



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

ANALISIS ASINTOTICO PARA UN PROBLEMA
DE STEFAN: SOLIDIFICACION EN PLACAS
PARALELAS DE LONGITUD INFINITA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA
P R E S E N T A :
NESTOR DANIEL LUNA GONZALEZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. FEDERICO MENDEZ LAVIELLE



MEXICO, D. F.

1993

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

| | |
|---|----|
| NOMENCLATURA | 4 |
| RESUMEN | 6 |
| I. INTRODUCCIÓN | 7 |
| 1.1 Antecedentes | 7 |
| 1.1.1 Problemas de cambio de fase o problemas de Stefan | 7 |
| 1.2. Métodos generales de solución de problemas de Stefan | 8 |
| 1.3. Antecedentes bibliográficos | 10 |
| II. PLANTEAMIENTO DEL MODELO MATEMÁTICO | 14 |
| 2.1 Geometría del problema | 14 |
| 2.2 Análisis de la interfase | 16 |
| 2.2.1 Análisis de la transferencia de energía | 16 |
| 2.3 Planteamiento matemático | 19 |
| 2.4 Adimensionalización | 21 |
| 2.4.1 Generalidades | 21 |
| 2.4.2 Obtención de parámetros adimensionales | 21 |
| III. METODOLOGÍA | 26 |
| 3.1 Generalidades | 26 |
| 3.1.1 Análisis de perturbaciones | 27 |
| 3.1.2 Teoría de perturbación regular y singular | 28 |
| 3.1.3 Acoplamiento asintótico | 29 |

| | |
|--|----|
| 3.2 Proceso de solución | 30 |
| 3.2.1 Función temporal lineal | 31 |
| 3.2.1.1 Zona Externa | 31 |
| 3.2.1.2 Zona Interna | 33 |
| 3.2.1.3 Acoplamiento | 36 |
| 3.2.2 Función temporal armónica senoidal | 39 |
| 3.2.2.1 Zona externa | 39 |
| 3.2.2.2 Zona interna | 40 |
| 3.2.2.3 Acoplamiento | 40 |
| IV. RESULTADOS | 41 |
| 4.1 Resultados | 41 |
| 4.1.1 Resultados de la función temporal lineal | 41 |
| 4.1.2 Resultados de la función armónica senoidal | 42 |
| 4.2 Presentación de Gráficas | 43 |
| 4.2.1 Función lineal | 44 |
| 4.2.1 Función armónica | 57 |
| BIBLIOGRAFIA | 72 |

NOMENCLATURA

- t - Tiempo en forma dimensional.
- x - Eje de coordenadas.
- l - Longitud de la placa.
- T_i - Temperatura inicial de la fase líquida.
- T_A - Temperatura de pared en $x=0$.
- T_L - Temperatura en la fase líquida.
- T_f - Temperatura de fusión del material.
- L_Q - Calor latente de fusión.
- K_L - Conductividad térmica en la fase líquida.
- K_s - Conductividad térmica en la fase sólida.
- t_R - Tiempo de referencia.
- $s(t)$ - Localización de la interfase en forma dimensional.
- A, B - Constantes de modulación.

Símbolos griegos

- θ - Temperatura adimensional en la fase sólida.
- ϕ - Temperatura adimensional en la fase líquida.
- σ - Movimiento de la interfase en forma adimensional.
- τ - Tiempo adimensional.
- β - Frecuencia de referencia.
- α - Difusividad térmica.
- ρ - Densidad del material.
- x - Longitud adimensional en el líquido.
- ξ - Longitud adimensional en el sólido.
- μ - Parámetro de perturbación.
- θ_s - Temperatura de pared en forma adimensional en la fase sólida.

- τ_c - Tiempo de corte.
- τ_d - Tiempo de desprendimiento.
- τ_{inv} - Tiempo de inversión.
- τ_{crit} - Tiempo crítico.

Subíndices

- i - Condición inicial.
- L - Referido a la fase líquida.
- s - Referido a la fase sólida.
- f - Referido al punto de fusión del material.
- a - Referida a la condición de frontera en el sólido.

RESUMEN

El presente trabajo estudia el desarrollo de una teoría racional para el tratamiento de problemas de transferencia de calor y masa en dominios finitos con un cambio de fase en la frontera, donde la temperatura inicial de las fases difiere de la temperatura de solidificación o de interfase.

Así mismo, se trata el problema en el cual la solidificación ocurre en una placa de longitud finita, la cual está inicialmente a una temperatura T_i próxima al punto de metalización; por un lado de la placa el calor es removido al mantenerse esta a una temperatura constante inferior a la de solidificación del material y el otro lado es puesta a una condición cuasi-adiabática, la cual variará de acuerdo a una función temporal.

Estos problemas aparecen naturalmente en muchos fenómenos que involucran metalización, refrigeración, sublimación, disolución de gases y evaporación; los cuales son considerablemente complicados al tratarlos de una manera teórica.

En la presente investigación se emplea como método de solución la teoría de perturbaciones. Mostrando así cómo la técnica de expansiones asintóticas acopladas puede ser empleada en estos casos muy generales de problemas no lineales de movimiento de frontera. En particular, en problemas que involucran un parámetro pequeño temporal.

Los resultados obtenidos afirman que la condición de frontera propuesta retarda el proceso de solidificación y que dicha modificación depende directamente de los parámetros θ_a y ϵ . Así mismo, se grafican los resultados en función de estos parámetros.

CAPITULO I

I. INTRODUCCIÓN

1.1 Antecedentes

Genéricamente a aquellos problemas en los cuales se involucra un cambio de fase, así como un movimiento en la frontera que delimita estados físicos, se les ha dado por llamar problemas de Stefan.

1.1.1 Problemas de cambio de fase o problemas de Stefan

En lo que respecta a la transferencia de calor, trascienden los problemas que involucran metalización o solidificación, los cuales son referidos como problemas de "cambio de fase" o "de frontera móvil". Dichos problemas tienen una gran importancia en las aplicaciones de ingeniería tales como la fundición de metales y aleaciones, almacenamiento de energía térmica, diseño de protecciones térmicas en naves espaciales fabricación de hielo, refrigeración y conservación de alimentos, la fabricación de vidrio, etc.

La solución de tales problemas es de una enorme dificultad debido a la interfase móvil entre las fases sólida y la líquida, así como el calor latente que es absorbido o liberado por esta; como resultado la localización de la interfase sólido-líquido no se conoce a simple vista y deberá obtenerse como una parte de la solución.

En la solidificación de las sustancias puras, tales como el agua, esta toma lugar en un discreto rango de temperatura, siendo las fases sólida y líquida separadas por un perfil móvil de interfase.

En la solidificación de mezclas, aleaciones y materiales impuros, la metalización tiene lugar sobre extendidos rangos de temperaturas, y como resultado, las fases sólida y líquida son separadas por una región móvil de dos fases.

En la moderna tecnología, la predicción de la razón de solidificación y la distribución de temperaturas en el proceso de metalización, es muy importante para controlar los parámetros fundamentales, tales como descubrir el tiempo para fundiciones estáticas y la razón de retirada en fundiciones continuas.

1.2. Métodos generales de solución de problemas de Stefan¹

A causa de la no linealidad de tales problemas, el principio de superposición no es aplicable.

Cuando la solución exacta no es obtenida, una aproximación semi-analítica y métodos numéricos pueden ser utilizados para resolver los problemas de cambio de fase.

A continuación se hace una breve reseña de los métodos que pueden ser empleados en la solución de problemas de cambio de fase.

El método integral: Tal método es empleado para realizar una aproximación de las ecuaciones de capa límite; también ha sido empleado posteriormente, en la solución del problema de metalización en una dimensión, así como cualquier otro problema de cambio de fase.

¹ Tomada de Ozisik(11)

Formulación variacional: Fue derivado por Biot basándose en un argumento termodinámico irreversible, siendo éste la solución de un problema de cambio de fase en una sola dirección.

La fuente de calor móvil: Se basa en el concepto de representar la liberación (o absorción) del calor latente por el movimiento de la fuente de calor (o sumidero) localizado en la interfase sólido-líquido. En este método, el análisis de los problemas de cambio de fase es transformado a la resolución de una ecuación integral.

Método de perturbaciones: Ha sido empleado por diversos investigadores en problemas donde se presenta un parámetro temporal pequeño; aunque el análisis comienza a complicarse a grandes órdenes de solución.

La técnica de encajes: Fue introducido primeramente para resolver un problema de metalización en una placa, posteriormente se ha empleado para solucionar problemas de cambio de fase. El método es muy versátil y se pueden obtener soluciones de una, dos o tres dimensiones.

Aprovechamiento de variables características: Se desarrolla en conexión con la solución de problemas de conducción de calor que involucran condiciones de frontera dependientes con el tiempo. El método es aplicable para resolver problemas de cambio de fase unidimensionales y también para geometrías esféricas o cilíndricas.

El método de analogía de red eléctrica: Frecuentemente este método es empleado en problemas de conducción de calor. Ahora es reemplazado por soluciones mediante métodos numéricos, debido a la gran habilidad de las computadoras digitales. Un gran número de soluciones numéricas se han reportado para los problemas de cambio de fase, aunque sólo algunas de estas soluciones puede ser generalizadas para varias dimensiones o en situaciones en las cuales el cambio de fase toma lugar a elevado rango de temperatura.

Técnica de diferencias finitas o del elemento finito: Trata de resolver las ecuaciones que describen el fenómeno de una manera numérica, teniendo que la solución de las regiones líquida y sólida no es complicada; pero la dificultad se incrementa en la interfase donde el gradiente de temperatura es discontinuo y la localización de ésta no se conoce a primera vista.

Método experimental: Investigaciones de este tipo en los problemas de cambio de fase son importantes con el fin de comprobar la validez de varios modelos analíticos; pero solo un número limitado de experimentos estudiados han sido comprobados analíticamente.

1.3. Antecedentes bibliográficos

Los primeros trabajos que mostraban una solución analítica de los problemas de cambio de fase fueron presentados por Lamé y Clapeyron¹ (1831) y por Stefan² (1891) en relación a la formación de hielo. La principal característica de este tipo de problemas es que ambas fronteras eran desconocidas y móviles, por lo cual la ecuación parabólica de conducción de calor se resuelve en una región en la cual la frontera también debía ser determinada. Aunque tales referencias son los trabajos más antiguos publicados en este aspecto; la solución exacta de un problema general de cambio de fase fue discutido por F. Newman en 1860, pero sus notas no fueron publicadas sino hasta 1912. Desde entonces, muchos problemas de cambio de fase tienden a aparecer en la literatura, pero la solución exacta es limitada a un número de situaciones idealizadas que involucran regiones semi-infinitas o infinitas y sujetas a una simple condición de frontera y a una condición inicial.

En la literatura actual aparecen una gran diversidad de artículos, los cuales estudian los procesos de solidificación con el afán principal de obtener la evolución de la interfase.

N. Ramachandran, J. P. Gupta y Y. Jaluria³ realizan un análisis numérico bi-dimensional para un proceso de solidificación de un metal puro en una cavidad vertical cerrada. El propósito de dicho estudio, fue el determinar los efectos trascendentales en el proceso, así como el papel que juega la convección natural. El acoplamiento no lineal de las ecuaciones tiende a ser adimensionalizado y resuelto con ayuda del Método Implícito Alternante con diferencias finitas. Sus resultados son presentados gráficamente en función de algunos parámetros adimensionales que intervienen en el problema.

De una manera experimental F. Wolff y R. Viskanta⁴ tratan de comprobar dichos efectos, así como la importancia que tiene la convección natural en el proceso de solidificación de un metal puro bajo condiciones controladas.

Una forma distinta de plantear los problemas de Stefan es la presentada por Han-taw Chen y Jac-Yuh Lin⁵ quienes consideran el problema de cambio de fase como un problema de frontera móvil; esto es, consideran que tanto la convección natural como la radiación (para su caso) son condiciones de frontera. Para obtener la solución a dicho planteamiento emplean la Técnica Híbrida de la Transformada de Laplace y el método de diferencias finitas.

La solución exacta para un movimiento plano en la frontera es sólo posible para problemas con dominios semi-infinitos y con una distribución inicial de temperatura uniforme. En estos problemas la dificultad del movimiento de fase en la frontera es removido en virtud del hecho de que se comienza en una coordenada constante en la superficie, la cual es transformada a una coordenada de semejanza, reduciéndose así el grado de las ecuaciones a ecuaciones diferenciales ordinarias.

