este espacio sobre su espacio de órbitas, es un $\mathcal{H}$-haz principal. Sea

$$f' = \tilde{f}(\cdot, w)$$

para toda w, para la cual f' es transversal a 0. Entonces f' es una perturbación compacta de f que satisface los requerimientos del teorema.

Como ${f'}^{-1}(0)$ tiene $\mathcal{H}$-rebanadas, una $\mathcal{H}$-vecindad de un punto $x \in {f'}^{-1}(0)$ es $\mathcal{H}$ isomorfo a $\mathcal{H} \times_{\mathcal{H}_x} S_x$, donde S_x es la representación en rebanadas en x. Entonces, una vecindad de $[x]$ en ${f'}^{-1}(0)/\mathcal{H}$ es isomorfa a $S_x/\mathcal{H}_x$. Si $[x] \in \Sigma$, entonces $S_x = \ker J_x$ por la propiedad (iv), y $\mathcal{H}_x$ es isomorfo a H y $\dim S_x/\mathcal{H}_x = \dim \ker J_x - \dim H$. Si $\mathcal{H}_x = 1$, entonces $[x]$ es un punto suave de ${f'}^{-1}(0)/\mathcal{H}$. ∎

4. EL TEOREMA DE TRANSVERSALIDAD .

En esta sección, veremos que las hipótesis del teorema de transversalidad se cumplen para la aplicación

$$R_{-}\colon \mathcal{C} \to \Omega^2_{-}(\mathrm{so}^E) = W.$$

La acción de $\mathcal{G}$ en $\Omega^2_{-}(\mathrm{so}^E)$, definida por $g \cdot s = gsg^{-1}$, para $g \in \mathcal{G}$ y $s \in \Omega^2_{-}(\mathrm{so}^E)$, hace a W una representación de Hilbert de $\mathcal{G}$. La acción de $\mathcal{G}$ en $\mathcal{C}$ es diferenciable, tiene rebanadas y su espacio de órbitas es Hausdorff; además, los grupos de isotropía de esta acción, que no son triviales, son isomorfos a S^1 (ver Teoremas 6.3.2 y 4.3.7.), por lo tanto se cumplen las condiciones (♣) (i)-(iii) para el teorema de transversalidad.

A continuación, verificaremos las condiciones 7.3.3 (i)-(iv), donde $\mathcal{H} = \mathcal{G}$, $N = \mathcal{C}$, $f = R_{-}$ y $W = \Omega^2_{-}(\mathrm{so}^E)$. Nótese que R_{-} es $\mathcal{G}$-equivariante por la definición de la acción de $\mathcal{G}$ en $\mathcal{C}$.

Sea d^E una conexión virtual. Entonces d^E define los siguientes operadores lineales:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^{\mathrm{so}^E}&\colon \Omega^1(\mathrm{so}^E) \to \Omega^2(\mathrm{so}^E)\\ \delta^{\mathrm{so}^E}&\colon \Omega^1(\mathrm{so}^E) \to \Omega^0(\mathrm{so}^E)\\ d_{-} = \mathrm{pr}_{-} \circ \mathrm{d}^{\mathrm{so}^E}&\colon \Omega^1(\mathrm{so}^E) \to \Omega^2_{-}(\mathrm{so}^E). \end{aligned}$$

Estas aplicaciones aparecen en la sucesión fundamental

$$0 \longrightarrow \Omega^0(\mathrm{so}^E) \xrightarrow{\mathrm{d}^{\mathrm{so}^E}} \Omega^1(\mathrm{so}^E) \xrightarrow{\mathrm{pr}_{-} \circ \mathrm{d}^{\mathrm{so}^E}} \Omega^2_{-}(\mathrm{so}^E) \longrightarrow 0$$

que depende de la conexión virtual $\mathrm{d}^E \in \mathcal{C}$. Si d^E es una conexión autodual, la sucesión es la completación de Sobolev del complejo fundamental del Capítulo 4. La sucesión anterior, es un complejo, si d^E es una conexión virtual autodual.

Una conexión es un operador lineal de primer orden, y una conexión virtual difiere de una conexión por un operador de orden cero (un elemento en $\underline{\Omega}^1(\mathrm{so}^E)$), por lo que la sucesión de símbolos anterior, es independiente de la conexión virtual. Como la sucesión de símbolos es exacta para una conexión autodual, es exacta para cualquier conexión virtual. Por lo tanto tenemos el siguiente:

Lema 7.4.1: *El operador lineal*

$$d_- = \mathrm{pr} \circ \mathrm{d}^{\mathrm{so}^E} : \ker \delta^{\mathrm{so}^E} \to \underline{\Omega}^2_-(\mathrm{so}^E)$$

es Fredholm. (Aquí, $\delta^{\mathrm{so}^E} : \underline{\Omega}^1(\mathrm{so}^E) \to \underline{\Omega}^2_-(\mathrm{so}^E)$ es el adjunto de $\mathrm{d}^{\mathrm{so}^E}$ y Fredholm significa que tiene kernel y cokernel de dimensión finita).

