00365

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Teoría de Morse y Homología de Variedades

Tesis

que para obtener el grado académico de

Maestro en Ciencias (Matemáticas)

presenta

Gil Salgado González

Director de Tesis: Dr. Marcelo Alberto Aguilar González

1993

Indice

Introducción

Un problema central en Geometría Diferencial es el de clasificar variedades, para esto, normalmente se busca la manera de asociarle algún objeto a la variedad con la propiedad de que si dos variedades son *iguales* entonces los correspondientes objetos asociados también sean *iguales*, al hacer esto, el problema original se transforma, en cierto sentido, en cómo calcular estos invariantes.

En esta Tesis, el objetivo es describir como asociarle a una variedad un complejo de cadenas (*el complejo de Witten*) y demostrar que la homología asociada a este complejo de cadenas *es* la homología singular, este complejo de cadenas se construye a partir de los puntos críticos de una función de Morse en la variedad y las orbitas del flujo asociado que los conectan.

En los capítulos 1 y 2 se revisa el material clásico de Teoría de Morse, como el Lema de Morse, y cómo cambia el tipo de homotopía de los niveles asociados al pasar por un punto crítico, además de estudiar la relación de la topología de la variedad y el número de puntos críticos de una función de Morse (*Desigualdades de Morse*).

En el capítulo 3 se construye el *complejo de Witten* y se demuestra que la homología asociada coincide con la homología singular además de ejemplificar con algunos calculos.

La idea de los apéndices es demostrar resultados que se usan en los capítulos.

Capítulo 1

Dos Teoremas importantes

Sea $f : M \longrightarrow R$ una función diferenciable de una n-variedad M en R, $p \in M$ es un *punto crítico* de f si $df_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}R$ es la transformación cero, esto es, si x es una parametrización de M en p, entonces p es punto crítico si y sólo si

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}p = \frac{\partial f}{\partial x_2}p = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}p = 0$$

decimos además que p es *no degenerado* si la matriz A con entradas $(A_{ij}) = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}p)$ es no singular, más adelante veremos que esta definición no depende del la parametrización escogida.

Si p es un punto crítico de f podemos definir una funcional simétrica y bilineal Hf_p en T_pM llamada el *Hessiano* de f en p, si $v, w \in T_pM$ podemos tomar extensiones $\tilde{v}$ y $\tilde{w}$ a campos vectoriales en la imagen de la parametrización tales que $\tilde{v}(p) = v$ y $\tilde{w}(p) = w$, definimos entonces $Hf_p(v, w) = \tilde{v}(p)\tilde{w}(f)$, notemos entonces que

$$\begin{aligned} Hf_p(v,w) - Hf_p(w,v) &= \tilde{v}(p)\tilde{w}(f) - \tilde{w}(p)\tilde{v}(f) \\ &= [\tilde{v}, \tilde{w}]_p(f) = 0 \end{aligned}$$

ya que p es punto crítico y podemos pensar a $[\tilde{v}, \tilde{w}]_p$ como un vector tangente actuando en f, obtenemos que Hf_p es simétrica.

Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ es una parametrización local de M en p entonces $v = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ y $w = \sum b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ por lo que

$$Hf_p(v,w) = \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

y entonces la matriz $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} p)$ representa a Hf_p con respecto a la base $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$.

Podemos ahora hablar del *índice* y *nulidad* de la funcional bilineal Hf_p en T_pM.

De manera general el índice de una funcional bilineal H sobre un espacio vectorial V es

$$ind(H) = max\{dim(W) \mid W < V, H \text{ es definida negativa en } W\}$$

y la *nulidad* es

$$nulidad = dim\{v \in V \mid H(v,w) = 0 \; \forall w \in V\}$$

Entonces p es no degenerado si y sólo si $nulidad(Hf_p) = 0$ en T_pM, al índice de Hf_p en T_pM lo llamaremos el *índice* de f en p.

Lema
Sea f una función de clase C^∞ en una vecindad convexa V del 0 en R^n con $f(0) = 0$ entonces

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_1^n x_i g_i(x_1, \ldots, x_n)$$

para algunas g_i de clase C^∞ definidas en V con $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$
Dem.

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) &= \int_0^1 \frac{df(tx_1, \ldots, tx_n)}{dt} dt \\ &= \int_0^1 \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \ldots, tx_n) x_i dt \end{aligned}$$

basta entonces con definir $g_i(x_1,\ldots,x_n)=\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1,\ldots,tx_n)dt$ y observar que $g_i(0)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ ■

demostraremos ahora un resultado bastante útil en todo lo que sigue

Lema (de Morse)
Sea p un punto crítico no degenerado de f, entonces existe un sistema local de coordenadas $(y_1,\ldots,y_n)$ en una vecindad U de p con $y_i(p)=0$ y tal que

$$f=f(p)-y_1^2-\cdots-y_\lambda^2+y_{\lambda+1}^2+\cdots+y_n^2$$

en U donde λ es el índice de f en p.
Dem.
Podemos suponer sin perdida de generalidad que $p=0$ y que $f(p)=0$, por el lema anterior f se puede escribir como

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{j=1}^n x_j g_j(x_1,\ldots,x_n)$$

y como 0 es punto crítico $g_j(0)=\frac{\partial f}{\partial x_j}(0)=0$ a las g_j la podemos escribir como

$$g_j(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{j=1}^n x_i h_{ij}(x_1,\ldots,x_n)$$

para ciertas h_{ij} (de hecho $h_{ij}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}$) se tiene entonces que

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i,j} x_i x_j h_{ij}(x_1,\ldots,x_n)$$

Podemos suponer sin perder generalidad que $h_{ij}=h_{ji}$, ya que si no, basta con definir $\overline{h_{ij}}=\frac{1}{2}(h_{ij}+h_{ji})$ y entonces $f=\sum_{i,j} x_i x_j \overline{h_{ij}}$, notemos ademas que, $\overline{h_{ij}}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}$, y por lo tanto $(\overline{h_{ij}})$ es no singular.
Como $(h_{ij}(0))$ es no singular, podemos suponer que $h_{11}\neq 0$, en caso de que no, hacemos lo que sigue: si $h_{ii}(0)\neq 0$ con $i\neq 1$ basta con permutar, si no, entonces algun $h_{ij}(0)\neq 0$, introducimos entonces nuevas coordenadas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} y_i &= x_i + x_j \\ y_j &= x_i - x_j \\ y_k &= x_k \ \text{ si } k \neq i,j \end{aligned}$$

con este cambio de variables obtenemos que $g_{ii}(0) \neq 0$ por lo que podemos ahora definir

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{|h_{11}(0)|}(x_1 + \frac{\sum_{j>1} h_{1j}x_j}{|h_{11}(0)|}) \\ y_k &= x_k \text{ si } k = 2, \ldots, n \end{aligned}$$

si ademas definimos

$$g_{ij}(y_1, \ldots, y_n) = h_{ij}(x_1, \ldots, x_n) - \frac{h_{1i}h_{1j}}{|h_{11}(0)|}$$

entonces

$$f = \sum_{i,j} h_{ij}x_ix_j = \pm y_1^2 + \sum_{i,j>1}^{n} g_{ij}y_iy_j$$

denotemos por el momento a $\sqrt{|h_{11}(0)|}$ por a entonces

$$\begin{aligned} y_1^2 &= (x_1 + \frac{\sum_{j>1} h_{1j}x_j}{a})^2 a \\ &= ax_1^2 + 2\sum_{j>1} h_{1j}x_jx_1 + \frac{1}{a}\sum_{i,j>1} h_{1j}h_{1i}x_ix_j \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\pm y_1^2 + \sum_{i,j>1}^{n} g_{ij} y_i y_j &= a x_1^2 + 2\sum_{j>1} h_{1j} x_j x_1 + \frac{1}{a}\sum_{i,j>1} h_{1j} h_{1i} x_i x_j \\
&\quad + \sum_{i,j>1}^{n} g_{ij} y_i y_j \\
&= a x_1^2 + 2\sum_{j>1} h_{1j} x_j x_1 + \sum_{i,j>1} \left(\frac{1}{a} h_{1j} h_{1i} + g_{ij}\right) x_i x_j \\
&= a x_1^2 + 2\sum_{j>1} h_{1j} x_j x_1 \\
&\quad + \sum_{i,j>1} \left(\frac{1}{a} h_{1j} h_{1i} + h_{ij} - \frac{1}{a} h_{1j} h_{1i}\right) x_i x_j \\
&= \sum_{i,j} h_{ij} x_i x_j = f
\end{aligned}$$

supongamos ahora que

$$f = \pm y_1^2 + \cdots + \pm y_{r-1}^2 + \sum_{i,j>r} u_i u_j H_{ij}(u_1, \ldots, u_n)$$

de nueva cuenta podemos suponer que $H_{rr}(0) \neq 0$ y escribamos $H_{rr} = |H_{rr}(0)|^{\frac{1}{2}}$ definamos ahora

$$\begin{aligned}
v_i &= u_i \text{ si } i \neq r \\
v_r &= H_{rr}\Big(u_r + \sum_{i>r} \frac{u_i H_{ir}(u_1, \ldots, u_n)}{H_{rr}^2}\Big)
\end{aligned}$$

de nueva cuenta podemos definir

$$G_{ij}(v_1, \ldots, v_n) = H_{ij}(u_1, \ldots, u_n) - \frac{H_{ri} H_{rj}}{H_{rr}}$$

y obtenemos que

$$f = \sum_{i \leq r} \pm v_i^2 + \sum_{i,j>r} v_i v_j G_{ij}$$

como conclusión obtenemos que

$$f = f(p) - y_1^2 - \cdots - y_\lambda^2 + y_{\lambda+1}^2 + \cdots + y_n^2$$

demostraremos ahora que λ es el índice de f en p.
Notemos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial z_i} = \begin{cases} -2 & \text{si } i = j \leq \lambda \\ 2 & \text{si } i = j > \lambda \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

esto es si $\beta = \{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ entonces

$$[Hf_p]_\beta = \begin{pmatrix} -2 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & \cdot & \\ & & -2 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 2 \end{pmatrix}$$

esto es existe un subespacio de T_pM de dimensión λ donde Hf_p es definido negativo y un subespacio W de dimensión $n - \lambda$ donde Hf_p es positiva definida, si existiera un subespacio de dimensión mayor que λ donde Hf_p fuera negativa definida entonces tendría que intersectar a W lo cual evidentemente no puede pasar, por lo que λ es el índice de f en p ∎

como corolario obtenemos

Corolario
Los puntos críticos no degenerados son aislados

Veremos a continuación ejemplos de funciones y que tipos de puntos críticos tienen:

(a) $f(x) = x^3$, el origen es un punto crítico degenerado

(b) $F(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} sen^2(\frac{1}{x})$, el origen es un punto crítico degenerado no aislado

(c) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$, $(0,0)$ es un punto crítico degenerado

(d) $f(x,y) = x^2$, el conjunto de puntos críticos es el eje x, todos son degenerados

(e) $f(x,y) = x^2y^2$, el conjunto de puntos críticos es la unión de los ejes X y Y, todos los cuales son degenerados.

Demostraremos ahora un lema que nos dara cierta información sobre como se ven los puntos críticos cuando cambiamos de coordenadas

Lema
Sean $f : U \subset R^n \longrightarrow R$ y $F : V \subset R^n \longrightarrow R$ funciones diferenciables, sea $\varphi : V \longrightarrow U$ un difeomorfismo tal que $F = f \circ \varphi$ entonces
(a) Los puntos críticos de f y F estan en correspondencia uno a uno bajo φ.
(b) Los índices y nulidad de los puntos críticos correspondientes son iguales.

Dem.
Para (a) basta con observar que:

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x_i} = \sum_k \frac{\partial f(\varphi(x))}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x_i}$$

para (b) notemos que si C es la matriz jacobiana de φ entonces

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right) = C^t \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} \right) C$$

∎

Notemos que con esta demostración obtenemos que la definición de índice y nulidad de un punto crítico no dependen del sistema coordenado escogido.

De aquí en adelante f siempre denotara una funcion de clase C^∞ de una variedad M en R.

Definimos $M^a = \{p \in M \mid f(p) \leq a\} = f^{-1}(-\infty, a]$

TEOREMA

Sea $f : M \longrightarrow R$ una función diferenciable, supongamos que $a < b$ y que $f^{-1}[a,b] = \{p \in M \mid a \leq f(p) \leq b\}$ es compacto y no contiene puntos críticos de f, entonces M^a es difeomorfo a M^b. Más aún, M^a es un retracto por deformación de M^b, esto es, la inclusión $M^a \hookrightarrow M^b$ es una equivalencia homotópica

necesitamos antes unos lemas:

Lema 1

Para todo $p \in M$ existen vecindades compactas $K_1 \subset K_2$ y funciones $g_p : M \longrightarrow R$ diferenciables tal que $g_p|_{K_1} = 1$, $g_p|_{K_2 - K_1} \geq 0$ y $g_p|_{M-K_2} = 0$

Dem.

Es claro que basta hacerlo para R^n, sea $a \in R^n$ y sea $\varepsilon > 0$ definamos

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{t}} & t > 0 \end{cases}$$

y definamos también

$$g(x) = \frac{h(\varepsilon^2 - \|x\|^2)}{h(\varepsilon^2 - \|x\|^2) + h(\|x\|^2 - \frac{1}{4}\varepsilon^2)}$$

notemos primero que el denominador nunca es cero, y cuando $\|x\| \geq \varepsilon$ el numerador es cero, además cuando $\|x\| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$ entonces $g(x) = 1$, basta entonces con tomar como $K_2 = \overline{B_\varepsilon(0)}$ y $K_1 = \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)}$ ∎

Lema 2

Dado cualquier compacto $K \subset M$ existe un compacto K_1, con $K \subset K_1$ y una función $g : M \longrightarrow R$ diferenciable, tal que $g|_K = 1$, $g|_{K_1 - k} \geq 0$ y $g|_{M-K_1} = 0$

Dem.

Por el lema 1, existen $q_1, \ldots, q_n$ puntos en K y $f_{q_1}, \ldots, f_{q_n}$ funciones diferenciables y compactos $C_{q_1} \subset B_{q_1}, \ldots, C_{q_n} \subset B_{q_n}$ tal que $f_{q_i}|_{C_{q_i}} = 1$,

$f_{q_i}|_{B_{q_i}-C_{q_i}} \geq 0$, y $f_{q_i}|_{M-B_{q_i}} = 0$, basta entonces con definir $K_1 = \cup_i B_{q_i}$ y $f(x) = 1 - \Pi_i(1 - f_{q_i}(x))$ ∎

Lema 3
Dado cualquier compacto $K \subset M$ y $f : K \longrightarrow R$ diferenciable, entonces existe un compacto K_1 en M, y una función diferenciable $f_* : M \longrightarrow R$ tal que $K \subset K_1$, $f_*|_K = f$ y $f_*|_{M-K_1} = 0$
Dem.
Por el lema 2, existen K_1 compacto y $h : M \longrightarrow R$ diferenciable con $K \subset K_1$ tal que $h|_{M-K_1} = 0$ y $h|_K = 1$, por lo que basta con definir $f_* = h \circ f$ ∎

Demostración del Teorema
La idea de la demostración es empujar M^b hacia M^a a lo largo de las trayectorias ortogonales a las hipersuperficies $f = cte$.
Escojamos una métrica riemanniana en M tal que $\langle X, Y\rangle$ denote el producto interior de dos vectores, el *gradiente* de f es el campo vectorial en M caracterizado por la identidad

$$\langle X, gradf\rangle = X(f)$$

(esto es, es la derivada direccional de f a lo largo de X), para cualquier campo vectorial X.
De esta observación es claro que $gradf$ se anula precisamente en los puntos críticos de f, si además $c : R \longrightarrow M$ es una curva diferenciable con vector velocidad $\frac{dc}{dt}$ entonces

$$\langle \frac{dc}{dt}, gradf\rangle = \frac{d(f \circ c)}{dt}$$

como $f^{-1}[a,b]$ es compacto, existe $\rho : M \longrightarrow R$ diferenciable tal que $\rho(x) = \frac{1}{\langle gradf, gradf\rangle}$ si $x \in f^{-1}[a,b]$ y ρ se anula fuera de una vecindad compacta de $f^{-1}[a,b]$, entonces si definimos $X(q) = \rho(q)(gradf)(q)$, este campo vectorial tiene soporte compacto, por lo que genera un grupo de difeomorfismos a un parámetro

$$\varphi_t : M \longrightarrow M$$

para $q \in M$ consideremos la función $t \mapsto f(\varphi_t(q))$ si $\varphi_t(q) \in f^{-1}[a,b]$ entonces

$$\frac{df(\varphi_t(q))}{dt} = \langle \frac{d\varphi_t(q)}{dt}, gradf \rangle = \langle X, gradf \rangle = 1$$

de donde se obtiene que la función $t \mapsto f(\varphi_t(q))$ es lineal con derivada igual a 1, mientras que $f(\varphi_t(q))$ este contenido entre a y b. Si consideramos el difeomorfismo $\varphi_{b-a} : M \longrightarrow M$ entonces obtenemos que manda M^a difeomorfamente en M^b, para la segunda parte de la demostración definamos $R : M^b \times I \longrightarrow M^b$ como

$$R(q,t) = \begin{cases} q & \text{si } f(q) \le a \\ \varphi_{t(a-f(q))}(q) & \text{si } a \le f(q) \le b \end{cases}$$

es claro de la definición que $R(*,0) = Id$ y que $R(*,1)$ es una retracción de M^b en M^a, de esto M^a es un retracto por deformación de M^b ∎

Corolario

Con las mismas hipótesis del teorema, $f^{-1}[a,b]$ es difeomorfa a $M_a \times [a,b]$ y a $M_b \times [a,b]$, donde $M_a = \{x \in M \mid f(x) = a\} = f^{-1}(a)$

TEOREMA

Sea $f : M \longrightarrow R$ una función diferenciable, sea $p \in M$ un punto crítico no degenerado de índice λ con $f(p) = c$, supongamos que $f^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ es compacto y no contiene otros puntos críticos distintos de p para alguna $\varepsilon > 0$, entonces para toda $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña $M^{c+\varepsilon}$ tiene el mismo tipo de homotopía de $M^{c-\varepsilon}$ con una λ-celda adjuntada.