Para problemas de movimiento de fase en la frontera en dominios finitos, es también posible introducir una transformación de coordenadas en la cual la frontera libre es inmobilizada para escalar⁷ las coordenadas, de tal modo que el nuevo sistema de referencia proporcione la localización instantánea de la interfase. Esta transformación tiene el efecto de transferir la no linealidad de las condiciones de frontera de la interfase a la ecuación diferencial, que en este caso permanece como una ecuación diferencial parcial. Este procedimiento de transformación es aplicado por Duda y Vrentas^[6,7] en problemas exactos con movimiento de fase en la frontera, donde una de las fases es colocada a una temperatura de fusión. Para problemas de transporte en la frontera, donde ambas fases son de extensión finita y no uniformes, una doble coordenada de transformación es requerida en la longitud de cada región. Una aplicación previa de la técnica de doble transformación es dada por Crank⁸.

La manera más simple de plantear los problemas de Stefan es la citada por Ramachandran (Op. cit.) y consiste en suponer que el único mecanismo de transferencia de calor en ambas fases es la conducción. Este supuesto ha llevado a un muchos investigadores a utilizar un gran número de métodos para obtener resultados elegantes.

Es así como encontramos reportes como el T. R. Goodman y J. J. Shea⁹ quienes proponen un modelo de una placa de longitud finita la cual esta inicialmente a una temperatura uniforme inferior a la del punto de metalización. El problema es resuelto mediante una aproximación conocida como balance de calor integral, por medio del cual determinan la propagación de

metalización (movimiento de la interfase) y los gradientes de temperaturas en ambas regiones de la placa.

Del mismo modo S. Weinbaum y L. M. Jiji¹⁰ realizan un estudio uni-dimensional de solidificación de una placa de longitud finita, la cual tiene una condición inicial superior a la de metalización. El propósito es determinar la evolución de la interfase y la distribución de temperaturas en ambas fases, colocando diferentes condiciones en la frontera. El método de solución empleado es la teoría de perturbaciones.

El presente trabajo tiene como principal objetivo el determinar la influencia de una perturbación a una condición de frontera de una placa de longitud finita durante el proceso de solidificación, la cual está inicialmente a una temperatura superior a la de metalización. El estudio es uni-dimensional y el método de solución empleado es la técnica de acoplamiento asintótico de la teoría de perturbaciones; esto debido, a la aparición de un parámetro pequeño caracterizado por el recíproco del número de Stefan. Los resultados se presentaran en comparación con otros trabajos para observar las modificaciones propuestas y su influencia en el movimiento de interfase, así como también se muestran los perfiles de temperaturas en ambas fases de la placa.

CAPITULO II

II. PLANTEAMIENTO DEL MODELO MATEMÁTICO

2.1 Geometría del problema

El modelo propuesto consiste en una placa de longitud finita la cual esta inicialmente a una temperatura superior a la de solidificación.

La geometría del problema la podemos representar mediante la figura (2.1), en donde las condiciones de frontera propuestas son las siguientes:

- a) La frontera en $x=0$ se pone a una temperatura constante inferior a la de solidificación, esto provoca que exista un flujo de calor del lado líquido a esta cara; con lo cual, la formación del solido adyacente a esta frontera es inevitable.
- b) La frontera en $x=1$ se supone primeramente adiabática. Bajo esta condición se considera que el flujo de calor que se remueve en la frontera opuesta no se esta reponiendo en esta cara, provocando así que se tenga un elevado rango de solidificación.

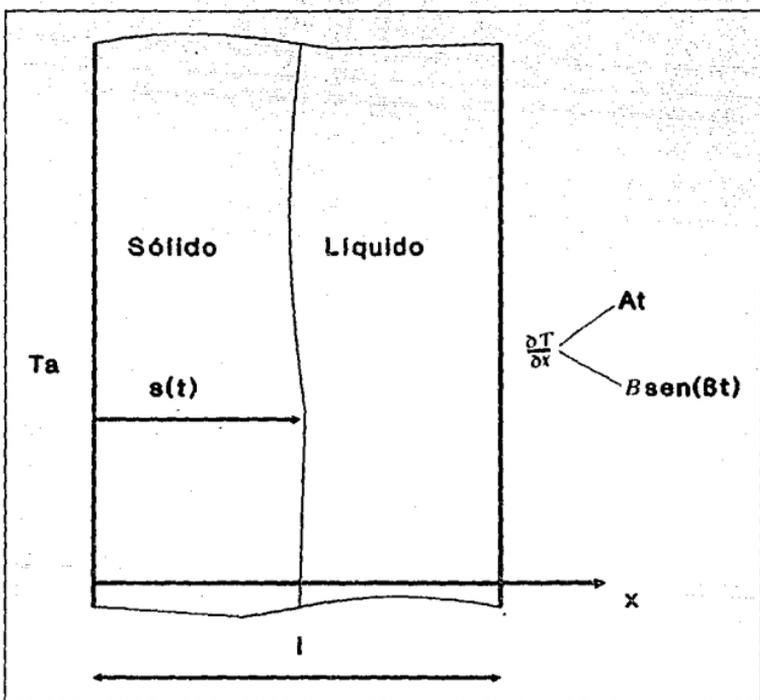


FIG. 2.1 MODELO PROPUESTO

Experimentalmente es casi imposible el hecho de mantener una condición de frontera tanto adiabática como isotérmica; es por esta razón que resulta de interés plantear que una de estas fronteras se modifique con objeto de establecer una condición cuasi-isotérmica o cuasi-adiabática, respectivamente.

En el presente análisis se propone que la condición de frontera cuasi-adiabática está permitiendo un pequeño flujo de calor que hipotéticamente debe retardar el proceso de solidificación. Dicho flujo está representado primeramente por una función temporal lineal y posteriormente por una función armónica senoidal.

2.2 Análisis de la interfase

Ahora se presenta una discusión de las condiciones de frontera en la interfase sólida-líquida para los problemas de cambio de fase. Se analiza para la situación en la cual la solidificación toma lugar a discretos puntos de temperatura, y como resultado las fases sólida y líquida son separadas por un perfil de interfase.

Las relaciones fundamentales que deben satisfacer la interfase son:

1. La temperatura de ambas fases en puntos adyacentes a la interfase, debe ser la misma, la cual es normalmente la de solidificación del material.

$$T_s(x, t) = T_l(x, t) = T_f$$

2. Se debe satisfacer un balance de energía en la interfase.

2.2.1 Análisis de la transferencia de energía

Para poder establecer una relación entre la transferencia de calor existente entre el sólido y el líquido, se puede basar en la siguiente figura.

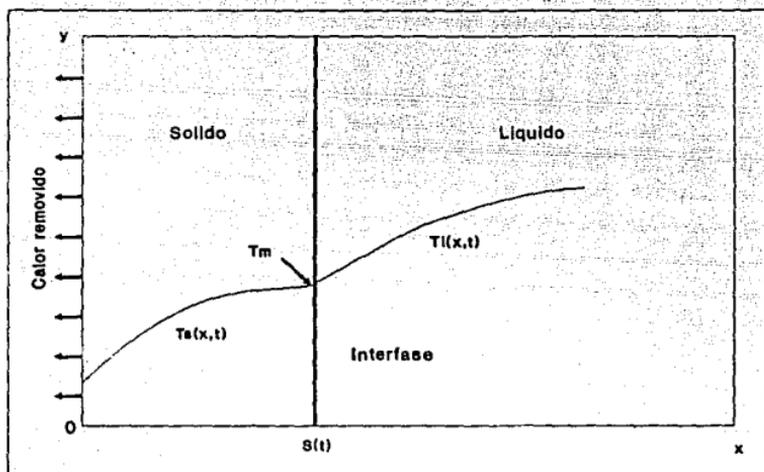


FIG.2.2 BALANCE DE ENERGÍA Y MOVIMIENTO EN LA INTERFASE.

de donde se puede observar las direcciones de los flujos de calor en base a este proceso; con lo cual, la formulación matemática que define dichos requerimientos se deriva bajo una hipótesis uni-direccional.

| | | | | |
|---|---|--|---|---|
| Flujo de calor en la dirección negativa x a través de la fase solida | - | Flujo de calor en la dirección negativa x a través de la fase liquida | = | Razón de calor liberado durante la solidificación por unidad de área |
|---|---|--|---|---|

lo cual puede ser sustituido por:

$$-(q_s - q_L) = \rho L_q \frac{ds(t)}{dt} \quad (2.1)$$

donde q_L y q_s son los flujos de calor en la dirección positiva x en las fases líquida y sólida, respectivamente y el signo menos del lado izquierdo es incluido para asegurar que el flujo de calor sea en la dirección negativa de x . Donde L es el calor latente de solidificación del material, ρ es la densidad y $s(t)$ es la localización de la interfase sólido-líquido.

Si se supone que el mecanismo de transferencia de calor en ambas fases es por pura conducción, tendremos que:

$$q_L = -k_L \frac{\partial T_L}{\partial x} \quad q_s = -k_s \frac{\partial T_s}{\partial x} \quad (2.2)$$

Entonces la ecuación de balance de energía al sustituir (2.2) en (2.1) toma la forma;

$$k_s \frac{\partial T_s}{\partial x} - k_L \frac{\partial T_L}{\partial x} = \rho L \frac{ds(t)}{dt} \quad (2.3)$$

Esta ecuación es derivada para los procesos de solidificación mostrados en la figura (2.1), en la cual la interfase se mueve en la dirección positiva de x .

Es necesario aclarar que si el mecanismo de transferencia de calor en la fase líquida es por convección, debe sustituirse el flujo de calor de la ecuación (2.3) por $h(T_m - T_f)$.

2.3 Planteamiento matemático

Conociendo la física del problema, se sabe que los procesos de solidificación tienen como mecanismos de transferencia de calor a la convección natural ocasionada por el gradiente térmico en la fase líquida y la conducción en el lado sólido; debido a esto, el modelo que estrictamente debe plantearse, es el de un balance de energía en la interfase con los respectivos mecanismos de transferencia de calor mencionados anteriormente.

Para fines de simplificación matemática, se considerarán despreciables los efectos de la convección natural; es decir, se estudiara el caso en el que el líquido se comporta prácticamente como un sólido y cuyo mecanismo predominante en la transferencia de energía es la conducción. La razón por la cual se hace esta aproximación se explicará en el proceso de adimensionalización y en el método de solución.

Así mismo, pensando en la solidificación de una placa de longitud finita, por simplicidad es conveniente estudiar el problema de una manera uni-dimensional. También se debe considerar que las propiedades térmicas del material tales como la conductividad y difusividad térmica y densidad son constantes.

Despreciando los efectos de contracción o expansión volumétrica por parte del fluido, las ecuaciones que describen el fenómeno son:

A. Ecuación de la energía en el líquido

$$\frac{\partial T_L}{\partial t} = \alpha_1 \frac{\partial^2 T_L}{\partial y^2} \quad (2.4)$$

$$T_L(x, 0) = T_i \quad (2.5)$$

$$T_L[s(t), t] = T_f \quad (2.6)$$

$$-k \frac{\partial T_L(1, t)}{\partial x} = At \quad (2.7a)$$

$$-k \frac{\partial T_L(1, t)}{\partial x} = Bsens t \quad (2.7b)$$

Donde A y B son constantes de modulación las cuáles serán definidas más adelante.

B. Ecuación de la energía en el sólido

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \alpha_s \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} \quad (2.8)$$

$$T_s(0, t) = T_a \quad (2.9)$$

$$T_s[s(t), t] = T_f \quad (2.10)$$

C. Ecuación de la interfase

$$\left[K_s \frac{\partial T_s}{\partial y_s} - K_l \frac{\partial T_l}{\partial y_l} \right] = \rho L_q \frac{ds}{dt} \quad (2.11)$$

$$s(0) = 0 \quad (2.12)$$

2.4 Adimensionalización

2.4.1 Generalidades

Muchos de los problemas físicos más importantes en ingeniería no pueden resolverse fácilmente por métodos teóricos.