Dem: Como la sucesión de símbolos es exacta,

$$D = \delta^{\mathrm{so}^E} \oplus d_- : \underline{\Omega}^1(\mathrm{so}^E) \to \underline{\Omega}^0(\mathrm{so}^E) \oplus \underline{\Omega}^2_-(\mathrm{so}^E)$$

es elíptica, es decir, el símbolo de D es un isomorfismo. Por lo que

$$\begin{aligned} \ker D &= \ker d_- \mid_{\ker \delta^{\mathrm{so}^E}} \\ \operatorname{coker} D &\supset \operatorname{coker} d_- \mid_{\ker \delta^{\mathrm{so}^E}} \end{aligned}$$

son de dimensión finita; por lo tanto $d_- \mid_{\ker \delta^{\mathrm{so}^E}}$ es Fredholm. ∎

Recordemos que para cada $\mathrm{d}^E \in \underline{\mathcal{C}}$ tenemos un isomorfismo $\Omega(\mathrm{d}^E) : \underline{\Omega}^1(\mathrm{so}^E) \to \underline{\mathcal{C}} : A \mapsto \mathrm{d}^E + A$ con $\underline{\Omega}(\mathrm{d}^E)(0) = \mathrm{d}^E$. Definimos

$$\Psi = R_- \circ \underline{\Omega}(\mathrm{d}^E) : \underline{\Omega}^1(\mathrm{so}^E) \to \underline{\Omega}^2_-(\mathrm{so}^E).$$

Como $R(\mathrm{d}^E + A) = R(\mathrm{d}^E) + \mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)} - A \wedge A$ y $\mathrm{d}^{\mathrm{so}^E} = \mathrm{d}^{\mathrm{Hom}(E,E)} \mid_{\underline{\Omega}^1(\mathrm{so}^E)}$, tenemos

$$\begin{aligned} \Psi(A) &= R_-(\mathrm{d}^E) + d_- A - (A \wedge A)_- \\ &= d_- A - (A \wedge A)_- \quad \text{si } \mathrm{d}^E \text{ es autodual,} \end{aligned}$$

de donde tenemos que

$$d_- = d\Psi_0 : \ker \delta \mathrm{so}^E \to \underline{\Omega}^2_-(\mathrm{so}^E);$$

entonces, por el Lema 7.4.1, $d\Psi_0 \mid_{\ker \delta^{\mathrm{so}^E}}$ es Fredholm.

Corolario 7.4.2: *La diferencial* $d(R_-)_{\mathrm{d}^E}$ *en* d^E*, restringida a*

$$d\underline{\Omega}(\mathrm{d}^E)_0 \ker \delta^{\mathbf{so}^E}$$

es Fredholm. ∎

El teorema de las rebanados nos dice que $\underline{\mathcal{G}} \times_\Gamma \mathcal{O}(\mathrm{d}^E, \varepsilon)$ es una vecindad abierta invariante, de la órbita $\underline{\mathcal{G}}\mathrm{d}^E$, donde $\Gamma = \Gamma(\mathrm{d}^E)$ y

$$\mathcal{O}(\mathrm{d}^E, \varepsilon) = \underline{\Omega}(\mathrm{d}^E)\{\, v \in \ker \delta^{\mathbf{so}^E} \mid \|v\| < \varepsilon \,\}.$$

Se sigue que $S_{\mathrm{d}^E} = d\underline{\Omega}(\mathrm{d}^E)_0 \ker \delta^{\mathbf{so}^E}$ es la representación en rebanadas de $\Gamma(\mathrm{d}^E)$.

Corolario 7.4.3: R_- *es Fredholm por rebanadas.* ∎

Supongamos que $\mathrm{d}^E \in \underline{\mathcal{C}}$ es autodual, es decir, $R_-(\mathrm{d}^E) = 0$. Entonces el isomorfismo $d\underline{\Omega}(\mathrm{d}^E)_0$ induce los isomorfismos

$$H^1(\mathrm{d}^E) = \ker \delta^{\mathbf{so}^E} \cap \ker d_- \cong K_{\mathrm{d}^E}(R_-)$$
$$H^2(\mathrm{d}^E) = (\operatorname{im} d_-)^\perp \cong L_{\mathrm{d}^E}(R_-).$$

Supongamos que d^E es una conexión virtual reducible; entonces $\Gamma = \Gamma(\mathrm{d}^E) \cong S^1$. Entonces por la Proposición 7.2.3

(♡)

(a) $H^1(\mathrm{d}^E)^\Gamma = 0 = K_{\mathrm{d}^E}(R_-)^\Gamma$.

(b) Existe una aplicación Γ-lineal

$$J_{\mathrm{d}^E} \colon K_{\mathrm{d}^E}(R_-) = H^1(\mathrm{d}^E) \to H^2(\mathrm{d}^E) = L_{\mathrm{d}^E}(R_-).$$

(c) $\ker J_{\mathrm{d}^E} \cong \mathbf{C}^d$ con $\Gamma = S^1$ actuando mediante la multiplicación compleja, y $\ker J_{\mathrm{d}^E}/\Gamma$ es un cono abierto sobre $\mathbf{C}P^{d-1}$, donde $d = c_1(L)^2[M] - 1$.

Por lo tanto se cumple la condición 7.3.3 (ii).

Nótese que la condición 7.3.3 (iv) quiere decir que el conjunto de conexiones virtuales rducibles autoduales, consta de un número finito de $\underline{\mathcal{G}}$-órbitas (ver Teoremas 6.3.3 y 4.3.7).

Solamente nos falta verificar la condición 7.3.3 (iii), que dice que $f^{-1}(0)/\underline{\mathcal{G}}$ es compacta, suponiendo que el $\mathbf{SO}(3)$-haz E satisface algunas condiciones. La verificación de esta condición la haremos en la siguiente sección.

5. COMPACIDAD DEL ESPACIO DE MODULI VIRTUAL.

En esta sección, veremos que el espacio de móduli $\underset{\sim}{\mathcal{M}} = \underset{\sim}{\mathcal{M}}(E)$ es compacto, suponiendo que $0 < p_1(E)[M] < 4$.

