

29
2ej



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

ESTUDIO DINAMICO DE UNA FAMILIA DE
ECUACIONES DIFERENCIALES EN EL ESPACIO

TESIS PROFESIONAL

Que para obtener el Título de
M A T E M A T I C O

p r e s e n t a

HEBERTO DEL RIO GUERRA

México, D. F.

1993

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

Introducción.....	i
Capítulo 1. Análisis Local	1
Introducción	2
Sección 1. Determinación del conjunto de ceros del campo asociado.....	5
Sección 2. Clasificación de cada elemento del conjunto de ceros	8
Capítulo 2. Análisis Global	12
Introducción	13
Sección 1. Análisis de la familia cuando $q = 0$	16
Sección 2. Existencia de órbitas cerradas producidas por Bifurcación de Hopf	19
Apéndice.....	24

INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales fueron introducidas por Sir Isaac Newton (1686) para la descripción de su nueva Física. Estas ecuaciones se basan en el hecho de que si conocemos el movimiento infinitesimal de un fenómeno en todos sus posibles estados, entonces dada una condición inicial podemos deducir la evolución del fenómeno. Matemáticamente esto abrió el problema de dada una ecuación diferencial ordinaria encontrar todas sus soluciones. Originalmente los matemáticos pedían una expresión analítica de todas las soluciones, pero fue el matemático francés Henri Poincaré el que notó que el problema así planteado es irresoluble en la mayoría de los casos y propuso dar una solución de tipo cualitativo usando la Topología. El convirtió entonces el problema en: Dar una descripción topológica del conjunto de las soluciones de una ecuación diferencial ordinaria, que llamó el retrato fase de la ecuación. Este enfoque cualitativo ha tenido un desarrollo importante en este siglo, con el nombre de Sistemas Dinámicos.

Fragmento de la Introducción del volumen 3 de las Notas de Investigación de la Sociedad Matemática Mexicana, Aportaciones Matemáticas, con título Sistemas Dinámicos Holomorfos en Superficies por Xavier Gomez-Mont y Laura Ortiz Bobadilla.

Algo a lo que me enfrenté durante la licenciatura de Matemáticas en la Facultad de Ciencias de la UNAM es, tratar de comprender las demostraciones de teoremas y de aplicar estos para resolver problemas teóricos, sin embargo el uso de estos teoremas para tratar de resolver problemas que no están planteados como ejercicio en algún libro, en general no es cosa sencilla.

¿De que se trata esta tesis?, esta tesis es mi intento de responder a la pregunta del Dr. Xavier Gomez-Mont, *Di todo lo que puedas sobre esta ecuación*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x - y \\ \dot{y} &= ry + pz - yz^2 \\ \dot{z} &= qx - qz\end{aligned} \quad (p, q, r) \in \mathbb{R}^3$$

¿Por que esta ecuación?, esta ecuación modela alguna dinámica de ciertos gases, que dinámica o cuales gases no recuerdo.

El objetivo de la tesis es demostrar la existencia de órbitas periódicas producidas por Bifurcación de Hopf. He tratado de que los pasos para llegar al objetivo de la tesis sean lo mas amplios posible para que se puedan usar en el análisis de muchos otros modelos parecidos, por eso es que en el capítulo uno en lugar de utilizar la Fórmula de Cardano para caracterizar las singularidades del campo asociado uso el Teorema de Hurwitz, sin embargo no puedo evitar el uso de la Fórmula de Cardano para el análisis de Bifuración de Hopf.

CAPÍTULO 1

ANÁLISIS LOCAL

• INTRODUCCIÓN

Este capítulo es un análisis del comportamiento local de las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x - y, \\ \dot{y} &= ry + pz - yz^2 \quad (p, q, r) \in \mathbb{R}^3 \\ \dot{z} &= qx - qz\end{aligned}$$

Dicho análisis está enfocado al estudio de los *ceros* del campo asociado, a estos también se les conoce como *puntos de equilibrio*, *puntos singulares* o *singularidades*.

La razón de centrarse en el estudio local de los *puntos singulares* es el siguiente teorema que describe el comportamiento de las soluciones de un campo en una vecindad de un *punto no singular*.

Teorema¹ Sea f un campo vectorial C^∞ en \mathbb{R}^n tal que $f(\mathbf{x}_0) \neq 0$. Entonces existe un

cambio de coordenadas (y, U) alrededor de \mathbf{x}_0 tal que $f = \left(1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}\right)$ en U .

Es decir fuera de cualquier *singularidad*, localmente las soluciones del campo se ven como líneas paralelas, lo que puede no suceder en las *singularidades*.

Sea $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ un sistema de ecuaciones diferenciales no lineal, supongamos que $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ es una *singularidad* del campo asociado f , y quisieramos caracterizar el comportamiento de las soluciones cerca de \mathbf{x}_0 , para lograr esta caracterización lo que hacemos es estudiar el comportamiento de las soluciones del sistema *linealizado* en \mathbf{x}_0 , esto es, estudiamos el comportamiento de las soluciones del sistema lineal

$$\dot{y} = Df(\mathbf{x}_0)y, \quad y \in \mathbb{R}^{n2}$$

donde $Df(\mathbf{x}_0)$ es la diferencial del campo f en \mathbf{x}_0 . Como este es un sistema lineal el análisis es relativamente fácil, en particular la derivada del flujo ϕ^3 con respecto a las condiciones iniciales en el punto singular \mathbf{x}_0 está determinada por

¹Spivak, Michael. [1979]. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Publish or Perish, Inc: Houston. Volume 1 285-287.

²Hirsch, M. W., and Smale, S. [1974]. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press: New York.

$$D\phi_t(\mathbf{x}_0)\mathbf{y} = e^{tDf(\mathbf{x}_0)}\mathbf{y}$$

Así, una pregunta importante es, ¿que se puede decir de las soluciones del sistema original basándonos en nuestros conocimientos sobre las ecuaciones del sistema linealizado?. La respuesta la dan los siguientes dos teoremas

Teorema (Grobman-Hartman)⁴ Si la diferencial $Df(\mathbf{x}_0)$ del campo f en el punto singular \mathbf{x}_0 del sistema $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ no tiene eigenvalores cero o imaginarios puros, entonces existe un homeomorfismo⁵ local $h: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido en alguna vecindad $U \subset \mathbb{R}^n$ de \mathbf{x}_0 que lleva órbitas del sistema original en órbitas del sistema linealizado, este homeomorfismo preserva el sentido de las órbitas y se puede escoger de tal manera que lleve soluciones del sistema original en soluciones del sistema linealizado.

Teorema de la Variedad Estable para un Punto Singular⁶ Supongase que el sistema $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in U \subset \mathbb{R}^n$ tiene un punto singular hiperbólico⁷ \mathbf{x}_0 . Entonces existen localmente las variedades estable⁸ $W_{loc}^s(\mathbf{x}_0)$ e inestable⁹ $W_{loc}^u(\mathbf{x}_0)$. Si f es k -diferenciable entonces $W_{loc}^s(\mathbf{x}_0)$ y $W_{loc}^u(\mathbf{x}_0)$ son variedades k -diferenciables.

