

15
250



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE QUIMICA

APLICACION DEL MICRO-MACRO-MODELEO DE LA
SOLIDIFICACION AL ANALISIS DE LAS VARIABLES
QUE AFECTAN LA TENDENCIA AL BLANQUEADO DE
PIEZAS DE HIERRO GRIS EUTECTICO MOLDEADAS
EN ARENA

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
INGENIERO QUIMICO METALURGICO
P R E S E N T A :
MARCO AURELIO RAMIREZ ARGAEZ



MEXICO, D. F.

1993

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

	Pag.
INTRODUCCION	2
POSICION DEL PROBLEMA	5
ANTECEDENTES DEL MICRO-MACRO MODELADO	12
DESCRIPCION DEL MODELO ELABORADO	33
ANALISIS DE LAS VARIABLES DE PROCESO SOBRE	48
LA TENDENCIA AL BLANQUEADO DE PLACAS INFINITAS Y CILINDROS INFINITOS DE HIERRO COLADO	
CONCLUSIONES	60
BIBLIOGRAFIA	62
ANEXO I (DEDUCCION DE ECUACIONES NODALES EN	64
COORDENADAS CILINDRICAS)	
ANEXO II (DEDUCCION DE ECUACIONES NODALES EN	70
COORDENADAS CARTESIANAS)	
ANEXO III (PROGRAMAS COMPUTARIZADOS QUE GENERAN ...	75
EL MICRO-MACRO MODELO.	

I.- INTRODUCCION

La formación de microestructura durante la solidificación de aleaciones es de fundamental importancia para el control de las propiedades y calidad de las piezas coladas.

Durante decadas, se han empleado relaciones empíricas para predecir la estructura, bajo condiciones de operación específicas. Sin embargo, debido a la complejidad de los procesos de solidificación, esos métodos tienen un uso muy limitado.

Es por esta razón, que el modelado y simulación de la solidificación haciendo uso de la poderosas herramientas computacionales, en las que se toma en cuenta los principios básicos que afectan la formación de la microestructura, se están convirtiendo en un importante campo en pleno desarrollo y a su vez, en un instrumento de control muy efectivo.

Anteriormente este tema se había enfocado al modelado en la escala macroscópica, en donde se hacen cálculos sobre todo en flujo de calor. Sin embargo, si se usa únicamente los cálculos de flujo de calor, no se pueden predecir los parámetros microestructurales, en este caso de estructuras equiaxiales, tales como tamaño de grano, espaciamiento eutéctico, fracción final de cada fase, o morfología de la solidificación.

El primer intento por acoplar un modelo de transferencia de calor con los aspectos microscópicos de la solidificación fue hecho por Oldfield en 1966 para piezas coladas de hierro gris eutéctico.

Pero no es sino hasta hace algunos años, que se ha logrado acoplar los modelos macroscópicos de transferencia de calor, con los modelos microscópicos de la cinética de solidificación que involucran la nucleación y el crecimiento de grano.

Ya en estos días es ampliamente aceptado que para elaborar un modelo matemático que simule totalmente el proceso de solidificación de piezas coladas, debe incluir lo siguiente:

1) El macromodelo, que comprende la transferencia de calor, el flujo de fluidos durante el llenado del molde y durante la solidificación, además de la distribución de esfuerzos; y 2) El micromodelo de la cinética de solidificación que incluye leyes de nucleación y crecimiento del grano.

Actualmente, los modelos están muy lejos de incluir todas esas materias de estudio, aunque cabe señalar que se ha alcanzado un gran progreso en este campo.

En esta tesis se tomará en cuenta la cinética de solidificación acoplada al modelo de transferencia de calor.

El trabajo se ubica dentro de una nueva línea de investigación denominada *micro-macro modelado*, que tiene como objetivo relacionar de manera cuantitativa el efecto de las variables de proceso sobre la microestructura formada durante el enfriamiento y solidificación de aleaciones líquidas desde la temperatura de colada hasta la temperatura ambiente.

Como ya se señaló, la importancia de este objetivo reside en que las propiedades de un material son función de la microestructura, por lo cual, si se genera un modelo matemático que sea capaz de predecir la microestructura observada durante las diferentes etapas de enfriamiento bajo condiciones específicas de proceso, se genera una herramienta de control de proceso, que permite de una manera razonada y precisa, definir las condiciones que garanticen la obtención de la microestructura deseada en el producto terminado.

Dentro del marco de esta línea de investigación se aborda uno de los problemas más frecuentes que se presentan durante la elaboración de piezas coladas de hierro gris. Este problema, es

la eventual aparición en la pieza del eutéctico metaestable llamado leduburita ($\gamma + \text{Fe}_3\text{C}$), que a temperatura ambiente pasa a formar la pseudoledeburita, que por su elevada dureza y extremada fragilidad, cuando se presenta es por lo general un motivo de rechazo de la pieza, lo cual se refleja en un incremento de los costos de producción.

Para facilitar la comprensión del tema, se seguirá la secuencia citada a continuación: Como punto inicial se definirá la naturaleza del problema, objeto de este estudio, el cual es básicamente la competencia, durante la solidificación entre la formación de dos eutécticos: el estable (hierro gris) y el metaestable ledeburita. Una vez establecida la razón origen de este problema, así como los eventos que favorecen la formación del eutéctico metaestable, se procederá a describir el modelo elaborado.

Por último, se aplicará el micro-macro modelo elaborado al análisis del efecto de algunas variables de proceso sobre la tendencia al blanqueado durante el enfriamiento y solidificación de placas y cilindros infinitos de hierro gris eutéctico moldeadas en arena.

II.- POSICION DEL PROBLEMA

La eventual aparición de la pseudoledeburita (proveniente del eutéctico metaestable $\gamma + Fe_3C$) es una de las mayores causas de rechazo en la producción de piezas coladas de hierro gris. Por lo tanto, su predicción y como consecuencia su control, pueden abatir satisfactoriamente los costos de producción en una planta de fundición.

La tendencia a la formación de hierro blanco es función de la velocidad de enfriamiento, que a su vez es función del espesor de la pieza, entre otras cosas. Conforme la velocidad de enfriamiento aumenta, una transición del hierro gris estable hacia hierro blanco inestable ocurre en el hierro, resultando en una pieza con hierro blanco, lo cual es un evento indeseable.

Pero analizando más a fondo el problema, partiremos del hecho conocido de que cuando el hierro colado líquido solidifica, puede seguir dos rutas distintas de solidificación, la primera de ellas es la ruta estable en la cual se efectuará la transformación eutéctica estable que da lugar a la formación del eutéctico austenita más carbón grafito. La segunda ruta de solidificación es la ruta metaestable que da lugar a la formación del eutéctico metaestable llamado ledeburita. (ver figura II.1)

El camino de solidificación que elija el hierro líquido bajo condiciones específicas de proceso, dependerá de aspectos de carácter termodinámico, cinético y de transferencia de calor.

El origen de la competencia para la formación de los

eutécticos estable y metaestable, reside en que la velocidad de crecimiento del eutéctico metaestable es mucho mayor (al menos tres ordenes de magnitud) a la del eutéctico estable, por lo cual, en todo momento de la solidificación en donde la reacción metaestable sea posible termodinámicamente hablando, el hierro habrá blanqueado.

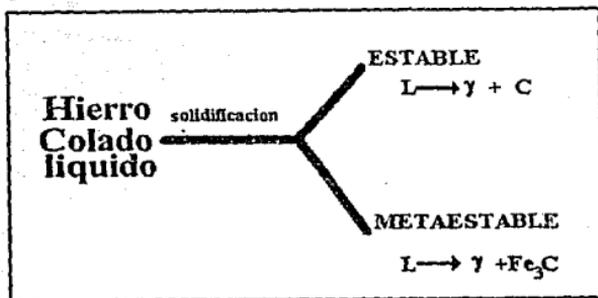


Fig. II.1 . Posibles rutas de solidificación que definen la estructura de un hierro colado.

Las curvas de enfriamiento han sido excelentes herramientas para tratar de explicar la solidificación estable y metaestable del hierro colado, así como la influencia de los elementos de aleación y la rapidez de enfriamiento sobre la solidificación del hierro colado.

Analizando más a fondo una curva de enfriamiento, en ella podemos distinguir las siguientes temperaturas características :

- a) (TIS) . Temperatura de inicio de la solidificación.
- b) (TSE) . Temperatura de sobreenfriamiento máximo.
- c) (TR) . Temperatura de recalcencia.

d) (TFS) . Temperatura de fin de solidificación.

Estas temperaturas características se representan gráficamente en la figura II.2.

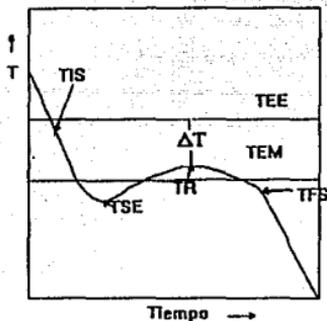


fig II.2. Curva de enfriamiento típica en la que se distinguen las cuatro temperaturas características (TIS, TSE, TR, TFS) durante la solidificación. TEE= Temperatura eutéctica estable, TEM= Temperatura eutéctica metaestable.

Se ha encontrado experimentalmente, que cuando las cuatro temperaturas características de una curva de enfriamiento de hierro se ubican por arriba de la temperatura eutéctica metaestable (TEM), el hierro solidifica siguiendo por completo la ruta estable, es decir, se obtiene totalmente el hierro gris, pero si estas mismas 4 temperaturas se ubican por abajo de la (TEM) el hierro solidifica totalmente blanco. Por otra parte si alguna o algunas temperaturas se ubican por arriba y otras se encuentran por debajo de la (TEM), el hierro solidifica moteado (tipo de hierro que se compone de una mezcla de hierro gris y hierro blanco). En las figuras que se muestran a continuación se pueden observar los casos discutidos anteriormente.

Por otra parte, si la temperatura de máximo subenfriamiento es menor a la (TEM) los carburos se distribuirán a través de la pieza. Este tipo de hierro blanco se llama chill.

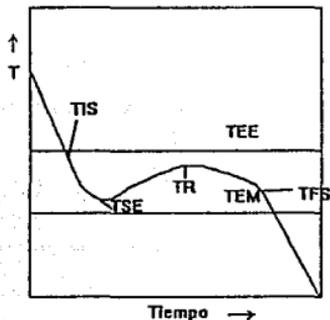


fig II.3.a.- Curva de enfriamiento que muestra la solidificación siguiendo la ruta estable, ya que las 4 temperaturas características se encuentran por arriba de (TEM).

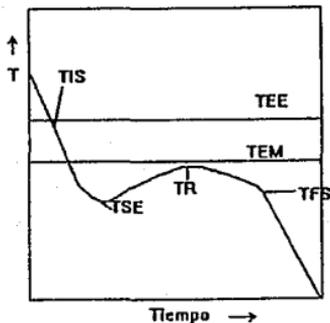


fig II. 3.a.- Curva de enfriamiento que muestra la solidificación siguiendo la ruta metaestable, ya que las 4 temperaturas características se encuentran por abajo de la (TEM).

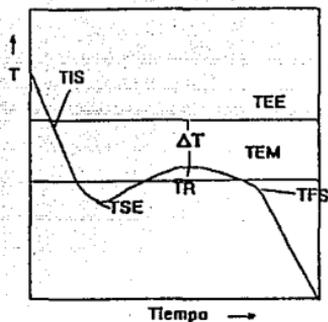


Fig. II.3.a.- Curva de enfriamiento que muestra la solidificación siguiendo ambas rutas de solidificación, ya que hay temperaturas arriba y abajo de la (TEM), por lo que se forma el hierro moteado.

El razonamiento anterior se explica por el hecho que señala que a temperaturas mayores a (TEM), la reacción eutéctica metaestable no es termodinámicamente posible, por lo que si todo el proceso se realiza en condiciones adversas a la formación de ledeburita, el hierro solidificará totalmente gris.

De lo anterior resulta evidente, que todos los eventos que contribuyen a disminuir la posición de la curva de enfriamiento con respecto a la línea horizontal de la (TEM), promoverán la formación de hierro blanco.

Podemos resumir el argumento señalado anteriormente en dos causas que promueven el blanqueado:

- a) Aumento en el sobreenfriamiento del metal (desplazamiento de la curva de enfriamiento hacia abajo).
- b) Aumento de la temperatura eutéctica metaestable (desplazamiento relativo de la curva hacia abajo).

En base a esas dos causas las variables que afectan la transición del hierro gris al blanco son las siguientes:

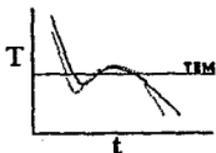
- .- Rapidez de enfriamiento.
- .- Potencial de nucleación.
- .- Composición química del líquido.

Las primeras dos variables tienen que ver con la causa (a) de blanqueado, ya que afectan directamente el sobreenfriamiento, mientras que la última variable tiene que ver con la causa (b) de blanqueado, ya que los elementos aleantes son los que dictan la temperatura eutéctica metaestable. (ver figura II.4)

Favorecen la formación de Ledeburita:

-Un aumento del subenfriamiento

- Velocidad de enfriamiento
- Potencial de nucleación



-Un aumento en la T.E.M

- Composición Química

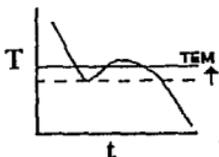


fig. II.4 . Causas que favorecen la formación de ledeburita.

Con todo lo señalado anteriormente, resulta obvio que si se logran simular las curvas de enfriamiento prevaletentes en diferentes zonas del metal, así como la temperatura eutéctica metaestable bajo condiciones específicas de proceso, y de analizar la posición de la curva de enfriamiento con respecto a la TEM, seremos capaces de establecer la formación o no de la ledeburita en esas zonas, así como el efecto de las variables de proceso sobre la tendencia al blanqueado en términos de una de las dos causas señaladas con anterioridad.

Sin embargo, este modelado no es simple. La curva de enfriamiento es el registro cinético de los eventos térmicos que ocurren durante el enfriamiento y solidificación del metal y estos eventos térmicos son a su vez, una manifestación de lo que acontece en el sistema a nivel macroscópico, reflejando las condiciones de extracción de calor y también a nivel microscópico, cuando se realiza la solidificación que es un proceso de nucleación y crecimiento.

Entonces, para modelar la curva de enfriamiento es necesario asociar la transferencia de calor con la cinética de solidificación, conformando lo que es conocido como un micro-macromodelo. En este trabajo, se elaboró un micro-macromodelo para simular las curvas de enfriamiento en diferentes zonas del metal asociadas con la solidificación de placas infinitas y cilindros infinitos de hierro gris eutéctico en moldes de arena.

Este modelo por si mismo, constituye la tan ansiada herramienta de control para las piezas de hierro gris.

III.- ANTECEDENTES DEL MICRO-MACRO MODELADO

Con la ayuda de los recientes desarrollos en simulación por computadora, se demuestra que se deben conjugar el modelo de transferencia de calor con el modelo cinético de solidificación para describir adecuadamente la solidificación de piezas coladas. Los modelos macroscópicos describen la transferencia de calor de la pieza hacia los alrededores, mientras que los modelos microscópicos describen más intrínsecamente cosas como la evolución microestructural. El problema principal de conjugar los dos modelos, consiste en incorporar el calor latente envuelto durante la solidificación, lo cual se calcula con el modelo cinético, dentro del modelo de transferencia de calor, que calcula el enfriamiento global de la aleación.

III A. MODELO MACROSCOPICO DE TRANSFERENCIA DE CALOR.

Aunque no es el propósito de revisar con detalle el uso de las técnicas numéricas para la solución de las ecuaciones de conservación de calor en el modelado de la solidificación, es interesante asentar que estas técnicas han sido aplicadas a dos diferentes situaciones, que se ilustran en la figura III.1, para el problema del campo térmico.

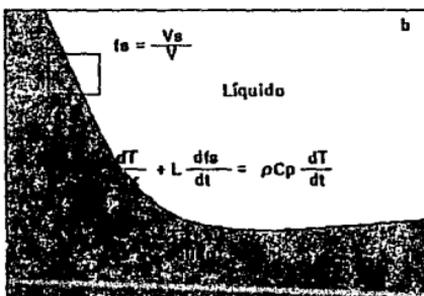
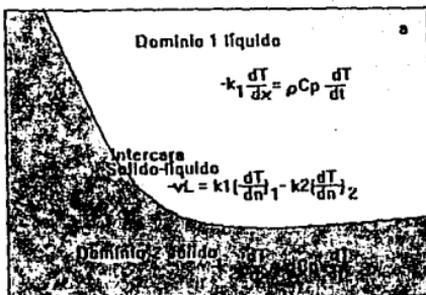


fig. III.1. Representación esquemática de las dos situaciones diferentes encontradas en el modelado de la solidificación.
a) Método de dos dominios. b) Métodos de un dominio.