La idea de la demostración de este teorema está indicada en la siguiente figura para el caso especial del toro.

La idea también es introducir una nueva función $F : M \longrightarrow R$ la cual coincida con la función f excepto que $F < f$ en una pequeña vecindad de p, esto es, $F^{-1}(-\infty, c-\varepsilon] = M^{c-\varepsilon} \cup H$ donde H es una vecindad de p, si escogemos una celda adecuada $e^\lambda \subset H$, un argumento directo nos demostrará que $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ es un retracto por deformación de $M^{c-\varepsilon} \cup H$, luego usaremos el teorema anterior para la función F y la región $F^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ para demostrar que $M^{c-\varepsilon} \cup H$ es un retracto por deformación de $M^{c+\varepsilon}$, lo cual terminaría la demostración.

Demostración del Teorema

Escojamos un sistema de coordenadas $u_1, \ldots, u_n$ en una vecindad U de p tal que

$$f = c - u_1^2 - \cdots - u_\lambda^2 + u_{\lambda+1}^2 + \cdots + u_n^2$$

entonces el punto crítico tiene coordenadas

$$u_1(p) = \cdots = u_n(p) = 0$$

Sea $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña para que:
(1) $f^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ sea compacto y no contenga otros puntos críticos de f distintos de p
(2) La imagen de U bajo el difeomorfismo $u : U \longrightarrow R^n$ contenga la bola cerrada $\{(u_1, \ldots, u_n) \mid \sum u_i^2 \leq 2\varepsilon\}$

Definamos ahora e^λ como el conjunto de puntos en U tal que
(1) $u_1^2 + \cdots + u_\lambda^2 \geq \varepsilon$ y
(2) $u_{\lambda+1} = \cdots = u_n = 0$

En el caso del toro lo que obtenemos es

Notemos que $e^\lambda \cap M^{c-\varepsilon} = \partial e^\lambda$, esto es, e^λ esta adjuntada a $M^{c-\varepsilon}$ como requeríamos, debemos probar ahora que $M^{c-\varepsilon} \cup e^{\lambda}$ es un retracto por deformación de $M^{c+\varepsilon}$.

Sea $\mu : R \longrightarrow R$ una función diferenciable tal que ·
(1) $\mu(0) > 0$
(2) $\mu(r) = 0$ si $r \geq 2\varepsilon$
(3) $-1 < \mu'(r) \leq 0$ para toda r
donde $\mu'(r)$ significa la derivada de μ con respecto a r.

Definamos entonces $F : M \longrightarrow R$ como

$$F = f - \mu\big(u_1^2 + \cdots + u_\lambda^2 + 2(u_{\lambda+1}^2 + \cdots + u_n^2)\big)$$

es claro entonces que F y f coinciden fuera de U y por lo tanto F define una función diferenciable en toda M. Para simplificar la notación definamos funciones $\xi, \eta : U \longrightarrow [0, \infty)$ como $\xi = u_1^2 + \cdots + u_\lambda^2$ y $\eta = u_{\lambda+1}^2 + \cdots + u_n^2$, entonces $f = c - \xi + \eta$ y

$$F(q) = c - \xi(q) + \eta(q) - \mu\big(\xi(q) + 2\eta(q)\big)$$

Notemos primero que fuera de la región definida por $\xi + 2\eta \leq 2\varepsilon$ tenemos que $f = F$, mientras que dentro

$$F \leq f = c - \xi + \eta \leq c + \frac{1}{2}\xi + \eta \leq c + \varepsilon$$

por lo que

$$F^{-1}(-\infty, c + \varepsilon] = f^{-1}(-\infty, c + \varepsilon] = M^{c+\varepsilon}$$

Los puntos críticos de F y f coinciden ya que

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = -1 - \mu'(\xi + 2\eta) < 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = 1 - 2\mu'(\xi + 2\eta) \geq 1.$$

Notemos ademas que

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} = \frac{\partial F}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial u_i} + \frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial u_i}$$

por lo que si $i \leq \lambda$ entonces

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} = \frac{\partial F}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial u_i}$$

y si $i > \lambda$ entonces

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} = \frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial u_i}$$

de donde se sigue la afirmación hecha.

Ahora consideremos la región $F^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$, como $F \leq f$ obtenemos que $F^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon] \subset f^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$, de donde obtenemos que $F^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ es compacto, y la única posibilidad que contenga a un punto crítico es en p, pero $F(p) = c - \mu(0) < c - \varepsilon$, dado que en $F^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ no hay puntos críticos de F, obtenemos entonces (aplicando el teorema anterior) que: $F^{-1}(-\infty, c+\varepsilon]$ es un retracto por deformación de $M^{c+\varepsilon}$.

Como $F^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon] \subset f^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$, podemos definir $H = F^{-1}(-\infty, c+\varepsilon] - M^{c-\varepsilon}$ y entonces escribimos $F^{-1}(-\infty, c+\varepsilon] = M^{c-\varepsilon} \cup H$

Consideremos la celda e^λ que consiste de los puntos q tales que $\xi(q) \leq \varepsilon$ y $\eta(q) = 0$, notemos primero que $e^\lambda \subset H$.

Afirmación: $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ es un retracto por deformación de $M^{c-\varepsilon} \cup H$.

Notemos que el caso del toro tenemos la siguiente situación:

Definiremos una retracción $R : M^{c-\varepsilon} \cup H \times I \longrightarrow M^{c-\varepsilon} \cup H$, empezamos definiendo R como la identidad fuera de U y en U la definimos como sigue:

Caso 1: En la región $\xi \leq \varepsilon$ sea R definida por

$$R\big((u_1, \ldots, u_n), t\big) = (u_1, \ldots, u_\lambda, tu_{\lambda+1}, \ldots, tu_n)$$

es claro de la definición que $R(*, 1)$ es la identidad y que $R(*, 0)$ manda la región en e^λ

Caso 2: En la región $\varepsilon \leq \xi \leq \eta + \varepsilon$ definimos R como la transformación

$$R\big((u_1, \ldots, u_n), t\big) = (u_1, \ldots, u_\lambda, s_t u_{\lambda+1}, \ldots, s_t u_n)$$

donde $s_t \in [0, 1]$ y se define como $s_t = t + (1-t)\sqrt{\frac{\xi - \varepsilon}{\eta}}$
de nueva cuenta $R(*, 1)$ es la identidad y $R(*, 0)$ mapea la región entera en la hipersuperficie $f^{-1}(c - \varepsilon)$, notemos que coincide con el caso anterior cuando $\xi = \varepsilon$.

Caso 3: En la región $\eta + \varepsilon \leq \xi$ (i.e. en $M^{c-\varepsilon}$) definimos R como la identidad, la cual también coincide con las definiciones anteriores.

De todo lo anterior obtenemos que

$$M^{c+\varepsilon} \simeq M^{c-\varepsilon} \cup H \simeq M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$$

con lo que se termina la demostración ■

Corolario
Si f tiene k puntos críticos no degenerados $p_1, \ldots, p_k$ con índices $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ en $f^{-1}(c)$ entonces

$$M^{c+\varepsilon} \simeq M^{c-\varepsilon} \cup e^{\lambda_1} \cup \cdots \cup e^{\lambda_k}$$

Dem.
Basta con observar que como todos son aislados podemos escoger k funciones $F_1, \ldots, F_k$ tal que todos queden a niveles distintos y aplicar inducción sobre el número de puntos críticos ■

Corolario
Bajo las mismas condiciones del Teorema M^c es un retracto por deformación de $M^{c+\varepsilon}$

TEOREMA
Si $f : M \longrightarrow R$ es una función diferenciables con puntos críticos no degenerados, y si cada M^a es compacta, entonces M tiene el mismo tipo de homotopía que un complejo CW con una célula de dimensión λ por cada punto crítico de índice λ

Antes de pasar a la demostración, necesitamos unos lemas:

Lema
Sean $f_0, f_1 : \partial e^\lambda \longrightarrow X$ funciones homotópicas, entonces la identidad de X se extiende a una equivalencia homotópica

$$k : X \cup_{f_0} e^\lambda \longrightarrow X \cup_{f_1} e^\lambda$$

Dem.
Cuando uno quiere dar una función que salga de un cociente, formalmente lo que hay que hacer es dar la función antes de pasar al cociente, ver que es compatible con la identificación y entonces un obtiene la función deseada, en nuestro caso queremos dar homotopías que salgan de un espacio de adjunción – el cual es un cociente – , por lo que tendríamos que dar las homotopías desde la unión ajena de los conjuntos y ver que "pasan bien" al cociente, pero, por el procesador de texto, esto se vuelve medio latoso, por lo que sólo vamos a dar de manera explícita las homotopías desde el cociente mismo.

Sea $F : \partial e^\lambda \times I \longrightarrow X$ la homotopía entre f_0 y f_1, esto es $F(x,0) = f_0(x)$ y $F(x,1) = f_1(x)$, para simplificar notación $F(x,t) = f_t(x)$.

Definamos entonces la equivalencia homotópica como sigue:

$$k : X \cup_{f_0} e^\lambda \longrightarrow X \cup_{f_1} e^\lambda$$

$$k([x]) = \begin{cases} [x] & \text{si } x \in X \\ [2tu] & \text{si } x = tu \text{ donde } u \in \partial e^\lambda \text{ y } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ [f_{2-2t}(u)] & \text{si } x = tu \text{ donde } u \in \partial e^\lambda \text{ y } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Es claro entonces que su inverso homotópico está dado por

$$l : X \cup_{f_1} e^\lambda \longrightarrow X \cup_{f_0} e^\lambda$$

$$l([x]) = \begin{cases} [x] & \text{si } x \in X \\ [2tu] & \text{si } x = tu \text{ donde } u \in \partial e^\lambda \text{ y } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ [f_{2-2t}(u)] & \text{si } x = tu \text{ donde } u \in \partial e^\lambda \text{ y } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Notemos entonces que

$$lk[x] = \begin{cases} [x] & \text{si } x \in X \\ [4tu] & \text{si } x = tu \text{ donde } u \in \partial e^\lambda \text{ y } 0 \le t \le \frac{1}{4} \\ [f_{4t-1}(u)] & \text{si } x = tu \text{ donde } u \in \partial e^\lambda \text{ y } \frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \\ [f_{2-2t}(u)] & \text{si } x = tu \text{ donde } u \in \partial e^\lambda \text{ y } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Se puede entonces definir una homotopía de la siguiente manera

$$H : (X \cup_{f_0} e^\lambda) \times I \longrightarrow X \cup_{f_0} e^\lambda$$

$$H([x], s) = \begin{cases} [x] & x \in X \\ [(1-s)tu + 4stu] & 0 \le t \le \frac{1}{4} \\ [f_{(1-2s)(4t-1)}(u)] & \frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \text{ y } 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ [2(1-s)u + (2s-1)tu] & \frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \text{ y } \frac{1}{2} \le s \le 1 \\ [f_{(1-2s)(4t-1)}(u)] & \frac{1}{2} \le t \le 1 \text{ y } 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ [2(1-s)u + (2s-1)tu] & \frac{1}{2} \le t \le 1 \text{ y } \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

donde $x = tu$ y $u \in \partial e^\lambda$.

Es claro entonces que $H(z,1) = lk(z)$ y que $H(z,0) = z$ ∎

Lema

Sea $\varphi : \partial e^\lambda \longrightarrow X$ una situación de adjunción, entonces cualquier equivalencia homotópica $f : X \longrightarrow Y$ se extiende a una equivalencia homotópica

$$F : X \cup_\varphi e^\lambda \longrightarrow Y \cup_\varphi e^\lambda$$

Dem.
De nueva cuenta, formalmente tendríamos que dar homotopías antes de pasar al cociente y verificar que todo sigue bien, pero, no lo haremos, esto es, sólo daremos las homotopías resultantes en los correspondientes cocientes.

Sea $g : Y \longrightarrow X$ el inverso homotópico de f, entonces podemos definir $F : X \cup_\varphi e^\lambda \longrightarrow Y \cup_\varphi e^\lambda$ como

$$F([x]) = \begin{cases} [f(x)] & \text{si } x \in X \\ [x] & \text{si } x \in e^\lambda \end{cases}$$

y $G : Y \cup_\varphi e^\lambda \longrightarrow X \cup_\varphi e^\lambda$ como

$$G([y]) = \begin{cases} [g(y)] & \text{si } y \in Y \\ [x] & \text{si } y \in e^\lambda \end{cases}$$

Como $gf\varphi \simeq \varphi$ por el lema anterior, existe

$$k : X \cup_{gf\varphi} e^\lambda \longrightarrow X \cup_\varphi e^\lambda$$

equivalencia homotópica, demostraremos entonces que $kGF \simeq Id$.

Sea H la homotopía entre gf y Id_X, denotemos por $h_t(*) = H(*, t)$, entonces, si usamos las definiciones específicas de k, G y F obtenemos que

$$kGF([x]) = \begin{cases} [gf(x)] & x \in X \\ [2tu] & x = tu,\, u \in \partial e^\lambda \text{ y } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ [h_{2-2t}(\varphi(u))] & x = tu,\, u \in \partial e^\lambda \text{ y } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

la homotopía requerida es entonces

$$Q : (X \cup_\varphi e^\lambda) \times I \longrightarrow X \cup_\varphi e^\lambda$$

$$Q([x],s)=\begin{cases}[h_s(x)] & x\in X\\ [(\frac{2}{1+s})tu] & 0\leq t\leq \frac{1+s}{2}\\ [h_{2-2t+s}\varphi(u)] & \frac{1+s}{2}\leq t\leq 1\end{cases}$$

donde $x = tu$ con $u \in \partial e^{\lambda}$, notemos entonces que $(kG)F \simeq Id$, de donde se sigue que F tiene un inverso homotópico izquierdo, con un argumento análogo, se concluye que F tiene un inverso homotópico derecho.

La demostración ahora de que F es una equivalencia homotópica es puramente formal.

Sub lema

Si F tiene un inverso homotópico izquierdo L y un inverso homotópico derecho R, entonces F es una equivalencia homotópica y R (o L) es un inverso homotópico de F.

Dem.

Como $LF \simeq Id$ y $FR \simeq Id$ se sigue que $L \simeq L(FR) \simeq (LF)R \simeq R$, obtenemos entonces que $RF \simeq LF \simeq Id$ ∎

el lema se sigue de $k(GF) \simeq Id$ implica que $(GF)k \simeq Id$ pero $G(Fk) \simeq Id$ implica que $(Fk)G \simeq Id$, es decir obtuvimos que kG es un inverso homotópico de F, por lo que F es una equivalencia homotópica ∎

Demostración del Teorema

Como cada M^a es compacta, entonces sean $c_1 < c_2 < \cdots$, los valores críticos de $f : M \longrightarrow R$, es claro que la sucesión no tiene puntos de acumulación.

Notemos que M^a es vacío si $a < c_1$ (ya que c_1 es el mínimo de f).

La demostración es por inducción, sea $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño para que en el intervalo $[c_1-\varepsilon, c_1+\varepsilon]$ el único valor crítico sea c_1, entonces $M^{c_1+\varepsilon}$ tiene el tipo de homotopía de un conjunto finito de puntos ya que

$$M^{c_1+\varepsilon} \simeq M^{c_1-\varepsilon} \cup \{\cup_i e_i^{k_i}\} = \sqcup\{\cup_i e_i^{k_i}\}$$

donde hay una célula por cada punto crítico en el nivel c_1.

Sea $a \neq c_1, c_2, c_3 \ldots$ y supongamos que M^a es del mismo tipo de homotopía que K^a un complejo CW, esto es $M^a \simeq K^a$ y sea c el más pequeño $c_i > a$ entonces

$$M^{c+\varepsilon} \simeq M^{c-\varepsilon} \cup \{\cup e^{\lambda_j(c)}\}$$

donde de nueva cuenta hay una célula de dimensión λ_j por cada punto crítico de índice λ_j en el nivel c, notemos también que $M^a \simeq M^{c-\varepsilon}$ por lo que

$$\begin{aligned} M^{c+\varepsilon} &\simeq M^{c-\varepsilon} \cup \{\cup e^{\lambda_j(c)}\} \\ &\simeq M^a \cup \{\cup e^{\lambda_j(c)}\} \\ &\simeq K^a \cup \{\cup e^{\lambda_j(c)}\} \end{aligned}$$

por lo que $M^{c+\varepsilon}$ es del mismo tipo de homotopía que un complejo CW,

Notemos que si M es compacta o el número de puntos críticos es finito, entonces esto termina la demostración, si no, entonces tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} M^{a_1} & \hookrightarrow & M^{a_2} & \hookrightarrow & M^{a_3} & \hookrightarrow & \cdots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ K^{a_1} & \hookrightarrow & K^{a_2} & \hookrightarrow & K^{a_3} & \hookrightarrow & \cdots \end{array}$$

Sea entonces $K = \cup_i K^{a_i}$ el límite homotópico directo, y sea $g : M \longrightarrow K$ la función límite, entonces g en cada nivel es una equivalencia homotópica, y por lo tanto g misma es una equivalencia homotópica (Ver Apéndice 3) ∎

Notemos también que se ha demostrado que cada M^a tiene el mismo tipo de homotopía que un complejo CW finito con una célula de dimensión λ por cada punto crítico de f con índice λ.

Capítulo 2

Existencia de funciones de Morse y aplicaciones

En está parte construiremos muchas funciones con puntos críticos no degenerados para variedades encajadas en R^n.

Decimos que una función $f : M \longrightarrow R$ es una *función de Morse* si todos sus puntos críticos son no degenerados.

Para $p \in R^n$, definamos la función

$$L_p : M \longrightarrow R$$
$$q \mapsto \|p - q\|^2$$

Se demostrará que para casi toda $p \in R^n$, L_p es una función de Morse en M.

Sea $M \subset R^n$ una variedad de dimensión $k < n$ encajada en R^n. Sea $N \subset M \times R^n$ definida por

$$N = \{(q, v) \mid q \in M,\ v \perp T_p M\}$$

no es difícil demostrar que N es una n-variedad diferenciable encajada en R^{2n} (De hecho N es el *haz normal* a M).

Sea $E : N \longrightarrow R^n$ definida por $E(q, v) = q + v$.