Así, si tenemos el sistema de ecuaciones diferenciales descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

con \mathbf{x}_0 un punto singular y la linealización de f en \mathbf{x}_0 no tiene eigenvalores cero o imaginarios puros los dos teoremas anteriores implican que el número de eigenvalores con parte real negativa y el número de eigenvalores con parte real positiva de la

³Definición Dado $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial decimos que f genera un flujo $\phi_t: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde $\phi_t(\mathbf{x}) = \phi(t, \mathbf{x})$ es una función diferenciable definida para todo $\mathbf{x} \in U$ y t en un intervalo $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, y

$$\text{satisface que } \left. \frac{\partial \phi(t, \mathbf{x})}{\partial t} \right|_{t=\tau} = f(\phi(\tau, \mathbf{x})).$$

⁴Guckenheimer, John and Holmes, Philip. [1983]. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag: New York Heidelberg Berlin, 13

⁵Definición Sean U y V dos espacios topológicos. $h: U \rightarrow V$ es un homeomorfismo si h es biyectiva y tanto h como h^{-1} son continuas.

⁶Guckenheimer, John and Holmes, Philip. [1983]. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag: New York Heidelberg Berlin, 13

⁷Definición Un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ se llama un punto hiperbólico del sistema $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, si $Df(\mathbf{x}_0)$ no tiene eigenvalores con parte real cero.

⁸Definición $W_{loc}^s(\mathbf{x}_0) = \{ \mathbf{x} \in U \mid \phi_t(\mathbf{x}) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}_0, \text{ y } \forall t \geq 0 \phi_t(\mathbf{x}) \in U \}$

⁹Definición $W_{loc}^u(\mathbf{x}_0) = \{ \mathbf{x} \in U \mid \phi_t(\mathbf{x}) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \mathbf{x}_0, \text{ y } \forall t \leq 0 \phi_t(\mathbf{x}) \in U \}$

diferencial $Df(\mathbf{x}_0)$ del campo f en \mathbf{x}_0 determinan una *equivalencia topológica*¹⁰ entre el flujo del sistema original y el flujo del sistema linealizado en una vecindad de \mathbf{x}_0 . Si hay eigenvalores con parte real igual a cero la dinámica del flujo puede ser muy complicada.

Debido a todo esto el resto del capítulo lo dividiremos en las siguientes secciones

- Determinación del conjunto de ceros del campo asociado.
- Clasificación de cada elemento del conjunto de ceros.

¹⁰**Definición** Dados dos sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$1) \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

$$2) \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n, \quad \mathbf{f}, \mathbf{g}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n, \quad \mathbf{f}(0) = \mathbf{g}(0) = 0$$

se dice que son topológicamente equivalentes si $\exists \mathbf{h} \in \mathbf{U} \subset \mathbf{R}^n$ abierto $\mathbf{h}: \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{h}(\mathbf{U})$ homeomorfismo tal que si $\mathbf{x}(t)$

es una órbita de 1) entonces $\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t))$ es una órbita de 2)

• SECCIÓN 1 DETERMINACIÓN DEL CONJUNTO DE CEROS DEL CAMPO ASOCIADO.

Denotaremos por $X_{(p,q,r)}$ al campo vectorial asociado a la familia de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x - y \\ \dot{y} &= ry + pz - yz^2 \\ \dot{z} &= qx - qz \end{aligned} \quad (p, q, r) \in \mathbf{R}^3$$

es decir

$$X_{(p,q,r)}(x, y, z) = (-x - y, ry + pz - yz^2, qx - qz).$$

Para encontrar el conjunto de ceros del campo $X_{(p,q,r)}$ es necesario encontrar el conjunto de los puntos donde el campo se anula que denotaremos por $C_{X_{(p,q,r)}}$, es decir

$$C_{X_{(p,q,r)}} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid X_{(p,q,r)}(x, y, z) = 0\}.$$

Lema $C_{X_{(p,q,r)}} = C_0 \cup C^*$ donde

$$C_0 = \begin{cases} \{0\} & \text{si } r \leq p \\ \{0, (\pm\sqrt{r-p}, \mp\sqrt{r-p}, \pm\sqrt{r-p})\} & \text{si } r > p \end{cases}$$

$$C^* = \begin{cases} \left\{ \left(\frac{pz}{r-z^2}, -\frac{pz}{r-z^2}, z \right) \mid z \in \mathbf{R} \right\} & \text{si } r < 0 \\ \left\{ \left(\frac{p}{z}, -\frac{p}{z}, z \right) \mid z \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \right\} \cup \{(x, -x, 0) \mid x \in \mathbf{R}\} & \text{si } r = 0 \\ \left\{ \left(\frac{pz}{r-z^2}, -\frac{pz}{r-z^2}, z \right) \mid z \in \mathbf{R} \setminus \{\pm\sqrt{r}\} \right\} & \text{si } r > 0, p \neq 0 \\ \{(0, -0, z) \mid z \in \mathbf{R}\} \cup \{(x, -x, \pm\sqrt{r}) \mid x \in \mathbf{R}\} & \text{si } r > 0, p = 0 \end{cases}$$

Demostración hay que encontrar cuales son los puntos $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ que hacen que simultaneamente se satisfagan las siguientes tres ecuaciones

- (i) $-x - y = 0$
- (ii) $ry + pz - yz^2 = 0$
- (iii) $q(x - z) = 0$

de la ecuación (iii) observamos que podemos dividir nuestro análisis en dos casos $q \neq 0$ y $q = 0$.

- $q \neq 0$

$$(i) \Rightarrow y = -x$$

$$(iii) \Rightarrow z = x$$

sustituyendo las ecuaciones (i) y (iii) en la ecuación (ii) tenemos que

$$-rx + px + x^3 = 0 \Rightarrow x(x^2 - r + p) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ó } x^2 + p - r = 0$$

$$\therefore C' = \begin{cases} \{0\} & \text{si } r \leq p \\ \{0, (\pm\sqrt{r-p}, \mp\sqrt{r-p}, \pm\sqrt{r-p})\} & \text{si } r > p \end{cases}$$

