



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

01161
8
92

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
Facultad de Ingeniería

**ANALISIS DE CONFIABILIDAD DE
ESTRUCTURAS ELASTO-PLASTICAS
SUJETAS A EXCITACIONES SISMICAS**

TESIS

Presentado a la División de Estudios de Posgrado de la

**FACULTAD DE INGENIERIA
DE LA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

como requisito para obtener
el grado de

**MAESTRO EN INGENIERIA
(ESTRUCTURAS)**

ALEJANDRO RODRIGUEZ RODRIGUEZ

CIUDAD UNIVERSITARIA, MEXICO D.F.

1993

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ANALISIS DE CONFIABILIDAD DE ESTRUCTURAS ELASTO-PLASTICAS SUJETAS A EXCITACIONES SISMICAS

RESUMEN	1
INTRODUCCION	2
CAPITULO 1: MODELO DE COMPORTAMIENTO MECANICO DE LA ESTRUCTURA	
1.1 INTRODUCCION	5
1.2 METODOS DE GENERACION DE LOS ESTADOS LIMITES DE SEGURIDAD PARA SISTEMAS ESTRUCTURALES PLANOS, CON COMPORTAMIENTO ELASTOPLASTICO, SUJETOS A EFECTOS DE CARGA SIMPLE DE FLEXION PURA	6
1.2.1 Criterio de falla de una barra flexionada (flexión pura)	6
1.2.2 Criterio de estado límite de un sistema estructural formado de barras a flexión	10
1.2.3 Expresiones para los estados de seguridad límite de un sistema estructural con barras a flexión	11
1.3 METODO DE GENERACION DE LOS ESTADOS LIMITE DE SEGURIDAD PARA ESTRUCTURAS PLANAS FORMADAS DE BARRAS SUJETAS A EFECTOS COMBINADOS	12
1.3.1 Criterio de falla de una barra plana sujeta a efectos combinados (el fenómeno de pandeo puede tambien ser tomado en cuenta)	12
1.3.2 Cálculo de la rigidez tangente (matriz de rigidez reducida) y de las fuerzas equivalentes en los nudos	16
1.3.3 Interacción del momento flexionante y fuerza axial, considerando el fenómeno de pandeo	20
1.3.4 Criterio de falla de un sistema estructural formado de barras sujetas a efectos combinados	22
1.3.5 Expresión para los estados límite del sistema estructural	24
1.4 ESFUERZOS RESIDUALES DE ENDURECIMIENTO O ABLANDAMIENTO MODELADO A TRAVES DE LEYES DE COMPORTAMIENTO BI-LINEAL	24
1.5 EJEMPLO ILUSTRATIVO	26
1.6 CONCLUSIONES	30

CAPITULO 2: MODELO DE GENERACION DE FUERZAS SISMICAS

2.1 INTRODUCCION	32
2.2 FORMULAS DE WILBUR	34
2.3 RIGIDEZ DE ENTREPISO CON VIGAS RIGIDAS	36
2.4 METODO DE HOLZER	38
2.4.1 Descripción del método	38
2.4.2 Fundamento del método de Holzer para edificios con masas de piso rígido	39
2.5 METODO ESTATICO PARA LA OBTENCION DE FUERZAS SISMICAS	40
2.5.1 Valuación de fuerzas sísmicas sin estimar el periodo fundamental del edificio	40
2.5.2 Valuación de fuerzas sísmicas estimando el periodo fundamental del edificio	41
2.5.3 Distribución de las fuerzas sísmicas entre los elementos resistentes del edificio	43
2.6 METODO DINAMICO PARA LA OBTENCION DE FUERZAS SISMICAS	43
2.6.1 Movimiento del terreno	43
2.6.2 Análisis modal espectral	44
2.6.3 Espectros de diseño sísmico para la República Mexicana	45
2.7 EJEMPLO ILUSTRATIVO	47
2.8 CONCLUSIONES	64

CAPITULO 3: MODELO DE CONFIABILIDAD

3.1 NOCIONES DE LA TEORIA MATEMATICA DE CONFIABILIDAD DE LOS SISTEMAS	65
3.1.1 Clasificación de los sistemas	65
3.1.2 Representación de los sistemas por cadenas y cortes	68
3.1.3 Ejemplo de la representación de un sistema	69
3.1.4 Confiabilidad de los sistemas	71

3.2 NOCIONES DE CONFIABILIDAD PARA LOS SISTEMAS ESTRUCTURALES	73
3.2.1 Probabilidad de falla asociada a un estado límite	75
3.2.2 Caso fundamental	77
3.2.3 Noción del índice de confiabilidad, un caso particular	78
3.2.4 Ecuación de estado límite no-lineal. Aproximación de primer orden	81
3.2.5 Noción de "punto de falla el más probable". Ecuación de estado no lineal expresada como función de variables aleatorias normales estandar independientes X	83
3.2.6 Transformación de Rosenblatt	86
3.2.7 Obtención del índice de confiabilidad. Función de estado límite no-lineal, expresada en variables aleatorias no-normales dependientes	88
3.2.8 Probabilidad de falla asociada a varios estados límites	89
3.3 METODOS DE RAMAS Y LIMITES PARA EL ANALISIS DE CONFIABILIDAD DE SISTEMAS ESTRUCTURALES	93
3.3.1 Probabilidad de falla de un componente o elemento	95
3.3.2 Probabilidad de falla de sistema	96
3.3.2.1 Sistema en paralelo	97
3.3.2.2 Sistema en serie	97
3.3.3 Método del hiperplano equivalente	98
3.3.4 Evaluación de la integral multinormal	100
3.3.5 Metodología para la búsqueda de los caminos de falla y límites para la probabilidad de falla	102
3.3.5.1 Hipótesis de cálculo y acotamiento de la probabilidad de falla	104
3.3.5.2 Algoritmo de búsqueda de los caminos de falla	106
3.4 METODO DE ANALISIS DE CONFIABILIDAD DE SISTEMAS ESTRUCTURALES A TRAVES DE SIMULACION MONTE-CARLO	107
3.4.1 Modelo mecánico	107
3.4.2 Modelo de confiabilidad	107
3.4.3 Sistema en serie	108
3.4.4 Algoritmo de simulación	110

3.4.5	Ejemplo	112
3.5	EJEMPLO DE ILUSTRACION DE LOS METODOS	117
3.5.1	Introducción.	117
3.5.2	Descripción del modelo.	117
3.5.3	Método de primer orden.	118
3.5.4	Método de simulación Monte-Carlo.	124
3.5.5	Síntesis de resultados.	125
3.6	CONCLUSION.	126

CAPITULO 4: ANALISIS DE CONFIABILIDAD DE UN MARCO DE ACERO DE 10 NIVELES

4.1	INTRODUCCION	128
4.2	DESCRIPCION DEL MODELO	129
4.3	OBTENCION DE FUERZAS SISMICAS	133
4.4	MECANISMOS DE FALLA O DE COLAPSO	134
4.5	FUNCIONES DE SEGURIDAD DE LOS ESTADOS LIMITE	136
4.6	OBTENCION DE INDICES DE CONFIABILIDAD Y PROBABILIDADES DE FALLA GLOBAL DE SISTEMA ESTRUCTURAL	143
4.6.1	Método de Primer Orden	143
4.6.2	Simulación Monte Carlo	144
4.7	RESUMEN DE RESULTADOS.	147
4.8	CONCLUSION	150

CAPITULO 5: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

RECONOCIMIENTOS	154
-----------------	-----

REFERENCIAS	155
-------------	-----

APENDICES	160
-----------	-----

RESUMEN.

En este trabajo se estudia la confiabilidad de estructuras en el plano sujetas a excitaciones sísmicas y considerando un comportamiento elasto-plástico. El modelo de comportamiento mecánico incluye varios diagramas de dominio de resistencia, en el cual se incluye o no la interacción entre el momento flexionante, fuerza cortante y la fuerza axial. El modelo de cargas se enfoca a excitaciones sísmicas estáticas equivalentes, obtenidas a través de un análisis modal espectral, las cuales se consideran en un principio como variables deterministas.

La aproximación de la probabilidad de falla del sistema estructural se realiza con dos métodos: un método de primer y segundo orden, basado en la aproximación de hiperplanos equivalentes de las uniones y de las intersecciones de las regiones de falla del sistema, y un segundo, que utiliza el método de Monte-Carlo.

Para el estudio paramétrico del ejemplo de aplicación, el análisis de confiabilidad del sistema estructural consiste de las siguientes etapas: -dominio de resistencia a pura flexión y a flexo-tensión-compresión, tomando en cuenta el efecto de pandeo; -la sollicitación sísmica se considera primero determinista y como segundo modelo se considera una sollicitación sísmica aleatoria con distribuciones probabilistas dadas y - para el cálculo de las probabilidades de falla e índices de confiabilidad del sistema estructural se hace por medio de los métodos mencionados, de Primer Orden y por simulación Monte-Carlo.

Con estas técnicas de análisis de confiabilidad, los sistemas estructurales pueden ser optimizados durante el proceso de diseño; también, estas herramientas de cálculo pueden ser utilizadas para estructuras existentes permitiendo evaluar la seguridad de las condiciones en que se encuentra y en su caso permitir hacer recomendaciones para posibles reestructuraciones.

INTRODUCCION.

La incertidumbre del comportamiento real de las estructuras, bajo la acción de excitaciones accidentales, como son el viento, sismo, etc., conducen en general, a seleccionar niveles y factores de seguridad basados en la observación y en análisis a posteriori del comportamiento. Este procedimiento tradicional semi-empírico, intuitivo y determinista es aceptado por la mayoría de los ingenieros, ya que conduce a definir niveles de riesgo aceptables.

Las cargas máximas probables y las resistencias nominales de diseño no han resultado en general de análisis cuantitativos, sino de observar las consecuencias de diversos criterios de diseño sobre el comportamiento de estructuras reales y de optar por aquellos que conducen a riesgos suficientemente bajos, en condiciones económicas aceptables.

En las últimas décadas se han desarrollado la teoría y las herramientas de la Confiabilidad Estructural, cuyo principal objetivo es la toma de decisiones que consideren de manera explícita las variables significativas: riesgo tolerable e implicaciones económicas.

Se han formulado modelos para las cargas, se han estimado sus parámetros, se han propuesto modelos probabilísticos de la resistencia de miembros estructurales, pero la aplicación de estos modelos y métodos a problemas prácticos rara vez ha ido más allá de la estimación de probabilidades de falla de secciones críticas específicas y de la formulación de criterios y algoritmos para seleccionar los valores de diseño de cargas, resistencias y factores de seguridad en cada sección cuando se especifican para dicha sección la probabilidad de falla o el índice de seguridad.

La mayor utilidad práctica de los métodos probabilísticos del análisis de confiabilidad estructural ha sido la de hacer congruentes mediante calibración, los niveles de seguridad aplicables a estructuras usuales.

La finalidad de este trabajo es el cálculo de probabilidades de falla e índices de seguridad de sistemas estructurales, en donde la probabilidad de falla del sistema estructural depende de la falla de los componentes que lo forman. Esto significa que la probabilidad de falla del sistema estructural es la probabilidad de falla de un cierto conjunto de elementos que conforman al sistema estructural.

El enfoque que se le da a este trabajo es el de promover estas herramientas de análisis en el medio docente, así como explicar de la manera más sencilla la metodología para poder ser aplicadas dentro de la práctica profesional.

Dentro del estado actual de conocimientos, los modelos de confiabilidad de sistemas estructurales pueden llevarse a cabo considerando diferentes dominios de resistencia, como considerar únicamente el momento flexionante, o considerar un dominio de resistencia que tome en cuenta la interacción entre el momento de flexión y la fuerza axial, así como el efecto de pandeo. Dentro del capítulo 1 se muestra cómo identificar todos los estados de falla posible de estructuras planas, formadas de elementos de sección constante con un comportamiento elasto-plástico, tomando en cuenta algunos dominios de resistencia como: únicamente a flexión, flexotensión y flexocompresión considerando el efecto de pandeo de una manera sencilla; el método utilizado, generación automática de funciones de seguridad propuesto por Murotsu (Ref.36), permite una gran facilidad de aplicación. Para comprender con mayor sencillez esta metodología, se presenta un ejemplo ilustrativo.

En el capítulo 2 se presenta el modelo de fuerzas sísmicas, el cual ilustra métodos aproximados bastante conocidos; estas fuerzas obtenidas por medio de un análisis modal espectral son consideradas como fuerzas estáticas equivalentes; los parámetros que intervienen en el cálculo son tomados de las Normas Técnicas Complementarias de Diseño por Sismo (Ref.18).

Dentro del capítulo 3, los métodos utilizados para calcular la probabilidad de falla del sistema y el índice de confiabilidad son el Método de Primer Orden y el de Simulación Monte-Carlo.

Las técnicas de Primer Orden suponen que el sistema estructural puede modelarse como un ensamble de componentes en serie y en paralelo; el sistema en paralelo esta definido como un sistema de falla si todos los componentes que lo integran han fallado (el evento de falla esta dado por la intersección de los eventos de falla de las componentes individuales); el sistema en serie es un sistema de falla si cualquier componente del sistema falla (el evento de falla esta dado por la unión de los eventos de falla de las componentes individuales).

Dentro del análisis de confiabilidad las variables de carga se consideran primeramente como variables deterministas, y después se consideran como variables aleatorias proponiendo ciertos valores estadísticos.

En este capítulo se presenta el método del árbol de caminos de falla, el que nos permite, por una parte, conocer todos los caminos de falla posibles de la estructura, además de identificar el camino de falla elemental más probable y por otra parte poder encajonar la probabilidad de falla global del sistema estructural por los límites superior e inferior.

Para ilustrar los métodos, se presenta un ejemplo de un marco plano de un nivel y una crujía, así como un árbol de falla en el cual se identifica el camino de falla más probable.

En el capítulo 4 se presenta una aplicación de los métodos en un marco plano de acero de 10 niveles.

Finalmente, en el capítulo 5 se hacen algunas recomendaciones y conclusiones a las que se llegaron al aplicar estos conceptos de Confiabilidad Estructural.

1.- MODELO DE COMPORTAMIENTO MECANICO DE LA ESTRUCTURA.

1.1 Introducción.

En general, hay muchos tipos de falla posibles en los sistemas estructurales, dependiendo de la configuración de las formas del sistema y de los materiales de los miembros, de las condiciones de carga, etc. A fin de llevar a cabo una valoración de la confiabilidad de los sistemas, deben conocerse las formas de falla y sus estados límite de seguridad, o sus márgenes de seguridad. Para una estructura de tipo simple los márgenes de seguridad pueden obtenerse fácilmente por cálculos manuales.

En el campo del análisis de confiabilidad de sistemas convencionales, los mecanismos potenciales de colapso están especificados en sus estados límite de seguridad o en sus márgenes de seguridad, y se desprenden al usar el principio del trabajo virtual. (Ref.1). Sin embargo, es difícil en la práctica, para grandes estructuras con un alto grado de redundancia, determinar a priori que modos de falla son probabilísticamente los más significativos.

Para la generación automática de los modos de falla de sistemas estructurales con comportamiento elastoplástico, Gorman y Moses entre otros (Ref. 2,3), propusieron inicialmente usar el método de incremento de carga; también Watwood (Ref.4) propuso un método que genera los mecanismos básicos para su uso en un análisis de colapso de una estructura a base de marcos.

Murotsu y otros proponen un procedimiento general para expresar los márgenes de seguridad en términos de las variables aleatorias, desarrollan primero un método para estructuras tipo armadura (Ref.5-7), después para estructuras tipo marco sujetas únicamente a momento flexionante (Ref.8,9) y finalmente, para estructuras tipo marco sujetas a efecto de carga combinada, (Ref.10,11).

En este capítulo se discuten algunos métodos de generación automática de las funciones de estado límite de seguridad. En el subcapítulo 1.2 se presenta un procedimiento para generar los márgenes de seguridad de una estructura simple tipo marco, donde la falla está dominada solamente por el efecto del momento flexionante (fluencia o plastificación unidimensional).

Se obtienen las matrices de rigidez reducidas y las fuerzas equivalentes nodales, para tomar en cuenta el comportamiento de los elementos plastificados. En el subcapítulo 1.3 se toman en cuenta los efectos de carga combinada, de momento flexionante, fuerza axial y fuerza cortante, para la generación de los márgenes de seguridad de la estructura.

Finalmente, se mejoran estos métodos, para tomar en cuenta el fenómeno de endurecimiento o ablandamiento del material modelado a por medio de leyes de comportamiento bi-lineal.

1.2 Método de generación de los estados límites de seguridad para sistemas estructurales planos, con comportamiento elasto plástico, sujetos a efectos de carga simple de flexión pura.

Este método de cálculo de los estados límite de seguridad, puede ser resumido en dos etapas: La condición de plasticidad de una barra (dicho también de un elemento) o de una sección extrema de un elemento es primero aproximada por una función lineal, y la función de estado de seguridad límite de los elementos es expresada como una combinación lineal de fuerzas nodales de resistencia y de cargas aplicadas.

Gracias a esta formulación, se hace la observación que el análisis de confiabilidad de un sistema estructural es grandemente facilitado, cuando las resistencias y las cargas son consideradas como variables aleatorias.

Este método se basa en las hipótesis siguientes:

Las barras o elementos estructurales se consideran rectos y homogéneos, y solo existen cargas concentradas.

El comportamiento mecánico del material se supone elastoplástico ideal, o dicho de otra manera, las articulaciones plásticas siguen la teoría de las deformaciones plásticas, mientras que las otras secciones se comportan elásticamente.

Una sección de una barra cede o se plastifica cuando la función de estado de seguridad se anula; esta función está determinada por las dimensiones y la fuerza del límite plástico, así como por las solicitaciones aplicadas; por lo tanto una articulación plástica está formada.

Las secciones críticas aparecen en los extremos de las barras o en los puntos de aplicación de las cargas concentradas. Por comodidad en el análisis estructural, las secciones críticas se consideran en los extremos de los elementos. Dicho de otra manera, las articulaciones plásticas potenciales aparecen en los extremos de los elementos.

1.2.1 Criterio de falla de una barra flexionada (flexión pura).

Sea una estructura con barras a flexión, compuesta de n elementos y sujeta a $3m$ cargas concentradas en los nudos, donde m es el número de nudos, las secciones extremas de las barras i ($i=1, \dots, n$) están numeradas a la izquierda por $(2i-1)$ y a la derecha por $(2i)$. El análisis de fuerzas de la estructura se hace por el método matricial (nos interesa en particular el momento flexionante). Así las fuerzas pueden escribirse:

$$S_i = \sum_{j=1}^{3m} b_{ij} L_{1j} \quad (i=1, 2, \dots, 2n) \quad (1.1)$$

Donde L_j son las cargas aplicadas y b_{ij} unos coeficientes que son función por ejemplo de E , A , I , etc., (características del elemento).

Los momentos resistentes en flexión, ya sean positivos o negativos, en las secciones críticas (los extremos de las barras), están dados por el momento límite de las zonas plastificadas de las barras, tenemos entonces:

$$R_{2i-1} = R_{2i} = Z_{0i} C_{yi} = Z_{0i} \sigma_{yi}, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.2)$$

donde Z_{0i} es el módulo de sección plástico del elemento i -ésimo, y $C_{yi} = \sigma_{yi}$ es el esfuerzo límite elástico, del elemento i -ésimo.

La función de estado de seguridad de las secciones extremas de los elementos puede escribirse:

$$Z_i = R_i - \text{signo}(S_i) S_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.3)$$

donde el $\text{signo}(\cdot)$ es el signo de (\cdot) .

Por consiguiente el criterio de falla (o de fluencia) de una sección extrema del elemento esta dado por :

$$Z_i \leq 0 \quad (1.4)$$

Con el fin de realizar los análisis de la estructura con el mismo número de nudos del sistema, a cada plastificación de las secciones potencialmente críticas, se puede deducir unas matrices de rigideces reducidas para los elementos dañados y unas fuerzas nodales equivalentes.

Cuando se forma una articulación plástica en el extremo izquierdo $(2i-1)$ del elemento (i) , la matriz de rigidez del elemento a flexión empotrado en ambos extremos es reemplazada por una matriz de rigidez reducida de un elemento a flexión, articulado a la izquierda y empotrado a la derecha; en los nudos extremos del elemento i -ésimo se aplica un vector $\{f_i\}$ de fuerzas nodales equivalentes.

$$\{f_i\} = \{0, (3/2l_i)M_{p_i}, M_{p_i}, 0, -(3/2l_i)M_{p_i}, M_{p_i}/2\} \quad (1.5)$$

donde M_{p_i} es el momento plástico del extremo izquierdo del elemento (i) y l_i es la longitud del elemento (i) .

Las fuerzas nodales se muestran en la figura 1.1.b.

La matriz de rigidez original del elemento empotrado en ambos extremos es la siguiente:

$$\begin{bmatrix}
 EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\
 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\
 & & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\
 & & & EA/L & 0 & 0 \\
 & & & & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\
 & & & & & 4EI/L \\
 \text{S I M E T R I C A} & & & & &
 \end{bmatrix}$$

Una vez plastificado el elemento en el extremo izquierdo, la matriz de rigidez original es reemplazada por la siguiente matriz; obtenida con la suposición de que hay una articulación real en el extremo mencionado:

$$\begin{bmatrix}
 EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\
 & 3EI/L^3 & 0 & 0 & -3EI/L^3 & 3EI/L^2 \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & EA/L & 0 & 0 \\
 & & & & 3EI/L^3 & -3EI/L^2 \\
 & & & & & 3EI/L \\
 \text{S I M E T R I C A} & & & & &
 \end{bmatrix}$$

Las fuerzas y momentos equivalentes aplicados en los extremos son los que se indican en la figura 1.1.b.

De la misma manera, cuando una articulación plástica se forma en el extremo derecho (Z_i) del elemento (1), la matriz de rigidez del elemento a flexión empotrada en ambos extremos es reemplazada por una matriz de rigidez reducida de un elemento a flexión articulado a la derecha y empotrada a la izquierda, y el vector de fuerzas nodales equivalente $\{f_i\}$ aplicadas en los nudos extremos del elemento i -ésimo es:

$$\{f_i\} = \{0, (3/2l_i)M_{p_i}, M_{p_i}/2, 0, -(3/2l_i)M_{p_i}, M_{p_i}\} \quad (1.6)$$

$$\begin{bmatrix}
 EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\
 & 3EI/L^3 & 3EI/L^2 & 0 & -3EI/L^3 & 0 \\
 & & 3EI/L & 0 & -3EI/L^2 & 0 \\
 & & & EA/L & 0 & 0 \\
 & & & & 3EI/L^3 & 0 \\
 \text{S I M E T R I C A} & & & & & 0
 \end{bmatrix}$$

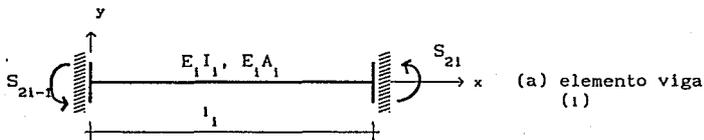
Los fuerzas y momentos equivalentes se aplican en los extremos como se indica en la figura 1.1.c.

Finalmente, cuando se forman dos articulaciones plásticas en los extremos del elemento, se tiene una matriz de rigidez reducida, equivalente a un elemento barra (tipo armadura) articulado y un vector de fuerzas nodales equivalentes aplicado en los extremos.

La matriz de rigidez reducida del elemento queda de la forma:

$$\begin{bmatrix}
 EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & EA/L & 0 & 0 \\
 \text{S I M E T R I C A} & & & & 0 & 0 \\
 & & & & & 0
 \end{bmatrix}$$

El vector de fuerzas nodales equivalentes se presenta en la figura 1.d.



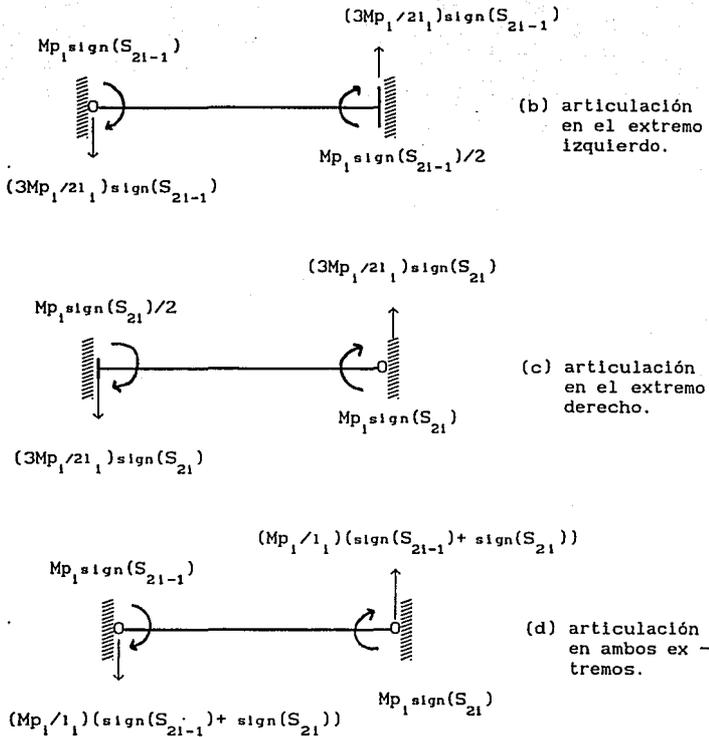


FIGURA 1.1 Elemento viga y tratamiento de articulaciones plásticas en los extremos ($M_{pl} = A Z_{pl} C_{y1}$ para miembros dúctiles).

1.2.2 Criterio de estado límite de un sistema estructural formado por barras a flexión.

En estructuras hiperestáticas, la falla de una sección de un elemento no produce generalmente la falla del sistema.

El estado límite del sistema está definido por la formación de un mecanismo en la estructura.

Cuando una sección de un elemento se plastifica, los esfuerzos se redistribuyen en la estructura de la que forma parte.

Un mecanismo de falla está entonces definido por una análisis paso a paso de los estados de daño de la estructura hasta la formación de un mecanismo. O sea, cuando una sección de un elemento se plastifica, una redistribución de esfuerzos se hace en los elementos restantes para determinar enseguida una nueva plastificación.

Para el cálculo de esfuerzos en cada paso del análisis, las matrices de rigidez de elementos plastificados son reemplazadas por unas matrices de rigidez reducida y unos vectores de fuerzas nodales equivalentes son aplicados en los nudos de la estructura.

Se llega a la falla de la estructura cuando se alcanza un número determinado de plastificaciones.

La formación de un mecanismo está determinado por el estudio de la singularidad de la matriz de rigidez total del sistema $[K]$, que contiene las matrices de rigideces reducidas de los elementos plastificados.

Un criterio para la falla de un sistema estructural con barras a flexión puede estar dado por:

$$\det |K|^p = 0 \quad (1.7)$$

1.2.3 Expresiones para los estados de seguridad límite de un sistema estructural con barras a flexión.

Después de que se forma una serie de articulaciones r_1, r_2, \dots, r_{p-1} , las matrices de rigidez de los elementos dañados se reemplazan por matrices de rigidez reducidas. Las fuerzas residuales se aplican en los nudos del sistema como fuerzas nodales equivalentes.

Un análisis del sistema es una vez más ejecutado. Las fuerzas internas de los elementos restantes puede escribirse bajo la forma:

$$S_i^{(p)}(r_1, r_2, \dots, r_{p-1}) = \sum_{j=1}^{31} b_{ij}^{(p)} L_j = \sum_{j=1}^{31} b_{ij}^{(p)} L_j - \sum_{k=1}^{p-1} a_{ik} R_k \quad (1.8)$$

donde r_1, r_2, \dots, r_{p-1} significa un conjunto de secciones plastificadas, arreglados por orden cronológico de aparición de falla.

Dadas las resistencias límite de los elementos R_i y las fuerzas internas (ecuación 1.8), las ecuaciones de estado de seguridad límite de los elementos restantes pueden escribirse:

$$\begin{aligned}
Z_{1(\cdot)}^{(p)} &\cong R_1 - \text{signo}(S_{1(\cdot)}^{(p)}) S_{1(\cdot)}^{(p)} \\
&= R_1 + \sum_{k=1}^{p-1} a_{1r_k}^{(p)} R_k - \sum_{j=1}^{m_1} b_{1j}^{(p)} L_j
\end{aligned} \tag{1.9}$$

donde (\cdot) representa $(r_1, r_2, \dots, r_{p-1})$.

Si se trata de una estructura hiperestática (redundante), con barras a flexión, se tiene la falla del sistema cuando las secciones r_1, r_2, \dots, r_{p_q} están plastificadas. Entonces, un criterio de falla para un sistema estructural está también representado por la función de seguridad de las secciones de las barras.

$$Z_r^{(p)}(r_1, r_2, \dots, r_{p-1}) \leq 0 \quad p = 1, 2, \dots, p_q \tag{1.10}$$

Se hace la observación que la función de seguridad $Z_{rp}^{(p)}(r_1, r_2, \dots, r_{p-1})$ de la última articulación es igual a la función del modo de falla del sistema o del mecanismo de falla del sistema derivado por la aplicación del principio del trabajo virtual de un modo de falla convencional que resulta de la formación de P articulaciones.

1.3 Método de generación de los estados límite de seguridad para estructuras planas formadas de barras sujetas a efectos combinados.

Este método de generación de los estados límites de seguridad se basa en las mismas hipótesis enunciadas en el subcapítulo 1.2.

En éste subcapítulo se extiende el método es para tener en cuenta los efectos combinados de flexión, tensión, compresión y cortante.

El efecto de pandeo es introducido de una manera simple, reduciendo la resistencia límite en compresión.

Finalmente, los esfuerzos residuales debidos al fenómeno de endurecimiento o ablandamiento (en el sentido de pérdida de resistencia por deformación) pueden ser tomados en cuenta por medio de una ley de comportamiento bi-lineal y de análisis elasto-plásticos paso a paso de la estructura.

1.3.1 Criterio de falla de una barra plana sujeta a efectos combinados (el fenómeno de pandeo puede también ser tomado en cuenta).

De acuerdo con las hipótesis enunciadas en la parte 1.2, el momento flexionante varía linealmente a lo largo del elemento considerado, por las

condiciones de carga, los momentos flexionantes máximos se producen por consiguiente en los extremos de la barra.

Sean $\{X\}$ y $\{\delta\}$ los vectores de las fuerzas de nudo y los desplazamientos de un elemento unitario i, j :

$$\begin{aligned} \{X\} &= \{ F_{x_1}, F_{y_1}, M_{z_1}, F_{x_j}, F_{y_j}, M_{z_j} \} \\ \{\delta\} &= \{ V_{x_1}, V_{y_1}, \theta_{z_1}, V_{x_j}, V_{y_j}, \theta_{z_j} \} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Con el fin de tener en cuenta la interacción de las fuerzas en la condición de plasticidad, se aproxima la función de la superficie del estado límite por medio de una superficie linealizada (figura 1.3):

$$Z_k = R_k - \{C_k\}^T \{X_k\} = 0 \quad (1.12)$$

donde, $k=i$ ó $k=j$ designan el extremo de la barra, R es la máxima fuerza resistente de la sección extrema k de la barra, $\{C_k\}^T$ es un vector dependiente de las dimensiones de la barra y $\{X_k\}$ es el vector de fuerzas nodales.

En la figura 1.2 se muestran las fuerzas y desplazamiento nodales de un elemento viga de una estructura plana.

Dependiendo del tipo de interacción que nos ocupe, el vector $\{C\}$ puede expresarse como sigue:

1.- Si se tiene en cuenta la interacción entre la fuerza normal y el momento flexionante para la condición de plasticidad, y si la capacidad del momento plástico se toma como la fuerza de referencia, se tiene que:

$$\begin{aligned} R_k &= \sigma_{yk} \cdot Z_{ok} \\ \{C_i\} &= (Z_{oi}/A_i \operatorname{signo}(F_{x_i}), 0, \operatorname{signo}(M_{z_i}), 0, 0, 0) \\ \{C_j\} &= (0, 0, 0, Z_{oj}/A_j \operatorname{signo}(F_{x_j}), 0, \operatorname{signo}(M_{z_j})) \end{aligned} \quad (1.13)$$

donde: σ_{yk} = Esfuerzo de fluencia.
 Z_{ok} = Módulo de sección plástica.
 A_k = Area de la sección transversal.
 $\operatorname{signo}(\cdot)$ = signo de (\cdot)

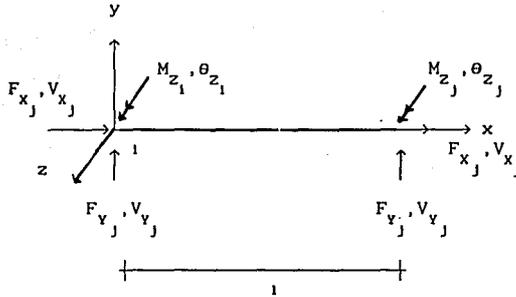


FIGURA 1.2 Fuerzas y desplazamientos de un elemento viga para una estructura tipo marco.

La linealización de la superficie de falla se ilustra en la figura 1.3. En particular la condición de plasticidad sujeta únicamente a momento flexionante (subcapítulo 1.2) se puede obtener haciendo el primer y cuarto término de $\{C_1\}$ y de $\{C_j\}$ respectivamente iguales a cero.

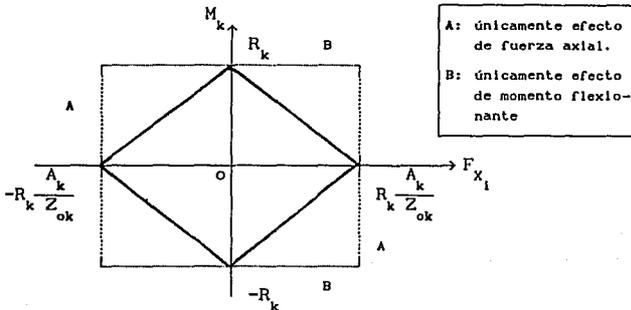


FIGURA (1.3) Linealización de la condición de plasticidad considerando la interacción del momento flexionante y la fuerza axial.

2.- Si se considera la interacción del momento flexionante y fuerza axial, para alcanzar la plasticidad de los elementos, considerando el efecto de pandeo, se tiene que :

$$R_k = \sigma_{yk} \cdot Z_{ok} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} \{C_1\} &= (Z_{o1}/Ac_1 \operatorname{signo}(F_{x1}), 0, \operatorname{signo}(M_{z1}), 0, 0, 0) \\ \{C_j\} &= (0, 0, 0, Z_{oj}/Ac_j \operatorname{signo}(F_{xj}), 0, \operatorname{signo}(M_{zj})) \end{aligned} \quad (1.15)$$

donde: A_c = Area a compresión de la sección transversal.

3.- Si se considera la interacción del momento flexionante, la fuerza axial y la fuerza cortante, se tiene que:

$$\begin{aligned} R_k &= \sigma_{yk} * Z_{ok} \\ \{C_1\} &= (aZ_{o1}/A_1 \operatorname{signo}(F_{x1}), b\sqrt{3} Z_{o1}/AF_1 \operatorname{signo}(F_{y1}), \operatorname{signo}(M_{z1}), 0, 0, 0) \\ \{C_j\} &= (0, 0, 0, aZ_{oj}/A_j \operatorname{signo}(F_{xj}), b\sqrt{3} Z_{oj}/AF_j \operatorname{signo}(F_{yj}), \operatorname{signo}(M_{zj})) \end{aligned} \quad (1.16)$$

donde: AF_1, AF_j = Area efectiva de la sección extrema del miembro provocada por la fuerza cortante.

a, b = Coeficientes de los efectos de fuerza cortante y fuerza axial. $a = 1$ y $b = 0.50$.

La superficie de falla considerando la interacción entre momento flexionante, fuerza cortante y carga axial se muestra en la figura 1.4.

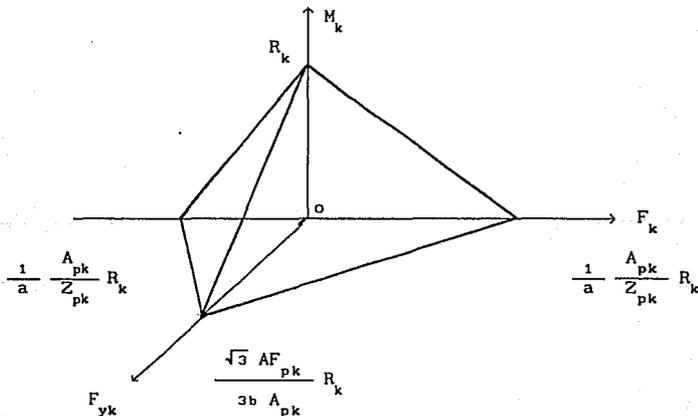


FIGURA 1.4 Linealización de la condición de plasticidad considerando la interacción de momento flexionante, fuerza cortante y fuerza axial.

1.3.2 Cálculo de la rigidez tangente (matriz de rigidez reducida) y de las fuerzas equivalentes en los nudos.

Para un modelo estructural de comportamiento elástico perfectamente plástico, bajo las hipótesis descritas al inicio del subcapítulo 1.2, un mecanismo de falla se obtiene por una serie de plastificaciones de las secciones extremas de los elementos, separadas por unas etapas lineales.

Con el fin de realizar los análisis de esfuerzos con el mismo número de nudos del sistema, a cada plastificación de las secciones potencialmente críticas, el método de generación de las funciones de seguridad límite, propone unas matrices de rigidez reducidas para los elementos y unos vectores de fuerzas nodales equivalentes deducidas como sigue:

La relación entre el vector de fuerzas de nudo y el vector de desplazamientos para un elemento con comportamiento lineal, se escribe:

$$\{X_t\} = [k_t] \{\delta_t\} \quad (1.17)$$

donde, $[k_t]$ es la matriz de rigidez elástica del elemento.

Ahora se va a establecer una relación entre $\{X_t\}$ y $\{\delta_t\}$ en el caso de que una sección de un elemento esté plastificada, o cuando la condición de plasticidad $F_k = 0$ haya sido alcanzada.

Consideremos que el desplazamiento total $\{\delta_t\}$ de un elemento es la suma de un desplazamiento elástico y un desplazamiento plástico.

$$\{\delta_t^e\} = \text{Desplazamiento elástico.}$$

$$\{\delta_t^p\} = \text{Desplazamiento plástico.}$$

$$\{\delta_t\} = \{\delta_t^e\} + \{\delta_t^p\} = \{\delta_t^e\} + \{\delta_1^p\} + \{\delta_j^p\} \quad (1.18)$$

A partir de la teoría de la deformación plástica (o de la ley de fluencia plástica), se puede expresar la deformación plástica por:

$$\begin{aligned} \{\delta_1^p\} &= \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial \{X_t\}} = -\lambda_1 \{C_1\} \\ \{\delta_j^p\} &= \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial \{X_t\}} = -\lambda_j \{C_j\} \end{aligned} \quad (1.19)$$

donde λ_i y λ_j son factores que indican la magnitud de la deformación plástica. Por ejemplo, si la sección i (j) está en el rango elástico, se tiene que $\lambda_i = 0$ ($\lambda_j = 0$).

Las fuerzas nodales $\{X_t\}$ pueden expresarse como:

$$\{X_t\} = [K_t] \{\delta_t^o\} = [K_t] (\{\delta_t\} - \{\delta_t^p\}) \quad (1.20)$$

A partir de las ecuaciones (1.18) y (1.19), la ecuación (1.20) puede escribirse:

$$\{X_t\} = [K_t] \{\delta_t\} + [K_t] \{C_i\} \lambda_i + [K_t] \{C_j\} \lambda_j \quad (1.21)$$

Sustituyendo la ecuación (1.21) en (1.12) tenemos:

$$Z_i = R_i - \{C_i\}^T \left[[K_t] \{\delta_t\} + [K_t] \{C_i\} \lambda_i + [K_t] \{C_j\} \lambda_j \right] = 0 \quad (1.22)$$

$$Z_j = R_j - \{C_j\}^T \left[[K_t] \{\delta_t\} + [K_t] \{C_i\} \lambda_i + [K_t] \{C_j\} \lambda_j \right] = 0$$

Si sustituimos la relación entre λ_i , λ_j y δ_t deducidos de la ecuación (1.22) en la ecuación (1.21), se obtiene:

$$\{X_t\} + \left\{ - \{X_t^p\} \right\} = [K_t^p] \{\delta_t\} \quad (1.23)$$

donde, $[K_t^p]$ es la matriz de rigidez reducida del elemento t y $\{X_t^p\}$ es el vector de fuerzas nodales equivalentes con signo opuesto.

La ecuación anterior se obtiene considerando lo siguiente.