Proposición 7.5.1: [Teorema de la burbuja] [18] *Sea $\{d_i^E\}$ una sucesión de conexiones virtuales autoduales en E. Entonces se cumple alguna de las siguientes afirmaciones:*

1. *Existe una subsucesión $\{d_{i'}^E\}$ y conexiones equivalentes bajo el grupo de norma $\{\tilde{d}_{i'}^E\}$, tales que $\tilde{d}_{i'}^E \to d_\infty^E$, que es una conexión virtual autodual en E.*

2. *Existe un número finito de puntos $x_1, \ldots, x_k$ en M, una subsucesión $\{d_{i'}^E\}$, y conexiones virtuales equivalentes bajo el grupo de norma $\{\tilde{d}_{i'}^E\}$, tales que $\tilde{d}_{i'}^E \to d_\infty^E$, que es una conexión autodual en $E\,|_{M_0}$, donde $M_0 = M - \{x_1, \ldots, x_k\}$.* ∎

Proposición 7.5.2: [19] *Sea d^E una* SO(3)*-conexión autodual en un haz E_0 definido sobre $M_0 = M - \{x_1, \ldots, x_k\}$. Supongamos que $\mathcal{YM}(d^E) < \infty$. Entonces la conexión d^E se extiende de manera diferenciable sobre M.* ∎

Las proposiciones anteriores nos dan el siguiente teorema, que dice que $\mathcal{M}$ es compacta si $p_1(E)$ es suficientemente pequeña.

Teorema 7.5.3: [Teorema de compacidad] *Sea E un* SO(3)*-haz vectorial sobre una variedad M orientada de dimensión 4, y supongamos que $0 \leq p_1(E) \leq 3$. Entonces $\mathcal{M}$ es compacta.*

Dem: Sea $\{[d_i^E]\}$ una sucesión en $\mathcal{M}$. Si $\{[d_i^E]\}$ no tiene subsucesiones convergentes, entonces se cumple el caso 2 de la Proposición 7.5.1, y existe alguna subsucesión $\{d_{i'}^E\}$ y conexiones virtuales equivalentes bajo el grupo de norma $\{\tilde{d}_{i'}^E\}$ tales que, $\tilde{d}_{i'}^E \to d_\infty^E$, que es una conexión autodual en $E\,|_{M_0}$, donde $M_0 = M - \{x_1, \ldots, x_k\}$ para algún conjunto finito de puntos $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset M$. Cada $d_{i'}^E$ es una conexión virtual autodual en E, por lo que

$$\mathcal{YM}(d_{i'}^E) = 2\pi^2 p_1(E).$$

Por el Lema de Fatou tenemos

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathcal{YM}(d_\infty^E) &= \frac{1}{2}\int_{M_0} \|R(d_\infty^E)\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\int_{M_0} \|R(\tilde{d}_{i'}^E)\|^2 \\ &= \mathcal{YM}(\tilde{d}_{i'}^E) = 2\pi^2 p_1(E) < \infty. \end{aligned}$$

Esto quiere decir, que la Proposición 7.5.2 se puede aplicar a d_∞^E, por lo que d_∞^E se extiende a una conexión autodual en un haz E_∞ definido sobre toda M. Sedlacek **[17]** demostró que $w_2(E_\infty) = w_2(E)$, por lo que $p_1(E_\infty) \equiv p_1(E) \pmod 4$ **[15, Teo. B.1.2]**. Como

$$0 \leq \frac{1}{2}\mathcal{YM}(d_\infty^E)/\pi^2 = p_1(E_\infty)$$

tenemos que $0 \leq p_1(E_\infty) \leq p_1(E)$. Bajo la condición $0 \leq p_1(E) \leq 3$, esto implica que $p_1(E_\infty) = p_1(E)$. Por resultados de clasificación de $\mathbf{SO}(3)$-haces vectoriales, tenemos que $E_\infty \cong E$ y $\{[d_i^E]\}$ tiene una subsucesión convergente. ∎

6. DEMOSTRACION DEL TEOREMA 6.1.2 .

En las secciones anteriores verificamos las condiciones del teorema de transversalidad para la aplicación

$$R_-: \underset{\sim}{\mathcal{C}} \to \underset{\sim}{\Omega}_-^2(\mathrm{so}^E).$$

Como consecuencia de ese teorema, existe una perturbación $\underset{\sim}{\mathcal{G}}$-equivariante R'_- que es transversal a cero. Sea

$$\underset{\sim}{\mathcal{A}}'(E) = \{\, d^E \in \underset{\sim}{\mathcal{C}} \mid R'_-(d^E) = 0 \,\} = (R'_-)^{-1}(0)$$
$$\underset{\sim}{\mathcal{M}}'(E) = \underset{\sim}{\mathcal{A}}'(E)/\underset{\sim}{\mathcal{G}}.$$