Para el primer caso fig III.1.a. se consideran a las fases líquida y sólida como medios distintos. En consecuencia las ecuaciones de conservación son planteadas por separado para cada dominio, y para acoplar las dos soluciones se emplea una ecuación de conservación de energía para la intercara

sólido/líquido. Estos métodos son llamados métodos de dos dominios o "front tracking".

En el segundo caso fig III.1.b, tanto la fase líquida como la sólida se consideran en un mismo dominio, con cantidades promedio definidas en cada nodo de la red del dominio. Estos métodos son los llamados métodos de un dominio, cuyo objetivo es resolver la ecuación de conservación de energía. Entre estos métodos se pueden nombrar: el "método de el calor específico efectivo", el "método de la entalpía" y su predecesor "el método de recuperación de temperatura".

Como los valores promedio de la entalpía o fracción solidificada son definidos en diversos puntos de la malla, estas últimas son las técnicas más adecuadas para trabajar el modelado de la solidificación. Además de que estas técnicas son más apropiadas para describir la formación de la microestructura en los procesos de solidificación.

En los métodos de un dominio, se supone que existe una relación entre la temperatura y la entalpía o la fracción solidificada para resolver la ecuación de conservación de energía considerando el calor latente liberado.

Planteamiento general e hipótesis simplificativas.

Cuando consideramos un problema de transporte con transferencia de calor y flujo de fluidos, la ecuación gobernante se basa en la conservación de la energía térmica dentro del sistema. La rapidez de acumulación de energía térmica debería ser igual a la suma del cambio neto de energía debido a:

- 1) Conducción de calor
- 2) Trabajo mecánico debido a los cambios de fase.
- 3) Movimiento de fluido.
- 4) Calor generado por reacciones químicas o cambios de fase.
- 5) Calor convectivo o radiante.

Con el propósito de simplificar el problema se hacen las

siguientes suposiciones:

- 1.- Las propiedades físicas del metal y del molde son isotrópicas e independientes de la temperatura.
- 2.- Se puede despreciar el flujo de fluidos en el líquido.
- 3.- La conducción de calor es axisimétrica.
- 4.- El efecto del resquecio formado durante el enfriamiento del metal sólido en la intercara molde-metal, se puede incluir en un coeficiente de transferencia de calor efectivo en la intercara molde medio ambiente.
- 5.- Flujo de calor unidimensional.

Ecuación gobernante.

Basado en las suposiciones hechas y en las razones para elegir los métodos de un solo dominio, la ecuación de transferencia de calor que gobierna la solidificación, se puede escribir como sigue :

$$\rho C_p \frac{\delta T}{\delta t} = k \nabla^2 T + Q \quad \text{III.1}$$

donde T es la temperatura,

t es el tiempo,

ρ es la densidad del medio de conducción,

k es la conductividad térmica del medio de conducción,

C_p es el calor específico del medio de conducción,

y el término Q es la rapidez de evolución de calor latente liberado durante la solidificación.

Esta ecuación fundamental se puede escribir en distintos sistemas coordenados como coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas, y se puede considerar el flujo en una, dos o tres dimensiones.

Condiciones de frontera.

La ecuación de conservación de energía, requiere para su solución que uno disponga de las condiciones de frontera y de las condiciones iniciales apropiadas.

En el modelo de solidificación, las condiciones iniciales son en general temperaturas constantes en cada medio. Sin embargo, una hipótesis así, puede no ser muy válida, como por ejemplo en procesos de colada, donde el tiempo de llenado del molde es significativo con respecto al tiempo total de solidificación. En este sentido se han hecho esfuerzos importantes para formular condiciones iniciales más precisas.

Por otro lado, las condiciones de frontera son muy difíciles de establecer. Esto es una consecuencia de los fenómenos tan complejos de transferencia de calor con los alrededores.

Las condiciones de frontera que generalmente se usan para resolver la ecuación de calor pueden ser de tres tipos:

a) Condición de Dirichlet:

$$T(r_i, t) = \bar{T}(r_i, t) \quad (\text{para } r = r_i) \quad \text{III.2.a}$$

b) Condición de Newman:

$$-k \frac{dT}{dr} \Big|_{r=r_i} = Q(r_i, t) \quad \text{III.2.b}$$

c) Condición de Cauchy:

$$-k \frac{\delta T}{\delta r} \Big|_{r=r_i} = h [T(r_i, t) - T_a] \quad \text{III.2.c}$$

Estas condiciones de frontera van acompañadas de una condición inicial como la que se muestra a continuación:

d) Condición inicial:

$$T(r_1, t=0) = T_0$$

III.2.d

Término de calor latente.

Como ya se mencionó, el término Q , que aparece en la ecuación de calor es el calor latente liberado mediante la transformación de fase, es el término más difícil de expresar en el modelado macroscópico de solidificación. En el punto de vista del macromodelado, el término Q se puede escribir como:

$$Q = L \frac{\delta f_s}{\delta t}$$

III.3

donde L es el calor latente de solidificación y f_s es la fracción solidificada en un "punto dado".

Sin embargo, estrictamente hablando f_s no tiene un significado físico real en un modelo continuo, puesto que en un punto la fracción sólida, f_s , solo puede valer cero (líquido) o uno (sólido), pero de acuerdo a la aproximación que se hace al usar los métodos de un dominio, uno considera que un elemento de volumen se puede asociar con un punto, en el cual, tanto la fracción sólida como la fracción líquida son calculadas.

Como es evidente, la elección del tamaño de volumen de control que está asociado con f_s , es crítica. El volumen debe ser lo suficientemente grande, de tal manera que los valores promedio se puedan definir (por ejemplo, en estructuras equiaxiales, el volumen de control debe ser mayor que el tamaño de grano), pero a la vez debe de ser pequeño con respecto a las inhomogeneidades térmicas.

Si se introduce la ecuación III.3 en la ecuación III.1 se obtiene la ecuación de transferencia de calor por conducción, inestable y que toma en cuenta el término de evolución de calor

latente durante la solidificación:

$$k \nabla^2 T = \rho C_p \frac{\delta T}{\delta t} - L \frac{\delta f_s}{\delta t} \quad \text{III.4}$$

Como los dos campos aparecen en la ecuación III.4 ($T(r,t)$ y $f_s(r,t)$) se debe encontrar una ecuación adicional que los relacione. En el caso de los cálculos convencionales de los macromodelos en aplicación a la solidificación, se solía usar una relación única de $f_s(T)$.

Suponiendo que la solidificación seguía un solo patrón (única relación $f_s(T)$), la ecuación III.4 se puede escribir como:

$$k \nabla^2 T = (\rho C_p - L \frac{\delta f_s}{\delta T}) \frac{\delta T}{\delta t} \quad \text{III.5}$$

El lado derecho de la ecuación III.5 se puede reescribir de acuerdo a dos diferentes técnicas numéricas que se señalan a continuación.

Método del calor específico efectivo.

En el primer caso, el calor específico efectivo es definido como ($C_p^*(T)$):

$$C_p^*(T) = (\rho C_p - L \frac{df_s}{dT}) \quad \text{III.6}$$

y entonces la ecuación de calor queda escrita como:

$$k \nabla^2 T = \overset{\circ}{C_p}(T) \frac{\delta T}{\delta t}$$

III.7

Todas aquellas técnicas numéricas basadas en la solución de la ecuación III.7 se refieren como el método del calor específico.

Método de la entalpía.

Por otro lado, en el método de la entalpía volumétrica, H, se escribe como:

$$H(T) = \int_0^T C_p(T) dT + L(1-f_s) \quad \text{III.8}$$

Esta ecuación se puede involucrar a su vez con la ecuación III.5 para dar:

$$k \nabla^2 T = \frac{\delta H}{\delta t} \quad \text{III.9}$$

En los cálculos convencionales para el macromodelado de la solidificación, las relaciones para $f_s(T)$, $C_p^{\circ}(T)$ o para $H(T)$, se pueden deducir a partir de modelos simples de difusión de solutos, como lo son los modelos de Scheil o de Brody-Flemings.

Sin embargo, estos modelos de solución suponen un completo mezclado de soluto en la fase líquida y además desprecian cualquier sobreenfriamiento.

La formulación del macromodelado por medio del método de la entalpía ofrece algunas ventajas. Primero, cualquier discontinuidad asociada con una transformación de fases es eliminada. Segundo, se asegura la conservación de la energía, lo cual no sucede con el método del calor específico efectivo.

Tercero, durante el enfriamiento, cualquier patrón de solidificación es caracterizado por una estricta disminución de la entalpía. Este punto es especialmente importante durante la recalcificación.

Soluciones numéricas para la ecuación de calor.

Aunque no es nuestra intención tratar de hacer una descripción detallada de las diferentes técnicas numéricas empleadas para resolver la ecuación de calor, se darán a conocer estas, mostrando sus ventajas y desventajas para resolver los procesos de solidificación en un dominio y con un esquema que se ilustra en la siguiente figura. Ahí se muestran las 5 técnicas principales de computación para resolver la ecuación de calor.

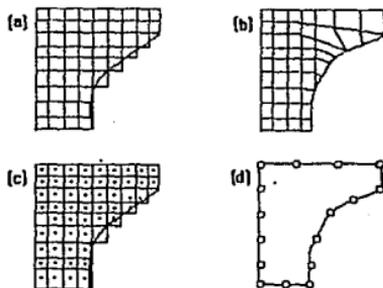


Fig III.2.- Ilustración esquemática de las mallas usadas en las técnicas numéricas aplicadas a la solidificación. a) método de diferencias finitas (FDM), b) método del elemento finito (FEM) y método directo de diferencias finitas (DFDM), c) método del elemento del volumen de control (VER), d) método de elemento de frontera (BEM)

En todos los casos excepto en el método BEM, el sistema de ecuaciones lineales obtenidas de la formulación se puede escribir como:

$$-k [T] + \{bc\} = [C_p^e(T)] \frac{\Delta T}{\Delta t} \quad \text{III.10}$$

esta ecuación solo es válida en el caso del método del calor específico efectivo y esa formulación se escribe de la siguiente manera para aplicarse al método de la entalpía:

$$-k[T] + \{bc\} = [M] \frac{\Delta H}{\Delta t} \quad \text{III.11}$$

donde k es la matriz de conductividad térmica e independiente de la temperatura, $C_p^e(T)$ es la matriz del calor específico efectivo que está en función de la temperatura, $[M]$ es la matriz de masa que es una constante para el método de la entalpía, $[T]$ y $[H]$ son los vectores de temperatura y entalpía respectivamente, en todos los nodos y por último $\{bc\}$ es el vector correspondiente a las condiciones de frontera.

La mayoría de los métodos numéricos consideran un paso de tiempo (dos niveles de tiempo). Si el vector de temperatura que aparece en el término difusivo de la ecuación III.10 y III.11 se toma al tiempo t , entonces, el esquema explícito resultante es condicionalmente estable (se requiere de un criterio de estabilidad). Si tomamos ese mismo vector de temperatura al tiempo $t+\Delta t$ o al tiempo $t+\Delta t/2$, resultan los esquemas implícitos de Euler y el de Crank-Nicolson respectivamente, que son incondicionalmente estables (no requieren criterio de estabilidad). Se ha encontrado que el esquema de Euler (también llamado esquema implícito simple) es el mejor para el proceso de solidificación. Los esquemas basados en dos pasos de tiempo (tres

niveles de tiempo) se han desarrollado, pero no parecen mejorar significativamente la precisión de la solución.

Si uno supone que la matriz de conductividad k , y el término de condición de frontera $\{bc\}$ no varían significativamente con el tiempo, entonces, el sistema de ecuaciones aplicables al método de la entalpía (ec III.11) se puede escribir como :

$$[M] \frac{\Delta H}{\Delta t} + k^t [T]^{t+\Delta t} = \{bc\}^t \quad \text{III.12}$$

donde ΔH es el vector de la variación de la entalpía en cada nodo durante el paso de tiempo Δt . El superíndice indica el tiempo en que las variables, o matrices, son tomadas.

La relación temperatura entalpía, es linealizada usando el método de Newton, el cual se encuentra restringido a su primera aproximación. Esto es equivalente a escribir:

$$T^{t+\Delta t} = T^t + \left[\frac{\delta T}{\delta H} \right]^t \Delta H \quad \text{III.13}$$

donde $[\delta T/\delta H]^t$ es la matriz diagonal de la derivada $\delta T/\delta H$ para cada nodo. En el caso de una aproximación macroscópica de la solidificación, esos valores pueden ser obtenidos fácilmente derivando la relación $T(H)$, que se da por la ecuación de Scheil. Para el micromacromodelado, la pendiente dT/dH en cada nodo fue establecida como $1/C_p$ (este valor previene cualquier oscilación que pueda ocurrir en la recalcificación, a la vez de que se mantiene la conservación de la energía).

Conjugando las ecuaciones III.12 y III.13 se obtiene un sistema de ecuaciones que se resuelve usando el método de triangulación directa de Gauss. En el contexto de los cálculos

macroscópicos el conocimiento de la nueva entalpía $H_i^t + \Delta H_i$, de cada nodo i , nos permite calcular la nueva distribución de temperaturas, usando únicamente la relación $T(H)$. Entonces con el simple uso de condiciones de frontera, se puede obtener paso a paso, la evolución del campo de temperaturas. En el caso del micro-macromodelado, el procedimiento iterativo es algo similar, sin embargo, una vez que la variación de entalpía se conoce en un paso de tiempo para cada nodo, la conservación de energía no es alcanzada usando la expresión $T(H)$, sino usando los cálculos microscópicos de nucleación y crecimiento de grano.

El método más simple y que se ajusta a las limitantes computacionales es el método de diferencias finitas. En este método se tiene que definir una malla que siga algún sistema coordenado y uno escribe las ecuaciones diferenciales en forma de diferencias finitas. Las principales ventajas del método de diferencias finitas son:

i) La matriz de masa es diagonal, lo cual es una ventaja real cuando se usan métodos explícitos (no hay inversión de matrices).

ii) La matriz de conductividad es una matriz diagonal que favorece el procesado y permite el uso de un esquema numérico implícito de dirección alternante (ADI).

iii) La introducción de fenómenos complejos es fácilmente formulada.

iv) La única desventaja que presenta el método de diferencias finitas, es que para el caso de geometrías complejas, se necesitan muchos nodos para describir la frontera en forma correcta.

III.B MODELO MICROSCOPICO

Aquí, el objetivo es obtener un modelo de la fracción solidificada que pueda ser adicionado posteriormente a los

cálculos macroscópicos de flujo de calor para relacionar las condiciones de solidificación, a los sobreenfriamientos y características microestructurales.

Modelado de la solidificación equiaxial.

En el caso de la microestructura equiaxial, la velocidad de crecimiento está muy relacionada con el sobreenfriamiento local ΔT . Por lo tanto, la densidad de granos deducida a partir de las leyes de nucleación son también función del sobreenfriamiento.

La simulación de la solidificación se puede alcanzar con buena precisión si se incluyen directamente los modelos de nucleación y crecimiento en los cálculos macroscópicos de flujo de calor.

La manera de acoplar el modelo cinético con el de transferencia de calor es como sigue: En la ecuación de flujo de calor (ec III.1) el término Q es evaluado cuando el método de la entalpía con la ayuda del micromodelado, cuya ecuación fundamental es:

$$Q = L \frac{df_s}{dt}$$

donde L es el calor latente de la aleación y df_s/dt es la rapidez de evolución para la fracción sólida. Si df_s/dt es conocida, entonces el término Q se puede usar para resolver la ecuación de calor (ec. III.1). En otras palabras, los modelos macro y microscópico se pueden conjugar.

Para entender los fenómenos microestructurales de la solidificación, se presenta el siguiente razonamiento. Considere un elemento de volumen V , con una temperatura uniforme $T(t)$, que contiene un líquido solidificándose de composición eutéctica y ahí, la fracción sólida es la suma de todas las contribuciones de los granos que han nucleado en el tiempo τ que es menor al tiempo presente t , y que estos núcleos han crecido desde τ hasta t .

Basado en lo mencionado anteriormente, uno puede escribir la fracción solidificada en función del tiempo como:

$$f_s(t) = \int_0^t \dot{n}(\tau) (4/3) \pi R^3(\tau, t) d\tau \quad \text{III.14}$$

donde $\dot{n}(\tau)$ es la rapidez de nucleación al tiempo τ , y $R(\tau, t)$ es el radio de los granos que han nucleado en ese tiempo τ menor al tiempo t , y que han crecido desde τ hasta t .