Problemas de este tipo son muy comunes en mecánica de fluidos, transferencia de calor, procesos de transferencia de masa, etc. Un método para atacar la solución de problemas de este tipo es el análisis dimensional.

Básicamente, el análisis dimensional es un método que permite reducir el número y complejidad de las variables que intervienen en la descripción de un fenómeno físico, con ayuda de una serie de técnicas.

Las ventajas más comunes que nos representa este análisis son:

- 1° Representa un enorme ahorro de tiempo y dinero
- 2° Ayuda a pensar y planificar un experimento.
Sugiere las variables que deben descartarse, o bien un conjunto de éstas. También ofrece la gran ventaja de dar información sobre las relaciones físicas que intervienen en el problema.
- 3° Proporciona las leyes de escala que pueden convertir los datos obtenidos en experimentos dados sobre un pequeño modelo en la información para un prototipo.

2.4.2 Obtención de parámetros adimensionales

En base a la geometría del problema y gracias a los rangos de temperatura manejados, es posible establecer una relación entre parámetros con el fin de obtener las variables de referencia del problema, las cuales son:

$$\theta = \frac{K_s(T_s - T_f)}{K_L(T_i - T_f)}$$

$$\phi = \frac{(T_L - T_f)}{(T_i - T_f)}$$

$$\xi = \frac{\kappa}{s(t)}$$

$$\chi = \frac{(\kappa - s(t))}{(1 - s(t))}$$

$$\sigma = \frac{s(t)}{1}$$

$$A = \epsilon^{1/2} \frac{-k_L(T_i - T_f)}{t_R l}$$

$$B = \epsilon^{1/2} \frac{-k_L(T_i - T_f)}{1}$$

$$B = \frac{1}{t_R}$$

donde θ , ϕ y σ son las cantidades adimensionales de la temperatura en las fases sólida y líquida y la localización de la interfase respectivamente.

En cuanto a las constantes de modulación A y B, se definieron con el objeto de poder establecer libremente el tipo de condición de frontera; ya que como se puede constatar, según el valor de éstas la condición de frontera variará desde una condición adiabática hasta una condición isotérmica. En nuestro caso, dichas variables tienen la función de establecer una condición de frontera cuasi-adiabática.

Las anteriores variables se obtienen fácilmente, pero para el tiempo de referencia es necesario analizar la ecuación de balance en la interfase, donde:

$$t_R = \frac{l^2 \text{Ste}}{\alpha_L}$$

Analizando el tiempo de referencia, se decide que es conveniente representar al recíproco de Stefan como el parámetro de perturbación del problema.

$$\epsilon = \frac{1}{\text{Ste}} = \frac{C_p(T_i - T_f)}{L_q}$$

donde $C_p(T_i - T_f)$ es la capacitancia de calor de la fase líquida referida a la temperatura de fusión y L_q es el calor latente de fusión.

Dado que valores típicos C_p/L_q por °C para algunos materiales es: 0.01249 para el agua, 0.0293 para el hierro, 0.00335 para el cobre; es claro que se puede manejar un diferencial de temperaturas del orden de 40°C para el agua y 130°C para metales líquidos sin exceder un valor límite del parámetro de perturbación ($\epsilon \leq 0.5$).

Con lo anterior, el tiempo de referencia representa el tiempo característico para que el movimiento de la interfase ocurra, siendo este mayor comparado con el tiempo de referencia teórico de difusión de la fase líquida (l^2/α_L) para cuando el $\epsilon \ll 1$; esto quiere decir que el tiempo que necesita la interfase para su movimiento es menor que el tiempo que tiene que pasar para que se presente la convección natural en la fase líquida.

Introduciendo los anteriores parámetros en las ecuaciones (2.1)-(2.12) obtenemos:

A. Fase líquida

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \chi^2} = \epsilon \left[(1-\sigma)^2 \frac{\partial \phi}{\partial \tau} - (1-\sigma)(1-\chi) \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} \frac{\partial \phi}{\partial \chi} \right] \quad (2.13)$$

$$\phi(\chi, 0) = 1 \quad (2.14)$$

$$\phi(0, \tau) = 0 \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \phi(1, \tau)}{\partial \chi} = \epsilon^{1/2} (1-\sigma) \tau \quad (2.16a)$$

$$\frac{\partial \phi(1, \tau)}{\partial \chi} = \epsilon^{1/2} (1-\sigma) \text{sen} \tau \quad (2.16b)$$

B. Fase sólida

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} = \epsilon \left(\frac{\alpha_L}{\alpha_s} \right) (\sigma^2 \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \xi \sigma \frac{d\sigma}{d\tau} \frac{\partial \theta}{\partial \xi}) \quad (2.17)$$

$$\theta(0, \tau) = \frac{K_a(T_a - T_f)}{K_L(T_1 - T_f)} = \theta_a \quad (2.18)$$

$$\theta(1, \tau) = 0 \quad (2.19)$$

C. Interfase

$$(1-b) \frac{\partial \theta(1, \tau)}{\partial \zeta} - \sigma \frac{\partial \phi(0, \tau)}{\partial \chi} = \sigma(1-\sigma) \frac{d\sigma}{d\tau} \quad (2.20)$$

$$\sigma(0) = 0 \quad (2.21)$$

Por facilidad se incluye la relación de conductividades térmicas K_s/K_L en la variable adimensional θ del sólido; donde esta tendrá un valor negativo, en virtud de que T_s siempre es menor a T_f .

La no linealidad debido al desconocimiento de la localización de la interfase tiende a ser transferida de las condiciones de interfase a las ecuaciones de balance de calor en el sólido y en el líquido.

CAPITULO III

III. METODOLOGÍA

3.1 Generalidades

En la literatura existente se puede apreciar que la principal característica rasgo de los problemas de Stefan es el desconocimiento de las condiciones de interfase, así como el movimiento de la misma.

La teoría de perturbación es una colección de métodos iterativos para obtener soluciones del comportamiento global de una ecuación diferencial, la cual involucra un parámetro pequeño. Como puede verse el problema de Stefan previamente definido por las ecuaciones (2.13)-(2.21), puede ser tratado, por los comentarios anteriores como un problema de perturbación.

Estos métodos son tan completos, que actualmente son empleados al encontrarse con un parámetro pequeño temporal, el cual inicialmente puede ser despreciado (disminuyendo así la complejidad del problema) para después ser evaluado según su valor en el problema; siendo el término inicial de la solución (cuando el parámetro pequeño es despreciado) el factor de mayor importancia y los términos subsecuentes los factores de corrección.

El procedimiento general del método de perturbaciones es el de identificar un parámetro pequeño usualmente denotado por ϵ , tal que cuando $\epsilon=0$ el problema comience a ser soluble. La solución global para el problema puede ser estudiada por un análisis local próximo a $\epsilon=0$. Con lo cual, se estará convirtiendo o descomponiendo la solución de la variable en cuestión en una serie de términos los

cuales están multiplicados por el parámetro de perturbación elevado

desde una potencia cero hasta una potencia n , como se muestra a continuación:

$$U(x) = U(x)_0 + \epsilon^1 U(x)_1 + \epsilon^2 U(x)_2 + \dots + \epsilon^n U(x)_n \quad (3.1)$$

3.1.1 Análisis de perturbaciones

Al analizar un problema dado, el cual se desea convertir en un problema de perturbaciones, es necesario seguir los siguientes pasos:

- I. Convertir el problema original en un problema de perturbación al introducir un parámetro pequeño tal como ϵ .

Algunas veces este punto resulta ambiguo, a causa de que existen varios caminos para introducir el parámetro ϵ . Aunque es preferible introducir ϵ en donde el orden cero de la solución aporte el término de relevancia en la serie de perturbación propuesta.

Resulta claro observar que este punto puede ser omitido en el entendido que la ecuación original contenga un parámetro pequeño, el cual puede ser tomado y desarrollado a su vez en serie de potencias para convertirlo en el parámetro de perturbación requerido.

- II. Agrupar expresiones que correspondan a un mismo valor de potencia de ϵ y solucionar dichas expresiones.
La solución de orden cero consiste en hacer $\epsilon=0$.

- III. Retomar la respuesta del problema original para valores apropiados de ϵ .

3.1.2 Teoría de perturbación regular y singular

Las series de perturbación ocurren en dos variedades:

1. Se definirá un problema de perturbación regular como uno cuya serie de perturbación es una serie de potencias en ϵ teniendo un radio de convergencia. Un rasgo básico de todos los problemas de perturbación regular (el cual se utiliza para identificar dichos problemas) es que la solución exacta para un pequeño valor de ϵ , tiene como principal valor la solución del problema de orden cero (cuando $\epsilon=0$) y las posteriores soluciones son pequeñas correcciones al dicho orden.

2. Se define un problema de perturbación singular como uno cuya serie de perturbación en cada caso no toma la forma de una serie de potencias; o si lo toma, la serie de potencia tiene un radio de convergencia. En la perturbación singular, algunas veces no se obtiene la solución para el problema cuando $\epsilon=0$; cuando una solución al problema no perturbado existe, sus rasgos cualitativos son distinguiblemente diferentes de la solución exacta para valores pequeños de ϵ . También los problemas de perturbación singular tienen la característica de que algunos intervalos o condiciones de frontera se pierden al hacer $\epsilon=0$.

En cada caso la solución exacta para $\epsilon=0$ es fundamentalmente diferente en carácter de las soluciones obtenidas próximas en el límite $\epsilon \rightarrow 0$. Si este no es un cambio tan abrupto en carácter, entonces podemos tender a clasificar el problema como un problema de perturbación regular.

Cuando se trabaje con un problema de perturbación singular hay que tener cuidado en distinguir entre el orden cero de solución (termino líder en la serie de perturbación) y la solución del problema no perturbado, dado que este último puede no existir. Mientras que en la perturbación regular no existe dicha diferencia.

3.1.3 Acoplamiento asintótico

El principio de acoplamiento asintótico es muy simple. Cuando en un intervalo un valor de frontera del problema rompa con una secuencia en dos o más sub-intervalos traslapados; es necesario que en cada sub-intervalo se emplee la teoría de perturbaciones para obtener una aproximación asintótica a la solución de la ecuación diferencial válida para ese intervalo.

Posteriormente se realiza un acoplamiento entre un par de intervalos al aproximarlos asintóticamente hacia el límite en cuestión, teniendo ambos una misma forma funcional.

Lo anterior nos da una secuencia de aproximaciones asintóticas a la solución de la ecuación diferencial.

Por construcción, cada aproximación satisface todas las condiciones de frontera dadas en varios puntos del intervalo. Por lo tanto, el resultado final es una solución aproximada a un problema de valor de frontera válido en el intervalo completo.

3.2 Proceso de solución

Si se explora una solución aproximada de las ecuaciones (2.13), (2.17) y (2.20), sujetas a las condiciones de frontera y a la condición inicial (2.14)-(2.16), (2.18)-(2.19) y (2.21), en la forma de una expansión asintótica válida para $\epsilon \ll 1$, una inspección superficial de las ecuaciones sugiere una expansión regular de perturbación de la forma

$$\theta(\xi, \tau, \epsilon) \sim \sum_{n=0}^N \epsilon^{n/2} \theta_n(\xi, \tau) \quad (3.2)$$

$$\phi(\chi, \tau, \epsilon) \sim \sum_{n=0}^N \epsilon^{n/2} \phi_n(\chi, \tau) \quad (3.3)$$

$$\sigma(\tau, \epsilon) \sim \sum_{n=0}^N \epsilon^{n/2} \sigma_n(\tau) \quad (3.4)$$

en las cuales existe una singularidad cuando $\epsilon = 0$; ya que como se observa en las ecuaciones (2.13), (2.17) y (2.20), la condición inicial de ambas fases no se satisface, dado que los términos temporales se pierden al realizar la expansión.

La no uniformidad de la expansión en las regiones próximas a $\tau = 0$ puede ser corregida al construir una expansión interna para θ , ϕ y σ válida para una escala de tiempo donde $\tau \ll 1$. Dicha expansión interior tenderá a satisfacer la condición inicial para después acoplarse con la expansión externa.

Dado que el problema se estudia para dos distintas condiciones de frontera en la fase líquida, se procede a realizar por separado el método de solución.