Arreglando convenientemente los términos de la ecuación (1.22) tenemos las siguientes expresiones:

$$\{C_i\}^T [K_t] \{C_i\} \lambda_i + \{C_i\}^T [K_t] \{C_j\} \lambda_j = R_i - \{C_i\}^T [K_t] \{\delta_t\}$$

$$\{C_j\}^T [K_t] \{C_i\} \lambda_i + \{C_j\}^T [K_t] \{C_j\} \lambda_j = R_j - \{C_j\}^T [K_t] \{\delta_t\}$$

$$\begin{bmatrix} \{C_1\}^T [K_t] \{C_1\} & \{C_1\}^T [K_t] \{C_j\} \\ \{C_j\}^T [K_t] \{C_1\} & \{C_j\}^T [K_t] \{C_j\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \{C_1\}^T [K_t] \\ \{C_j\}^T [K_t] \end{bmatrix} \{\delta_t\}$$

Esta ecuación se puede representar de la siguiente manera:

$$[G]\{\lambda\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_j \end{Bmatrix} - [H]\{\delta_t\}, \quad \{\lambda\} = [G]^{-1} \left[\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_j \end{Bmatrix} - [H]\{\delta_t\} \right]$$

$$\begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_j \end{Bmatrix} = -[G]^{-1} [H]\{\delta_t\} + [G]^{-1} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_j \end{Bmatrix}$$

Arreglando convenientemente la ecuación (1.21) tenemos:

$$\{X_t\} = [K_t]\{\delta_t\} + \begin{Bmatrix} [K_t]\{C_1\} & [K_t]\{C_j\} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_j \end{Bmatrix}$$

donde $\{X_t\}$ es el vector de fuerzas nodales en el extremo de una barra.

Esta ecuación también se puede expresar como:

$$\{X_t\} = [K_t]\{\delta_t\} + [H]^T \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_j \end{Bmatrix}$$

sustituyendo el vector $\{\lambda\}$ en la ecuación anterior tenemos:

$$\{X_t\} = [K_t]\{\delta_t\} - [H]^T [G]^{-1} [H]\{\delta_t\} + [H]^T [G]^{-1} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_j \end{Bmatrix}$$

pasando las resistencias al lado izquierdo de la ecuación se tiene que:

$$\{X_t\} - [H]^T [G]^{-1} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_j \end{Bmatrix} = [K_t]\{\delta_t\} - [H]^T [G]^{-1} [H]\{\delta_t\}$$

$$\{X_t\} - \{H\} [G]^{-1} \begin{Bmatrix} R_i \\ R_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_t] - \{H\} [G]^{-1} \{H\} \end{bmatrix} \{\delta_t\}$$

La expresión anterior se puede representar como sigue:

$$\{X_t\} + \begin{Bmatrix} -X^{(P)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_t \end{bmatrix}^{(P)} \begin{Bmatrix} \delta_t \end{Bmatrix}$$

que es la ecuación (1.23), ya definida.

1) De forma explícita tenemos para el caso de una barra elástica:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 = \lambda_j = 0 \\ [K_t]^{(P)} = [K_t] \\ \{X_t\}^{(P)} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

2) Si la sección del extremo izquierdo (i) de la barra cede o se plastifica, se tiene:

$$\lambda_1 = \frac{R_i - \{C_i\}^T [K_t] \{\delta_t\}}{\{C_i\}^T [K_t] \{C_i\}} ; \quad \lambda_j = 0$$

$$[K_t]^{(P)} = [K_t] - \frac{[K_t] \{C_i\} \{C_i\}^T [K_t]}{\{C_i\}^T [K_t] \{C_i\}} \quad (1.25)$$

$$\{X_t\}^{(P)} = \frac{R_i [K_t] \{C_i\}}{\{C_i\}^T [K_t] \{C_i\}}$$

3.- Si la sección del extremo derecho j del elemento se plastifica, se tienen las mismas ecuaciones que en (1.25) cambiando únicamente los índices (i) por (j).

4.- Si los dos extremos de la barra ceden se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \lambda_i \\ \lambda_j \end{Bmatrix} = - [G]^{-1} [H] \{\delta_t\} + [G]^{-1} \begin{Bmatrix} R_i \\ R_j \end{Bmatrix}$$

$$\text{donde: } [G]^{-1} = \begin{bmatrix} \langle C_i \rangle^T [K_t] \langle C_i \rangle & \langle C_i \rangle^T [K_t] \langle C_j \rangle \\ \langle C_j \rangle^T [K_t] \langle C_i \rangle & \langle C_j \rangle^T [K_t] \langle C_j \rangle \end{bmatrix}^{-1}; \quad [H] = \begin{bmatrix} \langle C_i \rangle^T [K_t] \\ \langle C_j \rangle^T [K_t] \end{bmatrix}$$

$$[K_t]^{(p)} = [K_t] - [H] [G]^{-1} [H]$$

(1.26)

$$\{x'\}^{(p)} = [H] [G]^{-1} \begin{Bmatrix} R_i \\ R_j \end{Bmatrix}$$

Se hace la observación que si se anulan los términos C_1 y C_4 en los vectores $\langle C_i \rangle$ y $\langle C_j \rangle$ respectivamente, se obtiene la matriz de rigidez reducida y el vector de fuerzas nodales equivalentes de un elemento en flexión pura.

1.3.3 Interacción del momento flexionante y de la fuerza axial, considerando el fenómeno de pandeo.

Si se reemplaza A_k por A_{ck} (donde $A_{ck} = g(\lambda_0)A_k$, y $g(\lambda_0)$ es un factor de reducción propuesto por Galambos y Ravindra (Ref.52,53) en los vectores $\langle C_i \rangle$ y $\langle C_j \rangle$, para las barras sujetas al esfuerzo normal de compresión, se obtiene una matriz de rigidez reducida y un vector de esfuerzos nodales equivalentes de un elemento sujeto a la interacción del momento flexionante y la fuerza axial considerando el fenómeno de pandeo.

La nueva función linealizada del estado límite de resistencia modificado, se representa en la figura 1.5.

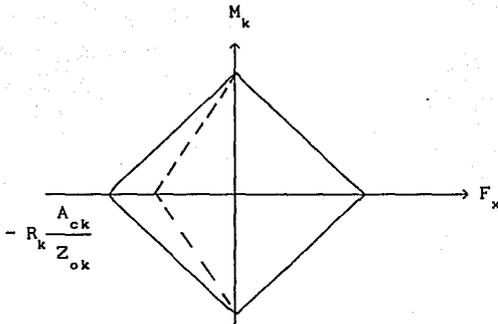


FIGURA 1.5 Función linealizada del estado límite de resistencia modificado.

El área de la sección a compresión A_{ck} se obtiene de la siguiente manera:

$$A_{ck} = g(\lambda_o) A_k$$

$$N_c = A_{ck} F_y$$

$$g(\lambda_o) = \begin{cases} 1 - 0.25 \lambda_o^2 & \text{Si } \lambda_o < \sqrt{2} \\ \frac{1}{\lambda_o^2} & \text{Si } \lambda_o \geq \sqrt{2} \end{cases} \quad (1.27)$$

$$\lambda_o = \frac{KI}{r\pi} \sqrt{\frac{F_y}{E}} \quad ; \quad \frac{KI}{r} = \text{Longitud efectiva}$$

$$r = \sqrt{\frac{I}{A_k}} = \text{Radio de giro.}$$

donde N_c es la resistencia a compresión considerando pandeo, A_k es el área de la sección transversal, K es un coeficiente numérico que depende de las condiciones de apoyo de los extremos del elemento, E es el módulo de Young e I es el momento de inercia de la sección transversal.

1.3.4 Criterio de falla de un sistema estructural formado de barras sujetas a efectos combinados.

Considérese un sistema mecánico de n elementos y al menos ml cargas (donde m es el número de grados de libertad de los nudos y l el número de nudos cargados); los extremos de las barras se numeran en serie y el criterio de falla o plastificación de un elemento esta dado por:

$$Z_1 = R_1 - \{C_1\}^T \{X_t\} \leq 0 \quad (1.28)$$

Se hace la observación que la falla estructural está definida por la producción de un mecanismo plástico en la estructura. Vamos entonces a establecer un criterio de falla del sistema estructural.

Supongamos que las secciones en los extremos de las barras $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{p-1}$ han cedido, podemos ejecutar una vez más el análisis estructural utilizando las matrices de rigidez reducidas de los elementos dañados y las fuerzas de nudo equivalentes correspondientes, la ecuación de rigidez de un elemento t esta dada por:

$$\{X\} + \left\{ - \begin{matrix} (P) \\ \{X'\} \end{matrix} \right\} = [K_t]^{(P)} \{\delta_t\} \quad (1.29)$$

Una vez calculadas las matrices de rigidez reducidas de todos los elementos, se puede ensamblar para obtener la ecuación de rigidez global del sistema:

$$[K]^{(P)} \{d\} = \{L\} + \{R\} \quad (1.30)$$

donde $\{d\}$ es el vector de desplazamientos totales en coordenadas globales.

$$[K]^{(P)} = \sum_{t=1}^n [T_t] [K_t]^{(P)} [T_t]^T \text{ es la matriz de rigidez total reducida}$$

de la estructura, $[T]$ es la matriz de transformación de coordenadas, $\{L\}$ es el vector de cargas externas nodales y

$$\{R\} = - \sum_{t=1}^n [T_t] \{X'\}_t^{(P)} \text{ es el vector de fuerzas equivalentes}$$

en el nudo, en coordenadas globales.

Para la solución de la ecuación (1.30), se puede obtener el vector de desplazamientos de nudo, como sigue:

$$\{d\} = \left[[K]^{(P)} \right]^{-1} \left\{ \{L\} + \{R\}^{(P)} \right\} \quad (1.31)$$

El vector de desplazamientos del nudo $\{d_t\}$ de la t -ésima barra, en coordenadas globales, está dado por:

$$\{d_t\} = \left[[K_t]^{(P)} \right]^{-1} \left\{ \{L\} + \{R\}^{(P)} \right\} \quad (1.32)$$

donde, $\left[[K_t]^{(P)} \right]^{-1}$ es la matriz formada por la extracción de las líneas y columnas de la matriz $\left[[K]^{(P)} \right]^{-1}$ correspondiente al vector $\{d_t\}$.

Dado que el vector $\{\delta_t\}$ está relacionado con $\{d_t\}$ por la matriz de transformación :

$$\{\delta_t\} = [T] \{d_t\}$$

El vector de fuerzas nodales $\{X_t\}$ del t -ésimo elemento esta dado por:

$$\{X_t\} = [b_t]^{(P)} \left\{ \{L\} + \{R\}^{(P)} \right\} + \{X_t'\}^{(P)} \quad (1.33)$$

donde: $[b_t]^{(P)} = [K_t]^{(P)} [T_t] \left[[K_t]^{(P)} \right]^{-1}$

El evento falla plástica del sistema puede ser determinado, estudiando:

- 1.- La matriz de rigidez total de la estructura, ó
- 2.- El vector de desplazamientos nodales.

La falla de la estructura se obtiene cuando un número determinado de elementos alcanzan la plastificación en sus extremos y rebasan cierto valor p_q (estas secciones están numeradas, $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{p_q}$) y cuando la matriz de rigidez total reducida de la estructura

$\left[[K] \right]^{(P)}$, o el vector de desplazamientos nodales totales, $\{d\}^{(P)}$ satisfacen

una de las siguientes condiciones:

$$\frac{\text{DET} \begin{vmatrix} [K]^{(pq)} \end{vmatrix}}{\text{DET} \begin{vmatrix} [K]^{(o)} \end{vmatrix}} \leq \varepsilon_1 ; \quad \frac{\| \{d\}^{(o)} \|}{\| \{d\}^{(pq)} \|} \leq \varepsilon_2 \quad (1.34)$$

en donde pq y o denotan respectivamente la etapa de falla pq-ésima y la condición inicial, $\| \cdot \|$ la norma eucladiana, y

ε_1 y ε_2 son las constantes que determinan la falla plástica límite del sistema.

1.3.5 Expresión para los estados límites del sistema estructural.

A partir de las ecuaciones (1.28) y (1.33), se puede expresar los estados límites de seguridad de las secciones extremas de los elementos, después que las secciones r_1, r_2, \dots, r_{p-1} han fallado por:

$$Z_i(r_1, r_2, \dots, r_{p-1}) = R_i + \sum_{k=1}^{p-1} a_{i r_k}^{(P)} R_{r_k} - \sum_{j=1}^{m1} b_{i j}^{(P)} L_j \leq 0 \quad (1.35)$$

En resumen, la condición de plasticidad de los extremos de los miembros bajo combinación de cargas es aproximada por una superficie lineal dada por la ecuación (1.12), y los márgenes de seguridad en los extremos de los elementos son expresados como una combinación lineal de los esfuerzos en los extremos de los elementos y de las cargas aplicadas. Consecuentemente, el Análisis de Confiabilidad se facilita cuando los esfuerzos y las cargas aplicadas se consideran variables aleatorias.

1.4 Esfuerzos residuales de endurecimiento o ablandamiento, modelado a través de una ley de comportamiento bi-lineal.

Para un comportamiento elasto-plástico ideal, se hace la hipótesis de deformación ilimitada, lo que no siempre da resultados conservadores.

Una aproximación más precisa, que tiene en cuenta variaciones de la deformación plástica post-falla, es propuesta en este sub-capítulo.

Se supone una ley de comportamiento bi-lineal para esta variación de las deformaciones post-estados plásticos límite de las secciones de las barras.

Con el fin de simplificar la utilización de esta ley de comportamiento,

se hacen análisis de esfuerzos elasto-plásticos paso a paso.

En cada etapa de daño del sistema las deformaciones plásticas de las secciones plastificadas pueden ser calculadas con la ayuda de la ecuación de flujo plástico (1.19), donde la magnitud de la deformación plástica λ está derivada para los tres tipos de daño plástico de un elemento (ecuación (1.25) y (1.26)). Esta magnitud es función de la deformación en coordenadas locales, $\{\delta_t\}$:

$$\lambda_1 = f(\{\delta_t\})$$

$$\{\delta_t\} = [T_t]\{d_t\} = [T_t] [[K_t^{(P)}]]^{-1} \left\{ \{L\} + \{R\}^{(P)} \right\} \quad (1.36)$$

en donde las matrices y los vectores ya están definidos en la ecuación (1.30).

Dado el vector de deformación plástica, las fuerzas residuales nodales de los elementos con comportamiento bi-lineal pueden escribirse:

$$\{X_t^r\} = \{R_t^r\} = - \begin{bmatrix} E^r \\ E \end{bmatrix} [k_t] \{\delta_t\} \quad (1.37)$$

donde, E^r es un módulo de endurecimiento (pendiente positiva) o un módulo de ablandamiento (pendiente negativa), definido por la pendiente de la función lineal utilizada y representada por un porcentaje del módulo de Young E .

La nueva función de estado límite de una barra dañada en el plano; bajo esfuerzos combinados (de flexión, de tensión - compresión y de cortante) esta así definida por:

$$F_k = R_k - \{C'_k\}^T \{X_k\} = 0 ; \quad \{C'_k\} = \{C_k\}^T \left[\text{diag} \{C_k^r\} \right] \quad (1.38)$$

$$\text{diag} \{C_k^r\} = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 - \frac{F_{x_1}^r}{A_1 \sigma_y} & 1 - \frac{F_{y_1}^r}{a_1} & 1 - \frac{M_{z_1}^r}{Z_{o1} \sigma_y} \end{array} , 0, 0, 0 \right\}$$

$$diag \{C\}_J^r = \left\{ 0, 0, 0, \frac{1}{1 - \frac{F_x^r}{A_J \sigma_y}}, \frac{1}{1 - \frac{F_y^r}{a_J}}, \frac{1}{1 - \frac{M_z^r}{Z_{o1} \sigma_y}} \right\}$$

Se observa que si se anulan los términos C_2 y C_5 de los vectores $\{C'_1\}$ y $\{C'_j\}$ respectivamente, se obtiene la función de estado límite modificada de una barra plana sometida a esfuerzos combinados de flexión y de tensión - compresión.

1.5 Ejemplo de ilustración.

Sea un marco plano con elementos de acero A-36, de configuración geométrica y con condiciones de carga como se indica en la figura 1.6:

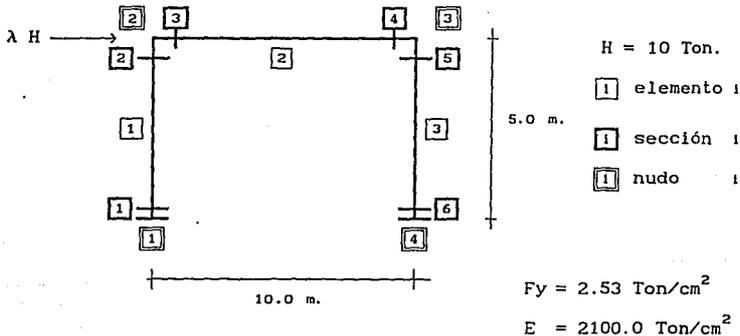


FIGURA 1.6 Marco plano.

Las hipótesis consideradas para el análisis de este caso en particular son las siguientes:

La plastificación de las secciones se presentan en los extremos de los elementos donde se encuentran los esfuerzos combinados máximos.

Se consideran tres dominios de resistencia de los elementos:

Caso 1) Flexión pura; el límite de resistencia esta dado por el momento flexionante plástico de la sección,

Caso II) Flexión y Tensión-Compresión (esfuerzos combinados); los límites de resistencia están dados, por un lado, por el límite elástico en tensión o en compresión; por otro lado, por el momento flexionante plástico de la resistencia a la flexión,

Caso III) Flexión y Tensión-Compresión considerando pandeo. El límite de resistencia a compresión considerando pandeo esta dado en la sección 1.3.3. El dominio de resistencia se ilustra en la figura 1.5.

Las características geométricas y mecánicas de los elementos del marco plano están dados en la tabla 1.1, donde L es la longitud del elemento, b ancho del elemento, h altura del elemento, e espesor del elemento, A es el área de la sección transversal, r el radio de giro y Z el módulo de sección plástica, λ_0 es un coeficiente de longitud reducida, $g(\lambda_0)$ es un factor de reducción, N_c la resistencia límite de compresión, N_T la resistencia límite a tensión y R la resistencia límite de flexión (momento plástico flexionante).

ELEMENTO	L (m)	b (cm)	h (cm)	e (cm)	A (cm ²)	r (cm)	Z (cm ³)
1	5	20	20	2.5	175	7.21	1156.3
2	10	15	15	2.0	104	5.37	511.0
3	5	20	20	2.5	175	7.21	1156.3

ELEMENTO	L/r	λ_0	$g(\lambda_0)$	N_c (τ)	N_T (τ)	R (τ-cm)
1	69.35	0.766	0.853	377.77	442.75	2925.31
2	186.23	2.057	0.486	127.88	263.12	1292.83
3	69.35	0.766	0.853	377.77	442.75	2925.31

TABLA 1.1 Características geométricas y mecánicas de los elementos.

El proceso de carga y la respuesta de la estructura que lo lleva a un modo de falla, se ilustra en la figura 1.7. Los factores de carga necesarios para plastificar cada nueva sección dentro de las etapas previstas se presentan en la misma figura, para los tres dominios de resistencia considerados.

Para el caso 1, donde la resistencia al límite está dada únicamente por flexión, los factores de amplificación λ se pueden también obtener por el

método de incremento de carga. El procedimiento que se siguió en este trabajo para obtener los valores de λ en los tres casos considerados se dedujo del método propuesto por Murotsu y otros, Ref.(1.11).

Para los análisis elasto-plásticos de la estructura, así como para la obtención de los factores de participación de cada elemento y las funciones de seguridad, se utilizó un programa de análisis matricial de estructuras elaborado en el curso de tópicos estructurales, del cual se presentan sus características y la manera de introducir los datos en el apéndice A.

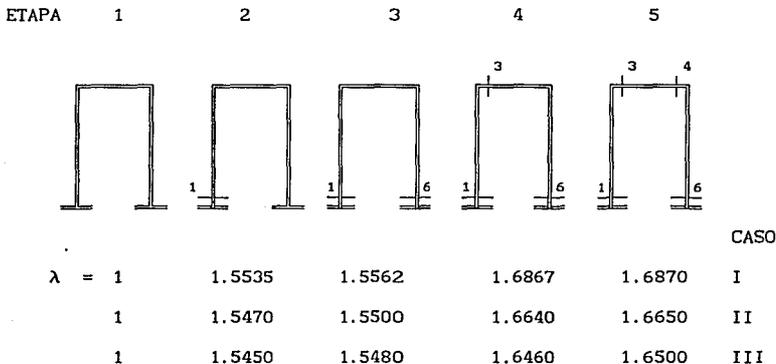


FIGURA 1.7 Secuencia de las etapas de daño de la estructura estudiada.

En la tabla 1.2 se presentan los desplazamientos en la dirección x del nudo 3, para cada etapa analizada y para los tres casos considerados, con sus respectivos factores de incremento de carga λ .

Caso I		Caso II		Caso III	
λ	dx (cm.)	λ	dx (cm.)	λ	dx (cm.)
1.0000	6.803	1.0000	6.803	1.0000	6.803
1.5535	10.564	1.5470	10.524	1.5450	10.510
1.5562	10.600	1.5500	10.558	1.5480	10.543
1.6860	16.330	1.6640	15.703	1.6460	14.990
1.6870	16.331	1.6650	15.793	1.6500	15.608

TABLA 1.2 Desplazamientos laterales en el nudo 3.

Este proceso de carga y la respuesta de la estructura hasta alcanzar su falla por un mecanismo de colapso, se ilustra en la figura 1.8, para los tres caso considerados.

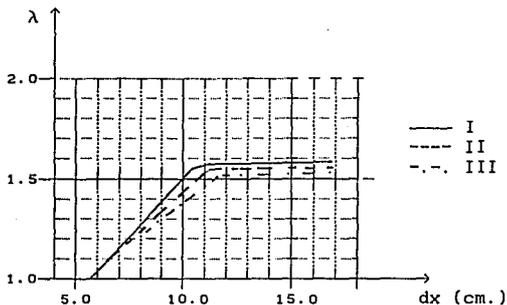


FIGURA 1.8 Proceso de carga y respuesta del marco.
Diagrama (λ, dx).

Las expresiones de los estados de seguridad de las secciones críticas más próximas a plastificarse en cada etapa del análisis para los tres casos considerados son:

a) Caso I)

$$Z_1^1 = R_1 - 188.3H \leq 0$$

$$Z_6^2 = R_6 + .722R_1 - 323.69H \leq 0$$

$$Z_3^3 = R_3 + .4754R_1 + .5245R_6 - 249.95H \leq 0$$

$$Z_4^4 = R_4 + R_1 + R_6 + R_3 - 500H \leq 0$$

b) Caso II)

$$Z_1^1 = R_1 - 189.053H \leq 0$$

$$Z_6^2 = R_6 + .72783 R_1 - 326.082H \leq 0$$

$$Z_3^3 = R_3 + .4867R_1 + .5255R_6 - 255.54H \leq 0$$

$$Z_4^4 = R_4 + 1.0322R_1 + 1.0123R_6 + 1.0197R_3 - 511.09H \leq 0$$

c) Caso III)

$$Z_1^1 = R_1 - 189.2H \leq 0$$

$$Z_6^2 = R_6 + .72943 R_1 - 326.15H \leq 0$$

$$Z_3^3 = R_3 + .49387R_1 + .52188R_6 - 259.006H \leq 0$$

$$Z_4^4 = R_4 + 1.0572R_1 + 1.01592R_6 + 1.04108R_3 - 528.59H \leq 0$$

donde R_i es la resistencia límite, del momento plástico en flexión pura (M_p), de la sección i ($i=1, \dots, 6$), tomada como la resistencia de referencia cuando se consideran efectos combinados o flexión pura, Z_i^j es la función de seguridad de la sección i en la etapa j , cuando las secciones r_1, r_2, \dots, r_{j-1} de las etapas precedentes se han sido plastificado.

A partir de los resultados obtenidos de éste caso particular de un marco, se puede constatar que los factores de amplificación de carga crítica disminuyen en un orden de 10%, cuando se toma en cuenta los esfuerzos combinados de la fuerza normal y el momento flexionante, con respecto al caso I de flexión pura; hasta ahora es cierto en el caso de valores de resistencia muy próximos al eje de momentos, es decir, de valores de resistencia dominados por el momento de flexión.

Esto proviene de la configuración geométrica de la estructura y sobre todo de la condición de carga.

Se observa también una disminución despreciable de los factores de incremento de carga λ del orden de 1%, cuando se considera el efecto de pandeo en la resistencia a compresión. Esto significa que el momento flexionante es el predominante.

1.6 Conclusión.

El método de generación automática de las funciones de estado de seguridad límite de las estructuras, propuesto por Murotsu se ha adaptado, por un lado, para tomar en cuenta el fenómeno de pandeo en los elementos sometidos a esfuerzos combinados de carga axial y momento flexionante, por otro lado, para tener en cuenta el fenómeno de endurecimiento o pérdida de la resistencia residual.

El modelo propuesto de comportamiento bi-lineal para el fenómeno de endurecimiento o ablandamiento, es simplificado para considerar autocorrecciones elastoplásticas, con un procedimiento paso a paso.

Está claro que la hipótesis de linealidad del dominio de resistencia no siempre es válida para todo tipo de estructuras; sin embargo, para los casos que nos ocupa, la hipótesis de linealidad está bien justificada, tanto por la simplicidad en el cálculo de las funciones de estados límite como por su aproximación del comportamiento real de las estructuras para fines prácticos.

Las funciones de seguridad, expresadas como una combinación lineal de las resistencias de la secciones extremas de los elementos y de las cargas aplicadas, facilitan grandemente el análisis de confiabilidad cuando las resistencias y las cargas son tomadas como variables aleatorias.

2.- MODELO DE FUERZAS SISMICAS.

2.1 Introducción.

Con la aparición de grandes y elevadas edificaciones, en los diseños sismorresistentes (en el amplio sentido significa seguridad ante los sismos y un diseño económico) se podrá pensar en la transformación del método estático al método dinámico; sin embargo, desde sus orígenes los diseños antisísmicos, debido a su relación con las vibraciones, fueron y son eminentemente dinámicos.

Con frecuencia nos encontramos con algunos diseños sismorresistentes parciales, que en sus operaciones de cálculos han seguido la forma estática, especialmente cuando se ha tratado de designar la fuerza sísmica. Así, cuando toda la complejidad de la dinámica se reemplaza por un simple coeficiente estático, aun en la forma de un método sobresaliente, nos puede conducir a una serie de diferencias o errores. Por otra parte, la forma de cálculo, a medida que se perfecciona la ciencia de las estructuras se hará más minuciosa y estricta.

Al tratar con sismos debemos tratar con probabilidades apreciables de que la falla ocurra en un futuro cercano.

A lo largo del tiempo irán disminuyendo las incertidumbres, aún en lo que se refiere a los movimientos de los sismos y sus manifestaciones. Sin embargo, es poco probable que se produzca un cambio tal en la naturaleza de nuestro conocimiento que nos releve de la necesidad de tratar abiertamente con variables aleatorias.

Con relación al diseño sísmico de estructuras, dos aspectos principales impactan esta disciplina; uno se refiere a la enorme incertidumbre en la perturbación; el otro a la naturaleza misma de la perturbación. Aún si se conocieran con precisión las características detalladas de los movimientos futuros del terreno, no podríamos tener certidumbre respecto a la supervivencia de una estructura dada.

Existen diversos procedimientos para evaluar las sollicitaciones que el sismo de diseño introduce en la estructura. Los métodos aceptados por las normas tienen distinto nivel de refinamiento y se subdividen en dos grupos: los de tipo estático y los dinámicos. En los primeros se aplica a la estructura un sistema de cargas laterales cuyo efecto estático se supone equivalente al de la acción sísmica. En los segundos se realiza un análisis de la respuesta dinámica de un modelo generalmente muy simplificado.

En este capítulo se presentan el método estático y dinámico, desde un punto de vista determinístico, para obtener las fuerzas sísmicas de diseño.

En el método dinámico se hace énfasis en el análisis modal espectral, el cual requiere que esté especificado el espectro de diseño. Muchos reglamentos de construcción estipulan un espectro de aceleraciones de diseño o un coeficiente de cortante basal en función del periodo natural. Estos coeficientes son esencialmente ordenadas de los espectros de

aceleración divididos entre la aceleración de la gravedad.

Para la obtención de los periodos y frecuencias se utiliza el método aproximado de Holzer y el cálculo de las rigideces de entrepiso se llevan a cabo por métodos aproximados, fórmulas de Wilbur y vigas infinitamente rígidas.

Para el cálculo de fuerzas cortantes y fuerzas de inercia por nivel se emplea un programa elaborado con los métodos numéricos mencionados anteriormente, en que se puede utilizar cualquier espectro de diseño, definiendo algunos parámetros, así como cualquier factor de comportamiento sísmico.

Finalmente, el objetivo de este capítulo es obtener las fuerzas sísmicas equivalente más probables, que nos permitan desarrollar análisis de confiabilidad de estructuras planas con comportamiento elastoplástico sujetas a sismo.

Se presenta un ejemplo de ilustración de un marco plano de 4 niveles, en el cual se obtienen las fuerzas sísmicas con los métodos dinámico y estático.

El programa ANADIN.EXE obtiene las fuerzas sísmicas equivalentes más probables considerando la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las fuerzas sísmicas máximas. La manera de generar el archivo de datos y la forma de numerar niveles y elementos se presenta en el apéndice B.

Por simplicidad, y dado el estado de desarrollo de los modelos presentados en este trabajo se consideran las fuerzas sísmicas en una primera aproximación, como variables deterministas.

2.2.- Fórmulas de Wilbur.

La rigidez de entrepiso es la relación entre la fuerza cortante absorbida por un marco, muro o contraviento en un entrepiso y el desplazamiento horizontal relativo entre los dos niveles que lo limitan. La rigidez así definida no es independiente del sistema de fuerzas laterales. Por tanto, para calcularla con rigor debe conocerse tal sistema con anterioridad, lo cual en general no es posible.

En marcos ordinarios de edificios el empleo de sistemas de cargas que no son estrictamente proporcionales al definitivo de análisis introduce errores de poca importancia, y usualmente es aceptable calcular las rigideces a partir de hipótesis simplificadoras sobre la forma del sistema de fuerzas laterales. En muros, contravientos y ciertos marcos es indispensable tener en cuenta la variación de la carga lateral.

Las fórmulas de Wilbur son aplicables a marcos regulares formados por piezas de momentos de inercia constante. La versión que aquí se presenta se basa en las siguientes hipótesis (Ref.13):

- 1.- Los giros en todos los nudos de un nivel y de los dos niveles adyacentes son iguales, excepto en el nivel de desplante, en donde puede suponerse empotramiento o articulación según sea el caso.
- 2.- Las fuerzas cortantes en los dos entrepisos adyacentes al que interesa son iguales a la de éste.

De aquí resultan las siguientes expresiones:

Para el primer entrepiso.

Suponiendo las columnas empotradas en la cimentación.

$$R_1 = \frac{48 E}{h_1 \left[\frac{4h_1}{\Sigma Kc_1} + \frac{h_1 + h_2}{\Sigma t_1 + \frac{\Sigma Kc_1}{12}} \right]} \quad (2.1)$$

Suponiendo las columnas articuladas en la cimentación.

$$R_1 = \frac{24 E}{h_1 \left[\frac{8h_1}{\Sigma Kc_1} + \frac{2h_1 + h_2}{\Sigma Kt_1} \right]} \quad (2.2)$$

Para el segundo entrepiso.

Suponiendo las columnas empotradas en la cimentación.

$$R_2 = \frac{48 E}{h_2 \left[\frac{4h_2}{\Sigma Kc_2} + \frac{h_1 + h_2}{\Sigma Kt_1 + \frac{\Sigma Kc_1}{12}} + \frac{h_2 + h_3}{\Sigma Kt_2} \right]} \quad (2.3)$$

Suponiendo las columnas articuladas en la cimentación.

$$R_2 = \frac{48 E}{h_2 \left[\frac{4h_2}{\Sigma Kc_2} + \frac{h_2 + h_3}{\Sigma Kt_2} + \frac{2h_1 + h_2}{\Sigma Kt_1} \right]} \quad (2.4)$$

Para entrepisos intermedios.

$$R_n = \frac{48 E}{h_n \left[\frac{4h_n}{\Sigma Kc_n} + \frac{h_m + h_n}{\Sigma Kt_m} + \frac{h_n + h_o}{\Sigma Kt_n} \right]} \quad (2.5)$$

En éstas ecuaciones se tiene que:

R_n = rigidez de entrepiso en cuestión.

Kt_n = rigidez (I/L) de las vigas del nivel sobre el entrepiso n.

Kc_n = rigidez (I/L) de las columnas del entrepiso n.

m,n,o=índices que identifican tres niveles consecutivos de abajo hacia arriba.

h_n = altura del entrepiso n.

Para el entrepiso superior, si se acepta que la fuerza cortante del penúltimo piso es el doble que la del último, se encuentra que es aplicable la fórmula para entrepisos intermedios, poniendo $2h_m$ en vez de h_m y haciendo $h_o = 0$, con lo que toma la forma:

$$R_n = \frac{48 E}{h_n \left[\frac{4h_n}{\Sigma K c_n} + \frac{2h_m + h_n}{\Sigma K t_m} + \frac{h_n}{\Sigma K t_n} \right]} \quad (2.6)$$

En el ejemplo de ilustración de este capítulo se muestra la aplicación de las fórmulas de Wilbur para obtener la rigideces de entrepiso.

Este procedimiento simplificado puede ser fácilmente aplicado con herramientas de cálculo como las calculadoras de bolsillo en las etapas preliminares de análisis y dimensionamiento de las estructuras, también permite verificar si no se han cometido errores graves al emplear métodos más precisos, como los utilizados con programas de computadora.

2.3.- Rigidez de entrepiso con vigas rígidas.

Para calcular las rigideces laterales de columnas con vigas rígidas, considérese una columna doblemente empotrada en sus dos extremos, pero libre de desplazarse horizontalmente como se muestra en la figura 2.1, donde las relaciones entre fuerza cortante, momento y desplazamiento, vieneñ dadas por las siguientes expresiones (ref.14):

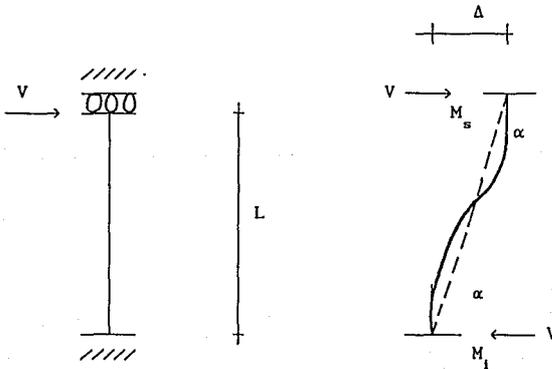


Figura 2.1 Columna doblemente empotrada, libre de desplazarse.

$$M_s = M_1 = 6EK \frac{\Delta}{L} = 6EI \frac{\Delta}{L^2} \quad (2.7)$$

$$V = \frac{M_s + M_1}{L} = \frac{12EI\Delta}{L^3} \quad (2.8)$$

Si $\Delta = 1$

$$V = K_L = \frac{12EI}{L^3} \quad (2.9)$$

La ecuación (2.9) define la rigidez lateral de una columna con vigas rígidas. En ese sentido, para el marco como un todo, existirá en cada piso también una relación entre la fuerza cortante en el piso considerado y el desplazamiento relativo de dicho piso. Esta relación es llamada Rigidez de Entrepiso y es calculada como la suma de las rigideces laterales de las columnas del marco en dicho piso.

$$K_{E_{j1}} = \sum K_{L_{1k}} \quad (2.10)$$

$K_{E_{j1}}$ = Rigidez del entrepiso 1 del marco j.

$K_{L_{1k}}$ = Rigidez lateral de la columna k del piso 1.

Para el marco de la figura 2.2, la rigidez de entrepiso para el nivel dos según las ecuaciones (2.9 y 2.10) viene dada por:

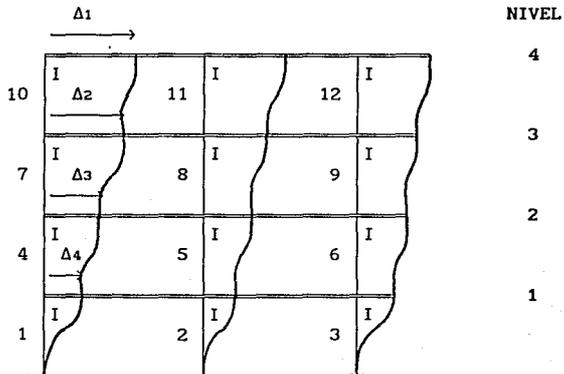


Figura 2.2 Marco de cuatro pisos con vigas rígidas.

$$K_{J2} = K_{L_{24}} + K_{L_{25}} + K_{L_{26}} = 3 \cdot \frac{12EI}{L^3} = \frac{36EI}{L^3}$$

2.4.- Método de Holzer.

En esta sección se considera una manera aproximada de determinar las frecuencias naturales y las formas modales de vibración de un sistema con n grados de libertad. Esta forma de análisis aproximado, conocido como método de Holzer, se basa en la consideración del sistema con parámetros concentrados y permite calcular varias frecuencias y formas modales de vibración en forma práctica y sencilla para aplicaciones que no requieren todos los modos normales, en las que son suficientes un valor aproximado del modo fundamental y algunos otros modos más bajos (Ref. 13-16).

2.4.1.- Descripción del método.

Muchos sistemas vibrantes, de acuerdo con Thomson (1982), (Ref.16) pueden ser modelados como sistemas de parámetros concentrados. Cuando un sistema no amortiguado está vibrando libremente a una cualquiera de sus frecuencias naturales, no se requiere una fuerza externa para mantener la vibración y la amplitud de la forma modal es irrelevante con respecto a la vibración. Considerando ésto, Holzer propuso un método de cálculo para las frecuencias naturales y formas modales de sistemas lineales resorte-masa, como los mostrados en la figura 2.3.

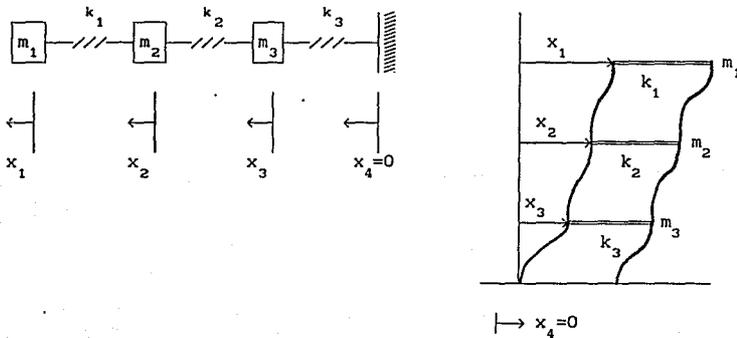


FIGURA 2.3 Sistemas similares para el método de Holzer.

Tal método de cálculo, aplicable a la vibración de edificios con masa de piso rígido, supone para comenzar una frecuencia ω y una amplitud unitaria en un extremo del sistema ($x_1=1$), calculando progresivamente los

desplazamientos de las masas. Las frecuencias supuestas que conduzcan a condiciones de borde $x_4=0$ (ver figura 2.3), corresponden a las frecuencias naturales del sistema.

2.4.2.- Fundamento del método de Holzer para edificios con masas de piso rígido.

Suponiendo una frecuencia ω y una amplitud $x_1=1$ y considerando que el movimiento es armónico, la fuerza de inercia de la masa m_1 es $m_1\omega^2$. Esta fuerza actúa en el resorte k_1 , deformándolo en (Ref.15):

$$\frac{m_1 \cdot \omega^2}{k_1} = 1 - x_2 \quad (2.11)$$

luego $x_2 = 1 - \frac{m_1 \cdot \omega^2}{k_1}$

la fuerza de inercia de m_2 puede ahora calcularse como $m_2\omega^2x_2$ y la suma de las fuerzas inerciales $m_1\omega^2 + m_2\omega^2x_2$ actúa sobre el resorte k_2 deformándolo en :

$$\frac{m_1 \cdot \omega^2 + m_2 \cdot \omega^2 \cdot x_2}{k_2} = x_2 - x_3 \quad (2.12)$$

Sustituyendo la ecuación (2.11) en la (2.12) se calcula x_3 y el procedimiento puede repetirse hasta encontrar todos los desplazamientos.