Si diferenciamos la ecuación III.14 con respecto al tiempo, obtenemos la siguiente expresión:

$$\frac{df_s(t)}{dt} = n(t) (4/3) \pi R^3(t, t) + \int_0^t \dot{n}(\tau) 4\pi R^2(\tau, t) \frac{\delta R(\tau, t)}{\delta t} d\tau \quad \text{III.15}$$

La primera contribución del lado derecho de la ecuación III.15, se asocia con la nucleación de nuevos granos. Sin embargo, este término puede ser despreciado en la mayoría de los casos porque el radio $R(t, t)$ es muy pequeño. Por otro lado, la velocidad de avance de la interface del grano al tiempo t ($v(\tau, t) = \delta R(\tau, t) / \delta t$), es función únicamente del subenfriamiento $\Delta T(t)$ en la intercara de los granos.

Suponiendo que el sobreenfriamiento es el mismo para todos los granos, uno puede transformar la ec.III.15 de la siguiente manera:

$$\frac{df_s(t)}{dt} = n(t) 4 \pi \bar{R}^2 v(t) \quad \text{III.16}$$

donde la densidad de granos $n(t)$ se da por la siguiente expresión:

$$n(t) = \int_0^t \dot{n}(\tau) d\tau \quad \text{III.17}$$

mientras que el cuadrado medio del tamaño de grano se define así:

$$\bar{R}^2(t)n(t) = \int_0^t \dot{n}(\tau) R^2(\tau, t) d\tau$$

III.18

La ecuación de la fracción sólida y la ecuación del radio de grano, suponen que los granos tienen forma esférica a través del proceso total de crecimiento. Aunque esta suposición es válida al inicio de la solidificación (para valores pequeños de f_s) no lo es cuando f_s es grande, debido a la gran interacción de unos granos con otros. Para tomar en cuenta la interacción entre los granos, la mayoría de los modelos microscópicos de solidificación equiaxial usan el bien conocido modelo de Johnson-Mehl o modelo de Avrami. (ver figura III.3)

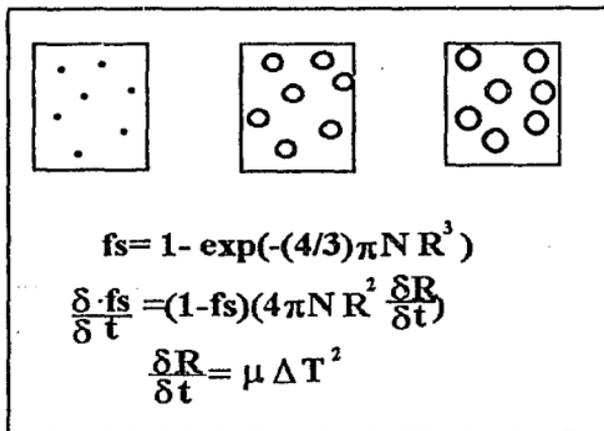


fig III.3.- Teoría de Johnson-Mehl.

Este modelo se desarrollo originalmente para la recristalización en el estado sólido, y supone que las rapidezces de nucleación y crecimiento son constantes y que los sólidos

recristalizados no se mueven. Bajo estas suposiciones, el modelo predice que la superficie efectiva de la interface entre los granos recristalizados y el material base (o para este caso, entre granos de sólido y fase líquida para hablar de la solidificación), es pesado con el factor $(1 - f_*)$. Entonces la rapidez de transformación (ecuación III.16) se escribe así:

$$\frac{df_*(t)}{dt} = n(t) 4\pi \bar{R}^2(t) v(t) (1-f_*) \quad \text{III.19}$$

Integrando la ecuación III.19, obtenemos la expresión fundamental:

$$f_*(t) = 1 - \exp[-n(t) (4/3) \pi R^3(t)] \quad \text{III.20}$$

que es la ecuación de Johnson-Mehl.

El problema para el micromodelado se encuentra casi resuelto, excepto por las variables desconocidas $n(t)$ y $R(t)$, las cuales tienen que obtenerse por medio de las leyes de nucleación y crecimiento de grano.

Si las leyes de nucleación (para obtener $n(t)$) y crecimiento (para obtener $R(t)$), son apropiadas y conocidas, el término Q en la ecuación III.1 se puede resolver numéricamente. Es de nuevo evidente que el tamaño de grano R y la densidad de grano n , estarán en función del tiempo t y de la rapidez de enfriamiento dT/dt .

Teoría de nucleación.

Este cálculo es difícil, ya que la teoría formal de nucleación heterogenea no se puede usar en su forma actual para estos cálculos. Por lo tanto, hay dos posibles aproximaciones que

son: la nucleación continua y la nucleación instantánea.

a) Nucleación continua.

Los investigadores que consideran la nucleación continua consideran que la nucleación ocurre continuamente una vez que la temperatura de nucleación es alcanzada.

La figura III.4 resume un modelo continuo de nucleación:

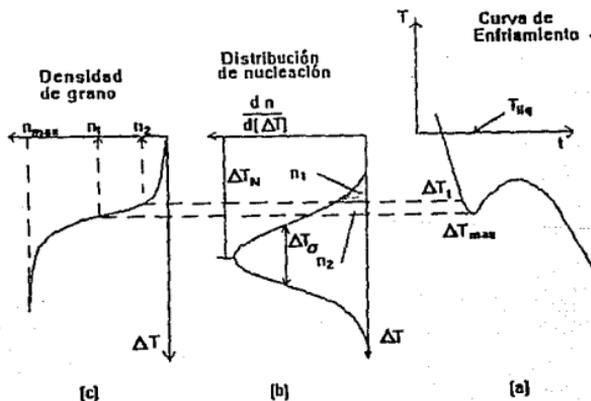


Fig. III.4.- Distribución continua de sitios de nucleación usada en el modelo de solidificación equiaxial. a) Curva de enfriamiento, b) Distribución de nucleación, c) Densidad de granos.

En la figura III.4 se observa que a un sobreenfriamiento dado, la densidad de grano correspondiente a ese sobreenfriamiento, está dada por la integral de la distribución de sitios de nucleación, desde el sobreenfriamiento cero hasta ΔT_1 (fig III.4.b). La curva III.4.c, representa la integral de la distribución de nucleación o densidad de grano (n_1) que corresponde al sobreenfriamiento ΔT_1 . Este valor de n_1 es la densidad de grano buscada para integrarla a la ecuación de Johnson-Mehl. Por este medio, la nueva densidad de grano se representa en cada paso de tiempo como una función del sobreenfriamiento. Cuando el mínimo en la curva de enfriamiento es alcanzado, es decir, cuando la recalcificación comienza, esto corresponde a la densidad de grano n_2 , asociado al sobreenfriamiento máximo ΔT_{max} .

La distribución de nucleación también puede ser caracterizada por dos o tres parámetros, dependiendo de la función de distribución usada.

Si la distribución de núcleos es aproximada por una distribución gaussiana, uno puede definir parámetros como: sobreenfriamiento de nucleación medio, ΔT_w , valor que corresponde al máximo de la distribución, la desviación estándar de la distribución, ΔT_σ , y la densidad máxima de núcleos, n_{max} , dada por la integral de la distribución total (integral con límites desde cero hasta sobreenfriamiento infinito). Estos tres parámetros se definen experimentalmente para cada aleación.

b) Nucleación instantánea.

Otra posible aproximación para determinar la densidad de grano n , es con el concepto de nucleación instantánea, donde se considera que todos los núcleos se generan al mismo tiempo en un sobreenfriamiento crítico ΔT_c . (ver fig III.5).

Pero se ha observado experimentalmente que hay una dependencia entre la densidad de grano n y la rapidez de

enfriamiento, la cual se muestra en la fig.III.6:

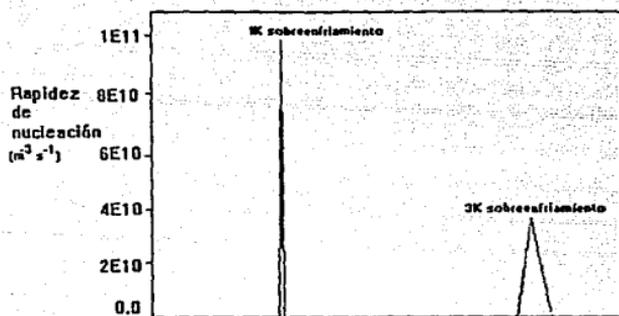


fig III.5.- Representación gráfica de la teoría de nucleación instantánea.

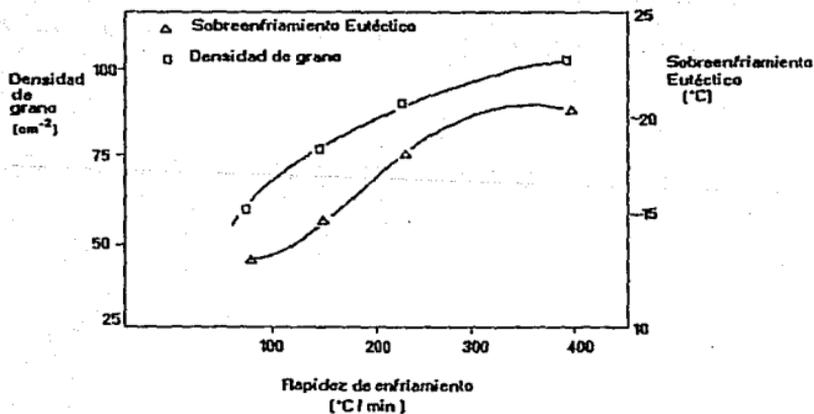


fig III.6.- Influencia de la rapidez de enfriamiento sobre el sobreenfriamiento eutéctico y la densidad de grano.

La figura III.6 refleja una correlación directa entre la rapidez de enfriamiento y el número de sustratos, que puede ser descrita por una ecuación parabólica:

$$N' = a + b \left(\frac{\delta T}{\delta t} \right)^2 \quad \text{III.21}$$

donde a y b son constantes que se determinan experimentalmente para una aleación dada.

Hay dos posibles explicaciones para justificar el incremento del número de sustratos con la rapidez de enfriamiento. La primera establece que debido a que los altos sobreenfriamientos se alcanzan cuando se usan altas rapidezces de enfriamiento, diferentes tipos de núcleos se convierten en núcleos activos y entonces se incrementa el número global de sustratos. Esto además es un hecho experimentalmente comprobado. La otra posible explicación, se basa en el hecho de que altos sobreenfriamientos son asociados con radios críticos pequeños. Esto quiere decir, que si se supone una distribución gaussiana de tamaños para una clase determinada de sustrato y si el radio crítico disminuye, el número de sustratos que pueden hacerse activos se incrementa.

De la discusión anterior, se deduce que si se cuenta con los datos que correlacione a N con dT/dt para una aleación dada, se puede usar la ley de nucleación empírica simple que puede predecir el número de granos a través de las piezas, para calcular la fracción sólida.

Teoría de crecimiento.

En el caso del crecimiento equiaxial, la rapidez de crecimiento se puede expresar como:

$$v = \frac{dR}{dt} = \mu (\Delta T)^2 \quad \text{III.22}$$

Donde μ es la constante de crecimiento y puede determinarse experimentalmente. El sobreenfriamiento interfacial ΔT , se puede suponer similar al sobreenfriamiento del bulk para piezas coladas típicas.

IV .- DESCRIPCION DEL MODELO ELABORADO

Generalidades.

El modelo elaborado acopla la transferencia de calor con la cinética de solidificación, con el fin de simular la historia térmica del sistema, es decir, la evolución de la temperatura en función de la posición y del tiempo en el dominio molde-metal, así como la evolución durante la solidificación de la fracción solidificada. El acoplamiento se realiza durante la solidificación utilizando el método denominado recuperación de temperatura. Los métodos numéricos empleados son el planteamiento de la ecuación de conservación de energía en diferencias finitas y el método de Newton para realizar el seguimiento de la evolución de la fracción solidificada.

MACROMODELADO (MODELO DE TRANSFERENCIA DE CALOR)

Planteamiento.

Se supone que el principal mecanismo de transferencia de calor en el sistema molde metal es la conducción, en donde la historia térmica del sistema es obtenible a partir de la

resolución de la ecuación de conservación de energía escrita en los siguientes términos:

$$L \frac{\delta f_s}{\delta t} + \nabla \bar{k} \nabla T = \rho \bar{c}_p \frac{\delta T}{\delta t} \quad \text{IV.1}$$

donde T es la temperatura en °C,

t es el tiempo en segundos,

ρ es la densidad del medio de conducción en (Kg/m³),

\bar{c}_p es la capacidad calorífica promedio del medio de conducción en (J/°C Kg),

\bar{k} es la conductividad térmica promedio del medio de conducción en (W/m °C),

L es el calor latente de solidificación en (J/m³),

f_s es la fracción solidificada.

En esta ecuación el término que involucra a la fracción solidificada no es nulo exclusivamente en el dominio del metal y durante la solidificación.

En el dominio del metal, durante la solidificación, para acoplar el modelo cinético con el modelo de transferencia de calor se puede usar el método de recuperación de temperatura, el cual calcula la evolución de la temperatura nodal de un volumen de control en el metal en dos pasos. En el primer paso se realiza el cálculo de la nueva distribución de temperaturas en el metal, sin tomar en cuenta la evolución de la fracción solidificada y por lo tanto, la evolución del calor latente asociado a la solidificación no se toma en cuenta.

Durante el segundo paso del método de recuperación de temperatura, se corrige la temperatura mediante un término que involucra el calor latente liberado por el incremento en la fracción solidificada, en el paso de tiempo considerado y que se calculó con el modelo cinético, con lo cual, se obtiene la nueva distribución de temperaturas en el volumen de control. Además en

esta segunda etapa se calcula el crecimiento de grano.

En este segundo paso es donde se introduce el modelo cinético, el cual a partir del subenfriamiento impuesto por la nueva distribución de temperaturas, calcula el incremento en fracción solidificada y entonces, el calor latente liberado en cada paso de tiempo, se conoce.

De acuerdo con este planteamiento, la resolución de la ecuación de conservación de energía durante la solidificación de un volumen de control en el dominio del metal (ec. III.1), se transforma en un proceso de 2 etapas:

ETAPA I. La resolución de la ecuación diferencial:

$$v (\bar{k} \nabla T) = \rho \bar{C}_p \frac{\delta T}{\delta t} \quad \text{IV.2}$$

ETAPA II. Corrección de las temperaturas calculadas para contabilizar la evolución del calor latente asociado al incremento en la fracción solidificada:

$$T_1^{t+\Delta t} = T_1^{t-\Delta t} + \frac{\Delta H_f}{C_p} (\Delta f_s) \quad \text{IV.3}$$

Además de usar el método de recuperación de temperatura, el modelo elaborado asume las siguientes hipótesis simplificativas:

- Propiedades termofísicas constantes para la aleación líquida, aleación sólida y el material de moldeo.
- Contacto térmico perfecto en la interfase molde metal durante todo el proceso.
- Llenado instantáneo del molde.
- Las propiedades de un volumen de control en el metal durante la solidificación son un promedio ponderado de las propiedades del sólido y líquido.

Coordenadas cilíndricas. (cilindros infinitos, flujo de calor unidireccional).

La ecuación a resolver en coordenadas cilíndricas para conocer la historia térmica del sistema, es la siguiente:

$$\rho C_p \frac{\delta T}{\delta t} = \frac{1}{r} k \frac{\delta}{\delta r} \left(r \frac{\delta T}{\delta r} \right) + Q \quad \text{IV.4}$$

Las condiciones de frontera consideradas en el sistema son:

$$1) \text{ En } r=r_2 \quad -k \left. \frac{\delta T}{\delta r} \right|_{r=r_2} = h_{\infty} (T_{\infty} - T)$$

$$2) \text{ En } r=0 \quad \left. \frac{\delta T}{\delta r} \right|_{r=0} = 0$$

$$3) \text{ En } t=0 \quad \begin{array}{l} r \leq r_1 \\ r > r_1 \end{array} \quad \begin{array}{l} T = \text{temperatura de colada} \\ T = \text{temperatura ambiente} \end{array}$$

El esquema que representa al sistema bajo estudio se muestra en la figura IV.1.

La ecuación de conservación de energía junto con las condiciones de frontera, se pueden resolver con la ayuda de diversas técnicas numéricas. En este trabajo se empleó el método de diferencias finitas totalmente implícito. En la figura IV.2 se muestra la tipificación nodal característica de nuestro sistema.

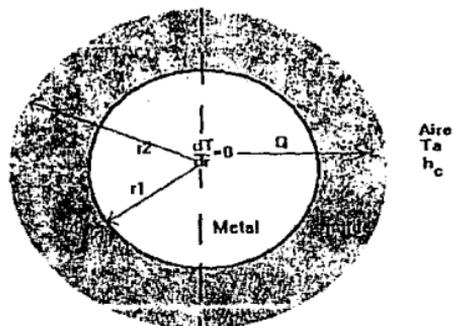


fig IV.1.- Descripción física del sistema.