Decimos que $e \in R^n$ es un *punto focal* de (M,q) con *multiplicidad* μ si $e = q + v$, donde $(q,v) \in N$ y el Jacobiano de E en (q,v) tiene nulidad $\mu > 0$.
El punto e será llamado un *punto focal* de M si e es un punto focal de (M,q) para algun $q \in M$.

Enunciaremos ahora un Teorema demostrado en el apéndice 2

TEOREMA (de Sard)
Sea $f : M \longrightarrow N$ una función de clase C^1, entonces el conjunto de valores críticos de f tiene medida cero en N

tenemos entonces dos Corolarios

Corolario
El conjunto de valores regulares de una función diferenciable $f : M \longrightarrow N$ en denso en N

Corolario
Para casi toda $x \in R^n$, x no es un punto focal de M
Dem.
x es punto focal si y sólo si x está en la imagen del conjunto de puntos críticos de $E : N \longrightarrow R^n$, por lo tanto la medida del conjunto de puntos focales es cero, por lo tanto su complemente es denso ∎

Para comprender mejor el concepto de punto focal es conveniente introducir la *segunda forma fundamental* de una variedad en un espacio euclidiano. Fijaremos por el momento un sistema local de coordenadas. Sean $u_1, u_2, \ldots, u_k$ coordenadas locales en una región de la variedad $M \subset R^n$, entonces el mapeo inclusión de M en R^n determina n funciones diferenciables

$$x_1(u_1, \ldots, u_k), \ldots, x_n(u_1, \ldots, u_k)$$

como notación, usaremos $x = (x_1, \ldots, x_n) = x(u_1, \ldots, u_k)$

La *primera forma fundamental* asociada con el sistema de coordenadas, está definida por la matriz simétrica de valores reales

$$(g_{ij}) = (\frac{\partial x}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j})$$

La *segunda forma fundamental*, es una matriz simétrica (ℓ_{ij}) con valores vectoriales que se define como sigue:

el vector $\frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}$ en un punto de M puede ser expresado como una suma de un vector tangente a M y un vector normal a M, entonces (ℓ_{ij}) es la componente normal de $\frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}$, dado cualquier vector v el cual es normal a M en q, la matriz

$$(v \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}) = (v \cdot \ell_{ij})$$

será llamada la *segunda forma fundamental* de M en q *en la dirección de* v.

Simplificaremos la discusión suponiendo que el sistema de coordenadas es tal que $g_{ij}(q) = \delta_{ij}$.

Entonces los valores propios de la matriz $(v \cdot \ell_{ij})$ son llamados las *curvaturas principales* $k_1, \ldots, k_k$ de M en q *en la dirección normal de* v. Los reciprocos $k_1^{-1}, \ldots, k_k^{-1}$ son llamados los *radios principales de curvatura* .

Por supuesto puede suceder que la matriz $(v \cdot \ell_{ij})$ sea singular, en este caso, uno o más valores de los k_i son cero y entonces los correspondientes radios no estaran definidos.

Consideremos ahora la linea normal ℓ que consiste de todos los $q + tv$ donde v es un vector fijo ortogonal a M en q.

Lema

Los puntos focales de (M, q) sobre ℓ son precisamente los puntos de la forma $q + k_i^{-1}v$ donde $1 \leq i \leq k$, $k_i \neq 0$, existen a lo más k puntos focales de (M, q) a lo largo de ℓ, cada uno contado con su propia multiplicidad

Dem.

Escojamos $n-k$ campos vectoriales $w_1(u_1, \ldots, u_k), \ldots, w_{n-k}(u_1, \ldots, u_k)$ en la variedad tal que $w_1, \ldots, w_{n-k}$ son vectores unitarios ortonormales entre si y perpendiculares a M.

Podemos introducir coordenadas $(u_1, \ldots, u_k, t_1, \ldots, t_{n-k})$ correspondientes al punto

$$\left(x(u_1, \ldots, u_k), \sum_{j=1}^{n-k} t_j w_j(u_1, \ldots, u_k)\right) \in N \subset M \times R^n$$

entonces la expresión local para la función $E : N \longrightarrow R^n$ es la función

$$e(u_1, \ldots, u_k, t_1, \ldots, t_{n-k}) = x(u_1, \ldots, u_k) + \sum_{j=1}^{n-k} t_j w_j(u_1, \ldots, u_k)$$

cuyas parciales son

$$\frac{\partial e}{\partial u_i} = \frac{\partial x}{\partial u_i} + \sum t_j \frac{\partial w_j}{\partial u_j}$$
$$\frac{\partial e}{\partial t_j} = w_j$$

si tomamos productos interiores con los n vectores linealmente independientes $\{\frac{\partial x}{\partial u_i}, w_j\}$ obtenemos una matriz de $n \times n$ cuyo rango es igual al rango del Jacobiano de E en el correspondiente punto ya que esta matriz es

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j} + \sum_\alpha t_\alpha \frac{\partial w_\alpha}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j}\right) & \left(\sum_\alpha t_\alpha \frac{\partial w_\alpha}{\partial u_i} \cdot w_\beta\right) \\ 0 & Id \end{pmatrix}$$

entonces la nulidad de la matriz es igual a la nulidad del bloque superior derecho, usando que

$$0 = \frac{\partial}{\partial u_i}\left(w_\alpha \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j}\right) = \frac{\partial w_\alpha}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j} + w_\alpha \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}$$

entonces

$$g_{ij} - \sum t_\alpha w_\alpha \cdot \ell_{ij} = \frac{\partial x}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j} + \sum_\alpha t_\alpha \frac{\partial w_\alpha}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j}$$

Ahora basta con observar que $q + tv$ es un punto focal de (M, q) con multiplicidad μ si y sólo si la matriz $(g_{ij} - tv \cdot \ell_{ij})$....$(*)$ es singular con nulidad μ, esto ya que si $(g_{ij}) = (\delta_{ij})$ entonces $(*)$ es singular si y sólo si $\frac{1}{t}$ es una valor propio de $(v \cdot \ell_{ij})$, más aún, la multiplicidad μ es igual a la multiplicidad de $\frac{1}{t}$ como valor propio ∎

Ahora para p fijo en R^n estudiaremos la función $f := L_p : M \longrightarrow R$,

$$f\big(x(u_1, \ldots, u_k)\big) = \|x(u_1, \ldots, u_k) - p\|^2 = x \cdot x - 2x \cdot p + p \cdot p$$

entonces

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = 2 \frac{\partial x}{\partial u_i} \cdot (x - p)$$

por lo que q es un punto crítico de f si y sólo si $q - p$ es normal a M en q, notemos que las segundas parciales en un punto crítico son

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} = 2\Big(\frac{\partial x}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j} + \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} \cdot (x - p)\Big)$$

haciendo $p = x + tv$ obtenemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} = 2(g_{ij} - tv \cdot \ell_{ij}).$$

se concluye entonces que

Lema

El punto $q \in M$ es un punto crítico degenerado de $f = L_p$ si y sólo si p es un punto focal de (M, q). La nulidad de q como punto crítico es igual a la multiplicidad de p como punto focal

Corolario (Teorema del índice para L_p)
El índice de L_p en un punto crítico no degenerado $q \in M$ es igual al número de puntos focales de (M, q) contenidos en el segmento de q a p contados cada uno con su multiplicidad
Dem.

$$\left(\frac{\partial^2 L_p}{\partial u_i \partial u_j}\right) = 2(g_{ij} - tv \cdot \ell_{ij})$$

el índice de la matriz es igual al número de valores propios negativos, suponiendo que $g_{ij} = \delta_{ij}$, esto es igual al numero de valores propios de $(v \cdot \ell_{ij})$ los cuales son $\geq \frac{1}{t}$, usando conjuntamente los lemas anteriores, obtenemos el resultado deseado ∎

Si juntamos los lemas anteriores tenemos

TEOREMA
Para casi todo $p \in R^n$ (todos salvo un conjunto de medida cero), la función $L_p : M \longrightarrow R$ es una función de Morse

Veamos algunas consecuencias de esto:

Corolario
Sobre cualquier variedad M existe una función de Morse tal que M^a es compacta para toda $a \in R$
Dem.
Se sigue del hecho de que para cualquier variedad existe un encaje cerrado en algun R^n y de que $M^a = M \cap \overline{B_a(q)}$ ∎

Notemos entonces que todas las suposiciones hechas al principio no inponían ninguna restricción sobre lo concluido.

Aplicación 1
Toda variedad diferenciable tiene el tipo de homotopía de un complejo CW

Aplicación 2

Sobre una variedad compacta M existe un campo vectorial X tal que la suma de los índices de los puntos críticos de X es igual a la caracteristica de Euler $\chi(M)$ de M.

Sabemos que $\chi(M) = \sum(-1)^\lambda C_\lambda$, donde C_λ es el número de puntos críticos con índice λ, pero $(-1)^\lambda$ es el índice del campo vectorial $gradf$ en un punto donde f tiene índice λ, se sigue entonces que la suma de los índices de cualquier campo vectorial en M es igual a $\chi(M)$, ya que esta suma es un invariante topológico.

Aplicación 3
TEOREMA (de Reeb)
Si M es una variedad compacta y $f : M \longrightarrow R$ es una función de Morse con sólo dos puntos críticos, entonces $M \approx S^n$
Dem.
Es claro que los puntos críticos son el máximo y el mínimo, supongamos sin perder generalidad que $f(p) = 0$ y $f(q) = 1$, existen coordenadas tal que

$$f = 1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2$$

en una vecindad coordenada de q, sea $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña tal que $D^+ := f^{-1}[1-\varepsilon, 1] \approx D^n$, $D^- := f^{-1}[0,\varepsilon] \approx D^n$ y $f^{-1}[\varepsilon, 1-\varepsilon] \approx S^{n-1} \times I$, consideremos en S^n, vecindades B^+ y B^- de N y S, los polos norte y sur respectivamente, difeomorfas a D^n, sea $C = S^n - int(B^+ \cup B^-)$, es claro entonces que $C \approx S^{n-1} \times I$ y $\partial C = \partial B^+ \cup \partial B^-$.

Sea $h_0 : D^+ \longrightarrow B^+$ un difeomorfismo de D^n en D^n, es claro entonces que tenemos

$$h_0|_{\partial D^+} : \partial D^+ \longrightarrow \partial B^+$$

el cual se extiende a un difeomorfismo

$$h : (\partial D^+) \times I \longrightarrow (\partial B^+) \times I$$

notemos que con esto tenemos definido un difeomorfismo

$$h_1 : D^+ \cup f^{-1}[\varepsilon, 1-\varepsilon] \longrightarrow B^+ \cup C$$

notemos que $h_1|_{\partial D^-} : \partial D^- \longrightarrow \partial B^-$ se puede extender a un homeomorfismo $g : S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$ el cual se puede extender a un homeomorfismo

$$\begin{aligned} G : D^n &\longrightarrow D^n \\ tu &\mapsto tg(u) \end{aligned}$$

es decir, logramos extender h_0 a un homeomorfismo $h : M \longrightarrow S^n$ ∎

El teorema sigue siendo válido si los puntos críticos son degenerados, pero la demostración es más complicada.

No es cierto que M deba ser diferenciable a S^n

Aplicación 4
Como construir una función de Morse sobre CP^n.
Sea CP^n el n espacio proyectivo complejo, esto es, CP^n es el conjunto de clases de $n+1$-éneadas $(z_0, \ldots, z_n)$ de números complejos, tal que $\sum |z_j|^2 = 1$, denotaremos una clase de equivalencia por $[(z_0, z_1, \ldots, z_n)] = (z_0 : z_1 : \cdots : z_n)$

Sean $c_i \in R$ tal que $c_i \neq c_j$ si $i \neq j$ para $i = 0, \ldots, n$, definamos

$$f(z_0 : z_1 : \cdots : z_n) = \sum_j c_j |z_j|^2$$

Sea

$$\begin{aligned} U_0 &= \{(z_0 : z_1 : \cdots : z_n) \mid z_0 \neq 0\} \\ &= (1 : z_1 : \cdots : z_n) \end{aligned}$$

escribamos ahora a $\frac{|z_0|}{z_0} z_j = x_j + y_j$, entonces $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n : U_0 \longrightarrow R$ son las funciones coordenadas, mapeando U_0 diferenciablemente en la bola unitaria de R^{2n}, como $|z_j|^2 = x_j^2 + y_j^2$, tenemos que $|z_0|^2 = 1 - \sum(x_j^2 + y_j^2)$ por lo que

$$f = c_0 + \sum_{j=1}^{n} (c_j - c_0)(x_j^2 + y_j^2)$$

en U_0, entonces el único punto crítico en U_0 es justamente el punto $p_0 = (1:0:\cdots:0)$ ya que $\frac{\partial f}{\partial x_j} = 2(c_j - c_0)x_j$ y $\frac{\partial f}{\partial y_j} = 2(c_j - c_0)y_j$ de donde es claro que solamente en el punto propuesto todas las parciales se hacen cero simultaneamente.

En este punto f es no degenerada y el índice es el doble de números j tal que $c_j < c_0$.

Similarmente, podemos considerar los sistemas coordenados centrados en los puntos $p_1 = (0:1:0:\cdots:0), \ldots, p_n = (0:\cdots:0:1)$ y entonces $p_0, p_1, \ldots, p_n$ son los únicos puntos críticos de f, además el índice de f en p_k es igual al doble de j tales que $c_j < c_k$, estos índices estan entre 0 y $2n$ y aparecen sólo una vez (esto se puede ver dando valores a los c_i, por ejemplo, $c_i = i+1$) obtenemos entonces que

$$CP^n \simeq e^0 \cup e^2 \cup \cdots \cup e^{2n}$$

Como parte final de este Capítulo veremos ahora como se relacionan la topología de la variedad M y el número de puntos críticos de una función de Morse en la variedad.

Si S es una función de pares de espacios en los enteros, decimos que S es *subaditiva* si, $Z \subset Y \subset X$ implica que

$$S(X,Z) \leq S(X,Y) + S(Y,Z)$$

y decimos que es *aditiva* si la igualdad se da.

Como un ejemplo, consideremos un campo F como el grupo de coeficientes, entonces, $R_\lambda(X,Y) = \lambda$-ésimo número de Betti de (X,Y), esto es, es el rango sobre F de $H_\lambda(X,Y;F)$, para cualquier par (X,Y) tal que este rango sea finito.

Para ver que R_λ es subaditiva, basta con observar que en

$$\cdots \xrightarrow{\alpha_1} H_\lambda(Y,Z) \xrightarrow{\alpha_2} H_\lambda(X,Z) \xrightarrow{\alpha_3} H_\lambda(X,Y) \xrightarrow{\alpha_4} \cdots$$

$R_\lambda(X,Z) = rank(\alpha_2) + rank(\alpha_3)$, se define la *característica de Euler* $\chi(X,Y) = \sum(-1)^\lambda R_\lambda(X,Y)$, y se obtiene entonces que χ es una función aditiva, ya que si $\chi(X)$, $\chi(A)$ y $\chi(X,A)$ existen, entonces $\chi(X) = \chi(X,A) + \chi(A)$.

Tenemos ahora el siguiente lema para funciones subaditivas (aditivas)

Lema
Sea S subaditiva y sean $X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n$, entonces

$$S(X_n, X_0) \leq \sum_1^n S(X_i, X_{i-1}) \tag{1}$$

además, si S es aditiva, la igualdad se da.
Dem.
La demostración es por inducción sobre n, si $n = 1$ es claro que se da (1), si $n = 2$ entonces se sigue de la definición de S.

Supongamos entonces que $S(X_{n-1}, X_0) \leq \sum_1^{n-1} S(X_i, X_{i-1})$ tenemos entonces que

$$\begin{aligned} S(X_n, X_0) &\leq S(X_n, X_{n-1}) + S(X_{n-1}, X_0) \\ &\leq \sum_1^n S(X_i, X_{i-1}) \end{aligned}$$

■

Denotemos por $S(X) := S(X, \emptyset)$, entonces si $X_0 = \emptyset$, podemos reescribir la desigualdad anterior como

$$S(X_n) \leq \sum_1^n S(X_i, X_{i-1})$$

y la igualdad se da si S es aditiva.

Sea M una variedad compacta y $f : M \longrightarrow R$ una función de Morse, sean $a_1 < \cdots < a_k$ tal que M^{a_i} tiene exactamente i puntos críticos y $M^{a_k} = M$, entonces

$$\begin{aligned} H_*(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) &= H_*(M^{a_{i-1}} \cup e^{\lambda_i}, M^{a_{i-1}}) \\ &= H_*(e^{\lambda_i}, \partial e^{\lambda_i}) \\ &= \begin{cases} R & \text{en dimensión } \lambda_i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \end{aligned}$$

donde la primera igualdad se obtiene del teorema de escisión.
Si aplicamos el lema a $\emptyset = M^{a_0} \subset \cdots \subset M^{a_k} = M$ con $S = R_\lambda$, obtenemos que

$$R_{la}(M) \leq \sum_1^k R_\lambda(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) = C_\lambda$$

donde C_λ es el número de puntos críticos de índice λ.

Si ahora aplicamos nuevamente el lema anterior para el caso $S = \chi$ obtenemos que

$$\chi(M) = \sum_1^k \chi(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) = C_0 - C_1 + C_2 - \cdots \pm C_n$$

hemos probado entonces

TEOREMA (Desigualdades débiles)
Si C_λ denota el número de puntos críticos de índice λ en la variedad compacta M, entonces:
$R_\lambda \leq C_\lambda$ *(2)*
$\sum(-1)^\lambda R_\lambda(M) = \sum(-1)^\lambda C_\lambda$ *(3)*

Una manera de mejorar estas desigualdades es usando el siguiente argumento.

Lema

Si $S_\lambda(X,Y) = R_\lambda(X,Y) - R_{\lambda-1}(X,Y) + \cdots \pm R_0(X,Y)$ *entonces* S_λ *es subaditiva*

Dem.