Se define entonces el desplazamiento relativo entre dos niveles medidos de arriba hacia abajo:

$$X_{j-1} - X_j = X_{REL} = \frac{\sum_{i=1}^{j-1} m_i \cdot \omega^2 \cdot X_i}{K_{j-1}} \quad (2.13)$$

y de la ecuación (2.13) se obtiene el desplazamiento absoluto de un nivel j

$$X_j = X_{j-1} - X_{REL} \quad (2.14)$$

La ecuación (2.13) puede resolverse por aproximaciones sucesivas siguiendo el proceso que se indica:

- a) Suponer arbitrariamente un valor de ω^2 .
- b) Suponer arbitrariamente una amplitud $x_1 = 1$ para el primer nivel (de techo) con los niveles medidos de arriba hacia abajo.
- c) Calcular sucesivamente los valores de desplazamiento relativo entre dos niveles con la ecuación (2.13) y el desplazamiento absoluto según la ecuación (2.14), hasta que el desplazamiento en el nivel de piso sea cero, lo que significa que el valor supuesto para la frecuencia circular ω es el de la frecuencia natural correspondiente a ese modo de vibración.
- d) Aplicar el método para un nuevo modo superior, si es necesario.

2.5.- Método estático para la obtención de fuerzas sísmicas.

El reglamento del Distrito Federal permite que el análisis sísmico de edificios con altura menor de 60 m. se realice de acuerdo con el método estático (Ref.13,17,18).

La aplicación de este método consta esencialmente de los siguientes tres pasos:

- a) Se representa la acción del sismo por fuerzas horizontales que actúan en los centros de masas de los pisos, en dos direcciones ortogonales.
- b) Estas fuerzas se distribuyen entre los sistemas resistentes a carga lateral que tiene el edificio.
- c) Se efectúa el análisis estructural de cada sistema resistente ante las cargas laterales que le corresponden.

A partir de esta distribución de fuerzas sísmicas, se puede realizar un Análisis de Confiabilidad del sistema, suponiendo las fuerzas laterales como variables deterministas.

En ésta sección se evaluará únicamente el inciso a.

2.5.1 Valuación de fuerzas sísmicas sin estimar el periodo fundamental del edificio.

Las fuerzas cortantes sísmicas en los diferentes niveles de una estructura pueden valuarse suponiendo un conjunto de fuerzas horizontales que actúan sobre cada uno de los puntos donde se supongan concentradas las masas. La fuerza actuante donde se concentra una masa i es igual al peso de la misma, W_i , por un coeficiente proporcional a la altura h_i de la masa en cuestión sobre el desplante (o nivel a partir del cual las deformaciones estructurales pueden ser apreciables), sin incluir tanques, apéndices u otros elementos cuya estructuración difiera radicalmente del resto de la

estructura. El factor de proporcionalidad se tomará de tal manera que la relación V_o/W_o en la base sea igual a c/Q , en que Q es un factor de comportamiento sísmico que depende de las características de la estructura, independiente de el periodo T , especificado en el reglamento del D.F., V_o es el cortante basal y W_o es el peso total de la estructura, c es el coeficiente sísmico y a_o la ordenada espectral para el periodo $T=0$, los valores de c y a_o , dependen del tipo de zona, que para el Distrito Federal se presentan en la tabla 2.1.

ZONA	c	a_o	T_a (seg)	T_b (seg)	r
I	0.16	0.040	0.2	0.6	1/2
II	0.32	0.080	0.3	1.5	2/3
III	0.40	0.100	0.6	3.9	1

TABLA 2.1 Valores de c, a_o, T_a, T_b , y r .

La aplicación del método estático conduce a que la fuerza horizontal P_i aplicada en el centro de masas del nivel i esta dada por la fórmula:

$$P_i = \frac{W_i \cdot h_i}{\sum W_i \cdot h_i} \cdot C_s \cdot \sum W_i \quad (2.15)$$

donde C_s es el valor de c/Q .

2.5.2 Valuación de fuerzas sísmicas estimando el periodo fundamental del edificio.

De acuerdo con lo especificado en el reglamento (Ref. 17), se pueden usar fuerzas cortantes menores que las calculadas sin estimar el periodo fundamental de la estructura.

Para esto se requiere calcular el periodo fundamental de vibración del edificio T , en forma aproximada, con la expresión siguiente:

$$T = 6.3 \cdot \left[\frac{\sum W_i \cdot X_i^2}{g \cdot \sum P_i X_i} \right]^{1/2} \quad (2.16)$$

donde W_1 es el peso de la masa 1, P_1 la fuerza horizontal que actúa en ella de acuerdo con el procedimiento en que no se estima el periodo, X_1 el desplazamiento correspondiente en la dirección de P_1 , y g la aceleración de la gravedad.

De acuerdo con el valor resultante de T , se aplica una de las opciones siguientes (Ref. 17):

a) Si T es menor o igual T_b se procede como en la sección 2.5.1 pero de tal manera que la relación V_o/W_o sea igual a a/Q' , donde a es la ordenada del espectro de aceleraciones para diseño sísmico, expresada como fracción de la aceleración de la gravedad y Q' un factor de reductivo dependiente del periodo de la estructura, los valores de a y Q' son calculados de la siguiente forma:

$$a = (1 + 3t/T_a)c/4, \text{ si } T \text{ es menor que } T_a.$$

$$a = c, \text{ si } T \text{ está entre } T_a \text{ y } T_b.$$

$$a = qc, \text{ si } T \text{ excede de } T_b.$$

$$q = (T_b/T)^r.$$

T es el periodo natural de interés, T_a y T_b expresados en segundos; c es el coeficiente sísmico, r un exponente que depende de la zona en que se halla la estructura. Los valores anteriores se dan en tabla 2.1.

Q' se calcula de la siguiente manera:

$$Q' = Q \text{ si se desconoce } T \text{ o si éste es mayor o igual que } T_a.$$

$$Q' = 1 + (T/T_a)(Q - 1), \text{ si } T \text{ es menor que } T_a.$$

b) Si T es mayor que T_b se procederá como el inciso anterior, pero de tal manera que cada una de las fuerzas laterales se tome proporcional al peso de la masa que corresponde multiplicado por un coeficiente igual a $k_1 h_1 + k_2 h_2$, siendo

$$k_1 = q [1 - r(1 - q)] \Sigma W_1 / (\Sigma W_1 h_1)$$

$$k_2 = 1.5rq(1 - q) \Sigma W_1 / (\Sigma W_1 h_1^2)$$

y W_1 y h_1 respectivamente el peso y la altura de la i -ésima masa sobre el desplante. Además, a no se tomará menor que $c/4$.

2.5.3 Distribución de las fuerzas sísmicas entre los elementos resistentes del edificio.

El procedimiento de distribución de fuerzas sísmicas entre los elementos resistentes puede resumirse en los siguientes pasos (Ref.13):

- a) La fuerza horizontal P_i aplicada en el centro de gravedad de cada nivel i se calcula como se describió en los incisos anteriores 2.5.1 y 2.5.2.
- b) Se obtiene por equilibrio estático la línea de acción de la cortante sísmica en cada entrepiso para las dos direcciones ortogonales paralelas a los sistemas resistentes.
- c) Se calculan las rigideces de entrepiso de los elementos resistentes en ambas direcciones y en todos los entrepisos.
- d) Se determina la posición del centro de torsión en cada entrepiso. Este centro es el punto por el que debe pasar la línea de acción de la fuerza cortante sísmica para que el movimiento relativo de los dos niveles consecutivos que limitan el entrepiso sea exclusivamente de traslación. En caso contrario existe torsión o rotación relativa entre dichos niveles.
- e) La fuerza cortante que debe ser resistida por un elemento resistente cualquiera es igual a la suma de dos efectos: el debido a la fuerza cortante del piso, supuesta actuando en el centro de torsión, y el debido al momento torsionante del piso.
- f) Para cada sistema plano deberán calcularse las fuerzas laterales debidas a la suma de 100 por ciento de los efectos debidos al sismo actuando en la dirección X con 30 por ciento de los efectos producidos por el sismo actuando en la dirección Y y viceversa.

2.6 Método dinámico para la obtención de fuerzas sísmicas.

En los métodos dinámicos se realiza una idealización de la estructura a base de masas y resortes, si se emplean métodos automatizados de análisis, la modelación puede ser muy refinada, de lo contrario puede recurrirse a modelos simplistas (Ref. 54)

En las secciones siguientes se analizan las características más importantes del análisis modal espectral.

2.6.1 Movimiento del terreno.

Con el fin de estudiar las vibraciones forzadas generadas por movimientos del terreno, se presenta el análisis modal espectral. Este es un método para determinar la respuesta de sistemas con varios grados de libertad perturbados por fuerzas excitadoras arbitrarias. En la mayor parte de los casos de la ingeniería sísmica los problemas se formulan sin tomar en cuenta el amortiguamiento; este se considera en forma aproximada con el espectro de diseño (Refs.14,15,18,19,20).

El problema de vibraciones libres no amortiguadas está gobernado por la siguiente ecuación:

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = \{0\} \quad (2.17)$$

Cuando una estructura de varios grados de libertad está sujeta a un movimiento del terreno \ddot{X}_g , la aceleración de sus masas es:

$$\{\ddot{X}\}_t = \ddot{X}_g \{I\} + \{\ddot{X}\} \quad (2.18)$$

donde $\{I\}$ es el vector identidad y $\{\ddot{X}\}$ es el vector de aceleraciones relativas de las masas con respecto al apoyo. Así, la ecuación de movimiento de un sistema con apoyo móvil es:

$$\begin{aligned} [M]\{\ddot{X}\}_t + [K]\{X\} &= \{0\} \\ [M]\{\ddot{X}_g \{I\} + \{\ddot{X}\}\} + [K]\{X\} &= 0 \\ [M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} &= -\ddot{X}_g [M]\{I\} \end{aligned} \quad (2.19)$$

2.6.2 Análisis modal espectral.

El método dinámico más empleado en la práctica es el modal, o, más propiamente, el análisis modal con técnicas de espectro de respuesta.

El reglamento (Ref.17) especifica este método, aceptando que se analice en forma independiente la vibración de traslación en dos direcciones ortogonales. Se deben determinar los tres primeros modos de vibración, y todos aquellos adicionales que tengan un periodo mayor que 0.4 seg.

Sea la transformación lineal $\{X\}=[Z]\{Y\}$, donde la respuesta total $\{X\}$ se obtiene mediante la superposición de la respuesta modal $[Z]\{Y\}$ (Ref.19,20):

Sustituyendo esta ecuación lineal en la ecuación (2.19) se tiene:

$$[M][Z]\{\ddot{Y}\} + [K][Z]\{Y\} = -\ddot{X}_g [M]\{I\} \quad (2.20)$$

Premultiplicando ambos miembros de esta ecuación por $[Z]^T$ se obtiene:

$$\begin{aligned} [Z]^T [M] [Z] \{\ddot{Y}\} + [Z]^T [K] [Z] \{Y\} &= -\ddot{X}_g [Z]^T [M] \{I\} \\ \{\ddot{Y}\} + [\Omega]^2 \{Y\} &= -\ddot{X}_g [Z]^T [M] \{I\} = -\{C\} \ddot{X}_g \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde (C) es el vector de coeficientes de participación.

La ecuación matricial anterior se puede escribir como

$$\ddot{Y}_n + \omega_n^2 Y_n = -C_n \ddot{X}_g, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2.23)$$

en donde

$$C_n = \{Z^n\}_n^T [M]\{I\} \quad (2.24)$$

Con base en el espectro de diseño, la solución máxima de la ecuación (2.21) está dada por:

$$Y_n^{\text{máx}} = C_n \frac{A_n}{\omega_n^2} \quad (2.25)$$

donde A_n es la ordenada espectral para ω_n .

Sea $\{X\}_n$ la n-ésima respuesta modal máxima, esto es

$$\{X\}_n^{\text{máx}} = Y_n^{\text{máx}} \{Z\}_n = C_n \frac{A_n}{\omega_n^2} \{Z\}_n \quad (2.26)$$

Las fuerzas cortantes equivalentes $\{V\}_{1j}$ en el entrepiso i, debido al modo j, se calcula multiplicando el desplazamiento de entrepiso Δ_{1j} por la rigidez respectiva K_i .

$$\{V\}_{1j} = K_i \cdot \Delta_{1j} \quad (2.27)$$

Las respuestas modales máximas no ocurren simultáneamente. Con base en estudios probabilísticos, se ha demostrado que los cortantes sísmicos de diseño $\{V\}$ son (Ref.18-20):

$$\{V\}_1 = \sqrt{\sum_{j=1}^J \{V\}_{1j}^2} \quad (2.28)$$

2.6.3 Espectros de diseño sísmico para la República Mexicana.

La manera más usual de definir el movimiento del terreno en un sitio con fines de diseño sísmico es mediante un Espectro de Diseño. La forma de

este se puede predecir estadísticamente si se cuenta con suficientes datos de instrumentos, sin embargo en general esto no sucede así por lo que no es posible realizar una predicción estadística solamente con Espectros de Respuesta calculados a partir de registros locales de temblores. Debido a esto dicha predicción debe hacerse a partir del conocimiento de las características de los temblores que puedan afectar el lugar, y de la probabilidad de que ocurran.

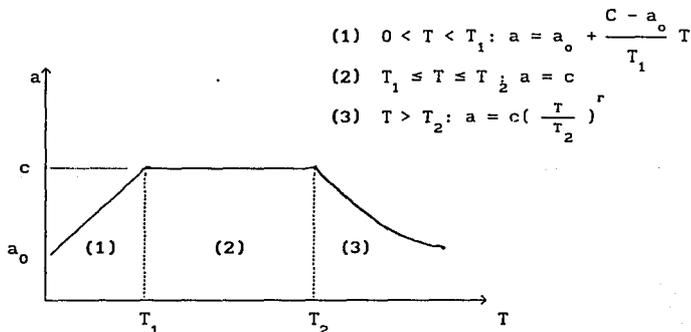
Un espectro de diseño implica una formulación probabilista. Este espectro debe cubrir las características de los posibles movimientos del terreno en un sitio especificado o una región con características geológicas similares entre sí.

En la construcción de un espectro de diseño se deben tener en cuenta principalmente las características de las fuentes sísmicas, las relaciones entre estas y el movimiento del terreno, y la influencia de las condiciones locales del suelo.

Generalmente se asocian para un sitio dado, varios espectro elásticos de diseño, cada uno para diferentes periodos de recurrencia. La elección del periodo de recurrencia, con fines de diseño sísmico, debe basarse en criterios de optimación sobre el riesgo aceptado y los costos de construcciones.

Para ampliar el estudio sobre espectros de diseño recurrir a las referencias 51 y 52.

A continuación se ilustra en la tabla 2.2 los valores correspondientes de los espectros de diseño sísmico para la República Mexicana. Según el manual de CFE (Ref.53)



a: ordenada espectral.

a_0 : ordenada espectral para $T=0$.

c: coeficiente sísmico básico.

r: exponencial adimensional.

T: periodo natural de la estructura o uno de sus modos, en segundos.

T_1, T_2 : periodos naturales que definen la forma del espectro, en segundos.

Zona sísmica de la República	Tipo de suelo	C	a_0	T_1	T_2	r
A	I	0.08	0.02	0.30	0.60	1/2
	II	0.16	0.04	0.40	1.50	2/3
	III	0.20	0.05	0.60	3.90	1
B	I	0.14	0.04	0.20	0.60	1/2
	II	0.32	0.08	0.30	1.50	2/3
	III	0.40	0.10	0.60	3.90	1
C	I	0.36	0.36	-	0.60	1/2
	II	0.64	0.64	-	1.40	2/3
	III	0.64	0.64	-	1.90	1
D	I	0.50	0.50	-	0.60	1/2
	II	0.86	0.86	-	1.20	2/3
	III	0.86	0.86	-	1.70	1

Tabla 2.2 Espectros de diseño sísmico para la República Mexicana.

NOTA:

Las ordenadas espectrales que se obtienen son para estructuras tipo B. Estas deberán multiplicarse por 1.3 en caso de estructuras tipo A.

Suelo tipo I, terreno firme; tipo II, terreno de transición; tipo III, compresible.

2.7 Ejemplo de ilustración.

A continuación se ilustran los métodos descritos en los subcapítulos anteriores, en un marco plano hipotético de 4 niveles. En la figura 2.6 se describen las características geométricas del marco y el valor de las masas de cada nivel.

El edificio se considera del grupo B, construido en el Distrito Federal en la zona B, en un suelo de tipo II.

Las columnas tienen un área $A=1600.0 \text{ cm}^2$ y un momento de inercia $I=213333.3 \text{ cm}^4$; las trabes tienen un área $A=1200.0 \text{ cm}^2$ y un momento de inercia $I=160000.0 \text{ cm}^4$. El módulo de elasticidad es igual a $E=140000 \text{ Kg/cm}^2$.

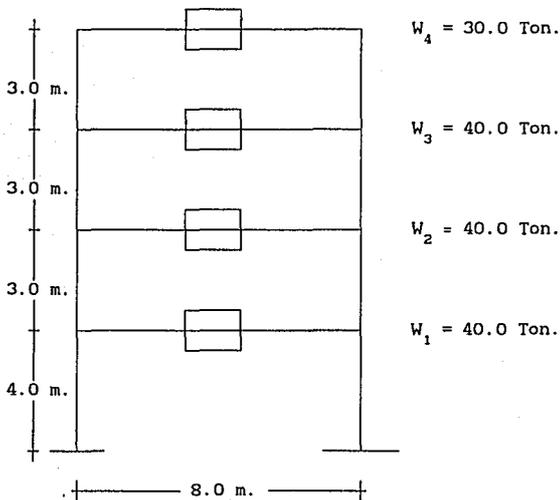


Figura 2.6 Marco plano de 4 niveles.

A continuación se calculan las masas por nivel, $M_i=W_i/g$, donde g es la aceleración de la gravedad en cm/seg^2 .

$$M_4 = \frac{30}{981} = 0.031 \frac{\text{ton-seg}^2}{\text{cm}}$$

$$M_3 = \frac{40}{981} = 0.041 \frac{\text{ton-seg}^2}{\text{cm}}$$

$$M_2 = \frac{40}{981} = 0.041 \frac{\text{ton-seg}^2}{\text{cm}}$$

$$M_1 = \frac{40}{981} = 0.041 \frac{\text{ton-seg}^2}{\text{cm}}$$

Cálculo de las rigideces de entrepiso utilizando las fórmulas de Wilbur descritas en el subcapítulo 2.2.

Para el primer nivel, utilizando la ecuación 2.1 se tiene:

$$R_1 = \frac{(48)(140000)}{400 \left[\frac{4(400)}{1066.67} + \frac{400 + 300}{288.889} \right]} = 4282.36 \text{ Kg/cm}$$

Para el segundo nivel utilizando la ecuación 2.3:

$$R_2 = \frac{(48)(140000)}{300 \left[\frac{4(300)}{1422.22} + \frac{400 + 300}{288.889} + \frac{300 + 300}{200} \right]} = 3574.38 \text{ Kg/cm}$$

Utilizando la ecuación 2.5 se obtiene la rigidez de entrepiso para el nivel 3 igual a:

$$R_3 = 3273.06 \text{ Kg/cm.}$$

Con la ecuación 2.5 se obtiene la rigidez para el nivel superior, igual a:

$$R_4 = 3273.06 \text{ Kg/cm.}$$

Ahora se obtendrán las rigideces de entrepiso considerando las vigas infinitamente rígidas, como se describe en el subcapítulo 2.3.

Para el primer nivel.

$$R_1 = \frac{(2)(12)(140000)(213333.33)}{400^3} = 11200.0 \text{ Kg/cm}$$

De la misma manera se obtienen la rigideces de entrepiso para los niveles subsecuentes, obteniéndose:

$$R_2 = 26548.15 \text{ Kg/cm} \quad R_3 = 26548.15 \text{ Kg/cm} \quad R_4 = 26548.15 \text{ Kg/cm}$$

En la tabla 2.3 se muestra la comparación de las rigideces de entrepiso obtenidas por los métodos aproximados:

FORMULAS DE WILBUR	VIGAS RIGIDAS
$R_4 = 3,273.06 \text{ Kg/cm}$	$R_4 = 26,548.15 \text{ Kg/cm}$
$R_3 = 3,273.06 \text{ Kg/cm}$	$R_3 = 26,548.15 \text{ Kg/cm}$
$R_2 = 3,574.38 \text{ Kg/cm}$	$R_2 = 26,548.15 \text{ Kg/cm}$
$R_1 = 4,282.36 \text{ Kg/cm}$	$R_1 = 11,200.00 \text{ Kg/cm}$

Tabla 2.3 Comparación de rigideces de entrepiso.

En la figura 2.7 se muestra el modelo de masas y resortes de la estructura de 4 niveles y las rigideces obtenidas con los dos métodos.

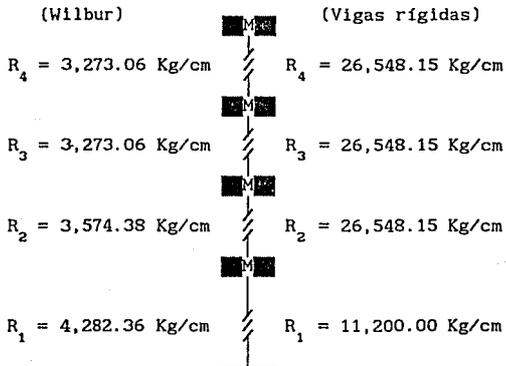


FIGURA 2.7 Modelo de masas y resortes.

En el cálculo de los periodos y frecuencias por el método de Holzer. Primero se calcularán las frecuencias y periodos considerando las rigideces de entrepiso obtenidas por las fórmulas de Wilbur y después con las rigideces considerando las vigas infinitamente rígidas.

Rigideces de entrepiso obtenidas por las fórmulas de Wilbur.

Cálculo de la frecuencia, periodo fundamental y el primer modo de vibrar.

$$M = \frac{\text{ton-seg}^2}{\text{cm}} \quad K = \frac{\text{ton}}{\text{cm}}$$

	M	0.041	0.041	0.041	0.031	
	K	4.28	3.57	3.27	3.27	
ω^2 15.00	Z	1.00	2.027	2.766	2.985	ω_n^2 12.50
	Δ	1.00	1.027	0.749	0.219	
	V	4.28	3.665	2.418	0.717	
	F	-0.615	-1.247	-1.701	-0.388	
						R=-0.67
ω^2 12.50	Z	1.00	2.0550	2.885	3.2628	
	Δ	1.00	1.0550	0.830	0.3778	
	V	4.28	3.7675	2.714	1.2360	
	F	-0.5125	-1.0534	-1.4785	-1.264	
						R=-0.029

$$\omega_1 = 3.536 \text{ rad/seg}$$

$$T_1 = 1.777 \text{ seg}$$

$$Z_1 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 2.055 \\ 2.885 \\ 3.263 \end{Bmatrix}_1 \text{ cm.}$$

Cálculo de la frecuencia y periodo correspondiente al segundo modo de vibrar.

$$M = \frac{\text{ton-seg}^2}{\text{cm}} \quad K = \frac{\text{ton}}{\text{cm}}$$

	M	0.041	0.041	0.041	0.031	
	K	4.28	3.57	3.27	3.27	
ω^2	Z	1.00	1.05	-0.211	-1.207	
	Δ	1.00	0.05	-1.260	-0.996	
100.0	V	4.28	0.18	-4.125	-3.258	$\omega^2 = 95.60$
	F	-4.10	-4.305	-1.701	3.74	R=0.482
ω^2	Z	1.00	1.1	-0.108	-1.187	
	Δ	1.00	0.1000	-1.2080	-1.0786	
95.60	V	4.28	0.3604	-3.9512	-3.5270	
	F	-3.9196	-1.0534	0.4245	3.520	R=-0.007

$$\omega_2 = 9.778 \text{ rad/seg}$$

$$T_2 = 0.643 \text{ seg}$$

$$Z_2 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 1.100 \\ -0.108 \\ -1.187 \end{Bmatrix}_2 \text{ cm.}$$

De igual manera se encuentra el periodo y frecuencia para el tercer y cuarto modo de vibrar.

$$\omega_3 = 14.629 \text{ rad/seg}$$

$$T_3 = 0.429 \text{ seg}$$

$$Z_3 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ -0.259 \\ 0.939 \\ 0.900 \end{Bmatrix}_3 \text{ cm.}$$

$$\omega_4 = 17.349 \text{ rad/seg}$$

$$T_4 = 0.362 \text{ seg}$$

$$Z_4 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ -1.258 \\ 1.024 \\ -0.559 \end{Bmatrix}_4 \text{ cm.}$$

Cálculo de periodos y frecuencias utilizando las rigideces de entrepiso obtenidas a partir de considerar las vigas infinitamente rígidas. El procedimiento es igual al anterior, por lo que únicamente se presentan los valores correspondientes.

$$\omega_1 = 7.270 \text{ rad/seg}$$

$$T_1 = 0.864 \text{ seg}$$

$$Z_1 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 1.340 \\ 1.570 \\ 1.670 \end{Bmatrix}_1 \text{ cm.}$$

$$\omega_2 = 23.440 \text{ rad/seg}$$

$$T_2 = 0.268 \text{ seg}$$

$$Z_2 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 0.570 \\ -0.340 \\ -0.9600 \end{Bmatrix}_2 \text{ cm.}$$

$$\omega_3 = 38.380 \text{ rad/seg}$$

$$T_3 = 0.164 \text{ seg}$$

$$Z_3 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ -0.850 \\ -0.760 \\ 1.060 \end{Bmatrix}_3 \text{ cm.}$$

$$\omega_4 = 47.820 \text{ rad/seg}$$

$$T_4 = 0.131 \text{ seg}$$

$$Z_4 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ -2.110 \\ 2.250 \\ -1.340 \end{Bmatrix}_4 \text{ cm.}$$

Comparación de resultados de frecuencias, periodos y modos de vibrar calculados por el método de Holzer, considerando rigideces obtenidas por las fórmulas de Wilbur y suponiendo que las vigas son infinitamente rígidas.

FORMULAS DE WILBUR	TRABES RIGIDAS
$\omega_1 = 3.536 \text{ rad/seg}$ $T_1 = 1.777 \text{ seg}$ $Z_1 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 2.055 \\ 2.885 \\ 3.263 \end{Bmatrix}_1 \text{ cm.}$	$\omega_1 = 7.270 \text{ rad/seg}$ $T_1 = 0.864 \text{ seg}$ $Z_1 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 1.340 \\ 1.570 \\ 1.670 \end{Bmatrix}_1 \text{ cm.}$
$\omega_2 = 9.778 \text{ rad/seg}$ $T_2 = 0.643 \text{ seg}$ $Z_2 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 1.100 \\ -0.108 \\ -1.187 \end{Bmatrix}_2 \text{ cm.}$	$\omega_2 = 23.440 \text{ rad/seg}$ $T_2 = 0.268 \text{ seg}$ $Z_2 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 0.570 \\ -0.340 \\ -0.960 \end{Bmatrix}_2 \text{ cm.}$
$\omega_3 = 14.629 \text{ rad/seg}$ $T_3 = 0.429 \text{ seg}$ $Z_3 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ -0.259 \\ 0.939 \\ 0.900 \end{Bmatrix}_3 \text{ cm.}$	$\omega_3 = 38.380 \text{ rad/seg}$ $T_3 = 0.164 \text{ seg}$ $Z_3 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ -0.850 \\ -0.760 \\ 1.060 \end{Bmatrix}_3 \text{ cm.}$
$\omega_4 = 17.349 \text{ rad/seg}$ $T_4 = 0.362 \text{ seg}$ $Z_4 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ -1.258 \\ 1.024 \\ -0.559 \end{Bmatrix}_4 \text{ cm.}$	$\omega_4 = 47.820 \text{ rad/seg}$ $T_4 = 0.131 \text{ seg}$ $Z_4 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ -2.110 \\ 2.250 \\ -1.340 \end{Bmatrix}_4 \text{ cm.}$

Tabla 2.4 Comparación de resultados.

Se obtendrán las fuerzas sísmicas de diseño calculadas por el método dinámico, análisis modal espectral, descrito en la sección 2.6.2; primeramente se considerarán las rigideces calculadas con las fórmulas de Wilbur.

$$Z_1 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 2.055 \\ 2.885 \\ 3.263 \end{Bmatrix}_1 \text{ cm.} \quad Z_2 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 1.100 \\ -0.108 \\ -1.187 \end{Bmatrix}_2 \text{ cm.} \quad Z_3 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ -0.259 \\ 0.939 \\ 0.900 \end{Bmatrix}_3 \text{ cm.} \quad Z_4 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ -1.258 \\ 1.024 \\ -0.559 \end{Bmatrix}_4 \text{ cm.}$$

$$\omega_1 = 3.536 \text{ rad/seg} \quad \omega_2 = 9.778 \text{ rad/seg} \quad \omega_3 = 14.629 \text{ rad/seg} \quad \omega_4 = 17.35 \text{ rad/seg}$$

$$T_1 = 1.777 \text{ seg} \quad T_2 = 0.643 \text{ seg} \quad T_3 = 0.429 \text{ seg} \quad T_4 = 0.362 \text{ seg}$$

CALCULO DE LOS MODOS NATURALES NORMALIZADOS	
MODO #1	MODO #2
$\{Z\}_1^T [M] \{Z\}_1 = C^2 = 0.88191$ $C = 0.939$ $\{Z\}_1^n = \frac{1}{C} \{Z\}_1 = \begin{Bmatrix} 1.065 \\ 2.188 \\ 3.072 \\ 3.475 \end{Bmatrix}$	$\{Z\}_2^T [M] \{Z\}_2 = C^2 = 0.1347$ $C = 0.367$ $\{Z\}_2^n = \frac{1}{C} \{Z\}_2 = \begin{Bmatrix} 2.724 \\ 2.996 \\ -0.295 \\ -3.233 \end{Bmatrix}$
MODO #3	MODO #4
$\{Z\}_3^T [M] \{Z\}_3 = C^2 = 0.105$ $C = 0.324$ $\{Z\}_3^n = \frac{1}{C} \{Z\}_3 = \begin{Bmatrix} 3.086 \\ -0.799 \\ -2.898 \\ 2.777 \end{Bmatrix}$	$\{Z\}_4^T [M] \{Z\}_4 = C^2 = 0.1587$ $C = 0.398$ $\{Z\}_4^n = \frac{1}{C} \{Z\}_4 = \begin{Bmatrix} 2.511 \\ -3.159 \\ 2.572 \\ -1.404 \end{Bmatrix}$

Obtención de los coeficientes de participación.

$$C_1 = \{Z\}_1^T [M] \{J\} = 0.36707 \quad C_3 = \{Z\}_3^T [M] \{J\} = 0.06104$$

$$C_2 = \{Z\}_2^T [M] \{J\} = 0.12220 \quad C_4 = \{Z\}_4^T [M] \{J\} = 0.03536$$

Obtención de las ordenadas espectrales, de acuerdo con las características y ubicación del edificio. Los valores se obtienen de la tabla 2.1, correspondiente a los valores de espectros del D.F., las aceleraciones espectrales se calculan de acuerdo a lo estipulado en la sección 2.5.2 en el inciso a.

$$c = 0.32 \quad a_0 = 0.080 \quad T_a = 0.30 \quad T_b = 1.5 \quad r = 2/3$$

$$a_1 = A_1/g = (T_b/T)^r \cdot c \quad A_1 = 280.4 \text{ cm/seg}^2$$

$$a_2 = A_2/g = c \quad A_2 = 313.9 \text{ cm/seg}^2$$

$$a_3 = A_3/g = c \quad A_3 = 313.9 \text{ cm/seg}^2$$

$$a_4 = A_4/g = c \quad A_4 = 313.9 \text{ cm/seg}^2$$

Con fines de diseño, las aceleraciones se podrán reducir dividiéndolas entre el factor reductivo Q' , especificado en la sección 2.5.2 inciso a.

Se supondrá que la estructura cumple con los requisitos de las normas técnicas por sismo, para utilizar un factor $Q = 4$.

PRIMER MODO

$$Q' = Q \quad Q' = 4 \quad A_1 = 280.4/4 = 70.10 \text{ cm/seg}^2$$

SEGUNDO MODO

$$Q' = Q \quad Q' = 4 \quad A_2 = 313.9/4 = 78.45 \text{ cm/seg}^2$$

TERCER MODO

$$Q' = Q \quad Q' = 4 \quad A_2 = 313.9/4 = 78.45 \text{ cm/seg}^2$$

CUARTO MODO

$$Q' = Q \quad Q' = 4 \quad A_2 = 313.9/4 = 78.45 \text{ cm/seg}^2$$

LAS RESPUESTAS MODALES MAXIMAS SON:

$$\{X\}_1 = C_1 \frac{A_1}{\omega_1^2} \{Z^n\}_1 = \begin{Bmatrix} 2.192 \\ 4.503 \\ 6.322 \\ 7.151 \end{Bmatrix} \text{ cm.} \quad \begin{Bmatrix} 2.192 \\ 2.311 \\ 1.819 \\ 0.829 \end{Bmatrix} \text{ cm.}$$

$$\{X\}_2 = C_2 \frac{A_2}{\omega_2^2} \{Z^n\}_2 = \begin{Bmatrix} 0.273 \\ 0.300 \\ -0.030 \\ -0.324 \end{Bmatrix} \text{ cm.} \quad \begin{Bmatrix} 0.273 \\ 0.027 \\ -0.330 \\ -0.294 \end{Bmatrix} \text{ cm.}$$

$$\{X\}_3 = C_3 \frac{A_3}{\omega_3^2} \{Z^n\}_3 = \begin{Bmatrix} 0.069 \\ -0.018 \\ -0.065 \\ 0.062 \end{Bmatrix} \text{ cm.} \quad \begin{Bmatrix} 0.069 \\ -0.087 \\ -0.047 \\ 0.127 \end{Bmatrix} \text{ cm.}$$

$$\{X\}_4 = C_4 \frac{A_4}{\omega_4^2} \{Z^n\}_4 = \begin{Bmatrix} 0.023 \\ -0.029 \\ 0.024 \\ -0.013 \end{Bmatrix} \text{ cm.} \quad \begin{Bmatrix} 0.023 \\ -0.052 \\ 0.053 \\ -0.037 \end{Bmatrix} \text{ cm.}$$

Cálculo de los cortantes que actúan en cada nivel, $V = K_i \cdot \Delta_{ij}(\text{relativo})$
y obtención de las fuerzas en cada nivel.

$$\begin{array}{ll} V_{11} = 4.28 (2.192) = 9.38 \text{ TON.} & F_{11} = 9.38 - 8.25 = 1.13 \text{ TON.} \\ V_{21} = 3.57 (2.311) = 8.25 \text{ TON.} & F_{21} = 8.25 - 5.95 = 2.30 \text{ TON.} \\ V_{31} = 3.27 (1.819) = 5.95 \text{ TON.} & F_{31} = 5.95 - 2.71 = 3.24 \text{ TON.} \\ V_{41} = 3.27 (0.829) = 2.71 \text{ TON.} & F_{41} = 2.71 = 2.71 \text{ TON.} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
V_{12} &= 4.28 (0.273) = 1.17 \text{ TON} & F_{12} &= 1.17 - 0.10 = 1.07 \text{ TON.} \\
V_{22} &= 3.57 (0.027) = 0.10 \text{ TON.} & F_{22} &= 0.10 - (-1.08) = 1.18 \text{ TON.} \\
V_{32} &= 3.27 (-0.330) = -1.08 \text{ TON.} & F_{32} &= -1.08 - (-0.96) = -0.12 \text{ TON.} \\
V_{42} &= 3.27 (-0.294) = -0.96 \text{ TON.} & F_{42} &= -0.96 = -0.96 \text{ TON.} \\
\\
V_{13} &= 4.28 (0.069) = 0.30 \text{ TON.} & F_{13} &= 0.30 - (-0.31) = 0.61 \text{ TON.} \\
V_{23} &= 3.57 (-0.087) = -0.31 \text{ TON.} & F_{23} &= -0.31 - (-0.15) = -0.16 \text{ TON.} \\
V_{33} &= 3.27 (-0.047) = -0.15 \text{ TON.} & F_{33} &= -0.15 - 0.42 = -0.57 \text{ TON.} \\
V_{43} &= 3.27 (0.127) = 0.42 \text{ TON.} & F_{43} &= 0.42 = 0.42 \text{ TON.} \\
\\
V_{14} &= 4.28 (0.023) = 0.10 \text{ TON} & F_{14} &= 0.10 - (-0.19) = 0.29 \text{ TON.} \\
V_{24} &= 3.57 (-0.052) = -0.19 \text{ TON.} & F_{24} &= -0.19 - 0.19 = -0.38 \text{ TON.} \\
V_{34} &= 3.27 (0.053) = 0.19 \text{ TON.} & F_{34} &= 0.19 - (-0.12) = 0.31 \text{ TON.} \\
V_{44} &= 3.27 (-0.037) = -0.12 \text{ TON.} & F_{44} &= -0.12 = -0.12 \text{ TON.}
\end{aligned}$$

Las respuestas modales máximas, de acuerdo a la sección 2.6.2 y la fórmula 2.28, son:

$$V_4 = 2.91 \text{ TON.} \quad F_4 = 2.91 \text{ TON.}$$

$$V_3 = 6.05 \text{ TON.} \quad F_3 = 3.31 \text{ TON.}$$

$$V_2 = 8.26 \text{ TON.} \quad F_2 = 2.62 \text{ TON.}$$

$$V_1 = 9.46 \text{ TON.} \quad F_1 = 1.70 \text{ TON.}$$

Las fuerzas sísmicas más probables se muestran en la figura 2.8.

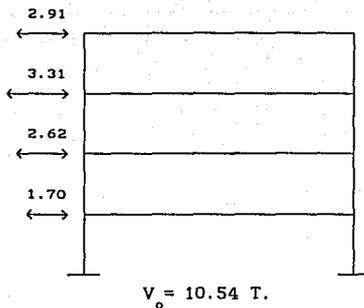


Figura 2.8 Fuerzas sísmicas máximas más probables.

En el cálculo de las fuerzas máximas de diseño considerando las rigideces correspondientes a vigas rígidas se procede igual al caso anterior, por lo que únicamente se presenta el marco con las fuerzas de diseño, figura 2.9.

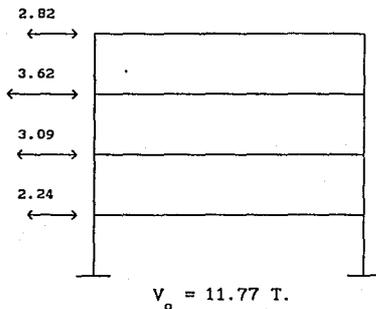


Figura 2.9 Fuerzas sísmicas máximas más probables.

RIGIDECES OBTENIDAS POR		
FORMULAS DE WILBUR		VIGAS RIGIDAS
NIVEL	FUERZAS SISMICAS DE DISEÑO	
1	1.70 TON.	2.24 TON.
2	2.62 TON.	3.09 TON.
3	3.31 TON.	3.62 TON.
4	2.91 TON.	2.82 TON.

Tabla 2.5 Fuerzas sísmicas.

Cálculo de las fuerzas sísmicas de diseño utilizando el programa ANADIN.EXE calculando las rigideces por las fórmulas de Wilbur.

OBTENCION DE FUERZAS SISMICAS DE DISEÑO
ANALISIS MODAL ESPECTRAL

TENER CONGRUENCIA CON LAS UNIDADES A TRABAJAR

PISO	FUERZAS MAXIMAS POR NIVEL	CORTANTES MAXIMOS POR NIVEL
1	FMAXP(1)= .17490E+01	VMAXP(1)= .95258E+01
2	FMAXP(2)= .26422E+01	VMAXP(2)= .83245E+01
3	FMAXP(3)= .33098E+01	VMAXP(3)= .60989E+01
4	FMAXP(4)= .28852E+01	VMAXP(4)= .28852E+01

Cálculo de las fuerzas sísmicas de diseño utilizando el programa ANADIN.EXE calculando las rigideces, considerando las vigas infinitamente rígidas, se utiliza el mismo archivo de datos, cambiando la variable ICK de 2 a 1.

PISO	FUERZAS MAXIMAS POR NIVEL	CORTANTES MAXIMOS POR NIVEL
1	FMAXP(1)= .23823E+01	VMAXP(1)= .11686E+02
2	FMAXP(2)= .30577E+01	VMAXP(2)= .94327E+01
3	FMAXP(3)= .35574E+01	VMAXP(3)= .64502E+01
4	FMAXP(4)= .29110E+01	VMAXP(4)= .29110E+01

RIGIDECES OBTENIDAS POR				
MANUALMENTE			POR PROGRAMA	
	FORMULAS WILBUR	TRABES RIGIDAS	FORMULAS WILBUR	TRABES RIGIDAS
NIVEL	FUERZAS SISMICAS DE DISEÑO			
1	1.70 TON.	2.24 TON.	1.75 TON.	2.38 TON.
2	2.62 TON.	3.09 TON.	2.64 TON.	3.06 TON.
3	3.31 TON.	3.62 TON.	3.30 TON.	3.56 TON.
4	2.91 TON.	2.82 TON.	2.89 TON.	2.91 TON.