Por el teorema de transversalidad, la $\underset{\sim}{\mathcal{G}}$-variedad diferenciable $\underset{\sim}{\mathcal{A}}'(E)$ tiene rebanadas. Los grupos de isotropía no triviales de la $\underset{\sim}{\mathcal{G}}$-acción en $\underset{\sim}{\mathcal{C}}$, y por lo tanto en $\underset{\sim}{\mathcal{A}}'(E)$, son todos isomorfos a $H \cong S^1$. Para $x = d^E \in \underset{\sim}{\mathcal{C}}$ con $\Gamma(d^E) = \underset{\sim}{\mathcal{G}}_x \neq 1$ y $R'_-(d^E) = 0$, la representación en rebanadas es J_{d^E}. Por el Teorema 7.3.3, $[d^E]$ tiene una vecindad homeomorfa a $\ker J_{d^E}/\underset{\sim}{\mathcal{G}}_x$, donde $\underset{\sim}{\mathcal{G}}_x = \Gamma(d^E) \cong S^1 = H$. Por ($\heartsuit$) (c), esta vecindad es isomorfa al cono abierto sobre $\mathbf{C}P^{d-1}$, donde $d = c_1(L)^2[M] - 1$. Así, $\underset{\sim}{\mathcal{M}}'(E)$ tiene la misma dimensión que $\ker J_{d^E}/\Gamma(d^E)$ y esta es $\dim \ker J_{d^E} - \dim \Gamma(d^E) = -\mathrm{ind}\, d^E$ (($\heartsuit$) (b)). Además, $\ker J_{d^E}/\Gamma(d^E)$ es isomorfo a un cono abierto sobre $\mathbf{C}P^{d-1}$ (($\heartsuit$) (c)) cuya dimensión es $2d - 1 = -\mathrm{ind}\, d^E$ o $d = (1 - \mathrm{ind}\, d^E)/2 = c_1(L)^2[M] - 1$ (($\heartsuit$) (c)).

El conjunto de singularidades Σ de $\underset{\sim}{\mathcal{M}}'(E)$ (puntos en los cuales $\underset{\sim}{\mathcal{M}}'(E) = R_-^{-1}(0)/\underset{\sim}{\mathcal{G}}$ no es diferenciable) es $R_-^{-1}(0)^{(H)}/\underset{\sim}{\mathcal{G}}$ por el Teorema 7.3.3. Donde H es cualquier grupo de isotropía no trivial de la $\underset{\sim}{\mathcal{G}}$-acción sobre $\underset{\sim}{\mathcal{C}} = \underset{\sim}{\mathcal{C}}(E)$. Por el Teorema 6.3.4, $H \cong S^1$ y

$$\underset{\sim}{\mathcal{A}}(E)_{red} = R_-^{-1}(0)^{(H)}.$$

Entonces $\Sigma = R_-^{-1}(0)^{(H)}/\underset{\sim}{\mathcal{G}} = \underset{\sim}{\mathcal{A}}(E)_{red}/\underset{\sim}{\mathcal{G}}$. Por el Teorema 6.3.3, $\underset{\sim}{\mathcal{A}}(E)_{red}/\underset{\sim}{\mathcal{G}} = \mathcal{S}(L)$ y la cardinalidad $\rho(L)$ de este conjunto está dada por

$$\rho(L) = \mu(c_1(L)) \cdot |\mathrm{H}_1(M; \mathbf{Z})|.$$

Lo único que falta verificar en el Teorema 7.1.2, es que $\underset{\sim}{\mathcal{M}}'(E)$ es compacto. Esto es una consecuencia del teorema de perturbación de Donalson:

Teorema 7.6.1: [2, p. 293] *Si $R_-+\sigma$ es una perturbación compacta de R_- sobre $\mathcal{O}(\mathrm{d}^E,\varepsilon)$, entonces para cualquier $r>0$ y cualquier conjunto cerrado $\tilde{N}\subset\mathcal{O}(\mathrm{d}^E,\varepsilon)$, el conjunto*

$$\{\,\mathrm{d}^E+A\in\tilde{N}\mid \|(R_-+\sigma)(\mathrm{d}^E+A)\|_3\leq r\,\}$$

es compacto en la topología L^2_3 en $\mathcal{O}(\mathrm{d}^E,\varepsilon)$. ∎

CAPÍTULO 8

EL TEOREMA DE DONALSON

Es el mismo gusto que se deleita con una demostración matemática el que aprecia la semejanza entre una pintura y su modelo... Su fundamento, inalterable y eterno, reside en la naturaleza. Es por tanto, sujeto de la curiosidad de la razón.

— SIR J. REYNOLDS, *Discourses on Art.* (1797)

1. INTRODUCCION .

En este capítulo, haremos uso de todos los resultados anteriores para demostrar un teorema sobre las formas de intersección de variedades diferenciables de dimensión cuatro.

2. EL TEOREMA PRINCIPAL .

Sea M una variedad diferenciable, cerrada, orientada de dimensión 4, con forma de intersección positiva definida y con $\mathrm{H}_1(M;\mathbf{Z}_2) = 0$. Sea L haz vectorial lineal complejo sobre M con $c_1(L)^2[M] > 1$. Formemos el haz asociado $E = L \oplus \epsilon$. Usaremos el material de los Capítulos 5 y 6 para formar el espacio de móduli virtual perturbado $\underline{\mathcal{M}}'$ de conexiones virtuales autoduales en E. Bajo ciertas suposiciones, este espacio es compacto. Al remover las vecindades de las clases de equivalencia, de las conexiones virtuales reducibles autoduales (que corresponden a las singularidades de $\underline{\mathcal{M}}'$), se produce un cobordismo no orientable del espacio de móduli virtual perturbado.