Notemos que si

$$\xrightarrow{h} A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \longrightarrow \cdots \longrightarrow D \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de espacios vectoriales, entonces $rank(A) = rank(h) + rank(i)$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} rank(h) &= rank(A) - rank(i) \geq 0 \\ &= ranK(A) - rank(B) + rank(j) \\ &\vdots \\ &= rank(A) - rank(B) + rank(C) - \cdots \pm rank(D) \end{aligned}$$

consideremos ahora la sucesión exacta de homología del triple $Z \subset Y \subset X$ y apliquemos lo anterior al morfismo $H_{\lambda+1}(X,Y) \longrightarrow H_\lambda(Y,Z)$, obtenemos que:

$$rank(\partial) = R_\lambda(Y,Z) - R_\lambda(X,Z) + R_\lambda(X,Y) - R_{\lambda-1}(Y,Z) + \cdots \geq 0$$

agrupando de manera conveniente obtenemos que

$$S_\lambda(Y,Z) - S_\lambda(X,Z) + S_\lambda(X,Y) \geq 0$$

■

Si aplicamos esta función a los espacios $\emptyset \subset M^{a_1} \subset \cdots \subset M^{a_k} = M$ obtenemos las *desigualdades de Morse*

$$S_\lambda(M) \leq \sum_1^k S_\lambda(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) = C_\lambda - C_{\lambda-1} + \cdots \pm C_0$$

o equivalentemente

$$R_\lambda(M) - R_{\lambda-1}(M) + \cdots \pm R_0(M) \leq C_\lambda - C_{\lambda-1} + \cdots \pm C_0 \qquad (4_\lambda)$$

de comparar (4_λ) y $(4_{\lambda-1})$ se obtiene (2) y si ademas $\lambda > n$ entonces se obtiene (3).

Se tiene además

Corolario
Si $C_{\lambda+1} = C_\lambda = 0$ *entonces* $R_{\lambda+1} = R_\lambda = 0$ *y* $R_\lambda = C_\lambda$

Capítulo 3

El complejo de Witten

En esta parte del trabajo construiremos el *complejo de Witten* asociado a una variedad, y demostraremos que la homología asociada a este complejo es la homología simplicial.

Empezaremos construyendo las *variedades estables e inestables* asociadas a un punto punto crítico no degenerado.

Recordemos que si $f : M \longrightarrow R$ es una función de Morse y $p \in M$ es un punto crítico, entonces existe una vecindad $U \subset M$ de p y un sistema coordenado tal que

$$f = f(p) - x_1^2 - \cdots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \cdots + x_n^2$$

donde k es el índice de f en p, es claro entonces que

$$-\nabla f = 2(x_1, \ldots, x_k, -x_{k+1}, \ldots, -x_n)$$

definimos entonces la *variedad inestable* de p como

$$W_p^u = \{y \in M \mid \lim_{s \to -\infty} \varphi_s(y) = p\}$$

donde φ_s es el flujo asociado al campo vectorial $-\nabla f$, notemos que por el lema de Morse, en una vecindad de p difoemorfa al n-disco

$$(x_1, \ldots, x_n) \in W_p^u \Longleftrightarrow x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$$

por lo que localmente, W_p^u se ve como el k disco, tenemos que

$$W_p^u = [\cup_{t>0}\varphi_t(D^k - \{0\})] \cup \{\varphi_t(0)\}$$

donde $\varphi_t(0) = p$, es claro que el flujo nos da un difoemorfismo

$$W_p^u - \{p\} \approx R^k - \{0\}$$

siempre y cuando $\partial M = \emptyset$, por lo que en este caso obtenemos que $W_p^u \approx R^k$, notemos que en el caso en el que $\partial M \neq \emptyset$, entonces, igual W_p^u resulta una k variedad, pero ahora puede que tenga frontera.
Para definir la *variedad estable* en p, definimos $X = grad(f)$ y definimos W_p^s como la variedad inestable en p con respecto a este nuevo campo, concluimos ahora que la dimensión de W_p^s es $n-k$ y que si $\partial M = \emptyset$ entonces $W_p^s \approx R^{n-k}$. Otra observación es que ambas variedades resultan conexas y que W_p^u y W_p^s se intersectan transversalmente en p.

La herramienta que usaremos para demostrar el resultado anunciado en el principio del capítulo, es la que se conoce como *índice de Conley*, de la cual en esta parte haremos uso de algunos resultados y remitiremos la lector a la correspondiente cita.

Empecemos con algunas definiciones.

Supongamos ahora que $\varphi_t : M \longrightarrow M$ es el flujo en una variedad compacta M, entonces $S \subset M$ es *invariante* si $\varphi_t(S) = S$ para toda $t \in R$, y es llamado *aislado* si existe una vecindad N de S tal que

$$S = I(N) := \cap_{t\in R}\varphi_t(N)$$

Un *índice par* para un conjunto invariante aislado $S \subset M$ es un par de conjuntos compactos $L \subset N$ tal que
(1) $S = I(\overline{N-L}) \subset int(N-L)$
(2) $x \in L$, y $\varphi_{[0,t]}(x) \subset N$ implica $\varphi_t(x) \in L$
(3) $x \in N - L$ implica $\exists t > 0$ tal que $\varphi_{[0,t]} \subset N$.

La condición (2) dice que L es positivamente invariante en N y (3) significa que toda orbita que deja N pasa primero por L.

Para las demostraciones de los siguientes teoremas ver :

Teorema (Existencia de Indices pares)
Sea φ_t el flujo y $N \subset M$ una vecindad aislante de el conjunto invariante aislado S y U cualquier vecindad de S, entonces exsite un índice par (N_1, N_0) para S en M tal que $\overline{N_1 - N_0} \subset U$

Necesitamos ademas el siguiente resultado que nos dice que el tipo de homotopía de el espacio cociente N/L es independiente de la elección del índice par para S.

Lema (C. Conley)
Si (N_1, L_1) y (N_2, L_2) son índices pares para S, conjunto invariante aislado, entonces los espacios índices N_1/L_1 y N_2/L_2 son del mismo tipo de homotopía

El *índice de Conley* de S es el tipo de homotopía de el espacio N/L.

Si c es un nivel crítico de f entonces un índice par para el conjunto invariante aislado

$$S = \{x \in M \mid \nabla f(x) = 0,\ f(x) = c\}$$

esta dado por $N = M^b$ y $L = M^a$, donde $M^a = \{x \in M \mid f(x) \leq a\}$, y $a < b$ son valores regulares de f tal que c es el único valor crítico de f en el intervalo (a, b).

El flujo gradiente φ_s de una función de Morse $f : M \longrightarrow R$ se dice del tipo *Morse-Smale* si para cualquiera dos puntos críticos x y y, las variedades estable e inestable W_x^s y W_y^u se intersectan transversalmente.
Notemos que esta condición se consigue con pequeñas alteraciones en la métrica riemanniana dada. (Vease apéndice 4).

Si f es del tipo Morse-Smale, entonces las orbitas conectantes determinan el siguiente complejo de cadenas.

Escojamos primero una orientación en el espacio vectorial $E_x^u = T_x W_x^u$ para todo punto crítico de f y denotemos por $\langle x \rangle$ al par que consiste del punto crítico y su orientación, para toda $k = 0, 1, \ldots, n$ denotamos por C_k el grupo libre

$$C_k = \oplus_x Z\langle x \rangle$$

donde x corre sobre todos los puntos críticos de índice k. Si f es del tipo Morse-Smale y $ind(y) - ind(x) = 1$ entonces $W_x^s \cap W_y^u$ consiste de un número finito de orbitas, en este caso podemos definir un entero $n(y, x)$ asignando un $+1$ o -1 a cada orbita conectante y tomando la suma.

Sea $\gamma(s)$ una orbita conectante, esto es $\lim_{s \to -\infty} \gamma(s) = y$ y $\lim_{s \to \infty} \gamma(s) = x$, entonces $\langle y \rangle$ induce una orientación en el complemento ortogonal $E_\gamma^u(y)$ de $v = \lim_{s \to -\infty} \frac{\gamma'(s)}{|\gamma(s)|}$ en E_y^u.

En el caso $ind(y) - ind(x) = 1$, el flujo induce un isomorfismo entre $E_\gamma^u(y)$ y E_x^u, definimos n_γ como ± 1 dependiendo de si esta función preserva la orientación o no. Definimos entonces $n(y, x) = \sum_\gamma n_\gamma$, donde la suma corre sobre todas las orbitas γ conectando x y y, definimos ahora el operador frontera

$$\partial_x^c : C_{k+1} \longrightarrow C_k$$

como

$$\partial^c \langle y \rangle = \sum_x n(y, x) \langle x \rangle$$

donde la suma corre sobre todos los puntos críticos de índice k.

Uno puede extender este complejo de cadenas a coeficientes en cualquier grupo abeliano G definiendo $C_k(G) = G \otimes C_k$ y

$$\partial_k^c(G) = 1_G \otimes \partial_k^c : C_{k+1}(G) \longrightarrow C_k(G)$$

La importancia de la construcción anterior se refleja en el siguiente resultado.

TEOREMA (R. Thom, S. Smale, J. Milnor, C. Conley, E. Witten)
(1) $\partial^c_{k-1}(G) \circ \partial^c_k(G) = 0$
(2) $H_k(M;G) \approx \frac{Ker\partial^c_{k-1}(G)}{Im\partial^c_k(G)}$
donde $H_*(M;G)$ es la homología singular de la variedad.

La formulación anterior se debe a Witten.

Para probar el teorema anterior, consideremos ahora lo siguiente, para todo punto crítico x de f, sea N_x, L_x el índice par descrito anteriormente, observemos que una orientación de $E^u_x = T_x W^u_x$ determina un generador de $H_k(N_x, L_x; Z) \approx Z$ donde $k = ind(x)$, esto muestra que C_k puede ser identificado con

$$C_k = \oplus_x H_k(N_x, L_x; Z)$$

donde la suma corre sobre los puntos críticos de índice k.
Como $H_k(N_x, L_x; Z)$ es libre, se sigue del teorema universal de coeficientes que el homomorfismo natural $G \otimes H_k(N_x, L_x; Z) \longrightarrow H_k(N_x, L_x; G)$ es un isomorfismo y entonces obtenenmos que

$$G \otimes C_k = \oplus_x H_k(N_x, L_x; G) = C_k(g)$$

Definamos $M(y, x) = W^u_y \cap W^s_x$ la unión de las orbitas conectando y y x, este conjunto es una subvariedad de M de dimensión $ind(y) - ind(x)$, suponiendo que φ_s es del tipo Morse-Smale y que $S(y, x) = M(y, x) \cup \{x, y\}$ es un conjunto aislado. Sea N_2, N_0 un índice par para $S(y, x)$ y definamos $N_1 = N_0 \cup (N_2 \cap M^a)$ donde $f(x) < a < f(y)$, entonces N_2, N_1 es un índice par para y y N_1, N_0 es un índice par para x.

Definamos esl homomorfismo

$$\triangle(x, y; G) : H_{k+1}(N_y, L_y; G) \longrightarrow H_k(N_x, L_x; G)$$

como la composición

$$H_{k+1}(N_y, L_y; G) \longrightarrow H_{k+1}(N_2, N_1; G)$$
$$\xrightarrow{\partial} H_k(N_1, N_0; G) \longrightarrow H_k(N_x, L_x; G)$$

donde el primer y tercer isomorfismos estan inducidos por la equivalencia homotópica entre los pares índices dada por el flujo, notemos entonces que podemos extender este morfismo al morfismo

$$\triangle_k(G) : C_{k+1}(G) \longrightarrow C_k(G)$$

el cual coincide con el operador frontera anterior.

Lema
$\partial^c(G) = \triangle(G)$
Dem.
Podemos suponer que x y y son los únicos puntos críticos de f en $f^{-1}[a, b]$ donde $a = f(x)$ y $b = f(y)$.
Más precisamente sea

$$S = \{z \in M \mid \nabla f(z) = 0,\ z \neq y\ ind(y) \leq ind(z)\} \cup M(z, y)$$

entonces existe una función diferenciable $g : M \longrightarrow R$ tal que $N = g^{-1}[0, \infty)$ es una vecindad aislante para S y $dg(z)\nabla f(z) > 0$ para $z \in \partial N = g^{-1}(0)$.

Con $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, podemos escoger una función estrictamente creciente $\rho : R \longrightarrow [0, 1]$ tal que $\rho(r) = 0$ si $r \leq 0$ y $\rho(r) = 1$ si $r \geq \varepsilon$, definamos $f_c : M \longrightarrow R$ como $f_c(z) = f(z) + c\rho(g(z))$, es claro entonces que f_c tiene los mismos puntos críticos que f para cualquier valor positivo de c, si además, $c > b - inf(f)$ entonces $S \subset f_c^{-1}(b, \infty)$.

Un argumento análogo puede ser usado para los puntos críticos $z \neq x$ tales que $ind(z) \leq ind(x)$.
Esta alteración no afecta a los homomorfismos ∂^c y $\triangle$.

Dados $a < c < b$, $\varepsilon > 0$ suf, pequeño y $T > 0$ suf. grande, definimos índices pares:

$N_y = \{z \in M \mid f(\varphi_{-T}(z)) \leq b + \varepsilon,\ f(z) \geq c\}$
$L_y = \{z \in N_y \mid f(z) = c\}$
$N_x = \{z \in M \mid f(\varphi_T(z)) \geq a - \varepsilon,\ f(z) \leq c\}$
$L_x = \{z \in N_x \mid f(\varphi_T(z) = a - \varepsilon\}$

Entonces un índice triple para el par x, y en el conjunto invariante aislado $S(y,x)$ esta dado por $N_2 = N_x \cup N_y$, $N_1 = N_x \cup L_y$ y $N_0 = L_x \cup \overline{L_y - N_x}$, nosotros usaremos esta tripleta para demostrar que $\partial^c = \Delta$ para el caso de coeficientes enteros.
Para esto notemos que N_y se contrae a $W_y^u \cap \{f \geq c\}$ cuando $T \longrightarrow \infty$, de la misma manera N_x define una vecindad tubular de $W_x^s \cap \{f \leq c\}$ cuya anchura converge a cero cuando $T \longrightarrow \infty$.

Como W_y^u y W_x^s se intersectan transversalmente se sigue que $N_x \cap W_y^u \cap \{f = c\}$ consiste de un número finito de componentes, digamos, $V_1, \ldots, V_m$, cada una de las cuales contiene un único punto $z_j \in M(y,x) \cap V_j$.
Más precisamente, si D^k denota la bola unitaria en R^k entonces existe un difeomorfismo

$$\psi_x : N_x \longrightarrow D^k \times D^{n-k}$$

tal que, $\psi_x(L_x) = \partial D^k \times D^{n-k}$, $\psi_x(W_x^s \cap N_x) = \{0\} \times D^{n-k}$ y $\psi_x(V_j) = D^k \times \{o_j\}$ donde $o_j \in \partial D^{n-k}$.
En particular, V_j es una k-variedad con frontera $W_j = V_j \cap L_x$ difoemorfa a D^k via $\psi_j = \pi_1 \circ \psi_x|_{V_j} : V_j \longrightarrow D^k$ y entonces la función $\pi_1 \circ \psi_x : N_x \longrightarrow D^k$ induce isomorfismo en homología

$$H_k(N_x, L_x) \approx H_k(D^k, \partial D^k) \approx H_k(V_j, W_j)$$

la orientación dada de E_x^u determina un generador de la homología $\alpha H_k(N-x, L_x) \approx Z$ el cual bajo el isomorfismo anterior es mapeado a un generador $\alpha_j \in H_k(V_j, W_j)$, la clase de homología α_j esta determinada por la orientación de $T_{z_j}V_j$ inducida por la orientación de E_x^u via el isomorfismo definido por el flujo, $T_{z_j}V_j \longrightarrow E_x^u$.

Esta orientación puede o no coincidir con la orientación inducida de W_y^u via la inyección

$$T_{z_j}V_j = T_{z_j}W_y^u \cap \nabla f(z_j)^{\perp} \subset T_{z_j}W_y^u$$

(tomando $-\nabla f(z_j)$ como el primer básico).
No obstante ambas orientaciones coinciden si y sólo si $n_j = 1$, donde $n_j \in \{-1, 1\}$ es el signo asociado a la orbita conectante $\gamma_j(s) = \varphi_s(z_j)$.

Escojamos una triangulación de las k-variedades V_j y extendamosla a una triangulación de la $k+1$-variedad $W_y^u \cap \{f \geq c\}$ con frontera $W_y^u \cap \{f = c\}$, esto junto con la orientación dada de W_y^u determina un generador

$$\beta \in H_{k+1}(W_y^u \cap N_y, W_y^u \cap L_y) \approx H_{k+1}(N_y, L_y)$$

la clase de homología

$$\partial_j\beta \in H_k(W_y^u \cap L_y, \overline{W_y^u \cap L_y - N_j}) \approx H_k(V_j, W_j)$$

esta representada por la triangulación original de V_j junto con la orientación inducida de W_y^u y entonces coincide con $n_j\alpha_j$, usando el isomorfismo

$$H_k(N_x, L_x) \approx H_k(V_j, W_j)$$

obtenemos que

$$\triangle\beta = \sum_{j=1}^{m} n_j\alpha = n(y,x)\alpha \in H_k(N_x, L_x)$$

El caso geneal se sigue de la identidad $\triangle(G) = 1_G \otimes \triangle(Z)$ el cual es consecuencia de el hecho de que el homomorfismo $G \otimes H_k(*; Z) \longrightarrow H_k(*; G)$ conmuta con los operadores frontera ∎

demostraremos ahora el teorema

Demostración del Teorema
Para $j \leq k$, sea $S_{kj} = \cup_{(x,y)}M(y,x)$ tal que x, y son puntos críticos de f con $j \leq ind(x) \leq ind(y) \leq k$. Estos conjuntos resultan compactos si el flujo es del tipo Morse-Smale y si $j \leq k$ entonces S_{kj} resulta un conjunto

invariante aislado, en particular $S_{n0} = M$ y S_{kk} es el conjunto de puntos críticos de índice k.

Existe entonces una filtración $N_0 \subset N_1 \subset \cdots N_n = M$ tal que (N_k, N_{j-1}) es un par índice para S_{kj} donde $j \leq k$ y $N_{-1} = \emptyset$.