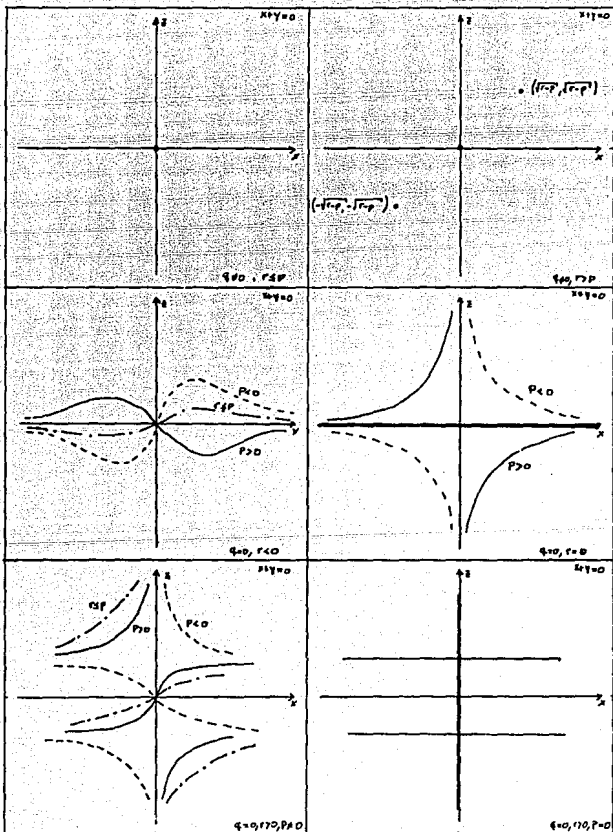
- $q = 0$

$$(i) \Rightarrow x = -y$$

$$(ii) \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{pz}{r-z^2} & \text{si } r < 0 \\ z = 0 \text{ ó } yz = p & \text{si } r = 0 \\ y = -\frac{pz}{r-z^2} & \text{si } r > 0, z^2 \neq r \\ pz = 0 & \text{si } r > 0, z^2 = r \end{cases}$$

$$\therefore C_0 = \begin{cases} \left\{ \left(\frac{pz}{r-z^2}, -\frac{pz}{r-z^2}, z \right) \mid z \in \mathbf{R} \right\} & \text{si } r < 0 \\ \left\{ \left(-\frac{p}{z}, \frac{p}{z}, z \right) \mid z \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \right\} \cup \{(x, -x, 0) \mid x \in \mathbf{R}\} & \text{si } r = 0 \\ \left\{ \left(\frac{pz}{r-z^2}, -\frac{pz}{r-z^2}, z \right) \mid z \in \mathbf{R} \setminus \{\pm\sqrt{r}\} \right\} & \text{si } r > 0, p \neq 0 \\ \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbf{R}\} \cup \{(x, -x, \pm\sqrt{r}) \mid x \in \mathbf{R}\} & \text{si } r > 0, p = 0 \end{cases}$$

Las siguientes son las gráficas de las singularidades de $X_{(p,q,r)}$



• SECCIÓN 2 CLASIFICACIÓN DE CADA ELEMENTO DEL CONJUNTO DE CEROS.

A los elementos del conjunto $C_{X_{p,q,r}}$ los denotaremos por $c_{(p,q,r)}$. Para determinar que tipo de *punto singular* es cada elemento de $C_{X_{p,q,r}}$, es necesario encontrar los eigenvalores asociados a $c_{(p,q,r)}$, para lo cual se necesita calcular la diferencial $DX_{(p,q,r)}(c_{(p,q,r)})$ del campo $X_{(p,q,r)}$ evaluada en el punto $c_{(p,q,r)}$ y el polinomio característico $P_{(p,q,r)}(c_{(p,q,r)})(\lambda)$ correspondiente. La diferencial $DX_{(p,q,r)}(x,y,z)$ del campo $X_{(p,q,r)}$ evaluada en el punto (x,y,z) está dada por

$$DX_{(p,q,r)}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & r-z^2 & p-2yz \\ q & 0 & -q \end{pmatrix}$$

y el polinomio característico $P_{(p,q,r)}(x,y,z)(\lambda)$ está dado por

$$P_{(p,q,r)}(x,y,z)(\lambda) = \lambda^3 + (1-r+z^2+q)\lambda^2 + (-r+z^2+q-rq+z^2q)\lambda + (-rq+z^2q+qp-2qyz)$$

Utilizando el Lema de la SECCIÓN 1, podemos considerar de nuevo dos casos para la clasificación de los puntos $c_{(p,q,r)}$. Estos casos son

- $q \neq 0$, en este caso tenemos que

$$DX_{(p,q,r)}(c_{(p,q,r)}) = \begin{cases} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & r & p \\ q & 0 & -q \end{pmatrix} & \text{si } c_{(p,q,r)} = 0 \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & p & 2r-p \\ q & 0 & -q \end{pmatrix} & \text{si } c_{(p,q,r)} = (\pm\sqrt{r-p}, \mp\sqrt{r-p}, \pm\sqrt{r-p}) \end{cases}$$

$$P_{(p,q,r)}(c_{(p,q,r)})(\lambda) = \begin{cases} \lambda^3 + (1-r+q)\lambda^2 + (-r+q-rq)\lambda + q(p-r) & \text{si } c_{(p,q,r)} = 0 \\ \lambda^3 + (1-p+q)\lambda^2 + (-p+q-pq)\lambda + 2q(r-p) & \text{si } c_{(p,q,r)} = (\pm\sqrt{r-p}, \mp\sqrt{r-p}, \pm\sqrt{r-p}) \end{cases}$$

Así pues para encontrar los eigenvalores de la diferencial $DX_{(p,q,r)}(c_{(p,q,r)})$ es necesario conocer las raíces del polinomio característico $P_{(p,q,r)}(x,y,z)(\lambda)$ lo cual en este caso involucra hallar las raíces de un polinomio de tercer grado, más sin embargo para saber que clase de cero es, no se necesita encontrar explícitamente los eigenvalores, sólo basta decir que signo tienen las partes reales de estos. Se podría

utilizar la **Fórmula de Cardano**, pero este método no se puede extender a polinomios de mayor grado por lo que utilizaremos el **Teorema de Hurwitz** para caracterizar los signos de las partes reales de las raíces de un polinomio de cualquier grado.

Teorema de Hurwitz¹¹ Sea $a(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$ un polinomio de grado n con $a_i \in \mathbf{R}$ y considere la matriz de Hurwitz

$$H(a(\lambda)) = \begin{pmatrix} h_1 & h_3 & h_5 & \dots & h_{2n-1} \\ h_0 & h_2 & h_4 & \dots & h_{2n-2} \\ 0 & h_1 & h_3 & \dots & h_{2n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_n \end{pmatrix}, \quad h_i = \begin{cases} a_i & \text{si } i \leq n \\ 0 & \text{si } i > n \end{cases}$$

sean $h_i(a(\lambda))$ los menores principales de $H(a(\lambda))$ es decir

$$h_i(a(\lambda)) = \det \begin{pmatrix} h_1 & h_3 & h_5 & \dots & h_{2i-1} \\ h_0 & h_2 & h_4 & \dots & h_{2i-2} \\ 0 & h_1 & h_3 & \dots & h_{2i-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_i \end{pmatrix}, \quad h_i = \begin{cases} a_i & \text{si } i \leq n \\ 0 & \text{si } i > n \end{cases}$$

entonces

- Todas las raíces del polinomio $a(\lambda)$ tienen partes reales negativas si y solo si todos los menores principales $h_i(a(\lambda))$ son positivos.
- Hay k raíces con parte real positiva del polinomio $a(\lambda)$ y $n-k$ raíces con parte real negativa del polinomio $a(\lambda)$, donde k está dado por la fórmula:

$$k = V(a_0, h_1(a(\lambda)), h_3(a(\lambda)), \dots) + V(1, h_2(a(\lambda)), h_4(a(\lambda)), \dots)$$

y V es la función que cuenta el número de cambios de signo de sus parámetros.