Teorema 8.2.1: [6, Teo. 5.6] *Sea M una variedad diferenciable, cerrada, orientada, de dimensión cuatro, con forma de intersección positiva definida y $\mathrm{H}_1(M;\mathbf{Z}_2) = 0$. Supongamos que L es un haz lineal complejo sobre M con $c_1(L)^2[M] > 1$ y que el espacio de móduli virtual $\underline{\mathcal{M}}(E)$ de $E = L \oplus \epsilon$ es compacto. Entonces $\mu(e)$ es par, para $e = c_1(L)$.*

Dem: Si $e^2[M] > 1$, entonces el espacio de móduli virtual perturbado $\underline{\mathcal{M}}'(E)$ es de dimensión $2d-1$, donde $d = e^2[M] - 1$ con $\mu(e) \cdot |\mathrm{H}_1(M;\mathbf{Z})|$ puntos singulares, cada uno de los cuales tiene una vecindad que es un cono sobre el espacio proyectivo complejo $\mathbf{C}P^{d-1}$ (ver

Teorema 7.1.2). Al quitar los interiores de los conos, obtenemos una variedad diferenciable W de dimensión $2d-1$, cuya frontera es la unión disjunta de copias de $\mathbf{C}P^{d-1}$. Observemos que

$$\mu(e)\cdot|\mathrm{H}_1(M;\mathbf{Z})| \equiv \mu(e) \quad (\mathrm{mod}\ 2).$$

Para cualquier entero k, $\mathbf{C}P^{2k}$ tiene característica de Euler impar, por lo tanto, un número impar de $\mathbf{C}P^{2k}$ no puede ser frontera de una variedad diferenciable, por lo tanto, si $e^2[M]$ es par, $\mu(e)$ debe ser par.

Veamos que $e^2[M]$ es par. Fijemos un punto base $x \in M$ y consideremos

$$\mathcal{G}_0 = \{\, g \in \mathcal{G} \mid g\,|_{E_x} = \mathrm{Id}\colon E_x \to E_x \,\}.$$

Entonces $\mathcal{G}_0$ es normal en $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}/\mathcal{G}_0 \cong \mathbf{SO}(E_x) \cong \mathbf{SO}(3)$ y $\mathcal{G}_0$ actúa libremente sobre el espacio $\tilde{\mathcal{A}}'$ de las conexiones virtuales irreducibles autoduales perturbadas en E. La fibración $\pi\colon \tilde{\mathcal{A}}' \to \tilde{\mathcal{M}}'$ se factoriza en

$$\tilde{\mathcal{A}}' \xrightarrow{\pi_0} \tilde{\mathcal{A}}'/\mathcal{G}_0 \xrightarrow{\pi_1} \tilde{\mathcal{M}}',$$

donde π_0 es la proyección de un $\mathcal{G}_0$-haz principal, y π_1 es la proyección de un $\mathbf{SO}(3)$-haz principal.

Sea d^E una conexión virtual reducible autodual en E. Por el Teorema 6.4.2 y la demostración del Teorema 7.1.2, tenemos que el Teorema de las rebanadas se cumple para la $\mathcal{G}$-acción sobre $\mathcal{A}'$. Por ($\heartsuit$) (c), la representación por rebanadas de la $\mathcal{G}$-acción sobre $\mathcal{A}'$ en d^E es $\mathcal{O} = \ker J_{\mathrm{d}^E} \cong \mathbf{C}^d$ con $\Gamma(\mathrm{d}^E) = S^1$, que actúa mediante la multiplicación compleja. Sea Σ una esfera centrada en 0 en $\mathcal{O}$, que es invariante bajo la acción de $\Gamma(\mathrm{d}^E) = S^1$. (Por el teorema de las rebanadas, podemos considerar a $\mathcal{O}$ como una vecindad $\Gamma(\mathrm{d}^E)$-invariante de d^E en $\mathcal{A}'$, donde 0 corresponde a d^E).

Si $g \in \mathcal{G}$ mueve una conexión virtual en Σ a otra conexión virtual en Σ, entonces $g \in \Gamma(\mathrm{d}^E)$, ya que $\mathcal{O}$ es una rebanada. Para dicha g, $g\Sigma = \Sigma$. Las conexiones virtuales reducibles d^E, se descomponen como $\mathrm{d}^L \oplus d$ en $L \oplus \epsilon$, y la acción de $\Gamma(\mathrm{d}^E) = S^1$ es mediante $\mathbf{SO}(2)$ sobre L y trivialmente sobre ϵ (ver demostración del Teorema 4.3.5). Entonces $\Gamma(\mathrm{d}^E) \cap \mathcal{G}_0 = 1$. Esto implica que cada $g \in \mathcal{G}_0$ con $g \neq 1$, mueve a Σ fuera de si misma, y que la proyección $\pi_0\colon \tilde{\mathcal{A}}' \to \tilde{\mathcal{A}}'/\mathcal{G}_0$ es inyectiva sobre Σ. En $\tilde{\mathcal{A}}'/\mathcal{G}_0$, un elemento $g \in \mathbf{SO}(3)$ manda a una conexión virtual en $\pi_0(\Sigma)$ a otra conexión virtual en $\pi_0(\Sigma)$, si y sólo si $g \in \Gamma(\mathrm{d}^E)$ por la misma razón que antes.

Sea $d^{E'} \in \Sigma$ una conexión virtual, y consideremos las $\mathbf{SO}(3)$-órbitas $O = \mathbf{SO}(3)(\pi_0(d^{E'})$. Entonces $O \cap \pi_0(\Sigma) = \Gamma(d^E)(\pi_0(d^{E'}))$ es un círculo. Esto muestra que $\Sigma \times_{S^1} \mathbf{SO}(3) \cong \pi_1^{-1}\pi(\Sigma)$ y que el $\mathbf{SO}(3)$-haz principal ξ dado por

$$\pi^{-1}(\pi(\Sigma)) \to \pi(\Sigma) \cong \mathbf{C}P^{d-1}$$

se reduce a un S^1-haz

$$\Sigma = \pi_0(\Sigma) \to \pi(\Sigma) \cong \mathbf{C}P^{d-1},$$

que es el haz de Hopf η. Esto quiere decir que la segunda clase de Stiefel-Whitney $w_2(\xi')$ del $\mathbf{SO}(3)$-haz