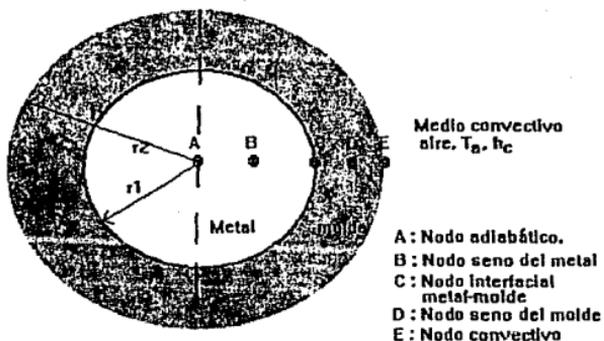


fig. IV.2.- Tipificación nodal para el sistema metal-molde- medio ambiente.

En el sistema se ubican tres nodos únicos que son: el nodo convectivo, el nodo interfacial metal-molde y el nodo adiabático. Además tenemos 2 nodos característicos, que son el nodo seno del

molde y seno del metal respectivamente. A continuación se muestran las ecuaciones nodales en diferencias finitas implícito, para cada uno de los 5 nodos característicos, en coordenadas cilíndricas considerando flujo de calor unidireccional.

TABLA IV.1.- ECUACIONES NODALES DEDUCIDAS EN DIFERENCIAS FINITAS EN COORDENADAS CILINDRICAS

MODO TIPO	POSICION	ECUACION
A	ADIABATICA	$[1+4F_{om}]T_1^{t+\Delta t} - 4F_{om}T_{1+1}^{t+\Delta t} = T_1^t$
B	SENO DEL METAL	$B_1 T_{1-1}^{t+\Delta t} + B_2 T_1^{t+\Delta t} + B_3 T_{1+1}^{t+\Delta t} = T_1^t$
C	INTERCARA MOLDE METAL	$C_1 T_{1-1}^{t+\Delta t} + C_2 T_1^{t+\Delta t} + C_3 T_{1+1}^{t+\Delta t} = T_1^t$
D	SENO DEL MOLDE	$D_1 T_{1-1}^{t+\Delta t} + D_2 T_1^{t+\Delta t} + D_3 T_{1+1}^{t+\Delta t} = T_1^t$
E	CONVECTIVO	$E_1 T_{1-1}^{t+\Delta t} + E_2 T_1^{t+\Delta t} = T_1^t + E_3$

Las constantes que aparecen en las ecuaciones se definen en la tabla IV.3.

El procedimiento general para generar las ecuaciones nodales empleando el método de diferencias finitas con el arreglo nodal mostrado anteriormente, consiste primeramente en realizar el balance de calor en cada nodo. En este balance de calor, las entradas netas de calor proveniente de los nodos adyacentes o del medio convectivo, se iguala a la acumulación de calor en el elemento nodal. El balance se basa en la ecuación de conservación de energía, solo que en lugar de poner derivadas parciales, se colocan diferencias finitas. Posteriormente las ecuaciones se

manipulan algebraicamente, para generar ecuaciones simples y ordenadas.

El resultado de este procedimiento es un sistema de ecuaciones lineales que a su vez generan una matriz tridiagonal, la cual se resuelve fácilmente por el método de eliminación Gaussiana. De esta manera, resolviendo la matriz tridiagonal que representa al sistema de ecuaciones que difiere al sistema, en cada paso de tiempo, se obtiene el nuevo perfil de temperaturas en el sistema.

El procedimiento a detalle para generar las ecuaciones nodales del sistema en coordenadas cilíndricas por el método de diferencias finitas, se muestra en el anexo I de la tesis.

Ya con las ecuaciones nodales definidas y con las propiedades termofísicas establecidas, lo único que resta, es introducir la temperatura de colada que nos va a servir como perfil inicial de temperaturas en el metal. Por otro lado al inicio, se considera que el molde se encuentra a temperatura ambiente. Además se debe definir un incremento adecuado en la posición radial (Δr) y un incremento adecuado en el paso de tiempo (Δt). En el caso del Δt como se empleó el esquema implícito, no existe aparentemente ninguna restricción para seleccionar este valor, pero lo más recomendable es seleccionar un Δt pequeño para evitar un error grande en los resultados.

Las propiedades termofísicas de la aleación líquida, la aleación sólida y la arena de moldeo se presentan en la tabla IV.2

TABLA IV.2.- PROPIEDADES TERMOFÍSICAS USADAS EN LAS ECUACIONES NODALES

HIERRO GRIS EUTECTICO	MATERIAL DE MOLDE
Conductividad térmica	Conductividad térmica = 0.6W/m°C
líquido = 20.3 W/m°C	Capacidad calorífica = 1075/Kg°C
sólido = 48.0 W/m°C	Densidad = 1500 Kg/m ³
Capacidad calorífica:	
líquido = 916.9 J/Kg °C	Coefficiente de transferencia de
sólido = 845.7 J/Kg °C	calor por convección en 1 ig-
Densidad = 7000 Kg/m ³	tercera molde-aire = 1.6 /m °C

TABLA IV.3.- DETERMINACION DE LAS CONSTANTES QUE APARECEN EN LAS ECUACIONES MODALES.

CONSTANTE	DEFINICION
F _{0a} (número de Fourier en el seno del metal)	$F_{0a} = \alpha_m \Delta t / \Delta r^2$
F _{0s} (número de Fourier en el seno de la arena)	$F_{0s} = \alpha_s \Delta t / \Delta r^2$
B ₁ (número de Biot en la intercara molde-aire)	$B_1 = h_m \Delta r / k_a$
B ₁	$B_1 = \left(1 - \frac{\Delta r}{2R}\right) F_{0a}$
B ₂	$B_2 = \left(1 + F_{0a} \left[1 - \frac{\Delta r}{2R}\right] + \left(1 + \frac{\Delta r}{2R}\right)\right)$
B ₃	$B_3 = \left(1 + \frac{\Delta r}{2R}\right) F_{0s}$
C ₁	$C_1 = \left(\frac{-k_m \Delta t (1 - \Delta r / 2R)}{(\rho_m C_{pm} + \rho_a C_{pa}) \Delta r^2}\right)$
C ₂	$C_2 = \left(1 + \left(\frac{2\Delta t}{(\rho_m C_{pm} + \rho_a C_{pa}) \Delta r^2}\right) \left[k_m \left(1 - \frac{\Delta r}{2R}\right) + k_a \left(1 + \frac{\Delta r}{2R}\right)\right]\right)$
C ₃	$C_3 = \left(\frac{-k_s \Delta t (1 + \Delta r / 2R)}{(\rho_m C_{pm} + \rho_a C_{pa}) \Delta r^2}\right)$
D ₁	$D_1 = \left(1 - \frac{\Delta r}{2R}\right) F_{0a}$
D ₂	$D_2 = \left(1 + F_{0a} \left[1 - \frac{\Delta r}{2R}\right] + \left(1 + \frac{\Delta r}{2R}\right)\right)$
D ₃	$D_3 = \left(1 + \frac{\Delta r}{2R}\right) F_{0s}$
E ₁	$E_1 = \left(1 - \frac{\Delta r}{2R}\right) F_{0a}$
E ₂	$E_2 = \left(1 + 2F_{0a} \left(1 - \frac{\Delta r}{2R}\right) + 2B_1 F_{0a}\right)$
E ₃	$E_3 = 2B_1 F_{0a} T_\infty$

Coordenadas cartesianas. (flujo de calor unidireccional en placas infinitas).

El planteamiento a seguir en el caso de las placas infinitas es casi igual al usado en coordenadas cilíndricas, por lo tanto, la aplicación del método es la misma y por supuesto las consideraciones e hipótesis simplificativas son también válidas.

Lo único que cambia son las ecuaciones resultantes del método de diferencias finitas, debido al cambio de geometría.

Para el planteamiento del macromodelo de transferencia de calor en coordenadas cartesianas, la ecuación de conservación de energía se escribe en los siguientes términos:

$$\frac{\delta^2 T}{\delta x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\delta T}{\delta t} \quad \text{IV.5}$$

con las siguientes condiciones de frontera:

$$1) \text{ En } X=0 \quad -k \left. \frac{\delta T}{\delta x} \right|_{x=0} = h_{\infty} (T_{\infty} - T)$$

$$2) \text{ En } X=L \quad \left. \frac{\delta T}{\delta x} \right|_{x=L} = 0$$

$$3) \text{ En } t=0 \quad \begin{array}{ll} x \leq x_1 & T = \text{temperatura de colada} \\ x \geq x_1 & T = \text{temperatura ambiente} \end{array}$$

El sistema se muestra en la figura IV.3, incluyendo la tipificación nodal usada.

Usando el mismo procedimiento empleado para generar las ecuaciones nodales con el método de diferencias finitas implícito en coordenadas cilíndricas, se precedió a generar las ecuaciones

nodales en coordenadas cartesianas (cuyo procedimiento para deducirlas se muestra en el anexo II), las cuales se muestran en la tabla IV.4:

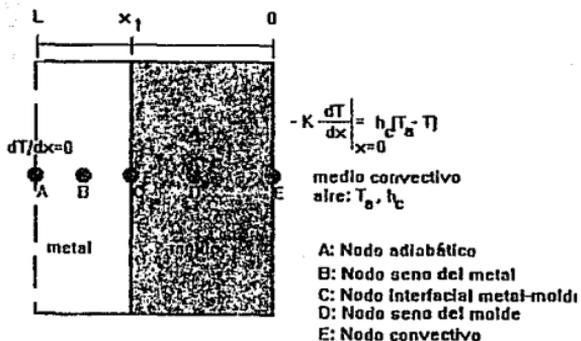


Fig IV.3.- Descripción del sistema en coordenadas cartesianas, donde además se incluye la tipificación nodal.

TABLA IV.4.- ECUACIONES NODALES DEDUCIDAS EN DIFERENCIAS FINITAS
 EN COORDENADAS CARTESIANAS

NODO	POSICION	ECUACION
A	ADIABATICA	$-2F_{0a} T_{i+1}^{t+\Delta t} + [2F_{0a}+1] T_i^{t+\Delta t} = T_i^t$
B	SENO DEL METAL	$-F_{0a} T_{i-1}^{t+\Delta t} + [2F_{0a}+1] T_i^{t+\Delta t} - F_{0a} T_{i+1}^{t+\Delta t} = T_i^t$
C	INTERCARA MOLDE-METAL	$C_1 T_{i-1}^{t+\Delta t} + C_2 T_i^{t+\Delta t} + C_3 T_{i+1}^{t+\Delta t} = C_4 T_i^t$
D	SENO DEL MOLDE	$-F_{0a} T_{i-1}^{t+\Delta t} + [2F_{0a}+1] T_i^{t+\Delta t} - F_{0a} T_{i+1}^{t+\Delta t} = T_i^t$
E	CONVECTIVO	$-2F_{0a} T_{i-1}^{t+\Delta t} + [2F_{0a}+2B_1F_{0a}+1] T_i^{t+\Delta t} = T_i^t + 2B_1F_{0a} T_{\infty}$

Las constantes físicas que aparecen en las ecuaciones nodales se reportan en la tabla IV.5:

TABLA IV.5.- DEFINICION DE LAS CONSTANTES QUE APARECEN EN LAS ECUACIONES MODALES EN COORDENADAS CARTESIANAS.

CONSTANTE	DEFINICION
F _{0m} (número de Fourier en el seno del metal)	$F_{0m} = \alpha_m \Delta t / \Delta r^2$
F _{0a} (número de Fourier en el seno de la arena)	$F_{0a} = \alpha_a \Delta t / \Delta r^2$
B ₁ (número de Biot en la Intercara moldes-aire)	$B_1 = h_{00} \Delta r / k_a$
C ₁	$C_1 = -k_m / \Delta x$
C ₂	$C_2 = [(\Delta x / 2 \Delta t) (\rho_m C_{pm} + \rho_a C_{pa}) + k_m / \Delta x + k_a / \Delta x]$
C ₃	$C_3 = -k_a / \Delta x$
C ₄	$C_4 = [(\Delta x / 2 \Delta t) (\rho_a C_{pa} + \rho_m C_{pm})]$

NOTA: LOS SUBINDICES "a" Y "m" SE REFIEREN A LAS PROPIEDADES TERMOFISICAS DEL MOLDE Y DEL METAL RESPECTIVAMENTE. PARA LA ECUACIONES MODALES MOSTRADAS EN LAS TABLAS IV.1 Y IV.4, LOS SUPERINDICES t Y t+Δt SE REFIEREN AL TIEMPO EN QUE LAS TEMPERATURAS SON TOMADAS.

MODELO CINETICO.

Se asume que la totalidad de granos eutécticos presentes en un volumen de control dentro del dominio del metal nuclean instantáneamente a la temperatura crítica de nucleación y posteriormente crecen adoptando una forma esférica.

La densidad de granos eutécticos es una constante cuyo valor depende del potencial de nucleación (inoculación) y de la velocidad de enfriamiento. Con respecto a este último aspecto en la literatura se propone una dependencia parabólica entre la

densidad de granos (número de núcleos activos) y la velocidad de enfriamiento en el instante en que el volumen de control alcanza la temperatura eutéctica:

$$N_i' = \left[a + b \left(\frac{\delta T}{\delta t} \right)_{T_e} \right]^2 \quad \text{IV.6}$$

donde N_i' es el número de núcleos por unidad de superficie. El número de núcleos por unidad de volumen se obtiene de la siguiente ecuación :

$$N_i = 0.87 \left((N_i')^{(3/2)} \right) \quad \text{IV.7}$$

Los valores de los parámetros a y b para hierro gris eutéctico reportados en la literatura son los siguientes:

$$a=628200$$

$$b=3.814$$

Considerando válidas las hipótesis anteriormente mencionadas la ecuación que describe a la fracción solidificada en un volumen de control, considerando la interacción entre granos, se expresa mediante la ecuación de Johnson-Mehl :

$$f_s = 1 - \exp \left(-\frac{4}{3} \pi \cdot N \cdot R^3 \right) \quad \text{IV.8}$$

donde f_s es la fracción solidificada

N es el número de núcleos activos en el volumen de control

R es el radio de grano eutéctico. $R=R(t)$

Derivando con respecto al tiempo la ecuación IV.8 se obtiene la

velocidad de formación del sólido

$$\frac{df_s}{dt} = (1-f_s) 4 \cdot \pi \cdot N \cdot R^2 \frac{dR}{dt} \quad \text{IV.9}$$

donde el término $\frac{dR}{dt}$, es la velocidad de crecimiento, la cual para crecimiento equiaxial eutéctico en las condiciones comúnmente encontradas en fundición puede calcularse de la siguiente manera:

$$\frac{dR}{dt} = \mu (\Delta T)^2 \quad \text{IV.10}$$

donde μ es la constante de crecimiento ($m/s \cdot ^\circ C^2$)

ΔT es el subenfriamiento interfacial ($^\circ C$)

En este trabajo se adopta el valor reportado por Fredriksson

$$\mu = 8.37 \cdot 10^{-8} \text{ m/s } ^\circ C^2$$

El planteamiento de la evolución de la fracción solidificada y del radio de grano eutéctico en función del subenfriamiento y del tiempo puede realizarse mediante el método de Euler de donde se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$f_{s1}^{(t+\delta t)} = f_{s1}^t + \delta t \left(\frac{df_{s1}}{dt} \right)_t \quad \text{IV.11}$$

$$R_1^{(t+\delta t)} = R_1^t + \delta t \left(\frac{dR_1}{dt} \right)_t \quad \text{IV.12}$$

El incremento en fracción solidificada en un paso de tiempo se obtiene de :

$$\Delta f_s = f_{s_{t+\delta t}} - f_{s_t} = \delta t \left(\frac{d f_s}{d t} \right)_t \quad \text{IV.13}$$

y la corrección de temperatura durante la solidificación se realiza empleando la ecuación IV.3.

Durante la solidificación en el metal, en la primera etapa se obtiene la nueva distribución de temperaturas, de la solución de la ecuación IV.4; posteriormente se calcula el subenfriamiento asociado y la velocidad de crecimiento de grano (ec.IV.10) con lo cual puede calcularse el nuevo radio (ec.IV.12) y la nueva fracción solidificada (ec IV.13). En el momento en que esta última alcanza el valor de 0.99 se asume que la solidificación ha terminado.

V.- ANALISIS DE LAS VARIABLES DE PROCESO SOBRE LA TENDENCIA AL BLANQUEADO DE LAS PLACAS INFINITAS Y CILINDROS INFINITOS DE HIERRO COLADO

APLICACION DEL MODELO

El modelo anteriormente descrito fue traducido a un programa computarizado en lenguaje BASIC, con el objeto de simular las curvas de enfriamiento de placas infinitas y de cilindros infinitos de hierro líquido colado en moldes de arena. Este programa nos va a ser de gran utilidad para generar las curvas de enfriamiento y comparar estas con la TEM, de tal manera de poder predecir la formación o no formación de ledeburita, para lo cual se aplicarán los criterios señalados en el capítulo II de esta tesis.