Aplicando este resultado a un polinomio de grado 3 obtenemos el siguiente

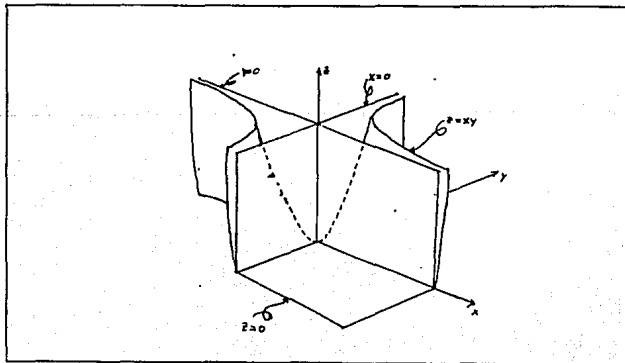
¹¹Barnett, Stephen [1983]. *Polynomials and Linear Control Systems*. Marcel Dekker, Inc.: New York, 150-151.

Lema La relacion existente entre los coeficientes del polinomio $p(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$ y el número de raíces del polinomio con parte real negativa y parte real positiva está determinada por la siguiente tabla

Número de partes reales

Negativas	0	1	2	3
Positivas				
0	$a \neq 0$ $b \neq 0$ $c \neq 0$	$a \neq 0$ $b \neq 0, b \neq 0$ $c \neq ah$	$a \neq 0$ $b \neq 0$ $c \neq 0$	$a \neq 0$ $c \neq 0$ $c \neq ah$
1	$a \neq 0$ $b \neq 0, b \neq 0$ $c \neq ah$	$a \neq 0, a \neq 0$ $b \neq 0$ $c \neq 0$	$a \neq 0, a \neq 0$ $c \neq 0$ $c \neq ah$	$a \neq 0$ $c \neq 0$ $b \neq 0$ $c \neq ah$
2	$a \neq 0$ $b \neq 0$ $c \neq 0$	$a \neq 0$ $c \neq 0$ $c \neq ah$	$a \neq 0, a \neq 0$ $c \neq 0$ $c \neq ah$	$a \neq 0$ $b \neq 0$ $c \neq ah$
3	$a \neq 0$ $c \neq 0$ $c \neq ah$			

Dado que podemos identificar al conjunto de polinomios de grado 3 con \mathbb{R}^3 esta tabla describe ciertos subconjuntos de \mathbb{R}^3 , en los cuales juega un papel importante la superficie $z = xy$ y los planos coordenados $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$. En la siguiente gráfica se puede observar ciertas regiones descritas por la tabla anterior.



En nuestro caso es un poco más difícil hacer la gráfica de estas regiones, sin embargo los equivalentes a la superficie $z = xy$ y los planos coordenados $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$ están determinados por:

$$x = (1-z/y)(1-z)(1+y), z = 1+y, z = y/1+y \text{ y } x = z \text{ cuando } c_{(p,q,r)} = 0 \text{ y}$$

$$z = 1/2x + (1-x/y)(1-x)(1+q), x = 1+y, x = y/1+y \text{ y } x = z \text{ cuando}$$

$$c_{(p,q,r)} = (\pm\sqrt{r-p}, \mp\sqrt{r-p}, \pm\sqrt{r-p})$$

Continuando con la clasificación de los puntos singulares el otro caso a considerar es

- $q = 0$

Para este caso es más fácil la clasificación ya que el polinomio característico se reduce a uno de segundo grado

$$DX_{(p,0,r)}(c_{(p,0,r)}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & r & p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{(p,0,r)}(c_{(p,0,r)})(\lambda) = \lambda^3 + (1-r+z^2)\lambda^2 + (-r+z^2)\lambda$$

Nótese que las raíces del polinomio solo dependen de r y de z

$$\lambda^3 + (1-r+z^2)\lambda^2 + (-r+z^2)\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 + (1-r+z^2)\lambda + (-r+z^2)) = 0$$

$$\lambda(\lambda+1)(\lambda-r+z^2) = 0$$

$$\therefore \lambda = 0, -1, r-z^2$$

Así en cada plano $z = z_0$, si $r - z_0^2 < 0$ el punto singular es un atractor, y si $r - z_0^2 > 0$ el punto singular es una silla. Si $r - z_0^2 = 0$ el punto singular existe si y solo si $p z_0 = 0$ y en este caso no es un punto singular aislado.

CAPÍTULO 2

ANÁLISIS GLOBAL

• INTRODUCCIÓN

Como consecuencia del análisis local hecho en el **CAPÍTULO 1** dividiremos este capítulo en dos secciones

- Análisis del sistema cuando $q = 0$ (sistema lineal).
- Existencia de órbitas cerradas producidas por Bifurcación de Hopf $q \neq 0$ (sistema no lineal).

El análisis de la **SECCIÓN 1** se convierte en el análisis de un sistema lineal homogéneo con coeficientes constantes, por lo que en este podemos llegar a decir quienes son las soluciones de la familia de ecuaciones diferenciales.

El análisis de la **SECCIÓN 2** es un poco más complicado, en particular el análisis se centra en tratar de demostrar la existencia de una órbita periódica (una órbita periódica que se observó con el programa *PHASER*, la cual al parecer es una órbita periódica atractora).

Para \mathbf{R}^2 existen criterios que permiten demostrar o no la existencia de curvas solución de un campo que son órbitas periódicas, entre ellos está el **Teorema de Poincaré-Bendixon**, que da condiciones suficientes para la existencia de una órbita periódica.

Teorema de Poincaré-Bendixon¹² *Un conjunto límite compacto de un sistema de ecuaciones diferenciales C^1 en \mathbf{R}^2 que no contiene puntos de equilibrio es una órbita cerrada.*

La demostración de este teorema se basa en la imposibilidad dadas las hipótesis, de que una curva solución dentro de una región acotada en el plano pueda escaparse de ella.

Otro criterio que garantiza la existencia de órbitas periódicas en \mathbf{R}^2 es el **Teorema de Bifurcación de Hopf**.

Teorema de Bifurcación de Hopf (en \mathbf{R}^2)¹³ *Sea χ_μ una familia de campos vectoriales C^k ($k \geq 4$) en \mathbf{R}^2 parametrizados por $\mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, tal que $\chi_\mu(0,0) = 0$ y para todo $\mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ $\chi = (\chi_\mu, \mu)$ es también C^k ($k \geq 4$). Supongamos que $d\chi_\mu(0,0)$*

¹²Hirsch, M. W., and Smale, S. [1974]. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press: New York, 347.