$$\xi' = \xi \times_{\mathbf{SO}(3)} \mathbf{R}^3$$

asociado con ξ es la misma que la segunda clase de Stiefel-Whitney $w_2(\eta')$ del $\mathbf{SO}(3)$-haz

$$\eta' = \eta \times_{S^1} \mathbf{R}^3$$

asociado con η. Aquí, $S^1 = \mathbf{SO}(2)$, actúa sobre $\mathbf{R}^3$ mediante el homomorfismo

$$\mathbf{SO}(2) \to \mathbf{SO}(3) \colon A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, tenemos que $\eta' = \eta'' \oplus \epsilon$, donde η'' es el $\mathbf{SO}(2)$-haz vectorial canónico sobre $\mathbf{C}P^{d-1}$, cuya segunda clase de Stiefel-Whitney $w_2(\eta'')$ genera a $\mathbf{H}^2(\mathbf{C}P^{d-1}; \mathbf{Z}_2)$. Pero $w_2(\eta'') = w_2(\eta'' \oplus \epsilon)$ y $w_2(\eta'' \oplus \epsilon) = w_2(\eta') = w_2(\xi')$. Entonces $w_2(\xi')^{d-1} = w_2(\eta'')^{d-1}$ genera a $\mathbf{H}^{2(d-1)}(\mathbf{C}P^{d-1}; \mathbf{Z}_2)$, por lo que

$$w_2(\xi')^{d-1}[\mathbf{C}P^{d-1}] \equiv 1 \pmod 2.$$

Sea ω el $\mathbf{SO}(3)$-haz principal $\pi^{-1}W \to W$, λ el $\mathbf{SO}(2)$-haz principal $\partial(\pi^{-1W} \to \partial W$ e $i \colon \partial W \to W$ la inclusión. Entonces $i^* w_2(\omega') = w_2(\lambda')$. (Nuevamente, los haces primados son los $\mathbf{SO}(3)$-haces asociados). Entonces, calculando mod 2,

$$\begin{aligned}
\mu(e) &= \mu(e) w_2(\xi')^{d-1}[\mathbf{C}P^{d-1}] \\
&= w_2(\lambda')^{d-1}[\partial W] \\
&= i^* w_2(\omega')^{d-1}[\partial W] \\
&= w_2(\omega')^{d-1}[i_* \partial W] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

por lo tanto $\mu(e)$ es par. ∎

Aufwiedersehen!

APÉNDICE

EL TEOREMA DE COEFICIENTES UNIVERSALES

1. PRELIMINARES .

Antes de enunciar el teorema, veremos algunas definiciones y proposiciones preliminares.

Proposición 1.1: *Sean M, N, P, Q módulos sobre el anillo conmutativo con uno R. Si tenemos la sucesión exacta*

$$M \xrightarrow{g} N \xrightarrow{f} P \longrightarrow 0$$

entonces la siguiente sucesión es exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P,Q) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(N,Q) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(M,Q)$$

donde $f^*(h) = hf$. Esto se expresa diciendo que el funtor $\mathrm{Hom}_R(\,\cdot\,,Q)$ *es* **exacto izquierdo.** *Si la sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{g} N \xrightarrow{f} P \longrightarrow 0$$

se escinde, entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P,Q) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(N,Q) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(M,Q) \longrightarrow 0$$

se escinde y por tanto es exacta. La sucesión exacta dada se escinde cuando P es libre sobre R. ∎

Proposición 1.2: *Sea Q un módulo fijo sobre el anillo R. Entonces existe una sucesión de funtores contravariantes $\mathrm{Ext}^n(\,\cdot\,,Q)$ en la categoría de módulos sobre R tal que dada una sucesión exacta de módulos*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

existe una sucesión exacta larga

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P,Q) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N,Q) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,Q) &\xrightarrow{\Delta} \mathrm{Ext}^1(P,Q) \\ \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(N,Q) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(M,Q) &\xrightarrow{\Delta} \mathrm{Ext}^2(P,Q) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

con la propiedad de que $\mathrm{Ext}^n(N,Q) = O$ si N es libre sobre R. ∎

Si R es un dominio de ideales principales, el módulo $\mathrm{Ext}^1(M,Q) = \mathrm{Ext}(M,Q)$ puede calcularse de la siguiente manera: Consideremos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

con F libre sobre R. Entonces

$$\mathrm{Ext}(M,Q) = \mathrm{Hom}(K,Q)/i^* \,\mathrm{Hom}(F,Q)$$

es decir, $\mathrm{Ext}(M,Q)$ es el cokernel de i^*.

2. EL TEOREMA DE COEFICIENTES UNIVERSALES .

Teorema 2.1: *Sea R un anillo conmutativo con uno, cuyo grupo abeliano subyacente consideraremos módulo sobre $\mathbf{Z}$. Entonces existe una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}(H_{n-1}(X,A;\mathbf{Z}),R) \longrightarrow H^n(X,A;R) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(H_n(X,A;\mathbf{Z}),R) \longrightarrow 0$$

Dem: Escribiremos S_n, B_n, Z_n, H_n por $S_n(X,A;\mathbf{Z})$, etc. Tenemos sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow B_n \xrightarrow{j} Z_n \xrightarrow{q} H_n \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow Z_n \xrightarrow{i} S_n \xrightarrow{D_n} B_{n-1} \longrightarrow 0$$

(Denotamos con D_n a ∂_n con el codominio restringido, es decir, $\partial_n = ijD_n$). La segunda sucesión se escinde, pues B_{n-1} es submódulo de S_n que es libre sobre $\mathbf{Z}$, que es un dominio de ideales principales.