Para poder conocer la temperatura eutéctica metaestable, se introdujeron al programa de computo las siguientes expresiones que establecen la dependencia de las temperaturas eutécticas estable y metaestable con respecto a la composición:

TEMPERATURA EUTECTICA ESTABLE:

$$TEE = 1155.4 + 6.5 (\%Si)$$

V.1

TEMPERATURA EUTECTICA METAESTABLE:

TEM = 1148 - 19(%Si) + 3(%Mn)

V.2

El programa elaborado (el cual se muestra en el anexo III, donde se presenta la versión en coordenadas cilíndricas y la versión en coordenadas cartesianas), proporciona la siguiente información:

.- Genera la curva de enfriamiento correspondiente a uno o más nodos en el dominio del metal.

.- Las temperaturas eutécticas estable y metaestable son sobrepuestas a la curva de enfriamiento, con el objeto de analizar la tendencia al blanqueado.

.- Muestra gráficamente la evolución de la fracción solidificada para cada curva.

Con el fin de analizar el efecto de las variables de proceso como lo son: la temperatura de colada, el contenido de silicio, la cantidad de núcleos activos y el gradiente térmico dentro del dominio del metal; se procedió a simular la solidificación de cilindros infinitos de hierro eutéctico (con un C.E. = 4.3%) colado en moldes de arena.

Temperatura de colada.

Para analizar el efecto de la temperatura de colada se procedió a simular el enfriamiento de un cilindro infinito, con los siguientes parámetros constantes:

PARAMETROS CONSTANTES

- .- Radio de la pieza = 1.0cm
- .- Espesor del molde = 3.5cm
- .- Δr (para el programa de dif. fin.) = 0.5cm
- .- Δt (para el programa de dif. fin.) = 0.5s
- .- Si = 2.0X
- .- Mn = 0.5X
- .- P = 0.08X

Las curvas de enfriamiento corresponden al nodo interfacial (b) molde-metal y al nodo central o adiabático (a) (ver tipificación nodal en el capítulo IV). La curva de enfriamiento que permanece abajo corresponde al nodo interfacial molde-metal.

Como se observa en la fig V.1 en donde se aprecian 4 diferentes curvas de enfriamiento, que fueron corridas con las siguientes temperaturas de colada : 1400, 1350, 1300 y 1200°C.

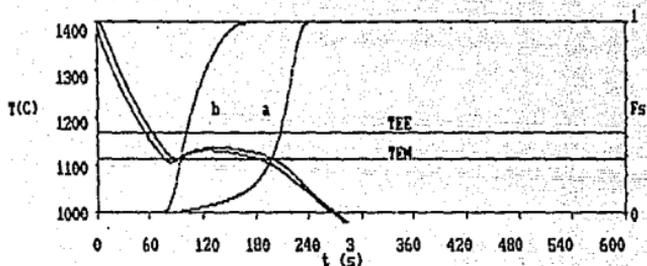
Como se observa en la figura V.1, se puede deducir que la tendencia al blanqueado disminuye conforme aumenta la temperatura de colada, lo cual se explica con el hecho de que la velocidad de enfriamiento disminuye con el aumento en la temperatura de colada. Lo anterior se basa en el siguiente razonamiento: cuando colamos el hierro a una mayor temperatura de colada, una mayor cantidad de calor tiene que ser removida por el material de moldeo, el cual se satura térmicamente en mayor medida, provocando esta disminución en la velocidad de enfriamiento.

Contenido de silicio.

En el caso del efecto del contenido de silicio sobre la tendencia al blanqueado, en la literatura se encontró la siguiente información (fig V.2) donde además se muestra el efecto de otros elementos aleantes, los cuales afectan fundamentalmente la TEM y la TEE.

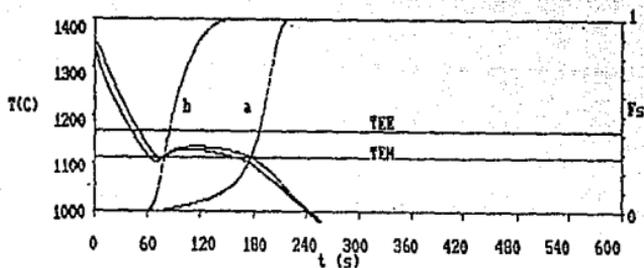
La simulación de las curvas de enfriamiento se realizó con los siguientes parámetros:

PARAMETROS CONSTANTES
.-Temperatura de colada= 1200°C
.-Radio de la pieza = 2.5cm
.-Espesor del molde = 2.5cm
.- Δr (para el programa de dif. fin.)= 0.5cm
.- Δt (para el programa de dif. fin.)= 0.5s
.- $H_n = 0.5X$
.- $P = 0.08X$



$T_0=1400^{\circ}\text{C}$ $R=1\text{cm}$ $e.n.=3.5\text{cm}$

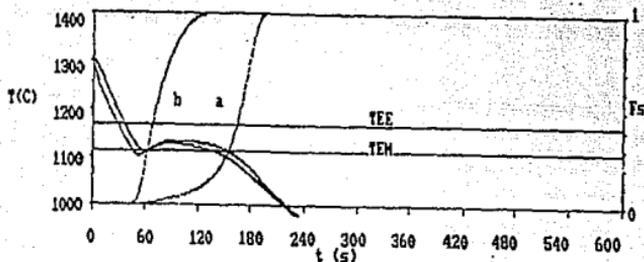
fig V.1.a



$T_0=1350^{\circ}\text{C}$ $R=1\text{cm}$ $e.n.=3.5\text{cm}$

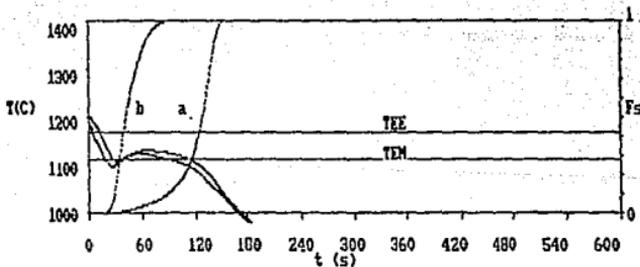
fig V.1.b

fig V.1.- Efecto de la temperatura de colada sobre la tendencia al blanqueado de hierro colado líquido. a) Cilindro colado a 1400°C . b) Cilindro colado a 1350°C .



$T_c=1300^{\circ}\text{C}$ $R=1\text{cm}$ $e.n.=3.5\text{cm}$

fig V.1.c



$T_c=1200^{\circ}\text{C}$ $R=1\text{cm}$ $e.n.=3.5\text{cm}$

fig V.1.d

fig V.1.- Efecto de la temperatura de colada sobre la tendencia al blanqueado de hierro colado líquido. c) cilindro colado a 1300°C . d) Cilindro colado a 1200°C .

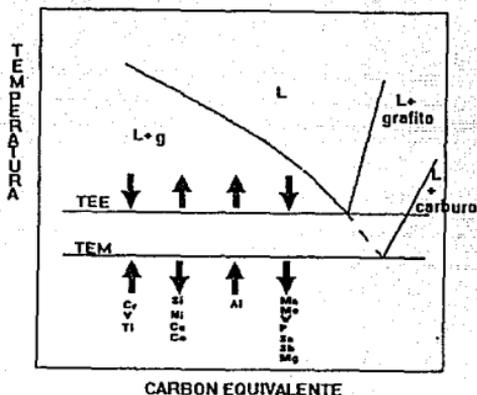
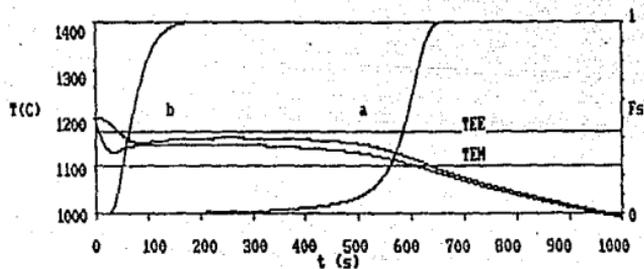


Fig V.2.- Sección esquemática del diagrama de fases Fe-C, ilustrando la influencia de diferentes elementos aleantes sobre las temperaturas eutécticas estable y metaestable.

En la figura V.3 se muestran las curvas generadas por el programa con los siguientes contenidos de silicio: 2.6%, 2%, 1.5% y 1%.

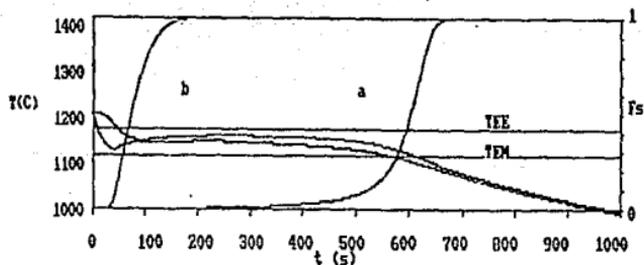
Las curvas de enfriamiento que aparecen en la figura corresponden de nueva cuenta al nodo adiabático (a) y al nodo interfacial metal-molde (b).

En la figura se puede observar que la tendencia al blanqueado disminuye conforme aumenta el contenido de silicio, lo cual era de esperarse, ya que al observar la ecuación V.2 se ve que aumentando el contenido de silicio se abate la temperatura eutéctica metaestable y con esto se dificulta la transformación eutéctica metaestable.



$T_c=1200^{\circ}\text{C}$ $R=2.5\text{cm}$ $e.n.=2.5\text{cm}$ $\text{Si}=2.6\%$ $\text{Mn}=0.5\%$ $\text{P}=0.08\%$

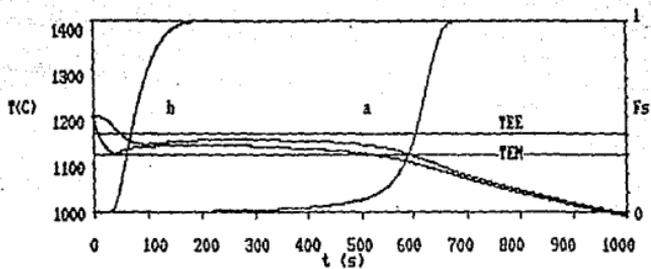
fig V.3.a



$T_c=1200^{\circ}\text{C}$ $R=2.5\text{cm}$ $e.n.=2.5\text{cm}$ $\text{Si}=2.0\%$ $\text{Mn}=0.5\%$ $\text{P}=.08\%$

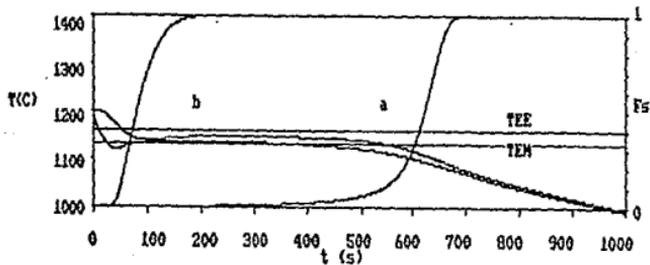
fig V.3.b

fig V.3.- Efecto del contenido de silicio sobre la tendencia al blanqueo del hierro gris eutéctico. a) Curva de enfriamiento de un cilindro de hierro con 2.6% Si. b) Curva de enfriamiento de un cilindro de hierro con 2% de Si.



$T_0=1200^{\circ}\text{C}$ $R=2.5\text{cm}$ $e.n.=2.5\text{cm}$ $\text{Si}=1.5\%$ $\text{Mn}=0.5\%$ $P=0.08\%$

fig V.3.c



$T_0=1200^{\circ}\text{C}$ $R=2.5\text{cm}$ $e.n.=2.5\text{cm}$ $\text{Si}=1.0\%$ $\text{Mn}=0.5\%$ $P=0.08\%$

fig V.3.d

fig V.3.- Efecto del contenido de silicio sobre la tendencia al blanqueado del hierro gris eutéctico. c) Curva de enfriamiento de un cilindro de hierro con 1.5% Si. d) Curva de enfriamiento de un cilindro de hierro con 1% de Si.

Número de núcleos activos.

Con respecto al número de núcleos activos, se simuló la solidificación de un cilindro infinito con los siguientes parámetros constantes:

PARAMETROS CONSTANTES
.-Temperatura de colada= 1400°C
.-Radio de la pieza = 1.0cm
.-Espesor del molde = 4.0cm
.- Δr (para el programa de dif. fin.)= 0.5cm
.- Δt (para el programa de dif. fin.)= 0.5s
.-Mn = 0.5X
.-P = 0.08X
.-Si = 1.5X

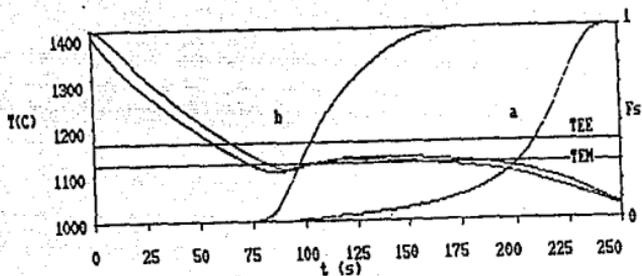
La curva se simuló para los nodos interfacial metal-molde y el nodo adiabático.

La figura V.4 muestra tres corridas usando en la primera el número de núcleos activos calculado por el modelo, en la segunda, el número de núcleos activos es 50% mayor al calculado por el modelo y en la tercera corrida, se coloca 100% más de núcleos activos que el calculado por el modelo.

Se puede apreciar que conforme aumenta el número de núcleos activos disminuye el sobreenfriamiento y con esto la tendencia al blanqueado. Lo anterior se explica por el hecho, de que un mayor número de núcleos activos libera en un intervalo definido de tiempo una mayor cantidad de calor latente, lo cual contrarresta el enfriamiento impuesto por el molde.

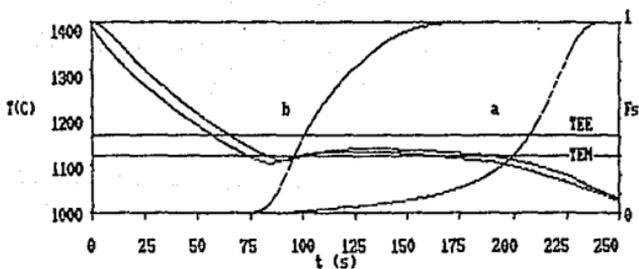
Gradiente térmico.

Por último, en la Fig. V.5 se muestra el efecto del gradiente térmico en el cilindro infinito. En esta figura se muestran las curvas de enfriamiento correspondientes a tres nodos en el dominio del metal así como las curvas respectivas de evolución de la fracción solidificada para un cilindro colado a 1200°C y dos



$T_c=1400^{\circ}\text{C}$ $R=1\text{cm}$ $e.m.=4\text{cm}$ $S_i=1.5\%$ $\text{N.N.A. (calculado por el modelo)}$

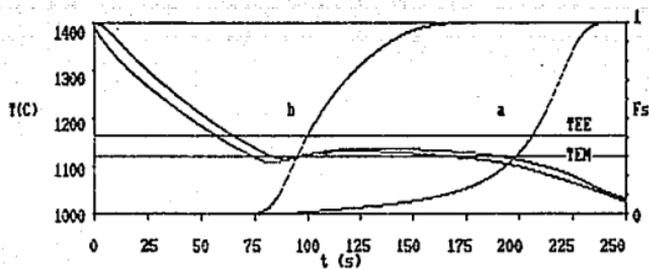
fig V.4.a



$T_c=1400^{\circ}\text{C}$ $R=1\text{cm}$ $e.m.=4\text{cm}$ $S_i=1.5\%$ $\text{N.N.A. (50\% extra al calculado)}$

fig V.4.b

fig V.4.- Efecto del número de núcleos activos sobre la tendencia al blanqueo de cilindros de hierro gris. a) Cálculo efectuado con el n de núcleos activos que predice el modelo. b) Cálculo efectuado considerando 50% de exceso en núcleos activos con respecto al número calculado por el modelo.



$T_c=1400^\circ\text{C}$ $R=1\text{cm}$ $e.m.=4\text{cm}$ $Si=1,5\%$ $\text{N.A.}(100\% \text{ extra al calculado})$

fig V.4.c

fig V.4.- Efecto del número de núcleos activos sobre la tendencia al blanqueado de cilindros de hierro gris.

c) Cálculo efectuado considerando 100% de exceso en núcleos activos con respecto al número calculado por el modelo.

contenidos de silicio. Aquí se puede observar que existe una diferencia evidente en las historias térmicas de los nodos ubicados en diferentes partes del cilindro, ya que si bien una medida correctiva como el incremento en el % de silicio, puede provocar que la parte central de la placa solidifique de acuerdo a la transformación estable, el nodo interfacial muestra aún una cierta cantidad de hierro blanco.