¹³Marsden, J. E. and McCracken, M. [1976]. *The Hopf Bifurcation and its Applications*. Springer-Verlag. New York Heidelberg Berlin, 65-81.

tiene dos eigenvalores complejos distintos $\lambda(\mu)$ y $\overline{\lambda(\mu)}$ tales que para

$\mu \neq 0$, $\operatorname{Re}(\lambda(\mu)) \neq 0$. Si además tenemos que $\left. \frac{d\operatorname{Re}(\lambda(\mu))}{d\mu} \right|_{\mu=0} \neq 0$ entonces

- Existe una función $C^{k-2} \mu \in (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $(x_1, 0, \mu(x_1))$ esta en una órbita cerrada de $\chi = (\chi_\mu, \mu)$ de periodo aproximado a $\frac{2\pi}{|\lambda(0)|}$ y radio de orden $\sqrt{\mu}$ para $x_1 \neq 0$ tal que $\mu(0) = 0$.
- Existe una vecindad U de $(0, 0, 0)$ en \mathbf{R}^3 tal que cualquier órbita cerrada en U es una de las que arriba se describen.

Teorema de la Variedad Central¹⁴ Sea f un campo vectorial de clase C^r en \mathbf{R}^n , tal que $f(0) = 0$. Supongase que el espectro de $Df(0)$ está dividido en tres partes. σ_s , σ_c y σ_u tales que

$$\lambda \in \sigma_s \text{ si } \operatorname{Re} \lambda < 0,$$

$$\lambda \in \sigma_c \text{ si } \operatorname{Re} \lambda = 0,$$

$$\lambda \in \sigma_u \text{ si } \operatorname{Re} \lambda > 0.$$

Sean E^s , E^c , y E^u los eigenespacios generalizados correspondientes a σ_s , σ_c , σ_u respectivamente, entonces existen variedades estable W^s e inestable W^u de clase C^r tangentes a E^s y E^u en 0 respectivamente, y una variedad central E^c de clase C^{r-1} tangente a E^c en 0. Las tres variedades son invariantes bajo el flujo siendo las dos primeras únicas, pero no así la variedad central.

Aplicando los dos teoremas anteriores se puede demostrar el siguiente

Teorema de Bifurcación de Hopf (en \mathbf{R}^n)¹⁵ Sea χ_μ una familia de campos vectoriales C^k ($k \geq 4$) en \mathbf{R}^n parametrizados por $\mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, tal que $\chi_\mu(0, 0) = 0$ y para todo $\mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ $\chi = (\chi_\mu, \mu)$ es también C^k ($k \geq 4$). Supongamos que $d\chi_\mu(0, 0)$ tiene dos eigenvalores complejos distintos $\lambda(\mu)$ y $\overline{\lambda(\mu)}$ tales que para

¹⁴Guckenheimer, John and Holmes, Philip [1983]. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag: New York Heidelberg Berlin, 127.

¹⁵Marsden, J. E. and McCracken, M. [1976]. *The Hopf Bifurcation and its Applications*. Springer-Verlag: New York Heidelberg Berlin, 81.

$\mu \neq 0, \operatorname{Re}(\lambda(\mu)) \neq 0$ y el resto del espectro es distinto de estos eigenvalores. Si

además tenemos que $\left. \frac{d\operatorname{Re}(\lambda(\mu))}{d\mu} \right|_{\mu=0} \neq 0$ entonces

- Existe una función $C^{k-2} \mu(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $(x_1, 0, \mu(x_1))$ esta en una órbita cerrada de $\chi = (\chi_\mu, \mu)$ de periodo aproximado a $\frac{2\pi}{|\lambda(0)|}$ y radio de orden $\sqrt{\mu}$ para $x_1 \neq 0$ tal que $\mu(0) = 0$.
- Existe una vecindad U de $(0, 0, 0)$ en \mathbf{R}^3 tal que cualquier órbita cerrada en U es una de las que arriba se describen.

El análisis se centra en este teorema debido a los problemas que se presentan al tratar de demostrar la existencia de una órbita periódica utilizando métodos de análisis numérico implementados en una computadora.

La idea de nuestra demostración utilizando métodos de análisis numérico es la siguiente

- Encontrar un punto p_0 en la órbita periódica $\gamma(t)$.
- Calcular el periodo de la órbita periódica $\gamma(t)$.
- Encontrar un plano *transversal* a la órbita periódica $\gamma(t)$.
- Demostrar que la **Aplicación de Poincaré** es una *contracción*.

Aquí estamos usando el hecho de que con el programa *PHASER* descubrimos la órbita periódica y que aparentemente esta es atractora.

Si tomamos en cuenta que este algoritmo esta implementado en una computadora que no tiene manera de representar a los reales exactamente, este produce errores de redondeo.

Además no se conoce el flujo del campo, por lo que se utiliza alguna aproximación numérica, esto hace que no se pueda encontrar el punto sobre la orbita, ni calcular el periodo y que no podamos demostrar que la **Aplicación de Poincaré** es una *contracción*.

• SECCIÓN 1 ANÁLISIS DE LA FAMILIA CUANDO $q = 0$

Como se puede ver de la ecuación

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x - y \\ \dot{y} &= ry + pz - yz^2 \quad (p, r) \in \mathbf{R}^2 \\ \dot{z} &= 0\end{aligned}$$

el flujo deja invariantes a los planos $z = z_0$ por lo que podemos suponer que el sistema es un sistema lineal en el plano. En el caso $q = 0$ de la SECCIÓN 2 del CAPÍTULO 1 obtuvimos que los eigenvalores eran $\lambda = 0, -1, r - z^2$ se puede ver que el eigenvalor 0 tiene como eigenvector al $(0, 0, 1)$.

Supongamos que la condición inicial esta dada por (x_0, y_0, z_0) en este caso, nuestro sistema se transforma en

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x - y \\ \dot{y} &= (r - z_0^2)y + pz_0 \quad (p, r) \in \mathbf{R}^2\end{aligned}$$

Sean

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & r - z_0^2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ pz_0 \end{pmatrix}$$

el sistema anterior se puede escribir como $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$, con condición inicial \mathbf{x}_0 . Supongamos también que cuando $z = z_0$ el cero de la ecuación diferencial es \mathbf{x}_c (para saber quien es este cero consultar la SECCIÓN 1 del CAPÍTULO 1). Si la matriz \mathbf{A} es invertible ($r - z_0^2 \neq 0$) entonces $\mathbf{A}\mathbf{x}_c + \mathbf{b} = 0$ y por lo tanto $\mathbf{x}_c = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, haciendo el cambio de variable $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_c$ obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}} &= \dot{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{y} + \mathbf{x}_c) + \mathbf{b} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{y}\end{aligned}$$

supongamos que $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1}$ donde \mathbf{D} está en forma canónica de Jordan y \mathbf{Q} es la matriz de cambio de coordenadas, hagamos de nuevo el siguiente cambio de variable $\mathbf{z} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{y}$. Entonces

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{A}\mathbf{y} \\ &= \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{y}\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\mathbf{Q}^{-1}\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{y}$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{D}\mathbf{z}$$

La solución de la ecuación anterior está dada por $\mathbf{z}(t) = e^{\mathbf{D}t}\mathbf{z}_0$ lo que implica que $\mathbf{x}(t) = \mathbf{Q}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}) - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$

Así que si \mathbf{A} es invertible ($r - z_0^2 \neq 0$) sólo necesitamos saber quienes son \mathbf{Q} y \mathbf{D} y automáticamente conocemos la solución a la ecuación diferencial original. Sin embargo aún en el caso de que \mathbf{A} sea invertible tenemos que considerar cuando los eigenvalores son distintos o iguales y esto queda determinado por $r - z_0^2$ distinto o igual a -1 , respectivamente.