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & \operatorname{Hom}(S_{n+1},R) & & \\
\operatorname{Hom}(H_n,R) \arrow[r, "q^*"] & \operatorname{Hom}(Z_n,R) \arrow[u] \arrow[r, "j^*"] & \operatorname{Hom}(B_n,R) \arrow[u, "D^*_{n+1}"'] \arrow[r, "\Delta"] & \operatorname{Ext}(H_n,R) \arrow[r] & 0 \\
0 & \operatorname{Hom}(S_n,R) \arrow[u, "i^*"'] & 0 \arrow[u] & & \\
\operatorname{Hom}(Z_{n-1},R) \arrow[u] \arrow[r, "j^*"] & \operatorname{Hom}(B_{n-1},R) \arrow[u, "D^*_n"'] \arrow[r, "\Delta"] & \operatorname{Ext}(H_{n-1},R) \arrow[r] & 0 & \\
\operatorname{Hom}(S_{n-1},R) \arrow[u, "i^*"'] & 0 \arrow[u] & & &
\end{tikzcd}$$

con renglones y columnas exactos. Definimos

$$F_0 = \ker(\operatorname{Hom}(S_n,R) \xrightarrow{i^*} \operatorname{Hom}(Z_n,R))$$
$$F_1 = \ker(\operatorname{Hom}(S_n,R) \xrightarrow{j^*i^*} \operatorname{Hom}(B_n,R))$$

Tenemos $F_0 \subset F_1$. Como $\partial^*_{n+1} = D^*_{n+1}j^*i^*$ y D^*_{n+1} es inyectiva, se sigue que $\ker\partial^*_{n+1} = F_1$.

Veamos ahora que existe un epimorfismo s que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}(H_n,R) \arrow[r, "q^*"] & \operatorname{Hom}(Z_n,R) \arrow[u] \arrow[r, "j^*"] & \operatorname{Hom}(B_n,R) \\
0 \arrow[r] & F_1 \arrow[u, "s"'] \arrow[r, hook] & \operatorname{Hom}(S_n,R) \arrow[u, "i^*"'] &
\end{tikzcd}$$

Por definición de F_1, tenemos que $i^*(F_1) \subset \ker j^*$. Ahora, si $f \in \ker j^*$ existe $g \in \mathrm{Hom}(S_n, R)$ tal que $i^*(g) = f$, entonces $j^*i^*(g) = j^*(f) = 0$, por tanto $g \in F_1$, es decir $f \in i^*(F_1)$. De aquí, se sigue que $i^*(F_1) = \ker j^* = \mathrm{im}\, q^*$, por tanto $s = (q^*)^{-1}i^*$ es un epimorfismo como deseamos. ¿Cuál es el kernel de s? Tenemos $s(f) = 0 \iff q^*s(f) = 0 \iff i^*(f) = 0 \iff f \in F_0$, de donde $\ker s = F_0$.

Por exactitud de la columna central, tenemos $\mathrm{Hom}(B_{n-1}, R) \cong \mathrm{im}\, D_n = F_0$ bajo D_n. Llamaremos $r\colon F_0 \to \mathrm{Hom}(B_{n-1}, R)$ a la inversa de este isomorfismo, entonces

$$F_0 \xrightarrow{\Delta r} \mathrm{Ext}(H_{n-1}, R)$$

es un epimorfismo, a cuyo kernel llamamos K. Entonces

$$\begin{aligned}
K = \ker(\Delta r) \overset{r}{\cong} \ker\Delta &= \mathrm{im}\, j^* && r \text{ es isomorfismo, exactitud}\\
&= \mathrm{im}\, j^*i^* && i^* \text{ es suprayectiva}\\
&\overset{D_n}{\cong} D_n(\mathrm{im}\, j^*i^*) && D_n \text{ es inyectiva}\\
&= \mathrm{im}\, D_n j^* i^* && \\
&= \mathrm{im}\, \partial_n^* && \text{conmutatividad}
\end{aligned}$$

Como $D_n r = id_{F_0}$, tenemos $K = \mathrm{im}\, \partial_n^*$.

Tenemos entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & K \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d] & \mathrm{im}\, \partial_n^* \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & F_0 \arrow[r, hook] \arrow[d, "\Delta r"] & F_1 \arrow[r] \arrow[d] & F_1/F_0 \arrow[r] \arrow[d, "\bar{s}"] & 0\\
 & \mathrm{Ext}(H_{n-1}, R) \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d] & F_1/\mathrm{im}\, \partial_n^* \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(H_n, R) & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

donde $\bar{s}$ es un isomorfismo. Los morfismos α', β' que hacen conmutar el diagrama son únicos. Por ejemplo, dado $f \in \mathrm{Ext}(H_{n-1}, R)$, sea $g \in F_0$ tal que $\Delta r(g) = f$. Definimos $\beta'(f) = g + \mathrm{im}\, \partial_n^*$. Si $g' \in F_0$ es tal que $\Delta r(g') = f$, entonces $g - g' \in K = \mathrm{im}\, \partial_n^*$, por tanto $g + \mathrm{im}\, \partial_n^* = g' + \mathrm{im}\, \partial_n^*$, es decir β' está bien definida. Ahora, dada $f + \mathrm{im}\, \partial_n^*$, definimos $\alpha'(f + \mathrm{im}\, \partial_n^*) = \bar{s}(f + F_0) = s(f)$. Si $f - f' \in \mathrm{im}\, \partial_n^* = K \subset F_0 = \ker s$, entonces $s(f) = s(f')$. Por cacería de diagramas, es inmediato que la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(H_{n-1}, R) \xrightarrow{\beta'} \ker\partial_{n+1}^*/\mathrm{im}\, \partial_n^* \xrightarrow{\alpha'} \mathrm{Hom}(H_n, R) \longrightarrow 0$$

es exacta.