Tabla 2.5 Comparación de las fuerzas sísmicas calculadas manualmente y por programa.

Obtención de las fuerzas sísmicas de diseño por el método estático descrito en la sección 2.5.

La estructura es considerada del grupo B caso 2, se encuentra en la zona B y el suelo es de tipo II.

La estructura cumple con las características para utilizar un factor de ductilidad $Q = 4$.

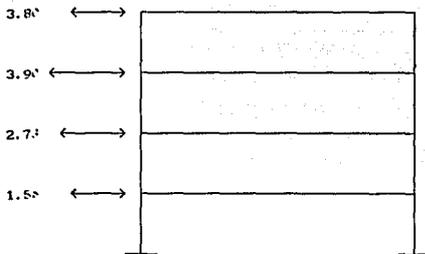
Según la tabla 2.1 de la sección 2.5.4.2

$$c = 0.32 \quad a_0 = 0.080 \quad T_1 = 0.3 \text{ Seg.} \quad T_2 = 1.5 \text{ Seg.}$$

$$P_1 = \frac{W_1 \cdot h_1}{\sum W_1 \cdot h_1} \cdot C_s \cdot \sum W_1$$

$$\frac{C}{Q} = \frac{0.32}{4} = 0.05 \quad C_s = 0.08$$

Nivel	W_i (ton)	h_i (mts)	$W_i \cdot h_i$	P_i (ton)	V_i (ton)
4	30.0	13.0	390.0	3.80	3.80
3	40.0	10.0	400.0	3.90	7.72
2	40.0	7.0	280.0	2.73	10.43
1	40.0	4.0	160.0	1.56	11.99
SUMAS	150.0		1230.0		



Valuación de fuerzas sísmicas estimando el periodo fundamental de la estructura.

Para las rigideces de entrepiso se considerarán las calculadas con las fórmulas de Wilbur.

Nivel	W_i (ton)	P_i (ton)	V_i (ton)	K_i (t/cm)	V_i/K_i (cm)	δ_i (cm)	$W_i \cdot \delta_i^2$	$P_i \cdot \delta_i$
4	30.0	3.80	3.80	3.27	1.16	9.23	2555.79	35.07
3	40.0	3.90	7.70	3.27	2.35	8.07	2604.99	31.47
2	40.0	2.73	10.43	3.57	2.92	5.72	1308.74	15.62
1	40.0	1.56	11.99	4.28	2.80	2.80	313.60	4.37
SUMAS							6783.12	86.53

$$T = 6.3 \cdot \left\{ \frac{6783.12}{981(86.53)} \right\}^{1/2}$$

$$T = 1.78 \text{ Seg.}$$

Ya que el periodo T es mayor a T_b se permite una reducción en las fuerzas sísmicas, se procede de acuerdo a lo estipulado en el inciso b de la sección 2.5.2.

Con los valores de, $c=0.32$, $r=2/3$, $T_b = 1.5$, $T = 1.78$ y $Q = 4$ se calcula:

Nivel	W_i	h_i	$W_i \cdot h_i$	$W_i \cdot h_i^2$	$k_1 \frac{c}{Q} W_i h_i$	$k_2 \frac{c}{Q} W_i h_i^2$	P_i (ton)	V_i (ton)
4	30.0	13.0	390.0	5070.00	3.12	0.49	3.61	3.61
3	40.0	10.0	400.0	4000.00	3.20	0.38	3.58	7.19
2	40.0	7.0	280.0	1960.00	2.24	0.19	2.43	9.62
1	40.0	4.0	160.0	640.00	1.28	0.06	1.34	10.96
SUMAS	150.0		1230.0	11670.00				

$$q = (T_b/T)^{2/3} = 0.892$$

$$k_1 = q [1 - r(1 - q)] \Sigma W_i / (\Sigma W_i h_i) = 0.10$$

$$k_2 = 1.5rq(1 - q) \Sigma W_i / (\Sigma W_i h_i^2) = 0.0012$$

$$k_1 \frac{c}{Q} = 0.008, \quad k_2 \frac{c}{Q} = 0.000096$$

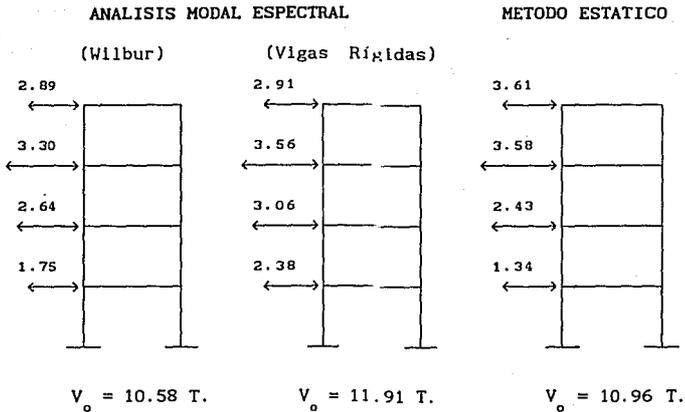


Figura 2.10 COMPARACION DE FUERZAS SISMICAS

2.8 Conclusión.

El método utilizado para generar las fuerzas sísmicas estáticas equivalentes, es una primera aproximación; que permitirealizar los propósitos a los que está enfocado este trabajo, el análisis de confiabilidad de estructuras. Estas fuerzas estáticas equivalentes son un punto de partida para verificar si la estructura cumple con los requisitos especificados en el reglamento de construcciones del D.F. (ref.17) en un primer análisis lineal; además se aprovecha la facilidad de estos métodos para programarlos.

En el apéndice B se presenta un programa de computador anadin.exe. el cual utiliza los métodos presentados en este capítulo.

3.- MODELO DE CONFIABILIDAD.

En un contexto probabilístico, el estudio de seguridad de un sistema estructural implica tomar en cuenta la aleatoriedad por un lado, del sistema en sí mismo y por otro lado de las sollicitaciones a las cuales está sometido.

En general se supone la geometría determinista y se tiene en cuenta el carácter aleatorio de las resistencias y de las sollicitaciones (parámetros de carga); las variables aleatorias que describen estas magnitudes y que intervienen en las ecuaciones son llamadas variables de base.

Para sistemas estructurales con comportamiento elasto-plástico ideal se puede establecer unas funciones simples para los estados límite de seguridad o de falla del sistema, como los modelos estudiados en el capítulo 1.

En teoría, estas funciones de falla del sistema están descritas por las distribuciones de probabilidad de las variables de base, y las probabilidades de falla del sistema se obtienen por la evaluación de las integrales de convolución apropiadas.

En la práctica las funciones de estado límite son difíciles de determinar y su solución necesita de integraciones numéricas en dimensiones elevadas o de técnicas de simulación Monte-Carlo (Ref.22).

Antes de proponer métodos simples para la evaluación de la probabilidad de falla global de un sistema estructural, se mencionaran algunas nociones sobre la confiabilidad.

3.1 Nociones de la teoría matemática de confiabilidad de los sistemas.

En este inciso se presenta una breve introducción de las nociones de la teoría de Confiabilidad matemática.

3.1.1 Clasificación del sistema.

La teoría de confiabilidad matemática se aplica a un sistema que puede ser descompuesto en un conjunto de elementos, tal que el estado del sistema depende sin ambigüedad de los estados de los elementos o componentes (Refs.21,23).

Para los dos, el sistema y sus componentes, la teoría se ocupa solamente de dos estados de comportamiento, el estado de funcionamiento y el de no funcionamiento o de falla.

En una descripción matemática conveniente del sistema, el elemento i -ésimo es asignado a una variable indicadora de estado binario tal que:

$$e_i = \begin{cases} 1 & \text{si el elemento } i\text{-ésimo funciona} \\ 0 & \text{si el elemento } i\text{-ésimo no funciona} \end{cases} \quad (3.1)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$; donde $n =$ número de elementos del sistema.

Se introduce también una variable indicadora "S" para el estado del sistema. "S" está determinada solamente para: $\{e\} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, tal que:

$$S = \psi(\{e\}) = \begin{cases} 1 & \text{si el sistema funciona} \\ 0 & \text{si el sistema no funciona} \end{cases} \quad (3.2)$$

La función indicadora de estado binario ψ es llamada, función estructura.

Si la función-estructura en todo argumento es no decreciente y no constante, es dicha monótona o coherente.

Un sistema descrito por una función-estructura coherente puede ser referido por un sistema coherente.

Si un sistema está descrito por una función-estructura que decrece en el argumento e_1 , es posible encontrar una situación donde el reemplazo de un elemento que no funciona i , por un elemento que funciona, causa la falla del sistema (o causa el no funcionamiento del sistema). Para sistemas físicos este fenómeno es muy raro.

Si una función-estructura es constante en el argumento e_1 , el elemento i es inútil y puede ser eliminado. Por consiguiente, para aplicaciones prácticas la función-estructura será normalmente coherente.

Si una función-estructura tiene n componentes útiles o relevantes, la función es dicha de orden n .

Las funciones-estructura correspondientes a sistemas k -fuera de- n son reales y de especial interés.

Un sistema k -fuera de- n funciona sí y solo sí, al menos k -fuera de- n elementos funcionan.

Las funciones-estructura pueden ser descritas por:

$$\psi(\{e\}) = 1 - \prod_{(i_1, i_2, \dots, i_k)} \left\{ 1 - \prod_{i=1}^k e_{i_1} \right\} \quad (3.3)$$

donde \prod es el operador multiplicativo e (i_1, i_2, \dots, i_n) significan todos los posibles subconjuntos de k -fuera de- n elementos.

Para $k=1$, el sistema esta definido como un sistema en paralelo y la función-estructura esta dada por:

$$S = \psi (\{e\}) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - e_i) = \max(e_1, e_2, \dots, e_n) \quad (3.4)$$

e_i representa el funcionamiento o no funcionamiento del elemento: basta que un elemento funcione o sea igual a 1 para que el sistema funcione, y, es necesario que ningún elemento funcione para que el sistema no funcione.

Para $k=n$ el sistema está referido como un sistema en serie y la función-estructura esta dada por:

$$S = \psi (\{e\}) = \prod_{i=1}^n e_i = \min(e_1, e_2, \dots, e_n) \quad (3.5)$$

En esta expresión, es necesario que todos los elementos funcionen para que el sistema funcione, o, es suficiente con que uno de los elementos no funcione para que el sistema no funcione.

En la práctica para los análisis de confiabilidad de estructuras el tipo de sistema en serie es el más utilizado.

Sea un sistema con una función-estructura ψ , la función-estructura dual está definida por:

$$\psi^D(\{e\}) = 1 - \phi(\{1\} - \{e\}) \quad (3.6)$$

donde $\{1\} - \{e\} = \{1 - e_1, 1 - e_2, \dots, 1 - e_n\}$

La dualidad de un sistema k -fuera de- n es un sistema $(n-k+1)$ -fuera de- n .

Especialmente, la dualidad de un sistema compuesto de subsistemas en serie (o de subsistemas en paralelo) de n elementos es un sistema de subsistemas en paralelo (o de subsistemas en serie) de n elementos. Mas aún la dualidad de un sistema coherente es un sistema coherente.

En aplicaciones prácticas puede ser útil definir subsistemas que están compuestos de conjuntos de elementos, para analizar primero los subsistemas y después analizar el sistema completo sobre la base de éste análisis.

A este propósito podemos introducir una definición precisa del concepto de un subsistema o módulo.

Se tiene un subsistema sí, y solamente sí, la función-estructura coherente ψ puede escribirse:

$$\psi(\{e\}) = \phi \left[\psi^m(\{e^m\}), \{e\}^c \right] \quad (3.7)$$

Donde ϕ y ψ^m son unas funciones-estructura coherentes y los vectores $\{e^m\}$ y $\{e\}^c$ representan dos conjuntos disjuntos de elementos, que forman un todo representado por $\{e\}$, el conjunto de elementos representados por $\{e^m\}$ es llamado conjunto modular. Si este módulo no es el conjunto completo de elementos es llamado un módulo propio.

3.1.2. Representación de los Sistemas por Cadenas y Cortes.

Para obtener la función estructura puede ser útil representar el sistema por subconjuntos cadenas o por subconjuntos corte (Ref.24).

Un sistema cadena es un sistema en paralelo con subsistemas en serie (basta que un subsistema funcione para que el sistema funcione).

Un sistema corte es un sistema en serie con subsistemas en paralelo (basta que un subsistema falle para que el sistema falle).

Un vector cadena está definido por un vector $\{e\}$ tal que $\psi(\{e\}) = 1$.

Un conjunto cadena está definido como un conjunto de elementos tal que el sistema funciona si sus elementos funcionan y el resto de sus elementos no funcionan.

Si no hay un subconjunto del conjunto cadena que sea un conjunto cadena el conjunto se dice minimal.

Una función indicadora asociada al j -ésimo conjunto cadena minimal, está definido por:

$$\lambda_j(\{e\}) = \prod_{i \in L_j} e_i \quad (3.8)$$

donde L_j significa el conjunto del número de elementos correspondientes al conjunto cadena minimal j -ésimo. i el número del elemento del subconjunto, λ_j describe el estado del j -ésimo subsistema en serie de cadena minimal y es la función estructura para un sistema de subsistemas en serie de los elementos en el j -ésimo conjunto de cadena minimal.

Para un sistema coherente, la función estructura puede entonces escribirse:

$$\psi(\{e\}) = 1 - \prod_{j=1}^1 \left[1 - \lambda_j(\{e\}) \right] = 1 - \prod_{j=1}^1 \left[1 - \prod_{i \in L_j} e_i \right] \quad (3.9)$$

ya que el sistema funciona si y solamente si al menos uno de los subsistemas en serie de cadena minimal funciona. i es igual al número total de subconjuntos de cadena minimal.

El sistema es entonces representado como un arreglo en paralelo con subsistemas en serie de cadena minimal.

Un vector corte está definido como un vector $\{e\}$ tal que $\psi(\{e\}) = 0$.

Un conjunto corte está definido como un conjunto de elementos tal que el sistema no funciona si sus elementos no funcionan y el resto de los elementos funcionan. O sea que el sistema falla cuando sus elementos fallan y el resto de sus elementos continúan funcionando.

Si no hay un subconjunto del conjunto corte que sea un conjunto corte, el conjunto se llama minimal.

Una función indicadora γ_k , asociada al k -ésimo subconjunto de corte minimal esta definido por:

$$\gamma_k(\{e\}) = 1 - \prod_{i \in C_k} (1 - e_i) \quad (3.10)$$

donde, C_k significa el conjunto del número de elementos correspondientes al k -ésimo subconjunto de corte minimal, γ_k describe el estado del k -ésimo subsistema en paralelo de corte minimal y es la función estructura para un subsistema en paralelo de los elementos en el k -ésimo subconjunto de corte minimal.

Para un sistema coherente la función estructura puede entonces escribirse:

$$\psi(\{e\}) = \prod_{k=1}^c \gamma_k(\{e\}) = \prod_{k=1}^c \left[1 - \prod_{i \in C_k} (1 - e_i) \right] \quad (3.11)$$

Así el sistema no funciona, si y solamente si al menos unos de los subsistemas en paralelo no funciona. C es el número total de subconjuntos por cortes minimales.

3.1.3. Ejemplo de la representación de un sistema.

Sea una estructura sujeta a dos cargas como la mostrada en la figura 3.1. Se supone que esta estructura deja de funcionar o falla, por la formación de rótulas plásticas en las únicas 5 secciones potencialmente plastificables, numeradas en la figura 3.1 de 1 a 5 e identificadas por el vector $\{e\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, de variables binarias.

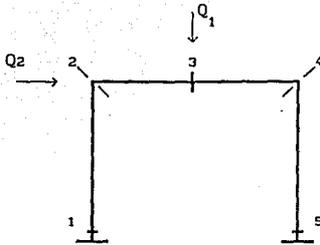


FIGURA 3.1 Estructura tipo marco.

Las cinco posibles articulaciones o rótulas forman los componentes o los elementos del sistema, y el sistema es considerado fallado o que no funciona si se forma un mecanismo, es decir, cuando existe un conjunto apropiado de articulaciones.

Para este ejemplo en particular, los conjuntos completos de los conjuntos por cadenas minimales y por cortes minimales pueden ser fácilmente identificables por inspección.

Los nueve subconjuntos de cadena minimal son: $L_1 = \{1, 2\}$, es decir las secciones 1 y 2 funcionan y las secciones 3,4 y 5 no funcionan o se plastifican, $L_2 = \{1, 3\}$, $L_3 = \{1, 4\}$, $L_4 = \{2, 3\}$, $L_5 = \{2, 4\}$, $L_6 = \{2, 5\}$, $L_7 = \{3, 4\}$, $L_8 = \{3, 5\}$ y $L_9 = \{4, 5\}$

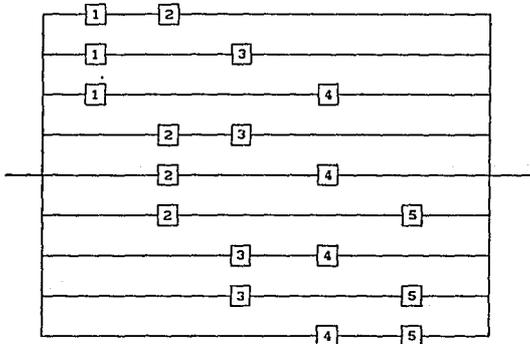


FIGURA 3.2 Representación gráfica del sistema en cadenas minimales.

Basta que funcione un subconjunto del conjunto para que el sistema funcione.

Así la representación gráfica de un sistema por cadenas minimales esta definida por un sistema en paralelo con subsistemas en serie.

Los cuatro conjuntos por cortes minimales son: $C_1 = \{2, 3, 4\}$, es decir las secciones 2, 3 y 4 no funcionan o se plastifican y las secciones restantes 1 y 5 funcionan, $C_2 = \{1, 2, 4 \text{ y } 5\}$, $C_3 = \{1, 2, 3 \text{ y } 5\}$, $C_4 = \{1, 3, 4 \text{ y } 5\}$.

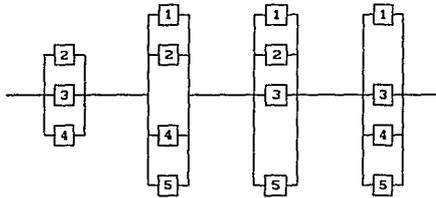


FIGURA 3.4 Representación gráfica del sistema en cortes minimales.

Basta con que falle un subconjunto para que falle el sistema.

Así la representación gráfica de un sistema por cortes minimales esta definida por un sistema en serie con subsistemas en paralelo.

3.1.4 Confiabilidad de los sistemas.

Algunas nociones deterministas para un sistema han sido introducidas anteriormente y el estado de un sistema coherente ha sido ligado a los estados de sus elementos.

En esta sección la confiabilidad de un sistema es ligada a la confiabilidad de los elementos. La variable indicadora del estado binario e_i es modelada por la variable aleatoria E_i .

La confiabilidad del elemento correspondiente está definida por la probabilidad de que E_i sea igual a 1 ($E_i = 1$). Sea esta probabilidad definida por r_i , donde r_i es igual a la esperanza matemática de E_i ; se tiene, entonces $E\{E_i\} = (0)(1 - r_i) + (1)(r_i)$.

La confiabilidad del sistema está similarmente dada por la esperanza de la función $\psi(\{E\})$: $E[\psi(\{E\})]$, y la probabilidad de falla, p_f esta dada por:

$$p_f = 1 - E[\psi(\{E\})] \quad (3.12)$$

Aún y cuando la expresión anterior es simple, puede ser difícil de evaluar, a causa de la posible dependencia entre las variables indicadoras aleatorias de estado, así como la posibilidad de dependencia funcional cuando las mismas variables E_i aparecen en diferentes términos de la función estructural.

En su lugar, la confiabilidad puede ser delimitada por unos límites superior e inferior.

Un conjunto de límites simples para la confiabilidad de un sistema coherente puede derivarse de las definiciones de los conjuntos para cadenas mínimas y para cortes mínimos, como sigue:

$$\max_{j=1}^l E[\lambda_j(\{E\})] \leq E[\psi(\{E\})] \leq \min_{k=1}^c E[\gamma_k(\{E\})] \quad (3.13)$$

donde $E[\lambda_j(\{E\})]$ y $E[\gamma_k(\{E\})]$ pueden también ser delimitadas.

Para variables indicadoras de estado independiente, la confiabilidad puede calcularse en un principio como:

Para toda función estructural ψ de orden n , es válida la siguiente identidad:

$$\psi(\{e\}) = \sum_{e_1=1} e_1 \psi(\{e\}) + (1 - e_1) \sum_{e_1=0} \psi(\{e\}) \quad (3.14)$$

La confiabilidad $E[\psi(\{E\})]$ puede ser entonces calculada por aplicación repetida de:

$$E[\psi(\{E\})] = r_1 E[\psi(\{E\})|E_1=1] + (1 - r_1) E[\psi(\{E\})|E_1=0] \quad (3.15)$$

Por otro lado la confiabilidad puede ser calculada por la expansión de la función estructural, en unas expresiones multinomiales en la variable E_1 .

Esto es siempre posible para los sistemas coherentes, ya que la función estructural puede ser expresada por las ecuaciones (3.9) y (3.11), dadas para las representaciones de las funciones estudiadas por cadenas mínimas y por cortes mínimos.

En este caso dado, en que E_1^2 (la variancia) y E_1 (la esperanza) son iguales, el valor medio de las funciones estructural puede ser calculada directamente.

Bajo la hipótesis de variables indicadoras independientes, la

confiabilidad de un sistema esta dado como una función de confiabilidad de los elementos, es decir:

$$E[\psi(\{E\})] = h(\{r\}) \quad (3.16)$$

donde h es referida a la función de confiabilidad.

Si se considera un sistema k-fuera de-n (ecuación (3.3)), con unos elementos de igual confiabilidad, $r_1 = r_2 = \dots = r_n = q$, la función de confiabilidad esta dada por:

$$h(q) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} q^j (1-q)^{n-j} \quad (3.17)$$

donde esta ecuación es una expresión que implica la distribución binomial.

3.2 Nociones de confiabilidad para los sistemas estructurales.

La teoría de confiabilidad de los sistemas estructurales tratada en ésta sección, se enfoca a problemas de confiabilidad del tipo de estado límite, es decir a problemas definidos por una división del espacio de formulación física n-dimensional de las variables de base $\{x\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, en dos conjuntos de puntos; un conjunto ligado a un conjunto de seguridad S y su complemento F, un conjunto de falla.

La hipersuperficie que constituye la frontera $\partial S = \partial F$ es llamada la superficie de estado límite y ella esta convencionalmente considerada como un subconjunto del conjunto de falla.

El problema de confiabilidad puede ser descrito por una función de estado tal que:

$$g(\{X\}) = \begin{cases} < 0 & \text{para } \{X\} \in F \\ = 0 & \text{para } \{X\} \in \partial F \\ > 0 & \text{para } \{X\} \in S \end{cases} \quad (3.18)$$

En aplicaciones prácticas el problema de confiabilidad esta formulado, adaptando un modelo de comportamiento mecánico de la estructura.

El modelo esta comúnmente basado en la teoría determinista, sobre el comportamiento de estado límite del sistema estructural.

El conjunto de variables de base físicas $\{X\}$, utilizado en el modelo, esta de una cierta manera escogido arbitrariamente. El conjunto contiene

típicamente variables de geometría, de carga, de fuerza, de rigidez y de masa.

La teoría de confiabilidad de los sistemas estructurales se ocupa de un estado binario del sistema.

El estado está determinado para los dos conjuntos S y F y los valores reales del conjunto de variables del problema $\{x\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

En la formulación de un problema de confiabilidad, S y F están generalmente compuestos de m conjuntos de seguridad parcial S_k y los conjuntos de falla parcial complementarios F_k .

Cada uno de esos conjuntos puede corresponder a un evento físico específico, por ejemplo a los diferentes estados límites del sistema estructural.

Sin embargo los conjuntos pueden también ser deducidos de una descripción matemática conveniente del problema, y no representar un problema físico definido.

Cuando S y F son unos conjuntos compuestos, el problema hace alusión a un problema de confiabilidad de un sistema estructural.

En la práctica casi todos los problemas son de éste tipo.

Partiendo de la teoría de confiabilidad matemática, los conjuntos S_k y F_k pueden definir el estado k-ésimo del elemento de un sistema.

Si los m componentes tienen estados binarios de comportamiento:

El estado de un sistema en serie está entonces definido por los conjuntos:

$$S = \bigcap_{k=1}^m S_k ; \quad F = \bigcup_{k=1}^m F_k \quad (3.19)$$

o a través de la función de estado límite correspondiente:

$$g(\{X\}) = \min_{k=1}^m \{g_k(\{X\})\} \quad (3.20)$$

donde g_k es la k-ésima función de estado límite parcial.

De la misma manera el estado de un sistema en paralelo está definido por los conjuntos:

$$S = \bigcup_{k=1}^m S_k ; \quad F = \bigcap_{k=1}^m F_k \quad (3.21)$$

o por la función de estado límite:

$$g(\{X\}) = \max_{k=1}^m \{g_k(\{X\})\} \quad (3.22)$$

S y F pueden también ser definidos por unas combinaciones de intersecciones y de uniones. Por ejemplo si F_{j1} es el conjunto de falla del elemento i -ésimo en el j -ésimo subconjunto de cadena minimal L_j y S_{j1} es el conjunto de seguridad correspondiente, S y F están dados por:

$$S = \bigcup_{j=1}^l \bigcap_{i \in L_j} S_{j1} ; \quad F = \bigcap_{j=1}^l \bigcup_{i \in L_j} F_{j1} \quad (3.23)$$

donde l es el número del subconjunto de cadena minimal.

De la misma manera, si F_{k1} es el conjunto de falla del elemento i -ésimo en el k -ésimo subconjunto de corte minimal C_k y S_{k1} el conjunto de seguridad. S y F están dados por:

$$S = \bigcap_{k=1}^p \bigcup_{i \in C_k} S_{k1} ; \quad F = \bigcup_{k=1}^p \bigcap_{i \in C_k} F_{k1} \quad (3.24)$$

donde p es el número del sub-conjunto de cortes minimales.

3.2.1 Probabilidad de falla asociada a un estado límite.

En general, un análisis de confiabilidad de un sistema estructural real puede implicar múltiples variables aleatorias de base, de todo tipo, y de relaciones no lineales entre ellas.

Bajo este contexto y con el fin de generalizar el análisis, que puede ser formulado en términos de variables de base, se define primero una función de comportamiento o de estado.

$$Z = g(X) = g(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (3.25)$$

donde, X es el vector de las variables aleatorias (v.a.) de base del sistema y $g(X)$ la función que determina el estado del sistema.

Esta formulación general de la teoría de confiabilidad distingue tres estados de un sistema estructural, definidos por la función de estado, $g(\mathbf{x})$.

$$\begin{aligned}
 g(X) > 0 & \quad \text{estado de seguridad} \\
 g(X) = 0 & \quad \text{estado límite} \\
 g(X) < 0 & \quad \text{estado de falla}
 \end{aligned}
 \tag{3.26}$$

Geoméricamente la ecuación del estado límite, $g(X) = 0$, es una superficie de dimensión $n-1$, que puede ser llamada la superficie de falla.

Ahora bien, si $f(\mathbf{x})$ representa la función de densidad de probabilidades conjuntas del vector X de las variables aleatorias X_1 , se puede expresar la probabilidad de seguridad del sistema por:

$$P_s = \int_{\{g(\mathbf{x}) > 0\}} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int \dots \int_{x_1, \dots, x_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n \tag{3.27}$$

La probabilidad de falla del sistema puede ser también definida por:

$$P_f = \int_{\{g(\mathbf{x}) < 0\}} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int \dots \int_{x_1, \dots, x_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n = 1 - P_s \tag{3.28}$$

El dominio de estado límite es supuesta una cantidad nula.

La evaluación de éstas integrales es en general una tarea difícil, salvo para el caso particular en donde la ecuación de estado límite es lineal y función de variables aleatorias de base normales correlacionadas o no.

Sea la función de estado límite del sistema $Z = g(X) = b_0 + \mathbf{b}^T X$, donde X es el vector de las variables aleatorias de base, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, b_0 y b_1 son unas constantes y \mathbf{b}^T la transpuesta de \mathbf{b} .

La media \bar{Z} de Z y su desviación estándar σ_z son entonces:

$$\bar{Z} = b_0 + \mathbf{b}^T \bar{X}; \quad \sigma_z = \left(\mathbf{b}^T [C_x] \mathbf{b} \right)^{1/2} \tag{3.29}$$

donde \bar{X} es el vector de los valores medios de X y $[C_x]$ su matriz de covariancias.

La probabilidad de falla del sistema se evalúa entonces por:

$$P_f = P(Z < 0) = \Phi \left(-\frac{\bar{Z}}{\sigma_z} \right) = \Phi \left(-\frac{b_0 + b^T \bar{X}}{(b^T [C_x] b)^{1/2}} \right) = \Phi(-\beta) \quad (3.30)$$

donde $\beta = -\bar{Z}/\sigma_z$ representa el índice de confiabilidad del sistema y Φ es la función de distribución de probabilidades acumulada estándar.

Este índice de confiabilidad puede interpretarse como el número de desviaciones estándar σ_z que separa la media \bar{Z} del origen.

Quando la ecuación de estado límite lineal, se expresa en función de variables aleatorias independientes estándar (media = 0 y desviación estándar = 1), el índice de confiabilidad se interpreta de la siguiente manera:

Sea $Z = g(u) = a_0 + a^T U = 0$, la ecuación lineal de estado límite del sistema, U el vector de variables aleatorias de base normales estándar independiente y a_0 y $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ unas constantes.

Una vez normalizada la función lineal se tiene:

$$Z = \frac{a_0}{\|a\|} + \frac{a^T U}{\|a\|} = \beta + \alpha^T U = 0 \quad (3.31)$$

donde las α_i son los cosenos directores del hiperplano, β es el índice de confiabilidad del sistema ó la distancia Eucladiana, del origen a la superficie del estado límite y $\|a\|$ la norma de a .

3.2.2 Caso fundamental.

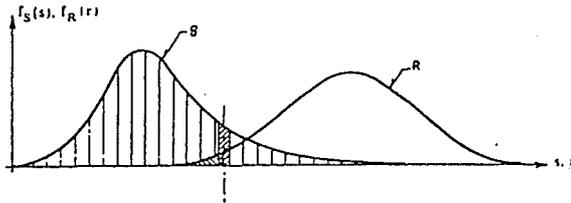
Sea R una variable aleatoria normal que representa la resistencia límite de un sistema estructural simple y S una variable aleatoria normal que representa la sollicitación aplicada.

En este caso simple de dos variables aleatorias, cuando la sollicitación es aplicada, la probabilidad de falla o la confiabilidad del sistema puede ser fácilmente calculada, si se hace la hipótesis de independencia entre R y S , y si se toma como criterio de falla la ecuación lineal: $R - S \leq 0$, por lo que:

$$p_f = 1 - p_s = P(R-S < 0) = \int_{-\infty}^{\infty} F_R(x) f_S(x) dx \quad (3.32)$$

donde p_f y p_s son respectivamente la probabilidad de falla y la probabilidad de seguridad o de sobrevivencia del sistema estructural, F_R la función de distribución acumulada de R , f_S la función de densidad de probabilidades de la sollicitación S y $R - S \leq 0$, el único criterio de falla del sistema.

La probabilidad de falla dada por la ecuación (3.32) es el producto de probabilidades de dos eventos independientes, integrados sobre todos los eventos posibles: por un lado, la probabilidad que el efecto de la sollicitación S se encuentra en el intervalo $[x - dx/2, x + dx/2]$ es igual a $f_S(x)dx$; por otro lado, la falla llega cuando la resistencia R es más pequeña que x , entonces la probabilidad de este evento vale $F_R(x)$. La ecuación (3.32) se ilustra en la figura 3.5.



Densidad de falla

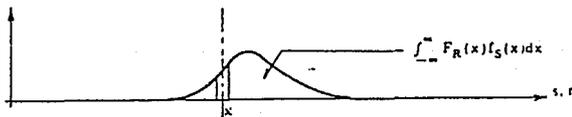


FIGURA 3.5 Representación gráfica de la ecuación (3.32).

3.2.3 Noción del índice de confiabilidad, un caso particular.

Sean R y S unas variables aleatorias normales independientes, definidas anteriormente y Z la v.a. ligada al criterio de falla:

$$Z = R - S \quad (3.33)$$

donde la superficie que representa el estado límite de falla en el espacio de Z es la de la recta.

$$Z = R - S = 0 \quad (3.34)$$

La probabilidad de falla puede entonces obtenerse de la siguiente manera:

$$p_f = P(Z < 0) = \int_{-\infty}^0 f_z(z) dz = F_z(0) = \Phi \left[-\frac{\bar{Z}}{\sigma_z} \right] = \Phi(-\beta) \quad (3.35)$$

$$\bar{Z} = \bar{R} - \bar{S} \quad (3.36)$$

$$\sigma_z^2 = \sigma_R^2 + \sigma_S^2 \quad (3.37)$$

$$\beta = \frac{\bar{R} - \bar{S}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (3.38)$$

donde, \bar{R} , \bar{S} , σ_R^2 , σ_S^2 son respectivamente los valores medios y las variancias de R y S, $f_z(z)$ es la función de densidad de Z, $F_z(0)$ es la función de distribución acumulada de Z evaluada en cero, $\Phi(-\beta)$ la función de distribución acumulada de la v.a. estándar evaluada en $-\beta$ ($=-\bar{Z}/\sigma_z$) y β el índice de confiabilidad (la v.a. estándar $U = Z - \bar{Z}/\sigma_z = \beta$).

Este índice de confiabilidad β se interpreta como el número de desviaciones estándar σ_z que separa la media \bar{Z} del origen. Este caso se ilustra en la figura 3.6.

Sean ahora U_1 y U_2 las v.a. estándar asociadas a R y S:

$$U_1 = \frac{R - \bar{R}}{\sigma_R} \quad , \quad U_2 = \frac{S - \bar{S}}{\sigma_S} \quad (3.39)$$

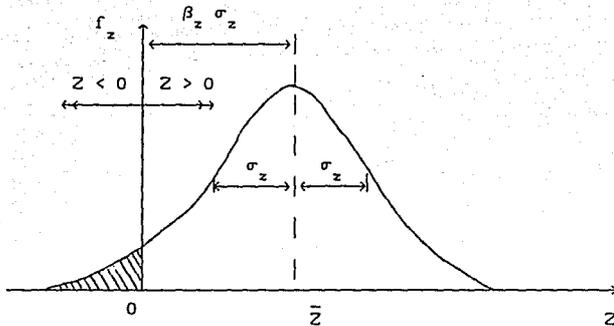


FIGURA 3.6 Índice de confiabilidad (β).

La ecuación de la superficie del estado límite de falla se puede representar en el espacio de v.a. U como sigue:

$$Z = \sigma_R U_1 - \sigma_S U_2 + (\bar{R} - \bar{S}) = 0 \quad (3.40)$$

Una representación gráfica de ésta recta del estado límite de falla esta dada en la figura 3.7.

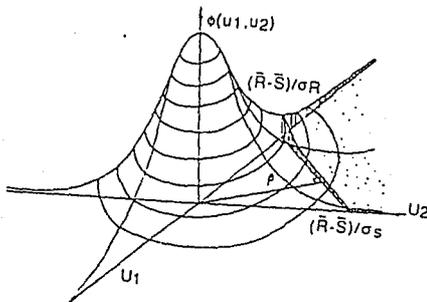


FIGURA 3.7 Representación del índice de confiabilidad en el espacio U .

En este caso el índice de confiabilidad β es interpretado como la distancia euclidiana del origen a la función del estado límite, en el espacio de v.a. estandar. La magnitud de esta distancia se puede obtener fácilmente normalizando la ecuación (3.40) (este valor se obtuvo también con la ecuación (3.38):

$$Z = \frac{\sigma_R U_1}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} - \frac{\sigma_S U_2}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} + \frac{\bar{R} - \bar{S}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} = \alpha^T U + \beta = 0 \quad (3.41)$$

La probabilidad de falla se puede entonces expresar como:

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (3.42)$$

3.2.4 Ecuación de estado límite no-lineal. Aproximación de primer orden.

Si la función de estado límite es no lineal, se puede por un lado utilizar la aproximación de primer orden de Hasofer y Lind (Ref.25) para la obtención del índice de confiabilidad; por otro lado ver la interpretación de este índice de confiabilidad.

El índice de confiabilidad de Hasofer y Lind está definido por la distancia (en el sentido euclidiano) más pequeña del origen a la superficie de falla, en un espacio de v.a. normales estándar independientes U.

Para las funciones de estado límite continuas, de curvatura ligera, el índice de confiabilidad puede ser determinado (con suficiente precisión para aplicaciones prácticas), reemplazando ésta superficie de estado límite por un hiperplano tangente en el punto de la superficie de estado límite, la más próxima al origen (es decir en el punto de falla, el más probable), u (ver figura 3.8).

Sea una función de estado límite $\tilde{g}(U)$ diferenciable; la aproximación a través de un hiperplano implica que:

$$\beta = \beta(u^*) \quad (3.43)$$

donde $\beta(u^*)$ es el índice de confiabilidad correspondiente a la función del estado límite lineal, obtenida por un desarrollo de Taylor de primer orden de la función de estado límite g en el punto u de la superficie de estado límite:

$$\tilde{Z}(u) = \nabla \tilde{g}(u)^T \{U - u\} \quad (3.44)$$

Dado que u^* es la proyección del origen sobre ese hiperplano, el índice $\beta(u^*)$ puede ser determinado por:

$$\beta(u^*) = \sqrt{u^{*T} u^*} = \|u^*\| \quad (3.45)$$

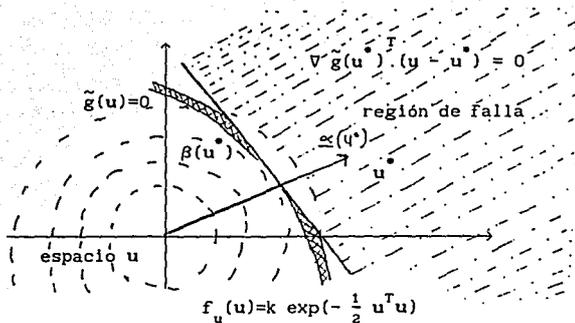


FIGURA 3.8 Representación del índice de Hasofer y Lind.

y el vector unitario paralelo a u^* es el vector normal a la superficie del estado límite:

$$\alpha(u) = -\frac{\nabla \tilde{g}(u)}{\|\nabla \tilde{g}(u)\|} ; \quad \alpha(u^*) = \frac{u^*}{\|u^*\|} = \frac{u^*}{\beta(u^*)} \quad (3.46)$$

donde ∇ es el operador nabla, $\|\cdot\|$ la norma eucladiana y β el índice de Hasofer y Lind.

Es posible demostrar que $\beta(u)$ converge a la distancia del punto de falla, el más probable al origen.

Para determinar $\beta(u^*)$, el punto de falla global el más probable, u^* debe ser identificado.

Dado que ésto es un problema de optimización se tiene que:

$$\min_{u \in \partial F} \{u^T u\}^{1/2} \quad \text{y} \quad \partial F = \{u \mid \tilde{g}(u) = 0\} \quad (3.47)$$

Se puede utilizar un algoritmo clásico de búsqueda del óptimo.

Para superficies de estado límite de débil curvatura, donde u^* es la sola proyección del origen, un algoritmo que da buenos resultados, es la fórmula recurrente propuesta por Rackwitz y Fiessler (Ref.26):

$$u_{k+1} = \left[u_k^T \alpha(u_k) + \frac{\tilde{g}(u_k)}{\|\nabla \tilde{g}(u_k)\|} \right] \alpha(u_k) \quad (3.48)$$

donde la proyección del origen puede ser obtenida como el límite de una secuencia de puntos $u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots$ (ver figura 3.9), cuando la convergencia es alcanzada.

El punto inicial u_1 puede ser escogido arbitrariamente y la experiencia muestra que para la mayoría de las funciones de estado límite utilizadas en confiabilidad estructural (funciones de estado límite, de gradiente $\nabla g(u)$ no despreciable), el algoritmo es rápido para todo vector $u \in R^n$.

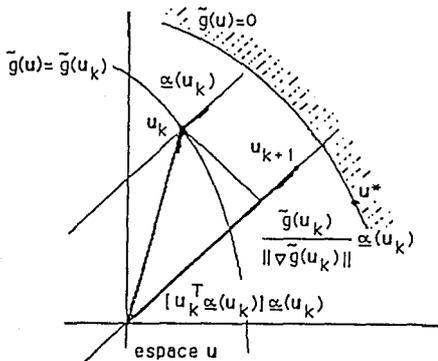


FIGURA 3.9 Ilustración del algoritmo de búsqueda de un punto proyectado del origen.