Por el lema anterior existe un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} C_{k+1}(G) & \xrightarrow{\partial_k^c} & C_k(G) & \xrightarrow{\partial_{k-1}^c} & C_{k-1}(G) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{k+1}(N_{k+1}, N_k; G) & \xrightarrow{\partial_k} & H_k(N_k, N_{k-1}; G) & \xrightarrow{\partial_{k-1}} & H_{k-1}(N_{k-1}, N_{k-2}; G) \end{array}$$

en el cual los isomorfismos verticales estan dados por el lema de la equivalencia homotópica entre pares índices, se sigue entonces que

$$\partial_{k-1}^c(G) \circ \partial_k^c(G) = 0$$

Ademas este mismo lema muestra que $H_j(N_k, N_{k-1}; G) = \{0\}$ para $j \neq K$ y se sigue de la sucesión exacta de homología que la inclusión

$$H_j(N_k; G) \longrightarrow H_j(N_{k+1}; G)$$

es un isomorfismo para $j \neq k, k+1$, esto demuestra que $H_j(N_k; G) \longrightarrow H_j(M; G)$ es un isomorfismo para $j < k$ y $H_j(N_k) = 0$ si $j > k$, las identificaciones anteriores muestran que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} & & & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & H_k(N_k; G) \arrow[r] & H_k(N_k, N_{k-1}; G) \arrow[r, "\partial"] \arrow[dr, "\partial"'] & H_{k-1}(N_{k-1}; G) \arrow[d] \\ & & & H_{k-1}(N_{k-1}, N_{k-2}; G) \end{tikzcd}$$

las sucesiones horizontales y verticales son exactas, y en particular el homomorfismo $H_{k-1}(N_{k-1}; G) \longrightarrow H_{k-1}(N_{k-1}, N_{k-2}; G)$ es inyectivo y los kernels de los dos homomorfismos frontera coinciden, además ambos son isomorfos a $H_k(N_k; G)$ y $Ker(\partial_{k-1}^c) \subset C_k(G)$, concluimos entonces que la sucesión exacta de homología

$$H_{k+1}(N_{k+1}, N_k; G) \xrightarrow{\partial_k} H_k(N_k; G) \longrightarrow H_k(N_{k+1}; G) \longrightarrow 0$$

es isomorfa a la sucesión

$$C_{k+1}(G) \xrightarrow{\partial_k^c} Ker\partial_{k-1}^c(G) \longrightarrow H_k(M; G) \longrightarrow 0$$

de donde se concluye que

$$H_k(M; G) \approx \frac{Ker\partial_{k-1}^c(G)}{Im\partial_k^c}$$

■

Pasaremos ahora a ejemplificar con algunos calculos
(1) Sea $M = R^n$, definamos $f : M \longrightarrow R$ como $f = \sum x_i^2$, es claro que el único punto crítico (además no degenerado) es el cero, y el índice es cero, se obtiene entonces que

$$C_k = \begin{cases} Z & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

obtenemos entonces que

$$H_m(R^n; Z) = \begin{cases} Z & \text{si } m = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(2) Sea $M = S^n$, y $f : M \longrightarrow R$ la función "altura", es claro que los únicos puntos críticos son $(0, ..., 0, \pm 1)$ y los índices son del $(0, ..., 0, 1)$ es n y el índice del punto $(0, ..., 0, -1)$ es cero, obtenemos que:

$$C_k = \begin{cases} Z & \text{si } k = 0, n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

las homologías son

$$H_m(S^n; Z) = \begin{cases} Z & \text{si } m = n, 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(3) Sea $M = CP^n$, recordemos que podemos encontrar una función $f : M \longrightarrow R$ con un punto crítico no degenerado por cada par entre 0 y $2n$, esto es $CP^n = e^0 \cup e^2 \cup \cdots \cup e^2 n$
(para esto ver las aplicaciones del capítulo 2)
por lo que

$$C_k = \begin{cases} Z & \text{si } 0 \leq k = 2i \leq 2n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

las homologías entonces son

$$H_m(CP^n; Z) = \begin{cases} Z & \text{si } m = 2i \text{ y } 0 \leq 2i \leq 2n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(4) Sea M el toro visto de la siguiente manera

y $f : M \longrightarrow R$ la función "altura", notemos entonces que sólo hay cuantro puntos críticos, x, y, z, w con $ind(x) = 2$, $ind(y) = ind(z) = 1$ y $ind(w) = 0$ notemos entonces que

$$0 \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow 0$$

es equivalente a

$$0 \longrightarrow Z\langle x\rangle \longrightarrow Z\langle y\rangle \oplus Z\langle z\rangle \longrightarrow Z\langle w\rangle \longrightarrow 0$$

notemos además que sólo hay dos orbitas conectando x y y las cuales llegan en dirección opuesta por lo que $n_{\gamma_1} = -n_{\gamma_2}$, por lo que $\partial_2 = 0$, con un argumento análogo se muestra que $\partial_1 = 0$ y entonces

$$H_m(T; Z) = \begin{cases} Z & \text{si } m = 0, 2 \\ Z \oplus Z & \text{si } m = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(5) De manera análoga, se pueden calcular las homologías de cualquier dos variedad compacta orientable de género g.

■

Apéndice 1

La existencia de flujos

Sea X un campo vectorial sobre una variedad diferenciable M definido en una vecindad de $p \in M$.
Una curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ con $\alpha(0) = p$ (denotaremos al vector tangente en $\alpha(t)$ por $\alpha'(t)$ o $\frac{d\alpha}{dt}$) y $\frac{d\alpha}{dt} = X(\alpha(t))$ se llama una *curva integral* para X con condicion inicial $\alpha(0) = p$.
Nuestro problema ahora es demostrar que dada una variedad M y un campo vectorial X siempre existen las curvas integrales. Por el momento trabajaremos en R^n y luego de manera natural "levantaremos" los resultados a M.
Sea $f : U \subset R^n \longrightarrow R^n$, decimos que f satisface una *condición de Lipschitz* en U si existe $k \in R$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \ \ \forall x, y \in U$$

Claramente una función de Lipschitz es continua, pero no necesariamente es diferenciable, por ejemplo $g(x) = |x|$, también toda función de clase C^1 es localmente Lipschitz y toda función de Lipschitz es acotada en cualquier conjunto acotado.
El Teorema de existencia y unicidad que andamos buscando depende del siguiente:

TEOREMA (Lema de contracción)
Sea (M, d) un espacio métrico completo no vacío y sea $f : M \longrightarrow M$ una contracción, esto es, existe $c < 1$ tal que

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leq cd(x, y) \ \forall x, y \in M$$

entonces existe un único $x \in M$ *tal que* $f(x) = x$.

Dem.

Notemos que f es continua por ser Lipschitz, sea $x_0 \in M$ y definamos $x_{n+1} = f(x_n)$, i.e., $x_{n+1} = f^n(x_0) = (f \circ f \circ \cdots \circ f)(x_0)$ n veces, es claro entonces que $d(x_n, x_{n+1}) \leq c^n d(x_0, x_1)$ entonces

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+k} &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots d(x_{n+k-1}, x_{n+k}) \\ &\leq (c^n + \cdots + c^{n+k-1}) d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

como $c < 1$, $\sum c^n$ converge y $(c^n + \cdots + c^{n+k-1}) \longrightarrow 0$, por lo que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy, por lo que existe $x \in M$ tal que $x_n \longrightarrow x$, como f es continua

$$f(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} x_{n+1} = x$$

la unicidad se sigue del hecho de que $d\big(f(x), f(y)\big) \leq cd(x, y)$ ∎

Si (M, d) es un espacio métrico y X es un espacio compacto entonces $C(X, M) = \{f : X \longrightarrow M | \ f \text{ es continua}\}$ es un espacio métrico si definimos $\sigma(f, g) = sup\{d\big(f(x), g(x)\big) | x \in X\}$, más aún, si M es acotado, esto es la métrica es acotada, no es necesario que X sea compacto.

Lema

Si (M, d) *es completo entonces* $\big(C(X, M), \sigma\big)$ *es completo*

Para demostrar esto básicamente lo que se usa es que convergencia uniforme de funciones continuas es continua, más el hecho de que $\{f_n(x)\}$ es una sucesión convergente para toda $x \in X$.

Notemos que si $M \subset R^n$ es compacto entonces $\big(C(X, M), \sigma\big)$ es completo si definimos $\sigma(f, g) = sup\{|f(x) - g(x)| | x \in X\}$, si $U \subset R^n$ y $f : U \longrightarrow R^n$ es continua entonces una función $\alpha : (-b, b) \longrightarrow U$ satisface que

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= f\big(\alpha(t)\big) \\ \alpha(0) &= x \end{aligned}$$

si satisface la ecuación integral

$$\alpha(t) = x + \int_0^t f(\alpha(u))du \tag{1}$$

donde $\int_0^t f(\alpha(u))du = \left(\int_0^t f_1(\alpha(u))du, \ldots, \int_0^t f_n(\alpha(u))du\right)$, inversamente, si α satisface (1) entonces α es diferenciable y por lo tanto continua, ademas, $\alpha' = f \circ \alpha$ es continua, por lo que

$$\alpha(t) - x = \alpha(t) - \alpha(0) = \int_0^t \alpha'(u)du = \int_0^t f(\alpha(u))du$$

observemos ahora que si $f : [a,b] \longrightarrow R^n$ es continua y $|f| \leq k$ entonces existe $l \geq k$ tal que $|\int_a^b f(u)du| \leq l(b-a)$, ya que

$$\begin{aligned}
|\int_a^b f(u)du| &= |(\int_a^b f_1(u)du, \ldots, \int_a^b f_n(u)du)| \\
&= |(|\int_a^b f_1(u)du|, \ldots, |\int_a^b f_n(u)du|)| \\
&\leq |(\int_a^b |f_1(u)|du, \ldots, \int_a^b |f_n(u)|du)| \\
&\leq |(k(b-a), \ldots, k(b-a))| \\
&= k(b-a)(1, \ldots, 1) = (\sqrt{n}k)(b-a)
\end{aligned}$$

TEOREMA (De existencia local)
Sea $f : U \longrightarrow R^n$ con $U \subset R^n$ abierto, sea $x_0 \in U$, $a > 0$ tal que $\overline{B_{2a}(x_0)} \subset U$ y supongamos que
(1) $|f| \leq L$ en $\overline{B_{2a}(x_0)}$
(2) $|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$ $\forall x, y \in \overline{B_{2a}(x_0)}$
escojamos $b > 0$ tal que
(3) $b \leq \frac{a}{L}$
(4) $b < \frac{1}{k}$
entonces para todo $x \in \overline{B_a(x_0)}$ existe una única $\alpha_x : (-b, b) \longrightarrow U$ tal que

$$\alpha_x'(t) = f(\alpha_x(t))$$
$$\alpha_x'(0) = x$$

Dem.
Escojamos $x \in \overline{B_{2a}(x_0)}$ y fijemosla.
Sea $M = \{\alpha : (-b, b) \longrightarrow \overline{B_{2a}(x_0)} | \alpha \text{ es continua } \}$, entonces M es un espacio métrico completo.
Para cada $\alpha \in M$ definamos la curva $S\alpha$ en $(-b, b)$ como

$$S\alpha(t) = x + \int_0^t f(\alpha(u))du$$

La curva $S\alpha$ es continua, de hecho si $t \in (-b, b)$ tenemos que

$$\begin{aligned} |S\alpha(t) - t| &= |\int_0^t f(\alpha(u))du| \\ &\leq tL < bL \\ &\leq a \end{aligned}$$

la primera desigualdad es por (1) y la segunda por (3) como $|x - x_0| \leq a$ entonces

$$|S\alpha(t) - x_0| \leq |S\alpha(t) - x| + |x - x_0| < 2a \ \ \forall t \in (-b, b)$$

esto es $S\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow B_{2a}(x_0) \subset \overline{B_{2a}(x_0)}$
Notemos entonces que tenemos definida $S : M \longrightarrow M$, ademas para $\alpha, \beta \in M$ tenemos que

$$\|S\alpha - S\beta\| = sup\{|\int_0^t (f(\alpha(u)) - f(\beta(u)))du| t \in (-b, b)\}$$

pero

$$\begin{aligned} |\int_0^t (f\alpha - f\beta)du| &\leq |\int_0^t |f\alpha - f\beta|du| \\ &\leq |\int_0^t k|\alpha - \beta|du| \\ &= k\int_0^t |\alpha - \beta|du \\ &\leq tk|\alpha(t^*) - \beta(t^*)| \\ &< bk|\alpha(t^*) - \beta(t^*)| \end{aligned}$$

donde $t^* \in (0,t) \subset (-b,b)$, por lo que

$$sup|\int_0^t (f\alpha - f\beta)du| < bksup\{|\alpha(t^*) - \beta(t^*)| \mid -b < t^* < b\}$$
$$= bk\|\alpha - \beta\|$$

pero $bk < 1$ por lo que $S : M \longrightarrow M$ es una contracción, de esto se sigue que S tiene un único punto fijo, i.e., existe un único $\alpha : (-b,b) \longrightarrow \overline{B_{2a}(x_0)}$ tal que

$$\alpha(t) = x + \int_0^t f(\alpha(u))du \qquad (*)$$

pero recordemos que queríamos una única $\alpha : (-b,b) \longrightarrow U$ que satisfaciera $(*)$, por lo que falta verificar que esta α es la única $\beta : (-b,b) \longrightarrow U$ tal que $\beta(t) = x + \int_0^t f(\beta(u))du$, sea $\beta : (-b,b) \longrightarrow U$ tal que $\beta(t) = x + \int_0^t f(\beta(u))du$, notemos que para demostrar la unicidad basta con demostrar que $\beta \in M$, esto es $\beta(t) \in \overline{B_{2a}(x_0)} \forall t$, recordemos que si $0 \le t < b$ entonces $\beta(t) = x + \int_0^t f(\beta(u))du \in B_{2a}(x_0)$ por lo que si $0 \le u < t$ entonces $\beta(u) \in B_{2a}(x_0) \subset \overline{B_{2a}(x_0)}$.
Sea $A = \{t \mid 0 \le t < b, \beta(u) \in B_{2a}(x_0) \forall u \le t\}$. Sea $a = supA$ y supongamos que $a < b$, entonces $\beta(a) \in B_{2a}(x_0)$ pero por continuidad tenemos que $\beta(a+s) \in B_{2a}(x_0)$ para s suficientemente pequeña, por lo que $supA = b$, un argumento análogo funciona para las $t \le 0$ ∎

Sea $\alpha(t)$ tal que $\alpha'(t) = f(\alpha(t))$ y definamos $\beta(t) = \alpha(t_0 + t)$ notemos que

$$\beta'(t) = \alpha'(t_0 + t) = f(\alpha(t_0 + t)) = f(\beta(t))$$

TEOREMA
Sean, $f : U \longrightarrow R^n$ una función localmente Lipschitz, $x \in U$ y α_1, α_2 dos funciones definidas en $I = (a,b)$, con $\alpha_1(I), \alpha_2(I) \subset U$ y tales que
(1) $\alpha_i(t) = f(\alpha_i(t))$
(2) $\alpha_i(0) = x$ para $i = 1,2$
entonces $\alpha_1 = \alpha_2$ en I
Dem.

Sabemos que $\alpha_1(0) = \alpha_2(0)$, y satisfacen la misma ecuación diferencial por lo que para t suficientemente pequeña se tiene que $\alpha_1(t) = \alpha_2(t)$, definamos $J = \{t \in I \mid \alpha_1(t) = \alpha_2(t)\}$ es claro que J es no vacío y abierto y que J^c también es abierto, por lo que $J = I$. ∎

Notemos que podemos escribir $\alpha_x(t) = \alpha(t,x)$ y entonces tenemos definida una función $\alpha : (-b,b) \times B_a(x_0) \longrightarrow U$ que satisface:

$$\alpha(0,x) = x$$
$$\frac{d}{dt}\alpha(t,x) = f\big(\alpha(t,x)\big)$$

A α le llamaremos el *flujo local* para f en $(-b,b) \times B_a(x_0)$.
Si $y = \alpha_x(t_0)$ entonces la curva integral α_x con condición inicial $\alpha_x(0) = x$ difiere de α_y con condición inicial $\alpha_y(0) = y$ solamente por una cambio de parámetro, esto es, las imagenes de ambas curvas se "traslapan" bien.
Si fijamos x entonces la función $t \mapsto \alpha(t,x)$ "empuja" a x a lo largo de la curva integral con condición inicial $\alpha_x(0) = x$.
Denotaremos por $\phi_t(x) = \alpha(t,x) = \alpha_x(t)$.