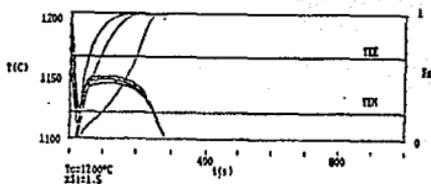
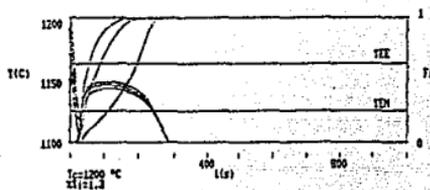


fig V.5.- Efecto del gradiente térmico sobre la tendencia al blanqueado en piezas de hierro gris eutéctico.

CONCLUSIONES:

Se elaboró un modelo matemático que simula la solidificación de placas y cilindros infinitos de hierro líquido colado en moldes de arena. El micromacromodelo elaborado fue un acoplamiento de un modelo de transferencia de calor con uno de cinética de solidificación. Su aplicación es válida en composición eutéctica y con crecimiento equiaxial.

El modelo elaborado se usó para analizar el efecto de las variables de proceso sobre la tendencia al blanqueado de hierro.

Del análisis efectuado, se puede destacar lo siguiente:

.- Con el aumento en la temperatura de colada se disminuye la tendencia al blanqueado, ya que se debe extraer mayor cantidad de calor y esto satura térmicamente al material de moldeo, que a su vez representa una disminución en la velocidad de enfriamiento y con ello la tendencia al blanqueado. Sin embargo, el aumento en la temperatura de colada puede provocar una sobreoxidación de los elementos aleantes, así como del propio hierro, por lo que en la práctica el aumento en la temperatura de colada para evitar el blanqueo tiene sus limitaciones.

.- Con el aumento en el contenido de silicio se disminuye la tendencia al blanqueado, ya que el silicio disminuye la temperatura eutéctica metaestable, lo cual favorece la transformación eutéctica estable.

.- Con el aumento en el número de núcleos activos, se disminuye la tendencia al blanqueado, ya que se reduce significativamente el subenfriamiento que aparece durante la solidificación. Por lo tanto, la inoculación puede reducir prácticamente los problemas de blanqueado.

.- En cuanto al gradiente térmico, se ve que dentro de una misma pieza existen distintas velocidades de enfriamiento, encontrándose en la intercara molde-metal la mayor velocidad de enfriamiento, lo cual generalmente resulta en un blanqueado parcial sobre la orilla de la pieza. En consecuencia, las piezas delgadas con mayores velocidades de enfriamiento, son más propensas al blanqueado.

Todas estas conclusiones se lograron bosquejar gracias al modelo matemático que simula la solidificación a partir de principios fundamentales de los fenómenos de transporte y aspectos de la solidificación. Se ha encontrado que esta modelación logra predecir con mucha exactitud el proceso real de solidificación. Por lo tanto, este modelo se convierte en una herramienta efectiva de control de procesos.

Además, debido a que se trata de una herramienta basada en las leyes fundamentales de la termodinámica, solidificación, transferencia de calor, entre otras, se genera realmente conocimiento científico y ayuda a una profunda comprensión del proceso.

Por último, a manera de recomendación, es importante que este trabajo se complete con un diseño experimental, con el objeto de validar el modelo propuesto.

BIBLIOGRAFIA :

- 1.- D.M. Stefanescu, Upadhyay D. Bandyopadhyay.
" Heat Transfer-Solidification Kinetics Modeling of Solidification of Castings".
Metallurgical Transactions, Vol. 21A, April 1990.
- 2.- Hasse Fredriksson and Ingvar L. Svensson.
"Computer Simulation of the Structure Formed During Solidification of Cast Iron".
Mat. Soc. Symp. Proc., Vol. 14, 1985. Elsevier Science Publishing Co., Inc.
- 3.- Kou Chang Su, Itsou Ohnaka, Isamu Yamauchi.
" Computer Simulation of Solidification of Nodular Cast Iron".
Mat. Soc. Symp. Proc., Vol. 14, 1985. Elsevier Science Publishing Co., Inc.
- 4.- Fras Edward.
"A Computer-Aided Simulation of the Kinetics of Solidification of the Eutectic Ductile Cast Iron".
Mat. Soc. Symp. Proc., Vol. 14, 1985. Elsevier Science Publishing Co., Inc.
- 5.- T. X. Hou, R. D. Pehlke.
"Computation of Solidification of a Steel Casting Against a Chill Mold Wall".
AFS Transactions,, vol. 92.
- 6.- M. Rappaz.
" Modelling of Microstructure Formation in Solidification Processes".
International Materials Reviews, vol. 34, No. 3, 1989.

7.- Ph. Thévoz, J. L. Desbiolles y M. Rappaz.

" Modelling of Equiaxed Microstructure Formation in Casting".
Metallurgical Transactions A, Vol. 20A, Feb. 1989.

8.- S. Chang, D. Shanguan, D. M. Stefanescu.

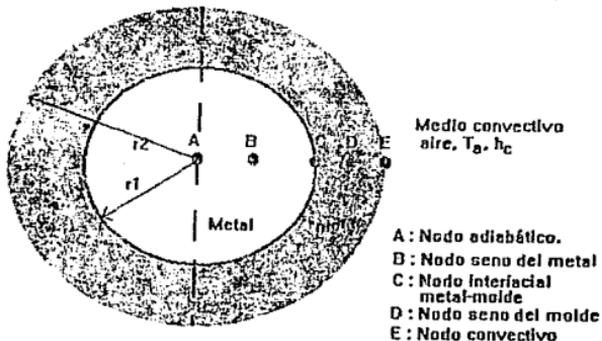
" Prediction of Microstructural Evolution in SG Cast Iron from
Solidification to Room Temperature".
AFS Transactions, vol. 98, 1990.

9.- R. A. Krivanek, C. E. Mobley.

" A Computer Model for the Solidification of Cast Iron Chill
Tests".
AFS Transactions, vol. 84, 1976.

ANEXO I

DEDUCCION DE LAS ECUACIONES NODALES EN COORDENADAS CILINDRICAS PARA EL SISTEMA QUE SE MUESTRA A CONTINUACION:



NODO A.- (Nodo adiabático).

La ecuación de conservación de energía se puede escribir de la siguiente manera en coordenadas cilíndricas:

$$\frac{-k_m(T'_{1,1} - T'_1)(2\pi\Delta r/2)}{\Delta r} = \frac{\rho_m C p_m (\Delta r/2)^2 \pi (T'_1 - T_1)}{\Delta t}$$

En donde el área de transferencia de calor para el nodo central se puede expresar como: $A = (2\pi\Delta r/2)$;

mientras que el volumen nodal se expresa: $V = \pi(\Delta r/2)^2$, esto es válido si suponemos una altura unitaria para los volúmenes nodales.

$$\frac{\rho_m C p_m (\Delta r)^2}{4 k_m \Delta t} (T'_1 - T_1) = - (T'_1 - T'_{1,1})$$

$$- \frac{4\alpha_m \Delta t}{(\Delta r)^2} (T'_1 - T'_{1+1}) = T'_1 - T_1$$

$$\left[1 + \frac{4\alpha_m \Delta t}{(\Delta r)^2} \right] T'_1 - \left[\frac{4\alpha_m \Delta t}{(\Delta r)^2} \right] T'_{1+1} = T_1$$

$$\boxed{\left[1 + 4\Delta F_{0m} \right] T'_1 - 4\Delta F_{0m} T'_{1+1} = T_1}$$

NODO B.- (Seno del metal).

La ecuación de conservación de energía se puede escribir de la siguiente manera en coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} & - \frac{k_m (T'_1 - T'_{1-1}) (2\pi(R_1 - \Delta r/2))}{\Delta r} - \frac{[-k_m (T'_{1+1} - T'_1) (2\pi(R_1 + \Delta r/2))]}{\Delta r} \\ & = \frac{\rho_m c_p m (2\pi R_1 \Delta r) (T'_1 - T_1)}{\Delta t} \end{aligned}$$

En donde el área de transferencia de calor interna para el nodo queda definida como: $A_1 = (2\pi(R_1 - \Delta r/2))$;

De manera análoga se puede expresar el área de transferencia de calor externa: $A_0 = (2\pi(R_1 + \Delta r/2))$;

Mientras que el volumen nodal se define por una aproximación de la siguiente forma: $V = (2\pi R_1 \Delta r)$. Lo anterior es válido si se considera una altura unitaria.

$$(R_1 - \Delta r/2) (T'_{1-1} - T'_1) + (R_1 + \Delta r/2) (T'_{1+1} - T'_1) = \frac{\rho_m c_p m (\Delta r)^2 R_1 (T'_1 - T_1)}{k_m \Delta t}$$

$$\frac{\alpha_m \Delta t (R_1 - \Delta r/2) (T'_{1-1} - T'_1)}{(\Delta r)^2 R_1} + \frac{\alpha_m \Delta t (R_1 + \Delta r/2) (T'_{1+1} - T'_1)}{(\Delta r)^2 R_1} = T'_1 - T_1$$

$$\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta r)^2} \left(1 - \frac{\Delta r}{2R_1}\right) (T'_{i-1} - T'_i) + \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta r)^2} \left(1 + \frac{\Delta r}{2R_1}\right) (T'_{i+1} - T'_i) = T'_i - T_i$$

Finalmente introduciendo el número de Fourier y reescribiendo, obtenemos:

$$\begin{aligned} & -[\Delta F_{om}(1-\Delta r/2R_1)] T'_{i-1} + \{1+\Delta F_{om}[(1-\Delta r/2R_1)+(1+\Delta r/2R_1)]\} T'_i \\ & -[\Delta F_{om}(1+\Delta r/2R_1)] T'_{i+1} = T_i \end{aligned}$$

MODO C.- (Intercara metal-molde).

La ecuación de conservación de energía se puede escribir de la siguiente manera en coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} & \frac{-k_m(2\pi(R_1-\Delta r/2))(T'_i - T'_{i-1})}{\Delta r} - \frac{[-k_a(T'_{i+1} - T'_i)(2\pi(R_1+\Delta r/2))]}{\Delta r} \\ & = \frac{1}{2} [\rho_m C_{pm} + \rho_a C_{pa}] (2\pi R_1 \Delta r) \frac{(T'_i - T_i)}{\Delta t} \end{aligned}$$

En donde el área de transferencia de calor interna para el nodo queda definida como: $A_i = (2\pi(R_1 - \Delta r/2))$;

De manera análoga se puede expresar el área de transferencia de calor externa: $A_e = (2\pi(R_1 + \Delta r/2))$;

Mientras que el volumen nodal se define por una aproximación de la siguiente forma: $V = (2\pi R_1 \Delta r)$. Lo anterior es válido si se considera una altura unitaria.

$$k_m(T'_{i-1} - T'_i)(2\pi(R_1 - \Delta r/2)) + k_a(T'_{i+1} - T'_i)(2\pi(R_1 + \Delta r/2)) = \frac{(\rho_m C_{pm} + \rho_a C_{pa}) \pi R_1 (\Delta r)^2 (T'_i - T_i)}{\Delta t}$$

Reescribiendo la ecuación:

$$\frac{2k_a \Delta t (R_1 - \Delta r / 2)}{(\rho_m C p_m + \rho_a C p_a) R_1 (\Delta r)} (T'_{i-1} - T'_i) + \frac{2k_a \Delta t (R_1 + \Delta r / 2)}{(\rho_m C p_m + \rho_a C p_a) R_1 (\Delta r)} (T'_{i+1} - T'_i) = T'_i - T_i$$

Reescribiendo la ecuación en su forma final:

$$-\left[\frac{2k_a \Delta t (1 - \Delta r / 2R_1)}{(\rho_m C p_m + \rho_a C p_a)} \right] T'_{i-1} + \left\{ 1 + \frac{2\Delta t}{(\Delta r)^2} \frac{2k_a}{(\rho_m C p_m + \rho_a C p_a)} [k_a (1 - \Delta r / 2R_1) + k_a (1 + \Delta r / 2R_1)] \right\} T'_i - \left[\frac{2k_a \Delta t (1 + \Delta r / 2R_1)}{(\rho_m C p_m + \rho_a C p_a) (\Delta r)^2} \right] T'_{i+1} = T_i$$

NODO D.- (Seno del molde).

La ecuación de conservación de energía se puede escribir de la siguiente manera en coordenadas cilíndricas:

$$\frac{-k_a (T'_i - T'_{i-1}) (2\pi (R_1 - \Delta r / 2))}{\Delta r} - \frac{-k_a (T'_{i+1} - T'_i) (2\pi (R_1 + \Delta r / 2))}{\Delta r} = \frac{2\rho_a C p_a \pi R_1 \Delta r (T'_i - T_i)}{\Delta t}$$

En donde el área de transferencia de calor interna para el nodo queda definida como: $A_i = (2\pi (R_1 - \Delta r / 2))$;

De manera análoga se puede expresar el área de transferencia de calor externa: $A_e = (2\pi (R_1 + \Delta r / 2))$;

Mientras que el volumen nodal se define por una aproximación de la siguiente forma: $V = (2\pi R_1 \Delta r)$. Lo anterior es válido si se considera una altura unitaria para el nodo.

$$(R_1 - \Delta r / 2) (T'_{i-1} - T'_i) + (R_1 + \Delta r / 2) (T'_{i+1} - T'_i) = \frac{\rho_a C p_a R_1 (\Delta r)^2 (T'_i - T_i)}{k_a \Delta t}$$

$$\frac{\alpha_a \Delta t}{R_i (\Delta r)} z (T'_{i-1} - T'_i) (R_i - \Delta r/2) + \frac{\alpha_a \Delta t}{R_i (\Delta r)} z (T'_{i+1} - T'_i) (R_i + \Delta r/2) = T'_i - T_i$$

Reordenando:

$$- \left[\frac{\alpha_a \Delta t}{(\Delta r)} z (1 - \Delta r/2R_i) \right] T'_{i-1} + \left\{ 1 + \frac{\alpha_a \Delta t}{(\Delta r)} z [(1 - \Delta r/2R_i) + (1 + \Delta r/2R_i)] \right\} T'_i - \left[\frac{\alpha_a \Delta t}{(\Delta r)} z (1 + \Delta r/2R_i) \right] T'_{i+1} = T_i$$

Finalmente introduciendo el número de Fourier, la ecuación queda:

$$\begin{aligned} & -[\Delta F_{oa} (1 - \Delta r/2R_i)] T'_{i-1} + \{1 + \Delta F_{oa} [(1 - \Delta r/2R_i) + (1 + \Delta r/2R_i)]\} T'_i \\ & - [\Delta F_{oa} (1 + \Delta r/2R_i)] T'_{i+1} = T_i \end{aligned}$$

NODO E. - (Nodo convectivo).