3.2.5 Noción de "punto de falla el más probable". Ecuación de estado no lineal expresada como función de variables aleatorias normales estandar independientes X' .

Shinozuka (1983, ref.27) ha mostrado que el punto en la superficie de falla con distancia mínima al origen es el punto de falla más probable (La noción de punto de falla más probable fue introducida por primera vez por Freudenthal en 1956 (ref.28) para v.a.n. estadísticamente independientes). Entonces, en un sentido aproximativo esta distancia mínima puede ser usada como una medida de confiabilidad.

Siguiendo Shinozuka, la distancia mínima requerida puede ser determinada como sigue. La distancia de un punto $\underline{X}' = X'_1, X', \dots, X'_n$ (vector de v.a. normales estandar independientes) de la superficie de falla, $g(\underline{X}) = 0$, al origen de \underline{X}' es:

$$D = \sqrt{X_1'^2 + X_2'^2 + \dots + X_n'^2} = (\underline{X}'^T \underline{X}')^{1/2} \quad (3.49)$$

El punto de la superficie de falla $(X_1'^*, X_2'^*, \dots, X_n'^*)$, teniendo la distancia mínima al origen puede ser determinado por minimización de la función D, ecuación (3.49), sujeta a la restricción de que $g(\underline{X})=0$, esto es: Minimizando D, sujeto a $g(\underline{X})=0$.

Para éste propósito, el método del multiplicador de Lagrange puede ser usado; sea:

$$L = D + \lambda g(\underline{X}) = (\underline{X}'^T \underline{X}')^{1/2} + \lambda g(\underline{X}) \quad (3.50)$$

o en notación escalar:

$$L = \sqrt{X_1'^2 + X_2'^2 + \dots + X_n'^2} + \lambda g(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

donde, $X_i = \sigma_{x_i} X_i' + \mu_{x_i}$

Minimizando L, ecuación (3.50), obtenemos el siguiente conjunto de n+1 ecuaciones, con n+1 incógnitas:

$$\frac{\partial L}{\partial X_1'} = \frac{X_1'}{\sqrt{X_1'^2 + X_2'^2 + \dots + X_n'^2}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial X_1'} = 0; \quad i = 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (3.51)$$

La solución del conjunto de ecuaciones tendría al punto de falla más probable $(X_1'^*, X_2'^*, \dots, X_n'^*)$.

Introduciendo el vector gradiente:

$$G = \left(\frac{\partial g}{\partial X_1'}, \frac{\partial g}{\partial X_2'}, \dots, \frac{\partial g}{\partial X_n'} \right) \quad (3.52)$$

donde,
$$\frac{\partial g}{\partial X'_1} = \frac{\partial g}{\partial X_1} \frac{dX_1}{dX'_1} = \sigma_{x_1} \frac{\partial g}{\partial X_1}$$

El conjunto de ecuaciones (3.51), puede ser entonces escrito en notación vectorial como:

$$\frac{X'}{(X'^T X')^{1/2}} + \lambda G = 0 \quad (3.53)$$

donde $\underline{X}' = -\lambda D G$ (3.54)

Por consiguiente:

$$D = (X'^T X')^{1/2} = \left[(\lambda D G^T) (\lambda D G) \right]^{1/2} = \lambda D [G^T G]^{1/2} \quad (3.55)$$

Finalmente se tiene que:

$$\lambda = [G^T G]^{-1/2} \quad (3.56)$$

Sustituyendo la ecuación (3.56) en la ecuación (3.54) se tiene:

$$\underline{X}' = - \frac{G D}{[G^T G]^{1/2}} \quad (3.57)$$

Premultiplicando la ecuación (3.57) por G^T tenemos:

$$G^T \underline{X}' = - \frac{G^T G D}{[G^T G]^{1/2}} = - D [G^T G]^{1/2}$$

por consiguiente:
$$D = - \frac{G^T \underline{X}'}{[G^T G]^{1/2}} \quad (3.58)$$

Sustituyendo la ecuación (3.57) en la ecuación (3.51), resulta una ecuación singular con la incógnita D; la solución de la ecuación resultante tiene entonces a la mínima distancia $d_{\min} = \beta$; por consiguiente:

$$\beta = - \frac{G^{*T} X'^{*}}{[G^{*T} G^*]^{1/2}} \quad (3.59)$$

donde el signo (-) negativo indica que la distancia esta evaluada de la función al origen y G^* es el vector gradiente en el punto de falla más probable (X'_1^* , X'_2^* , ..., X'_n^*). En forma escalar se tiene:

$$\beta = \frac{- \sum_1 X'_i \left(\frac{\partial g}{\partial X'_i} \right)}{\sqrt{\sum_1 \left(\frac{\partial g}{\partial X'_i} \right)^2}} \quad (3.60)$$

donde las derivadas $(\partial g / \partial X'_i)$, son evaluadas en $(x'_1^*$, x'_2^* , ..., x'_n^*). Usando esta β en la ecuación (3.57), el punto más probable en la superficie de falla llega a ser:

$$X'^{*} = - \frac{G^* \beta}{[G^{*T} G^*]^{1/2}} \quad (3.61)$$

En forma escalar, los componentes de X'^{*} son:

$$X'_i^* = -\alpha_i^* \beta$$

$$y \quad \alpha_i^* = \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial X'_i} \right)}{\sqrt{\sum_1 \left(\frac{\partial g}{\partial X'_i} \right)^2}} \quad (3.62)$$

donde α_i son los cosenos directores, a lo largo de los ejes x'_i .

3.2.6 Transformación de Rosenblatt.

En el caso más general de las variables aleatorias correlacionadas, no-normales, con función de distribución multi-dimensional conocida, existe una transformación general, propuesta por Rosenblatt (ref.29), para obtener

variables aleatorias normales independientes equivalentes.

Sea $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ un vector de variables aleatorias con una ley de probabilidades conjunta conocida y $F_X(x)$ su función de distribución acumulada.

Un vector gaussiano estándar $U = (U_1, U_2, \dots, U_n)$ puede ser obtenido a partir de las siguientes igualdades.

$$\begin{aligned}
 \Phi(u_1) &= F_{X_1}(x_1) \\
 \Phi(u_2) &= F_{X_2}(x_2|x_1) \\
 &\vdots \\
 \Phi(u_n) &= F_{X_n}(x_n|x_1, \dots, x_{n-1})
 \end{aligned}
 \tag{3.63}$$

Si se hace sucesivamente la inversión de las ecuaciones anteriores, se obtienen las variables U deseadas:

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \Phi^{-1}(F_{X_1}(x_1)) \\
 U_2 &= \Phi^{-1}(F_{X_2}(x_2|x_1)) \\
 &\vdots \\
 U_n &= \Phi^{-1}(F_{X_n}(x_n|x_1, \dots, x_{n-1}))
 \end{aligned}
 \tag{3.64}$$

donde $F_{X_k}(x_k|x_1, \dots, x_{k-1})$ es la función de distribución acumulada condicional de X_k dado que $X_1 = x_1, \dots, X_{k-1} = x_{k-1}$.

Para la transformación inversa, obtenemos X en función de U :

$$X_1 = F_{X_1}^{-1}(\Phi(u_1))$$

$$X_2 = F_{X_2}^{-1}(\Phi(u_2 | x_1))$$

⋮
⋮

$$X_n = F_{X_n}^{-1}(\Phi(u_n | x_1, \dots, x_{n-1}))$$

(3.65)

3.2.7 Obtención del índice de confiabilidad. Función de estado límite no-lineal, expresada en variables aleatorias no-normales dependientes.

Para variables aleatorias no-normales dependientes, el índice de confiabilidad puede ser obtenido en el espacio de las variables aleatorias normales independientes estándar u , obtenidas a través de la transformación de Rosenblatt. Para éste propósito el algoritmo propuesto por Hohenbichler y Rackwitz (Ref. 30), puede ser utilizado.

Sea $g(X)$ y $g(U)$ las funciones de estado límite del sistema, expresadas respectivamente en función de variables aleatorias de origen X y de las variables aleatorias normales independientes estándar U .

- 1.- Se asume un punto de falla $x_0^* = x_0$
- 2.- Se obtiene el punto de falla u_0 correspondiente a x_0^* , en el espacio de las variables aleatorias normales estándar, utilizando la transformación de Rosenblatt.
- 3.- Se determina la matriz de Jacobiano evaluada en x_0^* :

$$J = \frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

- 4.- Se evalúa la función de estado límite y el vector gradiente, $G_0 = \text{grad}(g(u))$, en el punto u_0 .

$$g(u_0) = g(x_0) \quad (3.67)$$

$$G_{u_0} = [[J]^{-1}]^T G_{x_0} \quad (3.68)$$

5.- Se obtiene un nuevo punto de falla:

$$u^* = \frac{1}{G_{u_0}^T G_{u_0}} \left[G_{u_0}^T u_0 - g(u_0) \right] G_{u_0} \quad (3.69)$$

y en el espacio de las variables de origen, el punto de falla es (por aproximación de primer orden):

$$x^* \cong x_0 + [J]^{-1} (u^* - u_0) \quad (3.70)$$

6.- Se calcula el índice de confiabilidad:

$$\beta = (u^{*T} u^*)^{1/2} \quad (3.71)$$

7.- Se repiten los pasos (2) a (6), utilizando el valor de x^* como el nuevo punto de falla, hasta alcanzar la convergencia.

A través de la diferenciación implícita se puede observar que las derivadas parciales en el Jacobiano son (Ref.31):

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \phi^{-1}(F(x_1 | \dots))}{\partial x_j} = \frac{1}{\phi(u_1)} \frac{\partial (F(x_1 | \dots))}{\partial x_j} \quad (3.72)$$

También, puesto que $\partial u_i / \partial x_j = 0$ para $i < j$, el Jacobiano es una matriz triangular inferior y por consiguiente su inversa J^{-1} puede ser fácilmente obtenida a través de una sustitución hacia atrás.

3.2.8 Probabilidad de falla asociada a varios estados límites.

Si hay k posibles funciones de estado g_i ($1 < i < k$), caracterizando

los k posibles modos de falla de un sistema estructural considerado, se puede teóricamente expresar la probabilidad de seguridad o la probabilidad de falla del sistema como sigue:

$$P_S = \int_{(E_1 \cap \dots \cap E_k)} \dots \int f_{x_1, \dots, x_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int f_x(x) dx \quad (3.73)$$

con $E_j = \{g_j(x) > 0\}$, o bien,

$$P_f = \int_{(E_1 \cup \dots \cup E_k)} \dots \int f_{x_1, \dots, x_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int f_x(x) dx \quad (3.74)$$

con $E_j = \{g_j(x) < 0\}$

La integración directa de las ecuaciones (3.73) y (3.74) es en general una tarea difícil de realizar. Para este fin algunos autores han propuesto métodos aproximativos, entre los que destaca el método aproximativo de evaluación de la probabilidad de falla, propuesto por Ditlevsen (Ref. 32), para un caso particular:

Sean Z_1 y Z_2 dos funciones lineales de estado límite, expresadas en función de variables aleatorias gaussianas estándar independientes U :

$$\begin{aligned} Z_1 &= a_0 + a^T U = a_0 + a_1 U_1 + \dots + a_n U_n \\ Z_2 &= b_0 + b^T U = b_0 + b_1 U_1 + \dots + b_n U_n \end{aligned} \quad (3.75)$$

donde U es un vector de variables aleatorias gaussianas estándar independientes, a_0 , b_0 , a y b son unas constantes y a^T es la traspuesta de a .

Los momentos segundos de Z se escriben entonces:

$$\text{Var}[Z_1] = a^T a = \sum_{i=1}^n a_i^2 \quad ; \quad \text{Var}[Z_2] = b^T b = \sum_{i=1}^n b_i^2 \quad (3.76)$$

$$\text{Cov}[Z_1, Z_2] = a^T b = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

y el coeficiente de correlación de Z_1 y Z_2 esta dado por:

$$\rho [Z_1, Z_2] = \frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)}} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} = \cos \theta \quad (3.77)$$

$$\text{o sea: } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta \quad \therefore \cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$$

donde θ es el ángulo entre los vectores unitarios perpendiculares a los hiperplanos de los estados límites.

Por otro lado las distancias del origen a éstos hiperplanos son:

$$\beta_1 = \frac{a_0}{\|\mathbf{a}\|} \quad \text{y} \quad \beta_2 = \frac{b_0}{\|\mathbf{b}\|} \quad (3.78)$$

Una representación geométrica, en el caso de dos variables aleatorias está ilustrada en la figura 3.10.

Cabe observar que ρ es igual trigonométricamente al $\cos \theta$ y ρ es igual probabilísticamente a la correlación de las dos funciones.

De la figura 3.10 y haciendo algunos cálculos trigonométricos simples, se puede observar que la probabilidad de la intersección de los eventos E_1 y E_2 puede ser delimitada de la siguiente manera para $\rho \geq 0$.

$$\max[P(A), P(B)] \leq P(E_1, E_2) = P(Z_1 < 0 \cap Z_2 < 0) \leq P(A) + P(B) \quad (3.79)$$

y gracias a la ortogonalidad:

$$P(A) = \Phi(-\beta_1) \Phi \left(-\frac{\beta_2 - \rho \beta_1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) \quad \text{y} \quad P(B) = \Phi(-\beta_2) \Phi \left(-\frac{\beta_1 - \rho \beta_2}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) \quad (3.80)$$

y para $\rho < 0$:

$$0 \leq P(E_1, E_2) = P(Z_1 < 0 \cap Z_2 < 0) \leq \min\{P(A), P(B)\} \quad (3.81)$$

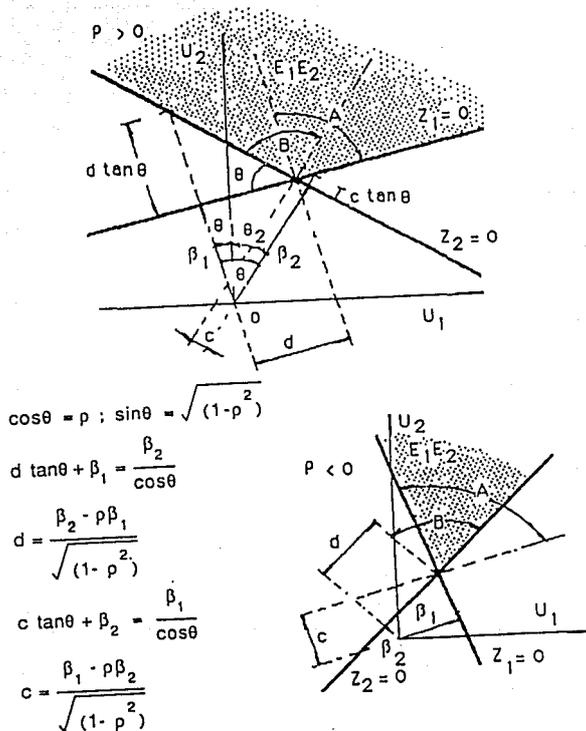


FIGURA 3.10 Representación geométrica de dos hiperplanos.

La probabilidad de falla global de este sistema con dos funciones de estado, puede evaluarse como sigue:

$$\begin{aligned}
P_r &= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 E_2) \\
&= P(Z_1 < 0) + P(Z_2 < 0) - P(Z_1 < 0 \cap Z_2 < 0) \\
&= P_{r_1} + P_{r_2} - P(E_1 E_2) = \Phi(-\beta_1) + \Phi(-\beta_2) - P(E_1 E_2)
\end{aligned}
\tag{3.82}$$

$$\text{y para } \rho > 0: P_r = \Phi(-\beta_1) + \Phi(-\beta_2) - \max [P(A), P(B)] \tag{3.83}$$

Finalmente, se observa que no existe un método general de evaluación simple de la confiabilidad de un sistema estructural. Podemos simplemente delimitar la probabilidad de falla a través de límites inferiores y superiores.

Entre los límites existentes en la literatura, podemos citar principalmente los límites superior e inferior propuestos por Kounias (Ref.33), Hounter (Ref.34) y Ditlevsen (Ref.32):

$$\sum_{i=1}^k P_{r_i} - \sum_{i=2}^k \max_{j < i} P(E_i E_j) > P_r > P_{r_1} + \sum_{i=2}^k \max \left\{ P_{r_i} - \sum_{j=1}^{i-1} P(E_i E_j) \right\}, 0 \tag{3.84}$$

Estos límites, llamados límites bi-modales o límites de Ditlevsen, son calculados transformando la unión de eventos de falla, en una unión de pares de eventos de falla. Una delimitación de las probabilidades conjuntas $P(E_i E_j)$ esta dada por la ecuación (3.84), para variables aleatorias normales estándar.

3.3 Métodos de ramas y límites para el análisis de confiabilidad de sistemas estructurales.

Un sistema estructural real es tan complejo que el cálculo exacto de su probabilidad de falla no es fácil de obtener. El número de modos de falla posible puede ser tal que todos estos modos no puedan ser tomados en cuenta y aún si todos pudieran ser incluidos en el análisis de confiabilidad, las probabilidades de falla son una tarea pesada de realizar.

Es necesario entonces idealizar el sistema estructural, así como las cargas, de una manera tal que el cálculo de la confiabilidad sea manejable.

A causa de esta idealización, es importante no olvidar que los cálculos de las probabilidades de falla están ligados al modelo de un sistema estructural idealizado y no directamente al sistema estructural real.

Uno de los objetivos principales en el análisis de confiabilidad de

los sistemas estructurales es de alguna manera poder realizar unos sistemas estructurales tales que las probabilidades de falla sean minimizadas. El modelo debe ser por consiguiente escogido minuciosamente, con el fin de que los modos de falla más importantes para el sistema estructural real sean tomados en cuenta en él.

En este trabajo se describen sistemas estructurales formados por barras únicamente (sistemas esquelatales); sin embargo, los métodos estudiados pueden ser aplicados a un tipo más vasto de sistemas.

Se supone que los sistemas estructurales están formados por un número finito de elementos barra, ligados por un número finito de nudos. Para éste modelo de sistema estructural, los elementos de falla están ligados a los elementos (barra, nudos) del sistema estructural.

Para cada uno de los elementos de un sistema estructural existe, un número diferente de modos de falla. Cada modo de falla lleva a la falla del elemento, sin embargo, la falla del sistema llega en general cuando un número de fallas de los elementos llega simultáneamente.

Se supone que la confiabilidad de un sistema estructural puede ser calculada sobre la base de un modelo de sistema en serie, donde los elementos de este sistema son a su vez sistemas en paralelo, que representan los modos de falla del sistema estructural.

El método de cálculo de las probabilidades de falla para un sistema estructural, propuesto al final de esta sección y llamado método de ramas y límites, está basado en la hipótesis en que la confiabilidad total o global de un sistema estructural puede ser suficientemente aproximada con un número finito de modos de falla, considerados como dominantes.

Entre los métodos de análisis de confiabilidad de sistemas estructurales, desarrollados en el curso de estas últimas décadas, los métodos llamados de Primer Orden (o de Segundo Orden) han ocupado considerablemente la atención de los especialistas.

En ésta sección no se trata de hacer un estudio del arte completo de estos métodos, sino simplemente presentar algunos conceptos de base (para una presentación más detallada: Refs. 35, 36, 37, 38 y 39).

Los métodos de primer orden pueden ser resumidos en cuatro etapas fundamentales:

1.- El sistema estructural se modela por combinaciones de elementos o componentes, en serie y en paralelo.

2.- A partir de la función de estado límite de un componente, expresada en variables aleatorias generales, se transforman éstas variables en variables aleatorias gaussianas estándar independientes.

La función de estado límite se linealiza después en el punto de densidad de probabilidad maximal. La distancia del origen a este punto es llamada Índice de Confiabilidad β .

3.- Para toda pareja de funciones de estado límite, transformadas y definidas por sus índices de confiabilidad β , así como por sus cosenos directores de cada hiperplano, se encuentra la intersección o la unión de las regiones de falla a través de un hiperplano equivalente β^E .

4.- Se calculan unos límites superior e inferior para la probabilidad de falla del sistema estructural considerado (cabe mencionar que no existe un método general práctico de evaluación de la confiabilidad de un sistema estructural, o aún de una función de densidad de probabilidades normal de dimensión n ; cuando n rebasa 4 ó 5).

Así, el método de Primer Orden puede aplicarse sistemáticamente en la búsqueda de la probabilidad de falla global de un sistema estructural; como por ejemplo el modelo del árbol de fallas que identifica las secuencias de fallas elementales, las más probables, y combina sus probabilidades de ocurrencia.

3.3.1 Probabilidad de falla de un componente o elemento.

Para una función de estado límite dada, se observa primero el caso particular en el que se puede fácilmente obtener la probabilidad de falla sin aproximación: es el caso donde X es un vector de variables aleatorias gaussianas estándar independientes $N(0,1)$ y $G(x)$ es una función lineal de éstas variables; así:

$$\begin{aligned}
 P_f &= P(G(\mathbf{x}) \leq 0) = P(G(\mathbf{u}) \leq 0) \\
 &= P(\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}^T \mathbf{U} \leq 0) \\
 &= P(\underline{\alpha}^T \mathbf{U} \leq -\beta) \\
 &= P(Z \leq -\beta) = \Phi(-\beta)
 \end{aligned}
 \tag{3.85}$$

donde $\underline{\alpha} = \mathbf{a} / \|\mathbf{a}\|$ es el vector de los cosenos directores del hiperplano $G(\mathbf{x}) = 0$, $\beta = \mathbf{a}_0 / \|\mathbf{a}\|$ es la distancia al origen y Φ es la función de distribución acumulada de la ley gaussina estándar.

Ahora bien, la idea de base del método de Primer Orden es aproximar el caso general por este caso particular. Esto se hace en dos etapas:

- Transformación del vector X en un vector U , de variables aleatorias gaussianas estándar independientes, y transformación de la función de estado límite $G(\mathbf{x}) = 0$ en $G'(\mathbf{u}) = G(\mathbf{x}(\mathbf{u})) = 0$.

- Linealización de esta función de estado límite transformada $G'(\mathbf{u})=0$, en el punto de densidad de probabilidades maximal.

$$p_f = P(G(x) \leq 0) = P(G'(u) \leq 0)$$

$$\approx P\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i U_i + \beta \leq 0\right) = \Phi(-\beta) \quad (3.86)$$

donde los α_i son los cosenos directores del hiperplano tangente a $G'(u)=0$, y β la distancia al origen del punto de densidad maximal, el más próximo al origen en el espacio euclideo.

Gracias a la simetría circular de la densidad de probabilidades multinormales, el punto de densidad maximal es simplemente el punto de la superficie $G'(u) = 0$, el más próximo al origen en el espacio euclideo. Este punto puede ser obtenido a través de un algoritmo clásico de búsqueda del óptimo.

La aproximación de primer orden (FORM, First Order Reliability Method) es generalmente buena, siempre y cuando la probabilidad de falla sea pequeña ($\beta > 2.5$) y que la curvatura de la función de falla sea débil alrededor del punto de linealización.

3.3.2 Probabilidad de falla de sistemas.

Dos tipos particulares de sistemas simples son utilizados: el sistema en paralelo, que falla si y solamente si todos sus componentes fallan (su evento de falla es por consiguiente la intersección de los eventos de falla de sus componentes individuales); y el sistema en serie, que falla si un componente cualquiera falla (su evento de falla es entonces la unión de los eventos de falla de los componentes individuales).

Todo sistema estructural puede ser modelado como un arreglo de componentes en serie y en paralelo; siendo la representación de la unión de intersecciones de eventos de falla de componentes (una representación por cortes minimales), la mejor adaptada al análisis de confiabilidad de una estructura. Una representación de este sistema se muestra en la figura 3.11.

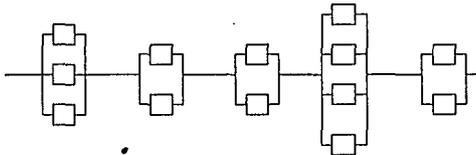


FIGURA 3.11 Representación de un sistema estructural por cortes minimales.

No existe un procedimiento simple para evaluar la confiabilidad de un sistema, conociendo las probabilidades de falla de los componentes. Se puede simplemente obtener límites inferior y superior de la confiabilidad

de un sistema en serie o en paralelo, como por ejemplo los límites extremos propuestos por Ditlevsen (Ref.32), después estos límites, generalízalos para combinación de sistemas en paralelo y en serie; obteniéndose así:

$$\begin{aligned}
 P\left(\bigcup_{i=1}^n F_i\right) &\leq P(F_1) + \sum_{i=2}^n \left[P(F_i) - \max_{j < i} \{P(F_i \cap F_j)\} \right] \leq \sum_{i=1}^n P(F_i) \leq 1 \\
 P\left(\bigcap_{i=1}^n F_i\right) &\geq P(F_1) + \sum_{i=2}^n \max \left[0, P(F_i) - \sum_{j=1}^{i-1} P(F_i \cap F_j) \right] \geq \max_{i=1}^n P(F_i)
 \end{aligned}
 \tag{3.87}$$

Estos límites extremos de Ditlevsen dependen del orden de los eventos de falla de los componentes.

3.3.2.1 Sistema en paralelo.

Cuando las funciones de estado límite de los diferentes componentes de un sistema en paralelo son transformadas y expresadas en función de variables aleatorias gaussianas estándar independientes, se puede escribir la probabilidad de falla del sistema como sigue:

$$\begin{aligned}
 P_f &= P\left[\bigcap_{j=1}^n \{G'_j(u) \leq 0\}\right] \cong P\left[\bigcap_{j=1}^n \left\{\sum_{i=1}^m \alpha_{ij} U_i + \beta_j \leq 0\right\}\right] \\
 &= P\left[\bigcap_{j=1}^n \{Z_j \leq -\beta_j\}\right] = \Phi_n[-\beta; [\rho]]
 \end{aligned}
 \tag{3.88}$$

donde $\Phi_n(-\beta; [\rho])$ es la integral multinormal de dimension n , evaluada para el vector $-\beta$ y la matriz de correlación $[\rho]$, definida por $\rho_{1j} = \alpha_{1k} \alpha_{kj}$.

3.3.2.2 Sistema en serie.

De la misma manera se obtiene una aproximación similar para un sistema en serie:

$$P_f = P\left[\bigcup_{j=1}^n \{G'_j(u) \leq 0\}\right] \cong P\left[\bigcup_{j=1}^n \left\{\sum_{i=1}^m \alpha_{ij} U_i + \beta_j \leq 0\right\}\right]$$

$$= P \left[\bigcap_{j=1}^n \{Z_j \leq -\beta_j\} \right] = 1 - P \left[\bigcap_{j=1}^n \{Z_j > -\beta_j\} \right] \quad (3.89)$$

$$= 1 - P \left[\bigcap_{j=1}^n \{Z_j \leq \beta_j\} \right] = 1 - \Phi_n \left[\underline{\beta}; [\rho] \right]$$

Finalmente, la probabilidad de falla de un sistema estructural, representado por un sistema en serie, donde los componentes son subsistemas en paralelo (figura 3.11), se puede obtener como sigue:

$$P_f = P \left[\bigcup_{i=1}^m \bigcap_{j=1}^n G'_{ij}(u) \leq 0 \right] \quad (3.90)$$

3.3.3 Método del hiperplano equivalente.

Dado un dominio de falla F en el espacio reducido U , se observa que el índice de confiabilidad β de Ditlevsen puede ser definido como sigue:

$$\beta^E = -\Phi^{-1}(P(U \in F)) \quad (3.91)$$

donde β^E es la distancia al origen de un hiperplano equivalente, de igual probabilidad que la función de falla inicial.

Hohenbichler (Ref.40) muestra que, entre todos los posibles hiperplanos hay uno que refleja mejor la contribución relativa de cada variable aleatoria U_i , en la probabilidad de falla total; este hiperplano está definido por el vector de los cosenos directores $\underline{\alpha}^E$, tal que:

$$\alpha^E = \frac{\nabla \beta^E(\underline{\xi})}{\left\| \nabla \beta^E(\underline{\xi}) \right\|_{\underline{\xi}=0}} \quad (3.92)$$

donde $\beta^E(\underline{\xi}) = -\Phi(P(U + \underline{\xi} \in F))$, $\underline{\xi}$ es una traslación diferencial del vector U , y $\| \cdot \|$ es la norma eucladiana.

El hiperplano definido por α^E y β^E es llamado "hiperplano equivalente de la superficie de falla de F ". $\underline{\alpha}^E$ es el vector generalizado de los factores de sensibilidad.

Para un sistema estructural representado por cortes minimales, la intersección de varias regiones de falla de componentes elementales puede ser reemplazado por un dominio de falla, limitado por un hiperplano equivalente que tenga la misma probabilidad de falla asociada, sea:

$$\beta_1^E = -\Phi^{-1}(P(U \in F_1)) \quad (3.93)$$

$$\alpha_{-1}^E = \frac{\vec{\nabla} \beta_1^E(\underline{\varepsilon})}{\left\| \vec{\nabla} \beta_1^E(\underline{\varepsilon}) \right\|_{\underline{\varepsilon}=0}} \quad (3.94)$$

donde $P(U \in F_1)$ esta evaluada por la ecuación (3.88).

La unión de regiones de falla de subsistemas en serie puede ser también aproximado por un hiperplano equivalente de igual probabilidad de falla asociada, utilizando la ecuación (3.89).

El método de primer orden es resumido esquemáticamente en la figura 3.12, para un sistema simple representado en espacio bidimensional.

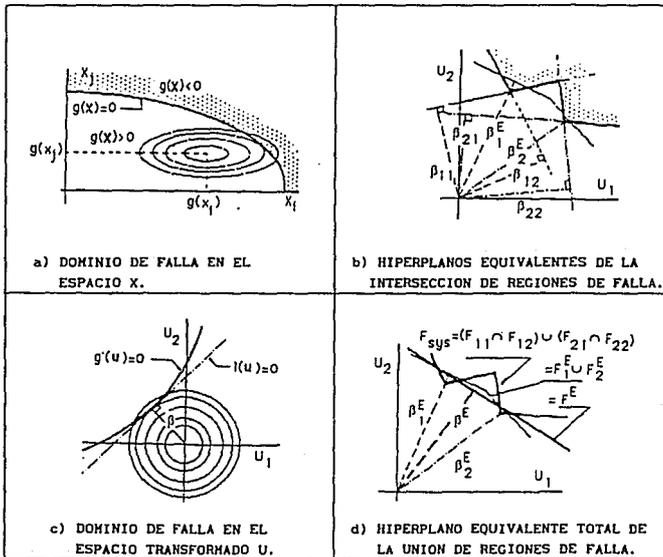


FIGURA 3.12 Esquema del método de primer orden.

3.3.4 Evaluación de la integral multinormal.

Aún cuando no existe un procedimiento general analítico para calcular con precisión la integral multinormal general $\Phi(Z; [Pz])$; es necesario evaluar las integrales multinormales de las ecuaciones (3.88) y (3.89), que son esenciales para el análisis de confiabilidad.

Cuando los eventos de falla $G'_j(u)$ son eventos de probabilidad pequeña, se utiliza frecuentemente la aproximación del límite superior siguiente, para un sistema en paralelo:

$$\Phi_m \left(-\beta_- ; [R] \right) \leq \min \{ \Phi(-\beta_k) \} \quad (3.95)$$

Mientras que para un sistema en serie se tiene el límite superior siguiente, que tiene solo interés matemático:

$$1 - \Phi_m \left(-\beta_- ; [R] \right) \leq \sum_{k=1}^m \Phi(-\beta_k) \leq 1 \quad (3.96)$$

Para el caso particular en que la matriz de correlación puede ser expresada en la forma $[R] = \{ \delta_{kl} + \lambda_k \lambda_l (1 - \delta_{kl}) \}$, donde δ_{kl} es el símbolo de Kronecker y $\lambda_k, \lambda_l \in [-1, 1]$, la ecuación de falla puede ser representada por:

$$Z_k = \lambda_k U_0 + (1 - \lambda_k)^{1/2} U_k \quad (3.97)$$

donde U_0, U_1, \dots, U_m son unas variables gaussianas estándar independientes. Esto implica que se puede evaluar $\Phi(Z; [R_z])$ por una simple integración, ejecutada por ejemplo por cuadratura:

$$\begin{aligned} \Phi_m(Z; [R_z]) &= P \left(\bigcap_{k=1}^m \{ Z_k \leq z_k \} \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u_0) \prod_{k=1}^m \Phi \left[\frac{Z_k - \lambda_k u_0}{(1 - \lambda_k^2)^{1/2}} \right] du_0 \end{aligned} \quad (3.98)$$

Esta fórmula es dada por Dunnet y Sobe (Ref.41)

Una aproximación numérica de la integral multinormal es propuesta por Hohenbichler y Rackwitz (Ref. 42), como sigue.

Dada una función distribución multinormal definida por:

$$\Phi_m(C; [R]) = P\left(\prod_{k=1}^m \{Z_k \leq C_k\}\right) \quad (3.99)$$

La idea de base, para el cálculo de esta integral multinormal general, es representar el vector Z correlacionado por:

$$Z = [A] U \quad (3.100)$$

donde [A] es una matriz triangular inferior obtenida por una factorización de Cholesky, y U es un vector de variables normales estándar independientes, donde:

$$\begin{aligned} \Phi_m(C; [R]) &= P\left(\prod_{k=1}^m \left\{\sum_{j=1}^k a_{kj} U_j \leq C_k\right\}\right) \\ &= P(U_1 \leq C_1) P\left(\prod_{i=2}^m \left\{\sum_{j=1}^i a_{ij} U_j \leq C_i \mid U_1 \leq C_1\right\}\right) \end{aligned} \quad (3.101)$$

Cuando U_1 es reemplazada por una variable truncada con la transformación de Rosenblatt $U_1 = \Phi^{-1}(\Phi(V_1)\Phi(C_1)) = T_1(V_1)$, se suprime la condición del segundo factor de la ecuación (3.101). Además, la combinación lineal de las otras variables U_i ($i > j$) es representada como otra variable aleatoria normal estándar. Esto nos conduce a:

$$\begin{aligned} P\left(\prod_{i=2}^m \left\{\sum_{j=1}^i a_{ij} U_j \leq C_i \mid U_1 \leq C_1\right\}\right) &= P\left(\prod_{i=2}^m \left\{a_{i1} T_1(V_1) + \left(1-a_{i1}^2\right)^{1/2} V_i \leq C_i\right\}\right) \\ &= P\left(\prod_{i=2}^m \left\{g_i(V_1, V_i) \leq 0\right\}\right) \quad (3.102) \\ &\cong P\left(\prod_{i=2}^m \left\{\alpha_{i1}^{(2)} V_1 + \alpha_{i2}^{(2)} V_i \leq C_i^{(2)}\right\}\right) \\ &= \Phi_{m-1}(C^{(2)}; [R]) \end{aligned}$$

Por aplicaciones sucesivas de éste procedimiento se obtiene por consiguiente:

$$\Phi_m(C; [R]) \cong \prod_{i=1}^m \Phi \left(C_i^{(1)} \right) \quad (3.103)$$

Por otro lado, para aplicar esta metodología en el análisis de confiabilidad de un sistema, basado en un modelado de las estructuras por sistemas en serie y en paralelo, utilizando las aproximaciones de primer y segundo orden, existe un programa llamado SHASYS, desarrollado en la Universidad de Stanford (Ref.44).

Este programa utiliza los algoritmos y los subprogramas desarrollados en la Universidad de Munich, bajo la dirección del Pr. Racwitz (Ref.46).

3.3.5 Metodología para la búsqueda de los caminos de falla y límites para la probabilidad de falla.

A priori, es difícil identificar todos los modos de falla posibles de un sistema estructural, sobre todo cuando se trata de sistemas estructurales de hiperestaticidad muy alta. Con este propósito, un método llamado de ramas y límites es brevemente estudiado en esta sección (Refs. 31, 36 y 46).

En este trabajo se supone un comportamiento elastoplástico para las estructuras, donde la falla del sistema esta definida por la formación de un mecanismo de colapso.

La falla del sistema estructural se alcanza a través de una serie (no-única) de plastificaciones. Esta serie es llamada camino de falla completo. Las series de plastificaciones intermedias son llamadas caminos de falla parciales o incompletos. El número de plastificaciones o de articulaciones plásticas en un camino de falla es llamado longitud del camino de falla.

Cuando hay unas articulaciones plásticas en un camino de falla completo, que no contribuyen a la formación del mecanismo de falla, son llamadas articulaciones redundantes. Mientras que, en el caso contrario las articulaciones son llamadas articulaciones esenciales, o sea, son articulaciones que no pueden ser quitadas del camino de falla completo, para formar un mecanismo de falla.

Se observa que para un sistema estructural tipo marco (donde el comportamiento mecánico de los elementos es elastoplástico y los momentos flexionantes son los efectos dominantes en la fluencia plástica de las secciones de los elementos) todas las funciones de estado límite, obtenidas a través de la última articulación plástica formada, resultan ser las mismas ecuaciones para los caminos de falla completos, compuestos de las mismas articulaciones plásticas esenciales en combinaciones diferentes. Esto es, la falla de un sistema estructural se alcanza por una serie particular de articulaciones plásticas esenciales, que forman un mecanismo

de falla o colapso.

Si se considera un camino de falla, $r_1 \rightarrow r_2 \rightarrow \dots \rightarrow r_p$, compuesto de p articulaciones plásticas, la probabilidad del camino de falla se obtiene como sigue:

$$P_{f_p}(r_1, \dots, r_p) = P \left[(Z_{r_1}^{(1)} \leq 0) \cap (Z_{r_2(r_1)}^{(2)} \leq 0) \cap \dots \cap Z_{r_p(r_1, \dots, r_{p-1})}^{(p)} \leq 0) \right]$$

$$= P \left[\bigcap_{i=1}^p (Z_{r_i(r_1, r_2, \dots, r_{i-1})}^{(i)} \leq 0) \right] \quad (3.104)$$

o, utilizando los eventos de seguridad o los complementos de los eventos de falla, se puede derivar la expresión siguiente:

$$P_{f_p}(r_1, \dots, r_p) = 1 - P \left[\bigcup_{i=1}^p (Z_{r_i(r_1, r_2, \dots, r_{i-1})}^{(i)} > 0) \right] \quad (3.105)$$

No existe un procedimiento simple para evaluar la probabilidad de un camino de falla, cuando la longitud del camino de falla rebasa 3; se puede simplemente acotar esta probabilidad, con límites extremos (inferior y superior), como por ejemplo los límites siguientes (Ref.36).

$$P_{f_p}(r_1, \dots, r_p)(\text{sup.}) = \min_{j \in \{2, \dots, p\}} P \left[(Z_{r_1}^{(1)} \leq 0) \cap (Z_{r_j(r_1, \dots, r_{j-1})}^{(j)} \leq 0) \right]$$

$$P_{f_p}(r_1, \dots, r_p)(\text{inf.}) = \max \left[0, P \left[(Z_{r_1}^{(1)} \leq 0) \right] - P \left[(Z_{r_1}^{(1)} \leq 0) \cap (Z_{r_2(r_1)}^{(2)} > 0) \right] \right]$$

$$- \sum_{j=3}^p \min \left\{ P_{f_p}(r_1, \dots, r_{j-1})(\text{sup.}), P \left[(Z_{r_1}^{(1)} \leq 0) \cap (Z_{r_j(r_1, \dots, r_{j-1})}^{(j)} > 0) \right] \right\}$$

(3.106)

Los límites son funciones no crecientes de la longitud del camino, o sea la probabilidad no crece cuando una nueva articulación plástica es añadida en el camino de falla.

Dado que, por un lado las probabilidades ordenadas de los eventos de seguridad o de falla:

$$P[S_1] = P[Z_{r_1}(r_1, \dots, r_{1-1}) > 0], \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (3.107)$$

$$P[S_1] \geq P[S_2] \geq \dots \geq P[S_p]$$

por otro lado podemos escribir la ecuación (3.105), como sigue:

$$P_f(r_1, \dots, r_p) = 1 - P\left[\bigcup_{i=1}^p S_i\right] \quad (3.108)$$

La probabilidad de falla de un sistema puede ser mejor acotado, gracias a los límites extremos, superior e inferior propuestos por Ditlevsen:

$$P_{f_p}(r_1, \dots, r_p)(\text{sup.}) = 1 - P[S_1] - \sum_{i=2}^p \max\left\{0, \sum_{j=1}^{i-1} P[\bar{S}_j \cap S_i] - (i-2)P[S_1]\right\} \quad (3.109)$$

$$P_{f_p}(r_1, \dots, r_p)(\text{inf.}) = 1 - P[S_1] - \sum_{i=2}^p \min_{j \in \{1, \dots, i-1\}} P[\bar{S}_j \cap S_i]$$

donde \bar{S}_j es el evento complementario de S_j .

Se hace la observación que las ecuaciones (3.109) requieren de las funciones de falla de todas las etapas de degradación del sistema estructural.