3.2.1 Función temporal lineal

En el caso de la función temporal lineal como modificación a la condición adiabática, se debe tomar como condición de frontera en el líquido la especificada por la ecuación (2.16a)

3.2.1.1 Zona Externa

A continuación se procede a realizar la expansión de las variables externas al sustituir las ecuaciones (3.2)-(3.4) en las ecuaciones (2.13), (2.17) y (2.20); inmediatamente después se agrupan los términos que tengan la misma potencia en ϵ .

El orden cero y el primer orden de corrección resultan ser:

A. Líquido

$$\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial \chi^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \chi^2} = 0 \quad (3.5)$$

B. Sólido

$$\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial \xi^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \xi^2} = 0 \quad (3.6)$$

C. Interfase

$$(1-\sigma_0) \frac{\partial \theta_0(1, \tau)}{\partial \xi} - \sigma_0 \frac{\partial \phi_0(0, \tau)}{\partial \chi} = \sigma_0(1-\sigma_0) \frac{d\sigma_0}{d\tau} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} (1-\sigma_0) \frac{\partial \theta_1(1, \tau)}{\partial \xi} - \sigma_1 \frac{\partial \theta_0(1, \tau)}{\partial \xi} - \sigma_0 \frac{\partial \phi_1(0, \tau)}{\partial \chi} - \sigma_1 \frac{\partial \phi_0(0, \tau)}{\partial \chi} \\ = \sigma_0(1-\sigma_0) \frac{d\sigma_1}{d\tau} - \sigma_0 \sigma_1 \frac{d\sigma_0}{d\tau} + \sigma_1(1-\sigma_0) \frac{d\sigma_0}{d\tau} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Obteniendo la solución de la fase líquida, al resolver la ecuación (3.5) dadas las condiciones de frontera en (2.15) y (2.16a):

$$\phi_0 = 0 \quad (3.9a)$$

$$\phi_1 = (1 - \sigma_0) \tau \chi \quad (3.9b)$$

El orden cero y el primer orden de corrección para la fase sólida es obtenida al resolver las ecuaciones (3.6) bajo las condiciones de frontera dadas en la ecuación (2.18) y (2.19)

$$\theta_0 = \theta_a(1 - \xi) \quad (3.10a)$$

$$\theta_1 = 0 \quad (3.10b)$$

sustituyendo los anteriores resultados en las ecuaciones (3.7) y (3.8) se obtiene:

$$\sigma_0 = \sqrt{C_0 - 2\theta_a \tau} \quad (3.11a)$$

$$\sigma_1 = \frac{C_1}{\sqrt{C_0 - 2\theta_a \tau}} + \frac{(C_0 - 2\theta_a \tau)}{5\theta_a^2} \left[\frac{C_0}{3} - \theta_a \tau \right] \quad (3.11b)$$

donde C_0 y C_1 son constantes que aparecen en el proceso de solución debido a que la condición inicial no se está satisfaciendo, posteriormente se determinan al realizar el acoplamiento con la zona interna.

En la ecuación (3.9b) es necesario sustituir el valor de σ_0 para dejar a ϕ_1 en función de la variable independiente τ ; realizando esto:

$$\phi_1 = (1 - \sqrt{C_0 - 2\theta_a \tau}) \tau \chi \quad (3.9b')$$

3.2.1.2 Zona Interna

En vista de que la condición inicial no se satisface, es necesario realizar una expansión interna, la cual tendrá la forma de las siguientes variables:

$$\theta(\xi, T) = \theta(\xi, \tau)$$

$$\tilde{\phi}(\chi, T) = \phi(\chi, \tau)$$

$$\delta(T) = \sigma(\tau)$$

$$T = \frac{\tau}{\epsilon}$$

De la definición de escala larga de tiempo de la variable τ y la relación antes mostrada, es evidente que el tiempo de referencia para las dimensiones de escala corta en la variable T es l^2/α_L , que es el tiempo característico de difusión de la parte líquida. Sustituyendo las expresiones anteriores en las ecuaciones (2.13), (2.17) y (2.20) se obtiene las ecuaciones para el problema en variables internas.

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} = \frac{\alpha_L}{\alpha_n} (\delta^2 \frac{\partial \theta}{\partial T} - \xi \delta \frac{d\delta}{dT} \frac{\partial \theta}{\partial \xi}) \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \chi^2} = (1-\delta)^2 \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial T} - (1-\delta)(1-\chi) \frac{d\delta}{dT} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \chi} \quad (3.13)$$

$$\epsilon [(1-\delta) \frac{\partial \theta(1, T)}{\partial \xi} - \delta \frac{\partial \tilde{\phi}(0, T)}{\partial \chi}] = \delta(1-\delta) \frac{d\delta}{dT} \quad (3.14)$$

Las condiciones iniciales y de frontera para las variables internas θ , ϕ y σ son obtenidas de las ecuaciones (2.14)-(2.16), (2.18)-(2.19) y (2.21).

Asumiendo una expansión interna para las variable θ , ϕ , σ de la forma:

$$\theta(\xi, \tau; \epsilon) = \sum_{n=0}^N \epsilon^{n/2} \theta_n(\xi, \tau) \quad (3.15)$$

$$\hat{\phi}(\chi, \tau; \epsilon) = \sum_{n=0}^N \epsilon^{n/2} \hat{\phi}_n(\chi, \tau) \quad (3.16)$$

$$\delta(\tau) = \sum_{n=0}^N \epsilon^{n/2} \delta_n(\tau) \quad (3.17)$$

Ahora se procede a sustituir (3.15)-(3.17) en (3.12)-(3.14) e igualando coeficientes con misma potencia en ϵ . El resultado de dichas ecuaciones se simplifica enormemente al observar en el lado izquierdo de la ecuación (3.14) esta multiplicado por ϵ . Por lo tanto, en el orden más bajo de la escala de tiempo interno, el movimiento de interfase puede ser despreciado. Utilizando este resultado en las ecuaciones (3.12) y (3.13) se obtiene el orden cero y primer orden de las fases sólida y líquida.

A) Fase líquida

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}_0}{\partial \chi^2} = \frac{\partial \hat{\phi}_0}{\partial \tau} \quad (3.18a)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}_1}{\partial \chi^2} = \frac{\partial \hat{\phi}_1}{\partial \tau} - 2\delta_1 \frac{\partial \hat{\phi}_0}{\partial \tau} - (1-\chi) \frac{d\delta_1}{d\tau} \frac{\partial \hat{\phi}_0}{\partial \chi} \quad (3.18b)$$

B) Fase sólida

$$\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial \xi^2} = 0 \quad (3.19a)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \xi^2} = 0 \quad (3.19b)$$

C) Interfase

$$\frac{\partial \theta_0(1, T)}{\partial \xi} = \delta_1 \frac{d\delta_1}{dT} \quad (3.20a)$$

$$\frac{\partial \theta_1(1, T)}{\partial \xi} - \delta_1 \frac{\partial \theta_0(1, T)}{\partial \xi} - \delta_1 \frac{\partial \phi_0(0, T)}{\partial \chi} = \frac{d(\delta_1 \delta_2)}{dT} - \delta_1^2 \frac{d\delta_1}{dT} \quad (3.20b)$$

De las ecuaciones (3.18)-(3.20) y dadas las condiciones de frontera (2.14)-(2.16a), se obtienen las siguientes soluciones:

A) Líquido

$$\phi_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{2}{(j+\frac{1}{2})\pi} \sin(j+\frac{1}{2})\pi\chi \right] e^{-((j+\frac{1}{2})\pi)^2 T} \quad (3.21a)$$

B) Sólido

$$\theta_0 = \theta_a(1-\xi) \quad (3.22a)$$

$$\theta_1 = 0 \quad (3.22b)$$

C) Interfase

$$\delta_0 = 0 \quad (3.23a)$$

$$\delta_1 = \sqrt{-2\theta_a T} \quad (3.23b)$$

$$\delta_2 = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2}{[(j+\frac{1}{2})\pi]^2} e^{-[(j+\frac{1}{2})\pi]^2 T} - \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(j+\frac{1}{2})\pi\sqrt{T}}{[(j+\frac{1}{2})\pi]^3 \sqrt{T}} \right) \quad (3.23c)$$

3.2.1.3 Acoplamiento

El propósito del acoplamiento es encontrar la relación entre las constantes obtenidas en la solución externa (C_0 y C_1). La idea básica se presentó al inicio de este capítulo.

Para realizar dicho acoplamiento es necesario hacer tender las variables en cuestión, asintóticamente hacia el intervalo próximo; teniendo ambas, una misma forma funcional.

El primer paso consiste en presentar la solución para cada expansión.

La solución externa quedará representada por la suma de las ecuaciones (3.11a) y (3.11b).

$$\sigma_{Ext} = \sqrt{C_0 - 2\theta_a \tau} + \epsilon^{1/2} \left(\frac{C_1}{\sqrt{C_0 - 2\theta_a \tau}} - \frac{(C_0 - 2\theta_a \tau)}{5\theta_a^2} \left[\frac{C_0}{3} + \theta_a \tau \right] \right) \quad (3.24)$$

La solución interna se obtiene al sumar la ecuación (3.23b) y (3.23c)

$$\begin{aligned} \delta_i = & \epsilon^{1/2} \sqrt{-2\theta_a \tau} - \epsilon \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{2}{[(j + \frac{1}{2})\pi]^2} e^{-[(j + \frac{1}{2})\pi]^2 \tau} \right. \\ & \left. - \sqrt{\pi} [(j + \frac{1}{2})\pi]^{-3} \tau^{-1/2} \operatorname{erf}(j + \frac{1}{2})\pi\sqrt{\tau} \right] \quad (3.25) \end{aligned}$$

A continuación se presenta la solución interna en función de parámetros externos mediante la relación $T = \tau/\epsilon$; esto para que se tenga una misma forma funcional.

También es necesario una aproximación asintótica en las variables al hacerlas tender al límite en cuestión; esto es, $\tau \rightarrow 0$ y por otro lado $T \rightarrow \infty$.

El sustituir las variables en las ecuaciones (3.24) y (3.25), y al hacerlas tender a dicho limite obtenemos:

$$\sigma_{Ext} = \sqrt{C_0 - 2\theta_a \tau} - O(\epsilon^{1/2}) \quad (3.26)$$

$$\theta_i = \sqrt{-2\theta_a \tau} - O\left(\frac{\epsilon^{3/2}}{\sqrt{\tau}}\right) \quad (3.27)$$

Comparando las ecuaciones elemento a elemento de similar potencia en ϵ , es evidente que las constantes $C_0 = C_1 = 0$ para que el acoplamiento se pueda cumplir.

3.2.2 Función temporal armónica senoidal

Ahora se analizará el problema con la condición de frontera en la fase líquida especificada en la ecuación (2.16b).

3.2.2.1 Zona externa

Nuevamente las ecuaciones a resolver son las (2.13), (2.17) y (2.20) teniendo como única diferencia la condición de frontera antes mencionada.

Es evidente que dicha condición de frontera en la fase líquida no interviene en el comportamiento de la fase sólida, es por eso que al momento de realizar el análisis, la solución en la fase sólida representada por las ecuaciones (3.10a) y (3.10b) no se altera.

Para el orden cero de solución, tanto en la fase líquida como en la interfase, el resultado es el mismo mostrado en las ecuaciones (3.9a) y (3.11a).

Para obtener el primer orden de corrección en la fase líquida se debe resolver la ecuación (3.5) dada la condición de frontera (2.16b), realizando esto:

$$\phi_1 = (1 - \sqrt{C_0 - 2\theta_a \tau}) \operatorname{sen} x \quad (3.28)$$

La solución del primer orden de corrección en el movimiento de la interfase se obtiene de la ecuación (3.8) al sustituir en estas las ecuaciones (3.9a), (3.10), (3.11a) y (3.28).

$$\sigma_1 = \frac{C_1}{\sqrt{\tau}} - 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \tau^{2(m+1)}}{(4m+5)(2m+1)!} \quad (3.29)$$

3.2.2.2 Zona interna

Se nota de (3.20a) que el primer orden de corrección en el movimiento de la interfase depende sólo del gradiente térmico de la fase sólida. Es decir, $\partial\phi_0/\partial x$ sólo afectará el movimiento de la interfase a un segundo orden como se obtuvo en (3.20b); es por esta razón que la perturbación propuesta en la condición de frontera del líquido, cualquiera que esta sea, no va a influir en el comportamiento de la interfase en la zona interna sino hasta valores de orden de $\epsilon^{3/2}$, los cuales no serán considerados en este trabajo.