- Si $r - z_0^2 \neq -1$ los eigenvalores son distintos y en este caso

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 - (r - z_0^2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}^{-1} = \frac{1}{-1 - (r - z_0^2)} \begin{pmatrix} -1 - (r - z_0^2) & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & r - z_0^2 \end{pmatrix}$$

por lo que en las coordenadas z_1, z_2 las soluciones son de la forma

$$z_1 = ae^{-t}$$

$$z_2 = be^{(r - z_0^2)t}$$

- Si $r - z_0^2 = -1$ los eigenvalores son iguales y en este caso

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{Q}^{-1}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

por lo que en las coordenadas z_1, z_2 las soluciones son de la forma

$$z_1 = (a - bt)e^{-t}$$

$$z_2 = be^{-t}$$

Por último solo nos faltaría el caso cuando \mathbf{A} no es invertible, en este caso $r - z_0^2 = 0$ y el sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ se transforma en

$$\dot{x} = -x - y$$

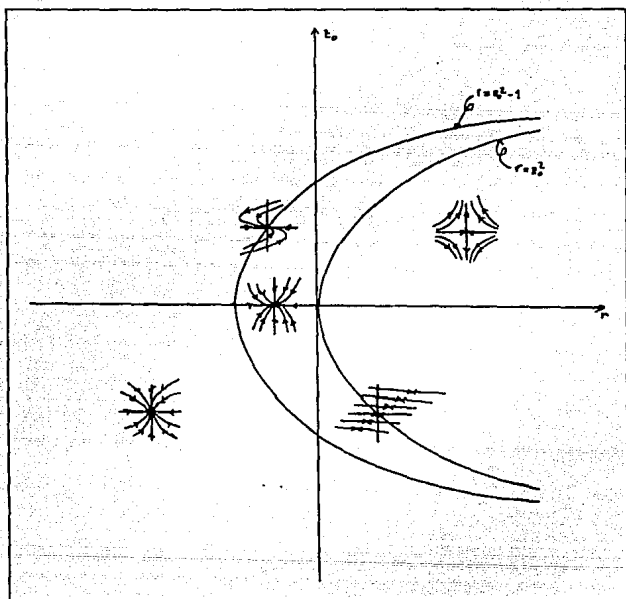
$$\dot{y} = pz_0$$

en este caso las soluciones estan dadas por

$$x(t) = (x_0 + y_0 - pz_0)e^{-t} - pz_0t + pz_0 - y_0$$

$$y(t) = pz_0t + y_0$$

El análisis anterior nos permite construir el siguiente diagrama de bifurcación presentado por el tipo de singularidad.



• SECCIÓN 2 EXISTENCIA DE ÓRBITAS CERRADAS PRODUCIDAS POR BIFURCACIÓN DE HOPF $q \neq 0$

Lema 1 Dado el polinomio

$$x^3 + (1-r+q)x^2 + (-r+q-rq)x + q(p-r)$$

existe una una región $U \subset \mathbb{R}_{(p,q,r)}^3$ en el espacio paramétrico de tal manera que una de las raíces de este polinomio siempre es real y las otras dos son complejas.

Demostración La demostración se hará después. ■

Teorema 1 Existe un punto $(p_0, q_0, r_0) \in \mathbb{R}_{(p,q,r)}^3$ que satisface $p_0 = (1-r_0/q_0)(1-r_0)(1+q_0)$, una curva $\mu: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}_{(p,q,r)}^3$, $\mu(0) = (p_0, q_0, r_0)$ transversal¹⁶ a la superficie $p = (1-r/q)(1-r)(1+q)$ en (p_0, q_0, r_0) tal que en el campo X_μ existe Bifurcación de Hopf en (p_0, q_0, r_0) para el punto singular 0.

Demostración Para el punto singular 0 el polinomio característico está dado por

$$x^3 + (1-r+q)x^2 + (-r+q-rq)x + q(p-r)$$

Por el lema anterior existe una región $U \subset \mathbb{R}_{(p,q,r)}^3$ en el espacio paramétrico de tal manera que una de las raíces siempre es real y las otras dos son complejas, si no restringimos a U podemos escribir al polinomio característico como

$$(x-\lambda)(x-\bar{\lambda})(x-\alpha), \quad \alpha < 0, \lambda = \lambda_1 + i\lambda_2, \text{ desarrollando tenemos que}$$

$$x^3 - (2\lambda_1 + \alpha)x^2 + (|\lambda|^2 + 2\lambda_1\alpha)x - |\lambda|^2\alpha, \quad \alpha < 0, \lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$$

el cual tiene raíces imaginarias puras si y solo si el producto de los coeficientes de x^2 y x es igual al término constante, esto es si y solo si $(q-r+1)(q-r-qr) = q(p-r)$ lo que implica que $p = (1-r/q)(1-r)(1+q)$. Así tenemos un posible valor de bifurcación, (p_0, q_0, r_0) donde $p_0 = (1-r_0/q_0)(1-r_0)(1+q_0)$, nótese que esto tiene significado si y solo si la intersección de la superficie $p = (1-r/q)(1-r)(1+q)$ con U es distinta de el vacío.