3.3.5.1 Hipótesis del cálculo y Acotamiento de la probabilidad de falla.

El método de búsqueda de los caminos de falla tiene por objeto la evaluación de la probabilidad de falla global de un sistema estructural, identificando las secuencias de falla elementales más probables y combinando su probabilidad de ocurrencia.

Se busca después acotar la probabilidad de falla global del sistema por medio de sus límites extremos, superior e inferior.

El inicio del árbol de fallas es un nudo que representa el estado inicial de la estructura. Este nudo está ligado a los nudos siguientes a través de ramas que designan las posibles fallas elementales de los elementos de la estructura.

Cada nudo sucesivo, correspondiente a un estado de daño de la estructura, está definido por la secuencia de fallas elementales (o parciales) que llevan a él.

Se llama "camino de falla completo" toda secuencia de fallas elementales que conduce a un nudo final, que representa un modo de falla del sistema estructural (formación de un mecanismo, estabilidad inaceptable por algún criterio límite de utilización: vibración, deformación excesiva, etc.).

Con el fin de simplificar el modelo, se supone que todas las fallas elementales se producen instantáneamente, lo que permite tratar el problema independiente del tiempo.

Se supone igualmente que el comportamiento del sistema estructural es lineal entre dos fallas elementales consecutivas, o sea, un elemento fallado tiene una rigidez reducida y una resistencia residual, traducida por una carga ficticia equivalente, aplicada a la estructura en los nudos del elemento fallado.

Esta resistencia residual se expresa generalmente en función de los mismos parámetros aleatorios que las resistencias iniciales.

Además un elemento anteriormente dañado no puede recobrar su rigidez inicial cuando ocurra un cambio en el sentido de los elementos mecánicos.

Hay en general varios posibles caminos de falla. Como es suficiente con que se produzca un solo camino de falla para que la estructura falle, el sistema estructural puede estar representado para el conjunto de estos caminos de falla, por un sistema en serie, donde las componentes son subsistemas en paralelo, relativos a cada camino de falla.

La probabilidad de falla global del sistema estructural puede entonces calcularse con ayuda de la ecuación (3.90).

Dado que por un lado es prácticamente imposible identificar todos los posibles caminos de falla y por otro lado, hay poca posibilidad de que todos los caminos de falla sean equiprobables, la idea de base del método consiste en identificar los caminos de falla más probables e incluir solamente éstos en la ecuación (3.90).

Se obtiene así un límite inferior de la probabilidad de falla global y del sistema, ya que se desprecian otros caminos de falla.

Cuanto más caminos de falla se consideren, mejor es el límite inferior encontrado.

Dado que cualquier camino de falla es la intersección de los eventos de falla elementales:

$$\prod_{i=1}^n E_i \quad (3.110)$$

se tienen las desigualdades siguientes:

$$P(E_1) > P(E_1 \cap E_2) > \dots > P\left(\bigcap_{i=1}^n E_i\right) \quad (3.111)$$

donde la probabilidad de alcanzar cada etapa intermedia no tiene que disminuir, cuando se progresa sobre el camino de falla.

En la búsqueda de los caminos de falla más probables, existen otros caminos de falla incompletos.

Si se consideran todos los caminos estudiados como caminos de falla completos y si se les incluye en el cálculo de la confiabilidad del sistema, estamos seguros de incluir, los caminos de falla no identificados pero generados por estos caminos y por consiguiente de obtener un límite superior de la probabilidad de falla global.

Finalmente se obtiene así un acotamiento de la probabilidad de falla global del sistema.

3.3.5.2 Algoritmo de búsqueda de los caminos de falla.

Con el fin de identificar los caminos de falla los mas probables, se utiliza un algoritmo de búsqueda arborescente, como se describe en las etapas de "a" a "g" :

a) Cálculo de todas las probabilidades de falla elementales iniciales, partiendo de la condición inicial del sistema estructural.

b) Identificación del valor más grande, y falla del elemento correspondiente.

c) Cálculo de las probabilidades conjuntas de la falla inicial retenida y de todas las fallas elementales aun posibles.

d) Identificación del valor más grande entre las probabilidades conjuntas que vienen de ser calculadas y todas las probabilidades de falla calculadas anteriormente aún no retenidas.

e) Falla del o de los elementos de la estructura correspondiente y cálculo de un nuevo conjunto de probabilidades conjuntas.

f) Ejecución de los pasos d) y e) hasta alcanzar un estado de falla de la estructura, o dicho de otra manera, hasta alcanzar el camino de falla completo más probable.

g) Ejecución de los pasos d) y e) hasta alcanzar los caminos de falla siguientes, los más probables.

Se observa que si el número de caminos de falla completos aumenta, los límites extremos inferior y superior de la probabilidad de falla global, se aproximan, y convergen hacia la probabilidad de falla total del sistema, dada por la ecuación (3.90).

3.4 Método de análisis de confiabilidad de sistemas estructurales a través de simulación Monte-Carlo.

Existen otros métodos para el cálculo de la probabilidad de falla global de los sistemas estructurales, que hacen uso de los métodos de simulación de Monte-Carlo.

En este subcapítulo se estudia en particular un método de confiabilidad, que hace uso de la simulación Monte-Carlo, en la evaluación de las integrales múltiples de la probabilidad de falla de un sistema en serie, propuesto por Esteva y otros (Refs. 47, 48).

Una de las hipótesis restrictivas de este método es que se suponen conocidos todos los posibles modos de falla del sistema, expresados en función de las resistencias límites de los elementos involucrados y de las cargas críticas; además que la ley de probabilidades conjunta de las funciones de estado de seguridad se supone gaussiana y que las variables de resistencia son independientes de las cargas.

Este método simplificado, sin embargo, permite aproximar rápidamente la probabilidad de falla global del sistema, considerando los modos de falla más probables.

3.4.1 Modelo mecánico.

Conociendo todos los posibles modos de falla de un sistema estructural, se puede establecer para cada mecanismo, una relación de equilibrio entre las cargas exteriores P_i y las fuerzas internas de los elementos críticos.

Para los sistemas dúctiles donde los efectos P- Δ (de segundo orden) no son considerados, la relación entre las fuerzas es lineal.

Si se trabaja con las resistencias límites de los elementos críticos R_i y con la convención de que la falla del sistema corresponde a los valores negativos de la combinación lineal precedente, se obtienen las funciones de seguridad Z_i del sistema ($Z_i < 0$):

$$\{Z\} = [A]\{R\} + [B]\{P\} \quad (3.112)$$

donde [A] y [B] son dos matrices de transformación de fuerzas, {Z}, {R} y {P} son respectivamente los vectores de las funciones de seguridad, de las resistencias límites de las secciones críticas de los elementos y de las cargas externas.

3.4.2 Modelo de confiabilidad.

El análisis de confiabilidad de los sistemas estructurales dúctiles, bajo cargas estáticas, puede ser fácilmente tratado como sigue:

- a) Identificación de todos los posibles mecanismos de falla del

sistema estructural.

b) Establecimiento de las funciones de seguridad $\{Z\}$ de los mecanismos de falla identificados en a)

c) Cálculo de la ley de probabilidades conjunta de las funciones de seguridad $\{Z\}$, y

d) Cálculo de la probabilidad de que una función de seguridad cualquiera tenga un valor negativo ($Z_i < 0$).

3.4.3 Sistema en serie.

Un sistema descrito por n elementos, E_1, E_2, \dots, E_n , es denominado un sistema en serie, si la aparición de una falla cualquiera de estos elementos produce el colapso del sistema estructural. La probabilidad de falla del sistema estructural puede entonces ser expresada por:

$$P_f = P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) \quad (3.113)$$

donde E_i representa el evento "falla del sistema siguiendo el modo i ".

Cuando se representa las fallas del sistema por sus funciones de seguridad $E_i = (Z_i < 0)$, la ecuación de la probabilidad de falla del sistema se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned}
 P_f &= P(Z_1 < 0) + P(Z_2 < 0, Z_1 > 0) + \dots + P(Z_n < 0, Z_1 > 0, \dots, Z_{n-1} > 0) \\
 &= F_{Z_1}(0) + \int_0^{\infty} F_{Z_2}(0|z_1) f_{Z_1}(z_1) dz_1 + \dots + \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} F_{Z_n}(0|z_1, \dots, z_{n-1}) \\
 &\quad f_{Z_1, \dots, Z_{n-1}}(z_1, \dots, z_{n-1}) dz_1 \dots dz_{n-1} \quad (3.114)
 \end{aligned}$$

donde, $f_{Z_1, \dots, Z_{k-1}}(z_1, \dots, z_{k-1})$ es la función de densidad de probabilidad conjunta de las $k-1$ primeras funciones de seguridad y F_{Z_k} es la función de probabilidad condicional acumulada de la función de seguridad Z_k , dado que: $Z_1 = z_1, \dots, Z_{k-1} = z_{k-1}$.

Con el fin de poder evaluar estas integrales múltiples por simulación Monte-Carlo, se transforma la ecuación anterior como sigue:

$$P_f = F_{z_1}(0) + E'_{z_1} \{F_{z_2}(0)\} + \dots + E'_{z_1 \dots z_{n-1}} \{F_{z_n}(0)\} \quad (3.115)$$

donde $E'_{z_1 \dots z_{k-1}} \{F_{z_k}(0)\}$ designa la esperanza matemática de $F \left\{ \prod_{i=1}^{k-1} 1(Z_i > 0) \right\}$, $1(Z_i > 0)$ es la función indicadora de $(Z_i > 0)$ (o sea que es igual a la función F si $Z_i > 0$, ..., $Z_{k-1} > 0$ e igual a cero en caso contrario), otra forma de expresarla es:

$$P_f = F_{z_1}(0) + \dots + \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \phi_k(z_1, \dots, z_{k-1}) f_{z_1, \dots, z_{k-1}}(z_1, \dots, z_{k-1}) dz_1 \dots dz_{k-1} + \dots \quad (3.116)$$

$$\text{donde } \phi_k(z_1, \dots, z_{k-1}) = F_{z_k}(0 | z_1, \dots, z_{k-1}) \prod_{i=1}^{k-1} 1(Z_i > 0)$$

Dado el estado de desarrollo de este modelo, en este trabajo nos limitaremos a distribuciones multidimensionales gaussianas para las funciones de seguridad $\{Z\}$ y supondremos que las fuerzas son independientes de las resistencias.

Es suficiente entonces con conocer el vector de resistencias medias $\{\bar{R}\}$ y el vector de fuerzas medias $\{\bar{P}\}$, así como las matrices de covariancias respectivas $[S_{RR}]$ y $[S_{PP}]$, para obtener la ley de distribuciones buscada, en efecto:

$$\{\bar{Z}\} = [A]\{\bar{R}\} + [B]\{\bar{P}\} = [C]\{\bar{X}\} \quad (3.117a)$$

$$[S_z] = [C][S_x][C]^T \quad (3.117b)$$

$$[C] = [[A][B]], \{X\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{R}\} \\ \{\bar{P}\} \end{Bmatrix} \text{ y } [S_x] = \begin{bmatrix} [S_{RR}] & [S_{RP}] \\ [S_{PR}] & [S_{PP}] \end{bmatrix} \quad (3.117c)$$

donde $[S_{RP}] = [S_{PR}] = [0]$, cuando las resistencias son independientes de las cargas.

$$[S_x] = \begin{bmatrix} S_{1,1} & \dots & S_{1,n-1} & S_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ S_{n-1,1} & \dots & S_{n-1,n-1} & S_{n-1,n} \\ S_{n,1} & \dots & S_{n,n-1} & S_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [S_{11}] & \{S_{12}\}^T \\ \{S_{21}\} & S_{22} \end{bmatrix}$$

Se puede demostrar que la ley de probabilidades condicional de X_n , dado que $X_1 = x_1$, $X_2 = x_2$, ..., $X_{n-1} = x_{n-1}$, es una ley de probabilidades gaussianas de esperanza y variancia definidas por:

$$E(X_n | x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \bar{X}_n + \{S_{21}\} \{S_{11}\}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 - \bar{X}_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} - \bar{X}_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$S_{X_n} | x_1, x_2, \dots, x_{n-1} = S_{nn} - \{S_{21}\} \{S_{11}\}^{-1} \{S_{12}\}^T \quad (3.119)$$

Con el fin de mejorar este algoritmo y reducir el número de simulaciones necesarias, se transforman las integrales múltiples de la ecuación de falla del sistema por:

$$P_{f_k} = \int_{-\infty}^{-\infty} \dots \int_{-\infty}^{-\infty} \phi_k(z_1, \dots, z_{k-1}) \gamma_{k-1} f_{Y_1}(z_1) \dots f_{Y_{k-1}}(z_{k-1}) dz_1 \dots dz_{k-1} \quad (3.120)$$

donde $\gamma_{k-1} = \frac{f_{z_1 \dots z_{k-1}}(z_1, \dots, z_{k-1})}{f_{Y_1}(z_1) \dots f_{Y_{k-1}}(z_{k-1})}$ y $f_{Y_1}(z_1)$ es una función de

densidad de probabilidades auxiliar, diferente de la ley normal.

Se introduce igualmente, como función de probabilidades auxiliar, la ley exponencial siguiente:

$$f_{Y_1}(z_1) = \nu \exp(-\nu z_1) \quad (3.121)$$

donde $\nu = 1/\bar{Z}_1$, si \bar{Z}_1 , media condicional de Z_1 dado que $Z_1 = z_1, \dots, Z_{1-1} = z_{1-1}$ es positiva, y $\nu = 1$ en el caso contrario.

Esta transformación permite simular con la ayuda de la función exponencial unos valores para Z_1 , tanto en la región próxima de $Z_1 = 0$, donde la función $F_{Z_k}(0|z_1, \dots, z_{k-1})$ tiene sus valores más grandes, como cerca de $Z_1 = z_1$, después regresar a la ley gaussiana de las funciones de seguridad, utilizando el coeficiente γ_{k-1} .

3.4.5 Ejemplo.

Consideremos el caso particular de un marco simple, donde la configuración geométrica y la condición de carga están indicadas en la figura 3.13:

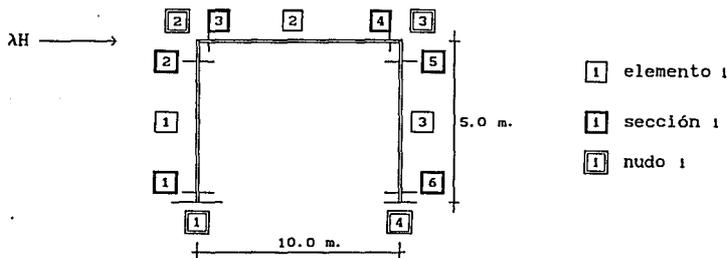


FIGURA 3.13 Marco plano.

Las características geométricas y mecánicas de los elementos de la estructura están dados en la tabla 1.1, del capítulo 1.

Para el análisis de confiabilidad de esta estructura se hacen las hipótesis siguientes:

- La estructura tiene un comportamiento perfectamente plástico.
- La resistencia de las secciones a lo largo del mismo elemento están totalmente correlacionadas (correlación $\rho = 1$).

La aparición de las articulaciones plásticas se producen en los extremos de los elementos.

Las resistencias de los elementos R_i se consideran variables aleatorias gaussianas independientes.

La carga H es considerada también gaussiana e independiente de las resistencias.

Con la ayuda de las hipótesis anteriores se identifican fácilmente todos los posibles mecanismos de falla (puramente plásticos) del marco, que se muestran en la figura 3.14; las ecuaciones de falla, pueden determinarse igualando los trabajos virtuales interno y externo:

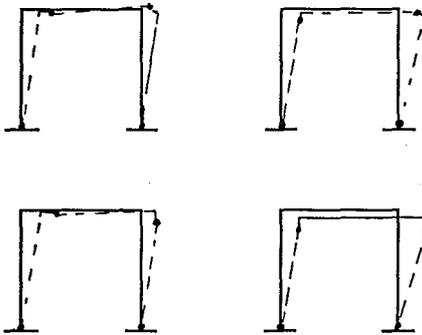


FIGURA 3.14 Mecanismos de falla perfectamente plásticos.

$$Z_1 = R_1 + R_3 + R_4 + R_6 - 500H \leq 0$$

$$Z_2 = R_1 + R_2 + R_4 + R_6 - 500H \leq 0$$

$$Z_3 = R_1 + R_3 + R_5 + R_6 - 500H \leq 0$$

$$Z_4 = R_1 + R_2 + R_5 + R_6 - 500H \leq 0$$

donde R_i es la resistencia límite de la sección i a la flexión $R_i = M_p$.

Con base en las hipótesis anteriores, la densidad de probabilidades conjunta Z es gaussiana. Es suficiente entonces con conocer los vectores de las medias de $\{R\}$ y $\{H\}$, así como sus matrices de covariancias para obtener esta función. En efecto, el vector de funciones de seguridad media $\{\bar{Z}\}$ es (ton-cm):

$$\{Z\} = \{[A][B]\} \begin{Bmatrix} \{\bar{R}\} \\ \{\bar{H}\} \end{Bmatrix} = [C]\{\bar{X}\} = \begin{Bmatrix} 3436.28 \\ 5068.76 \\ 5068.76 \\ 6701.24 \end{Bmatrix}$$

$$\text{donde } [C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -500 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -500 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -500 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -500 \end{bmatrix}; \quad \{\bar{X}\} = \begin{Bmatrix} 2925.31 \\ 2925.31 \\ 1292.83 \\ 1292.83 \\ 2925.31 \\ 2925.31 \\ 10.00 \end{Bmatrix}$$

Por simplicidad, se consideran las resistencias medias como los valores dados por los momentos plásticos definidos en la ecuación 1.2, con coeficientes de variación $CV_R = 0.11$. La fuerza media H es igual a 10.0 toneladas, con un coeficiente de variación de $CV_H = 0.1$.

La matriz de covariancia $[S_x]$ de las resistencias y de la carga esta dada por:

$$[\rho] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[S_x] = \text{diag}(\bar{X}_1 CV_1) [\rho] \text{diag}(\bar{X}_1 CV_1)$$

donde $\text{diag}(\cdot)$ es la matriz diagonal de las desviaciones estándar de las variable X_1 , $\sigma_1 = X_1 CV_1$.

La matriz de covariancia de las funciones de seguridad esta por consiguiente dada por (ecuación (3.117b)):

$$[S_z] = [C][S_x][C]^T = \begin{bmatrix} 5.380 & 6.011 & 6.011 & 6.642 \\ 6.011 & 7.879 & 6.844 & 8.713 \\ 6.011 & 6.844 & 7.879 & 8.713 \\ 6.642 & 8.713 & 8.713 & 10.784 \end{bmatrix} \cdot 10^5$$

Los índices de confiabilidad de las ecuaciones de falla, β_1 , son calculados de la siguiente manera:

$$\beta_1 = \frac{\bar{z}}{(S_{z_1 z_1})^{1/2}} ; \quad \{\beta\} = \begin{Bmatrix} 4.685 \\ 5.710 \\ 5.710 \\ 6.451 \end{Bmatrix}$$

Así, las probabilidades marginales de falla son:

$$P_{f_1} = \Phi(-\beta) ; \quad P_f = \begin{Bmatrix} 1.4003 \times 10^{-6} \\ 5.6416 \times 10^{-9} \\ 5.6416 \times 10^{-9} \\ 5.4766 \times 10^{-11} \end{Bmatrix}$$

Aplicando el algoritmo de simulación de la sección 3.4.4 de este capítulo, se obtiene la siguiente probabilidad de falla del sistema:

$$P_f = 1.4005 (10^{-6})$$

Para este caso particular, en que existe una gran diferencia entre los valores medios de los momentos límites de los elementos verticales y el horizontal, es suficiente con considerar el primer mecanismo de falla (el más probable), para aproximar la probabilidad de falla global del sistema.

Para evitar esta diferencia entre los momentos límites de los elementos e ilustrar mejor el método, se supondrán todos los elementos del marco con las mismas características mecánicas, siendo la resistencia límite iguala a 2000.00 ton-cm.

Para este caso, el vector de medias y la matriz de covariancia de las funciones de seguridad son los siguientes:

$$\{\bar{Z}\} = \begin{Bmatrix} 3000.00 \\ 3000.00 \\ 3000.00 \\ 3000.00 \end{Bmatrix}; \quad [S_Z] = \begin{bmatrix} 5.404 & 4.920 & 4.920 & 4.436 \\ 4.920 & 5.404 & 4.920 & 5.404 \\ 4.920 & 4.920 & 5.404 & 5.404 \\ 4.436 & 5.404 & 5.404 & 6.372 \end{bmatrix} 10^5$$

Así, los índices de confiabilidad $\{\beta\}$ de las ecuaciones de falla y las probabilidades marginales de falla son:

$$\{\beta\} = \begin{Bmatrix} 4.081 \\ 4.081 \\ 4.081 \\ 3.758 \end{Bmatrix}; \quad P_f = \begin{Bmatrix} 2.2429 \\ 2.2429 \\ 2.2429 \\ 3.7582 \end{Bmatrix} 10^{-5}$$

A partir del algoritmo de simulación se obtiene la probabilidad de falla siguiente:

$$P_f = 9.8357 \times 10^{-5}$$

con un coeficiente de variación de 0.03364 para esta simulación.

Finalmente, si se hace la hipótesis de que todas las resistencias límites de las secciones de los elementos R_1 son variables independientes ($\rho=0$), se tiene:

$$\{\bar{Z}\} = \begin{Bmatrix} 3000.00 \\ 3000.00 \\ 3000.00 \\ 3000.00 \end{Bmatrix}; \quad [S_Z] = \begin{bmatrix} 4.436 & 3.952 & 3.952 & 3.468 \\ 3.952 & 4.436 & 3.468 & 3.952 \\ 3.952 & 3.468 & 4.436 & 3.952 \\ 3.468 & 3.952 & 3.952 & 4.436 \end{bmatrix} 10^5$$

$$\{\beta\} = \begin{Bmatrix} 4.504 \\ 4.504 \\ 4.504 \\ 4.504 \end{Bmatrix}; \quad P_f = \begin{Bmatrix} 3.33 \\ 3.33 \\ 3.33 \\ 3.33 \end{Bmatrix} 10^{-6}$$

Del mismo modo se obtiene la probabilidad de falla del sistema:

$$P_f = 7.7235 \times 10^{-6}$$

con un coeficiente de variación de 0.05.

En este último ejemplo (donde todos los mecanismos de falla tienen la misma probabilidad marginal), se puede observar que en la aproximación de la probabilidad de falla del sistema estructural por simulación Monte-Carlo, se toma en cuenta hasta el tercer término de la ecuación 3.114 del sistema en serie. Este tercer término es la probabilidad condicional de que el tercer mecanismo de falla ocurra, dado que los dos mecanismos precedentes no han ocurrido.

3.5 Ejemplo de ilustración de los métodos.

3.5.1 Introducción.

Con el fin de aplicar y comparar los algoritmos de cálculo de la probabilidad de falla de sistemas estructurales, propuestos en este trabajo; así como de realizar un estudio paramétrico del comportamiento aleatorio de los elementos parcialmente dañados, se propone la aplicación de los métodos de confiabilidad de Primer Orden y simulación Monte-Carlo, para el análisis de confiabilidad del mismo marco simple, analizado en el capítulo 1.

Se utiliza también la metodología de búsqueda de caminos de falla (capítulo 3) y el método de generación de funciones de estado de seguridad (capítulo 1).

3.5.2 Descripción del modelo.

La configuración geométrica y la condición de carga de la estructura están descritas en la figura 1.6 del capítulo 1.

A las hipótesis hechas para el ejemplo determinista del capítulo 1, se añaden las hipótesis siguientes:

Las resistencias de los elementos y la carga horizontal aplicada son consideradas, por simplicidad, como variables aleatorias normales; las leyes normales para estas variables están enteramente definidas por el conocimiento de los valores medios de los momentos flexionantes plásticos y de las fuerzas normales, así como por sus coeficientes de variación.

Tres dominios de resistencia para las secciones de los elementos son considerados: caso I) flexión pura, caso II) flexo compresión-tensión, caso III) flexo compresión-tensión considerando el efecto de pandeo.

Las resistencias límites medias y los coeficientes de variación, para elementos estructurales en acero se obtienen de los estudios estadísticos hechos por Galambos y Ravindra (ref.49,50).

La carga media considerada H es de 10 toneladas, con un coeficiente de variación de 0.1. Esta condición de carga hipotética se propone con el fin de ilustrar los métodos.

Las características mecánicas de los elementos están dadas en la tabla 1.1 del capítulo 1, mientras que los parámetros estadísticos de las variables de resistencia están dados en la tabla 3.1, en la cual \bar{N}_C y \bar{N}_L son respectivamente las resistencias medias a la compresión considerando pandeo y a la tensión, y CV_C y CV_L sus coeficientes de variación respectivos.

ELEMENTO	\bar{N}_C (T)	\bar{N}_L (T)	CV_C	CV_L	\bar{R} (T-ca.)	CV_R
1	377.77	442.75	0.11	0.11	2925.31	0.11
2	127.88	263.12	0.11	0.11	1292.83	0.11
3	377.77	442.75	0.11	0.11	2925.31	0.11

TABLA 3.1 PARAMETROS ESTADISTICOS DE LAS RESISTENCIAS.

3.5.3 Método de Primer Orden.

Para el análisis de confiabilidad de esta estructura, por el método de primer orden, se utiliza la metodología de búsqueda de los caminos de falla, presentada en la sección 3.3.5.

A partir de la estructura inicial intacta, nos interesa solo el estudio de cuatro ramas iniciales del árbol de falla, producidas por las cuatro fallas elementales, las más probables, de las secciones 1, 3, 4, y 6 figura 3.13.

Los índices de confiabilidad iniciales de las secciones 2 y 5, siempre son mayores que los índices de confiabilidad encontrados dentro del proceso de construcción del árbol de fallas.

Para la representación del árbol de falla del sistema, se utiliza en lugar de nudos, que representan el estado de daño de la estructura, unas figuras de estructuras deterioradas figura 3.15.

Las funciones de estado de seguridad de las estructuras dañadas a cada etapa del análisis, se obtuvieron a partir del método de generación automática, propuesto en el capítulo 1.

Los índices de confiabilidad, correspondientes respectivamente a la probabilidad de falla del estado de la estructura de la figura, y a la probabilidad de falla conjunta de la estructura deteriorada, por la

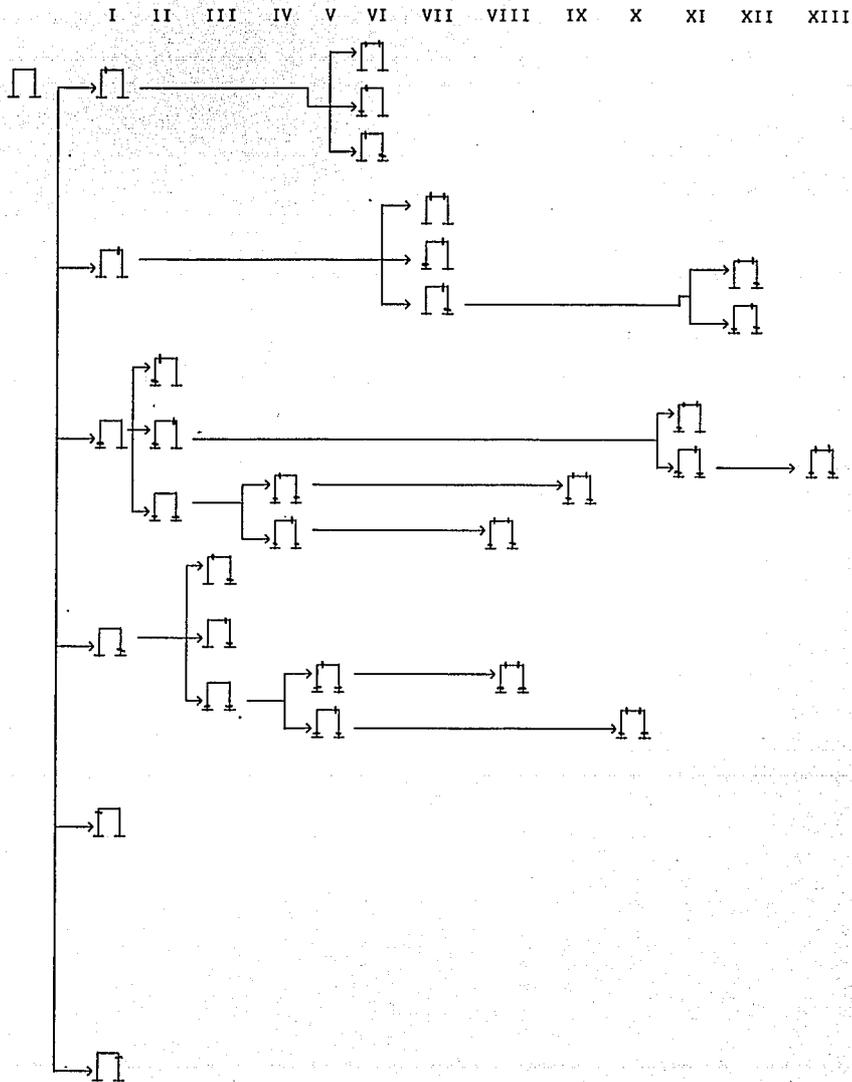


FIGURA 3.15 Secuencia del árbol de falla de la estructura.

secuencia de fallas elementales; así como los índices de confiabilidad global del sistema estructural, se obtienen con el método de primer orden y haciendo uso del programa SHASYS (Ref.44).

Cada una de las ramas del árbol de falla puede ser representada por un sistema en paralelo, donde el número de componentes puede incrementarse en cada etapa del análisis del árbol de falla, dependiendo de la probabilidad del estado de deterioro alcanzado.

La representación por cortes minimales del análisis de confiabilidad del marco se ilustra en la figura 3.16. Una presentación intermedia, en la etapa VIII se ilustra en la figura 3.16 con las partes sombreadas.

El mismo árbol de falla se utiliza para el análisis de confiabilidad de la estructura tipo marco, considerando los tres tipos de dominio de resistencia para las secciones de los elementos, suponiendo que todas las variables son normales.

La figura 3.17 muestra el árbol de falla del marco, donde las resistencias y las cargas son variables aleatorias normales y el dominio de resistencia se considera a pura flexión.

Para los casos tratados, los índices de confiabilidad global del sistema están dados en la tabla 3.2, para cada una de las etapas del árbol de falla.

Gracias a la simplicidad de esta estructura, se puede examinar a cada etapa de análisis del árbol de falla, todos los caminos de falla posibles.

CASO	V.A.	I	II	III	IV	V	VI	VII
I	NOR.	2.576	2.805	3.625	3.698	4.144	4.259	4.488
II	NOR.	2.551	2.779	3.549	3.632	3.958	4.084	4.348
III	NOR.	2.542	2.769	3.505	3.557	3.767	3.904	4.221

CASO	V.A.	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
I	NOR.	4.510	4.558	4.628	4.651	4.651	4.652
II	NOR.	4.368	4.412	4.465	4.496	4.496	4.497
III	NOR.	4.241	4.282	4.335	4.366	4.366	4.369

TABLA 3.2 Índices de confiabilidad global del sistema estructural a cada una de las etapas recorridas del árbol de fallas.

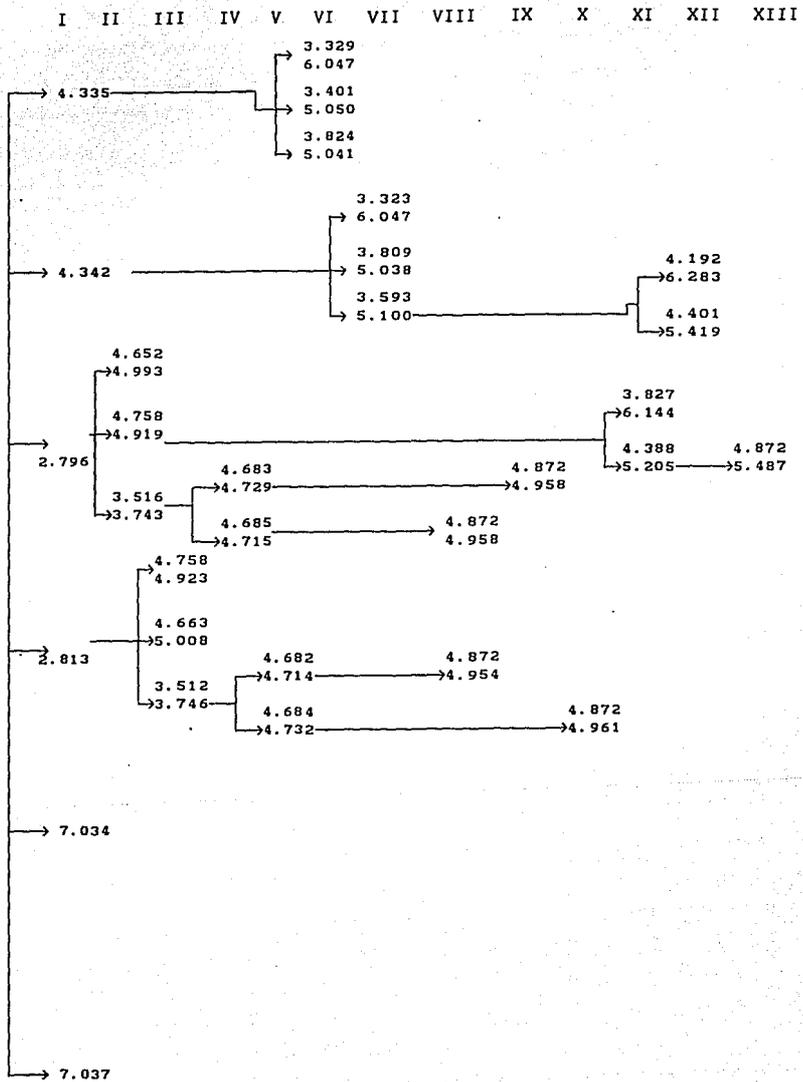
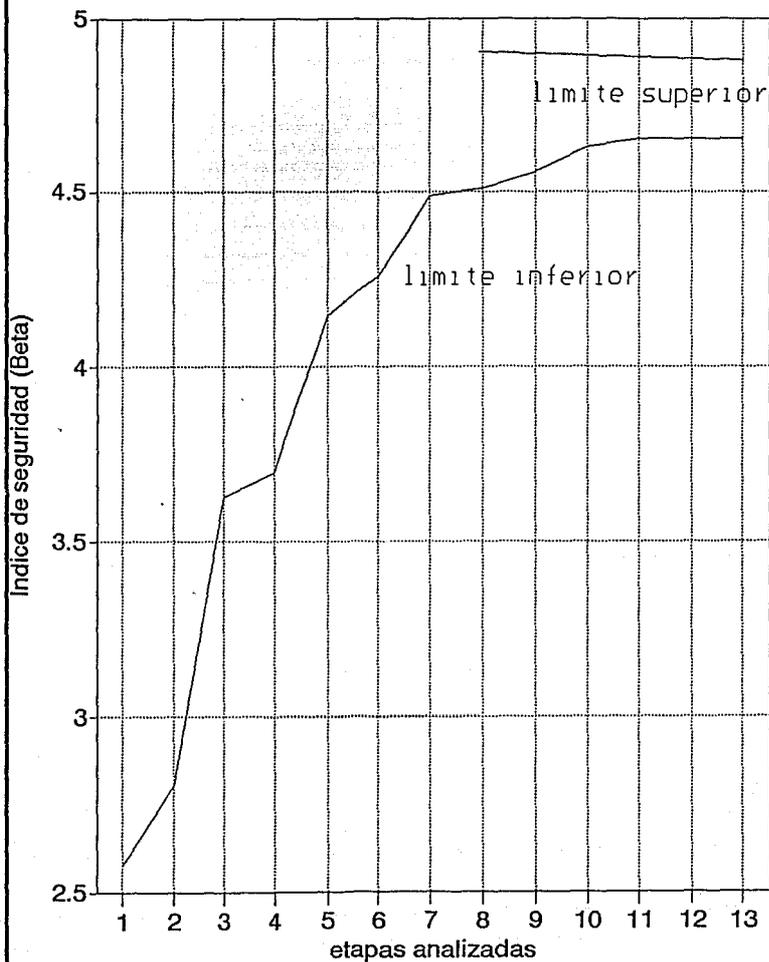


FIGURA 3.17 Arbol de falla del marco, caso 1 (v.a. normales).

Encajonamiento de la probabilidad de falla del sistema estructural



3.5.4 Método de simulación Monte-Carlo.

Para el análisis de confiabilidad del mismo marco con el método de simulación Monte-Carlo, se consideran las variables aleatorias gaussianas y se añaden las siguientes hipótesis:

Las resistencias de las secciones a todo lo largo del elemento se suponen primero completamente correlacionadas (correlación = 1).

Después, las resistencias de las secciones extremas de los elementos se suponen también variables aleatorias independientes (correlación = 0). Esto permite por un lado, analizar un mismo tipo de estructura, por otro lado, poder comparar los resultados obtenidos por los métodos de confiabilidad estudiados.

La carga es una variable aleatoria independiente de las resistencias.

Para el marco analizado, con un comportamiento dúctil (perfectamente plástico) en flexión pura, se pueden identificar fácilmente todos los mecanismos de falla posibles figura 3.14. Las fallas elementales aparecen en forma de articulaciones plásticas en los extremos de los elementos donde se encuentran los momentos flexionantes máximos.

Las funciones de estado límite plástico, a pura flexión, de esta estructura se obtienen por diferencia de los trabajos virtuales de la carga y de las resistencias. Estas expresiones están dadas en el ejemplo de la sección 3.5.

Para los otros casos analizados, donde se consideran esfuerzos combinados, se toman las mismas expresiones utilizadas en el método de primer orden, para los cuatro mecanismos de falla los más probables, y obtenidas por el método de generación automática de funciones de seguridad del capítulo 1. Se tiene entonces:

Para el caso II:

$$Z = 1.0322R_1 + 1.0197R_3 + R_4 + 1.01230R_6 - 511.09H$$

$$Z = 1.0181R_1 + R_2 + 0.9898R_4 + 1.0084R_6 - 509.05H$$

$$Z = 1.0283R_1 + 1.0098R_3 + R_5 + 1.0184R_6 - 514.16H$$

$$Z = 0.9999R_1 + 0.9760R_2 + 0.9760R_5 + R_6 - 499.99H$$

Para el caso III:

$$Z = 1.0572R_1 + 1.0411R_3 + R_4 + 1.01590R_6 - 528.59H$$

$$Z = 1.0233R_1 + R_2 + 0.9800R_4 + 1.0035R_6 - 511.66H$$

$$Z = 1.0443R_1 + 1.0204R_3 + R_5 + 1.0236R_6 - 522.13H$$

$$Z = 0.9999R_1 + 0.9695R_2 + 0.9695R_5 + R_6 - 499.99H$$

Finalmente, para calcular las probabilidades de falla del sistema estructural considerado, se utiliza el programa de confiabilidad basado en el algoritmo de simulación Monte-Carlo descrito en la sección 3.4, (Ref. 54).

En la tabla 3.3 se dan las probabilidad de falla global del marco, así como los índices de confiabilidad del sistema, para todos los casos tratados.

		$\rho = 0$	$\rho = 1$
CASO I	P_f	5.5338×10^{-7}	1.4005×10^{-6}
	β	4.871	4.685
CASO II	P_f	6.7432×10^{-7}	1.6510×10^{-6}
	β	4.8323	4.6509
CASO III	P_f	1.8051×10^{-6}	4.0380×10^{-6}
	β	4.6325	4.4631

Tabla 3.3 Probabilidades de falla global P_f del sistema estructural e índices de confiabilidad β .

3.5.5 Síntesis de resultados.

Para finalizar, en la tabla 3.4 se muestran los resultados de los análisis de confiabilidad del marco, obtenidos por los dos métodos de confiabilidad utilizados.

		METODO DE PRIMER ORDEN.	METODO DE SIMULACION MONTE-CARLO.
ESTADOS LIMITES	V.A.	NORMAL	NORMAL
FLEXION PURA.	P_f	1.644×10^{-6}	1.401×10^{-6}
	β	4.652	4.6847
FLEXO-COMPRESION.	P_f	3.448×10^{-6}	1.651×10^{-6}
	β	4.497	4.6509
FLEXO-COMPRESION C/PANDEO.	P_f	6.244×10^{-6}	4.038×10^{-6}
	β	4.369	4.4631

Tabla 3.4 Probabilidades de falla global del sistema estructural e índices de confiabilidad total.

Una primera observación es que en todos los casos, la probabilidad de falla global del sistema es suficientemente aproximada por la sola contribución del mecanismo de falla el más probable.

Para este caso particular del marco plano, se nota que las probabilidades de falla global del sistema, calculadas por los dos métodos de confiabilidad, son prácticamente iguales. Esto es sin duda una verificación general.