Por lo anterior se puede asumir que las ecuaciones (3.21)-(3.23) son también válidas en la zona interna para la condición de frontera propuesta.

3.2.2.3 Acoplamiento

En este punto se debe aclarar que durante el proceso de solución de la condición de frontera armónica senoidal, se observó la similitud de los resultados con la frontera lineal en el orden cero de la interfase; con lo cual, el acoplamiento en dicho orden es semejante en ambos casos y por lo tanto el valor de la constante C_0 es el mismo.

Dada la simplificación anterior al considerar $C_0 = 0$, se obtuvieron los primeros órdenes de corrección tanto en la fase líquida como en la interfase.

El siguiente paso es calcular el valor de la constante C_1 mediante el procedimiento descrito en el acoplamiento de la función temporal lineal, de aquí el valor obtenido es $C_1 = 0$.

CAPITULO IV

IV. RESULTADOS

4.1 Resultados

Los resultados se deben presentar en base a la expansión propuesta en las ecuaciones (3.2)-(3.4) y (3.15)-(3.17).

4.1.1 Resultados de la función temporal lineal

A. Líquido

i) Zona externa

$$\phi_{\text{Externa}} = \epsilon^{1/2} (1 - \sqrt{-2\theta_a \tau}) \tau \chi \quad (4.1)$$

ii) Zona interna

$$\hat{\phi}_{\text{Interna}} = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{2}{(j + \frac{1}{2})\pi} \text{sen}(j + \frac{1}{2})\pi\chi \right] e^{-[(j + \frac{1}{2})\pi]^2 \tau} \quad (4.2)$$

B. Sólido

$$\theta_{\text{Global}} = \theta_a (1 - \xi) \quad (4.3)$$

C) Interfase

i) Zona externa

$$\sigma_{\text{Externa}} = \sqrt{-2\theta_a \tau} - \epsilon^{1/2} \left(\frac{2}{5} \tau^2 \right) \quad (4.4)$$

ii) Zona interna

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{interna}} = & \epsilon^{1/2} \sqrt{-2\theta_a \tau} + \epsilon \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{2}{\left[\left(j + \frac{1}{2} \right) \pi \right]^2} e^{-\left[\left(j + \frac{1}{2} \right) \pi \right]^2 \tau} \right. \\ & \left. - \sqrt{\pi} \left[\left(j + \frac{1}{2} \right) \pi \right]^{-3} \tau^{-1/2} \operatorname{erf} \left[\left(j + \frac{1}{2} \right) \pi \sqrt{\tau} \right] \right] \quad (4.5) \end{aligned}$$

4.1.2 Resultados de la función armónica senoidal

A) Líquido

$$\phi_{\text{Externa}} = \epsilon^{1/2} (1 - \sqrt{-2\theta_a \tau}) \operatorname{sen} \chi \quad (4.6)$$

C) Interfase

$$\sigma_{\text{Externa}} = \sqrt{-2\theta_a \tau} - \epsilon^{1/2} \left[2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \tau^{2(m+1)}}{(4m+5)(2m+1)!} \right] \quad (4.7)$$

Como ya se menciono, los resultados tanto en la fase sólida, zona interna de la fase líquida y zona interna para el movimiento de la interfase son semejantes a las analizadas en el caso de la función lineal como condición de frontera.

En las anteriores soluciones es importante observar la existencia de dos parámetros relevantes que están representados por ϵ y θ_s , los cuales influyen directamente en el comportamiento de las ecuaciones.

4.2 Presentación de Gráficas

Para mayor facilidad de lectura se realizan los comentarios y conclusiones por grupos de gráficas y posteriormente se hacen los comentarios generales en el capítulo de conclusiones.

Cabe señalar que las gráficas correspondientes a la distribución de temperaturas en la fase sólida no se incluyen debido a que ésta no representa gran interés, ya que como se puede percibir de la ecuación (4.3) la relación que guarda θ con ζ es lineal; así mismo, ésta permanece inalterada en el proceso de solución.

De este modo, la distribución de temperatura de la fase líquida en la zona interna representada por la ecuación (4.2), no se grafican debido a que en la literatura ya existe este caso. De igual modo se consideró la zona interna de la interfase representada por la ecuación (4.5).

4.2.1 Función lineal

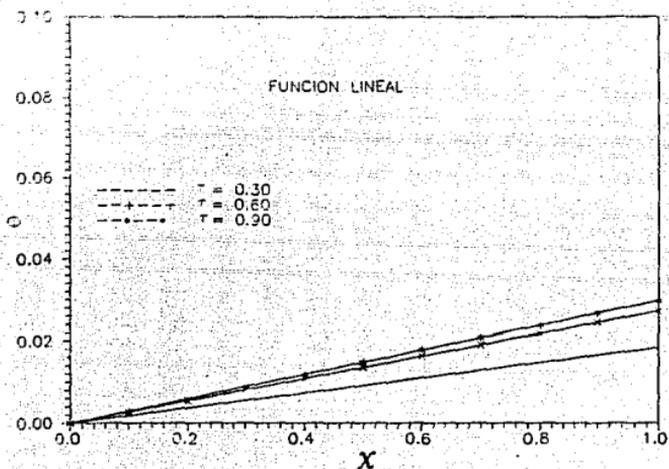


FIG. 4.1 DISTRIBUCION DE TEMPERATURAS EN LA FASE LIQUIDA
CON $\epsilon=0.01$ Y $\theta_a=-0.25$

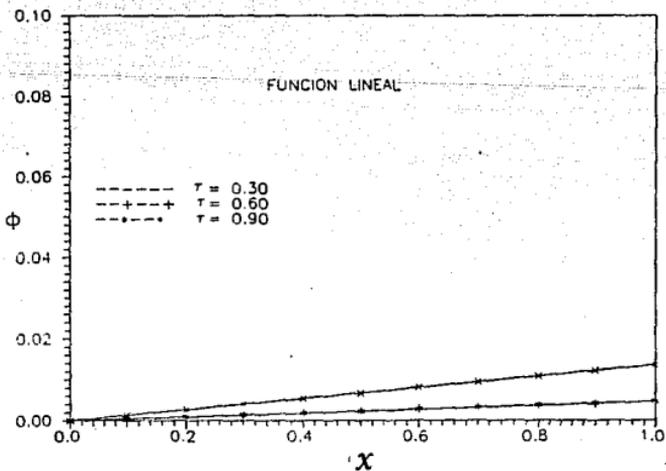


FIG. 4.2 DISTRIBUCION DE TEMPERATURAS EN LA FASE LIQUIDA
CON $\epsilon=0.0$ Y $\theta_a=-0.50$

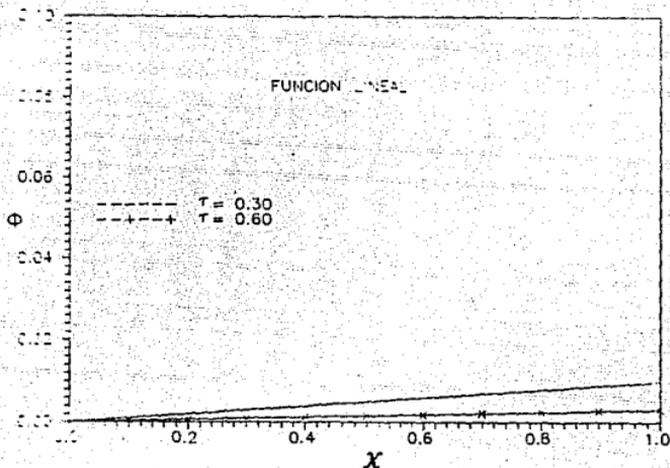


FIG. 4.3 DISTRIBUCION DE TEMPERATURAS EN LA FASE LIQUIDA
CON $\varepsilon=0.01$ Y $\theta_a=-0.75$

La figura (4.1) muestra un comportamiento no esperado, ya que la temperatura aumenta conforme transcurre el tiempo, independientemente de la posición de análisis. Dicho comportamiento se presenta para valores de $\theta_a=-0.25$.

Por otro lado la figura (4.2) presenta un comportamiento diferente a lo esperado, puesto que para valores de tiempo $\tau=0.3$ y $\tau=0.6$ se tiene distribución de temperaturas idénticas.

Comparado las figuras (4.1) y (4.2) se puede apreciar que ϕ disminuye presuntamente por la reducción del valor de θ_a .

Así mismo, de la figura (4.3) se observa que el comportamiento de ϕ satisface la física del problema al estar disminuyendo conforme transcurre el tiempo. Lo anterior se puede explicar o relacionar en base a θ_a , dado que es el único parámetro que se modificó en las figuras. Desgraciadamente estas no nos proporcionan dicha relación.

Además, es notorio que el valor numérico de ϕ comparado con las anteriores gráficas es menor; esto también confirma la influencia directa de θ_a sobre el problema.

Comparando las figuras (4.1)-(4.3) podemos obtener las siguientes conclusiones:

- i) $\theta_a \ll 0$; $\phi \rightarrow 0$
- ii) $\theta_a = 0$; $\phi \rightarrow 1$

El significado físico de lo anterior se puede expresar con los siguientes puntos:

i) El diferencial de temperaturas entre T_a y T_f es tan grande que existe un elevado flujo de calor hacia la frontera del sólido, provocando que se tengan bajos niveles de acumulación térmica en el fluido.

ii) Por el contrario, si se tiene un diferencial de temperaturas T_a y T_f muy bajo; es decir, que $T_a \rightarrow T_f$, el flujo de calor hacia la frontera del sólido será imperceptible, con lo cual los efectos de acumulación térmica en el líquido es mucho mayor.

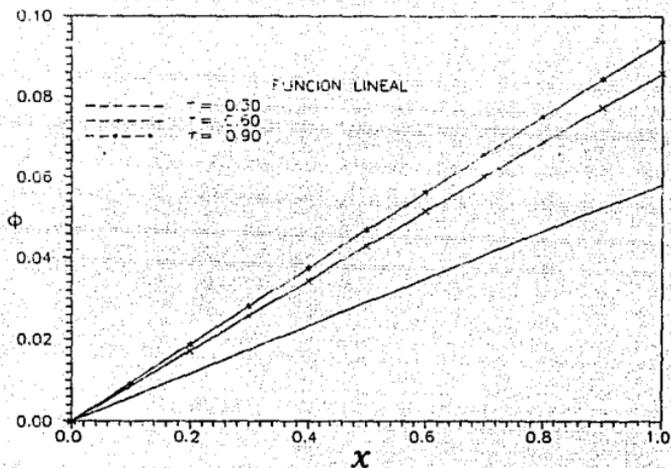


FIG. 4.4 DISTRIBUCION DE TEMPERATURAS EN LA FASE LIQUIDA
CON $\varepsilon=0.10$ Y $\theta_0=-0.25$

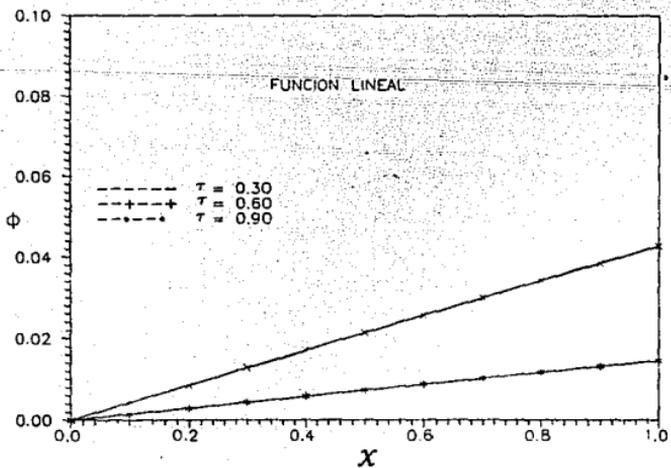


FIG. 4.5 DISTRIBUCION DE TEMPERATURAS EN LA FASE LIQUIDA
CON $\varepsilon=0.10$ Y $\theta_0=-0.50$

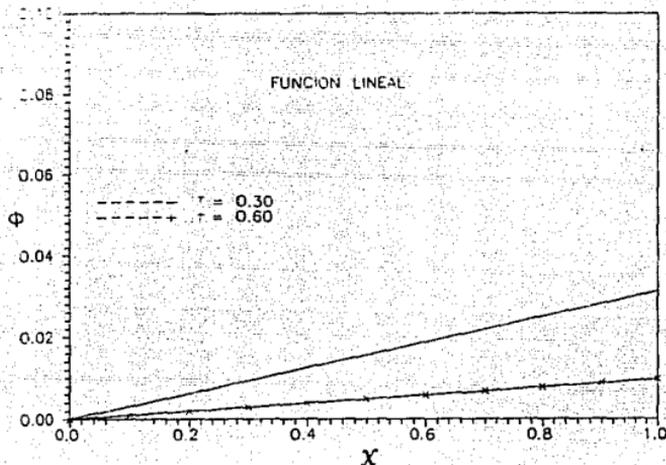


FIG. 4.5 DISTRIBUCIÓN DE TEMPERATURAS EN LA FASE LÍQUIDA
CON $\xi=0.10$ Y $\theta_0=-0.75$

En la figura (4.4) se observa claramente el efecto de incrementar el valor del parámetro de perturbación sobre la distribución de temperaturas en la fase líquida. En esta misma, nuevamente se aprecia el comportamiento no esperado de ϕ con valores de $\theta_0=-0.25$.