TEOREMA
Si $f : U \longrightarrow R^n$ el localmente Lipschitz entonces el flujo $\alpha : (-b,b) \times B_a(x_0) \longrightarrow U$ es continuo
Dem.
Recordemos que denotamos por S a la función que a cada α le asociaba $S\alpha(t) = x + \int_0^t f\big(\alpha(u)\big)du$, y notemos que también depende de x, por lo que ahora la denotaremos por $S_x\alpha$ entonces

$$\|\alpha_x - S_y\alpha_x\| = \|S_x\alpha_x - S_y\alpha_x\| = |x-y|$$

Recordando que $\|S\alpha - S\beta\| \leq bk\|\alpha - \beta|$, y si denotamos por S_y^n a la n-ésima iteración de S_y entonces

$$\begin{aligned}\|\alpha_x - S_y^n\alpha_x\| &\leq \|\alpha_x - S_y\alpha_x\| + \|S_y\alpha_x - S_y^2\alpha_x\| + \cdots + \|S_y^{n-1}\alpha_x - S_y^n\alpha_x\| \\ &\leq (1 + bk + \cdots + (bk)^{n-1})|x-y| \\ &\leq \frac{1}{1-bk}|x-y|\end{aligned}$$

ademas $S_y^n \alpha_x \longrightarrow \alpha_y$ por lo que

$$\|\alpha_x - \alpha_y\| \leq \frac{1}{1-bk}|x-y|$$

de donde obtenemos que α satisface una condición de Lipschitz y por lo tanto es continua ■

Entre más condiciones le pidamos a f más condiciones tendremos sobre α, esto es

TEOREMA
Si $f : U \longrightarrow R^n$ es de clase C^k entonces el flujo $\alpha : (-b,b) \times B_a(x_0) \longrightarrow U$ también es de clase C^k

Aceptando esto, tenemos que si f es de clase C^∞ entonces ϕ_t es de clase C^∞.
Como $\alpha : (-b,b) \times B_a(x_0) \longrightarrow U$ satisface $\alpha(0,x) = x$ tenemos que

$$\alpha : \{0\} \times \overline{B_{\frac{a}{2}}(x_0)} \longrightarrow \overline{B_{\frac{a}{2}}(x_0)} \subset B_a(x_0)$$

por la continuidad de α y la compacidad de $\{0\} \times \overline{B_{\frac{a}{2}}(x_0)}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B_{\frac{a}{2}} \longrightarrow B_a(x_0)$$

Si $|s| < \varepsilon$ y $x \in B_{\frac{a}{2}}(x_0)$ entonces $\alpha(s,x) \in B_a(x_0)$ y podemos definir entonces $\gamma(t) = \alpha(t, \alpha(s,x))$ para $|t| < \varepsilon$, se satisface entonces que

$$\gamma'(t) = f\big(\gamma(t)\big)$$
$$\gamma(0) = \alpha(s,x)$$

pero notemos que $\beta(t) = \alpha(s+t, x)$ definida para $|s+t| < \varepsilon$ satisface que

$$\beta'(t) = f\big(\beta(t)\big)$$
$$\beta(0) = \alpha(s,x)$$

consecuentemente, $\beta(t) = \alpha(t, \alpha(s,x))$ para $|t| < \varepsilon$ esto es si $|s|, |t|, |s+t| < \varepsilon$ entonces $\alpha\big(t, \alpha(s,x)\big) = \alpha(s+t, x)$

Si lo pensamos ahora como $\phi_t : B_{\frac{a}{2}}(x_0) \longrightarrow R^n$, y $|s|, |t|, |s+t| < \varepsilon$ entonces

$$\phi_s(\phi_t(x)) = \phi_{s+t}(x)$$

para las $x, \phi_t(x) \in B_{\frac{a}{2}}(x_0)$, i.e., $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s = \phi_s \circ \phi_t$, se sigue entonces que para $|s| < \varepsilon$ ϕ_s es un difeomoefismo con inverso $\phi_s^{-1} = \phi_{-s}$. De todo esto obtenemos el siguiente

TEOREMA

Sea X un campo vectorial en M, $p \in M$, entonces existe un conjunto abierto V, ($p \in V$) y $\varepsilon > 0$ tal que existe una única colección de difeomorfismos $\phi_t : V \longrightarrow \phi_t(V) \subset M$ para $|t| < \varepsilon$ con las siguientes propiedades:
(1) $\phi : (-\varepsilon, ve) \times V \longrightarrow M$ definida por $\phi(t,p) = \phi_t(p)$ es de clase C^∞
(2) si $|s|, |t|, |s+t| < \varepsilon$ y $q, \phi_t(q) \in V$ entonces $\phi_{s+t}(q) = \phi_s \circ \phi_t(q)$
(3) si $q \in V$ entonces $X(q)$ es el vector tangente a la curva $t \mapsto \phi_t(q)$ en $t = 0$

Dem.

Sea $x : U \longrightarrow M^n$ una parametrización de M en p con $x(0) = p$, si X es campo vectorial en M, entonces podemos definir

$$Y(u) = dx^{-1}_{x(u)}\big(X(x(u))\big)$$

es un campo vectorial en U, esto es $Y : U \longrightarrow R^n$ y es de clase C^∞, por lo que Y es localmente Lipschitz y se tiene entonces que existe $a > 0$, k y L tal que
(1) $|Y(u) - Y(v)| \leq k|u - v|$ $\forall u, v \in \overline{B_{2a}(0)}$
(2) $|Y| \leq L$ en $\overline{B_{2a}(0)}$
y si b es mayor que 0 y
(3) $b \leq \frac{a}{L}$
(4) $b < \frac{1}{k}$
entonces $\forall u \in \overline{B_a(0)}$ existe un único $\alpha_u : (-b, b) \longrightarrow U$ tal que

$$\alpha_u'(t) = Y\big(\alpha_u(t)\big)$$
$$\alpha_u(0) = u$$

asociado a α tenemos $\psi_t(u) = \alpha(t, u)$, escojamos entonces ε como antes y obtenemos que $\psi_s \circ \psi_t = \psi_{s+t}$ y ademas

$$Y(q)f = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f\big(\psi_h(q)\big) - f(q)}{h} \qquad (*)$$

es decir $Y(q)$ es el vector tangente a la curva $t \mapsto \psi_t(q)$ en $t = 0$.
Basta entonces con definir el "levantamiento" como sigue

$$\phi_t(v) = (x \circ \psi_t \circ x^{-1})(v)$$

donde $v \in V = x(B_{2a}(0)$, es claro que $\phi_t : V \longrightarrow \phi_t(V)$ es un difeomorfismo y que $\phi_{t+s} = \phi_t + \phi_s$, (4) se sigue de $(*)$ ∎

Notemos que ϕ no tiene por que estar definida para toda t, ni para todo $p \in M$, (recordemos que el soporte de un campo vectorial es $sop(X) = \{p \in M \mid X(p) \neq 0\}$) pero si el soporte es compacto entonces

TEOREMA
Si X tiene soporte compacto (en particualr si M es compacta) entonces existen difoemorfismos $\phi_t : M \longrightarrow M$ $\forall t \in R$ con las propiedades (1), (2) y (3) del teorema anterior
Dem.
Cubramos el soporte de X con una cubierta finita $V_1, \ldots, V_n$ con abiertos como en el teorema anterior, con correspondientes $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ y difeomorfismos ϕ_t^i.
Sea $\varepsilon = min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$, notemos que por la unicidad se tiene que $\phi_t^i(q) = \phi_t^j(q)$ para toda $q \in V_i \cap V_j$ podemos entonces definir

$$\phi_t(q) = \begin{cases} \phi_t^i(q) & \text{si } q \in V_i \\ q & \text{si } q \notin sop(X) \end{cases}$$

claramente $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \longrightarrow M$ es de clase C^∞ y $\phi_{s+t} = \phi_s \circ \phi_t$ si $|t|, |s|, |s+t| < \varepsilon$ y cada ϕ_t es un difeomorfismo.
Para definir ϕ_t para $|t| \geq \varepsilon$ escribamos primero $t = k(\frac{\varepsilon}{2}) + r$ con k un entero y $|r| < \frac{\varepsilon}{2}$
entonces

$$\phi_t = \begin{cases} \phi_{\frac{\varepsilon}{2}} \circ \cdots \circ \phi_{\frac{\varepsilon}{2}} \circ \phi_r = \phi_{\frac{\varepsilon}{2}}^k & \text{si } k \geq 0 \\ \phi_{-\frac{\varepsilon}{2}} \circ \cdots \circ \phi_{-\frac{\varepsilon}{2}} \circ \phi_r = \phi_{\frac{\varepsilon}{2}}^k & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

Obtenemos entonces $\{\phi_t\}$ como la colección buscada ∎

Podemos pensar ahora en una función $R \longrightarrow Diff(M)$, $t \mapsto \phi_t$ a esta función le llamaremos el *grupo de difeomorfismos a un parámetro* y diremos que está generado por X.
En el caso local le llamaremos el *grupo de difeomorfismos locales a 1 parámetro.* Al campo vectorial X le llaman a veces el *generador infinitesimal* de $\{\phi_t\}$.
La condición (3) del último teorema puede reescribirse de la siguiente manera, si pensamos en la acción de $X(q)$ en una función $f : M \longrightarrow R$ de clase C^∞ como

$$(Xf)(q) = X(q)f = \lim_{h \to 0} \frac{f(\phi_h(q)) - f(q)}{h}$$

ya que $X(q)$ es el vector tangente a la curva $t \mapsto \phi_t(q)$ en $t = 0$,
Notemos también que de esta última igualdad, se obtiene que dado un grupo de difeomorfismos a un parámetro en M podemos definir un campo vectorial.

Apéndice 2

El Teorema de Whitney

Sea M una n-variedad diferenciable, decimos que $A \subset M$ tiene *medida cero* si para toda (φ, U) carta de M, con $\varphi : U \longrightarrow R^n$, se tiene que $\varphi(A \cap U) \subset R^n$ tiene medida cero.

Tenemos entonces un teorema que nos dice que tan "grande" es el conjunto de valores críticos de una función diferenciable.

TEOREMA (de Sard)
Sea $f : M \longrightarrow N$ una función de clase C^1 entre variedades de dimensión m y n respectivamente, entonces el conjunto de valores críticos de f tiene medida cero en N
Dem.
Dado que las variedades con las que estamos trabajando son dos numerables, basta con que lo demostremos para el conjunto de puntos críticos contenidos en una vecindad coordenada de M, esto es, basta demostrar el caso $f : U \subset R^m \longrightarrow R^n$ con U abierto y f de clase C^1.

Sea C el conjunto de puntos críticos de f, esto es $\{x \in U \mid rango(df_x) < p\}$.

Definamos $C_i = \{x \mid \textit{todas las parciales de } f \textit{ de orden} \leq i \textit{ se anulan en } x\}$, entonces tenemos una sucesión de conjuntos descendentes cerrados

$$C \supset C_1 \supset C_2 \supset \cdots$$

La demostración se divide en tres pasos

(1) $f(C - C_1)$ tiene medida cero

(2) $f(C_i - C_{i+1})$ tiene medida cero para $i \geq 1$
(3) $f(C_k)$ tiene medida cero para k suficientemente grande

Demostración del caso 1: Usaremos sin demostración la siguiente versión del teorema de Fubini:
$A \subset R^p = R \times R^{p-1}$ tiene medida cero si $(cte \times R^{p-1}) \cap A$ tiene medida cero para toda $cte \in R$.

La idea es usar inducción sobre la suma de las dimensiones de la variedad, y por lo tanto el pie de la inducción es claro.

Para cada $x \in C - C_1$ encontraremos una vecindad abierta $V \subset R^n$ tal que $f(V \cap C)$ tiene medida cero, y como $C - C_1$ se puede cubrir por una cantidad numerable de estas vecindades, obtendremos que $f(C - C_1)$ tiene medida cero.

Sea $x \notin C_1$, entonces sin perder generalidad podemos suponer que $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) \neq 0$, definamos entonces

$$\begin{aligned} h : U &\longrightarrow R^n \\ x &\mapsto (f_1(x), x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

es claro que dh_x es no singular, por lo que existe $V \in N_x$ abierto tal que

$$h|_V : V \longrightarrow V' = h(V)$$

es un difeomorfismo, sea $g = f \circ h^{-1} : V' \longrightarrow R^p$, notemos entonces que los puntos críticos de g, conjunto al que denotaremos por C', satiface que $C' = h(V \cap C)$, de donde $g(C')$, que es el conjunto de valores críticos de g es igual a $f(V \cap C)$.

Notemos también que por construcción, si $(t, x_2, \ldots, x_n) \in V'$ entonces $g(t, x_2, \ldots, x_n)$ está contenido en el hiperplano $t \times R^{p-1} \subset R^p$, esto es g manda hiperplanos en hiperplanos, definamos entonces

$$g^t : (t \times R^{n-1}) \cap V' \longrightarrow t \times R^{p-1}$$

donde $g^t = g|_{(t\times R^{n-1})\cap V'}$, además un punto en $t \times R^{n-1}$ es un punto crítico de g^t si y sólo si es un punto crítico de g ya que

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & \left(\frac{\partial g_i^t}{\partial x_j}\right) \end{pmatrix}$$

usando ahora la hipótesis de inducción, el conjunto de valores críticos de g^t tiene medida cero en $t \times R^{p-1}$, por lo que el conjunto de valores críticos de g intersecta cada hiperplano $t \times R^{p-1}$ en un conjunto de medida cero, concluimos entonces que $g(C')$ es medible, ya que puede ser expresado como una unión contable de conjuntos medibles, y usando Fubini, concluimos que $f(V \cap C) = g(C')$ tiene medida cero, lo cual termina el primer caso.

Demostración del Caso 2: De nueva cuenta si $x \in C_k - C_{k+1}$ entonces existe una $k+1$ derivada parcial tal que

$$\frac{\partial^{k+1} f_r}{\partial x_{s_1} \cdots \partial x_{s_{k+1}}}(x) \neq 0$$

entonces $w(y) = \frac{\partial^k f_r}{\partial x_{s_2} \cdots \partial x_{s_{k+1}}}(y)$ satisface que $w(x) = 0$ pero $\frac{\partial w}{\partial x_{s_1}}(x) \neq 0$, supongamos sin perder generalidad que $s_1 = 1$, entonces la función

$$\begin{aligned} h : U &\longrightarrow R^n \\ x &\longmapsto (w(x), x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

es no singular y $h|_V : V \longrightarrow V' = h(V)$ es un difeomorfismo para algun $V \in N_x$ abierto, notemos que h manda $C_k \cap V$ en el hiperplano $0 \times R^{n-1}$, de nuevo consideremos $g = f \circ h^{-1} : V' \longrightarrow R^p$, sea

$$g^0 = g|_{(0\times R^{n-1})\cap V'} : (0 \times R^{n-1}) \cap V' \longrightarrow R^p$$

usando nuevamente la hipótesis de inducción se conluye que el conjunto de valores críticos de g^0 tiene medida cero en R^p y de nuevo cada punto en $h(C_k \cap V)$ es un punto crítico de g^0 (ya que todas las derivadas de orden $\leq k$ se anulan).

Se sigue que $f(C_k \cap V) = g^0 h(C_k \cap V)$ tiene medida cero, y como $C_k - C_{k+1}$ se puede cubrir con una colección contable de tales conjuntos V, concluimos que $f(C_k - C_{k+1})$ tiene medida cero.

Demostración del Caso 3: Sea I^n un cubo de lado δ, sea k tal que $k > \frac{n}{p} - 1$, probaremos que $f(C_k \cap I^n)$ tiene medida cero, y como C_k puede cubrirse con un número numerable de tales cubos, se seguira que $f(C_k)$ tiene medida cero.

Del teorema de Taylor, la compacidad de I^n y la definición de C_k tenemos que

$$f(x+h) = f(x) + R(x,h) \tag{1}$$

donde $\|R(x,h)\| \leq c\|h\|^{k+1}$ para $x \in C_k \cap I^n$, $x + h \in I^n$, donde c es una constante que depende sólo de f y I^n, subdividamos I^n en r^n cubos de cubos de lados $\frac{\delta}{r}$, sea I_1 un cubo de la subdivisión tal que $x \in I_1 \cap C_k$ entonces cualquier punto de I_1 puede escribirse como $x + h$ donde, $\|h\| \leq \sqrt{n}\frac{\delta}{r}$, de (1) se sigue que $f(I_1)$ está contenido en un cubo de lado $\frac{a}{r^{k+1}}$ centrado en $f(x)$, donde $a = 2c(\sqrt{n}\delta)^{k+1}$, de esto $f(C_k \cap I^n)$ está contenido en una unión de a lo más r^n cubos teniendo un volumen total de

$$V \leq r^n \left(\frac{a}{r^{k+1}}\right)^p = a^p r^{n-(k+1)p}$$

si $k+1 > \frac{n}{p}$ entonces $V \longrightarrow 0$, por lo que $f(C_k \cap I^n)$ tiene medida cero ∎

Corolario
El conjunto de valores regulares de una función diferenciable $f : M \longrightarrow N$ es denso en N

Empezaremos recordando algunas definiciones básicas, si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua, la llamamos *propia* si $f^{-1}(K) \subset X$ es compacto para todo $K \subset Y$ compacto.

Si $f : M \longrightarrow N$ es una función diferenciable entre las variedades M y N, entonces la llamamos *inmersión* si $rango(df_x) = dim(M)$ para todo $x \in M$.

A una inmersión $f : X \longrightarrow Y$ tal que X es difeomorfo a $f(X) \subset Y$ le llamamos un *encaje.*

Tenemos entonces un lema

Lema

Toda inmersión inyectiva y propia es un encaje

Dem.

Para ver que $f(X)$ es una variedad, es suficiente mostrar que la imagen de cualquier abierto $W \subset X$ es un subconjunto abierto de $f(X)$. Si $f(W)$ no es abierto entonces existe una sucesión $y_i \in f(X)$ con $y_i \notin f(W)$ pero que $y_i \longrightarrow y \in f(W)$, notemos entonces que $\{\{y_i\}, y\}$ es compacto, por lo que si $x_i = f^{-1}(y_i)$ y $x = f^{-1}(y)$ entonces $\{\{x_i\}, x\}$ es compacto, por ser f propia. Existe entonces una subsucesión $\{x_j\}$ tal que $x_j \longrightarrow z \in X$, tenemos entonces que $f(x_j) \longrightarrow f(z)$ y $f(x_i) \longrightarrow f(x)$ pero sabemos que f es inyectiva, por lo que $z = x$, como $x_i \longrightarrow x$, para i suficientemente grande $x_i \in W$, lo cual implica que $f(x_i) = y_i \in f(W)$ .lo cual no puede pasar, por lo que W es abierto, tenemos ahora una función biyectiva y tal que es difeomorfismo local, por lo tanto es un difeomorfismo global ∎

Notemos que si X es compacto, entonces toda función continua es propia, más aún, f es un encaje si y sólo si f es una inmersión inyectiva.

Daremos ahora una definición que nos resultará util en el desarrollo de esta parte de la teoría.

Sea $f : M \longrightarrow N$ una función de clase C^k. Sea $Z = \{Z_i, H_i\}$ un atlas localmente finito para N con $H_i = (z_{1i}, \ldots, z_{ni})$ y $W = \{W_i, h_i\}$ un atlas localmente finito para M con $h_i = (w_{1i}, \ldots, w_{mi})$ tal que $\overline{W_i}$ es compacto y $f(\overline{W_i}) \subset Z_{j(i)}$. Sea también $\varepsilon(*)$ una función sobre M positiva y continua y $k \in N$, entonces

$$\mathrm{N}(W, Z, \varepsilon, k, f) = \{g : M \longrightarrow N \mid g \in C^k(M, N)\}$$

que satisfacen:

$g(\overline{W_i}) \subset Z_j$ para todas i, j tal que $f(\overline{W_i}) \subset Z_j$, además para estos valores de i, j supongamos que las expresiones locales son

$$H_j \circ f \circ h_i^{-1} = (f_{ij}^1, \ldots, f_{ij}^n)$$

y

$$H_j \circ g \circ h_i^{-1} = (g_{ij}^1, \ldots, g_{ij}^n)$$

entonces

$$|Df_{ij}^r(w) - Dg_{ij}^r(w)| < \varepsilon\big(h^{-1}(w)\big)$$

para toda $w \in h_i(W_i)$, $r = 1, \ldots, n$ donde, $D = \frac{\partial^\alpha}{(\partial w_1)^{\alpha_1} \cdots (\partial w_m)^{\alpha_m}}$ con $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m \leq k$.