La ecuación de conservación de energía se puede escribir de la siguiente manera en coordenadas cilíndricas:

$$\frac{-k_a (T'_i - T'_{i-1}) (2\pi (R_i - \Delta r/2))}{\Delta r} - [h_c (2\pi R_i) (T_a - T'_i)] = \frac{\rho_a C p_a (2\pi R_i \Delta r/2) (T'_i - T_i)}{\Delta t}$$

En donde el área de transferencia de calor interna para el nodo queda definida como: $A_i = (2\pi (R_i - \Delta r/2))$;

De manera análoga se puede expresar el área de transferencia de calor externa: $A_o = 2\pi R_i$ (ya que es el área externa del molde)

Mientras que el volumen nodal se define por una aproximación de la siguiente forma: $V = (2\pi R_i \Delta r)/2$. Lo anterior es válido si se considera una altura unitaria para el nodo.

$$\frac{k_a(T'_{i-1} - T'_i)(R_i - \Delta r/2)}{\Delta r} + h_c R_i (T_a - T'_i) = \frac{\rho_a C_p a R_i \Delta r (T'_i - T_i)}{2 \Delta t}$$

$$\left[\frac{2\alpha_a \Delta t}{(\Delta r)^2} \right] [1 - \Delta r/2R_i] (T'_{i-1} - T'_i) + \frac{2h_c \Delta t}{\rho_a C_p a \Delta r} (T_a - T'_i) = T'_i - T_i$$

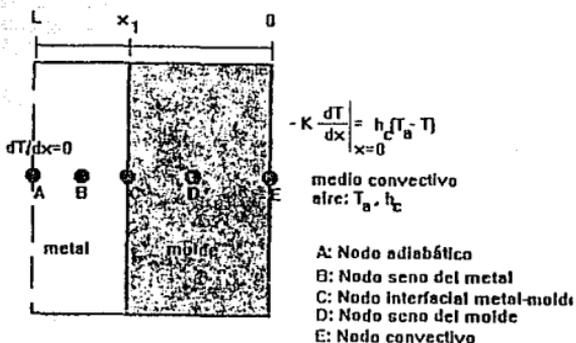
$$-\left[\frac{2\alpha_a \Delta t}{(\Delta r)^2} \right] (1 - \Delta r/2R_i) T'_{i-1} + \left[\frac{2\alpha_a \Delta t}{(\Delta r)^2} (1 - \Delta r/2R_i) + 1 + \frac{2h_c \Delta t}{\rho_a C_p a \Delta r} \right] T'_i = T_i + \frac{2h_c \Delta t T_a}{\rho_a C_p a \Delta r}$$

Introduciendo el número de Fourier y el número de Biot en la ecuación, esta se escribe:

$$-[2\Delta F_{oa}(1 - \Delta r/2R_i)] T'_{i-1} + [1 + 2\Delta F_{oa}(1 - \Delta r/2R_i) + 2Bi\Delta F_{oa}] T'_i = T_i + 2Bi\Delta F_{oa} T_a$$

ANEXO II

DEDUCCION DE LAS ECUACIONES NODALES EN COORDENADAS CARTESIANAS PARA EL SISTEMA MOSTRADO A CONTINUACION :



NODO A.- (nodo adiabático)

Ecuación que describe al sistema (ley de Fourier unidimensional):

$$-A k \frac{\delta^2 T}{\delta X^2} = \rho C_p V \frac{\delta T}{\delta t}$$

Al implementar el método de diferencias finitas la ecuación de Fourier se puede expresar como:

$$\frac{-[k_m (T'_{i+1} - T'_i) (1)^2]}{\Delta X} = \frac{(1/2) \rho_m C_{p_m} \Delta X (T'_i - T_1)}{\Delta t}$$

En esta ecuación, las derivadas se han intercambiado por diferencias. Por otro lado se puede expresar el volumen de la siguiente manera:

$$V = 1/2 \Delta X (1)$$

Mientras que el área se expresó:

$$A = (1)^2$$

Rearreglando la ecuación derivada del método de diferencias

finitas:

$$\frac{k_m}{\rho_m C p_m} [T'_{i+1} - T'_i] = \frac{(\Delta X)^2}{2\Delta t} [T'_i - T_i]$$

La ecuación nodal resultante es:

$$\frac{2\alpha_m \Delta t}{(\Delta X)^2} T'_{i+1} - \left[\frac{2\alpha_m \Delta t}{(\Delta X)^2} + 1 \right] T'_i = -T_i$$

Introduciendo la definición para el número de Fourier.

$$[2\Delta F_{om} + 1] T'_i - 2\Delta F_{om} T'_{i+1} = T_i$$

NODO B.- (Seno del metal).

Ecuación que describe al sistema (ley de Fourier unidimensional):

$$-A k \frac{\delta^2 T}{\delta X^2} = \rho C p V \frac{\delta T}{\delta t}$$

Al implementar el método de diferencias finitas la ecuación de Fourier se puede expresar como:

$$\frac{-k_m [T'_i - T'_{i-1}] (1)^2}{\Delta X} - \frac{[-k_m [T'_{i+1} - T'_i] (1)^2]}{\Delta X} = \frac{\rho_m C p_m \Delta X [T'_i - T'_i]}{\Delta t}$$

donde el área de transferencia de calor se puede expresar como:

A = 1, mientras que el volumen nodal queda definido como: V = ΔX, ya que se consideran profundidad y alturas unitarias.

Rearreglando:

$$- \frac{\alpha_m \Delta t}{(\Delta X)^2} [T'_i - T'_{i-1}] + \frac{\alpha_m \Delta t}{(\Delta X)^2} [T'_{i+1} - T'_i] = T'_i - T_i$$

Introduciendo el número de Fourier:

$$-\Delta F_{0n} T'_{i-1} + [2\Delta F_{0n} + 1] T'_i - \Delta F_{0n} T'_{i+1} = T_i$$

NODO C.- (intercara metal-molde).

Ecuación que describe al sistema (ley de Fourier unidimensional):

$$-A k \frac{\delta^2 T}{\delta X^2} = \rho C_p V \frac{\delta T}{\delta t}$$

Al implementar el método de diferencias finitas la ecuación de Fourier se puede expresar como:

$$\frac{-k_a [T'_i - T'_{i-1}] (1)^2}{\Delta X} - \frac{[-k_a [T'_{i+1} - T'_i] (1)^2]}{\Delta X} =$$

$$\frac{[(1/2) \Delta X (\rho_a C_{pa} + \rho_s C_{ps})] (T'_i - T_i)}{\Delta t}$$

donde el área de transferencia de calor se puede expresar como:

$A = 1$, mientras que el volumen nodal queda definido como: $V = \Delta X$, ya que se consideran profundidad y alturas unitarias.

$$-\frac{k_a}{\Delta X} T'_{i-1} + \left[\frac{k_a}{\Delta X} + \frac{k_a}{\Delta X} + \left[\frac{(1/2) \rho_a C_{pa} \Delta X + (1/2) \rho_s C_{ps} \Delta X}{\Delta t} \right] T'_i - \frac{k_a}{\Delta X} T'_{i+1} =$$

$$\frac{1/2 (\rho_a C_{pa} \Delta X + \rho_s C_{ps} \Delta X)}{\Delta t} T_i$$

NODO D.- (Seno del molde).

Ecuación que describe al sistema (ley de Fourier unidimensional):

$$-A k \frac{\delta^2 T}{\delta X^2} = \rho C_p V \frac{\delta T}{\delta t}$$

Al implementar el método de diferencias finitas la ecuación de Fourier se puede expresar como:

$$-\frac{k_a [T'_1 - T'_{1-1}] (1)^2}{\Delta X} - \frac{[-k_a [T'_{1+1} - T'_1] (1)^2}{\Delta X} = \frac{\rho_a C_p \Delta X [T'_1 - T_1]}{\Delta t}$$

donde el área de transferencia de calor se puede expresar como:

$A = 1$, mientras que el volumen nodal queda definido como: $V = \Delta X$, ya que se consideran profundidad y alturas unitarias.

Rearreglando e introduciendo el concepto de difusividad térmica:

$$-\frac{\alpha_a \Delta t}{(\Delta X)^2} [T'_1 - T'_{1-1}] + \frac{\alpha_a \Delta t}{(\Delta X)^2} [T'_{1+1} - T'_1] = T'_1 - T_1$$

Por último con la ayuda del número de Fourier:

$$-\Delta F_{0a} T'_{1-1} + [2\Delta F_{0a} + 1] T'_1 - \Delta F_{0a} T'_{1+1} = T_1$$

NODO E.- (Nodo convectivo).

Ecuación que describe al sistema (ley de Fourier unidimensional):

$$-A k \frac{\delta^2 T}{\delta X^2} = \rho C_p V \frac{\delta T}{\delta t}$$

Al implementar el método de diferencias finitas la ecuación de Fourier se puede expresar como:

$$-\frac{k_a [T'_1 - T'_{1-1}] (1)^2}{\Delta X} - [h_c (T_a - T'_1) (1)^2] = \frac{(1/2) \rho_a C_p \Delta X [T'_1 - T_1]}{\Delta t}$$

donde el área de transferencia de calor se puede expresar como:

$A = 1$, mientras que el volumen nodal queda definido como: $V = \Delta X$, ya que se consideran profundidad y alturas unitarias.

$$-\frac{2k_a \Delta t}{\rho_a C_p \Delta X} [T'_1 - T'_{1-1}] + \frac{2h_c \Delta t}{\rho_a C_p \Delta X} [T_a - T'_1] = T'_1 - T_1$$

Introduciendo los conceptos del número de Fourier, número de Biot, y la difusividad térmica puede escribir al final:

$$- 2\Delta F_{oa} T'_{1-i} + [2\Delta F_{oa} + 2Bi \Delta F_{oa} + 1] T'_1 = T_1 + 2 Bi \Delta F_{oa} T_a$$

ANEXO III

El siguiente es el programa de computación utilizado para simular las curvas de enfriamiento en coordenadas cilíndricas:

```

10 REM TRA CAL
20 CLS:REM OFF
30 DIM FTI(30), D/(30), EF(30), FF(30), R(30), TI/(30), T2/(30), G/(30), SEL/(30), P1(30)
, NH1/(30), RA1/(30), FS1/(30), DR1/(30), DF1/(30), RA2/(30), FS2/(30), Z(10)
40 PRINT :PRINT :PRINT "SISTEMA : CILINDRO COLADO EN MOLDE DE ARENA TAMBIEN CILI
NDRICO"
50 PRINT :PRINT "INTRODUZCA LOS SIGUIENTES PARAMETROS DE OPERACION"
60 PRINT :INPUT "MATERIAL A COLAR " ;MS
70 INPUT "TEMPERATURA DE COLADA ( C ) " ;TC
80 INPUT "TEMPERATURA INICIAL DEL MOLDE ( C ) " ;TM
90 INPUT "TEMPERATURA AMBIENTE ( C ) " ;TA
100 REM ***** TIPIFICACION DEL SISTEMA *****
110 CLS
120 PRINT :PRINT "DEFINA EL SISTEMA "
130 PRINT :PRINT :INPUT "RADIO DE LA PIZCA (m) " ;R1
140 INPUT "RADIO TOTAL (INCLUYENDO MOLDE) (m) " ;R2
150 INPUT "ELIJA UN VALOR PARA EL INCREMENTO EN EL RADIO" ;DR
160 IF (DR/R1)=ABS(DR/R1) THEN GOTO 180
170 IF (DR/R2)=ABS(DR/R2) THEN GOTO 180
180 NT=(R2/DR)+1
190 PRINT "EL NUMERO DE NODOS ES " ;NT
200 INPUT "LIMITEZCA EL INCREMENTO EN EL PASO DE TIEMPO (s) " ;DT
210 INPUT "TIEMPO DE CALCULO" ;TPC
220 REM ***** PROPIEDADES FISICAS *****
230 INPUT "CONDUCTIVIDAD TERMICA DEL METAL LIQUIDO " ;KML
240 INPUT "CONDUCTIVIDAD TERMICA DEL METAL SOLIDO " ;KMS
250 INPUT "CONDUCTIVIDAD TERMICA DE LA ARENA " ;YA
260 INPUT "DENSIDAD DEL METAL LIQUIDO " ;RML
270 INPUT "DENSIDAD DEL METAL SOLIDO " ;RMS
280 INPUT "DENSIDAD DE LA ARENA " ;RA
290 INPUT "CAPACIDAD CALORIFICA DEL METAL LIQUIDO " ;CPL
300 INPUT "CAPACIDAD CALORIFICA DEL METAL SOLIDO " ;CPS
310 INPUT "CAPACIDAD CALORIFICA DE LA ARENA " ;CPA
320 INPUT "COEFICIENTE DE TRANSPERENCIA DE CALOR POR CONVECCION " ;H
330 DBI=237.15
335 P=4*NTM(1)
340 INPUT "% DE SILICIO (1.5-2.6) " ;S11
350 INPUT "% DE FOSFORO (0.1 max) " ;P11
360 INPUT "% DE MANGANESO (0.1-0.8) " ;M11
370 FC1=4.3-(1/3)*(P11-S11)
380 TKE1=1148-18*S11+1*P11
390 TEE1=1155+6.5*S11
400 REM DIF FINITAS
410 FOR I=0 TO NT-1
420 R(I)=I*DR
430 IF I=0 THEN 470
440 REM NODO ADIABATICO
450 FTI(I)=1
460 GOTO 600
470 IF (I=(R1/DR) OR I=(R2/DR)) THEN 510
480 REM NODO SENO DE METAL
490 FTI(I)=2
500 GOTO 600
510 IF I=(R1/DR) THEN 550
520 REM NODO INTERFACIAL
530 FTI(I)=3
540 GOTO 600
550 IF I=(R2/DR) THEN 590
560 REM CONVECTIVO
570 FTI(I)=5
580 GOTO 600
590 FTI(I)=4
600 NEXT I
610 CLS
620 LOCATE 1,3:PRINT "NODO #"
630 LOCATE 1,3:PRINT "TIPO DE NODO"
640 LOCATE 1,13:PRINT "POSICION DESDE"
650 LOCATE 2,15:PRINT "CENTRO (m)"
660 LOCATE 1,50:PRINT "POSICION DEL NODO"
670 FOR I=0 TO NT-1
680 LOCATE I+3,4:PRINT I
690 LOCATE I+3,33:PRINT FTI(I)

```

```

100 LOCATE I=3,16:PRINT R(I)
110 IF FT1(I)=1 THEN LOCATE I=3,55:PRINT "NODO CENTRAL"
120 IF FT1(I)=2 THEN LOCATE I=3,55:PRINT "NODO SENO DEL METAL"
130 IF FT1(I)=3 THEN LOCATE I=3,55:PRINT "NODO INTERCARA METAL-MOLDE"
140 IF FT1(I)=4 THEN LOCATE I=3,55:PRINT "NODO SENO MOLDE"
150 IF FT1(I)=5 THEN LOCATE I=3,55:PRINT "NODO CONVECTIVO"
160 NEXT I
170 PRINT "OPRIMA UNA TECLA PARA CONTINUAR"
180 IF INKEYS="" THEN 180
190 INPUT "CUANTOS NODOS DESAE ANALIZAR":NAA
200 FOR I=1 TO NAA
210 INPUT "NODO PARA ANALIZAR ES EL":Z(I)
220 NEXT I
230 CLS
240 GOTO 1000
250 SCREEN 2
260 LINE (100,20)-(100,120)
270 LINE (100,130)-(600,130)
280 LINE (600,10)-(600,130)
290 LINE (600,10)-(100,10)
300 FOR I=0 TO 4
310 LINE (98,30+I*25)-(100,30+I*25)
320 NEXT I
330 FOR I=0 TO 10
340 LINE (402,20+I*10)-(600,20+I*10)
350 NEXT I
360 FOR I=0 TO 10
370 LINE (100+I*50,133)-(100+I*50,130)
380 NEXT I
390 Y1=30+.25*(1400-THE1)
400 Z1=30+.25*(1400-TEE1)
410 LINE (100,Y1)-(600,Y1)
420 LINE (600,Z1)-(100,Z1)
430 LOCATE 10,2
440 PRINT "T(C)"
450 LOCATE 20,40
460 PRINT "S (s)"
470 LOCATE 3,8
480 PRINT "1400"
490 LOCATE 8,8
500 PRINT "1300"
510 LOCATE 4,77
520 PRINT "1"
530 LOCATE 17,8:PRINT "1000"
540 LOCATE 17,77:PRINT "0"
550 LOCATE 11,8:PRINT "1200"
560 LOCATE 14,8:PRINT "1100"
570 LOCATE 19,13:PRINT "n"
580 FOR I=0 TO 10
590 LOCATE 19,I*6+12:PRINT I*(TPC/10)
600 NEXT I
610 LOCATE 10,77:PRINT "Fa"
620 REM ***** METODO DE CALCULO *****
630 ALS#=(KMS)/(RMS*CP5)
640 ALL#=(KSL)/(RML*CP1)
650 AL#=(KA)/(RA*CPA)
660 FOA#=(ALA#*DT)/(DR*2)
670 FOS#=(ALS#*DT)/(DR*2)
680 FOL#=(ALL#*DT)/(DR*2)
690 BI#=(H*DR)/(YA)
700 FOR I=0 TO NT-1
710 IF (FT1(I)=1) THEN T1#(I)=TC
720 IF (FT1(I)=2) THEN T1#(I)=TC
730 IF (FT1(I)=3) THEN T1#(I)=TC
740 IF (FT1(I)=4) THEN T1#(I)=TM
750 IF (FT1(I)=5) THEN T1#(I)=TM
760 NEXT I
770 J=0
780 T=DT*J
790 IF T>TPC THEN 1010
800 FOR I=0 TO NT-1
810 IF FT1(I)=1 THEN 1400
820 GOTO 1460
830 REM NODO TIPO 1
840 D#(I)=0
850 E#(I)=1+4*FOL#
860 F#(I)=4*FOL#
870 G#(I)=T1#(I)
880 GOTO 1770
890 IF FT1(I)=9 THEN 1480
900 GOTO 1340
910 REM NODO TIPO 2
920 D#(I)=-[(1-DR)/(2*R(I))]*FOL#
930 E#(I)=[1-FOL#*{(1-DR)/(2*R(I))}+(1+DR)/(2*R(I)))]
940 F#(I)=-FOL#/[1+DR/(2*R(I))]