Por medio de la figura (4.5) se puede comprobar los efectos de θ_0 sobre ϕ ; así mismo también se comprueba que para $\theta_0=-0.50$ la distribución de temperaturas es la misma en dos diferentes tiempos.

Comparando las figuras (4.1)-(4.3) contra (4.4)-(4.6) se concluye que el parámetro ϵ influye directamente en el comportamiento de ϕ .

Al aumentar ϵ se puede considerar que la capacitancia de calor inicial $C_p(T_i - T_f)$ está aumentando y por tal motivo, le cuesta más trabajo al líquido llegar a la temperatura de fusión, lo cual da por resultando que exista un almacenamiento de calor en la fase líquida.

Si por el contrario $\epsilon \rightarrow 0$, se considera que la capacitancia inicial es muy pequeña, lo cual conduce a afirmar que la temperatura inicial está próxima a la temperatura de solidificación; provocando así, que el almacenamiento de energía térmica en la fase líquida sea prácticamente insignificante, puesto que ésta rápidamente se establece en la temperatura de fusión.

En cuestiones prácticas y para el tratamiento teórico que se le dio al problema, es conveniente el tener valores de $\epsilon \rightarrow 0$.

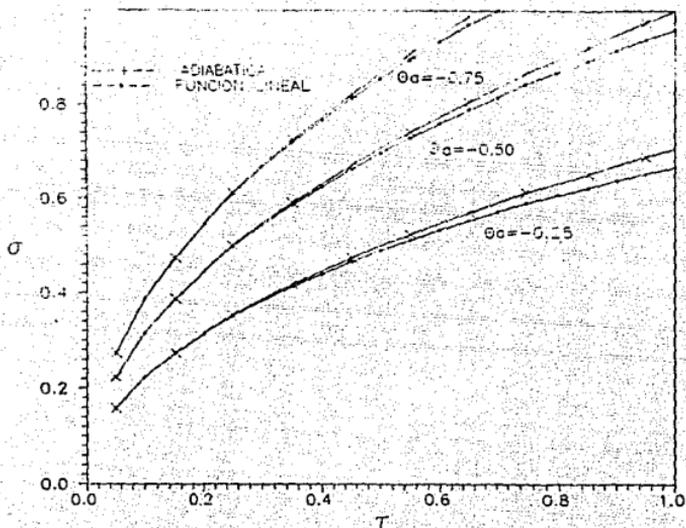


FIG.4.7 COMPARACION DEL MOVIMIENTO DE LA INTERFASE CON $\epsilon=0.01$

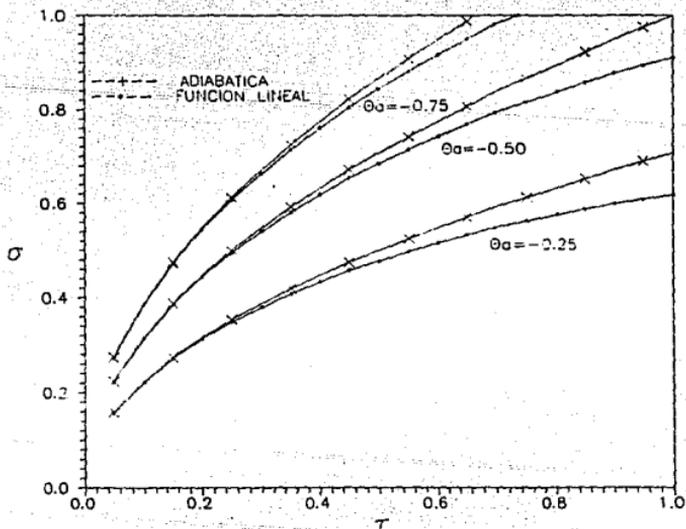


FIG.4.8 COMPARACION DEL MOVIMIENTO DE LA INTERFASE CON $\epsilon=0.05$

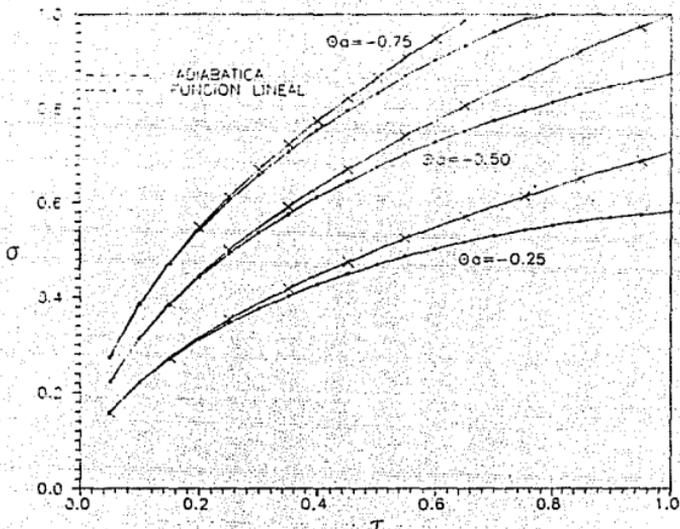


FIG. 4.9. COMPARACION DEL MOVIMIENTO DE LA INTERFASE CON $\epsilon = 0.10$

Las gráficas (4.7)-(4.9) muestran el movimiento de la interfase con condición lineal para diferentes valores de θ_a .

En (4.7) se observa la competencia de la condición adiabática contra la condición lineal que se ve influida directamente por θ_a . La diferencia entre la condición lineal y la condición adiabática se empieza a apreciar para ciertos valores de tiempo y mientras este transcurre, la diferencia es más notoria.

Analizando (4.8) se aprecia que si $\theta_a \ll 0$ se tiene un elevado rango de solidificación e incluso, la discrepancia entre la condición lineal y la condición adiabática se reduce visiblemente. Por otro lado, para valores de $\theta_a \rightarrow 0$ hay un bajo rango de solidificación, presentándose también una diferencia creciente entre el comportamiento de la condición lineal y la condición adiabática. Nuevamente se observa que para un cierto valor de τ las condiciones de frontera comienzan a distinguirse.

Analizando (4.9) se confirma la influencia de θ_a , como se comentó anteriormente, para valores próximos a cero la solidificación puede no ocurrir, mientras que para valores lejanos a cero, la solidificación toma lugar en cortos instantes de tiempo.

De lo anterior se puede concluir que debido a que inicialmente se consideró que el flujo de calor en la frontera de la fase líquida estaba entrando al sistema, el efecto que éste tiene sobre la interfase es el de retardar el proceso de solidificación.

Dicho proceso puede ser controlado por el parámetro θ_a en base a la siguiente relación:

- i) $\theta_a \ll 0$; $\sigma \rightarrow 1$
- ii) $\theta_a \rightarrow 0$; $\sigma < 1$

Físicamente esto se puede explicar de la siguiente manera:

- i) En este caso se considera que la temperatura de pared (T_a) es tan baja que se remueve una gran cantidad de calor, provocando el rápido movimiento de la interfase.

ii) Así también para temperaturas de pared del orden de la temperatura de fusión, el flujo de calor hacia esta pared será insignificante, provocando que se tenga una lenta evolución de la interfase. Si a esto se le suma el flujo de calor debido a la condición de frontera en el líquido, se provoca un almacenamiento térmico en dicha fase, impidiendo así que el proceso de solidificación ocurra. Esta es la razón por la cual existe una discrepancia cada vez mayor entre el caso adiabático y el caso lineal.

También es importante destacar un parámetro que resulta dependiente directamente por ϵ y que es el tiempo de desprendimiento.

Se llama tiempo de desprendimiento al tiempo en el cual los efectos debidos a la condición de frontera en el líquido comienzan a ser considerados por la interfase.

Como se puede destacar de las figuras, sin importar el valor de θ_a , existe un tiempo antes del cual el movimiento de la interfase no se ve alterado por la condición de frontera en el líquido.

Dicho tiempo está relacionado con ϵ en base a:

$$\begin{aligned} \epsilon = 0 & \quad ; \quad \tau_d > 0 \\ \epsilon = 1 & \quad ; \quad \tau_d = 0 \end{aligned}$$

Esto se puede explicar físicamente de la siguiente manera: si $\epsilon=0$ se supone que la capacitancia de calor inicial es mínima, esto afirma que la temperatura inicial del líquido está próxima a la de solidificación, provocando que al líquido le sea más fácil llegar a la temperatura de fusión, esto trae como consecuencia que la interfase evolucione de manera gradual sin tomar en cuenta los efectos en la frontera.

Si por el contrario $\epsilon \ll 1$, la capacitancia inicial es alta y por tal motivo, la cantidad de calor que debe removerse en el líquido es grande. Mientras esto ocurre, el movimiento gradual de la interfase se realiza lentamente, y en un tiempo relativamente corto se percata de la condición de frontera en el líquido.

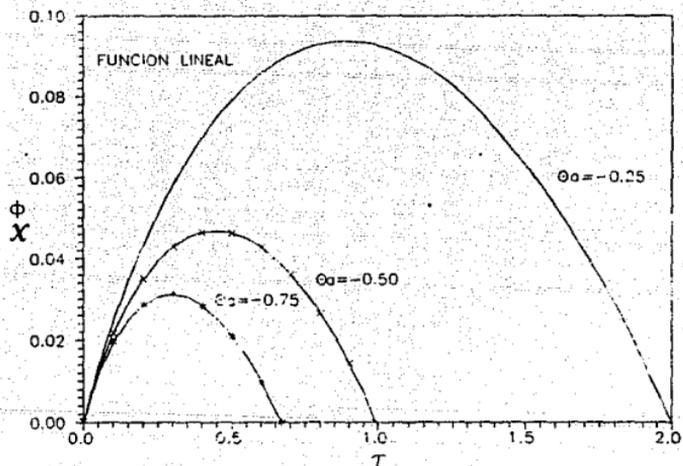


FIG. 4.10 TEMPERATURA APARENTE EN LA FASE LIQUIDA

La figura (4.10) se realizó con la finalidad de observar el comportamiento de la distribución de temperaturas en la fase líquida en función del tiempo. Dicha figura representa la temperatura aparente (normalizada en base a la longitud) en la fase líquida para un valor de $\epsilon=0.1$.

El gradiente de temperaturas se normalizó en base a x debido a la relación lineal entre ambas.

La figura muestra que para $r \ll 1$ existe un aumento en la temperatura aparente. La rapidez del flujo de calor que se coloca en la frontera de la fase líquida es mayor que el flujo de calor que se está removiendo en la interfase. Cuando el tiempo transcurre dichos flujos tienden a igualarse al grado de que existe una inversión en el comportamiento de la temperatura aparente; cuando esto sucede el flujo de calor removido por la interfase es mayor que el flujo de calor que se suministra en la condición de frontera en la fase líquida. El anterior comportamiento es el que se espera en los procesos de solidificación. Es interesante notar, que este comportamiento refleja una gran similitud con respecto al coeficiente de Joule-Thompson para el proceso de estrangulamiento.