Esto es, al espacio de funciones entre M y N le estamos dando la topología C^k de Whitney, pero a nosotros no nos interesa este punto de vista por lo que no volveremos a mencionar esto para nada.

TEOREMA
Sea $f : M \longrightarrow N$ una función de clase C^k con $k \geq 2$, si $n \geq 2m$ entonces para toda (W, Z, ε, k) existe $g \in \mathrm{N}(W, Z, \varepsilon, k, f)$ la cual es inmersión

Antes de demostrar el teorema necesitamos de dos lemas auxiliares

Lema
Sea $F : U \subset R^m \longrightarrow R^n$ de clase C^2, donde $n \geq 2m$, entonces para toda $\delta > 0$ exite una matriz $A = (a_{ij})$ de $m \times n$ con $|a_{ij}| < \delta$ y tal que la función

$$x \mapsto F(x) + Ax \qquad .$$

es una inmersión

Dem.

Denotemos por $J(x)$ el jacobiano de F en x, entonces el jacobiano de la función anterior está dado por $J(x) + A$, la idea es escoger A tal que la matriz anterior tenga rango m en x, esto es queremos encontrar A **que no sea** de la forma $B - J(x)$ donde $rango B < m$ para toda $x \in U$, esto es, examinaremos el conjunto de matrices de la forma $B - J(x)$ donde $rango B < m$ y $x \in U$.

Sea $T(m, n; k)$ la variedad de todas las matrices de $m \times n$ de rango k, y sea

$$\begin{aligned} G_k : U \times T(m, n; k) &\longrightarrow T(m, n) \\ (x, B) &\mapsto B - J(x) \end{aligned}$$

Claramente G_k es de clase C^1, y la dimensión de $U \times T(m, n; k)$ es $m + k(m + n - k)$, pensemos por un momento que esta dimensión es una función que depende de k, entonces su derivada es $m + n - 2t$ lo cual es mayor que cero si $t < m < n$, se concluye entonces que $m + k(m + n - k)$ es monótona creciente para las k que satisfacen $k < m$, esto es,

$$\begin{aligned} m + k(m + n - k) &\leq m + (m - 1)(m + n - m + 1) \\ &= mn - (n - 2m) - 1 \\ &\leq mn \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se da si $n \geq 2m$.

Ahora, como la dimensión de $T(m, n)$ es mn, el teorema de Sard implica que la imagen de G_k tiene medida cero en $T(m, n)$, por lo que podemos encontrar $A \in T(m, n)$ tan cercana al cero como queramos y tal que satisfaga lo predicho ■

Notemos que esto lo que nos dice es que siempre que tengamos cualquier función la podemos perturbar un poco para obtener una inmersión.

Lema
Sea $F : U \subset R^m \longrightarrow R^n$ de clase C^1, supongamos que $F|_K$ tiene rango m para $K \subset U$ compacto, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que cualquier función $G : U \longrightarrow R^n$ satisfaciendo $\|G - F\|_1 < \varepsilon$ tiene rango m en K
Dem.
Recordemos primero que

$$\|G - F\|_1 = sup_{i,x}|f_i(x)| + sup_{i,j,x}|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)|$$

Sea $\delta(x)$ el máximo de los valores absolutos de los determinantes de las submatrices de $m \times m$ de el jacobiano de F en x, entonces δ es una función continua definida positiva en el compacto K, por lo que $\delta(x) > \delta > 0$ en K.

Podemos encontrar ε tal que cambiar las entradas de $J(x)$ por algo menor que ε produce un cambio en los determinantes por menos que $\frac{\delta}{2}$, bueno, es claro que esta ε al combinarse con el lema anterior nos sirve $\blacksquare$

Notemos que este lema lo que nos dice es que funciones muy "cercanas" a inmersiones son inmersiones.

Demostracion del Teorema
Dada la cubierta localmente finita $\{W_i\}$, todo punto p tiene una vecindad N_p que intersecta sólo un número finito de W_i. Como además $\{x \mid rango(f) = m\}$ es abierto, podemos encontrar W vecindad de K tal que $rango(f) = m$ en W.

Sea $N_p^1 = N_p \cap W$ y $N_p^2 = N_p \cap (M - K)$, es claro también que al hacer variar la p, obtenemos una cubierta abierta $\{N_p^1, N_p^2\}$ de M, por lo que podemos encontrar un refinamiento localmente finito numerable de vecindades V_i que satisfacen:

(1) $\{V_i\}$ es un refinamiento localmente finito de $\{W_\alpha\}$
(2) $h_i(V_i) = B_3^n$
(3) $O_i := h_i^{-1}(B_1^n)$ cubre M

Por la definición de N_p^j cada V_i está contenido en W o en $M-K$, reindexemos los índices de tal manera que $V_i \subset W$ si y sólo si $i \leq 0$.

Definamos $P_i = \overline{h_i^{-1}(B_2^n)}$, esto es, $O_i \subset P_i \subset V_i$ y además P_i es compacto, construiremos ahora inductivamente una sucesión de funciones de clase C^k $\{f_n\}$ tal que satisfagan:

(1) $f_0 = f$
(2) $f_s \in \mathbf{N}(W, Z, \frac{\varepsilon}{2^s}, k, f_{s-1})$
(3) f_s tiene rango m en $Q_s := \cup_{i \leq s} \overline{O_s}$
(4) $f_s(x) = f_{s-1}(x)$ para toda $x \in M - V_s$

Veamos primero que con esto basta para la conclusión del teorema. Notemos primero que del hecho de ser los V_i localmente finito y de (4), obtenemos que $f_s(x) = f_{s-1}(x)$ para s suficientemente grande y para cualquier x en la vencindad de cualquier $p \in M$, esto es la sucesión $\{f_s(x)\} \longrightarrow g(x)$, donde g es de clase C^k y tiene rango m en todos lados, además por (3) y (4) es claro que g es cercana a f hasta en las k-ésimas parciales, por lo que el único problema ahora es la construcción de dicha sucesión.

Sea $f_0 = f$ y supongamos que tenemos construida f_{s-1}, la condición (4) determina a f_s fuera de V_s, debemos entonces definir f_s de manera que satisfaga (2) y (3) en V_s y se pegue "suavemente" con f_{s-1} fuera de V_s, garantizamos esto definiendo $f_s = f_{s-1}$ en $V_s - P_s$, notemos entonces que el problema original lo tradujimos a definir una función en un espacio euclidiano.

Sabemos que $f_{s-1}(V_s) \subset Z_p$, sea entonces $g_{s-1} = H_p \circ f_{s-1} \circ h_s^{-1}$ su expresión local en estas cartas, queremos encontrar $g_s : B_3^m \longrightarrow H_p(Z_p) \subset R^n$ y definir $f_s = H_p^{-1} \circ g_s \circ h_s$ en V_s y tal que $f_s = f_{s-1}$ en $M - V_s$.

Escojamos A suficientemente pequeña para que

$$g_s(x) = g_{s-1}(x) + \varphi(x)A(x)$$

sea una inmersión, donde $\varphi : R^m \longrightarrow R$ es diferenciable, $\varphi \geq 0$
y

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \|x\|^2 \leq \frac{3}{2} \\ 0 & \text{si } \|x\|^2 \geq 2 \end{cases} .$$

por los lemas anteriores y por construcción es claro que está función g_s es la que andamos buscando, por lo que se puede construir dicha sucesión ■

Corolario
Cualquier variedad de clase C^k de dimensión n puede ser inmersa en R^{2n}

TEOREMA
Sea $f : M \longrightarrow R^n$ una inmersión de clase C^k, sea $W = \{W_i, h_i\}$ una atlas de M y Z el atlas usual de R^n, si $n > 2m$ entonces para toda $\varepsilon(x), k \geq 0$ existe una inmersión 1-1, $g : M \longrightarrow R^n$ tal que $g \in \mathrm{N}(W, Z, \varepsilon, k, f)$, si además f es 1-1 en una vecindad W de un conjunto cerrado K, entonces se puede escoger g tal que $g|_K = f|_K$
Dem.
La demostración es como antes.
Notemos que el aspecto local es trivial en este caso, todo punto p tiene una vecindad N_p tal que f es 1-1 en N_p (Teorema de la función Implicita).

Sea $N_p^1 = N_p \cap W$ y $N_p^2 = N_p \cap (M - K)$, escojamos una partición de la unidad $\{\varphi_i\}$ subordinada a esta cubierta, y reindexemos a las φ_i tal que *sop*$(\varphi_i) \subset W$ si y sólo si $i \leq 0$ definamos tentativamente

$$g = f + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \varphi_i$$

donde los $b_i \in R^n$ se escogen de manera inductiva como sigue:

Sea b_1 lo suficientemente pequeño para que $f_1 = f + b_1\varphi_1$ sea inmersión.

Sea $D_1 = \{(y_1, y_2) \mid \varphi_1(y_1) \neq \varphi_1(y_2)\}$ es claro que D_1 es un abierto de $M \times M$ y por lo tanto variedad, definamos

$$G_1 : D_1 \longrightarrow R^n$$
$$(y_1, y_2) \mapsto \frac{f(y_2) - f(y_1)}{\varphi_1(y_1) - \varphi_1(y_2)}$$

es claro que G_1 es diferenciable y que $dim(D_1) = 2m < n$, por el teorema de Sard, concluimos que $G_1(D_1)$ tiene medida cero, podemos entonces escoger $b_1 \notin G_1(D_1)$ tal que f_1 sea inmersión.

Supongamos ahora que tenemos los coeficientes $b_1, \ldots, b_n$ de tal forma que

$$f_n = f + \sum_1^n b_i \varphi_i$$

es una inmersión, de manera análoga definamos

$$D_{n+1} = \{(y_1, y_2) \mid \varphi_{n+1}(y_1) \neq \varphi_{n+1}(y_2)\}$$

y

$$G_{n+1} : D_{n+1} \longrightarrow R^n$$
$$(y_1, y_2) \mapsto \frac{f_n(y_2) - f_n(y_1)}{\varphi_{n+1}(y_1) - \varphi_{n+1}(y_2)}$$

de nueva cuenta $G_{n+1}(D_{n+1})$ tiene medida cero y podemos escoger $b_{n+1} \notin G_{n+1}(D_{n+1})$ tal que $f_{n+1} = f_n + b_{n+1}\varphi_{n+1}$ sea inmersión.

Notemos ahora que si $f_{n+1}(y_1) = f_{n+1}(y_2)$ entonces usando la definición

$$f_n(y_1) + b_{n+1}\varphi_{n+1}(y_1) = f_n(y_2) + b_{n+1}\varphi_{n+1}(y_2)$$
$$b_{n+1}(\varphi_{n+1}(y_1) - \varphi_{n+1}(y_2)) = f_n(y_2) - f_n(y_1)$$

pero como $b_{n+1} \notin G_{n+1}(D_{n+1})$ esto sólo sucede si

$$\varphi_{n+1}(y_1) = \varphi_{n+1}(y_2)$$
$$f_n(y_2) = f_n(y_1)$$

definamos g como al principio, es claro entonces que $g \in \mathbf{N}(W, Z, \varepsilon, k, f)$ y que g es una inmersión, basta entonces demostrar que g es inyectiva.

Supongamos que $g(y_1) = g(y_2)$, como $\{\varphi_i\}$ es partición de la unidad, para r suficientemente grande se tiene que $\varphi_n(y_1) = \varphi_n(y_2) = 0$ si $n > r$, por lo que $f_r(y_1) = g(y_1) = g(y_2) = f_r(y_2)$, justo por la última observación concluimos que $\varphi_r(y_1) = \varphi_r(y_2) = 0$ y que $f_{r-1}(y_1) = f_{r-1}(y_2)$, aplicando inducción concluimos que $f(y_1) = f(y_2)$ y que $\varphi_i(y_1) = \varphi_i(y_2) = 0$ para toda $i > 0$ pero esto último implica que $y_1, y_2 \in W$, donde la f es inyectiva por lo que $y_1 = y_2$ ∎

Como último teorema tenemos que

Teorema (de Whitney)
Cualquier n-variedad M de clase C^k con $k \geq 2$ puede ser C^k encajada en R^{2n+1}

Dem.
Dada cualquier función de clase C^k de M en R^{2n+1} puede ser aproximada por una inmersión inyectiva g, para ver que es encaje basta demostrar que g es propia, y para esto basta con ver $g^{-1}(\overline{B_r^{2n+1}})$ es compacto para toda r.

Escojamos una partición de la unidad $\{\varphi_i\}$ y definamos $f(x) = \sum k\varphi_k(x)e$ donde $\|e\| = 1$ y $e \in R^{2n+1}$, la cual resulta que está bien definida, sea $\varepsilon(x) = \frac{1}{2}$, entonces existe una inmersión inyectiva g tal que $\|g(x) - f(x)\| < 1$ si $\|g(x)\| \leq n$ entonces $\|f(x)\| \leq n + 1$ por lo que

$$g^{-1}(\overline{B_r^{2n+1}}) \subset f^{-1}(\overline{B_{r+1}^{2n+1}}) \subset \cup_{i=1}^{n+1} sop\varphi_i$$

por lo que g es un encaje ∎

Apéndice 3

El tipo de Homotopía de una unión monótona

Empezaremos esta parte dando la siguiente definición,

Sea $\{C_n\}_0^\infty$ una sucesión de conjuntos ajenos tal que $C_0 \neq \emptyset$, definamos ahora la sucesión de espacios topológicos $\{X^n\}$ como sigue:

(1) $X^0 = C_0$ con la topología discreta en C_0
(2) Si $C_n = \emptyset$ entonces $X^n = X^{n-1}$, si $C_n \neq \emptyset$, suponemos que tenemos una familia de funciones $\{\varphi^i : S^{n-1} \longrightarrow X^{n-1} \mid i \in C_n\}$ llamadas *aplicaciones características* .
Sean $B_i^n = B^n$ y $S_i^{n-1} = S^{n-1}$, definamos $S_n = \sqcup_{i \in C_n} S_i^{n-1}$ y $B_n = \sqcup_{i \in C_n} B_i^n$, es claro entonces que $S_n \subset B_n$ y que la colección $\{\varphi^i\}$ determina una función $\varphi_n : S_n \longrightarrow X^{n-1}$ tal que $\varphi_n|_{S_i^{n-1}} = \varphi^i$, entonces definimos

$$X^n = X^{n-1} \cup_{\varphi_n} B_n$$

(3) Claramente se tienen encajes cerrados $X^{n-1} \hookrightarrow X^n$.
Definamos $X = \cup_n X^n$ con la topología de la unión, ($K \subset X$ es cerrado si y sólo si $K \cap X^n$ es cerrado para toda n).

Al espacio topológico X se le llama *complejo CW* , así como a cualquier homeomorfo a el.

De esta construcción se obtiene que todo complejo CW es Hausdorff, localmente conectable por trayectorias y además resulta ser normal y paracompacto.

Consideremos un espacio topológico X y una sucesión $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ de subespacios, y definamos

$$X_\Sigma = X_0 \times [0,1] \cup X_1 \times [1,2] \cup \cdots$$

con la topología como subespacio de $X \times R$.

Decimos que X es el *límite homotópico directo* de la sucesión $\{X_i\}$ si la función proyección

$$\begin{gathered} p : X_\Sigma \longrightarrow X \\ (x,t) \mapsto x \end{gathered}$$

es una equivalencia homotópica.

Ejemplo

(1) Supongamos que cada punto de X está contenido en el interior de algun X_i, esto es, $\{int(X_i)\}$ forman una cubierta abierta de X, y que X es paracompacto, entonces usando una partición de la unidad podemos construir una función $f : X \longrightarrow R$ tal que $f(x) \geq i+1$ si $x \notin X_i$ y $f(x) \geq 0$ para toda x. entonces la función $x \mapsto (x, f(.\cdot))$ manda X homeomorfamente en un subconjunto de X_Σ el cual es claramente un retracto por deformación. Es claro entonces que X es un límite homotópico directo.

(2) El intervalo $[0,1]$ no es el límite homotópico directo de la sucesión $\{[0] \cup [\frac{1}{i}, 1]\}$ ya que en este caso X_Σ es del mismo tipo de homotopía que dos puntos mientras que X es de uno solo.

El siguiente teorema relaciona el tipo de homotopía de dos límites homotópicos directos.

TEOREMA

Supongamos que X es el límite homotópico directo de $\{X_i\}$ y Y el límite homotópico directo de $\{Y_i\}$. Sea $f : X \longrightarrow Y$ tal que f manda cada X_i en Y_i como equivalencia homotópica, entonces $f : X \longrightarrow Y$ es una equivalencia homotópica

Dem.
definamos

$$\begin{aligned} f_\Sigma : X_\Sigma &\longrightarrow Y_\Sigma \\ (x,t) &\mapsto (f(x),t) \end{aligned}$$

es claro que basta demostrar que f_Σ es una equivalencia homotópica.

Caso 1: Supongamos que $X_i = Y_i$ y que cada $f_i : X_i \longrightarrow Y_i$ ($f_i = f|_{X_i}$) es homotópica a la identidad, debemos probar que f_Σ es una equivalencia homotópica.

Bajo estas condiciones resultaría natural conjeturar que f_Σ debe ser homotópica a la identidad, sin embargo esto no necesariamente es cierto.