Ahora debemos calcular $\lambda'_i(p_0)$ y verificar que sea distinto de cero. Igualando los coeficientes de potencias iguales de x tenemos

¹⁶Definición Una curva $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ es transversal a la superficie S en p si $\exists \delta \in (-\varepsilon, \varepsilon): p = \gamma(\delta) \in S$,

$$\gamma'(\delta) \otimes T_p S = \mathbb{R}^3$$

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

- i) $q-r+1 = -2\lambda_1 - \alpha$
 ii) $q-r-qr = |\lambda|^2 + 2\lambda_1\alpha$
 iii) $qp-qr = -|\lambda|^2\alpha$

de i) tenemos que $\alpha = -(q-r+1+2\lambda_1)$ y de ii) y iii) tenemos que $(q-r-qr)\alpha = 2\lambda_1\alpha^2 - qp+qr$

$$\text{por lo tanto } -(q-r-qr)(q-r+1+2\lambda_1) = 2\lambda_1(q-r+1+2\lambda_1)^2 - qp+qr.$$

Derivando implícitamente la ecuación anterior con respecto a p tenemos que

$$-2(q-r-qr)\lambda_1' = 2(q-r+1+2\lambda_1)^2\lambda_1' + 8\lambda_1(q-r+1+2\lambda_1)\lambda_1' - q$$

despejando a λ_1' de la ecuación anterior tenemos que

$$\lambda_1' = \frac{q}{2(q-r+1+2\lambda_1)^2 + 8\lambda_1(q-r+1+2\lambda_1) + 2(q-r-qr)}$$

ya que en p_0 los eigenvalores complejos son imaginarios puros tenemos que $\lambda_1(p_0) = 0$, por lo tanto

$$\lambda_1'(p_0) = \frac{q}{2(q-r+1)^2 + 2(q-r-qr)}$$

Así si $q \neq 0$ y $(q-r+1)^2 + (q-r-qr) \neq 0$ tenemos que $\lambda_1'(p_0) \neq 0$. Por lo tanto existe *bifurcación de Hopf* en (p_0, q_0, r_0) para el punto singular 0. ■

Lo único que nos falta demostrar es que existe la región U (Lema 1) y que la superficie dada por $p = (1-r/q)(1-r)(1+q)$ la interseca.

Demostración (Lema 1) Para demostrar que la región U existe utilizaremos el discriminante del polinomio cúbico reducido asociado al polinomio cúbico general¹⁷.

Por el lema 1 del apéndice para que nuestra región U exista es necesario que el *discriminante* del polinomio cúbico reducido asociado al polinomio característico sea menor que cero.

¹⁷ Véase el apéndice

Sean

$$f: \mathbf{R}_{(p,q,r)}^3 \rightarrow \mathbf{R}_{(a,b,c)}^3, \quad f(p,q,r) = (1-r+q, -r+q-qr, qp-qr)$$

$$g: \mathbf{R}_{(u,v)}^3 \rightarrow \mathbf{R}_{(u,v)}^2, \quad g(a,b,c) = \left(b - \frac{1}{3}a^2, \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c \right)$$

$$\mathbf{H}_2 \subset \mathbf{R}_{(u,v)}^2, \quad \mathbf{H}_2 = \left\{ (u,v) \in \mathbf{R}_{(u,v)}^2 \mid v > 0, \frac{v^2}{4} + \frac{u^3}{27} > 0 \right\}$$

nótese que f y g son continuas y que g es sobre ya que dado $(u,v) \in \mathbf{R}_{(u,v)}^2$, $g(0,u,v) = (u,v)$, por otro lado $\mathbf{H}_2 \subset \mathbf{R}_{(u,v)}^2$ es abierto y distinto del vacío, por lo tanto $\mathbf{H}_1 = g^{-1}(\mathbf{H}_2)$ es abierto y distinto del vacío.

Proposición 1 Sea $\mathbf{V} \subset \mathbf{R}_{(p,q,r)}^3$ definido por $\mathbf{V} = f^{-1}(\mathbf{H}_1)$, entonces \mathbf{V} es distinto del vacío.

Demostración Solo es necesario demostrar que $\mathbf{H}_1 = g^{-1}(\mathbf{H}_2) \subset \mathbf{I} = f(\mathbf{R}_{(p,q,r)}^3)$.

Si f fuera sobre, no tendríamos nada que hacer, pero no es así, lo que haremos es encontrar el conjunto $\mathbf{I}^c \subset \mathbf{R}_{(a,b,c)}^3$ complemento de la imagen de f y ver que hay puntos en \mathbf{H}_1 que no están en \mathbf{I}^c .

$$\mathbf{I}^c = \left\{ (a,b,c) \in \mathbf{R}_{(a,b,c)}^3 \mid \exists (p,q,r) \in \mathbf{R}_{(p,q,r)}^3 : f(p,q,r) = (a,b,c) \right\}$$

Supongamos que $f(p,q,r) = (a,b,c)$, es decir tenemos las siguientes tres igualdades

- i) $1 - r + q = a$
- ii) $-r + q - qr = b$
- iii) $qp - qr = c$

veamos cuando alguna de estas igualdades no se satisface. Recordemos que $q \neq 0$ por lo tanto tenemos que

$$r = 1 + q - a$$

$$p = \frac{c}{q} + r$$

sustituyendo i) en ii) tenemos que

$$-(1+q-a) + q - (1+q-a)q = b$$

$$q^2 + (1-a)q + (1-a+b) = 0$$

usando la fórmula general de segundo grado tenemos que

$$q = \frac{a-1 \pm \sqrt{(1+a)^2 - 4(1+b)}}{2}$$

Por lo tanto $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}_{(a,b,c)}^3 \mid (1+a)^2 - 4(1+b) < 0\} \subset \mathbb{I}^c$, además como $q \neq 0$ esto implica que $\{(1,0,c) \mid c \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{I}^c$ y estas dos son las únicas maneras de que alguna de las igualdades i), ii) y iii) no se satisfagan por lo tanto

$$\mathbb{I}^c = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}_{(a,b,c)}^3 \mid (1+a)^2 - 4(1+b) < 0\} \cup \{(1,0,c) \mid c \in \mathbb{R}\}$$

Como $(0,-1,1) \notin \{(1,0,c) \mid c \in \mathbb{R}\}$ y $(1+0)^2 - 4(1+(-1)) = 1 - 4(0) = 1 > 0$ tenemos que $(0,-1,1) \in \mathbb{I}^c$ además $g(0,-1,1) = (-1,1)$ y $1 > 0$, $27(1)^2 + 4(-1)^3 = 27 - 4 = 23 > 0$ por lo que $(0,-1,1) \in \mathbb{H}$, y \mathbb{V} es distinto del vacío. ■

Debido a la proposición anterior \mathbb{V} es una región en el espacio paramétrico $\mathbb{R}_{(p,q,r)}^3$ tal que para toda $v \in \mathbb{V}$, el polinomio reducido del polinomio característico asociado a v tiene una raíz real y dos complejas.

Como las raíces del polinomio característico asociado a v difieren por una traslación de las del polinomio reducido, la raíz real podría ser cero, o las raíces complejas imaginarias puras, sin embargo las raíces de un polinomio dependen de manera continua de los coeficientes de este, podemos variar un poco los coeficientes del polinomio característico asociado a v , de tal manera que una raíz sea real distinta de cero y las otras dos complejas. Esto demuestra la existencia de la región \mathbb{U} y el ema 1 queda demostrado.

Lo único que nos falta verificar es que la región \mathbb{U} si intersecta a la superficie $p = (1-r/q)(1-r)(1+q)$, es decir solo necesitamos demostrar que para algún (r,q) se cumple que

$$g(f((1-r/q)(1-r)(1+q), r, q)) \in \mathbb{H}_2$$

$$g(1-r+q, -r+q-qr, (1-r+q)(-r+q-qr)) \in \mathbb{H}_2$$

Proposición 2 Si $(r,q) = (-5, -1/2)$ entonces $g(f((1-r/q)(1-r)(1+q), r, q)) \in \mathbb{H}_2$.