El tiempo en el cual se presenta la inversión en el comportamiento de la temperatura aparente se representa mediante la siguiente relación:

$$\tau_{\text{Inversion}} = -\frac{2}{9\theta_m}$$

conocer el tiempo de inversión es útil en para de poder controlar el transitorio que se presenta al inicio del proceso.

Era de esperarse que el tiempo de inversión este relacionado con θ_a , ya que como se observa en la figura y se confirma con la ecuación, para valores de $\theta_a < 0$ se tiene un corto transitorio y para valores de $\theta_a = 0$ el transitorio es mucho mayor.

Por lo anterior se puede explicar el porque del comportamiento de ϕ en las gráficas (4.1), (4.2), (4.4) y (4.5); ya que para los valores de $\theta_a = -0.25$ se analizaba ϕ en el momento en el cual el flujo de calor de la frontera en la fase líquida era el dominante; es decir, en el transitorio.

Otra característica relevante en la figura, es el obtener el tiempo de corte t_c , que es el tiempo en el cual la temperatura en la fase líquida llega a la temperatura de solidificación.

El tiempo de corte, como se muestra en la figura, esta relacionado con θ_a de la siguiente manera:

$$\tau_{\text{Corte}} = -\frac{1}{2\theta_a}$$

4.2.1 Función armónica

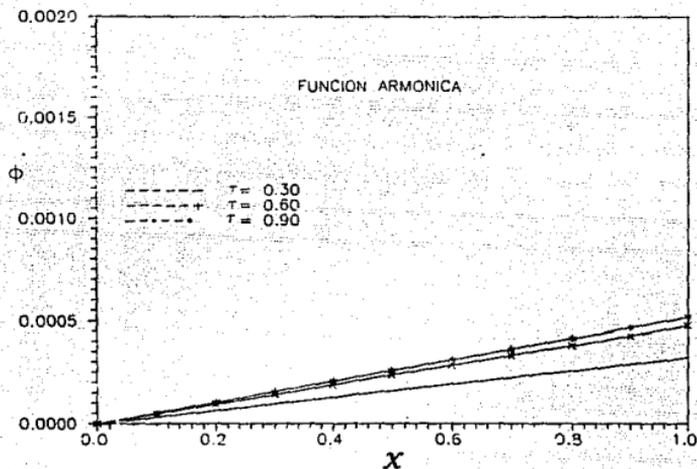


FIG 4.1 DISTRIBUCION DE TEMPERATURAS EN LA FASE LIQUIDA
CON $\epsilon=0.01$ Y $\theta_c=-0.25$

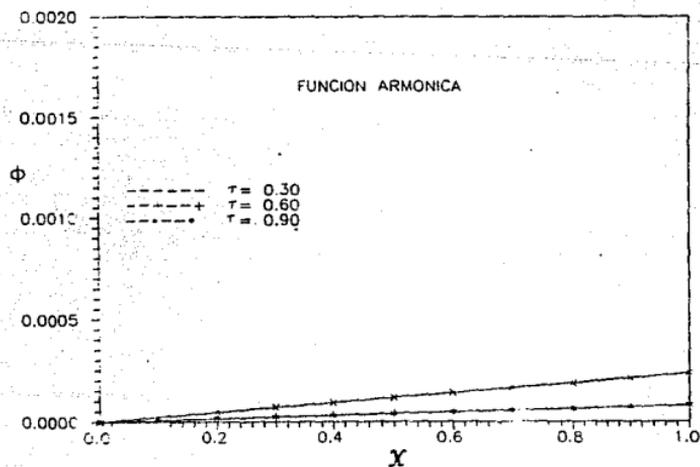


FIG 4.2 DISTRIBUCION DE TEMPERATURAS EN LA FASE LIQUIDA
CON $\epsilon=0.01$ Y $\theta_c=-0.50$

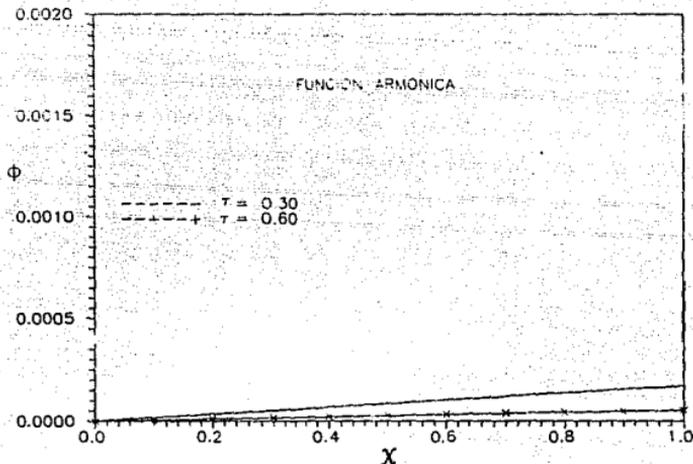


FIG. 4.13 DISTRIBUCION DE TEMPERATURAS EN LA FASE LIQUIDA
 CON $\epsilon=0.01$ Y $\theta_0=-0.75$

Observando las figuras (4.11)-(4.13) se puede establecer la similitud en el comportamiento de la distribución de temperaturas para la condición de frontera armónica. Dado que también se presenta un comportamiento diferente al esperado para valores de $\tau=0.9$ y $\tau=0.3$ con $\theta_a=-0.25$. Además se repite la situación de tener un valor de ϕ similar para tiempos de $\tau=0.6$ y $\tau=0.3$ cuando $\theta_a=-0.50$.

La diferencia de la condición armónica con respecto a la condición lineal, estriba en el orden de magnitud de ϕ , debido a que tiende a ser prácticamente cero.

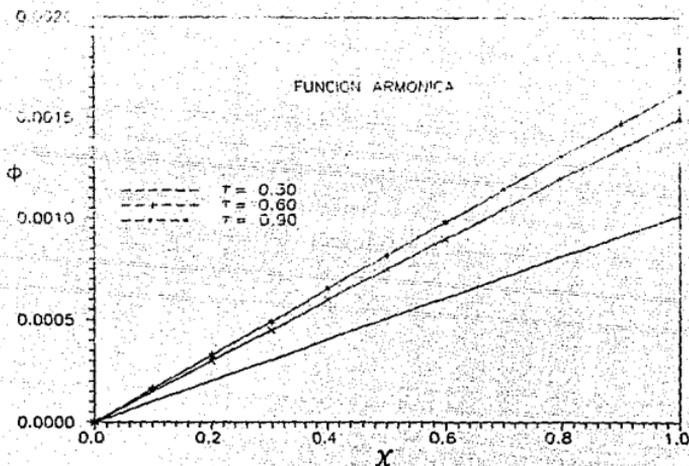


FIG. 4.14 DISTRIBUCION DE TEMPERATURAS EN LA FASE LIQUIDA
CON $\epsilon=0.10$ Y $\theta_c=-0.25$

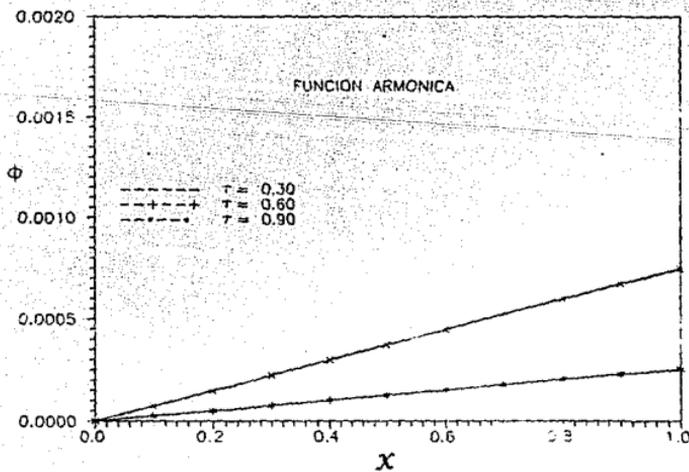


FIG. 4.15 DISTRIBUCION DE TEMPERATURAS EN LA FASE LIQUIDA
CON $\epsilon=0.10$ Y $\theta_c=-0.50$

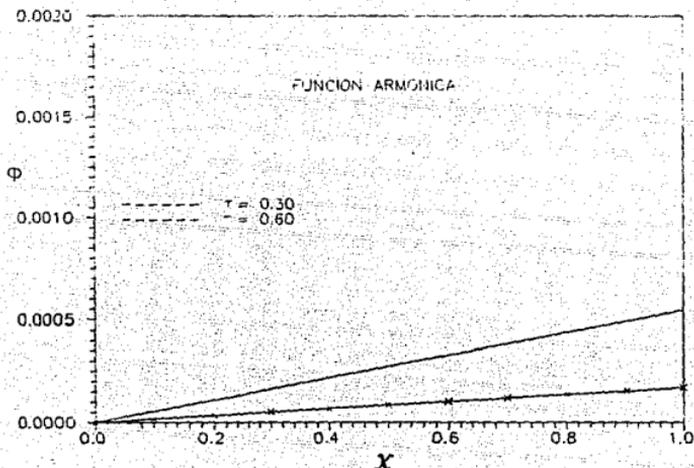


FIG. 4.16 DISTRIBUCION DE TEMPERATURAS EN LA FASE LIQUIDA
CON $\epsilon=0.10$ Y $\theta_0=-0.75$

En las figuras (4.14)-(4.16) se vuelve a hacer presente el efecto de aumentar el parámetro de perturbación ϵ , pero ahora con la función armónica senooidal como condición de frontera.

Las conclusiones que pueden obtenerse al comparar las figuras (4.14)-(4.16) son semejantes a las comentadas en la condición de frontera lineal para valores de $\epsilon=0.01$ y θ_0 en ϕ .

La diferencia con la condición de frontera lineal estriba en el valor de ϕ obtenido, ya que para la condición armónica los valores de ϕ se atenúan fuertemente en comparación con la condición lineal; sin perder, la física del problema. Por lo anterior el análisis físico es el mismo.