Ahora, consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(S_n, R) & \xrightarrow{l} & \mathrm{Hom}_R(S_n(X, A; R), R) \\ \uparrow{\partial_n^*} & & \uparrow{\delta^{n-1}} \\ \mathrm{Hom}(S_{n-1}, R) & \xrightarrow{l} & \mathrm{Hom}_R(S_{n-1}(X, A; R), R) \end{array}$$

donde $l(f)(\sigma) = f(\sigma)$ tiene inversa $k(g)(\sigma) = g(\sigma)$, es decir l define un isomorfismo de complejos, de allí

$$\ker\partial_{n+1}^* / \operatorname{im} \partial_n^* \cong \ker\delta^n / \operatorname{im} \delta^{n-1} = H^n(X, A; R)$$

y por tanto

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(H_{n-1}, R) \xrightarrow{\beta} H^n(X, A; R) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Hom}(H_n, R) \longrightarrow 0$$

es exacta, con $\beta = l\beta'$ y $\alpha = \alpha' k$. ∎

Por ejemplo, calculemos la cohomología de las esferas de dimensión ≥ 1 sobre el anillo R, a partir de

$$H_k(\mathbf{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbf{Z} & k = n, 0 \\ 0 & k \neq n, 0 \end{cases} .$$

Como $\mathrm{Ext}(0, R) = R$, el teorema nos dice que $H^n(\mathbf{S}^n; R) \cong \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}, R) \cong R$; y como $\mathrm{Hom}(0, R) = 0$, aplicando el teorema con $n + 1$, llegamos a que

$$H^{n+1}(\mathbf{S}^n; R) \cong \mathrm{Ext}(H_n(\mathbf{S}^n), R) = 0$$

pues $H_n(\mathbf{S}^n)$ es libre sobre $\mathbf{Z}$.

Si $k > 0$ y distinto de $n, n+1$, es claro que $H^k(\mathbf{S}^n; R) = 0$. Ahora, como cualquier espacio conexo por trayectorias, sabemos $H^0(\mathbf{S}^n; R) \cong R$. De todo ésto se sigue

$$H^k(\mathbf{S}^n; R) \cong \begin{cases} R & k = n, 0 \\ 0 & k \neq n, 0 \end{cases}$$

BIBLIOGRAFÍA

El universo (que otros llaman la Biblioteca)...
— BORGES (1941)

[1] M. F. Atiyah e I.M. Singer. *The index of elliptic operators: III.* Ann. Math., **87**, 546-604, 1968.

[2] S. K. Donalson. *An application of gauge teory in four dimensional topology.* J. Differ. Geom., **18**, 279-315, 1983.

[3] S. K. Donalson. *Self-dual connections and the topology of smooth 4-manifolds.* Bull. Am. Math. Soc., **8**, 81-3, 1983.

[4] B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko y S. P. Novikov. *Modern geometry–Methods and applications.* Vol. 2, Springer-Verlag, New York, 1984.

[5] M. H. Freedman. *The topology of 4-dimensional manifolds.* J. Differ. Geom., **17** 357-453, 1982.

[6] R. Fintushel y R. J. Stern. *SO(3)-conections and the topology of 4-manifolds.* J. Differ. Geom., **30**, 523-39, 1984.

[7] D. S. Freed y K. K. Uhlenbeck. *Instantons and four-manifolds.* Mathematical Sciences Research Institute Publications, Vol. 1, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1984.

[8] P. Griffiths y J. Harris. *Principles of algebraic geometry.* Wiley-Interscience, New York, 1978.

[9] L. Hörmander. *Linear partial differential operators.* Springer-Verlag, New York, 1964.

[10] D. Husemoller. *Fibre bundles.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1975.

[11] S. Kobayashi y K. Nomizu. *Foundations of differential geometry.* Vol. 1, John Wiley & Sons. Inc., New York, 1963.

[12] H. B. Lawson, Jr. *The teory of gauge fields in four dimensions.* CBMS Regional Conference Series in Mathematics, no. 58. American Mathematical Society, Providence, RI, 1985.

[13] J. W. Milnor y D. Husemoller. *Symmetric bilinear forms.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grezgebiete, Volume 73, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1973.

[14] J. W. Milnor y J. D. Stashef. *Characteristic clases.* Annals af Mathematics Studies, no. 76. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1974.

[15] T. Petrie y J. Randall. *Connections, definite forms, and four-manifolds.* Clarendon Press, Oxford, 1990.

[16] V. A. Rochlin. *New results in the teory of 4-dimensional manifolds.* Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 1984.

[17] S. Sedlacek. *A direct method for minimizing the Yang-Mills funcional.* Commun. Math. Phys., **86** 515-28, 1982.

[18] K. K. Uhlenbeck. *Connections with L^p bounds on curvature.* Commun. Math. Phys., **83**, 31-42,1982.

[19] K. K. Uhlenbeck. *Removable singularities in Yang-Mills fields.* Commun. Math. Phys., **83**, 11-30, 1982.

[20] J. H. C. Whitehead. *On simply-connected 4-dimensional polyedra.* Comment. Math. Helv., **22**, 48-92, 1949.