Demostración

$$g(1 - (-1/2) + (-5), -(-1/2) + (-5) - (-5)(-1/2), (1 - (-5) + (-1/2))(-(-5) + (-1/2) - (-5)(-1/2))) \in \mathbb{H}_2$$

$$g(11/2, 2, 11) \in \mathbb{H}_2$$

$$(-97/12, 4246/216) \in \mathbb{H}_2$$

pero $27(4246/216)^2 + 4(-97/12)^3 = 16641/2 > 0$,

por lo tanto $(p, q, r) = (-27, -1/2, -5) \in U$ y también esta en la superficie $p = (1-r/q)(1-r)(1+q)$. ■

Teorema 2 Existe un punto $(p_0, q_0, r_0) \in \mathbb{R}_{(p,q,r)}^3$ que satisface $r_0 = 1/2 p_0 + (1-p_0/q_0)(1-p_0)(1+q_0)$, una curva $\mu: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}_{(p,q,r)}^3$, $\mu(0) = (p_0, q_0, r_0)$ transversal a la superficie $r = 1/2 p + (1-p/q)(1-p)(1+q)$ en (p_0, q_0, r_0) tal que en el campo X_μ existe Bifurcación de Hopf en (p_0, q_0, r_0) para el punto singular $(\pm\sqrt{r-p}, \mp\sqrt{r-p}, \pm\sqrt{r-p})$.

Demostración Es similar a la del teorema 1. ■

APÉNDICE

DESARROLLO DE LA FÓRMULA DE CARDANO

La Fórmula de Cardano nos da las raíces del polinomio de tercer grado $y^3 + ay^2 + by + c$ en términos de sus coeficientes.

Utilizando el cambio de variable $y = x - \frac{1}{3}a$ logramos eliminar el término de segundo grado, quedándonos la ecuación de la siguiente manera

$$x^3 + px + q = 0 \text{ donde } p = b - \frac{1}{3}a^2 \text{ y } q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c$$

Observación A $x^3 + px + q$ lo llamaremos el polinomio cúbico reducido asociado a $x^3 + ax^2 + bx + c$.

Por el Teorema fundamental del álgebra la ecuación anterior tiene tres raíces (en el campo de los números complejos), sea x_0 una de estas raíces. Analicemos el siguiente polinomio

$u^2 - x_0u - \frac{1}{3}p$, este tiene dos raíces α y β que satisfacen el siguiente par de ecuaciones

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= x_0 \\ \alpha\beta &= -\frac{1}{3}p \end{aligned}$$

como x_0 es raíz de $x^3 + px + q$ tenemos que

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^3 + p(\alpha + \beta) + q &= 0 \\ \alpha^3 + \beta^3 + (3\alpha\beta + p)(\alpha + \beta) + q &= 0, \end{aligned}$$

pero como $\alpha\beta = -\frac{1}{3}p$ lo anterior se reduce a $\alpha^3 + \beta^3 = -q$ además $\alpha^3\beta^3 = -\frac{1}{27}p^3$, por lo

que α^3 y β^3 son raíces del polinomio cuadrático $z^2 + qz - \frac{1}{27}p^3$, por lo tanto por la fórmula general de segundo grado tenemos que

$$z = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$\text{por lo tanto } \alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Hemos obtenido así lo que se conoce como la Fórmula de Cardano

$$x_0 = \alpha + \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Como la raíz cúbica tiene tres valores en el campo de los números complejos, las fórmulas de α y β nos dan tres valores para cada una de ellas, pero no cualquier combinación de estos nos dan raíces del polinomio de tercer grado, sino solo aquellas que satisfagan

$$\alpha\beta = -\frac{1}{3}p$$

Si α_1 es uno de los tres valores de α entonces los otros dos están determinados por $\alpha_2 = \alpha_1 e$ y $\alpha_3 = \alpha_1 e^2$ donde e es una raíz cúbica de la unidad distinta de 1. Si β_1 es el valor de β correspondiente a α_1 , entonces los otros valores de β estarán determinados por $\beta_2 = \beta_1 e$ y $\beta_3 = \beta_1 e^2$ como $e^3 = 1$, tenemos que

$$\alpha_2\beta_1 = \alpha_1 e \beta_1 e^2 = \alpha_1 \beta_1 e^3 = \alpha_1 \beta_1 = -\frac{p}{3},$$

de igual manera $\alpha_1\beta_2 = \alpha_1 e^2 \beta_1 e = \alpha_1 \beta_1 e^3 = \alpha_1 \beta_1 = -\frac{p}{3}$ por lo que las raíces del polinomio $x^3 + px + q$ son

$$x_1 = \alpha_1 + \beta_1$$

$$x_2 = \alpha_2 + \beta_2 = \alpha_1 e + \beta_1 e^2$$

$$x_3 = \alpha_3 + \beta_3 = \alpha_1 e^2 + \beta_1 e$$

Hasta aquí lo único que hemos hecho es encontrar explícitamente las raíces del polinomio $x^3 + px + q$, pero nosotros necesitamos que una de las raíces sea real y las otras dos complejas.

Como las raíces están dadas en términos de α y β , y recordando que

$$\alpha = \sqrt{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad \beta = \sqrt{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

la expresión $\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ desempeñará un papel fundamental, nótese que el signo de esta expresión es contrario al signo de la expresión

$$\mathbf{D} = -4p^3 - 27q^2 = -108\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)$$

denominada *discriminante* de la ecuación $x^3 + px + q$.

Una consecuencia inmediata de la Fórmula de Cardano es el siguiente

Lema 1 Si $D < 0$ Hay una raíz real y dos complejas.

Demostración En este caso, en la Fórmula de Cardano, el radicando de cada uno de los radicales cuadradas es un número positivo. Por esto, los radicandos de cada uno de los radicales cúbicos es real. Sin embargo la raíz cúbica tiene un valor real y dos valores complejos.

Sea pues α_1 el valor real de α y β_1 el valor de β correspondiente a α_1 , como

$$\alpha_1 \beta_1 = -\frac{p}{3}$$

y p es real β_1 es también real. Por lo tanto $x_1 = \alpha_1 + \beta_1$ que es una de las raíces de $x^3 + px + q$ es real, las otras dos están dadas por

$$\begin{aligned} x_2 &= \alpha_1 e + \beta_1 e^2 \\ &= \alpha_1 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \beta_1 \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= -\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} + i \sqrt{3} \frac{\alpha_1 - \beta_1}{2} \\ x_3 &= \alpha_1 e^2 + \beta_1 e \\ &= \alpha_1 \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \beta_1 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= -\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} - i \sqrt{3} \frac{\alpha_1 - \beta_1}{2} \end{aligned}$$

como α_1 y β_1 son reales, estas dos raíces son complejas, pues la parte imaginaria es distinta de cero ya que $\alpha_1 \neq \beta_1$. ■