```

```

1520 G#(I)-T1#(I)
1530 GOTO 1770
1540 IF FT1(I)=3 THEN 1560
1550 GOTO 1620
1560 REM NODO TIPO 3
1570 D#(I)--(2*XL*DT*(R(I)-(DR/2)))/((RML*CPL*(R(I)-(DR/4))+RA*CPA*(R(I)+(DR/4)
)|*DR#2)
1580 E#(I)=1+(2*DT)*(RML*(R(I)-(DR/2))-KA*(R(I)+(DR/2)))/((CPL*RML*(R(I)-(DR/4)
)|*CPA*RA*(R(I)+(DR/4)))*DR#2)
1590 F#(I)--(2*KA*DT*(R(I)-(DR/2)))/((RML*CPL*(R(I)-(DR/4))+RA*CPA*(R(I)+(DR/4)
)|*DR#2)
1600 G#(I)-T1#(I)
1610 GOTO 1770
1620 IF FT1(I)=4 THEN 1640
1630 GOTO 1700
1640 REM NODO TIPO 4
1650 D#(I)--(FOA#*(1-DR/(2*R(I))))
1660 E#(I)=(1-FOA#*((1-DR/(2*R(I)))+(1*DR/(2*R(I))))
1670 F#(I)=-(FOA#*(1+DR/(2*R(I))))
1680 G#(I)-T1#(I)
1690 GOTO 1770
1700 IF FT1(I)=5 THEN 1720
1710 GOTO 1770
1720 REM NODO TIPO 5
1730 D#(I)--(2*FOA#*(R(I)-(DR/2))/(R(I)-DR/4)
1740 E#(I)=(1+2*FOA#*(R(I)-DR/2))/(R(I)-DR/4)+2*BI#*FOA#*R(I)/(R(I)-DR/4)
1750 F#(I)=0
1760 G#(I)-T1#(I)+2*BI#*FOA#*TA*R(I)/(R(I)-DR/4)
1770 NEXT I
1780 FOR I=1 TO NT-1
1790 E#(I)=E#(I)-((D#(I)/E#(I)-1)*F#(I-1))
1800 G#(I)=G#(I)-((D#(I)/E#(I)-1)*G#(I-1))
1810 NEXT I
1820 T#(NT-1)=G#(NT-1)/E#(NT-1)
1830 FOR I=NT-2 TO 0 STEP -1
1840 T#(I)=(G#(I)-F#(I)*T#(I+1))/E#(I)
1850 NEXT I
1860 FOR I=0 TO NT-1
1870 IF FT1(I)C3 THEN 1910
1880 SEL#(I)=TEX1-T2#(I)
1890 IF SEL#(I)_0 THEN 1910
1900 COSUB 2020
1910 NEXT I
1920 FOR I=0 TO NT-1
1930 T1#(I)-T2#(I)
1940 NEXT I
1950 T1#=#DT
1960 FOR I=1 TO NAA
1961 X1=100*(500/TPC)*T1
1962 Y1=10+15*(1400-T2#(Z(I)))
1963 PSET(X1,Y1)
1964 X2=100*(500/TPC)*T1
1965 Y2=10+100*(1-FS2#(Z(I)))
1966 PSET(X2,Y2)
1970 NEXT I
1980 REM
1990 J=J+1
2000 GOTO 1350
2010 END
2020 IF F1(I)=0 THEN 2040
2030 GOTO 2170
2040 V1=(T2#(I)-T1#(I))/DT
2050 H#=(65.83+.000111*(V1#2)+10000
2060 IF FT1(I)=1 THEN 2100
2070 IF FT1(I)=3 THEN 2120
2080 FV1=2*P*R(I)*DR
2090 GOTO 2130
2100 FV1=P*(DR/2)*2
2110 GOTO 2130
2120 FV1=2*P*(R(I)-DR/4)*DR
2130 NH#(I)=.87*(H#)*.15)*FV1
2140 P1(I)=P1(I)+1
2150 RA1#(I)=.000001
2160 FS1#(I)=(4/3)*P*(NH#(I))*RA1#(I)#3)
2170 DR1#(I)=.5E-08*(SEL#(I)#2)
2180 DF1#(I)=(1-FS1#(I))*4*P*(NH#(I))*RA1#(I)#2)*DR1#(I)
2190 RA2#(I)=RA1#(I)+DT*DR1#(I)
2200 FS2#(I)=FS1#(I)+DT*DF1#(I)
2210 IF FS2#(I)C.99 THEN 2260
2220 DS#(I)=FS2#(I)-FS1#(I)
2230 T2#(I)-T2#(I)+OH1#DS#
2240 FS1#(I)=FS2#(I)
2250 RA1#(I)=RA2#(I)

```

2260 RETURN

2270 END

3000 PRINT "FAVOR DE HABLAR AL DEPARTAMENTO DE METALURGIA"

El siguiente es el programa de computación utilizado para simular las curvas de enfriamiento en coordenadas cartesianas:

```

10 REM TRA CAL
20 CLS:KEY OFF
30 DIR FT1(30),D(30),E(30),F(30),L(30),T1(30),T2(30),G(30),SE1(30),P1(30),NM1/(
0),RA1/(30),FS1/(30),DR1/(30),DF1/(30),RA2/(30),FS2/(30)
40 PRINT :PRINT :PRINT "SISTEMA : CILINDRO COLADO EN MOLDE DE ARENA TAMBIEN CIL:
NORICO"
50 PRINT :PRINT "INTRODUCA LOS SIGUIENTES PARAMETROS DE OPERACION"
60 PRINT :INPUT "MATERIAL A COLAR " :MS
70 INPUT "TEMPERATURA DE COLADA ( C ) :TC
80 INPUT "TEMPERATURA INICIAL DEL MOLDE ( C ) :TM
90 INPUT "TEMPERATURA AMBIENTE ( C ) :TA
100 REM ***** TIPIFICACION DEL SISTEMA *****
110 CLS
120 PRINT :PRINT "DEFINA EL SISTEMA =
130 PRINT :PRINT :INPUT "ESPESOR DE LA PIZZA (m) " :L1
140 INPUT "RADIO TOTAL (INCLUYENDO MOLDE) (m) " :L2
150 INPUT "ELIJA UN VALOR PARA EL INCREMENTO EN EL RADIO" :DX
160 IF (DX/L1)=ABS(DX/L1) THEN GOTO 180
170 L= (LX/L2)=ABS(DX/L2) THEN GOTO 180
180 NT=(L2/DX)+1
184 PAATH(1)=4
190 PRINT "EL NUMERO DE NODOS ES " :NT
200 INPUT "INTRODUCA EL INCREMENTO EN EL PASO DE TIEMPO (s) " :DT
210 INPUT "TIEMPO DE CALCULO" :TFC
220 REM ***** PROPIEDADES FISICAS *****
230 INPUT "CONDUCTIVIDAD TERMICA DEL METAL LIQUIDO " :KML
240 INPUT "CONDUCTIVIDAD TERMICA DEL METAL SOLIDO " :KMS
250 INPUT "CONDUCTIVIDAD TERMICA DE LA ARENA " :KA
260 INPUT "DENSIDAD DEL METAL LIQUIDO " :RML
270 INPUT "DENSIDAD DEL METAL SOLIDO " :RMS
280 INPUT "DENSIDAD DE LA ARENA " :RA
290 INPUT "CAPACIDAD CALORIFICA DEL METAL LIQUIDO " :CPL
300 INPUT "CAPACIDAD CALORIFICA DEL METAL SOLIDO " :CPS
310 INPUT "CAPACIDAD CALORIFICA DE LA ARENA " :CPA
320 INPUT "COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONVECCION " :H
330 DR1=137.15
335 B1=.999
340 INPUT "% DE SILICIO (1.5-2.6) " :SI1
350 INPUT "% DE FOSFORO (0.1-0.8) " :PP1
360 INPUT "% DE MANGANESO (0.1-0.8) " :PM1
370 FC1=4.3-(1/3)*(PP1+SI1)
380 THE1=148-19*(SI1+PM1)
390 TE1=155+6.5*(SI1)
400 REM DIF FINITAS
410 FOR I=0 TO NT-1
420 L(I)=I*DX
430 IF I=0 THEN 470
440 REM NODO ADIABATICO
450 FT1(I)=1
460 GOTO 600
470 IF (I=(L1/DX) OR I=(L2/DX)) THEN 510
480 REM NODO SENO DE METAL
490 FT1(I)=2
500 GOTO 600
510 IF I=(L1/DX) THEN 550
520 REM NODO INTERFACIAL
530 FT1(I)=3
540 GOTO 600
550 IF I=(L2/DX) THEN 590
560 REM CONVECCION
570 FT1(I)=5
580 GOTO 600
590 FT1(I)=4
600 NEXT I
610 CLS
620 LOCATE 1,2:PRINT "NODO #"
630 LOCATE 1,3:PRINT "TIPO DE NODO"
640 LOCATE 1,13:PRINT "POSICION DESDE"
650 LOCATE 2,13:PRINT "CENTRO (m)"
660 LOCATE 1,50:PRINT "POSICION DEL NODO"
670 FOR I=0 TO NT-1
680 LOCATE I+3,4:PRINT I
690 LOCATE I+3,33:PRINT FT1(I)
700 LOCATE I+3,36:PRINT L(I)
710 IF FT1(I)=1 THEN LOCATE I+3,55:PRINT "NODO CENTRAL"
720 IF FT1(I)=2 THEN LOCATE I+3,55:PRINT "NODO SENO DEL METAL"
730 IF FT1(I)=3 THEN LOCATE I+3,55:PRINT "NODO INTERCARA METAL-MOLDE"
740 IF FT1(I)=4 THEN LOCATE I+3,55:PRINT "NODO SENO MOLDE"
750 IF FT1(I)=5 THEN LOCATE I+3,55:PRINT "NODO CONVECTIVO"
760 NEXT I

```

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

```
770 PRINT "OPRIMA UNA TECLA PARA CONTINUAR"
780 IF INKEYS="" THEN 780
790 INPUT "CUANTOS NODOS DESAE ANALIZAR":NAA
800 FOR I=1 TO NAA
810 INPUT "NODO PARA ANALIZAR ES EL":Z(I)
820 NEXT I
825 CLS
830 SCREEN 2
840 LINE (100,30)-(100,130)
850 LINE (100,130)-(600,130)
860 LINE (600,30)-(600,130)
870 LINE (600,30)-(100,30)
880 FOR I=0 TO 4
890 LINE (98,30+I*25)-(100,30+I*25)
900 NEXT I
910 FOR I =0 TO 10
920 LINE (602,30+I*10)-(600,30+I*10)
930 NEXT I
940 FOR I=0 TO 10
950 LINE (100+I*50,133)-(100+I*50,130)
960 NEXT I
970 Y3=30+.25*(1400-TMEL)
980 Z31=30+.25*(1400-TEEL)
990 LINE (100,Y3)-(600,Y3)
1000 LINE (600,Z31)-(100,Z31)
1010 LOCATE 19,2
1020 PRINT "T(C)"
1030 LOCATE 20,40
1040 PRINT "C (8)"
1050 FOR I=0 TO 10 STEP 2
1060 LOCATE 19,I*6+12
1070 PRINT I*(TPC/10)
1080 NEXT I
1110 LOCATE 17,8:PRINT "1000"
1115 LOCATE 5,8:PRINT "1400"
1116 LOCATE 8,8:PRINT "1300"
1120 LOCATE 17,77:PRINT "0"
1130 LOCATE 11,8:PRINT "1200"
1140 LOCATE 14,8:PRINT "1100"
1180 LOCATE 10,77:PRINT "Fs"
1190 REM ***** METODO DE CALCULO *****
1200 ALG=(KMS)/(RMG*CPS)
1210 ALL=(KML)/(RML*CPL)
1220 ALA=(KA)/(RA*CPA)
1230 FOL=(ALA*DT)/(DX*2)
1240 FOS=(ALS*DT)/(DX*2)
1250 FOL=(ALL*DT)/(DX*2)
1260 DI=(H*DX)/(KA)
1270 FOR I=0 TO NT-1
1280 IF (FT1(I)=1) THEN T1(I)=TC
1290 IF (FT1(I)=2) THEN T1(I)=TC
1300 IF (FT1(I)=3) THEN T1(I)=TC
1310 IF (FT1(I)=4) THEN T1(I)=TM
1320 IF (FT1(I)=5) THEN T1(I)=TM
1330 NEXT I
1335 FOR I=0 TO NT-1:PI(I)=0:NEXT I
1340 J=0
1350 T=DT*J
1360 IF T>CTP THEN 2010
1370 FOR I=0 TO NT-1
1371 F01=FOS*FS1(I)+(1-FS1(I))*UL
1372 K01=KFM*FS1(I)+(1-FS1(I))*KML
1373 CP1=CPS*FS1(I)+(1-FS1(I))*CPL
1380 IF FT1(I)=1 THEN 1400
1390 GOTO 1480
1400 REM NODO TIPO 1
1410 D(I)=0
1420 E(I)=1-1.2*F01
1430 F(I)=2*F01
1440 G(I)=T1(I)
1450 GOTO 1770
1460 IF FT1(I)=2 THEN 1480
1470 GOTO 1540
1480 REM NODO TIPO 2
1490 D(I)=-F01
1500 E(I)=1-1.2*F01
1510 F(I)=-F01
1520 G(I)=T1(I)
```

```

1530 GOTO 1770
1540 IF FT1(I)=3 THEN 1560
1550 GOTO 1620
1560 REM NODO TIPO 3
1570 D(I)=-F(A/DX)
1580 E(I)={(RML/DX)*(KA/DX)+{(RML*CP1*DX+RA*CPA*DX)/(2*DT)}}
1590 F(I)=-{(KA/DX)
1600 G(I)=-T1(I)*{(RML*CP1*DX+RA*CPA*DX)/(2*DT)}
1610 GOTO 1770
1620 IF FT1(I)=4 THEN 1640
1630 GOTO 1700
1640 REM NODO TIPO 4
1650 D(I)=-FOA
1660 E(I)=1-2*FOA
1670 F(I)=-FOA
1680 G(I)=-T1(I)
1690 GOTO 1770
1700 IF FT1(I)=2 THEN 1720
1710 GOTO 1770
1720 REM NODO TIPO 5
1730 D(I)=-2*FOA
1740 E(I)=-{(2*FOA-2*FOA*BI+1)
1750 F(I)=0
1760 G(I)=-T1(I)+2*BI*FOA*TA
1770 NEXT I
1780 FOR I=1 TO NT-1
1790 E(I)=-E(I)-{(D(I)/E(I-1))*F(I-1)}
1800 G(I)=-G(I)-{(D(I)/E(I-1))*G(I-1)}
1810 NEXT I
1820 T2(NT-1)=-G(NT-1)/E(NT-1)
1830 FOR I=NT-2 TO 0 STEP -1
1840 T2(I)=-{(G(I)-F(I)*T2(I+1))/E(I)}
1850 NEXT I
1860 FOR I=0 TO NT-1
1870 IF FT1(I)C3 THEN 1910
1880 SE1(I)=-T2(I)
1890 IF SE1(I) 0 THEN 1910
1900 GOSUB 2020
1910 NEXT I
1920 FOR I=0 TO NT-1
1930 T1(I)=-T2(I)
1940 NEXT I
1950 T1L=J*DT
1960 FOR I=1 TO NAA
1961 X1=100*(500/TPC)+T1L
1962 Y1=10+.25*(1400-T1(X1))
1963 PSET(X1,Y1)
1964 X2=100*(500/TPC)+T1L
1965 Y2=10+100*(1-FS1(X2))
1966 PSET(X2,Y2)
1970 NEXT I
1980 REM
1990 J=J+1
2000 GOTO 1350
2010 END
2020 IF P1(I)=0 THEN 2040
2030 GOTO 2170
2040 V1=(T2(I)-T1(I))/DT
2050 N2#=(65.82+.0003814*(V1*2))*10000
2060 IF (P1(I)=1 OR FT1(I)=3) THEN 2100
2080 FV1=DX
2090 GOTO 2130
2100 FV1=DX/2
2130 HN1#(I)=-.87*{(N2#)*.1.5)*FV1
2140 P1(I)=P1(I)+
2150 RA1#(I)=-.000001
2160 FS1#(I)=(4/3)*.1416*(HN1#(I))*(RA1#(I)*J)
2170 DR1#(I)=9.5E-08*(SE1(I)*2)
2180 DF1#(I)=(1-FS1#(I))*4+.1416*HN1#(I)*(RA1#(I)*2)+DR1#(I)
2190 RA2#(I)=RA1#(I)+DT*DR1#(I)
2200 FS2#(I)=FS1#(I)+DT*DF1#(I)
2210 IF FS2#(I)C8 THEN 2240
2220 DS=FS2#(I)-FS1#(I)
2230 T2(I)=-T2(I)+DS
2240 FS1#(I)=FS2#(I)
2250 RA1#(I)=RA2#(I)
2260 RETURN
2270 END

```