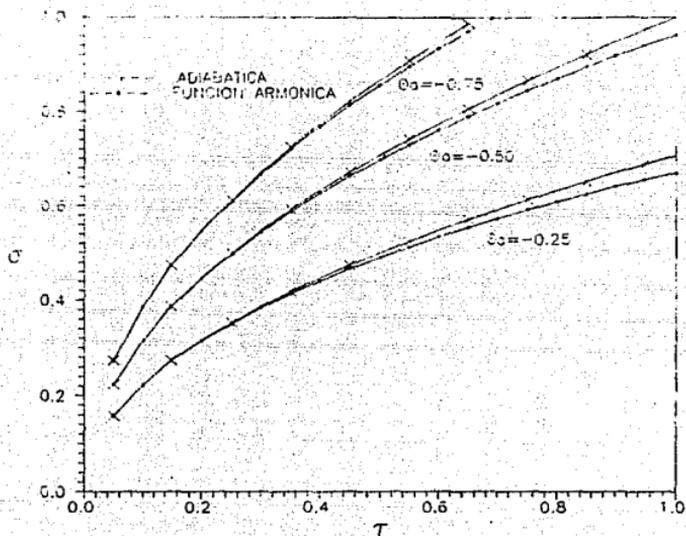


FIG. 4.17 COMPARACION DEL MOVIMIENTO DE LA INTERFASE CON $\epsilon = 0.01$

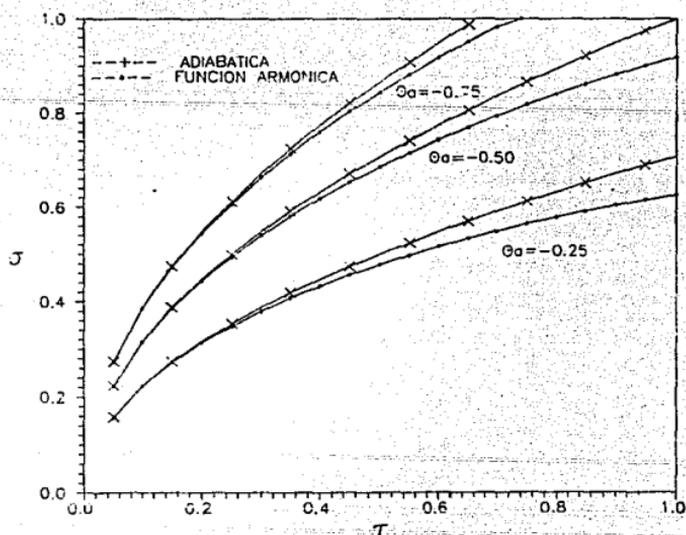


FIG. 4.18 COMPARACION DEL MOVIMIENTO DE LA INTERFASE CON $\epsilon = 0.05$

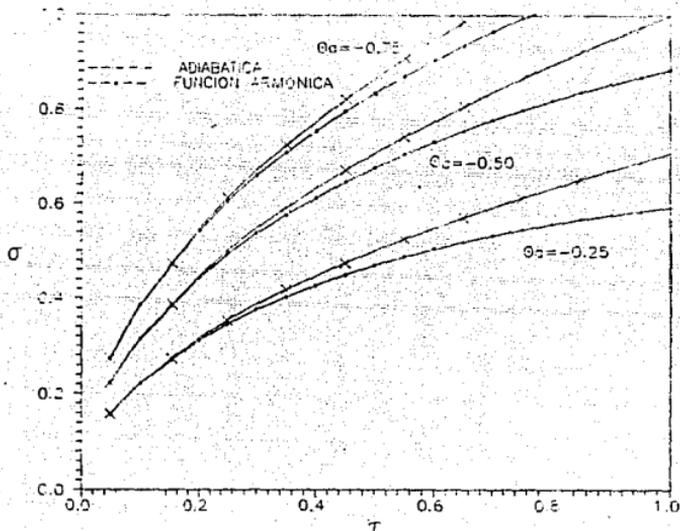


FIG. 4. 2 COMPARACION DEL MOVIMIENTO DE LA INTERFASE CON $\epsilon=0.10$

Analizando las figuras (4.17)-(4.19) se puede concluir que el movimiento de interfase, para los intervalos de tiempo manejados, es independiente de la condición de frontera que se establezca del lado líquido, ya que si se compara con las figuras (4.7)-(4.9) se observará la similitud en el comportamiento de σ para ambas condiciones.

De este modo el concepto de tiempo de desprendimiento (t_d) también es válido para la condición armónica.

La conclusión más relevante en este punto es el de afirmar que el movimiento de la interfase depende únicamente de los parámetros θ_0 y ϵ , cuya explicación física es la misma que en el caso lineal.

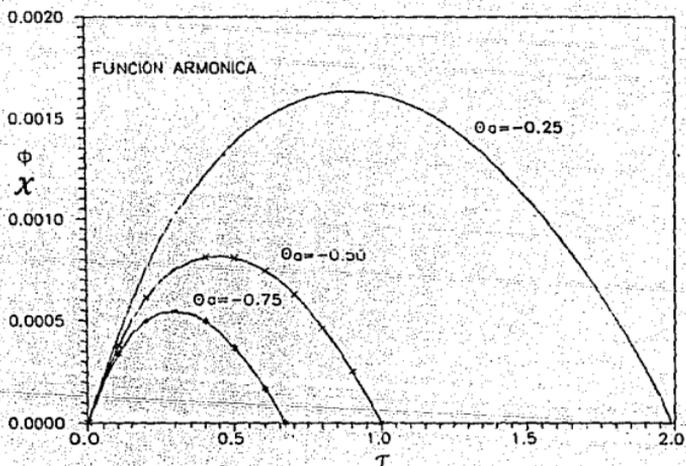


FIG. 4.20 TEMPERATURA APARENTE EN LA FASE LIQUIDA

En la figura (4.20) se comprueba lo comentado en las figuras (4.14)-(4.16) con respecto a que el comportamiento de ϕ es muy semejante desde un punto de vista cualitativo.

En base a esta gráfica se pueden determinar los parámetros descritos en la figura (4.10) relativos al tiempo de inversión ($t_{inversion}$), tiempo de corte (t_{corte}), transitorios y demás.

La explicación física es semejante a la comentada (4.10), sólo que ahora la temperatura aparente tendrá valores muy pequeños.

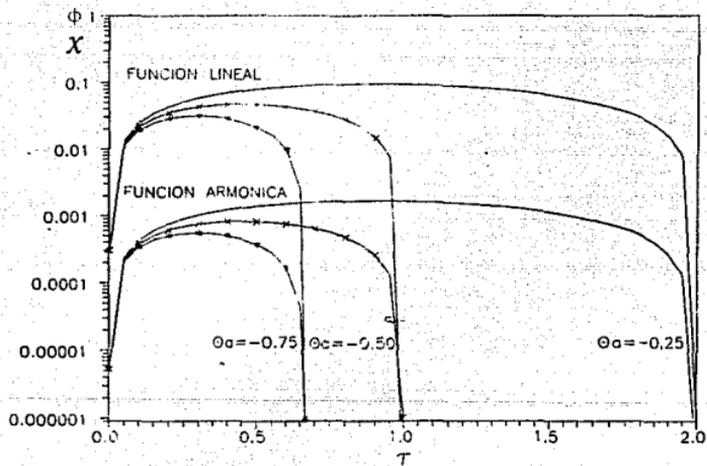


FIG. 4.21 COMPARACION DE TEMPERATURA APARENTE

Dado que el comparar por separado las figuras (4.10) y (4.20) no se puede afirmar la relación que existe entre ambas, es necesario generar una gráfica que muestre a las dos condiciones de frontera en una sola figura (4.21).

Debido a esta comparación se concluye:

$$\phi_{\text{Cond. Lineal}} \gg \phi_{\text{Cond. Armónica}}$$

Lo que representa que la condición armónica es una condición que atenúa el flujo de calor que ingresa en la frontera de la fase líquida; de tal modo que ϕ almacena una baja cantidad de energía.

Es importante resaltar con ésta figura la diferencia de los resultados en el modelo propuesto (ambas condiciones de frontera) con respecto al modelo con condición de frontera adiabática; ya que en este último, la distribución de temperaturas del líquido en la zona externa es nula, no así en el modelo analizado.

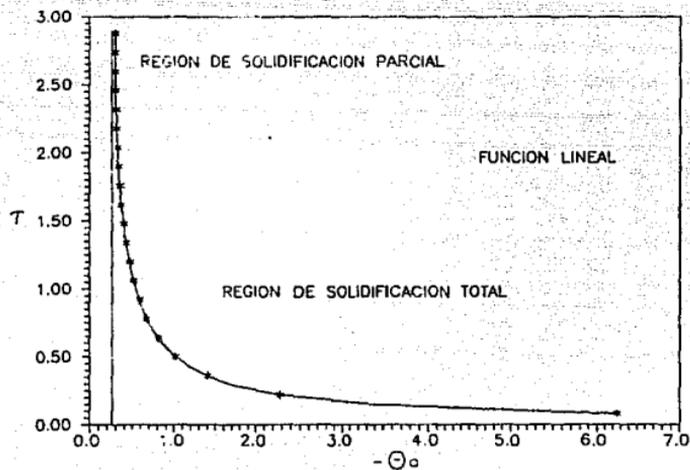


FIG 4.22 TIEMPO DE SOLIDIFICACION PARA DIFERENTES VALORES DE Θ_{α} Y CON $\epsilon = 0.01$

El objeto de presentar la figura (4.22) es el de mostrar gráficamente el efecto que tiene θ_a sobre el proceso de solidificación y el tiempo en el cual ocurre dicho efecto.

Para la generación de esta figura se empleó la ecuación (4.4) considerando que $\sigma=1$ y $\epsilon=0.01$.

Así pues se reafirma lo comentado en las figuras (4.7)-(4.9) y (4.17)-(4.19) con respecto a que θ_a tiene una gran influencia en el movimiento de la interfase.

Analizando la figura obtenemos el valor de $\theta_{a\text{crítico}}$:

$$\theta_{a\text{crítico}}=-0.3079201$$

$$t_{\text{crítico}}= 2.886751$$

En los valores por encima de $\theta_{a\text{crítico}}$ la solidificación ocurre de manera parcial; es decir, no se llega a solidificar totalmente el material. Para valores inferiores de $\theta_{a\text{crítico}}$ se tiene una solidificación total.

Físicamente la figura aporta información de la temperatura de pared a la que se debe colocar la frontera en $x=0$ si se desea que la solidificación ocurra a un tiempo establecido.

Si por el contrario, se tiene una temperatura de pared T_a , es posible predecir si el material llegará a solidificar totalmente, o si lo hace parcialmente. Si ocurre de manera total, es factible el obtener el tiempo en el cuál ocurre dicho suceso.

Finalmente, es claro que durante la solución de las ecuaciones, el proceso de adimensionalización juega un papel muy importante en orden de reducir el número de variables físicas que intervienen en el problema; así como el obtener los parámetros adimensionales que describen el comportamiento del fenómeno.

Por otro lado, se pudo comprobar que el método de expansiones asintóticas de la teoría de perturbaciones, resulta ser una poderosa herramienta para solucionar problemas de cambio de fase, cuando en este aparece algún parámetro temporal pequeño. La ventaja que se representa es el poder linealizar las ecuaciones para su solución.

De los dos casos analizados en el presente trabajo, se tiene que en la realidad es más factible el colocar una condición de frontera armónica senoidal, ya que el flujo de calor va a fluctuar conforme el tiempo transcurra, no así la condición lineal, la cual representa un aumento conforme el tiempo transcurra.

Dado que se planteo el problema en el cual la condición de frontera proporcionaba un flujo de calor hacia el sistema, se tiene una reducción en la movimiento de solidificación del material con respecto a la condición de frontera adiabática, como se observa en las figuras correspondientes de σ .

Concluyendo sobre las gráficas presentadas se obtiene que :

1. La distribución de temperaturas en la zona externa de la fase líquida depende principalmente de los factores:
 - a) Condición de frontera que se estudie.
 - b) Parámetro de perturbación supuesto (ϵ).
 - c) Parámetro de temperatura adimensional en la frontera de la fase sólida (θ_s).

2. El movimiento en la zona externa de la interfase se ve alterado por (en orden de importancia):
- a) Temperatura de adimensional en la frontera de la fase sólida (θ_s).
 - b) Parámetro de perturbación supuesto (ϵ).
 - c) No se presenta influencia por la condición de frontera en la fase líquida.

BIBLIOGRAFIA

1. G. Lamé and B. P. Clapeyron, Ann. Chem. Phys., Vol. 47, pp 250-256, 1831.
2. J. Stefan, Ann Phys. Chemie (Wiedemannsche Annalen), Vol. 42, pp 269-286, 19891.
3. N. Ramachandran, J. P. Gupta y Y. Jaluria "Thermal and Fluid Flow Effects During Solidification in Rectangular Enclosure", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 25, pp 187-194, 1982.
4. F. Wolff and R. Viskanta "Solidification of a Pure Metal at a Vertical Wall in the Presence of the Liquid Heat", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 31, pp 1735-1744, 1988.
5. Han-Taw Chen y Jae-Yuh Lin "Hybrid Laplace Transform Technique for Stefan Problems With Radiation-Convection Boundary Condition", Int. J. Heat Mass Transfer, pp 3345-3351, 1992.
6. Duda, J. L. and Vrentas, J. S. "Mathematical Analysis of Bubble Dissolution" AIChE Journal, Vol. 15, pp 351, 1969.
7. Duda J. L., and Vrentas, J. S., "Perturbation Solutions of Diffusion Controlled Moving Boundary Problems", Chem. Engr. Sci., Vol. 24, pp 461, 1969.
8. Crank, J., "Two Methods for Numerical Solution of Moving Boundary Problems in Diffusion and Heat Flow", Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. 10, pp 220, 1957.

9. T. R. Goodman and J. J. Shea "The Melting of Finite Slabs", Journal of Applied Mechanics, Vol. 27, Trans. ASME, Vol. 82, Serie E, pp 16-24, 1960.
10. S. Weinbaum and L. M. Jiji "Singular Perturbation Theory for Melting or Freezing in Finite Domains Initially Not at the Fusion Temperature", Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, pp 25-30, 1977.
11. Ozisik, Necati "Heat Conduction", Ed. Wiley-Interscience, U.S.A., 1980.
12. Fox, J. R., "Moving Boundary Problems in Heat Flow and Diffusion", Ed. Ockendon, J. R. and Hodgkins, W. R., Oxford at the Clarendon Press, 1975.
13. Bender, Carl M., Steven A. Orszag, "Advanced Mathematical Methods For Scientists and Engineers", Ed. McGraw-Hill International, 1978.