Se nota también una variación poco significativa, entre la probabilidad de falla del marco en flexión pura y las probabilidades de falla de las estructuras que toman en cuenta los esfuerzos combinados. Esto se debe al hecho que para este tipo de estructura, con esta configuración geométrica y bajo este tipo de carga, el momento flexionante es en general el esfuerzo predominante.

Finalmente, desde el punto de vista mecánico, la reducción del índice de confiabilidad sigue naturalmente la disminución del dominio definido por el estado límite. La reducción por efecto de pandeo no es significativa, dado que, por un lado los elementos son muy robustos, por otro lado, la fuerza axial en este tipo de estructuras no es significativa.

3.6 Conclusión.

En teoría, el estudio de confiabilidad de sistemas estructurales puede ser tratado de la manera siguiente:

- identificación de todos los posibles mecanismos de falla del sistema estructural,

- búsqueda de la ecuación de falla de cada mecanismo, en función de las resistencias de los elementos que intervienen en ese mecanismo, y de las cargas que lo provocan.

- obtención de la probabilidad de falla global del sistema y de su índice de confiabilidad.

La dificultad práctica que implica este procedimiento esta clara: el número de mecanismos de falla posibles puede ser elevado, aún para estructuras relativamente poco compleja, la densidad de probabilidades conjunta de las variables aleatorias involucradas no se puede obtener sin que se introduzcan hipótesis muy restrictivas, y aún conociendo esta distribución, el cálculo de la probabilidad de falla es tarea difícil.

En la práctica, se puede resolver el problema como sigue: el cálculo de las funciones de seguridad se puede facilitar grandemente cuando se utiliza el método de generación automática de funciones de seguridad, propuesto por Murotsu (Ref.8), que se trata dentro del capítulo 1; por otra lado, la probabilidad de falla global del sistema estructural puede aproximarse con los métodos de primer y segundo orden, así como con el método de simulación Monte-Carlo, propuestos en este capítulo.

4.- ANALISIS DE CONFIABILIDAD DE UN MARCO DE ACERO DE 10 NIVELES.

4.1 Introducción.

El propósito de este ejemplo es aplicar los métodos formulados en los capítulos precedentes para determinar la probabilidad de falla e índice de confiabilidad β de una marco de acero de varios niveles bajo la excitación de fuerzas sísmicas.

Dado que no se cuenta con un modelo simple de distribución aleatoria de fuerzas sísmicas, estas fuerzas son consideradas primero como variables deterministas; después, por simplicidad y con el fin de tomar en cuenta la incertidumbre involucrada en este tipo de variables fuerza, se suponen distribuciones gaussianas para estas variables.

Debido a la dificultad para obtener información sobre algún edificio de acero real de la Ciudad de México, se propone el marco de acero de 10 niveles, estudiado por Villaverde en la referencia 56.

Esta estructura de acero se considera un marco rígido empotrado en su base, con un comportamiento elasto-plástico, las fuerzas a la que esta sujeta se obtienen a través de un análisis modal espectral, utilizando el programa "anadin", cuyas características se describen en el apéndice B; las fuerzas son aplicadas en los nudos y se consideran como fuerzas estáticas equivalentes.

En este tipo de estructuras el elemento mecánico dominante es por lo regular el momento flexionante, sin embargo se toma en cuenta la interacción entre el momento flexionante y la fuerzas axial (tensión y compresión) en el dominio de la resistencia de los elementos, asegurando así una mejor aproximación al comportamiento real del sistema estructural.

Para los elementos y el sistema estructural se consideran dos dominios de resistencia: a pura flexión y a flexocompresión considerando el efecto de pandeo. A partir de estas hipótesis se obtienen las funciones de estados límite de seguridad, utilizando el método de generación automática de estas funciones, descrito en el capítulo 1. El análisis al límite, paso a paso, se lleva a cabo con el programa "tópicos" descrito en el apéndice A.

Los parámetros estadísticos de las leyes de probabilidades asignadas a las variables de resistencia de los elementos de la estructura son tomados de los reportes estadísticos hechos por Galambos y Ravindra (Ref.50).

Las funciones de estado límite de falla plástica, para un dominio de resistencia a flexión pura, se pueden también fácilmente obtener por métodos energéticos o a través de la diferencia de los trabajos virtuales generados por las fuerzas externas y las resistencias.

En general, es recomendable en los análisis de confiabilidad, involucrar algunos modos de falla identificados por pura inspección, ya que dependiendo de la hiperestaticidad de la estructura analizada, es difícil identificar todos los posibles mecanismos críticos de falla, con los

modelos y programas propuestos, así como con los modelos y programas existentes en la literatura.

4.2 Descripción del modelo.

La geometría del marco se muestra en la figura 4.1, en la tabla 4.1 se identifican las secciones y las masas por nivel, donde m es la masa del nivel i , en la tabla 4.2 se presentan las características geométricas y mecánicas de los elementos, donde L es la longitud del elemento, A área de la sección transversal, I momento de inercia de la sección, M_p la resistencia de la sección al momento flexionante plástico.

NIVEL	COLUMNAS	VIGAS	MASAS
	SECCION	SECCION	$\frac{\text{Ton-Seg}^2}{\text{cm.}}$
10	14W61	18W50	0.0286
9	14W61	21W62	0.0358
8	14W78	21W62	0.0358
7	14W78	24W68	0.0358
6	14W111	24W68	0.0358
5	14W111	27W84	0.0358
4	14W111	27W84	0.0358
3	14W136	27W94	0.0358
2	14W136	27W94	0.0358
1	14W158	27W94	0.0358

Tabla 4.1 Masas y secciones por nivel.

Las variables aleatorias de resistencia se consideran gaussianas. Los parámetros estadísticos de estas distribuciones se obtienen a través de los estudios realizados por Galambos y Ravindra (Ref.49,50).

Los parámetros estadísticos de las distribuciones de resistencia a fuerza axial son ilustrados en la tabla 4.3, donde r es el radio de giro de la sección, λ_0 un coeficiente de longitud reducida, $g(\lambda_0)$ es un factor de reducción, N_T la resistencia media a la tensión, N_c la resistencia media a la compresión.

Los valores medios de las resistencias a flexión están dados por las resistencias plásticas límites obtenidas a través de las resistencias nominales, con un coeficiente de variación de 0.11, de acuerdo al mismo estudio estadístico de la ref. 49.

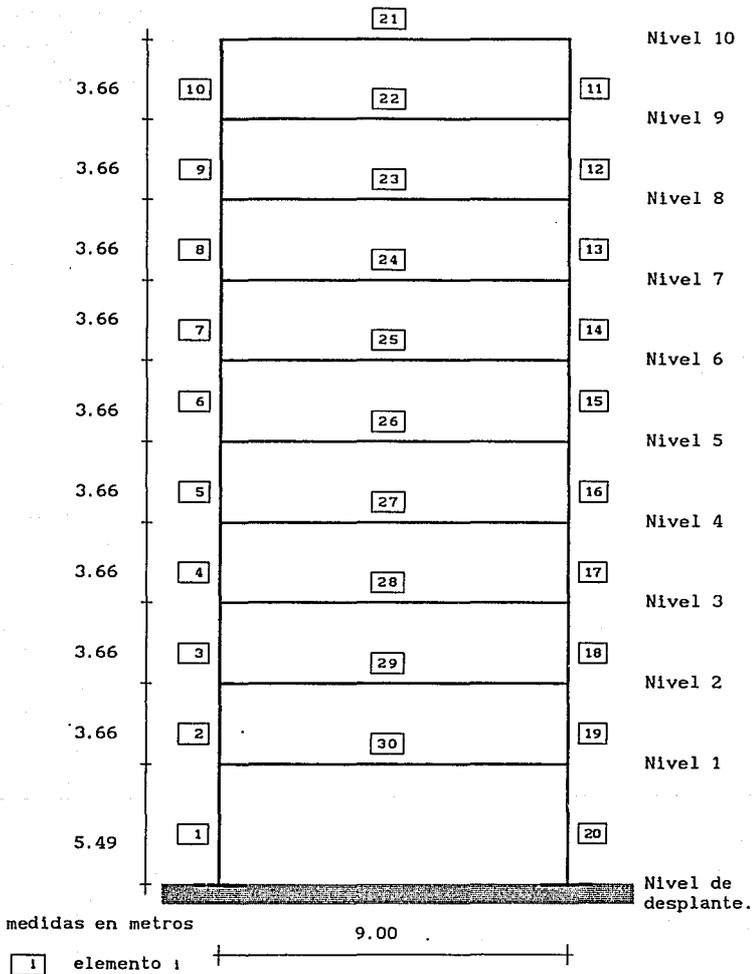


Figura 4.1 Estructura de acero tipo marco.

ELEMENTO	L (m)	A (cm ²)	I ₄ (cm ⁴)	Mp (T-cm)
1	5.49	300.10	79084.00	11898.59
2	3.66	258.10	66180.80	10241.44
3	3.66	258.10	66180.80	10241.44
4	3.66	210.97	52861.39	7959.38
5	3.66	210.97	52861.39	7959.38
6	3.66	210.97	52861.39	7959.38
7	3.66	147.74	35421.30	5495.16
8	3.66	147.74	35421.30	5495.16
9	3.66	115.50	26680.40	4227.63
10	3.66	115.50	26680.40	4227.63
11	3.66	115.50	26680.40	4227.63
12	3.66	115.50	26680.40	4227.63
13	3.66	147.74	35421.30	5495.16
14	3.66	147.74	35421.30	5495.16
15	3.66	210.97	52861.39	7959.38
16	3.66	210.97	52861.39	7959.38
17	3.66	210.97	52861.39	7959.38
18	3.66	258.10	66180.80	10241.44
19	3.66	258.10	66180.80	10241.44
20	5.49	300.10	79084.00	11898.59
21	9.00	94.84	33381.76	4187.15
22	9.00	118.06	54942.55	5970.80
23	9.00	118.06	54942.55	5970.80
24	9.00	129.03	75754.12	7337.00
25	9.00	129.03	75754.12	7337.00
26	9.00	160.00	117793.50	10114.94
27	9.00	160.00	117793.50	10114.94
28	9.00	178.71	136107.70	11526.68
29	9.00	178.71	136107.70	11526.68
30	9.00	178.71	136107.70	11526.68

TABLA 4.2 Características geométricas y mecánicas de los elementos.

ELEMENTO	r (cm)	λ_0	$g(\lambda_0)$	A_{ck} (cm ²)	Nr (Ton)	Nc (Ton)
1	16.23	0.374	0.965	289.60	759.00	732.68
2	16.01	0.253	0.984	253.97	653.00	642.55
3	16.01	0.253	0.984	253.97	653.00	642.55
4	15.03	0.255	0.984	207.59	533.75	525.21
5	15.03	0.255	0.984	207.59	533.75	525.21
6	15.03	0.255	0.984	207.59	533.75	525.21
7	15.48	0.261	0.983	145.23	373.78	367.43
8	15.48	0.261	0.983	145.23	373.78	367.43
9	15.20	0.266	0.982	113.42	292.47	286.96
10	15.20	0.266	0.982	113.42	292.47	286.96
11	15.20	0.266	0.982	113.42	292.47	286.96
12	15.20	0.266	0.982	113.42	292.47	286.96
13	15.48	0.261	0.983	145.23	373.78	367.43
14	15.48	0.261	0.983	145.23	373.78	367.43
15	15.03	0.255	0.984	207.59	533.75	525.21
16	15.03	0.255	0.984	207.59	533.75	525.21
17	15.03	0.255	0.984	207.59	533.75	525.21
18	16.01	0.253	0.984	253.97	653.00	642.55
19	16.01	0.253	0.984	253.97	653.00	612.55
20	16.23	0.374	0.965	289.60	759.00	732.68
21	18.76	0.530	0.930	88.20	239.95	223.15
22	21.57	0.461	0.947	111.80	298.69	282.86
23	21.57	0.461	0.947	111.80	298.69	282.86
24	24.23	0.410	0.958	123.61	326.45	312.74
25	24.23	0.410	0.958	123.61	326.45	312.74
26	27.13	0.367	0.966	154.56	404.80	391.04
27	27.13	0.367	0.966	154.56	404.80	391.04
28	27.60	0.360	0.968	173.00	452.14	437.67
29	27.60	0.360	0.968	173.00	452.14	437.67
30	27.60	0.360	0.968	173.00	452.14	437.67

TABLA

4.3 Parámetros de las resistencias.

4.3 Obtención de fuerzas sísmicas.

La estructura es considerada tipo B y ubicada en la zona III del Distrito Federal. Las fuerzas se obtienen aplicando un análisis modal espectral, haciendo uso del programa "anadin", donde los parámetros de entrada se detallan en el apéndice B; los datos necesarios para definir el espectro de diseño se obtienen de la referencia 18. Las fuerzas máximas por nivel son:

PISO	FUERZAS MAXIMAS POR NIVEL	CORTANTES MAXIMOS POR NIVEL
1	FMAXP(1)= .13114E+01	VMAXP(1)= .28540E+02
2	FMAXP(2)= .19117E+01	VMAXP(2)= .27718E+02
3	FMAXP(3)= .23447E+01	VMAXP(3)= .26376E+02
4	FMAXP(4)= .27473E+01	VMAXP(4)= .24603E+02
5	FMAXP(5)= .31139E+01	VMAXP(5)= .22392E+02
6	FMAXP(6)= .34903E+01	VMAXP(6)= .19781E+02
7	FMAXP(7)= .39252E+01	VMAXP(7)= .16733E+02
8	FMAXP(8)= .43773E+01	VMAXP(8)= .13144E+02
9	FMAXP(9)= .48715E+01	VMAXP(9)= .89945E+01
10	FMAXP(10)= .42012E+01	VMAXP(10)= .42012E+01

En la figura 4.2 se muestra gráficamente esta distribución de carga.

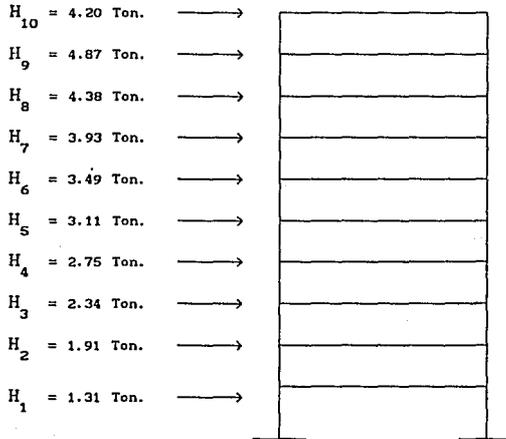


Figura 4.2 Fuerzas máximas más probables por nivel.

4.4 Mecanismos de Falla o de Colapso.

El mecanismo de falla plástico o de colapso esta dado por la aparición de una serie de articulaciones plásticas en los extremos de los elementos. Para que se produzca este mecanismo de colapso se deben formar tantas articulaciones como sean necesarias para que la estructura analizada se vuelva inestable.

Existen diversos procedimientos para calcular estos mecanismos críticos de colapso, entre los que podemos mencionar: el método de incremento de carga, el método de los mecanismos (Ref.55), el método energético o de diferencia de trabajos virtuales (Ref.55), y el método de carga constante (capítulo 1). Sin embargo en todos los métodos aplicables es difícil y laborioso detectar a priori cuales son los mecanismos críticos de colapso de estructuras reales de gran hiperestaticidad.

Como un primer intento para encontrar el mecanismo crítico se aplica el método de incremento de carga, considerando un dominio de resistencia a pura flexión.

Este método consiste en ir incrementando la envolvente de cargas (en esta estructura las cargas consideradas son únicamente laterales), hasta encontrar la primera plastificación o articulación plástica, la cual se detecta comparando la resistencia límite a flexión de cada sección (momento plástico) con los elementos mecánicos que se obtienen del análisis de esfuerzos, obtenidos a través de un análisis lineal por el método de las rigideces; por tanto el elemento a plastificarse en un extremo es aquel en que el momento actuante sea igual al momento resistente.

Para el cálculo de la segunda plastificación se modifica la matriz de rigidez del elemento plastificado y se considera un vector de cargas equivalentes nodales en ese elemento, como se muestra en la figura 1.1 del capítulo 1. Se vuelve hacer un pequeño incremento de carga y se lleva a cabo un análisis lineal de esfuerzos, comparando la resistencia límite de cada elemento con el momento actuante, por lo que la siguiente plastificación será aquella sección extrema de elemento que este más cerca de su resistencia límite, de acuerdo a la definición del dominio de resistencia de estado límite plástico. Con el fin de verificar la selección hecha, se ejecuta un análisis adicional con el incremento de carga necesario para plastificar la sección identificada.

Los análisis se hacen hasta encontrar tantas secciones plastificadas como sean necesarias para encontrar el mecanismo crítico de colapso.

En la figura 4.3 se ilustra el mecanismo crítico de colapso encontrado por incremento de carga, considerando un dominio de resistencia a flexión pura. En la figura 4.4 se ilustra la gráfica de la historia de carga deformación para este mecanismo.

El incremento de carga, obtenido a través de este método y que nos conduce al mecanismo de colapso, es de $2.2379(H_1)$, donde H_1 corresponde al valor de la carga lateral en cada entrepiso.

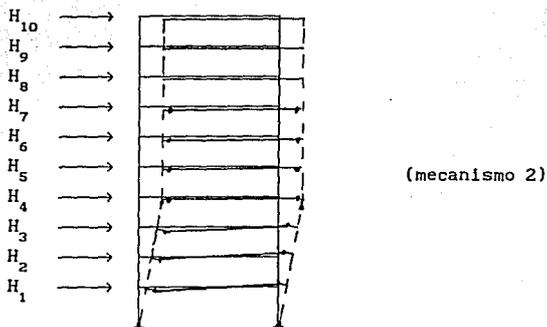


Figura 4.3 Mecanismo crítico de colapso, dominio de resistencia a pura flexión.

Con el fin de verificar los resultados obtenidos, para este mecanismo crítico de colapso detectado, se aplica la diferencia de los trabajos virtuales de las fuerzas internas resistentes y de las fuerzas externas que produce el colapso, obteniendo la misma función de estado límite y la misma carga crítica de colapso.

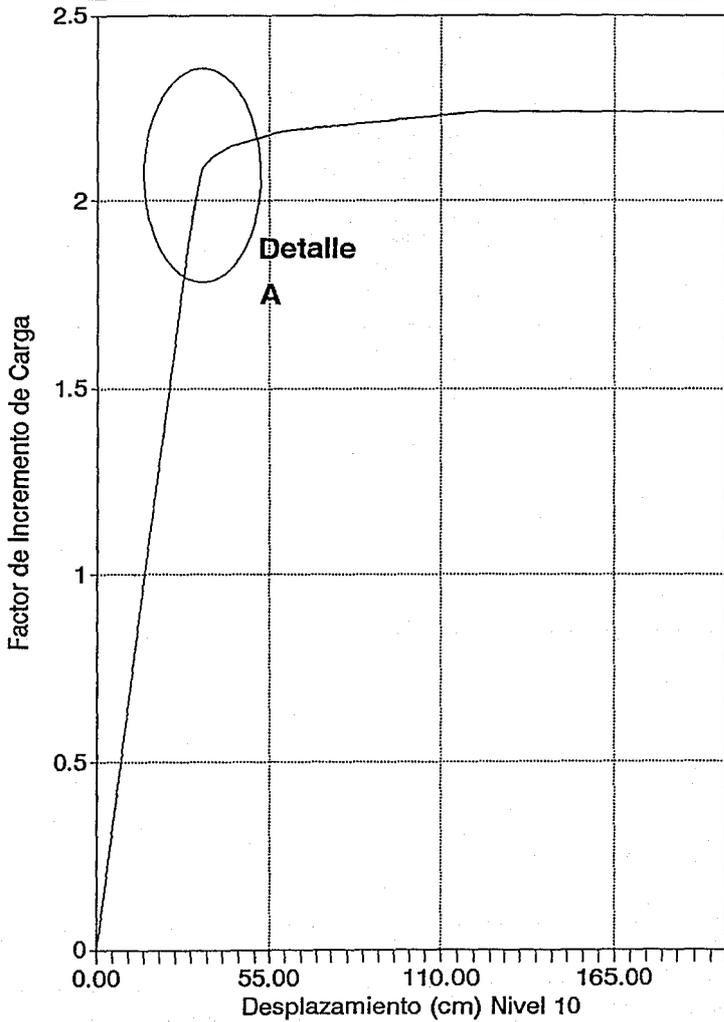
Considerando un dominio de resistencia de interacción entre el momento flexionante y la fuerza axial e incluyendo el efecto de pandeo (figura 1.5), se encuentra un mecanismo crítico diferente al mecanismo crítico de flexión, esto es debido principalmente a la contribución de la carga axial a compresión en las columnas que se había despreciado en el primer caso. Para la obtención de este mecanismo, se hace uso de los métodos de incremento de carga y de carga constante, así como la diferencia de los trabajos virtuales para validar los resultados de los dos primeros métodos. En la figura 4.5 se muestra dicho mecanismo crítico de colapso.

Los métodos de incremento de carga y carga constante son laboriosos, sin embargo nos permiten ir identificando la secuencia de aparición de las articulaciones plásticas, y por consiguiente detectar algunos estados límites parciales de interés, como por ejemplo detectar el estado límite de servicio, que lo podemos referir a los desplazamiento laterales que debe de cumplir la estructura, de acuerdo al Reglamento de Construcciones del D.F. (Ref.17). para este tipo de configuración los desplazamientos relativos de entrepiso deben ser igual o menor de 0.006:

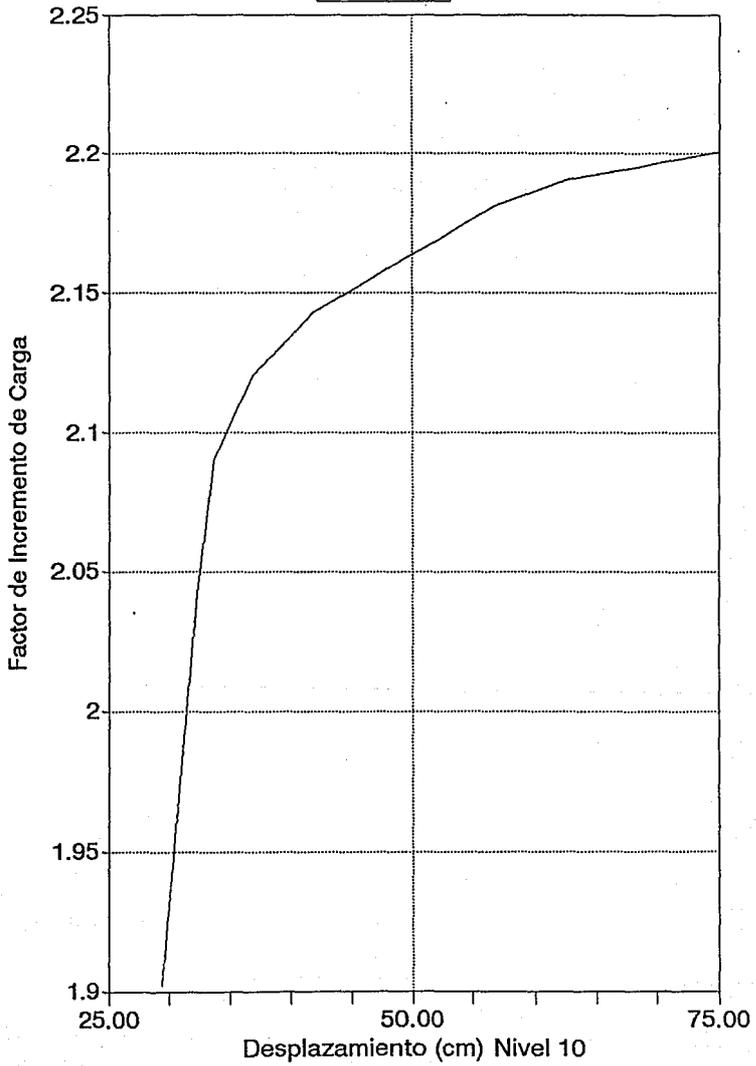
$$\Delta H = \frac{\delta_1 - \delta_j}{H_1} \leq 0.006$$

donde ΔH es el desplazamiento relativo, δ_1 desplazamiento del nivel 1, δ_j

INCREMENTO DE CARGA-DEFORMACION
FIGURA 4.4



Detalle A



desplazamiento del nivel j inmediatamente inferior.

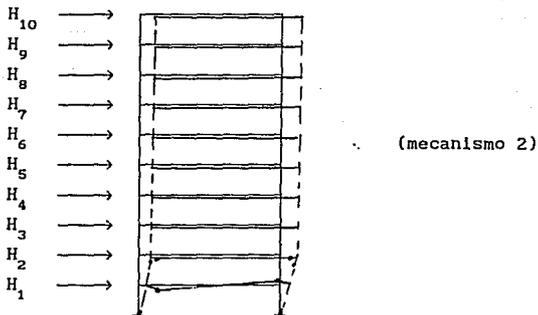


Figura 4.5 Mecanismo crítico de colapso, dominio de resistencia, de interacción entre el momento de flexión y carga axial, considerando el efecto de pandeo.

El comportamiento lineal de la estructura bajo las fuerzas de diseño cumple con esta condición de servicio, sin embargo, basta con la plastificación de la primera sección para que en algunos entresijos de la estructura no se cumpla con la condición de servicio, tanto para el dominio de resistencia a pura flexión como para el dominio de resistencia que considera la interacción de la fuerza axial y el momento.

En esta etapa de daño o degradación de la estructura, se pueden obtener las funciones correspondientes al estado límite parcial de servicio, así como calcular la probabilidad de falla por servicio del sistema estructural o su índice de confiabilidad β , correspondiente.

En los análisis de confiabilidad de los sistemas estructurales, se recomienda incluir algunos mecanismos identificados por inspección, con el fin de tomar en cuenta aquellos mecanismos que por limitaciones de los algoritmos utilizados no pueden ser identificados. Estos mecanismos de colapso identificados por inspección se ilustran en la figura 4.6.

4.5 Funciones de Seguridad de Estado Límite.

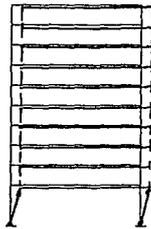
Las funciones de los estado límite de seguridad del sistema estructural se obtienen de acuerdo a lo estipulado en el capítulo 1, utilizando la metodología de generación automática de funciones de estado límite.

La metodología para la obtención de estas funciones de estado límite es un procedimiento paso a paso que nos permite obtener funciones de estados parciales, así como funciones de estado límite totales. Este procedimiento se lleva a cabo con el programa "topicos", donde la manera de

introducir los datos es tratado en el apéndice B, y un archivo de datos esta dado para facilitar su comprensión.



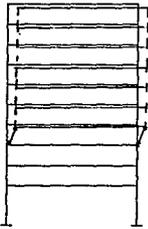
mecanismo 3



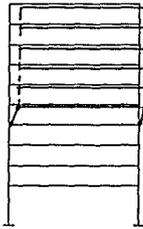
mecanismo 4



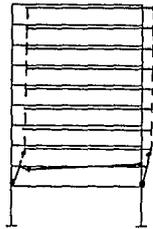
mecanismo 5



mecanismo 6



mecanismo 7



mecanismo 8

Figura 4.6 Mecanismos de Colapso (Localizados por inspección)

Se consideran dos dominios de resistencia: a pura flexión y considerando interacción de la flexión y carga axial, e incluyendo el efecto de pandeo (figura 1.5).

Para el caso en que el dominio de resistencia es a pura flexión, las funciones de estado límite son fáciles de obtenerse una vez identificados los mecanismos, aplicando la diferencia de los trabajos virtuales.

A continuación se dan las funciones de seguridad para los estados parciales y las funciones de seguridad para el estado límite del mecanismo crítico de colapso (mecanismo 1), para cuando se considera un dominio de resistencia a pura flexión. También se dan las funciones de seguridad para los estados límites de los demás mecanismos de falla:

MECANISMO 1 (figura 4.3).

$$Z_{30i} = MP30_i - 6157.48 \geq 0$$

$$Z_{30j} = MP30_j + 0.037MP30_i - 6382.02 \geq 0$$

$$Z_{29i} = MP29_i + 0.194MP30_i + 0.248MP30_j - 8264.09 \geq 0$$

$$Z_{29j} = MP29_j + 0.274MP30_i + 0.227MP30_j + 0.132MP29_i - 9358.64 \geq 0$$

$$Z_{11} = MP1_i + 0.194MP30_i + 0.439MP30_j + 0.199MP29_i + 0.143MP29_j - 11257.5 \geq 0$$

$$Z_{20j} = MP20_j + 0.59MP30_i + 0.55MP30_j + 0.304MP29_i + 0.32MP29_j + 0.81MP1_i - 20365.1 \geq 0$$

$$Z_{28i} = MP28_i + 0.45MP30_i + 0.43MP30_j + 0.41MP29_i + 0.47MP29_j + 0.44MP1_i - 20267.1 \geq 0$$

$$Z_{28j} = MP28_j + 0.60MP30_i + 0.61MP30_j + 0.62MP29_i + 0.58MP29_j + 0.60MP1_i - 27721.3 \geq 0$$

$$Z_{4j} = MP4_j + 0.50MP30_i + 0.50MP30_j + 0.51MP29_i + 0.49MP29_j + 0.50MP1_i - 24720.9 \geq 0$$

$$Z_{17i} = MP17_i + MP30_i + MP30_j + MP29_i + MP29_j + MP1_i + MP20_j + MP28_i + MP28_j + MP4_j - 49194.0 \geq 0$$

cuando las cargas son consideradas como variables aleatorias, la función Z^{10} que corresponde a la función de seguridad del estado límite final es expresada también de la siguiente forma:

$$Z_{17i} = MP17_1 + MP30_1 + MP30_j + MP29_1 + MP29_j + MP1_1 + MP20_j + MP28_1 + MP28_j + MP4_j - 549H_1 - 915H_2 - 1281H_3 - 1647(H_4 + H_5 + H_6 + H_7 + H_8 + H_9 + H_{10}) \geq 0$$

donde MP30 representa la variable aleatoria del momento plástico de la sección del elemento 30, este número corresponde al número del elemento donde se encuentra la sección plastificada, de acuerdo a la numeración de los elementos de la figura 4.1 e i (o j) plastificación en el extremo derecho (izquierdo) del elemento.

Para las funciones de estado límite parcial las cargas son presentadas únicamente como variables deterministas, sin embargo, para las funciones de seguridad de los estados límite finales, se presentan los dos casos, cuando las cargas son consideradas como variables deterministas y como variables aleatorias.

Para el caso donde se consideran las fuerzas como variables deterministas, se multiplica el coeficiente de la carga por el valor correspondiente de la carga horizontal H_1 , agrupando todos los valores en un solo término; por tanto la función de estado límite queda como la suma de las variables de los momentos plásticos afectados por su coeficiente de participación menos un valor determinista producto de la carga:

$$Z_i = \sum a_i M_{p_i} - C$$

donde a_i es el coeficiente de participación, M_{p_i} la variable aleatoria caracterizando el momento plástico de la sección i y C es el valor que agrupa el producto de los coeficientes de participación por el valor de la carga horizontal i correspondiente (para el caso en que las variables de carga son deterministas).

En la figura 4.3, donde se representa este mecanismo crítico de colapso, se necesitan formar articulaciones plásticas en los extremos de las trabes 27,26,25 y 24, de la estructura, según la figura 4.1, para que se forme este mecanismo de colapso; sin embargo estas articulaciones plásticas no participan en la función de estado límite de seguridad, por lo que se tienen unas articulaciones plásticas redundantes.

De la misma manera se dan las expresiones de los otros mecanismos de falla como sigue :

MECANISMO 2 (figura 4.5)

$$Z_{191}^6 = MP19_j + MP20_j + MP1_i + MP30_i + MP30_j + MP2_j - 29065.89 \geq 0$$

$$Z_{191}^6 = MP19_j + MP20_j + MP1_i + MP30_i + MP30_j + MP2_j - 549H_1 - 915(H_2 + H_3 + H_4 + H_5 + H_6 + H_7 + H_8 + H_9 + H_{10}) \geq 0$$

MECANISMO 3 (figura 4.6)

$$Z_{20j}^4 = MP20_j + MP1_i + MP1_j + MP20_i - 17727.21 \geq 0$$

$$Z_{20j}^4 = MP20_j + MP1_i + MP1_j + MP20_i - 549(H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + H_5 + H_6 + H_7 + H_8 + H_9 + H_{10}) \geq 0$$

MECANISMO 4 (figura 4.6)

$$Z_{19j}^4 = MP19_j + MP2_i + MP2_j + MP19_i - 11338.65 \geq 0$$

$$Z_{19j}^4 = MP19_j + MP2_i + MP2_j + MP19_i - 366(H_2 + H_3 + H_4 + H_5 + H_6 + H_7 + H_8 + H_9 + H_{10}) \geq 0$$

MECANISMO 5 (figura 4.6)

$$Z_{17j}^4 = MP17_j + MP4_i + MP4_j + MP17_i - 9783.15 \geq 0$$

$$Z_{19j}^4 = MP17_j + MP4_i + MP4_j + MP17_i - 366(H_4 + H_5 + H_6 + H_7 + H_8 + H_9 + H_{10}) \geq 0$$

MECANISMO 6 (figura 4.6)

$$Z_{16j}^4 = MP16_j + MP5_i + MP5_j + MP16_i - 8776.66 \geq 0$$

$$Z_{16j}^4 = MP16_j + MP5_i + MP5_j + MP16_i - 366(H_5 + H_6 + H_7 + H_8 + H_9 + H_{10}) \geq 0$$

MECANISMO 7 (figura 4.6)

$$Z_{19j}^6 = MP19_j + MP30_1 + MP30_j + MP20_j + MP1_1 + MP2_1 - 17727.21 \geq 0$$

$$Z_{19j}^6 = MP19_j + MP30_1 + MP30_j + MP20_j + MP1_1 + MP2_1 - 549(H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + H_5 + H_6 + H_7 + H_8 + H_9 + H_{10}) \geq 0$$

MECANISMO 8 (figura 4.6)

$$Z_{18i}^6 = MP18_1 + MP29_1 + MP29_j + MP2_1 + MP19_j + MP3_j - 21978.30 \geq 0$$

$$Z_{18i}^6 = MP18_1 + MP29_1 + MP29_j + MP2_1 + MP19_j + MP3_j - 366H_2 - 732(H_3 + H_4 + H_5 + H_6 + H_7 + H_8 + H_9 + H_{10}) \geq 0$$

Cuando se considera un dominio de resistencia con interacción del momento flexionante y la fuerza axial, incluyendo el efecto de pandeo, se obtiene el mecanismo crítico de colapso (mecanismo 2) mostrado en la figura 4.5, con una función de estado límite de seguridad igual a:

MECANISMO 2 (figura 4.5)

$$Z_{19i}^6 = MP19_1 + 0.862MP20_j + 1.005MP1_1 + 0.882MP30_1 + 0.913MP30_j + 0.804MP2_j - 30470.60 \geq 0$$

$$Z_{19i}^6 = MP19_1 + 0.862MP20_j + 1.005MP1_1 + 0.882MP30_1 + 0.913MP30_j + 0.804MP2_j - 535.74H_1 - 856.53H_2 - 875.38H_3 - 897.31H_4 - 920.73H_5 - 944.38H_6 - 968.05H_7 - 991.73H_8 - 1015.41H_9 - 1039.09H_{10}$$

Para los demás mecanismos de colapso tenemos las siguientes funciones de seguridad de estado límite:

MECANISMO 1 (figura 4.3)

$$Z_{171}^{10} = MP17_i + 0.912MP30_i + 0.878MP30_j + 0.912MP29_i + 0.907MP29_j + 0.985MP1_i + 0.874MP20_j + 0.872MP28_i + 0.925MP28_j + 0.817MP4_j - 47973.0 \geq 0$$

$$Z_{171}^{10} = MP17_i + 0.912MP30_i + 0.878MP30_j + 0.912MP29_i + 0.907MP29_j + 0.985MP1_i + 0.874MP20_j + 0.872MP28_i + 0.925MP28_j + 0.817MP4_j - 533.75H_1 - 876.61H_2 - 1218.68H_3 - 1538.71H_4 - 1553.37H_5 - 1569.99H_6 - 1588.8H_7 - 1610.25H_8 - 1633.07H_9 - 1656.17H_{10} \geq 0$$

MECANISMO 3 (figura 4.6)

$$Z_{20j}^4 = MP20_j + 0.99MP1_i + 0.931MP1_j + 0.93MP20_i - 22126.40 \geq 0$$

$$Z_{20j}^4 = MP20_j + 0.99MP1_i + 0.931MP1_j + 0.93MP20_i - 548.91H_1 - 573.96H_2 - 599.012H_3 - 624.06H_4 - 649.11H_5 - 674.16H_6 - 699.21_7 - 724.26H_8 - 749.31H_9 - 774.37H_{10} \geq 0$$

MECANISMO 4 (figura 4.6)

$$Z_{19j}^4 = MP19_j + 0.99MP2_i + 0.93MP2_j + 0.932MP19_i - 14935.0 \geq 0$$

$$Z_{19j}^4 = MP19_j + 0.99MP2_i + 0.93MP2_j + 0.932MP19_i - 365.99H_2 - 390.84H_3 - 415.69H_4 - 440.63H_5 - 465.38H_6 - 490.23H_7 - 515.07H_8 - 539.92H_9 - 564.77H_{10}$$

MECANISMO 5 (figura 4.6)

$$Z_{17j}^4 = MP17_j + 0.99MP4_1 + 0.968MP4_j + 0.968MP17_1 - 10823.67 \geq 0$$

$$Z_{17j}^4 = MP17_j + 0.99MP4_1 + 0.968MP4_j + 0.968MP17_1 - 365.96H_4 - 377.67H_5 \\ - 389.98H_6 - 401.09H_7 - 412.80H_8 - 424.52H_9 - 436.23H_{10}$$

MECANISMO 6 (figura 4.6)

$$Z_{16j}^4 = MP16_j + 0.99MP5_1 + 0.968MP5_j + 0.968MP16_1 - 9537.69 \geq 0$$

$$Z_{16j}^4 = MP16_j + 0.99MP5_1 + 0.968MP5_j + 0.968MP16_1 - 365.99H_5 - 377.70H_6 \\ - 389.93H_7 - 401.10H_8 - 412.86H_9 - 424.57H_{10}$$

MECANISMO 7 (figura 4.6)

$$Z_{19j}^6 = MP19_j + 1.223MP30_1 + 1.127MP30_j + 1.165MP20_j + 1.283MP1_1 \\ + 1.31MP2_1 - 27007.40 \geq 0$$

$$Z_{19j}^6 = MP19_j + 1.223MP30_1 + 1.127MP30_j + 1.165MP20_j + 1.283MP1_1 \\ + 1.31MP2_1 - 702.56H_1 - 699.57H_2 - 729.20H_3 - 760.04H_4 - 790.68H_5 \\ - 821.38H_6 - 852.06H_7 - 882.75H_8 - 913.44H_9 - 944.13H_{10}$$

4.6 Obtención de índices de confiabilidad (β) y probabilidades de falla global del sistema estructural.

4.6.1 Método de Primer Orden.

Para el análisis de confiabilidad de esta estructura, por el método de primer orden, se aplica la metodología de búsqueda de los caminos de falla, presentada en la sección 3.3.5.

A partir de la estructura inicial intacta, nos interesa el estudio de algunas ramas iniciales, las más probables del árbol de fallas. En

particular nos interesa el estudio de la rama en la cual se encuentra el mecanismo crítico de colapso o el más probable y las ramas en las cuales están los mecanismos detectados por inspección.

Las funciones de estado límite de seguridad de las estructuras dañadas en cada etapa del análisis, se obtienen a partir del método de generación automática de funciones, propuesto en el capítulo 1. Estas funciones de los estados límites de seguridad se ilustran en la sección 4.5 de este capítulo para los dos dominios de resistencia considerados (Flexión y Flexo-compresión-tensión, tomando en cuenta el efecto de pandeo).

El índice de Confiabilidad global y la probabilidad de falla total del sistema estructural se calculan con el método de primer orden, haciendo uso del programa SHASYS (Ref.44).

Las cargas son consideradas en un primer plano como variables deterministas, después se consideran como variables aleatorias donde la media de las cargas corresponden al valor obtenido de acuerdo a la sección 4.3, con unos coeficientes de variación de las cargas que varían en un rango de 0.10 a 0.25.

4.6.2 Método de simulación Monte-Carlo.

Para el análisis de confiabilidad de la misma estructura, con el método de simulación Monte-Carlo, se consideran las variables aleatorias gaussianas y se añaden las siguientes hipótesis:

Las resistencias de las secciones a todo lo largo de un mismo elemento se suponen primero completamente correlacionadas (correlación = 1).

Después, las resistencias de las secciones extremas de los elementos se suponen también variables aleatorias independientes (correlación = 0).