Para cada $n \in N$ sea $H^n : X_n \times I \longrightarrow X_n$ tal que $H^n(x,0) = f_n(x)$ y $H^n(x,1) = x$, definamos entonces la homotopía como sigue:

$$H : X_\Sigma \times I \longrightarrow X_\Sigma$$

$$H\big((x,n+t),u\big) = \begin{cases} \big(H^n(x,u), n+2t\big) & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \big(H^n(x,(3-4t)u), n+1\big) & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le \frac{3}{4} \\ \big(H^{n+1}(x,(4t-3)u), n+1\big) & \text{si } \frac{3}{4} \le t \le 1 \end{cases}$$

si $u = 0$ tenemos una función $H_0 := H(*,0) : X_\Sigma \longrightarrow X_\Sigma$ la cual es homotópica a f_Σ, mientras que $H_1 := H(*,1) : X_\Sigma \longrightarrow X_\Sigma$ satisface que:

$$H_1(x,n+t) = (x,n+2t) \;\; 0 \le t \le \frac{1}{2}$$

$$H_1(x,n+t) \in X_{n+1} \times [n+1] \;\; \frac{1}{2} \le t \le 1$$

La idea ahora es demostrar que H_1 es una equivalencia homotópica. De hecho una inversa homotópica $g : X_\Sigma \longrightarrow X_\Sigma$ pude definirse como

$$g(x,n+t) = \begin{cases} (x,n+2t) & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ H_1(x,n+\frac{3}{2}-t) & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

notemos que está bien definida, ya que

$$H_1(x, n+\frac{1}{2}) = H_1(x, n+1) = (x, n+1)$$

para probar que $H_1 g \simeq Id_{X_\Sigma}$ observemos que

$$H_1 g(x, n+t) = \begin{cases} (x, n+4t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ H_1(x, n+2t) & \text{si } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H_1(x, n+\frac{3}{2}-t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

definamos entonces una homotopía $G : X_\Sigma \times I \longrightarrow X_\Sigma$ como sigue, si $0 \leq u \leq \frac{1}{2}$ entonces:
(para simplificar la notación $G_u(*) = G(*, u)$)

$$G_u(x, n+t) = \begin{cases} H_1 g(x, n+t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1-u}{2} \\ H_1(x, n+1-u) & \text{si } \frac{1-u}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}+u \\ H_1 g(x, n+t) & \text{si } \frac{1}{2}+u \leq t \leq 1 \end{cases}$$

notemos de nuevo que está bien definida ya que

$$H_1 g(x, n+\frac{1-u}{2}) = H_1 g(x, n+\frac{1}{2}+u) = H_1(x, n+1-u)$$

es claro entonces que G_0 es igual a $H_1 g$ y que $G_{\frac{1}{2}}$ está dada por

$$G_{\frac{1}{2}}(x, n+t) = \begin{cases} (x, n+4t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ (x, n+1) & \frac{1}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

la cual es claramente homotópica a la identicad, esto es, $H_1 g \simeq Id$, con un argumento análogo se puede mostrar que $gH_1 \simeq Id$.

Caso 2: Sean X y Y arbitrarios, para cada $n \in N$, sea $g_n : Y_n \longrightarrow X_n$ el inverso homotópico de f_n, notemos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Y_n & \longrightarrow & X_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_{n+1} & \longrightarrow & X_{n+1} \end{array}$$

conmuta hasta homotopía, ya que,

$$i_n g_n \simeq g_{n+1} f_{n+1} i_n g_n = g_{n+1} j_n f_n g_n \simeq g_{n+1} j_n$$

Escojamos una homotopía $H^n : Y_n \times I \longrightarrow X_{n+1}$ tal que $H^n(*, 0) = i_n g_n$ y $H^n(*, 1) = g_{n+1} j_n$ y definamos $G : Y_\Sigma \longrightarrow X_\Sigma$ como

$$G(y, n+t) = \begin{cases} (g_n(y), n+2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (H^n_{2t-1}(y), n+1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Mostraremos que la composición $Gf_\Sigma : X_\Sigma \longrightarrow X_\Sigma$ es una equivalencia homotópica.

Sea

$$X^n_\Sigma = X_0 \times [0,1] \cup \cdots \cup X_{n-1} \times [n-1, n] \cup X_n \times [n]$$

la composición Gf_Σ manda X^n_Σ en si mismo con una función que es homotópica a la identidad, de hecho X^n_Σ contiene a $X_n \times [n]$ como un retracto por deformación y la función Gf_Σ restringida a $X_n \times [n]$ puede identificarse con $g_n f_n$ y por lo tanto es homotópica a la identidad, podemos entonces aplicar el Caso 1 a la sucesión $\{X^n_\Sigma\}$ y concluimos entonces que Gf_Σ es una equivalencia homotópica.

Esto prueba entonces que f_Σ tiene un inverso homotópico izquierdo, con un argumento análogo se muestra que $f_\Sigma G : Y_\Sigma \longrightarrow Y_\Sigma$ es una equivalencia homotópica y entonces f_Σ tiene un inverso homotópico derecho. Por lo que f_Σ es una equivalencia homotópica ■

Tenemos entonces un corolario bastante util

Corolario
Supongamos que X es el límite homotópico directo de $\{X_i\}$. Si cada X_i tiene el tipo de homotopía de un complejo CW, entonces X es del tipo de homotopía de un complejo CW

Apéndice 4

Campos vectoriales gradientes

Consideraremos en esta parte un campo vectorial Y de clase C^∞ sobre una variedad compacta M^n, (la frontera ∂M de M puede o no ser vacía), y demostraremos que puede ser aproximado por otro campo vectorial X que satisfaga las siguientes propiedades:

(1) En cada punto singular β de X existe una vecindad celular N y una función f de clase C^∞ sobre N tal que $X = grad(f)$ en N en alguna estructura riemanniana en N.
Aún más, β es un punto crítico no degenerado de f. Sean $\beta_1, \ldots, \beta_m$ estas singularidades.

(2) Si $x \in \partial M$ $X(x)$ es transversal a ∂M, esto es, X no es cero en ∂M

(3) Si $x \in M$, sea $\varphi_t(x)$ la orbita de X a través de x satisfaciendo $\varphi_0(x) = x$, entonces para todo $x \in M$, el conjunto límite de $\varphi_t(x)$ cuando $t \longrightarrow \pm\infty$ está contenido en la unión de los β_i

(4) Las variedades estables e inestables de los β_i tienen intersecciones normales unas con otras.
Esto significa lo siguiente, si

$$W_i^s = \{x \in M \mid \lim_{t\to\infty} \varphi_t(x) = \beta_i\}$$

es la variedad estable y si

$$W_i^u = \{x \in M \mid \lim_{t\to-\infty} \varphi_t(x) = \beta_i\}$$

es la variedad inestable, entonces para $x \in W_i^u$ (W_i^s) sea $T_x W_i^u$ $(T_x W_i^s)$ el espacio tangente de W_i^u (W_i^s) en x, entonces para todo i, j si $x \in W_i^u \cap W_i^s$, la condición cuantro significa que

$$dimW_i^u + dimW_j^s - n = dim(T_x W_i^u \cap T_x W_j^s)$$

donde los dos espacios tangentes de la derecha son considerados como subespacios de el espacio tangente a M.

TEOREMA

Sea $f : M \longrightarrow R$ una función de Morse diferenciable sobre la variedad compacta M, supongamos que M la escogemos con una métrica riemanniana y que $grad(f)$ es transversal a ∂M la frontera de M, entonces $grad(f)$ puede ser C^1 aproximado por una campo vectorial que satisfaga las condiciones (1) - (4)

La demostración del teorema la haremos en varios pasos.

Observemos primero que podemos aproximar f por una función g C^1 cercana, tal que si β_i son los puntos críticos de f entonces pasa que $i \neq j$ implica que $g(\beta_i) \neq g(\beta_j)$. Suponemos entonces que empezamos con una de estas funciones.

Lema

Sea $f : M \longrightarrow R$ una función de Morse diferenciable y tal que $X = grad(f)$ es transversal a ∂M la frontera de M, entonces una suficientemente cercana aproximación C^1 Y de X con $Y = X$ en una vecindad de los puntos singulares satisface la condición (3)

Dem.

Podemos suponer que X y Y tienen la propiedad de que excepto en puntos singulares dfX y dfY son positivas, entonces una orbita $\varphi_t(X)$ de X o Y es o un punto singular o satisface que $f(\varphi_t(x))$ crece cuando t crece, de la compacidad de la variedad, obtenemos la propiedad (3) ∎

Notemos de hecho que esta última observación también implica que no hay orbitas cerradas para X y Y.

Por el lema anterior para demostrar el Teorema basta con demostrar

Lema A
Si $f : M \longrightarrow R$ es una función de Morse y $i \neq j$ implica que $f(\beta_i) \neq f(\beta_j)$ y $X = grad(f)$ es transversal a ∂M la frontera de M, entonces existe una aproximación C^1 Y de X que satisface (4) y $X = Y$ en alguna vecindad de los puntos críticos

La demostración de este lema la haremos por inducción basandonos en el lema que sigue.

Indexemos los puntos críticos β_i tal que $f(\beta_i) < f(\beta_{i+1})$, es claro entonces que $f(\beta_1)$ es el mínimo de f, denotemos por W_i^u y W_i^s a las variedades inestables y estables respectivamente, asociadas a β_i, sea $b_i = f(\beta_i)$.

Lema B
Dada $\varepsilon_1 > 0$ suficientemente pequeña y j, existe una aproximación C^1 Y de X, tal que $Y = X$ fuera de $f^{-1}(b_j + \varepsilon_1, b_j + 3\varepsilon_1)$ y en el sistema Y W_j^u y W_i^s tienen intersección normal para cada i
Dem.
Sea $\varepsilon_1 > 0$ tal que $b_j + 3\varepsilon_1 < b_{j+1}$, sea $dim W_j^u = n - k$ y $Q = f^{-1}(b_j + 2\varepsilon_1) \cap W_j^u$ una subvariedad de M. Sea $P = \{x = (x_1, \ldots, x_k) \mid \|x\| \leq 1\}$ el k-disco y $I_m = \{z \in R \mid -m \leq z \leq z\}$ con $m > 0$, entonces para m suficientemente pequeña, existe un difeomorfismo

$$h : I_m \times P \times Q \longrightarrow U$$

donde U es una vecindad de Q, tal que $h(0 \times 0 \times Q) = Q$ y $X = \frac{\partial}{\partial z'}$ en U, donde $z' = h(z \times 0 \times 0)$ y $U \subset f^{-1}(b_j + \varepsilon_1, b_j + 3\varepsilon_1)$.
Identificaremos puntos bajo h, con sus correspondientes en U y los representaremos por (z, x, y), $|z| \leq m$, $\|x\| \leq 1$ y $y \in Q$.
Enunciamos a continuación (sin demostración) dos lemas de cálculo necesarios en la demostración.
Lema
Sea $I_m = [-m, m]$, $\varepsilon > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que si $v < \delta$ entonces existe una función de clase C^∞ $\beta(z)$ en I_m, que se anula en una vecindad

de ∂I_m, $0 \leq \beta(z) \leq \varepsilon$, $|\beta'(z)| \leq \varepsilon$ *y*

$$\int_0^{\pm m} \beta(z)dz = \pm v$$

Lema

Sea P *es* k*-disco como antes, entonces existe una función de clase* C^∞ γ *en* P*, la cual es cero en una vecindad de la frontera de* P*,* $0 \leq \gamma \leq 1$*,* $|\frac{\partial \gamma}{\partial x_i}| \leq 2$ *y* $\gamma(x) = 1$ *si* $\|x\| \leq \frac{1}{3}$

Con ε arbitrario, sea $\delta_1 = min\{\delta, \frac{1}{100}\}$, donde δ es como en el lema anterior. Sea g la restricción de

$$\pi_P : I_m \times P \times Q \longrightarrow 0 \times P \times 0$$

a $\cup_{i=1}^r [(0 \times P \times Q) \cap W_i^s]$, por el teorema de Sard, podemos escoger $u \in P$ tal que $\|u\| = v < \delta_1$ y $2v$ es un valor regular de g, podemos suponer, usando un cambio ortogonal de coordenadas en P que $u = (x_1, ..., x_k) = (v, 0, ..., 0)$.

Sea Y el campo vectorial en M, el cual coincide con X fuera de U y en U esta dado por

$$Y = \frac{\partial}{\partial z} + \beta(z)\gamma(x)\frac{\partial}{\partial x_1}$$

donde β y γ se escogieron como en los lemas anteriores.

Afirmamos que Y satisface lo pedido por el lema si ε se escoge suficientemente pequeña.

Para ver que Y esta bien definido basta con observar que el segundo termino se anula en una vecindad de la frontera de U, es claro que para ε pequeña, Y puede ser tan cercano como queramos a X en el sentido C^1, falta probar entonces que W_i^u y W_j^s tienen intersección normal en el sistema Y, para toda i.

En lo que sigue, supondremos que la i esta fija. sea ψ_t la orbita en el sistema Y a través de x con $\psi_0(x) = x$ y denotemos por V_i^s y V_j^u a las variedades estables e inestables en el sistema Y.

Es suficiente probar que V_i^s y V_j^u tienen intersección normal en U ya que cualquier punto $q \in V_j^u \cap V_i^s$ es de la forma $\psi_t(p)$ con $p \in U$, y ψ_t preserva la propiedad de intersección normal.

Sea

$$V = \{(z, x, y) \in U \mid \|x\| \leq \frac{1}{3}\}$$

en V, $Y = \frac{\partial}{\partial z} + \beta(z)\frac{\partial}{\partial x_1}$, si integramos el correspondiente sistema de ecuaciones diferenciales, obtenemos que $z(t) = t + k_0$ y $x_1(t) = \int_0^t \beta(t)dt + k_1$ donde las otras coordenadas estan fijas, se sigue entonces que en V

$$\psi_t(0, x, y) = (t, x_1 + \int_0^t \beta(t)dt, x_2, \ldots, x_k, y)$$

usando la propiedad de $\beta(z)$, $\psi_t(0, x, y) \in V$ si $|t| \leq m$ y $\|x\| \leq \frac{1}{6}$ además $\psi_{\pm m}(0, x, y) = (\pm m, x \pm v, y)$ si $\|x\| \leq \frac{1}{6}$

Sean $V_i = V_i^s \cap V'$ $V_j = V_j^u \cap V'$ donde $V' = \{(0, x, y) \in U \mid \|x\| \leq \frac{1}{6}\}$. Basta entonces por construcción demostrar que V_i y V_j tienen intersección normal en $0 \times P \times Q$.

Como $W_j^u \cap (0 \times P \times Q) = \{(0, 0, y) \in U \mid y \in Q\}$ y $W_j^u = V_j^u$ cunado nos restringimos a $\{(-m, x, y) \in U\}$ y como $\psi_{-m}^{-1}(-m, x, y) = (0, x + v, y)$ para $\|x\| \leq \frac{1}{6}$ tenemos que $V_j = \{(0, +v, y) \in U\}$. De todo esto si $\pi_P : U \longrightarrow P$ es la proyección anteriormente definida, $\pi_P(V_j) = +v$. Si g_1 es la restricción de π_P a V_i entonces $g_1^{-1}(+v) = V_j \cap V_i$, como la intersección de W_i^s y V_i^s con $\{(+m, x, y) \in U\}$ son la misma y $\psi_{-m}(+m, x, y) = (0, x - v, y)$ tenemos que $V_i = \{(0, x - v, y) \mid (0, x, y) \in W_i^s \cap V, \|x - v\| \leq \frac{1}{6}\}$ pero esto implica que como g tiene un valor regular en $+2v$, g_1 tiene un valor regular en v, por lo que $dimV_i = dimP + dim(V_i \cap V_j)$ y como $dimP = k$, se sigue que V_i y V_j tienen intersección normal en $0 \times P \times Q$, esto prueba el lema B ∎

Para demostrar el Lema A, se usa el Lema B e inducción de la siguiente manera, la hipótesis de inducción es

$H(q)$: existe una aproximación C^1 X_q de X tal que $X_q = X$ en una vecindad de β_i, W^u_{r-p} y W^s_i tienen intersección normal en el sistema X_q para toda $p \leq q$ y para toda i.
Entonces $H(0)$ es trivial y $H(r)$ implica el Lema A, Mostraremos ahora que $H(q-1)$ implica $H(q)$.

Dado X_{q-1} por $H(q-1)$, construiremos X_q, podemos suponer que $df(X_{q-1}) = 0$ sólo en los puntos críticos, sea $\varepsilon_1 = \frac{1}{4(b_{q+1}-b_q)}$, aplicando el Lema B, obtenemos una aproximación X_q de X_{q-1} con $df(X_q) = 0$ sólo en los puntos críticos, $X_q = X_{q-1}$ en una vecindad de los β_i y en el sistema X_q, W^s_i y W^u_{r-q} tienen intersección normal para toda i, pero también, W^u_j y W^s_i seguiran teniendo intersección normal en el sistema X_q para $j > r-q$ y para toda i, ya que esto es cierto en el sistema X_{q-1}, además $X_q = X_{q-1}$ en $f^{-1}[b_{q+1}, b_r]$ y $W^u_j \cap W^s_i \subset f^{-1}[b_{q+1}, b_r]$, lo cual termina la demostración ∎

Bibliografía

[1] H. Whitney, *Geometric Integration Theory*, Princeton University Press, 1957

[2] M. Morse, S.S. Cains, *Critical Point Theory in Global Analysis and Differential Topology* , Academic Press, 1969

[3] S. Sternberg, *Lectures on Differential Geometry* Second Edition, Chelsea Publishing Company, N.Y. N. York, 1983

[4] L. Auslander, R.E. Mckenzie, *Introduction to Differential Manifolds*, Mc Graw-Hill Book Company, 1963

[5] M. W. Hirsh, *Differential Topology* , Springer Verlag New York-Heidelberg-Berlin, 1976

[6] D. Salamon, *Morse Theory, the Conley Index and Floer Homology*, Bull. London Math. Soc. **22** (1990) 113-140

[7] J. W. Milnor, *Morse Theory*, Ann. of Math. Studies 51, (Princeton University Press, 1963)

[8] J. W. Robbin, D. Salamon, *Dynamical Systems, Shape Theory and the Conley Index*, Ergodic Theory Dynamical Systems **8** (1988) 375-393

[9] D. Salamon, *Connected Simple Systems and the Conley Index for Isolated Invariant sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **291** (1985) 1-41

[10] S. Smale, *Morse Inequalities for a Dynamical System*, Bull. Amer. Math. Soc. **66** (1960) 43-49

[11] S. Smale, *On Gradient Dynamical Systems*, Ann. of Math, **74** (1961) 199-206