Esto nos permite por un lado, analizar un mismo tipo de estructura, por otro lado, poder comparar los resultados obtenidos por los métodos de confiabilidad estudiados.

Las cargas se consideran unas variables independientes de las resistencias.

En un primer estudio las cargas son consideradas como variables deterministas, después se consideran variables aleatorias gaussianas, con un rango en el coeficiente de variación igual al caso anterior, sección 4.6.

Las fallas elementales aparecen en forma de articulaciones plásticas en los extremos de los elementos donde se encuentran los momentos flexionantes máximos.

Para la estructura analizada, con un comportamiento dúctil (perfectamente plástico) en flexión pura, se utilizan los mismos mecanismos de colapso, identificados en la sección anterior (figura 4.6).

Por simulación Monte-Carlo se trabaja únicamente con las funciones de

del estado límite de falla finales. Estas funciones se ilustran en la sección 4.5.

4.7 Resumen de resultados.

Para el caso en que las cargas externas son consideradas variables deterministas, los índices de confiabilidad del sistema estructural, para los dos modelos de comportamiento propuestos y obtenidos por el método de primer orden, están dados en la tabla 4.4.

Dominio de Resistencia	Índice β	Probabilidad de falla
Flexión	11.4098	1.800×10^{-30}
Flexocompresión-tensión con pandeo	9.6350	2.894×10^{-22}

TABLA 4.4 Índices de confiabilidad de la estructura. Carga determinista.

Para el caso en que las cargas externas son consideradas variables aleatorias con distribución gaussiana, donde las medias de las cargas corresponden a los valores de diseño obtenidos de acuerdo a la sección 4.3, con unos coeficientes de variación que varían en un rango de 0.10 a 0.25, los índices de confiabilidad del sistema estructural correspondiente se muestran en la tabla 4.5, para los dos modelos de comportamiento mecánico propuestos.

Dominio de Resistencia	Coefficiente de variación (cargas)	Índice β	Probabilidad de falla
Flexión	0.10	11.126	4.500×10^{-29}
	0.15	10.802	1.653×10^{-27}
	0.20	10.393	1.310×10^{-25}
	0.25	9.289	7.940×10^{-21}
Flexocompresión tomando en el efecto de pandeo	0.10	9.239	1.26×10^{-20}
	0.15	8.807	6.53×10^{-19}
	0.20	8.293	5.58×10^{-17}
	0.25	7.749	4.67×10^{-15}

TABLA 4.5 Índices de confiabilidad de la estructura. Carga aleatoria.

Dado que las distribuciones de las variables aleatorias que caracterizan las fuerzas, se desconocen; se propone un segundo caso, en que estas variables tienen una distribución log-normal.

Los índices de confiabilidad del sistema estructural, así como las probabilidades de falla globales correspondientes a este caso, donde las variables de las cargas se consideran con distribución log-normal, con un dominio de resistencia a flexocompresión-tensión, tomando en cuenta el efecto de pandeo, están dados en la tabla 4.6.

Dominio de Resistencia	Coefficente de variación (cargas)	Indice β	Probabilidad de falla
Flexocompresión tomando en el efecto de pandeo	0.10	11.447	1.25×10^{-30}
	0.15	9.862	3.11×10^{-23}
	0.20	8.475	1.19×10^{-17}

TABLA 4.6 Índices de confiabilidad de la estructura. Variables aleatorias log-normales.

A partir de la tabla 4.6, se observa que los índices de confiabilidad del sistema estructural, aumentan respecto a los casos anteriores, y por tanto las probabilidades de falla correspondientes se reducen.

De todos los resultados obtenidos, podemos observar que cuando se considera un dominio de resistencia con la interacción entre el momento flexionante y la fuerza axial con el efecto de pandeo, los índices de confiabilidad disminuyen y por tanto las probabilidades de falla del sistema estructural aumentan. De esto se puede desprender que los resultados siguen un comportamiento lógico respecto al modelo de comportamiento mecánico y que con este tipo de comportamiento la estructura está más apegada a su comportamiento real.

Cuando incrementamos el coeficiente de variación de las variables de carga, estamos considerando una mayor incertidumbre en el valor que pueden asumir estas variables, por lo que las probabilidades de falla totales del sistema aumentan y el índice de confiabilidad decrece.

El hecho de considerar diferentes valores para el coeficiente de variación cuando las cargas son consideradas variables aleatorias, es debido a que no se realizó un estudio probabilista para determinar las características estadísticas de estas fuerzas, por lo que se propone un rango en el que se estima que los valores reales andarían para este tipo de distribuciones asignadas.

Cuando se hace uso de simulación Monte-Carlo y las cargas son consideradas como variables deterministas se obtienen los índices de confiabilidad del sistema estructural mostrados en la tabla 4.7, para los dos modelos de comportamiento mecánico de la estructura:

Dominio de Resistencia		$\rho = 0$	$\rho = 1$
Flexión	P_f	1.87×10^{-30}	3.57×10^{-15}
	β	11.40	8.067
Flexocompresión con pandeo	P_f	3.11×10^{-21}	1.60×10^{-11}
	β	9.3862	6.6366

TABLA 4.7 Indices de confiabilidad de la estructura. Con simulacion Monte-Carlo..

Cuando las cargas se consideran variables aleatorias gaussianas, con un rango de valores, de 0.10 a 0.25, para los coeficientes de variación, se obtienen los indices de confiabilidad del sistema, dados en la tabla 4.8.

DOMINIO DE RESISTENCIA		FLEXION		FLEXOCOMPRESION C/PANDEO.	
C. V.		$\rho=0$	$\rho=1$	$\rho=0$	$\rho=1$
0.10	P_f	4.545×10^{-29}	8.155×10^{-16}	1.2834×10^{-19}	4.2667×10^{-11}
	β	11.128	7.9662	8.9855	6.4905
0.15	P_f	1.628×10^{-27}	2.159×10^{-15}	6.1124×10^{-18}	1.2987×10^{-10}
	β	10.800	7.8499	8.5504	6.3307
0.20	P_f	1.294×10^{-25}	7.684×10^{-15}	4.6497×10^{-15}	5.1633×10^{-10}
	β	10.390	7.6840	8.0353	6.1039
0.25	P_f	1.510×10^{-23}	3.407×10^{-14}	3.3737×10^{-14}	2.3742×10^{-09}
	β	9.930	7.4910	7.4922	5.8554

TABLA 4.8 Indices de confiabilidad de la estructura. Fuerzas aleatorias. Simulación Monte-Carlo.

Los indices de confiabilidad del sistema estructural, obtenidos por

los dos métodos: de primer orden y por simulación Monte-Carlo; son iguales, para fines prácticos, cuando la correlación entre las resistencias es igual a cero ($\rho=0$), en el método de simulación Monte-Carlo.

La correlación (ρ) entre las resistencias de un mismo elemento, muestra la influencia de la dependencia de estas resistencias de los elementos, en el análisis de confiabilidad del sistema estructural, con un incremento en el índice de confiabilidad global (β) de alrededor de 35 y 40%.

4.8 Conclusión.

Los modelos propuestos dentro de este trabajo, nos permiten estudiar la variación de la probabilidad de falla del sistema estructural, en función de los criterios adoptados dentro de su concepción. Esto nos permite también establecer criterios para definir niveles de seguridad deseables.

5.- CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

En este trabajo, por motivos de simplicidad, se consideran únicamente modelos lineales:

- Modelo lineal para el dominio de resistencia, cuando se considera la interacción entre el momento flexionante y la fuerza axial,

- Modelo lineal para las expresiones de los estados límites de seguridad, función de las variables aleatorias de carga y de resistencia,

- Modelo lineal para la evaluación de la confiabilidad del sistema estructural, calculada por los métodos de Primer Orden y por simulación Monte-Carlo.

Las funciones de los estados límite de seguridad se obtienen con el método de generación automática dado en el capítulo 1, donde estas funciones son expresiones lineales. Este método nos permite calcular las funciones de estado límite de seguridad en cada etapa de daño de la estructura.

El modelo de fuerzas sísmicas utilizado en los análisis de confiabilidad, se obtiene a través de un modelo determinista, por lo que las fuerzas sísmicas se consideran como variables deterministas. Después, con el fin de tomar en cuenta de un manera simple, la incertidumbre involucrada en estas variables, las fuerzas se consideran como variables aleatorias, con distribución gaussiana, donde los parámetros estadísticos son propuestos.

Aunque conjunto de modelos no utiliza en cada etapa la solución más elaborada actualmente conocida, da un medio de evaluación de la confiabilidad de un sistema estructural lo suficientemente realista para permitirnos realizar estudios paramétricos de comparación y, sin duda, para permitirnos tomas de decisión.

El efecto de pandeo en el dominio de resistencia se introduce de una manera sencilla, el cual consiste en reducir el área de la sección transversal del elemento considerado. Con esta hipótesis nos evitamos el recurrir a un modelo real geoméricamente no lineal. El tomar en cuenta este efecto, contribuye a la credibilidad del modelo mecánico para el cálculo de los elementos donde los efectos de inestabilidad son preponderantes.

La evaluación del índice de confiabilidad (β) relativo a la falla global del sistema estructural, calculado con los métodos presentados, nos permite confirmar el buen funcionamiento de estas herramientas de cálculo y tratar según cada uno de los métodos escenarios complementarios (correlación, variables no-normales).

A través de los ejemplos presentados está claro que la probabilidad de falla se incrementa cuando se toma en cuenta la interacción entre el momento flexionante y la fuerza axial en el dominio de resistencia. Esto nos permite simular un comportamiento más cercano al real de la estructura. Cabe mencionar que cuando se utiliza como dominio de resistencia únicamente la flexión, la generación de las funciones de los estados límite de seguridad es más sencilla, ya que se pueden obtener a través de diferencias de trabajos virtuales; sin embargo, debemos estar conscientes que estamos sobreestimando el comportamiento real del sistema estructural.

Al aplicar el método de simulación Monte-Carlo, se observa claramente la influencia que ejerce la correlación total ($\rho = 1$) entre las resistencias de un mismo elemento, en el índice de confiabilidad (β) del sistema, al disminuir considerablemente este índice en comparación con el índice obtenido considerando independencia entre esas variables ($\rho = 0$). Cabe señalar, por un lado que son dos casos extremos; por otro lado, que si existe correlación entre las resistencias de un mismo elemento, no se cuenta con datos estadísticos sobre esta influencia; por lo tanto, se recomienda tener cuidado en la aplicación de este modelo, así como en la interpretación de dichos resultados.

Como es de esperarse, en el método de Primer Orden, cuando se consideran distribuciones log-normales para las variables aleatorias de resistencia y de carga, los índices de confiabilidad (β) del sistema aumentan, (las probabilidades de falla global del sistema disminuyen) con respecto al modelo donde las variables aleatorias se consideran gaussianas.

Al utilizar estas herramientas de cálculo para determinar los índices de confiabilidad o las probabilidades de falla global de un sistema estructural, se recomienda tener siempre en mente todas las hipótesis restrictivas de los modelos, así como de los conceptos utilizados, en la toma de decisiones.

Para trabajos futuros dentro de esta modalidad se recomienda desarrollar modelos estocásticos de fuerzas sísmicas, que permitan tomar en cuenta la incertidumbre real involucrada en este tipo de solicitaciones y fenómenos que la provocan.

La idea de aplicar estas herramientas, de cálculo de probabilidades de falla global o de índices de confiabilidad (β) de los sistemas estructurales, es con el fin de poder optar por niveles y factores de seguridad deseables, además de poder optimizar los diseños desde un punto de vista probabilista.

Es claro, que estos modelos pueden mejorarse, a condición de no perder su simplicidad de utilización.

Finalmente, sería interesante reunir estas herramientas o técnicas de cálculo probabilista y generar un anexo en el reglamento de construcciones para ayuda de los diseñadores, así como añadir un paquete de computadora que le facilite esta tarea.

RECONOCIMIENTOS

Por el apoyo financiero otorgado durante mis estudios de Maestría en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México, así como el tiempo de proceso de elaboración de mi tesis, un reconocimiento muy especial a las siguientes Instituciones.

- A la Dirección General de Intercambio Académico de la Universidad Autónoma de Baja California (Mexicali).

- A la Dirección General de Intercambio Académico de la Universidad Nacional Autónoma de México.

- A la Dirección General de Asuntos de Personal Académico de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Un agradecimiento muy especial al Profesor-Investigador de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la U.N.A.M. Dr. Moises Arroyo Contreras, Director de esta Tesis, por el apoyo otorgado durante la elaboración de este trabajo, así como sus comentarios acertados y por el tiempo dedicado.

Finalmente un agradecimiento a los miembros del jurado por el tiempo dedicado a leer este trabajo, por los comentarios y críticas constructivas hechas.

REFERENCIAS.

- 1 STEVENSON. J.D.& MOSES, F.
Reliability Analysis of Frame Structures.
Journal of the Structural Division, ASCE, 96, ST 11, 1972.
- 2 GORMAN, M. R.
Reliability of Structural System.
Case Western Reserve University.
Report CE 79-2, 1979.
- 3 MOSES, F. & RASHEDI, M.R.
The Application of System Reliability to Structural Safety. Appl. of Statics and Probability in Soil and Mechanics, Pitagora Editrice, Bologna, 1983.
- 4 WATWOOD, V. B.
Mechanism Generation for Limit Analysis of Frames.
Journal of the Engineering Mechanics Division.
ASCE, Vol. 109, ST 1, 1979.
- 5 MUROTSU, Y., OKADA, H., NIWA, K., & MIWA, S.
A New Method for Evaluating Lower and Upper Bounds of Failure Probability in Redundant Truss Structures.
Bulletin of University of Osaka Prefecture, Series A., Vol.28, No.1, 1979.
- 6 MUROTSU, Y., OKADA, H., NIWA, K., & MIWA, S.
Reliability Analysis of Truss Structures by Using Matrix Method.
Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design, Vol.102, No.4, 1980.
- 7 MUROTSU, Y., OKADA, H., NIWA, K., & MIWA, S.
Reliability Analysis of Redundant Truss Structures.
Reliability, Stress Analysis and Failure Prevention Methods in Mechanical Design. ASME Publication No. H00165, 1980.
- 8 MUROTSU, Y., OKADA, H., YONEZAWA, M. & TAGUCHI, K.
Reliability Assesment of Redundant Structure.
Structural Safety and Reliability, Elsevier, 1981.
- 9 MUROTSU, Y., OKADA, H., YONEZAWA, M., GRIMELT, M. & TAGUCHI, K.
Automatic Generation of Stochastically Dominant Modes of Structural Failure in Frame Structure.
Bulletin of University of Osaka Prefecture, Series A, Vol.30, 1981.
- 10 OKADA, H., MATSUZAKI, S & MUROTSU, Y.
Safety Margins for Reliability Analysis of Frame Structures.
Bulletin of University of Osaka Prefecture, Series a, Vol.32, 1983.

- 11 MUROTSU, Y., OKADA, H., & MATSUZAKI, S.
Reliability Analysis of Frame Structures under Combined
Load Effects.
Structural Safety and Reliability, Vol.I, IASSAR,1985.
- 12 PRZEMIENIECKI, J. S.
Theory of Matrix Structural Analysis.
McGraw-Hill, New York, 1968.
- 13 ENRIQUE BAZAN ZURITA & ROBERTO MELI PIRALLA.
Manual de Diseño Sísmico de Edificios.
Editorial Limusa, 1987.
- 14 ANA MARIA COBO DE CHAVEZ
Análisis Dinámico de Edificios por los Métodos exacto de
Jacobi y Aproximado de Holzer.
Universidad de Zulia, Facultad de Ingeniería
Maracaibo, febrero de 1992.
- 15 JAVIER CENICEROS, ARMANDO NAVARRO & IGNACIO MARTINEZ.
Dinámica Estructural.
Universidad Autónoma de Zacatecas.
- 16 WILLIAM T. THOMSON.
Teoría de Vibraciones, Aplicaciones.
Prentice Hall Inc., 1982.
- 17 GACETA OFICIAL DEL DEPARTAMENTO DEL D.F.
Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal.
6 de Julio de 1987.
- 18 GACETA OFICIAL DEL DEPARTAMENTO DEL D.F.
Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo.
5 de noviembre de 1987.
- 19 DR. AVILES.
Apuntes de Dinámica Estructural.
Universidad Autónoma de Puebla.
- 20 MARIO PAZ.
Structural Dynamics, Theory and Computation.
Van Nostrand Reinhold, New York.
- 21 BARLOW, R.E. & PROSCHAN F.
Statistical Theory of Reliability an Life Testing.
- 22 BERNARD. P et FOGLI, M.
Un calcul probabiliste en Génie civil: Evaluation de la
probabilité sur une technique de conditionnement.
Annales Scientifiques de l'université de Clermont-Ferrand
Série Math, Fasc. 23, 1986, Francia.
- 23 KAUFFMAN, A., GROWCHKO,D. & CRUON, R.
Mathematical Models for the Study of the Reliability of
Systems.
Academic Press, 1977.

- 24 DAVID K. LLOYD & MYRON LIPOW.
Reliability; Management, Methods and Mathematics.
Prentice Hall, 1964.
- 25 HASOFER, A.M. & LIND, C.
Exact and Invariant Second-Moment, Code Format.
Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.
100, N° EMI, febrero 1974.
- 26 RACWITZ, R & FIESSLER, B.
Structural Reliability Under Combined Random Load
Sequences.
Computers and Structures, Pergamon Press, Vol. 9,
noviembre de 78.
- 27 SHINOZUKA, M.
Basic Analysis of Structural Safety.
Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 109, N° 3,
Marzo de 1983.
- 28 FREUDENTHAL, A.M.
Safety and the Probability of Structural Failure.
Transactions, ASCE, Vol. 124, 1956.
- 29 ROSENBLATT, M.
Remarks on a Multivariate Transformation.
The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 23 Sep. 1952.
- 30 HOHENBICHER, M. & RACKWITZ, R.
Non-Normal Dependent Vectors in Structural Safety.
Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.
107, diciembre de 1981.
- 31 ANG, H.S. & TANG, W.H.
Probability Concepts in Engineering Planning and Design.
Decision, Risk and Reliability.
Volume II, Wiley & Sons, Inc., 1984.
- 32 DITLEVSEN, O.
Narrow Reliability Bounds for Structural Systems.
Journal of Structural Mechanics, Vol. 7, 1979.
- 33 KOUNIAS, E.G.
Bounds for the Probability of a Union, with Applications.
The Annals of the Mathematical Statistics, Vol. 39, 1968.
- 34 HUNTER, D.
Un Upper Bound for the Probability of a Union.
Journal of Applied Probability, Vol. 3, 1976.
- 35 MOSES, F. & STEVENSON, J.D.
Reliability-Based Structural Design.
Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 96,
Febrero de 1970.

- 36 THOFT-CHRISTENSEN, P. & MUROTSU, Y.
Application of Structural Systems Reliability Theory.
Springer-Verlag Berlin, Heidelberg 1986.
- 37 BJERAGER, P.
Reliability Analysis of Structural Systems.
Ph.D Thesis, the Technical University of Denmark,
enero de 1984.
- 38 RACKWITZ, R. & PEINTINGER, B.
General Structural System Reliability.
Meeting of CEB- Commission II Pavia, 5-6 octubre de 1981.
- 39 ANG, H.S. & TANG, W.H.
Probability Concepts in Engineering Planning and Design.
Decision, Risk and Reliability.
Volume II, Wiley & Sons, Inc., 1984.
- 40 HOHENBICHLER, M.
An Approximation to the Multivariate Normal Distribution
Function.
Sonderforschung Bereich 96, Technical University of Munich,
Heft 58, 1982.
- 41 DUNNETT, C.W. & SOBEL, M.
Approximation to the Probability and Certain Percentage
Points of a Multivariate Analogue of Student's
t-Distribution.
Niometrika, Vol. 52, 1955.
- 42 HOHENBICHLER, M. & RACKWITZ, R.
A Bound and a Approximation to the Multivariate Normal
Distribution Function.
Math. Japonica, Vol. 30, 1985.
- 43 HOHENBICHLER, M.
An Approximation to the Multivariate Normal Distribution.
Proc. Euromech 155 (Dialog), Danish Engineering Academy
(Civil Engineering Department), Lyngby, Denmark, 1982.
- 44 KARAMCHANDANI, A. GUENARD, Y. & ORTIZ, K.
A Software Package for Component and System Reliability
Analysis, SHASYS.
Report 78, Departament of Civil Engineering, Stanford
University, mayo de 1986.
- 45 RACKWITZ, R. et al.
Structural Reliability Programs.
Heft 74/1985, Laboratorium für den Konstruktiven
Ingenieurban, Technische Universität München, 1985.
- 46 BENJAMIN, J.R. & CORNELL, C.A.
Probability, Statics, and Decision for Civil Engineers.
Mc Graw-Hill Bool Company, New-York, 1970.

- 47 ESTEVA, L. FERREGUT, C. TELLEZ, F. y CHAVEZ, M.
 Confiabilidad de Sistemas Estructurales ante Cargas Estáticas.
 Proyecto 9172, Instituto de Ingeniería, UNAM, México, 1981.
- 48 TELLEZ, F., MENDOZA, E. y ESTEVA, L.
 Análisis de Confiabilidad de Estructuras Dúctiles sometidas a Carga Estática.
 Tercer Congreso Nacional de Ingeniería Estructural, México, 1982.
- 49 RAVINDRA, K. & GALAMBOS, T.V.
 Load and Resistance Factor Design for Steel.
 Journal of the Structural Division, ASCE, Vol 104, N ST9, septiembre de 1978.
- 50 GALAMBOS, T.V. & RAVINDRA, K.
 Tentative load and Resistance Factor Design Criteria for Steel Building.
 Research Report 18, Structural Division, Washinton University, Saint-Louis, 1973.
- 51 ROBERTO MELI PIRALLA.
 Diseño Estructural.
 Editorial Limusa 1991.
- 52 SONIA E. RUIZ.
 Espectros de Respuesta y de Diseño.
 Curso Internacional de Ingeniería Sísmica.
- 53 COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD, MEXICO D.F.
 Manual de Diseño de Obras Civiles.
 Diseño por Sismo, Cap. C1.3.
- 54 ESTEVA, L. FERREGUT, C. TELLEZ, F. y CHAVEZ, M.
 Programa de Análisis de Confiabilidad, por Simulación Monte-Carlo.
 Proyecto 9172, Instituto de Ingeniería, UNAM, México, 1981.
- 55 OSCAR DE BUEN LOPEZ DE HEREDIA.
 Estructuras de Acero, Comportamiento y Diseño.
 Editorial Limusa Noriega
 Nueva edición, 1990.
- 56 IX Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica y VIII Congreso Nacional de Ingeniería Estructural, Manzanillo, Colima, noviembre de 1991

APENDICE A:

MANUAL DE COMANDOS

PROGRAMA DEL CURSO DE TOPICOS ESTRUCTURALES ESPECIALES Y

APLICACION DE LAS COMPUTADORAS AL ANALISIS ESTRUCTURAL

TOPICOS.EXE

OPERACIONES MATRICIALES

LEE A1 N1 N2 N3 N5

La operación o comando LEE crea una matriz, nombrada A1 con N1 renglones y N2 columnas. Si a N3 se le asigna un valor diferente de cero, se trata de una matriz entera, o si N3 es igual a cero, se trata de una matriz real. Si N5 es diferente de cero no imprime la operación. Los datos son leídos por columnas del arreglo, dados por cada línea de entrada, de 8 en 8 para matrices reales o de 6 en 6 para matrices enteras

IMP A1 N3 N4 N5

El comando IMP, imprime la matriz nombrada A1 si N4 = 0, para N4 ≠ 0, imprime la matriz transpuesta de A1; si N3 = 0 se trata de una matriz real o si N3 ≠ 0 se trata de una matriz entera. Si N5 ≠ 0 no imprime el comando en el archivo de resultados.

SUMA A1 A2 A3⁺ N5

El comando SUMA crea la matriz A3⁺, con el resultado de la suma de las matrices A1 y A2. Si N5 ≠ 0 no imprime el comando en el archivo de resultados.

REST A1 A2 A3⁺ N5

El comando REST crea la matriz A3⁺, con el resultado de la diferencia de las matrices A1 - A2. Si N5 ≠ 0 no imprime el comando en el archivo de salida.

MULT A1 A2 A3⁺ N4 N5

El comando MULT crea la matriz A3⁺, con el resultado del producto de las matrices A1 y A2, si N4 = 0; en caso contrario para N4 ≠ 0, crea la matriz A3⁺, con el resultado del producto de la matriz transpuesta de A1 por A2: A3 = A1^tA2. Si N5 ≠ 0 no imprime el comando en el archivo de salida.

TRAS A1 A2⁺ N5

El comando TRAS crea la matriz A2⁺, con la transpuesta de A1. Si N5 ≠ 0 no imprime el comando en el archivo de salida.

ESCA A1 A2⁺ N5 F1

El comando ESCA crea la matriz A2⁺, con el resultado del producto del escalar F1 por la matriz A1 (multiplica el escalar F1 por cada uno de los términos del arreglo A1). Si N5 ≠ 0 no imprime el comando en el archivo de salida.

INVE A1⁻ N5

Con este comando INVE, la matriz A1 es reemplazada por su inversa. Si N5 ≠ 0 no imprime el comando en el archivo de salida.

BORR A1 N5

El comando BORR borra del arreglo general el arreglo A1, y el arreglo general es compactado. Si N5 ≠ 0 no imprime el comando en el archivo de salida.

DUP A1 A2 N5

El comando DUP duplica la matriz A1 en A2. Si N5 ≠ 0 no imprime el comando en el archivo de salida.

DUPB A1 A2⁺ N5

El comando DUPB duplica la matriz A1 en A2. El arreglo A2⁺ es creado por programa. Si N5 ≠ 0 no imprime el comando en el archivo de salida.

CERO A1 N1 N2 N3 N5

El comando CERO crea la matriz A1 de N1 número de renglones y N2 número de columnas. Si N3 es diferente de 0 se trata de una matriz entera, si N3 = 0 se trata de una matriz real. Si N5 es diferente de cero no imprime la operación.

SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES

GACO A1 A2⁻ N5

El comando GACO, resuelve el sistema de ecuaciones lineal dado por $A1 \cdot x = A2$, con un algoritmo del método de eliminación de Gauss por columnas. El arreglo de términos independientes $A2$ admite varias columnas. La solución del sistema de ecuaciones es almacenado en el arreglo $A2$. Si $N5 \neq 0$ no imprime el comando en el archivo de salida.

GARE A1 A2⁻ N5

El comando GARE, resuelve el sistema de ecuaciones lineal dado por $A1 \cdot x = A2$, con un algoritmo del método de eliminación de Gauss por renglones. El arreglo de los términos independientes $A2$ admite varias columnas. La solución del sistema de ecuaciones es almacenado en el arreglo $A2$. Si $N5 \neq 0$ no imprime el comando en el archivo de salida.

GAMS A1 A2⁻ N5

El comando GAMS, resuelve el sistema de ecuaciones lineal dado por $A1 \cdot x = A2$, con un algoritmo del método de eliminación de Gauss para matrices simétricas de $A1$. El arreglo de los términos independientes $A2$ admite varias columnas. La solución del sistema de ecuaciones es almacenado en el arreglo $A2$. Si $N5 \neq 0$ no imprime el comando en el archivo de salida.

GABA A1 A2⁻ N5

El comando GABA, resuelve el sistema de ecuaciones lineal simétrico, dado por un arreglo $A1$ que almacena en su primera columna los términos de la diagonal del sistema, en las columnas subsecuentes almacena los términos de las diagonales superiores hasta el ancho de banda; los términos independientes del sistema están dados por $A2$. Este arreglo $A2$ admite varias columnas. La solución del sistema de ecuaciones es almacenado en el arreglo $A2$. Si $N5 \neq 0$ no imprime el comando en el archivo de salida.

GASP A1 A2 N5

El comando GASP, resuelve el sistema de ecuaciones lineal dado por $A1 \cdot x = A2$, con un algoritmo del método de Gauss para matrices simétricas de $A1$, sin perfil y por factorización. El arreglo de los términos independientes $A2$ admite varias columnas. La solución del sistema de ecuaciones es almacenado en el arreglo $A2$. Si $N5 \neq 0$ no imprime el comando en el archivo de salida.

GAPA A1 A2⁻ N5

El comando GAPA, resuelve el sistema de ecuaciones lineal dado por $A1 \cdot x = A2$, con un algoritmo del método de Gauss para matrices simétricas de $A1$, con perfil y por factorización. El arreglo de los términos independientes $A2$ admite varias columnas. La solución del sistema de ecuaciones es almacenado en el arreglo $A2$. Si $N5 \neq 0$ no imprime el comando en el archivo de salida.

ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS CON COMPORTAMIENTO LINEAL

IMPE A1 N1 N3 N4 N5

El comando IMPE imprime la matriz A1. sin imprimir el nombre de la matriz y los números indicando las columnas y los renglones. N1 es el número del elemento. Si N3 es diferente de 0 se trata de una matriz entera, sino (N3 = 0) se trata de una matriz real. Si N4 es diferente de 0 imprime la transpuesta de la matriz A1, sino (N4 = 0) imprime la matriz A1. Este comando es especial para la impresión de los resultados de los análisis matriciales de estructuras. Si N5 es diferente de 0 no imprime el comando.

MENS N1 N5

El comando MENS imprime mensajes de salida para la impresión de resultados de los análisis matriciales de estructuras:

Si N1

- = 1, mensaje para las cargas nodales externas.
- = 2, mensaje para los desplazamientos nodales.
- = 3, mensaje para las fuerzas de miembro.
- = 4, márgenes de seguridad para el extremo derecho del miembro.
- = 5, márgenes de seguridad para el extremo izquierdo del miembro.

Este comando es especial para los análisis matriciales de estructuras. Si N5 es diferente de 0 no imprime el comando.

ELV2 A1 A2 N1 N5 F1 F2 F3 F4 F5 F6 F7 F8
 F9 F10

El comando ELV2 crea y genera las matrices:

A1 de rigideces de un elemento viga, en el espacio bidimensional y en coordenadas globales,

A2 de transformación de desplazamiento-fuerza.

N1 indica el tipo de matriz de rigidez:

- = 1, matriz de rigidez a flexión de un elemento con extremos empotrados
- = 2, matriz de rigidez a flexión de un elemento articulado en i
- = 3, matriz de rigidez a flexión de un elemento articulado en j
- = 4, matriz de rigidez a flexión y cortante
- = 5, matriz de rigidez a flexión, cortante y momento de torsión
- = 6, matriz de rigidez a flexión y momento de torsión
- = 7, matriz de rigidez para un elemento armadura

F1 = E, el módulo de Young,

F2 = AG, el área de la sección transversal del elemento A o el módulo de cizalladura, dependiendo del tipo de matriz,

F3 = I, el momento de inercia (I),

F4 y F5 las coordenadas X_i , Y_i del nudo i (izquierdo del elemento),

F6 y F7 las coordenadas X_j , Y_j del nudo j (derecho del elemento).

F8 = μ , la constante llamada relación de Poisson

F9 = Ac, area de cortante

F10 = J, momento polar de inercia

Si N5 es diferente de 0 no imprime el comando. Este comando es especial

para el análisis matricial de estructuras bidimensionales, de comportamiento lineal.

ADMK A1 A2 A3 N1 N5

El comando ADMK permite añadir la matriz de rigideces A2 del elemento N1 en la matriz de rigideces total A1 de la estructura (en coordenadas globales). Los números de los renglones y de las columnas, donde los términos tienen que ser añadidos se obtienen de la columna N1 del arreglo A3 (N1 es el número del elemento y A3 almacena los números que corresponden a los grados de libertad de los nudos extremos de los elementos. N1 es el número del elemento que indica la columna del arreglo A3, que corresponde a los números de los renglones y columnas donde los términos de A2 tienen que ser añadidos en A1). Si N5 es diferente de 0 la instrucción no se imprime en el archivo de datos de salida.

FUEL A1 A2 A3 A4⁺ N1 N5

El comando FUEL permite obtener las fuerzas de miembro, multiplicando la matriz especial de transformación de desplazamientos-fuerzas A1, por la matriz de desplazamientos de los nudos A2. Las fuerzas de miembro son almacenadas en el arreglo A4⁺, creada por programa. Estas fuerzas son dadas en coordenadas locales del elemento. Los desplazamientos de los nudos que tienen que ser utilizados en la multiplicación se obtienen de la columna N1 del arreglo A3 que almacena los números que corresponden a los grados de libertad de los nudos extremos de los elementos. Si N5 es diferente de 0 no imprime la instrucción.

ANALISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS CON COMPORTAMIENTO ELASTOPLASTICO

EVE2 A1⁺ A2⁺ A3⁺ A4⁺ N5 F1 F2 F3 F4 F5 F6 F7

El comando EVE2 es el mismo que ELV2, la diferencia es que este comando EVE2 crea y genera además las matrices: A3 (6x6) de rigidez del elemento en el espacio bidimensional y en "coordenadas locales", A4 la matriz de transformación de 6x6,

ELPI A1⁻ A2 A3 A4⁺ A5⁺ A6⁺ F1

El comando ELPI crea: la matriz de rigidez reducida A4 de 6x6 para un elemento con una plastificación en el extremo izquierdo o derecho, el vector de fuerzas nodales equivalentes A5 de 6x1 y A6 la matriz de transformación de fuerzas modificada.

Este comando requiere como datos: la resistencia límite F7, la matriz de rigidez A1 en coordenadas locales, la matriz de transformación A2 y el vector de coeficientes del estado límite de la sección plastificada del elemento A3 (para el caso de flexo tensión-compresión):

$$A3 = \left\{ \begin{matrix} Z_{01} \\ A_1 \end{matrix} \text{ signo } (F_1), 0, \text{ signo}(M_1), 0, 0, 0 \right\}, \text{ extremo izquierdo}$$

$$A3 = \left\{ 0, 0, 0, \frac{Z_{0j}}{A_j} \text{ signo } (F_j), 0, \text{ signo}(M_j) \right\}, \text{ extremo derecho}$$

ELPA A1 A2 A3 A4 A5⁺ A6⁺ A7⁺ F1

El comando ELPA crea: una matriz de rigidez reducida almacenada en A1⁻ de 6x6, en coordenadas globales, los vectores de fuerzas nodales equivalentes A5 y A6 de 6x1, en coordenadas globales, y una matriz de transformación de fuerzas modificada A7.

Este comando requiere como datos: la resistencia límite F1, la matriz de rigidez lineal A1 de 6x6 en coordenadas locales, la matriz de transformación A2 de 6x6, y los vectores de coeficientes de los estados límites de las secciones extremas del elemento A3 y A4.

ENMK A1⁻ A2 A3 A4 N1

El comando ENMK permite abstraer la matriz de rigidez lineal A2 en coordenadas globales del elemento N1 a la matriz de rigidez total A1 de la estructura y añadir la matriz de rigidez reducida del elemento dañado A4 en la matriz de rigidez total. Los números de los renglones y de las columnas, donde los términos tienen que ser modificados se obtienen de la columna N1 del renglón A3.

ENVF A1⁻ A2 A3 N1

El comando ENVF permite colocar el vector de fuerzas nodales equivalentes A2 de 6x1 del elemento N1 en coordenadas globales, al vector de cargas nodales total del sistema A1. Los números de los renglones donde los términos tienen que ser colocados se obtienen de la columna N1 del arreglo A3.

ENFM A1 A2 A3⁻

Este comando ENFM permite calcular el vector de fuerzas nodal total del elemento que esta dado por la suma del vector de fuerzas de miembro intermedio A3, en coordenadas locales y el vector de fuerzas nodal equivalente producto de la matriz de transformación A1 y el vector de fuerzas nodales equivalentes en coordenadas globales A2. Los resultados son almacenados en el mismo vector A3.

MASE A1 A2 A3⁺ N1 N3 F1

Este comando MASE permite calcular los coeficientes de los términos de los estados límites de seguridad A3 de las secciones aun no plastificadas. Estos coeficientes están dados por el producto del vector A2 y el vector de fuerzas nodales A1. N1 es el número del elemento, N3 = 1, define la sección extrema izquierda del elemento y N3 = 2, define la sección extrema derecha del elemento. F1 es la resistencia límite.

APENDICE B:

En este apéndice se incluye una breve descripción de los aspectos necesarios para la computación del método de holzer, para el análisis dinámico de edificios y el cálculo de fuerzas sísmicas que es lo que nos interesa conocer. Indicándose el esquema general del programa principal y subprogramas utilizados, con la correspondiente definición de variables, la entrada de datos y especificaciones relacionadas con la numeración de niveles y elementos utilizados en el programa considerado.

Definición de variables del programa principal ANADIN.EXE.

NPISO: número de pisos del edificio.

NMAR: número de marcos totales del edificio en una dirección considerada.

NMOD: número de modos a considerar.

RM(I): arreglo unidimensional que contiene las masas de cada piso del edificio.

ICRK: índice de cálculo de las rigideces de piso.

1: Rigideces con vigas infinitamente rígidas.

2: Rigideces con fórmulas de Wilbur.

NP: número de pisos de un marco.

NE: número de elementos de un marco.

NCL: número de claros de un marco.

E: módulo de elasticidad.

NTIP: número de tipos de elementos de un marco.

DLL(I): arreglo unidimensional que contiene las longitudes de los NTIP tipos de elementos.

DII(I): arreglo unidimensional que contiene las inercias de los NTIP tipos de elementos.

NTIPE(I): arreglo que contiene el tipo de cada elemento. (I=1,NE).

NTC: número total de columnas.

RK(I): arreglo unidimensional que almacena las rigideces de los NP pisos.

W(J): arreglo unidimensional que almacena los diferentes valores de frecuencia utilizados en el proceso iterativo.

X(I,J): arreglo bidimensional que contiene las componentes de desplazamientos correspondientes al nivel I para el W(J) considerado.

WW(M): arreglo unidimensional que contiene los valores de las frecuencias correspondientes a cada modo.

XX(I<M): arreglo bidimensional que contiene las componentes del vector modal para cada modo.

Subprogramas utilizados por el programa principal ANADIN.EXE.

SUBPROGRAMA ANAMOD.

Este subprograma se utiliza para calcular las fuerzas y cortantes de piso por análisis modal espectral, tiene la particularidad de utilizar cualquier espectro de diseño de aceleración, dando algunos datos para definir dicho espectro.

C: coeficiente sísmico básico.

A0: ordenada espectral para $T=0$.

TA, TB: periodos naturales que definen la forma del espectro, en segundos.

R: exponencial adimensional para el cálculo de las ordenadas de los espectros de diseño.

G: aceleración de la gravedad.

Q: factor de comportamiento sísmico.

Variables utilizadas en el subprograma ANAMOD.

SA: aceleración espectral para el modo M.

TAU: coeficiente de participación del modo M.

PORMA: porcentaje de masas para el modo M.

F(I,M): arreglo bidimensional que almacena el valor de la fuerza de inercia del nivel I en el modo M.

V(I,M): arreglo bidimensional que almacena el valor del cortante en el piso I para el modo M.

SUBPROGRAMA CALFVP.

Este subprograma es utilizado para calcular los valores máximos probables de las fuerzas y cortantes por nivel, como la raíz cuadrada de la

suma de los cuadrados de los máximos modales (SRSS).

VARIABLES UTILIZADAS EN EL SUBPROGRAMA CALFVP.

F(I,MM): arreglo bidimensional que almacena el valor de la fuerza máxima modal del nivel I para el modo MM.

V(I,MM): arreglo bidimensional que almacena el valor del corte máximo modal del nivel I para el modo MM.

FMAXP(I): arreglo unidimensional que almacena el valor de la fuerza máxima probable del piso I.

VMAXP(I): arreglo unidimensional que almacena el valor del cortante máximo probable del nivel I.

ENTRADA DE DATOS PARA EL PROGRAMA ANADIN.EXE

*Lee los datos en el siguiente orden de secuencia:

Primera línea de datos, lee:

NPISO NMAR NMOD

*Grupo de líneas de datos de I=1 hasta NPISO, lee las masas por nivel del edificio de arriba hacia abajo.

RM(I)

*Línea de dato, lee:

ICRK

Para cada marco, lee:

*Línea de datos con las características de un marco:

NP NE NCL E NTIP

*Grupo de líneas de datos desde I=1 hasta NTIP, lee las longitudes e inercias de los tipos de elementos.

DLL(I) DII(I)

Para cada elemento, lee:

*Grupo de líneas de datos desde I=1 hasta NE, lee el tipo que le corresponde a cada elemento.

NTIPE(I)

- fin de datos-

NUMERACION DE NIVELES Y ELEMENTOS PARA EL PROGRAMA ANADIN.EXE.

Niveles: de arriba hacia abajo.

Elementos: se numeran primero las columnas por nivel de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba; continuando las vigas de igual forma. Se deben considerar elementos ficticios, como se muestra en el ejemplo siguiente:

EJEMPLO:

