



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO**

**FACULTAD DE INGENIERIA**

**ANALISIS TRANSITORIO EN ALETAS DE  
SECCION TRANSVERSAL VARIABLE**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA  
(EN EL AREA DE ING. MECANICA)  
P R E S E N T A :  
SANCHEZ DOMINGUEZ MARIO SINUHE

DIRECTOR DE TESIS: DR. FEDERICO MENDEZ LAVIELLE



MEXICO, D. F.

1993

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

	Pag.
RESUMEN.....	1
INTRODUCCION.....	3
NOMENCLATURA.....	6
<b>CAPITULO I</b>	
DEFINICION DEL PROBLEMA.....	10
<b>CAPITULO II</b>	
PLANTEAMIENTO DE LA SOLUCION.....	15
TRATAMIENTO DE LA PARTE PERMANENTE.....	17
SOLUCION DE LOS TERMINOS PERMANENTES $c_g^0$ .....	18
SOLUCION DE LOS TERMINOS PERMANENTES $c_g^1$ .....	19
TRATAMIENTO DE LA PARTE TRANSITORIA.....	21
<b>CAPITULO III</b>	
DETERMINACION DEL FLUJO DE CALOR.....	25
<b>CAPITULO IV</b>	
RESULTADOS Y CONCLUSIONES.....	27
EFICIENCIA.....	30
BIBLIOGRAFIA.....	36

## APENDICE A

SECCION 1.1.....	39
ADIMENSIONALIZACION	
SECCION 2.1.....	43
ALGEBRA	
SECCION 2.2.....	45
CONDICIONES DEL PROBLEMA	
SECCION 2.3.....	48
TRATAMIENTO DE LA PARTE PERMANENTE	
SECCION 2.4.....	49
DETERMINACION DE $\theta_{00}$	
SECCION 2.5.....	51
DETERMINACION DE $\theta_{01}$	

## APENDICE B

SECCION 1.1.....	54
PARTE TRANSITORIA	
SECCION 1.2.....	56
DETERMINACION DE $\psi_1$	

## APENDICE C

SECCION 1.1.....	66
FLUJO DE CALOR DE LA PARTE TRANSITORIA $c_g^0$	
SECCION 1.2.....	67
RAPIDEZ DE TRANSF. DE CALOR DE TERMINOS $c_g^0$	

## APENDICE D

SECCION 1.....	76
AREAS CONVECTIVAS ADIMENSIONALES	
SECCION 2.....	78
EFICIENCIA DE LA ALETA DE SECCION CONSTANTE	
SECCION 3.....	81
EFICIENCIA DE LA ALETA DE SECCION VARIABLE	
SECCION 4.....	83
ALGEBRA	

## APENDICE E

SECCION 1.....	84
METODOS DE PERTURBACION	
SECCION 2.....	86
FUNCION DE GREEN	
SECCION 3.....	89
METODOS NUMERICOS	
SECCION 4.....	94
INTEGRACION APROXIMADA	

## RESUMEN

El presente trabajo es la solución al problema transitorio de transferencia de calor en una aleta cuya sección transversal rectangular, no es constante. Para lo cual se utilizaron tanto técnicas analíticas como numéricas, con las que se comparó la rapidez de transferencia de calor en la base con respecto a una aleta de sección constante y su eficiencia.

La dificultad del problema estudiado radica fundamentalmente en la no linealidad de las ecuaciones diferenciales que representan al fenómeno, surgida al considerar la respuesta transitoria y la dependencia del coeficiente de convección con la temperatura.

La metodología utilizada para abordar tal dificultad fue la de linearizar dichas expresiones mediante la teoría de perturbación regular, que una vez aplicada proporciona un sistema de ecuaciones diferenciales lineales factible de ser resuelto, mediante la técnica de Green, separación de variables o bien mediante alguna técnica numérica.

Primeramente, para hallar la solución de la ecuación, hubo necesidad de adimensionalizar las ecuaciones que rigen el fenómeno, con el fin de agrupar y simplificar los parámetros involucrados.

Una vez hecho lo anterior se aplicó la metodología perturbatoria a las mismas; con lo cual se obtuvieron por separado, al seleccionar los términos de la fórmula general, ecuaciones para el comportamiento transitorio y permanente del fenómeno, susceptibles de ser separadas y resueltas independientemente.

Adicionalmente a la sección variable, se consideró la temperatura variable en la base de la aleta; condición que se puede hallar comunmente en máquinas térmicas, representada aquí como una función trascendente.

Por otra parte se consideró que el fenómeno de la transferencia de calor por convección en la superficie de la aleta es una función exponencial  $\theta^m$ , cuyo exponente  $m$  determina el tipo de mecanismo de transferencia de calor empleado entre la aleta y el medio circundante, hipótesis ampliamente documentada en la literatura.

## INTRODUCCION

El análisis de transferencia de calor a través de una aleta para el estado transitorio constituye un importante elemento de diseño de dispositivos tales como componentes electrónicos , colectores solares , radiadores de vehiculos espaciales , máquinas de combustión interna , herramientas de corte , compresores, etc.

Las aplicaciones de las aletas son numerosas, especialmente en problemas de transferencia de calor a un medio gaseoso donde el coeficiente de transferencia de calor es pequeño y la diferencia de temperaturas entre el medio y el intercambiador es alta, requiriendose por lo tanto de una mayor área de transferencia de calor para mantener un flujo de calor conveniente a los dispositivos intercambiadores o a las características del fenómeno.

Sin embargo, al agregar una aleta se presenta una resistividad térmica, que es inversamente proporcional a la conductividad térmica del material del cual se halle constituida, a la que hay que vencer antes de poder justificar su uso. Un criterio de evaluación lo proporciona el concepto de efectividad de la aleta que puede llegar a indicar mediante un valor crítico, si el uso de la aleta es deseable.

En análisis previos se han considerado una gran diversidad de situaciones o condiciones al variar uno o varios factores internos y externos del fenómeno que influyen en el proceso de transferencia de calor, por ejemplo :

la variación de la conductividad térmica por efecto del cambio de la temperatura del material,

la variación de la frecuencia de oscilación de la temperatura en la base de la aleta como podría suceder en un compresor o en un motor de combustión interna,

la variación de los regímenes de flujo de las corrientes convectivas o los efectos radiantes.

Tal es el caso de los trabajos de A. Aziz y colaboradores [1,2,3] que estudian una o varias de estas situaciones por medio de la metodología de perturbación que más tarde son comparadas con éxito con las soluciones numéricas de otros autores, de entre los cuales se destacan los trabajos de Changet al y Suryanarayana [4,5], que atacan la parte transitoria de problema proporcionando soluciones para el flujo de calor bajo diferentes valores del exponente  $m$ .

Por otra parte, otras técnicas han demostrado su utilidad al obtener soluciones aproximadas de problemas análogos, tal es el caso de R.J. Crane que plantea una interesante solución, con una metodología análoga a la utilizada en este trabajo. Donde se omiten los términos de segundo orden de la serie de perturbación para el caso de una aleta convectiva de conductividad térmica variable con la cual obtiene resultados aceptables de flujo de calor y eficiencia de aleta [6].

A. Muzzio analiza el problema de la distribución de temperatura y la eficiencia de la aleta de conductividad variable, por medio del método de Garlickin del cual se obtienen soluciones con aproximaciones aceptables [7].

M. Manzoor, D.B. Ingham y P.J. Heggs examinan, por métodos de Variación Lineal, la transferencia de calor en la interfase de una aleta recta y su base con diferentes conductividades y emisividades. Y más interesante aún, analizan el caso general de la transferencia de calor en una aleta anular de perfil triangular de conductividad térmica constante y coeficiente de transferencia de calor variable obteniendo para ella la fórmula de la distribución de la temperatura y la eficiencia de la misma [10]. De la misma forma realizan un estudio de la eficiencia de una aleta anular con coeficiente de convección variable [ref. 9].

Los resultados obtenidos en su análisis confirman que la máxima eficiencia de la aleta ocurre cuando el coeficiente convectivo entre la base y la del extremo de la aleta son los mismos y el mínimo cuando es muy superior el valor del coeficiente convectivo del extremo de la aleta respecto al de la base.

Por otra parte y, como antecedente de esta tesis, contenido en las referencias 11 y 12, se encuentra el trabajo realizado por Medina et al. En cuyas ecuaciones y cálculos, se demuestra la utilidad de las técnicas espectrales, al ser aplicadas estas a problemas de transferencia de calor en aletas de sección constante, sometidas a un cambio súbito de la temperatura de su base y una variación periódica de la misma.

Así mismo, se calcula, con técnicas analíticas ( Polinomios Ortogonales de Chebyshev y la Transformada Rápida de Fourier ) la respuesta de la misma aleta, pero ahora haciendo variar la frecuencia de oscilación de la temperatura en la base [12].

Lo anterior constituye un antecedente inmediato de este trabajo al ser tomada integralmente la solución exacta del flujo de calor en la base de la aleta recta de sección constante que considera una fuente periódica de calor en su base, de la misma forma en que se plantea aquí. Adicionalmente a esto se sigue la misma metodología para resolver el problema, que consiste en la aplicación de técnicas espectrales para la linealizar el problema y hallar su solución a través de las técnicas de Green

El objetivo perseguido en el presente trabajo fue el de demostrar la utilidad de la Teoría de Perturbación resolviendo, el problema no lineal, no homogéneo de transferencia calor a través de una aleta de sección variable con alta frecuencia de oscilación de la temperatura en su base, sometida a la convección natural de un medio gaseoso.

## NOMENCLATURA

- A : área adimensional
- $A_c$  : área o superficie convectiva de la aleta
- b : grosor de la aleta de sección constante
- $b_1$  : diferencia transversal en la base que tiene por lado la aleta con respecto a una aleta recta de sección b.
- $C_p$  : calor específico a presión constante
- erf : función de error
- G : función de Green
- H : coeficiente por convección
- h : función que representa la curvatura de la aleta
- i : componente imaginaria
- k : coeficiente de transferencia de calor por conducción
- L : longitud adimensional de la aleta
- l : ancho de la aleta.
- n : exponente que describe la naturaleza de la transferencia de calor.
- N : parámetro adimensional, definido en la lectura.
- P : perímetro
- Q : flujo de calor
- q : rapidez de transferencia de calor.
- Re : componente real
- T : temperatura de la aleta.
- $T_m$  : temperatura media de la base en la base de la aleta.
- t : tiempo
- V : volumen
- X : dirección adimensional de x
- x : eje longitudinal de la aleta

## CARACTERES GRIEGOS

$\alpha$  : difusividad térmica de la aleta  
 $\beta$  : frecuencia adimensional de oscilación de la temperatura en la base.  
 $\chi$  : escala de longitud adimensional definida en el texto  
 $\epsilon_w$  : parámetro de perturbación de frecuencia  
 $\epsilon_g$  : parámetro de perturbación de geometría  
 $\eta$  : eficiencia  
 $\psi$  : parte transitoria de la temperatura de la aleta.  
 $\lambda$  : factor de amplitud de la variación de la temperatura.  
 $\omega$  : frecuencia de oscilación de la temperatura en la base.  
 $\theta$  : temperatura adimensional.  
 $\theta_0$  : parte permanente de la temperatura de la aleta  
 $\rho$  : densidad del material de la aleta;  
 $\sigma$  : escala de tiempo adimensional  
 $\tau$  : tiempo adimensional  
 $\xi$  : escala de longitud adimensional

## EQUIVALENCIA DE LA NOMENCLATURA

$$A^* = 1 - c_g h(x)$$

$$A_c = P dx$$

$$G = G(r, t | r', \tau)$$

$$h = \exp[-X / (1-X)]$$

$$i = (-1)^{1/2}$$

$$N = \left[ 2HL^2 / kb \right]^{1/2}$$

$$P = 2l$$

$$Q = q / A$$

$$q = k A \left[ \frac{dT}{dx} \right]$$

$$X = x/L$$

## CARACTERES GRIEGOS

$$\alpha = k/\rho C_p$$

$$\beta = u / (a/L^2)$$

$$\chi = N X$$

$$c_w = N^2 / \beta$$

$$c_g = 2 b l / b$$

$$\psi = \psi_0 + c_g \psi_1$$

$$\omega = 2\pi$$

$$\theta = \theta_0 + \psi$$

$$\theta_0 = \theta_{00} + c_g \theta_{01}$$

$$\sigma = N^2 \tau = \beta \tau$$

$$\tau = t / (bl/a) =$$

$$\xi = \beta^{1/2} X$$

## SUBINDICES

acum: referido a la acumulación o almacenamiento.

b: referido a la base de la aleta.

bm : referido a un valor medio en la base de la aleta.

c: referido a la convección.

f: referido al exterior de la aleta.

g: referido a la geometría.

M: referido a un valor máximo.

R: referido a un valor real o neto.

sc: referido a una sección constante.

ST: referido la sección transversal.

sv: referido a una sección variable.

w: referido a la frecuencia.

CAPITULO I  
DEFINICION DEL PROBLEMA

Sea la aleta unidimensional de sección variable mostrada en la figura 2.

En ella, se tiene un grosor  $h(x)$  descrito por la siguiente función:

$$h(x) = b + 2b_1 \exp[-x/(L-x)] \quad (I.1)$$

Mientras que la transferencia de calor en la base de la aleta se realiza exclusivamente por conducción, en el resto de la misma en dirección  $x$ , se realizará tanto por efectos conductivos como convectivos al hallarse la aleta expuesta a un flujo forzado de aire.

Ahora bien, la transferencia de calor a la base de la aleta ( $Q_x$ ) no se presenta como un flujo constante sino más bien periódico al formar parte de una máquina térmica como un compresor o un motor, donde la temperatura instantánea de su interior ( $T_b$ ) varía con una frecuencia  $\omega t$  y en una amplitud  $\lambda$ , que por comodidad se aproximó a la siguiente función [3]:

$$T_b = T_{bm} + \lambda (T_{bm} - T_{\infty}) \cos \omega t \quad (I.2)$$

$T_{bm}$  y  $T_{\infty}$  son, respectivamente, la temperatura media en la base de la aleta y la temperatura del medio ambiente hacia el cual se realiza la transferencia de calor.

Una vez realizada la consideración anterior se realizó un balance de energía entre las secciones  $x$  y  $x+dx$  considerando que el flujo de calor  $Q$  es unidimensional y variable con el tiempo;  $Q=Q(x,t)$ , apareciendo tanto términos conductivos, convectivos y de acumulación; como se puede apreciar en la figura 3. Así pues, para un estado transitorio de la aleta mostrada tenemos que

$$Q_x = Q_{x+dx} + Q_c + Q_{acum} \quad (I.3)$$

ecuación de la cual podemos distinguir la conducción de la convección respectivamente como

$$Q_{x+dx} = Q_x + \frac{d}{dx} Q_x dx + 0 (dx^2) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ k A \frac{\partial T}{\partial x} \right] \quad (I.4)$$

$$dQ_c = H dA_c (T - T_\infty)^m \quad (I.5)$$

asi como un término acumulativo transitorio

$$dQ_{cum} = \rho \Delta V C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (I.6)$$

Reuniendo cada uno de los términos en la ecuación (I.3) corresponde la siguiente expresión

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ k A \frac{\partial T}{\partial x} \right] - HP (T - T_\infty)^m = \rho b l C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (I.7)$$

donde P es el perímetro (2l) de la sección transversal de la aleta y m es un exponente cuyo valor nos indica el mecanismo de transferencia de calor [1,2,4,11,12], que para nuestro caso es igual a dos.

La ecuación (I.7) es en principio el modelo matemático que representa al fenómeno. Sus condiciones iniciales y de frontera son la siguientes [3]:

$$T(X,0) = T_\infty \quad (I.8a)$$

$$T(L,t) = T_\infty \quad (I.8b)$$

$$T(0,t) = T_b = T_\infty + (T_{bm} - T_\infty) \lambda \cos \omega t \quad (I.8c)$$

Al realizarse la adimensionalización de la ecuación fundamental y de sus condiciones (apéndice A. Sec. 2.1) se llega a lo siguiente:

$$\left[ 1 + c_{qh}(X) \right] \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial \theta}{\partial X} \frac{\partial}{\partial X} \left[ 1 + c_{qh}(X) \right] - N^2 \theta^m = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \quad (I.9)$$

con condiciones de frontera e inicial:

$$\theta(X,0) = 0 \quad (I.10a)$$

$$\theta(1,\tau) = 0 \quad (I.10b)$$

$$\theta(0,\tau) = 1 + \lambda \cos \beta \tau \quad (I.10c)$$

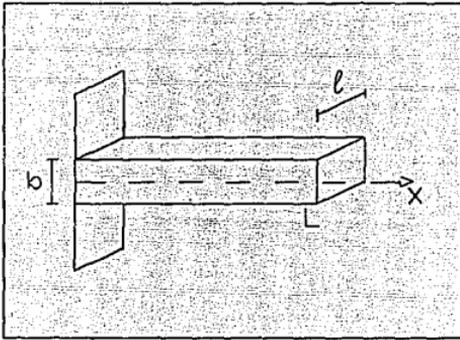


Figura 1

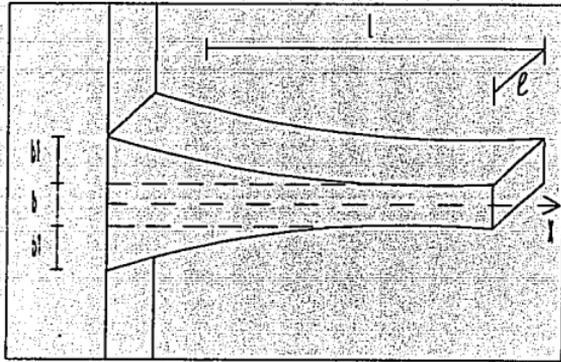


Figura 2

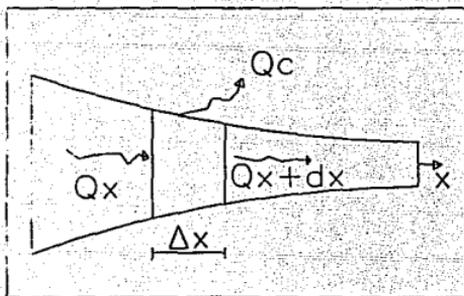


Figura 3

CAPITULO II  
PLANTEAMIENTO DE LA SOLUCION

Enseguida se trató al problema de la siguiente forma:

Sea la temperatura  $\theta$  una función compuesta por una parte permanente y una transitoria representadas como  $\theta_0$  y  $\psi$  respectivamente, que cumplen con un principio de superposición, expresado como:

$$\theta = \theta(X, \tau) = \theta_0(X) + \psi(\tau, X) \quad (II.1)$$

Ahora bien, realizando la sustitución de esta expresión en la ecuación (I.9) se llega a la siguiente expresión al reunir los términos como permanentes y transitorios,

$$\left\{ \left[ 1 + c_g h(x) \right] \frac{\partial \theta_0}{\partial X^2} + c_g \frac{\partial h}{\partial X} \frac{\partial \theta_0}{\partial X} - N^2 \theta_0 \right\} +$$

$$\left[ 1 + c_g h(x) \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + c_g \frac{\partial h}{\partial X} \frac{\partial \psi}{\partial X} - N^2 \theta_0 \left[ \left[ 1 + \frac{\psi}{\theta_0} \right] - 1 \right]$$

$$= \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \quad (II.2)$$

con condiciones de frontera e iniciales, respectivamente:

$$\theta(X, 0) = 0 \quad (II.3a)$$

$$\theta(1, \tau) = 0 \quad (II.3b)$$

$$\theta(0, \tau) = 1 + \lambda \cos \beta \tau \quad (II.3c)$$

reagrupando las partes en términos constantes y transitorios, se tiene:

$$\left\{ \left[ 1 + c_g h(x) \right] \frac{\partial \theta_0}{\partial X^2} + c_g \frac{\partial h}{\partial X} \frac{\partial \theta_0}{\partial X} - N^2 \theta_0^m \right\} +$$

$$\left[ 1 + c_g h(x) \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + c_g \frac{\partial h}{\partial X} \frac{\partial \psi}{\partial X} - N^2 \theta_0^m \left[ \left[ 1 + \frac{\psi}{\theta_0} \right]^m - 1 \right]$$

$$= \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \quad (II.4)$$

se desprende entonces que la parte permanente corresponde a:

$$\left[ 1 + c_g h(x) \right] \frac{d^2 \theta_0}{dX^2} + c_g \frac{dh}{dX} \frac{d\theta_0}{dX} - N^2 \theta_0^m = 0 \quad (II.5)$$

con las siguientes condiciones de frontera (apéndice A. Sec. 2.2)

$$\theta_0(0) = 1 \quad (II.6a)$$

$$\theta_0(1) = 0 \quad (II.6b)$$

y la la parte transitoria a:

$$\left[ 1 + c_g h(x) \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + c_g \frac{\partial h}{\partial X} \frac{\partial \psi}{\partial X} - N^2 \theta_0^m \left[ \left[ 1 + \frac{\psi}{\theta_0} \right]^m - 1 \right]$$

$$= \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \quad (II.7)$$

con las siguientes condiciones de frontera (apéndice A. Sec. 2.2)

$$\psi(0, \tau) = \lambda \cos \beta \tau \quad (II.8a)$$

$$\psi(X, 0) = -\theta_0(X) \quad (II.8b)$$

$$\psi(1, \tau) = 0 \quad (II.8c)$$

TRATAMIENTO DE LA PARTE PERMANENTE

(Apéndice A Sec. 2.3)

Al redefinir nuevamente a la parte permanente de la temperatura ( $\theta_0$ ) en forma de una expansión de perturbación, como se presenta a continuación:

$$\theta_0 = \theta_{00}(X) + c_v \theta_{01}(X) + c_v^2 \theta_{02}(X) + \dots + c_v^n \theta_{0n}(X)$$

y considerar suficiente la aproximación lograda con una expansión de primer orden ( $c_v^1$ ), se obtiene en consecuencia:

$$\theta_0 = \theta_{00}(X) + c_v \theta_{01}(X) + O(c_v^2) \quad (\text{II.9})$$

al substituir (II.9), se tiene del sistema (II.5), (II.6) :

$$\frac{d^2 \theta_{00}}{dX^2} - N^2 \theta_{00} + c_v \left( h(X) \frac{d^2 \theta_{00}}{dX^2} + \frac{d^2 \theta_{01}}{dX^2} + \frac{dh}{dX} \frac{d \theta_{00}}{dX} - m N^2 \theta_{00} \theta_{01} \right) = 0 \quad (\text{II.10})$$

que al separar sus términos de acuerdo al orden de  $c_v$  tenemos:

para  $c_v^0$

$$\frac{d^2 \theta_{00}}{dX^2} - N^2 \theta_{00} = 0 \quad (\text{II.11})$$

con condiciones de frontera :

$$X = 0 \quad \theta_{00} = 1.0 \quad (\text{II.12a})$$

$$X = 1.0 \quad \theta_{00} = 0.0 \quad (\text{II.12b})$$

para  $c_v^1$

$$\frac{d^2 \theta_{01}}{dX^2} - m N^2 \theta_{00} \theta_{01} = - \frac{d}{dX} \left[ h \frac{d \theta_{00}}{dX} \right] \quad (\text{II.13})$$

con condiciones de frontera:

$$\theta_{01}(0) = 0.0 \quad (II.14a)$$

$$\theta_{01}(1) = 0.0 \quad (II.14b)$$

### SOLUCION DE LOS TERMINOS PERMANENTES DE ORDEN CERO

(Apéndice A Sec 2.4)

La expresión (II.11), con sus respectivas condiciones de frontera (II.12), al substituir sus variables por  $\chi = NX$  y  $\sigma = N^2\tau$ , para hacer mas sencillo el manejo de la ecuación, y después de un manipuleo algebraico toma la siguiente forma:

$$\frac{d^2\theta_{00}}{d\chi^2} - \theta_{00} = 0 \quad (II.15)$$

y sus condiciones de frontera  $\theta_{00}(\chi)$  como:

$$\theta_{00}(0) = 1 \quad (II.16a)$$

$$\theta_{00}(\infty) = 0 \quad (II.16b)$$

reexpresando a esta misma función como una derivada respecto a  $\theta_{00}$  y resolviendole por separación de variables, se llega a:

$$\theta_{00} = \left( 1 + \frac{1-m}{2} \sqrt{\frac{2}{m+1}} \chi \right)^{\frac{2}{1-m}} \quad (II.17)$$

o bien en terminos de X expresada como:

$$\theta_{00} = \left( 1 + \frac{1-m}{2} \sqrt{\frac{2}{m+1}} NX \right)^{\frac{2}{1-m}} \quad (II.18)$$

SOLUCION DE LA PARTE PERMANENTE CORRESPONDIENTE A

LOS TERMINOS DE PRIMER ORDEN  $c_1^1$ .

(Apéndice A Sec 2.5)

La ecuación diferencial (II.13) con sus condiciones de frontera (II.14), después de calcular las derivada y realizar simplificaciones algebraicas toma la forma siguiente:

$$\frac{d^2 \theta_{01}}{dX^2} - m^2 N^2 \left( 1 + \frac{1-m}{2} \sqrt{\frac{2}{m+1}} N X \right)^{2 \frac{m-1}{m+1}} \theta_{01} =$$

$$N \cdot \exp \left( \frac{-X}{1-X} \right) \left[ \left( \frac{1}{(1-X)^2} \right) \cdot \left( 1 + \frac{1-m}{2} \sqrt{\frac{2}{m+1}} N X \right)^{\frac{1+m}{1-m}} \right]$$

$$\sqrt{\frac{2}{m+1}} = N \left( 1 + \frac{1-m}{2} \sqrt{\frac{2}{m+1}} N X \right)^{\frac{2-m}{1-m}} \quad (II.19)$$

para la cual siguen siendo validas las condiciones de frontera

$$\theta_{01}(0) = 0.0$$

$$\theta_{01}(1) = 0.0$$

A ésta expresión lineal de segundo orden hubo que reducir a un sistema de ecuaciones lineales de primer orden antes de poder ser resuelta. Para lo cual se realizó un cambio de variable de la siguiente forma:

$$G_1 = \theta_{01} \quad (II.20a)$$

$$G_2 = \frac{d G_1}{d X} \quad (II.20b)$$

de esta forma la ecuación (II.18) con sus condiciones de frontera (II.14) se redujo al siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\frac{d G_2}{d X} - m N^2 \theta_{00} G_1 = - \frac{d}{d X} \left( h \frac{d \theta_{00}}{d X} \right) \quad (II.21a)$$

$$G_2 = \frac{d G_1}{d X} \quad (II.21b)$$

con condiciones de frontera  $G(X)$ :

$$G_1(0) = 0 \quad (II.22a)$$

$$G_1(1) = 0 \quad (II.22b)$$

El método de solución empleado para resolver el sistema de ecuaciones (II.21) con condiciones de frontera (II.22) fue el de la interpolación numérica de Runge-Kutta (apéndice C), para valores de  $m=2$  y  $N=5$ .

De dicho método se obtuvo un conjunto de valores para  $\theta_{01}$  que fue ajustado al siguiente polinomio en  $X$ :

$$\begin{aligned} \theta_{01} = & -0.456 X^{10} + 0.745 X^9 + 0.499 X^8 - 1.42 X^7 \\ & + 0.342 X^6 + 0.681 X^5 - 0.5 X^4 + 0.114 X^3 \\ & - 0.534 X^2 + 0.529 X + 3.24 E-06 \end{aligned} \quad (II.23)$$

TRATAMIENTO DE LA PARTE TRANSITORIA  
(Apéndice B Sec 1.1)

Para la solución de la ecuación diferencial correspondiente a la parte transitoria (II.7) con sus condiciones de frontera (II.8), reescritas aquí para su comodidad:

$$\left[ 1 + c_g h(x) \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + c_g \frac{\partial h}{\partial X} \frac{\partial \psi}{\partial X} - N^2 \theta_0 \left[ \left[ 1 + \frac{\psi}{\theta_0} \right]^m - 1 \right] = \frac{\partial \psi}{\partial \tau}$$

con las siguientes condiciones de frontera,

$$\psi(0, \tau) = \lambda \cos \beta \tau$$

$$\psi(X, 0) = -\theta_0(X)$$

$$\psi(1, \tau) = 0$$

se proponen las siguientes expansiones:

$$\psi = \psi_0 + c_g \psi_1 + O(c_g^2) \quad (\text{II.24a})$$

$$\psi_0 = \psi_{00} + c_w \psi_{01} + O(c_w^2) \quad (\text{II.24b})$$

$$\psi_1 = \psi_{11} \quad (\text{II.24c})$$

donde el parámetro de perturbación ( $c_g$ ) surge de considerar la variación por geometría, mientras que el parámetro de perturbación  $c_w = N^2/\beta$  surge al considerar el efecto de la alta frecuencia de oscilación [12]. Conviene aclarar que el término  $\psi_1$  carece de parámetro de perturbación por frecuencia, ya que al encontrarse afectado por un parámetro de geometría, de la substitución resulta un parámetro de segundo orden, no considerados en este análisis.

Al substituir (II.24) en la ecuación (II.7) da origen a su vez a dos sistemas de ecuaciones diferenciales (apéndice B Sec 1.1), uno para los términos perturbativos de orden o magnitud cero y otro para los términos perturbativos de orden unitario. Expresados aquí en términos de las variables  $\xi$  y  $\sigma$ .

Para el orden  $c_0^0$ :

(II.25)

$$\frac{d^2 \psi_0}{d \xi^2} - c_w \theta_{00}^n \left[ \left( 1 + \frac{\psi_0}{\theta_{00}} \right)^n - 1 \right] = \frac{d \psi_0}{d \sigma}$$

con condiciones

$$\xi = 0 \quad , \quad \psi_0(0, \sigma) = \lambda \cos \sigma \quad (II.26a)$$

$$\sigma = 0 \quad , \quad \psi_0(\xi, 0) = -\theta_{00}(\xi) \quad (II.26b)$$

$$\xi \rightarrow \infty \quad , \quad \psi_0(\infty, \sigma) = 0 \quad (II.26c)$$

para los términos de primer orden ( $c_1$ ) se tiene:

$$\frac{d^2 \psi_1}{d \xi^2} + h(\xi) \frac{d^2 \psi_{00}}{d \xi^2} = \frac{d \psi_1}{d \sigma} \quad (II.27)$$

con condiciones de frontera e inicial  $\psi_1(\xi, \sigma)$ , igual a:

$$\psi_1(0, \sigma) = 0 \quad (II.28a)$$

$$\psi_1(\xi, 0) = -\theta_{01}(\xi) \quad (II.28b)$$

$$\psi_1(\infty, \sigma) = 0 \quad (II.28c)$$

donde  $\xi = (\omega)^{1/2} X$

La solución de orden cero, ecuación diferencial (II.27), con condiciones de frontera e inicial (II.28), se encuentra resuelta por medio de la técnica integral de Green para  $\psi_{00}$  y  $\psi_{01}$  en los trabajos de Medina et al [12] y viene dada por la siguiente expresión:

$$\psi_{00} = -\operatorname{erf} \left( \frac{\xi}{\sqrt{2\sigma}} \right) + \lambda \operatorname{Re} \left[ \exp \left( i\sigma - \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \xi \right) \right] \quad (II.29)$$

De manera análoga, en la misma referencia, por medio de la técnica de Green se obtiene la solución para los términos de alta frecuencia en la misma referencia:

$$\psi_{01} = \int_0^{\sigma} d\sigma' \int_0^{\xi} \left[ \frac{1}{\sqrt{4\pi(\sigma-\sigma')}} \left\{ \exp\left[-\frac{(\xi-\xi')^2}{4(\sigma-\sigma')}\right] - \exp\left[-\frac{(\xi+\xi')^2}{4(\sigma-\sigma')}\right] \right\} \right. \\ \left. \operatorname{Re} \left\{ 1 + \alpha \exp\left[-i\sigma' - (1+i)/\sqrt{2} \xi'\right] \right\}^{\beta} - 1 \right] d\xi \quad (II.30)$$

de donde se deriva el siguiente término, que más tarde nos será útil para evaluar el flujo de calor en la base de la aleta:

$$\frac{d\psi_{01}}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = -\lambda (\cos \sigma - \pi/4) - \lambda^2 (1 + \sqrt{\theta/2}) \cos (2\sigma - \pi/4)$$

para  $\sigma \rightarrow \infty$

Re representa la parte real de la solución

i representa la componente imaginaria  $i = \sqrt{-1}$ .

Una vez calculada  $\psi_{00}$  se substituyó su valor en la ecuación (II.26) con objeto de tener una ecuación única para  $\psi_1$ , dada por:

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2} + \exp \left[ \frac{-\sqrt{C_w} \xi'}{N - \sqrt{C_w} \xi'} \right] = \quad \text{Ecuación (II.31)}$$

$$\left[ \frac{2 \xi \exp(\xi^2 / 2 \sigma)}{\sqrt{2\pi} \sigma^{3/2}} - \lambda \operatorname{sen} \left( \sigma - \frac{\xi}{\sqrt{2}} \right) \exp \left( -\frac{\xi}{\sqrt{2}} \right) \right]$$

$$= \frac{d\psi_1}{d\sigma}$$

con condiciones de frontera (11.28) La solución del problema anterior puede desarrollarse con ayuda de la técnica integral de Green (para detalles ver apéndice B y C.), se obtiene

$$\psi_1 = - \int_0^{\sigma} \left( \frac{\exp \left( -\frac{(\xi - \xi')^2}{4\sigma} \right) - \exp \left( -\frac{(\xi + \xi')^2}{4\sigma} \right)}{(4\pi\sigma)^{1/2}} \right) \theta_{01}(\xi') \delta\xi'$$

$$+ \int_{\sigma=0}^{\sigma} \int_0^{\sigma} \left( \frac{\exp \left( -\frac{(\xi - \xi')^2}{4\sigma} \right) - \exp \left( -\frac{(\xi + \xi')^2}{4\sigma} \right)}{(4\pi(\sigma - \sigma'))^{1/2}} \right) \cdot$$

$$\cdot \exp \left[ \frac{-\sqrt{c_w} \xi'}{N - \sqrt{c_w} \xi'} \right] \cdot$$

$$\left[ \frac{2 \xi' \exp \left( \xi'^2 / 2 \sigma \right)}{\sqrt{2\pi} \sigma^{3/2}} - \lambda \operatorname{sen} \left( \sigma' - \frac{\xi'}{\sqrt{2}} \right) \exp \left( -\frac{\xi'}{\sqrt{2}} \right) \right] \delta\xi' \delta\sigma'$$

ECUACION (11.32)

y condiciones de frontera e iniciales 11.28.

Expresión a la cual se le dio solución numéricamente.

CAPITULO III  
 DETERMINACION DEL FLUJO DE CALOR  
 (Apéndice C)

Al interesarnos sobre todo el flujo de calor en la base de la aleta, de la cual se obtendrá un parámetro de eficiencia, la forma general del flujo adimensionalizado de calor en la base quedaría representado como:

$$Q_{sv} = \left. \frac{d\theta}{dX} \right|_{X=0} = \left. \frac{d\theta_0}{dX} \right|_{X=0} + \left. \frac{d\psi}{dX} \right|_{X=0} \quad (\text{III.1})$$

si consideramos que:

$$\left. \frac{d\theta_0}{dX} \right|_{X=0} = \left. \frac{d\theta_{00}}{dX} \right|_{X=0} + c_g \left. \frac{d\theta_{01}}{dX} \right|_{X=0}$$

$$\left. \frac{d\psi}{dX} \right|_{X=0} = \left. \frac{d\psi_{00}}{dX} \right|_{X=0} + c_w \left. \frac{d\psi_{01}}{dX} \right|_{X=0} + c_g \left. \frac{d\psi_1}{dX} \right|_{X=0}$$

al substituir y agrupar en función del orden de los parámetros de perturbación, tendremos:

$$Q_{sv} = \left. \frac{d\theta}{dX} \right|_{X=0} = \left. \frac{d\theta_{00}}{dX} \right|_{X=0} + \left. \frac{d\psi_{00}}{dX} \right|_{X=0} +$$

$$c_g \left[ \left. \frac{d\theta_{01}}{dX} \right|_{X=0} + \left. \frac{d\psi_1}{dX} \right|_{X=0} \right] + c_w \left. \frac{d\psi_{01}}{dX} \right|_{X=0} \quad (\text{III.2})$$

donde  $Q_{sv}$  representa el flujo de calor adimensionalizado con sección transversal variable. Al reunir cada una de las derivadas de la parte permanente y la transitoria en la ecuación (III.2), se llega a:

$$\frac{d\theta}{dX} \Big|_{X=0} = \sqrt{\frac{2}{m+1}} N + \frac{\lambda \sqrt{\beta}}{\sqrt{2}} \left( \cos \beta\tau - \operatorname{sen} \beta\tau \right)$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi \tau}} + c_q \left[ 0.54 - \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{4\pi} \sigma^{3/2}} \int_0^{\xi} \xi' \exp \left[ -\xi'^2 / 4\sigma \right] \operatorname{erfc}(\xi') d\xi' + \right.$$

$$\left. \sqrt{\frac{\beta}{4\pi}} \int_0^{\xi} \int_0^{\xi} \frac{\xi \exp \left[ \frac{\xi'^2}{4(\sigma-\sigma')} - \frac{(\epsilon_w)^{1/2} \xi'}{N - (\epsilon_w)^{1/2} - \xi'} \right]}{(\sigma-\sigma')^{3/2}} \right.$$

$$\left. \left[ \frac{2\xi' \exp \left[ -\xi'^2 / 2\sigma \right]}{\sqrt{4\pi} \sigma^{3/2}} - \lambda \operatorname{sen} \left( \frac{\sigma' - \xi'}{(2)^{1/2}} \right) \exp \left( \frac{-\xi'}{(2)^{1/2}} \right) \right] d\xi' d\sigma' \right]$$

Expresión de la cual se obtuvo la FIGURA 3 , al ser evaluada para los valores,  $X=0$ ,  $m=2$  ;  $N=5$  ;  $\beta=500$  ;  $\lambda=1.0$  ;  $c_q=0.05$  y  $4.0 E-4 \leq \sigma \leq 0.2$

## CAPITULO IV

### RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Del capítulo tercero, se desprende el primer resultado que es el que corresponde al flujo de calor en la base de la aleta, mostrado en la figura 4 y que es comparado con el resultado proporcionado con el correspondiente resultado de Medina et al [12] en la figura 5, en la que se puede observar una pequeña diferencia entre los mismos, que resulta insignificante si tomamos en cuenta la pequeña variación de geometría de nuestra aleta con respecto a la de sección constante, las diferencias entre los métodos utilizados y el orden de las expansiones de perturbación, que en este caso fueron apenas de primer orden.

Al comparar los resultados obtenidos con los de Aziz y Na para una aleta de sección constante sometida a un cambio brusco de temperatura en su base [3]; no obstante las diferencias, se observa una correspondencia en cuanto a la tendencia a seguir por parte de ambas soluciones para estabilizarse en un mismo conjunto de valores, lo cual sugiere una igualdad entre ambas si se promedia en el tiempo la solución obtenida para la aleta de sección variable, figura 6.

Por otra parte, al no contar con otros resultados semejantes, la manera de determinar el menor o el mayor grado de la eficacia de la aleta, fue el de comparar los resultados obtenidos contra los resultados esperados de una aleta de sección transversal constante, sometida a las mismas condiciones. Para tal efecto se tuvo que replantear el problema de la siguiente forma:

Si el flujo de calor de una aleta de sección variable y una de sección constante quedan descritos de la siguiente forma :

$$Q_{sv} = \frac{d\theta}{dX} \Big|_{x=0}^{sv} = \frac{d\theta_{00}}{dX} \Big|_{x=0} + \frac{d\psi_{00}}{dX} \Big|_{x=0} +$$

$$c_g \left[ \frac{d\theta_{01}}{dX} \Big|_{x=0} + \frac{d\psi_1}{dX} \Big|_{x=0} \right] + c_w \frac{d\psi_{01}}{dX} \Big|_{x=0} \quad (IV.1)$$

$$Q_{sc} = \frac{d\theta}{dX} \Big|_{x=0}^{sc} = \frac{d\theta_{00}}{dX} \Big|_{x=0} + \frac{d\psi_{00}}{dX} \Big|_{x=0} + c_w \frac{d\psi_{01}}{dX} \Big|_{x=0} \quad (IV.2)$$

Y definimos para cada caso, al flujo de calor como la suma de flujos parciales por efectos permanentes ( $Q_0$ ), geométricos ( $Q_1$ ) y de alta frecuencia ( $Q_2$ ), las expresiones anteriores se pueden escribir como:

$$Q_{sv} = Q_0 + c_g Q_1 + c_w Q_2 \quad (IV.3)$$

y

$$Q_{sc} = Q_0 + c_w Q_2 \quad (IV.4)$$

Entonces al determinar la rapidez de transferencia de calor para cada uno se tiene:

$$q_{sv} = A_{sv} Q_{sv} \quad (IV.5)$$

$$q_{sc} = A_{sc} Q_{sc} \quad (IV.6)$$

donde  $A$  representa el área de la aleta en cuestión, correspondiendo el subíndice  $sc$  a la de sección constante y  $sv$  a la aleta de sección variable.

Después de un manipuleo algebraico, al evaluar el cociente entre ambas cantidades ( $q_{sv}/q_{sc}$ ), se llega al siguiente resultado de consideración

$$\frac{q_{sv}}{q_{sc}} = (1 + c_g) \left[ 1 + \frac{c_g Q_1}{Q_0 + c_w Q_2} \right] \quad (IV.7)$$

si a esta expresión la desarrollamos y la dividimos entre  $Q_0$ , se obtiene:

$$\frac{q_{sv}}{q_{sc}} = 1 + c_q \left[ 1 + \frac{Q_1}{Q_0 \left( 1 + c_w \frac{Q_2}{Q_0} \right)} \right] \quad (IV.8)$$

de la que finalmente resulta al considerar  $c_w$  muy pequeño y el cociente  $Q_2/Q_1$  cercano a la unidad, desarrollando en serie de Taylor y considerando exclusivamente los términos de orden unitario:

$$\frac{q_{sv}}{q_{sc}} = 1 + c_q \left[ 1 + \frac{Q_1}{Q_0} \right] \quad (IV.9)$$

o bien al substituir los términos diferenciales a cada uno de los flujos de calor, se encuentra:

$$\frac{q_{sv}}{q_{sc}} = 1 + c_q \left[ 1 + \frac{\left. \frac{d\theta_{01}}{dX} \right|_{X=0} + \left. \frac{d\psi_1}{dX} \right|_{X=0}}{\left. \frac{d\theta_{00}}{dX} \right|_{X=0} + \left. \frac{d\psi_{00}}{dX} \right|_{X=0}} \right] \quad (IV.10)$$

puede concluirse, al tratarse de la ecuación de una recta con valor de uno para  $c_q=0$ , que el flujo de calor para la aleta de sección variable se encuentra por encima del flujo de calor de la aleta de sección constante lo cual confirma, para valores muy pequeños de perturbación en la geometría, que el aumento de área incrementa el flujo de calor por convección.

## EFICIENCIA

Para el cálculo de la eficiencia de la aleta, se considero que esta resulta del cociente entre el flujo de calor real ( $Q_R$ ) y el flujo de calor tenido al encontrarse toda la aleta a la misma temperatura de la base ( $Q_M$ ).

Pero como el flujo de calor no se mantiene constante, sino que varia con el tiempo, se tiene que promediar como una función de  $t$ , en la siguiente forma:

$$\bar{\eta}_{sc} = \frac{\int_0^{2\pi} \eta d(\beta\tau)}{\int_0^{2\pi} d(\beta\tau)} \quad (IV.11)$$

tomando en cuenta que  $\beta\tau = 2\pi t$ , resulta para la aleta de sección variable y para la de sección constante las siguientes expresiones (apendice D Sec 2) :

$$\bar{\eta}_{sc} = \frac{1}{2\pi h^2} \int_0^{2\pi} \frac{Q_{sc}(\beta\tau)}{1 + \lambda \cos \beta\tau} d(\beta\tau) \quad (IV.12)$$

$$\bar{\eta}_{sv} = \frac{1}{2\pi h^2} \int_0^{2\pi} \frac{Q_{sv}(\beta\tau)}{1 + \lambda \cos \beta\tau} d(\beta\tau) \quad (IV.13)$$

Si consideramos que  $Q_{sc}(\beta\tau)|_{x=0}$  se encuentra incluida en la ecuación (III.2) obtendremos al substituir:

$$\bar{\eta}_{sc} = \frac{1}{2\pi h^2} \int_0^{2\pi} \frac{\left( \frac{d\theta_{00}}{dX} + \frac{d\psi_{00}}{dX} + c_w \frac{d\psi_{01}}{dX} \right)_{x=0}}{1 + \lambda \cos(\beta\tau)} d(\beta\tau) \quad (IV.14)$$

substituyendo los correspondientes valores para cada uno de los términos se llegó a la siguiente ecuación:

$$\bar{\eta}_{sc} = \frac{1}{0.2N^2} \int_0^{0.2} \left[ \frac{4.08248 + \sqrt{\beta/2} \lambda (\cos(\beta\tau) - \sin(\beta\tau))}{1 + \lambda \cos(\beta\tau)} + \frac{\left(\frac{2}{\pi\tau}\right)^{1/2} + c_w\beta^{1/2} \lambda (\cos(\beta\tau - \pi/4) + \lambda(1 + \sqrt{9/2} \cos(2\beta\tau - \pi/4)))}{1 + \lambda \cos(\beta\tau)} \right] d(\beta\tau)$$

Esta ecuación fue evaluada para los valores de  $N=5$ ,  $\beta=500$ ,  $\lambda=1$  y  $c_w=0.05$  y para un intervalo de tiempo  $0 \leq \tau \leq 0.2$  dio como resultado:

$$\bar{\eta}_{sc} = 0.3098$$

Por otra parte para la aleta de sección variable se encontró (apéndice D) la siguiente expresión:

$$\bar{\eta}_{sv} = \frac{1}{2\pi N^2} \int \frac{Q_{sc} dt}{1 + \lambda \cos t} + \frac{c_g}{2\pi N^2} \int \frac{Q_{sc} dt}{1 + \lambda \cos t} - \frac{c_g}{2\pi N^2} \int \frac{\left(\frac{d\theta_{01}}{dX} + \frac{d\psi_1}{dX}\right) dt}{1 + \lambda \cos t} \Bigg|_{x=0}$$

la cual puede reescribirse como:

$$\bar{\eta}_{sv} = \bar{\eta}_{sc} + c_g \bar{\eta}_{sc} - \frac{c_g}{N^2} \int \frac{\left(\frac{d\theta_{01}}{dX} + \frac{d\psi_1}{dX}\right) d(\beta\tau)}{1 + \lambda \cos t} \quad (IV.17)$$

Como comparación entre los dos casos se realiza el cociente entre las eficiencias; dividiéndose la de sección variable entre la eficiencia de sección constante.

$$\frac{\bar{\eta}_{sv}}{\bar{\eta}_{sc}} = 1 + c_g \left[ 1 - \frac{1}{\bar{\eta}_{sc} N^2} \int \frac{\left(\frac{d\theta_{01}}{dX} + \frac{d\psi_1}{dX}\right) d(\beta\tau)}{1 + \lambda \cos t} \right] \quad (IV.18)$$

El valor de la integral fue evaluado a partir del polinomio obtenido del flujo de calor en la base, numéricamente calculado para cada uno de los términos diferenciales, de esta forma resulta:

$$\int \left( \frac{d\theta_0}{dx} + \frac{d\psi_1}{dx} \right)_{x=0} d(\beta\tau) = 0.529 + 0.104 = 0.633$$

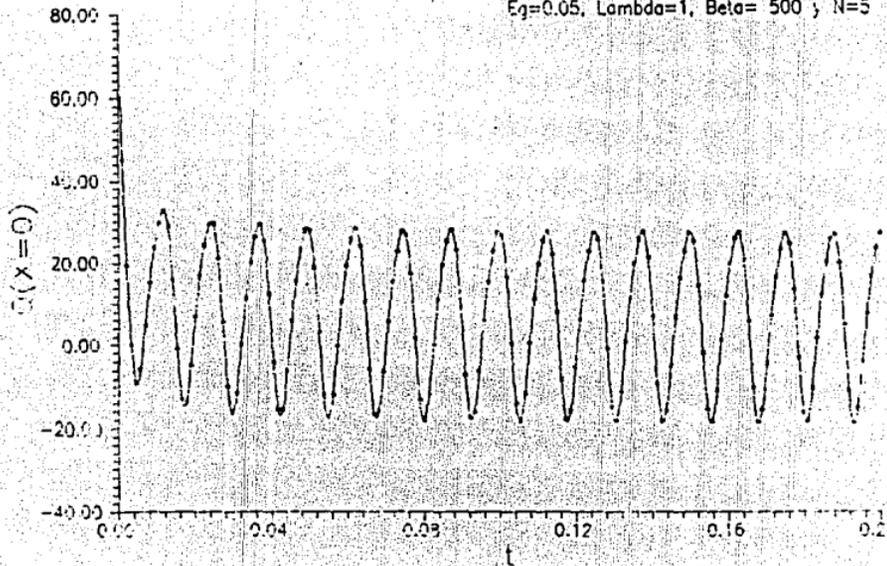
$$N^2 \frac{1 + \lambda \cos \tau}{1 + \lambda \cos \tau}$$

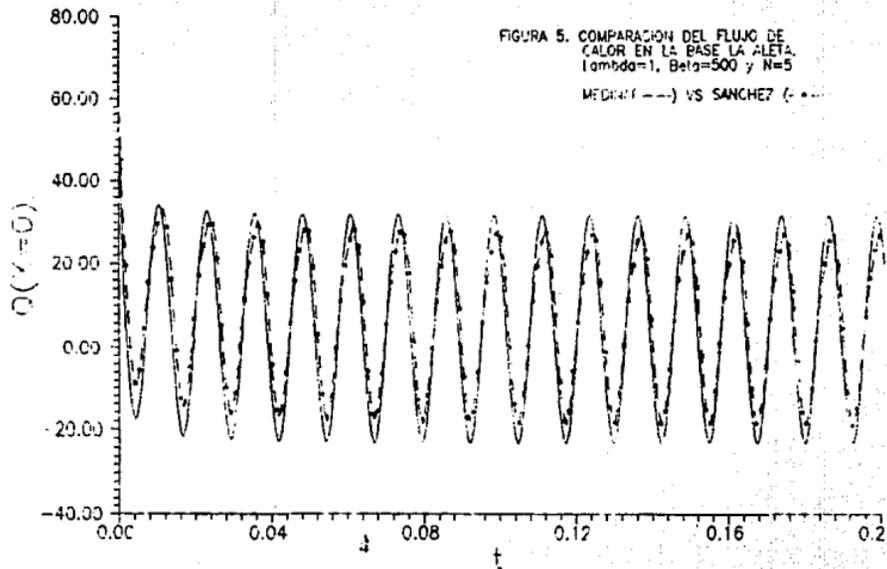
finalmente, substituido este resultado en la ecuación (IV.18), manteniendo el valor de  $c_q$  como variable independiente se obtiene:

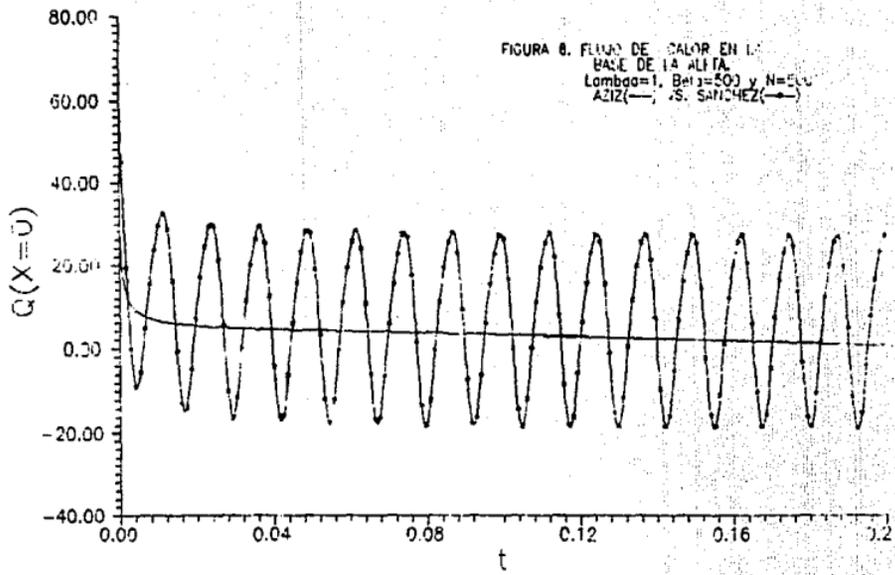
$$\frac{\bar{\eta}_{av}}{\bar{\eta}_{sc}} = 1 + c_q \left[ 1 + \frac{0.104}{0.309} \right] \quad (IV.19)$$

De la expresión (IV.19), no obstante que se trata del promedio de las funciones, se puede hacer el mismo comentario y conclusión hecho para el cociente entre el cociente de la rapidez de transferencia de calor. La aleta de sección variable resulta más eficiente que la de sección constante para pequeños valores del parámetro  $c_q$  de perturbación por geometría.

FIGURA 4. FLUJO DE CALOR EN LA BASE DE  
LA ALETA DE SECCION VARIABLE.  
 $Eg=0.05$ ,  $\Lambda=1$ ,  $Beta=500$  ;  $N=5$







## BIBLIOGRAFIA

- 1) Application of Perturbation Technics to Heat Transfer Problem with Variable Thermal Properties.  
A. Aziz and J.Y. Benzies.  
Int. Heat and Mass Transfer. Vol. 19 pp. 271-276 (1976)
- 2) Transient response of fins by coordinate perturbation expansion.  
A. Aziz and T.Y. Na  
Int. J. Heat and Mass Transfer. Vol 23 pp. 1695-1698 (1980)
- 3) Periodic Heat Transfer in Fins with variable Thermal Parameters.  
A. Aziz and T.Y. Na  
Int. J. Heat and Mass Transfer. Vol 24 .pp. 1397-1404 (1981)
- 4) Transient Response of fins by optimal linearization and variational embedding Methods.  
Y.M. Chang, C.K. Chen and J.W. Cleaver  
Int. J. Heat and Mass Transfer. Vol 104. pp 813(1982)
- 5) Transient Response of stright fins.  
N.V. Suryanarayana  
Journal of Heat Transfer. Agosto 1975
- 6) Perturbation solution for convecting fin with variable thermal conductivity.  
R.J. Crane  
Journal of Heat Transfer. November 1976

- 7) Approximate solution for convective fins with variable thermal conductivity.  
A. Muzzio  
Journal of Heat Transfer. November 1976
- 8) The Effect of the Boundary Condition at a Fin Tip on the Performance of the Fin with and without Internal Heat Generation.  
H.C. Unal  
Int. J. Heat and Mass Transfer. Vol 31 pp. 1483-1495 (1988).
- 9) The effects of nonuniform heat transfer from an annular fin of triangular profile.  
P.J. Heggs, D.B. Ingham and H. Manzoor  
Journal of Heat Transfer. February 1981
- 10) Improved formulations for the analysis of convecting and radiating finned surfaces.  
M. Manzoor, D.B. Ingham and P.J. Heggs.  
AIAA Journal. January 1983
- 11) Solución Espectral de Transferencia de Calor en Aletas.  
E. Medina , C. Treviño , F. Méndez  
Memoria de XVI Congreso de la Academia Nacional de Ingeniería A.C. (1990)

- 12) Heat Transfer in Fins with a Periodic Source.  
E. Medina , F. Méndez , C. Treviño  
III Brazilian Thermal Science Meeting.  
Itapenia, Brasil.  
(Dic. 1990)
- 13) Fundamentals of heat and mass transfer  
Frank P. Incropera and David P. De Witt  
Ed. John Wiley and Sons (1985)
- 14) Heat Conduction  
M. Necati Özışık  
Ed. John Wiley and Sons (1980)
- 15) Applied Numerical Methods.  
Carnahan Brice.  
Ed. John Wiley and Sons (1969)
- 16) Advanced Engineering Mathematics.  
Kreyszig.  
Ed. John Wiley and Sons (19)

APENDICE A  
SECCION 1.1  
ADIMENSIONALIZACION

La utilidad de los parámetros adimensionales es la de reducir el número de variables que interviene en el fenómeno, haciendo más sencillo su manejo. Los parámetros adimensionales aquí utilizados fueron los siguientes:

$$\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$$

$$\beta = \frac{\omega L^2}{\alpha}$$

$$c_w = \frac{N^2}{\beta}$$

$$c_g = \frac{2 b_1}{b}$$

$$N^2 = \frac{2HL^2}{bk}$$

$$X = \frac{x}{L}$$

$$\sigma = N^2 \tau$$

$$\chi = N^2 X$$

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_b - T_\infty}$$

$$\xi = \beta^{1/2} X$$

Por otra parte para hallar una expresión adimensional del área  $A^*$  se prosigió de la siguiente forma

$$A^* = \frac{b_1 + 2ly}{b_1} = \frac{b_1 + 2lb_1h(x)}{b_1}$$

$$A^* = 1 + c_g h(x)$$

ADIMENSIONALIZACION DE LA ECUACION FUNDAMENTAL

Para la acumulación de calor durante el régimen de operación transitorio :

$$dE_{\text{acum}} = m dh = \rho dV (\partial h / \partial t) = \rho C_p dV (\partial T / \partial t)$$

$$dV = b_1 dx + 2 dx l b_1 h(x)$$

tomando como factor común a:  $b l dx$

$$dV = b l dx (1 + (2bi/b) h(x))$$

substituyendo a  $(2bi/b)$  por  $c_g$

$$dV = b l dx (1 + c_g h(x))$$

tomando en consideración que tanto  $c_g$  como  $h(x)$  son menores a la unidad, podemos suponer que:

$$dV \approx b l dx$$

Tomando en cuenta la ecuación (I.7):

$$\frac{dQ_x}{dx} dx - HP dx (T_{bm} - T_w)^n = \rho C_p b l dx$$

dividiendo entre  $dx$

$$\frac{dQ_x}{dx} - HP (T_{bm} - T_w)^n = \rho C_p b l$$

substituyendo la expresión correspondiente al flujo de calor:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k A \frac{\partial T}{\partial x} \right) - HP (T_{bm} - T_w)^n = \rho C_p b l \frac{\partial T}{\partial t}$$

Substituyendo en la ecuación anterior diferencial las siguientes expresiones  $X = x/L$ ,  $\theta = (T - T_w)/(T_{bm} - T_w)$ ,  $\tau = t / (L^2/\alpha)$ ,  $\alpha = \rho C_p$ ,  $P=2l$ ,  $A = (1 + c_g h(x))$ , queda:

$$(1/L^2) \frac{d}{dX} \left[ kb \left( 1 + \epsilon_{gh}(x) \right) (T_b - T_\infty) \left( \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) \right] - H_2 (T_b - T_\infty)^m \theta^m =$$

$$\frac{\rho C_p b l (T_b - T_\infty)}{L^2 / \alpha} \frac{\partial \theta}{\partial \tau}$$

multiplicando por  $L^2$  y dividiendo entre  $b l k (T_b - T_\infty)$ , tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[ \left( 1 + \epsilon_g h(x) \right) \frac{\partial \theta}{\partial X} \right] - \frac{HP L^2}{bk l} \theta^m = \partial \theta / \partial \tau$$

recordando que  $N^2 = 2HL^2 / Kb$ , se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[ \left( 1 + \epsilon_g h(x) \right) \frac{\partial \theta}{\partial X} \right] - N^2 \theta^m = \partial \theta / \partial \tau$$

#### ADIMENSIONALIZACION DE LAS CONDICIONES

Un cambio de variables de la ecuación fundamental exige, asimismo, la expresión de sus condiciones de frontera y/o iniciales en los parámetros en los que esta halla sido finalmente expresada. De esta manera, después de haber adimensionalizado la expresión del la conservación de la energía en la aleta (1.9), expresamos las condiciones (1.8) en los mismos términos adimensionales en que fue expresada la temperatura.

Primero, las condiciones de la aleta para un tiempos menores a cero. Considero para este análisis que la temperatura en toda la región  $X$  será igual a la temperatura del medio ambiente, por lo tanto

$$\theta(X, \tau < 0) = \frac{T_\infty - T_\infty}{T_b - T_\infty} = 0 \quad (a)$$

de la misma forma, considerando la temperatura en el extremo de la aleta ( $X=1$ ) igual a la temperatura del medio ambiente:

$$\theta(1, \tau) = \frac{T_{\infty} - T_{\infty}}{T_b - T_{\infty}} = 0 \quad (b)$$

Para cualquier tiempo  $t$ , y para  $X=0$ , restando en ambos términos de la ecuación de la temperatura en la base a  $T_{\infty}$ , se obtiene:

$$T_b - T_{\infty} = T_{b\infty} (1 + \lambda \cos \omega t) - T_{\infty} (1 + \lambda \cos \omega t)$$

factorizando  $(1 + \lambda \cos \omega t)$  y dividiendo entre  $(T_{b\infty} - T_{\infty})$

$$1 + \lambda \cos \omega t = \frac{T_b - T_{\infty}}{T_{b\infty} - T_{\infty}}$$

de lo que se deriva:

$$1 + \lambda \cos \omega t = \theta(0, t) \quad (1)$$

utilizando a las expresiones:

$$\tau = t / (L^2 / \alpha) \quad \text{y} \quad \beta = \omega / (\alpha / L^2)$$

despejando de ellas a  $t$  y a  $\omega$  y substituyendolas en (1), queda finalmente:

$$\theta(0, \tau) = 1 + \lambda \cos \beta \tau \quad (c)$$

APENDICE A  
SECCION 2.1

Al realizar las derivadas de la ecuación (1.7),

$$\left[ 1 + c_g h(x) \right] \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial \theta}{\partial X} \frac{\partial}{\partial X} \left[ 1 + c_g h(x) \right] - N^2 \theta'' = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}$$

se llega a:

$$\left[ 1 + c_g h(x) \right] \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + c_g \frac{\partial h}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial X} - N^2 \theta'' = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \quad (2.11)$$

Considerando a  $\theta$  como :

$$\theta = \theta(X, \tau) = \theta_0(X) + \psi(\tau, X) \quad (2.12)$$

al substituirle en la expresión anterior, se obtiene:

$$\left[ 1 + c_g h(x) \right] \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial X^2} + \left[ 1 + c_g h(x) \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + c_g \frac{\partial h}{\partial X} \frac{\partial \theta_0}{\partial X} +$$

$$c_g \frac{\partial h}{\partial X} \frac{\partial \psi}{\partial X} - N^2 \left[ \theta_0 + \psi \right]'' = \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

sumando y restando  $N^2 \theta_0$

$$\left[ 1 + c_g \cdot h(x) \right] \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial X^2} + \left[ 1 + c_g \cdot h(x) \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + c_g \frac{\partial h}{\partial X} \frac{\partial \theta_0}{\partial X} +$$

$$c_g \frac{\partial h}{\partial X} + \frac{\partial \psi}{\partial X} - N^2 \left[ \theta_0 \left[ 1 + \psi / \theta_0 \right] \right] + N^2 \theta_0 - N^2 \theta_0 =$$

$$= \frac{\partial \psi}{\partial \tau}$$

**APENDICE A**  
**SECCION 2.2**  
**CONDICIONES DEL PROBLEMA**

Para establecer las condiciones de frontera e iniciales de la parte permanente y transitoria conviene recordar las condiciones (I.10) de la ecuación (I.9),

$$\begin{aligned}
 \theta(X,0) &= 0 \\
 \theta(1,\tau) &= 0 \\
 \theta(0,\tau) &= 1 + \lambda \cos \beta\tau
 \end{aligned}$$

Después de haber quedado definida la temperatura adimensional como la suma de una parte permanente y otra transitoria, la suma de estas funciones evaluadas en el tiempo y el punto correspondiente debe de cumplir con las condiciones anteriormente establecidas, de esta manera:

$$\begin{aligned}
 \theta(X,0) &= \theta_0(X) + \psi(X,0) = 0 \\
 \theta(1,0) &= \theta_0(1) + \psi(1,\tau) = 0 \\
 \theta(0,\tau) &= \theta_0(0) + \psi(0,\tau) = 1 + \lambda \cos \beta\tau
 \end{aligned}$$

de esta manera igualando la parte permanente a sus correspondientes términos en el valor de la condición de frontera, esto es:

$$\theta(0) = 1 \Rightarrow \theta_0 = 1 + 0 \cdot c_{\theta} = 1 \quad (2.14)$$

$$\theta(1) = 0 \Rightarrow \theta_0 = 0 + 0 \cdot c_{\theta} = 0 \quad (2.15)$$

se desprende, automáticamente las condiciones de  $\theta_0$ .

De estas expresiones pueden deducirse, también, las correspondientes condiciones de frontera e iniciales de la ecuación de la parte transitoria:

$$X \quad , \quad \tau = 0 \quad \psi(X,0) = -\theta_0(X) \quad (II.7a)$$

$$X = 1 \quad , \quad \tau = \tau \quad \psi(1,\tau) = 0 \quad (II.7b)$$

$$X = 0 \quad , \quad \tau \quad \psi(0,\tau) = \lambda \cos \beta\tau \quad (II.7c)$$

enseguida, se propuso a la parte transitoria como la siguiente expansión:

$$\psi = \psi_0 + c\omega \psi_1 + O(c\omega^2) \quad (1)$$

Considerando suficiente incluir solo los términos de primer orden se omiten más términos de la expansión de perturbación, razón por la cual los coeficientes de esta expansión en sus términos mayores a uno son nulos.

Al sustituir (1) en la ecuación (II.6) da origen a su vez a dos sistemas de ecuaciones diferenciales, uno para los términos perturbativos de orden o magnitud cero y otro para los términos perturbativos de orden unitario, a los cuales se les ha considerado además un término más por efecto de la alta frecuencia de oscilación de la temperatura en la base de la aleta ( $c\omega$ ), de esta manera:

$$\psi_0 = \psi_{00} + c\omega \psi_{01} + O(c\omega^2) \quad (2)$$

$$\psi_1 = \psi_{11} + c\omega \psi_{12} + O(c\omega^2) \quad (3)$$

puesto que solo nos interesan los términos de primer orden, al sustituir (3) en (1) podemos entonces decir que

$$\psi_1 = \psi_{11} + O(c\omega) \quad (4)$$

Para determinar el valor de cada uno de los términos que componen a la parte transitoria en las condiciones iniciales o de frontera evaluamos como lo hicimos para determinar las condiciones (II.7)

$$\psi(X,0) = \psi_0(X,0) + c_0 \psi_1(X,0) = -\theta_0(X) = -(\theta_{00} + c_0 \theta_{01})$$

$$\psi(1,\tau) = \psi_0(1,\tau) + c_0 \psi_1(1,\tau) = 0$$

$$\psi(0,\tau) = \psi_0(0,\tau) + c_0 \psi_1(0,\tau) = \lambda \cos \beta \tau$$

Se desprenden de aquí, por términos semejantes, las siguientes condiciones:

$$\psi_0(X,0) = -\theta_{00}$$

$$\psi_1(X,0) = -\theta_{01}$$

$$\psi_0(1,\tau) = 0$$

$$\psi_1(1,\tau) = 0$$

$$\psi_0(0,\tau) = \lambda \cos \beta \tau$$

$$\psi_1(0,\tau) = 0$$

APENDICE A  
SECCION 2.3

TRATAMIENTO DE LA PARTE PERMANENTE

Si consideramos

$$\theta_0 = \theta_{00}(X) + \epsilon_g \theta_{01}(X) \quad (2.16)$$

substituyendo y derivando en la ecuación diferencial (II.4):

$$\left[ 1 + \epsilon_g h(x) \right] \frac{d^2 \theta_{00}}{dX^2} + \left[ 1 + \epsilon_g h(x) \right] \epsilon_g \frac{d^2 \theta_{01}}{dX^2} +$$

$$\epsilon_g \frac{d h}{d X} \epsilon_g \frac{d \theta_{00}}{d X} + \frac{d h}{d X} \frac{d \theta_{00}}{d X} - N^2 \left( \theta_{00} + \epsilon_g \theta_{01} \right)^m = 0$$

despreciando de la misma forma aquellos términos de orden superior a uno :

$$\left[ 1 + \epsilon_g h(x) \right] \frac{d^2 \theta_{00}}{dX^2} + \epsilon_g \frac{d^2 \theta_{01}}{dX^2} + \frac{d h}{d X} \frac{d \theta_{00}}{d X}$$

$$- N^2 \theta_{00}^m \left( 1 + \epsilon_g \frac{\theta_{01}}{\theta_{00}} \right)^m = 0$$

desarrollando en serie de Taylor al polinomio :

$$\left( 1 + \epsilon_g \frac{\theta_{01}}{\theta_{00}} \right)^m = 1 + m \epsilon_g \frac{\theta_{01}}{\theta_{00}} + 0 \cdot \epsilon_g^2 = 1 + \epsilon_g \frac{\theta_{01}}{\theta_{00}}$$

reagrupando:

$$\frac{d^2 \theta_{00}}{dX^2} - N^2 \theta_{00}^m + \epsilon_g \left( h(x) \frac{d^2 \theta_{00}}{dX^2} + \frac{d^2 \theta_{01}}{dX^2} + \frac{d h}{d X} \frac{d \theta_{00}}{d X} - \right.$$

$$\left. - m N^2 \theta_{00}^{m-1} \theta_{01} \right) = 0$$

**APENDICE A**  
**SECCION 2.4**  
**DETERMINACION DE  $\theta_{00}$**

Si  $\chi = N X$  y  $\sigma = N^2 \tau$ , sustituyendo en la expresión (II.10)

$$N^2 \frac{\partial^2 \theta_{00}}{\partial \chi^2} - N^2 \theta_{00} = 0$$

dividiendo entre  $N^2$

$$\frac{\partial^2 \theta_{00}}{\partial \chi^2} - \theta_{00} = 0$$

reexpresando a esta misma función como una derivada respecto a  $\theta_{00}$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta_{00}} \left( \frac{d \theta_{00}}{d \chi} \right)^2 - \theta_{00} = 0 \quad (2.23)$$

Integrando la ecuación anterior resulta,

$$\frac{1}{2} \int \frac{\left( \frac{d \theta_{00}(\infty)}{d \chi} \right)^2}{\left( \frac{d \theta_{00}(\chi)}{d \chi} \right)^2} \frac{d}{d \theta_{00}} \left( \frac{d \theta_{00}(\chi)}{d \chi} \right)^2 d \theta_{00} = \int \frac{\theta_{00}(\chi - \infty)}{\theta_{00}(\chi)} d \theta_{00}$$

realizando la integración y evaluandole entre los límites  $[X, \infty]$  obtenemos,

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d \theta_{00}}{d \chi} \right)^2 = \frac{\theta_{00}^{m+1}}{m+1} + C_1$$

con condiciones (II.15). Evaluando para  $\chi \rightarrow \infty$  ( $\theta_{00} = 0$ ) encontramos que  $C_1 = 0$ , por lo tanto:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d \theta_{00}}{d \chi} \right)^2 = \frac{\theta_{00}^{m+1}}{m+1}$$

despejando a  $\theta_{00}$  tenemos la siguiente ecuación :

$$\frac{d \theta_{00}}{d x} = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \frac{\theta_{00}^{\frac{m+1}{2}}}{\theta_{00}^2}$$

separando nuevamente a las variables variables e integrando tenemos:

$$\frac{\frac{1-m}{2} \theta_{00}}{\frac{1-m}{2}} = \sqrt{\frac{2}{m+1}} x + C_2$$

evaluando la solución anterior para las condiciones:

$$x = 0 \qquad \theta_{00} = 1$$

obtenemos que :

$$C_2 = \frac{2}{1-m}$$

substituyendo :

$$\frac{\frac{1-m}{2} \theta_{00}}{\frac{1-m}{2}} = \sqrt{\frac{2}{m+1}} x + \frac{2}{1-m}$$

despejando :

$$\frac{\frac{1-m}{2} \theta_{00}}{\frac{1-m}{2}} = \frac{1-m}{2} \left( \sqrt{\frac{2}{m+1}} x + \frac{2}{1-m} \right)$$

finalmente :

$$\theta_{00} = \left( 1 + \frac{1-m}{2} \sqrt{\frac{2}{m+1}} x \right)^{\frac{2}{1-m}} \quad (2.24)$$

**APENDICE A SECCION 2.5**  
**SOLUCION DE LA PARTE PERMANENTE CORRESPONDIENTE A**  
**LOS TERMINOS DE PRIMER ORDEN  $\epsilon_1^1$**

De la ecuación diferencial (11.8), al separar de la los términos de primer orden del polinomio de perturbación obtenemos :

$$\frac{d^2 \theta_{01}}{dX^2} - m N^2 \theta_{00} \theta_{01} = - \frac{d}{dX} \left( h \frac{d \theta_{00}}{dX} \right) \quad (1)$$

con condiciones de frontera:

$$X = 0 \qquad \theta_{01} = 0 \qquad (2a)$$

$$X \rightarrow \infty \qquad \theta_{01} = 0 \qquad (2b)$$

desarrollando el lado derecho de la ec.(1):

$$- \frac{d}{dX} \left( h \frac{d \theta_{00}}{dX} \right) = - \left( \frac{d h}{dX} \frac{d \theta_{00}}{dX} + h \frac{d^2 \theta_{00}}{dX^2} \right)$$

Al desarrollar cada uno de estos términos obtenemos:

$$\frac{d h}{d X} = \frac{d}{d X} \left( \exp \left( \frac{-X}{1-X} \right) \right) = \left( \exp \left( \frac{-X}{1-X} \right) \right) \left( \frac{d}{d X} \left( \frac{-X}{1-X} \right) \right)$$

$$\frac{d}{d X} \left( \frac{-X}{1-X} \right) = - \left( \frac{d}{d X} \left( \frac{X}{1-X} \right) \right) = \frac{-1}{(1-X)^2}$$

$$\frac{d h}{d X} = \exp \left( \frac{-X}{1-X} \right) \left( \frac{-1}{(1-X)^2} \right) \quad (3)$$

enseguida, calculamos las derivadas de  $\theta_{00}$ :

$$\frac{d \theta_{00}}{d X} = \frac{d}{d X} \left( 1 + \frac{1-m}{2} \sqrt{\frac{2}{m+1}} N X \right)^{\frac{2}{1-m}}$$

$$\frac{d \theta_{00}}{d X} = \left( 1 + \frac{1-m}{2} \sqrt{\frac{2}{m+1}} N X \right)^{\frac{1+m}{1-m}} \cdot \sqrt{\frac{2}{m+1}} N \quad (4)$$

Por otra parte,

$$\frac{d^2 \theta_{00}}{d X^2} = \frac{d}{d X} \frac{d \theta_{00}}{d X}$$

substituyendo el valor de  $\frac{d \theta_{00}}{d X}$  en la expresión anterior:

$$\frac{d^2}{d X^2} \left( 1 + \frac{1-m}{2} \sqrt{\frac{2}{m+1}} N X \right)^{\frac{2}{1-m}} =$$

$$\frac{d}{d X} \left( \left( 1 + \frac{1-m}{2} \sqrt{\frac{2}{m+1}} N X \right)^{\frac{1+m}{1-m}} \sqrt{\frac{2}{m+1}} N \right)$$

$$\frac{d^2 \theta_{00}}{d X^2} = N^2 \left( 1 + \frac{1-m}{2} \sqrt{\frac{2}{m+1}} N X \right)^{\frac{2m}{1-m}} \quad (5)$$

substituyendo los resultados anteriores en la ecuación (1), obtenemos:

$$\frac{d^2 \theta_{01}}{dX^2} - m N^2 \left[ 1 + \frac{1-m}{2} \sqrt{\frac{2}{m+1}} N X \right]^2 \frac{m-1}{m+1} \theta_{01} =$$

$$- \left( \exp \left( \frac{-X}{1-X} \right) \cdot \left( \frac{-1}{(1-X)^2} \right) \right) \cdot \left[ 1 + \frac{1-m}{2} \sqrt{\frac{2}{m+1}} N X \right]^{\frac{1+m}{1-m}}$$

$$\sqrt{\frac{2}{m+1}} N + \exp \left( \frac{-X}{1-X} \right) N^2 \left[ 1 + \frac{1-m}{2} \sqrt{\frac{2}{m+1}} N X \right]^{\frac{2m}{1-m}}$$

finalmente, tomando como factor común a  $\exp \left[ -X/(1-X) \right]$ :

$$\frac{d^2 \theta_{01}}{dX^2} - m N^2 \left[ 1 + \frac{1-m}{2} \sqrt{\frac{2}{m+1}} N X \right]^2 \frac{m-1}{m+1} \theta_{01} =$$

$$N \cdot \exp \left( \frac{-X}{1-X} \right) \left[ \left( \frac{1}{(1-X)^2} \right) \cdot \left[ 1 + \frac{1-m}{2} \sqrt{\frac{2}{m+1}} N X \right]^{\frac{1+m}{1-m}} \right]$$

$$\sqrt{\frac{2}{m+1}} - N \left[ 1 + \frac{1-m}{2} \sqrt{\frac{2}{m+1}} N X \right]^{\frac{2m}{1-m}} \quad (6)$$

condiciones de frontera (2).

APENDICE B SECCION 1.1

PARTE TRANSITORIA

Para la solución de la ecuación diferencial correspondiente a la parte transitoria (II.7) con sus condiciones de frontera (II.8), mostradas a continuación:

$$\left[ 1 + c_v h(x) \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + c_v \frac{\partial h}{\partial X} \frac{\partial \psi}{\partial X} - N^2 \theta_0^m \left[ \left( 1 + \frac{\psi}{\theta_0} \right)^m - 1 \right]$$

$$= \frac{\partial \psi}{\partial \tau}$$

$$\psi(0, \tau) = \lambda \cos \beta \tau$$

$$\psi(X, 0) = -\theta_0(X)$$

$$\psi(1, \tau) = 0$$

se propuso a la parte transitoria como la siguiente expansión:

$$\psi = \psi_0 + c_v \psi_1 + O(c_v^2) \quad (1)$$

De esta manera, al substituir y realizar un cambio de variables (donde  $\xi = X(\beta)^{1/2}$  y  $\sigma = \beta \tau$ ), se obtuvo la siguiente ecuación diferencial para el orden  $c_v^0$ :

$$\frac{d \psi_0}{d \xi^2} - c_v \theta_{00}^m \left[ \left( 1 + \frac{\psi_0}{\theta_{00}} \right)^m - 1 \right] = \frac{d \psi_0}{d \sigma} \quad (2)$$

con condiciones:

$$\xi = 0 \quad , \quad \psi_0(0, \sigma) = \lambda \cos \sigma \quad (3a)$$

$$\xi \rightarrow \infty \quad , \quad \psi_0(\infty, \sigma) = 0 \quad (3b)$$

$$\sigma = 0 \quad , \quad \psi_0(\xi, 0) = -\theta_{00}(\xi) \quad (3c)$$

Para los términos de primer orden se tiene:

$$\frac{d^2 \psi_1}{d \xi^2} + h(\xi) \frac{d^2 \psi_0}{d \xi^2} = \frac{d \psi_1}{d \xi} \quad (4)$$

$$\psi_1(0, \sigma) = 0 \quad (5a)$$

$$\psi_1(\infty, \sigma) = 0 \quad (5b)$$

$$\psi_1(\xi, 0) = -\theta_{01} \quad (5c)$$

Para determinar el valor de cada uno de los términos que componen a la parte transitoria en las condiciones iniciales o de frontera evaluamos como lo hicimos para determinar las condiciones (II.7)

$$\psi(X, 0) = \psi_0(X, 0) + c_g \psi_1(X, 0) = -\theta_0(X) = -(\theta_{00} + c_g \theta_{01})$$

$$\psi(1, \tau) = \psi_0(1, \tau) + c_g \psi_1(1, \tau) = 0$$

$$\psi(0, \tau) = \psi_0(0, \tau) + c_g \psi_1(0, \tau) = \lambda \cos \beta \tau$$

Se desprenden de aquí, por términos semejantes, las siguientes condiciones:

$$(6.a) \quad \psi_0(X, 0) = -\theta_{00} \quad \psi_1(X, 0) = -\theta_{01} \quad (7.a)$$

$$(6.b) \quad \psi_0(1, \tau) = 0 \quad \psi_1(1, \tau) = 0 \quad (7.b)$$

$$(6.c) \quad \psi_0(0, \tau) = \lambda \cos \beta \tau \quad \psi_1(0, \tau) = 0 \quad (7.c)$$

APENDICE B SECCION 1.2  
 DETERMINACION DE  $\psi_1$

Introduciendo el valor de  $\psi_{00}$  en la ecuación (I.26):

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2} + \exp \left[ \frac{-\sqrt{c_w} \xi'}{N - \sqrt{c_w} \xi'} \right] \cdot \left[ \frac{2 \xi' \exp \left( \frac{\xi'^2}{2 \sigma'} \right)}{\sqrt{2\pi} \sigma'^{3/2}} - \lambda \operatorname{sen} \left( \sigma' - \frac{\xi'}{\sqrt{2}} \right) \exp \left( -\frac{\xi'}{\sqrt{2}} \right) \right] \quad (1)$$

con condiciones de frontera (7). Del cambio de variables setiene:

$$\left. \frac{d \psi_1}{d X} \right|_{X=0} = \left. \frac{d \psi_1}{d \xi} \frac{d \xi}{d X} \right|_{\xi=0} = \left. \frac{d \psi_1}{d \xi} \sqrt{W} \right|_{\xi=0}$$

Aplicando la técnica de GREEN tenemos :

$$\psi_1 = - \int_0^1 G(\xi, \sigma / \xi', \sigma') \Big|_{\sigma=0} \theta_{01}(\xi') d \xi' + \int_{\sigma=0}^{\sigma} \int_0^1 G(\xi, \sigma / \xi', \sigma') \exp \left[ \frac{-\sqrt{c_w} \xi'}{N - \sqrt{c_w} \xi'} \right] \cdot \left[ \frac{2 \xi' \exp \left( \frac{\xi'^2}{2 \sigma'} \right)}{\sqrt{2\pi} \sigma'^{3/2}} - \lambda \operatorname{sen} \left( \sigma' - \frac{\xi'}{\sqrt{2}} \right) \exp \left( -\frac{\xi'}{\sqrt{2}} \right) \right] \partial \xi' \partial \sigma'$$

Substituyendo los correspondientes valores a cada una de las partes de acuerdo a la función de GREEN :

$$\psi_1 = - \int_0^1 \left( \frac{\exp \left[ -\frac{(\xi - \xi')^2}{4\sigma} \right] - \exp \left[ -\frac{(\xi + \xi')^2}{4\sigma} \right]}{(4\pi\sigma)^{1/2}} \right) \theta_0(\xi') \delta\xi'$$

$$+ \int_{\sigma=0}^{\sigma} \int_0^1 \left( \frac{\exp \left[ -\frac{(\xi - \xi')^2}{4\sigma} \right] - \exp \left[ -\frac{(\xi + \xi')^2}{4\sigma} \right]}{(4\pi(\sigma - \sigma'))^{1/2}} \right) \cdot$$

$$\cdot \exp \left[ \frac{-\sqrt{c_w} \xi'}{N - \sqrt{c_w} \xi'} \right] \cdot$$

$$\left[ \frac{2 \xi' \exp \left( \xi'^2 / 2\sigma \right)}{\sqrt{2\pi} \sigma^{3/2}} - \lambda \operatorname{sen} \left( \sigma' - \frac{\xi'}{\sqrt{2}} \right) \exp \left( -\frac{\xi'}{\sqrt{2}} \right) \right] \theta \xi' \delta\sigma'$$

Al considerar que para este análisis lo importante es evaluar la rapidez de flujo de calor en la base, se procedió a calcular la derivada de la temperatura respecto a X o bien, para facilitar el manejo de las ecuaciones, la derivada de la temperatura respecto a  $\xi$ , tomando en cuenta que:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial X} = \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial X} = \sqrt{\beta} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi}$$

por tanto :

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial X} = \left( \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\exp\left(-\frac{(\xi-\xi')^2}{4\sigma}\right) - \exp\left(-\frac{(\xi+\xi')^2}{4\sigma}\right)}{(4\pi\sigma)^{1/2}} \right) \delta \xi' \right)$$

$$+ \left( \int_{\sigma=0}^{\sigma} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\exp\left(-\frac{(\xi-\xi')^2}{4\sigma}\right) - \exp\left(-\frac{(\xi+\xi')^2}{4\sigma}\right)}{(4\pi(\sigma-\sigma'))^{1/2}} \right) \delta \xi' \delta \sigma' \right)$$

$$= \exp \left[ \frac{-\sqrt{C_N} \xi'}{N - \sqrt{C_N} \xi'} \right]$$

$$\left[ \frac{2 \xi' \exp(\xi'^2 / 2\sigma')}{\sqrt{2\pi} \sigma'^{3/2}} - \lambda \operatorname{sen} \left( \sigma' - \frac{\xi'}{\sqrt{2}} \right) \exp \left( -\frac{\xi'}{\sqrt{2}} \right) \right] \delta \xi' \delta \sigma' \sqrt{\beta}$$

derivando en primer lugar:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\exp \left( -\frac{(\xi - \xi')^2}{4\sigma} \right) - \exp \left( -\frac{(\xi + \xi')^2}{4\sigma} \right)}{(4\pi\sigma)^{1/2}} \right)$$

que es igual a:

$$\frac{1}{(4\pi\sigma)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \exp \left( -\frac{(\xi - \xi')^2}{4\sigma} \right) - \exp \left( -\frac{(\xi + \xi')^2}{4\sigma} \right) \right)$$

de lo que se obtiene:

$$\frac{1}{(4\pi\sigma)^{1/2}} \left( \exp \left( -\frac{(\xi - \xi')^2}{4\sigma} \right) \left( \frac{(\xi - \xi')}{2\sigma} \right) - \exp \left( -\frac{(\xi + \xi')^2}{4\sigma} \right) \left( \frac{-(\xi + \xi')}{2\sigma} \right) \right)$$

derivando en segundo lugar a:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\exp \left( -\frac{(\xi - \xi')^2}{4\sigma} \right) - \exp \left( -\frac{(\xi + \xi')^2}{4\sigma} \right)}{\left( 4\pi(\sigma - \sigma') \right)^{1/2}} \right) \cdot$$

$$\cdot \exp \left[ \frac{-\sqrt{c_w} \xi'}{N - \sqrt{c_w} \xi'} \right] \cdot$$

$$\left[ \frac{2 \xi' \exp \left( -\xi'^2 / 2\sigma' \right)}{\sqrt{2\pi} \sigma'^{3/2}} - \lambda \operatorname{sen} \left( \sigma' - \frac{\xi'}{\sqrt{2}} \right) \exp \left( -\frac{\xi'}{\sqrt{2}} \right) \right]$$

en primer lugar :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\exp \left( -\frac{(\xi - \xi')^2}{4\sigma} \right) - \exp \left( -\frac{(\xi + \xi')^2}{4\sigma} \right)}{\left( 4\pi(\sigma - \sigma') \right)^{1/2}} \right) =$$

$$\frac{1}{\left( 4\pi(\sigma - \sigma') \right)^{1/2}} \left[ \exp \left( -\frac{(\xi - \xi')^2}{4(\sigma - \sigma')} \right) \left( \frac{(\xi' - \xi)}{2(\sigma - \sigma')} \right) - \exp \left( -\frac{(\xi + \xi')^2}{4(\sigma - \sigma')} \right) \right]$$

$$\left( \frac{-(\xi + \xi')}{2(\sigma - \sigma')} \right)$$

por último, ya que la derivada del tercer factor es nula, tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{2 \xi \exp \left( \xi^2 / 2 \sigma^2 \right)}{\sqrt{2\pi} \sigma^{3/2}} - \lambda \operatorname{sen} \left( \sigma^2 - \frac{\xi^2}{\sqrt{2}} \right) \exp \left( -\frac{\xi^2}{\sqrt{2}} \right) \right] =$$

$$\frac{2 \xi \exp \left( \xi^2 / 2 \sigma^2 \right)}{\sqrt{2\pi} \sigma^{3/2}} \left( \frac{\xi}{\sigma^2} \right)$$

$$+ \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \left( \sigma^2 - \frac{\xi^2}{\sqrt{2}} \right) \exp \left( -\frac{\xi^2}{\sqrt{2}} \right)$$

reuniendo ambas derivadas en la expresión original:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \lambda} = - \int_0^1 \left[ \frac{1}{(4\pi\sigma)^{1/2}} \exp\left(-\frac{(\xi-\xi')^2}{4\sigma}\right) \left(\frac{\xi-\xi'}{2\sigma}\right) + \right.$$

$$\left. \exp\left(-\frac{(\xi+\xi')^2}{4\sigma}\right) \left(\frac{\xi+\xi'}{2\sigma}\right) \theta_{01}(\xi') \delta\xi' \right] +$$

$$\int_{\sigma=0}^{\sigma} \int_0^1 \exp\left[\frac{-\sqrt{C_M} \xi'}{N - \sqrt{C_M} \xi'}\right] \frac{1}{(4\pi(\sigma-\sigma'))^{1/2}} \exp\left(-\frac{(\xi-\xi')^2}{4(\sigma-\sigma')}\right) \cdot$$

$$\left[ \frac{(\xi-\xi')}{2(\sigma-\sigma')} + \exp\left(-\frac{(\xi+\xi')^2}{4(\sigma-\sigma')}\right) \left(\frac{\xi+\xi'}{2(\sigma-\sigma')}\right) \right] \left[ \frac{2\xi' \exp(\xi'^2/2\sigma')}{\sqrt{2\pi} \sigma'^{3/2}} - \right.$$

$$\left. \lambda \operatorname{sen}\left(\sigma' - \frac{\xi'}{\sqrt{2}}\right) \exp\left(-\frac{\xi'^2}{\sqrt{2}}\right) \right] +$$

$$\left[ \frac{\exp\left(-\frac{(\xi-\xi')^2}{4\sigma}\right) - \exp\left(-\frac{(\xi+\xi')^2}{4\sigma}\right)}{(4\pi(\sigma-\sigma'))^{1/2}} \right] \cdot$$

$$\left[ \frac{2\xi' \exp(\xi'^2/2\sigma')}{\sqrt{2\pi} \sigma'^{3/2}} \left(\frac{\xi}{\sigma'}\right) + \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}\left(\sigma' - \frac{\xi'}{\sqrt{2}}\right) \right]$$

$$\exp\left(-\frac{\xi'}{\sqrt{2}}\right) \left| \delta\xi' \delta\sigma' \right| \sqrt{\beta}$$

evaluando la expresión anterior para  $\xi = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \Big|_{\xi=0} &= \left[ -\frac{1}{(4\pi\sigma)^{1/2}} \int_0^1 \xi' \exp\left(\frac{\xi'^2}{4\sigma}\right) \theta_{01}(\xi') \delta\xi' + \right. \\ &\left. \frac{1}{(4\pi)^{1/2}} \int_{\sigma=0}^{\sigma} \int_0^1 \frac{\xi'}{(\sigma-\sigma')^{3/2}} \exp\left[\frac{-\xi'^2}{4(\sigma-\sigma')}\right] \left( \frac{-\sqrt{c_w} \xi'}{N-\sqrt{c_w}} \xi' \right) \right] \cdot \\ &\frac{2 \xi'}{(2\pi)^{1/2}} \frac{\exp\left(\frac{\xi'^2}{4\sigma}\right)}{(\sigma')^{3/2}} - \lambda \operatorname{sen}\left(\sigma' - \frac{\xi'}{\sqrt{2}}\right) \exp\left(-\frac{\xi'}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

$$\left| \delta\xi' \delta\sigma' \right| \sqrt{\beta}$$

al substituir las igualdades, obtenemos:

$$\xi = \sqrt{\beta} \quad X \quad y \quad \sigma = \beta \tau$$

$$\left. \frac{\partial \psi_1}{\partial X} \right|_{x=0} = -\sqrt{\beta} \left[ \frac{1}{4 \pi \beta^{3/2} \tau} \int_0^1 \sqrt{\beta} X' \exp \left[ -\frac{X'^2}{4 \tau} \right] \right]$$

$$\theta_0 1 X' \sqrt{\beta} dX' = \frac{1}{(4 \pi)^{1/2}} \int_{\sigma=0}^{\sigma} \int_0^1 \frac{\sqrt{\beta} X'}{\beta (\tau - \tau')^{3/2}}$$

$$\exp \left[ \left( \frac{-X'^2}{4(\tau - \tau')} \right) - \left( \frac{X}{1 - X} \right) \right] \cdot \frac{\sqrt{\beta} 2X'}{(2 \pi)^{1/2}} \frac{\exp \left( \frac{X'^2}{2 t'} \right)}{\beta^{3/2} (t')^{3/2}}$$

$$\lambda \operatorname{sen} \left( \beta \tau' - \sqrt{\beta} \frac{X'}{\sqrt{2}} \right) \exp \left( -\sqrt{\beta} \frac{X'}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{\beta} \beta dX' d\tau'$$

$$\left. \frac{\partial \psi_1}{\partial X} \right|_{x=0} = \frac{1}{4 \pi \tau^{3/2}} \int_0^1 X' \exp \left[ -\frac{X'^2}{4 \tau} \right] \theta_0 1 X' dX' +$$

$$\frac{\beta}{(4 \pi)^{1/2}} \int_{\sigma=0}^{\sigma} \int_0^1 \frac{X'}{(\tau - \tau')^{3/2}} \exp \left[ \left( \frac{-X'^2}{4(\tau - \tau')} \right) - \left( \frac{X}{1 - X} \right) \right] \cdot$$

$$\frac{2X'}{(2\pi)^{1/2}} \frac{\exp\left(-\frac{x'^2}{2t'}\right)}{\beta (t')^{3/2}} - \lambda \operatorname{sen}\left(\beta t' - \sqrt{\beta} \frac{x'}{\sqrt{2}}\right) \exp\left(-\sqrt{\beta} \frac{x'}{\sqrt{2}}\right)$$

$dX' dt'$

con condiciones de frontera e iniciales (7).

APENDICE C SECCION 1.1

FLUJO DE CALOR DE LA PARTE TRANSITORIA DE ORDEN  $\epsilon_0^0$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d \psi_0}{d X} \right|_{x=0} &= \frac{d \psi_0}{d \xi} \frac{d \xi}{d X} = \sqrt{\beta} \left. \frac{d \psi_0}{d \xi} \right|_{\xi=0}^{1/2} = \\ &= -\lambda \operatorname{Re} \left[ \exp(1 \sigma) \left( \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right) \right] \\ &= -\lambda \operatorname{Re} \left[ \left( \cos \sigma + i \operatorname{sen} \sigma \right) \left( \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right) \right] \\ &= -\lambda \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma \cos \sigma + \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma \cos \sigma + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma \operatorname{sen} \sigma - \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma \operatorname{sen} \sigma \right] \\ &= -\frac{\lambda}{\sqrt{2}} \left( \cos \sigma - \operatorname{sen} \sigma \right) - \sqrt{\frac{2 \beta}{\pi \tau}} \end{aligned}$$

de la igualdad  $\sigma = \beta \tau$

$$\left. \frac{d \psi_0}{d X} \right|_{x=0} = -\frac{\lambda}{\sqrt{2}} \left( \cos \beta \tau - \operatorname{sen} \beta \tau \right) \sqrt{\beta} - \sqrt{\frac{2}{\pi \tau}}$$

APENDICE C SECCION 1.2  
 RAPIDEZ DE TRANSFERENCIA DE CALOR DE LOS TERMINOS  $c_w^0$

Al reescalar el problema, considerando las igualdades  $\sigma = \beta x$  y  $\xi = \beta^{1/2} X$ , se obtiene la siguiente expresión para el flujo de calor en la base de la aleta por efecto de la alta frecuencia:

$$\left. \frac{d \psi_1}{d X} \right|_{X=0} = \frac{d \psi_1}{d \xi} \frac{d \xi}{d X} \left|_{\xi=0} = \frac{d \psi_1}{d \xi} \sqrt{W} \left|_{\xi=0}$$

Aplicando la técnica de GREEN tenemos :

$$\psi_1 = - \int_0^{\xi} G(\xi, \sigma / \xi', \sigma') \Big|_{\sigma=0} \theta_{01}(\xi') d \xi' +$$

$$\int_{\sigma=0}^{\sigma} \int_0^{\xi} G(\xi, \sigma / \xi', \sigma') \exp \left[ \begin{array}{l} -\sqrt{c_w} \xi' \\ N - \sqrt{c_w} \xi' \end{array} \right] d \xi' d \sigma'$$

$$\left[ \frac{2 \xi' \exp(\xi'^2 / 2 \sigma')}{\sqrt{2\pi} \sigma'^{3/2}} - \lambda \operatorname{sen} \left( \sigma' - \frac{\xi'}{\sqrt{2}} \right) \exp \left( -\frac{\xi'}{\sqrt{2}} \right) \right] \delta \xi' \delta \sigma'$$

Substituyendo los correspondientes valores a cada una de las partes de acuerdo a la función de GREEN :

$$\psi_1 = - \int_{-\infty}^{\xi} \left( \frac{\exp\left(-\frac{(\xi-\xi')^2}{4\sigma}\right) - \exp\left(-\frac{(\xi+\xi')^2}{4\sigma}\right)}{(4\pi\sigma)^{1/2}} \right) \theta_{01}(\xi') \partial\xi'$$

$$+ \int_{\sigma=0}^{\sigma} \int_0 \left( \frac{\exp\left(-\frac{(\xi-\xi')^2}{4\sigma}\right) - \exp\left(-\frac{(\xi+\xi')^2}{4\sigma}\right)}{(4\pi(\sigma-\sigma'))^{1/2}} \right) \cdot$$

$$\cdot \exp\left[ \frac{-\sqrt{\epsilon_w} \xi'}{N - \sqrt{\epsilon_w} \xi'} \right] \cdot$$

$$\left[ \frac{2 \xi' \exp\left(\xi'^2 / 2 \sigma'\right)}{\sqrt{2\pi} \sigma'^{3/2}} - \lambda \operatorname{sen}\left(\sigma' - \frac{\xi'}{\sqrt{2}}\right) \exp\left(-\frac{\xi'^2}{\sqrt{2}}\right) \right] \partial\xi' \partial\sigma'$$

Tomando en cuenta que :  $\frac{\partial \psi_1}{\partial X} = \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial X} = \sqrt{\beta} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi}$

por tanto :

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\exp\left(-\frac{(\xi-\xi')^2}{4\sigma}\right) - \exp\left(-\frac{(\xi+\xi')^2}{4\sigma}\right)}{(4\pi\sigma)^{1/2}} \right) \theta_{01}(\xi) \right] \partial \xi'$$

$$\int_{\sigma=0}^{\sigma} \int_0^{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\exp\left(-\frac{(\xi-\xi')^2}{4\sigma}\right) - \exp\left(-\frac{(\xi+\xi')^2}{4\sigma}\right)}{(4\pi(\sigma-\sigma'))^{1/2}} \right) \cdot$$

$$\cdot \exp \left[ \frac{-\sqrt{c_w} \xi'}{N - \sqrt{c_w} \xi'} \right] \cdot$$

$$\left[ \frac{2 \xi' \exp(\xi'^2 / 2\sigma')}{\sqrt{2\pi} \sigma'^{3/2}} - \lambda \operatorname{sen} \left( \sigma' - \frac{\xi'}{\sqrt{2}} \right) \exp \left( -\frac{\xi'}{\sqrt{2}} \right) \right] \partial \xi' \partial \sigma' \sqrt{\beta}$$

derivando en primer lugar;

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\exp\left(-\frac{(\xi-\xi')^2}{4\sigma}\right) - \exp\left(-\frac{(\xi+\xi')^2}{4\sigma}\right)}{(4\pi\sigma)^{1/2}} \right)$$

$$\frac{1}{(4 \pi \sigma)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \exp \left[ -\frac{(\xi - \xi')^2}{4 \sigma} \right] - \exp \left[ -\frac{(\xi + \xi')^2}{4 \sigma} \right] \right)$$

de lo que se obtiene:

$$\frac{1}{(4 \pi \sigma)^{1/2}} \left( \exp \left[ -\frac{(\xi - \xi')^2}{4 \sigma} \right] \left( \frac{\xi' - \xi}{2 \sigma} \right) - \exp \left[ -\frac{(\xi + \xi')^2}{4 \sigma} \right] \left( \frac{-(\xi + \xi')}{2 \sigma} \right) \right)$$

derivando en segundo lugar a:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\exp \left[ -\frac{(\xi - \xi')^2}{4 \sigma} \right] - \exp \left[ -\frac{(\xi + \xi')^2}{4 \sigma} \right]}{(4 \pi (\sigma - \sigma'))^{1/2}} \right) \cdot$$

$$\cdot \exp \left[ \frac{-\sqrt{C_W} \xi'}{N - \sqrt{C_W} \xi'} \right] \cdot$$

$$\left[ \frac{2 \xi' \exp(\xi'^2 / 2 \sigma')}{\sqrt{2\pi} \sigma'^{3/2}} - \lambda \operatorname{sen} \left( \sigma' - \frac{\xi'}{\sqrt{2}} \right) \exp \left( -\frac{\xi'}{\sqrt{2}} \right) \right]$$

en primer lugar :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\exp \left( -\frac{(\xi - \xi')^2}{4 \sigma'} \right) - \exp \left( -\frac{(\xi + \xi')^2}{4 \sigma'} \right)}{(4 \pi (\sigma - \sigma'))^{1/2}} \right) =$$

$$\frac{1}{(4\pi(\sigma - \sigma'))^{1/2}} \left[ \exp \left( -\frac{(\xi - \xi')^2}{4(\sigma - \sigma')} \right) \left( \frac{(\xi' - \xi)}{2(\sigma - \sigma')} \right) - \exp \left( -\frac{(\xi + \xi')^2}{4(\sigma - \sigma')} \right) \right]$$

$$\left( \frac{-(\xi + \xi')}{2(\sigma - \sigma')} \right)$$

por último, ya que la derivada del tercer factor es nula, tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{2 \xi' \exp(\xi'^2 / 2 \sigma')}{\sqrt{2\pi} \sigma'^{3/2}} - \lambda \operatorname{sen} \left( \sigma' - \frac{\xi'}{\sqrt{2}} \right) \exp \left( -\frac{\xi'}{\sqrt{2}} \right) \right] =$$

$$\frac{2 \xi' \exp(\xi'^2 / 2 \sigma')}{\sqrt{2\pi} \sigma'^{3/2}} \left( \frac{\xi}{\sigma'} \right) + \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \left( \sigma' - \frac{\xi'}{\sqrt{2}} \right) \exp \left( - \frac{\xi'}{\sqrt{2}} \right)$$

reuniendo ambas derivadas en la expresión original:

$$\frac{\partial \psi_{1m}}{\partial \chi} = \int_0^{\xi} \left[ \frac{1}{(4\pi\sigma')^{1/2}} \left( \exp \left( - \frac{(\xi - \xi')^2}{4\sigma'} \right) \left( \frac{(\xi' - \xi)}{2\sigma'} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. \exp \left( - \frac{(\xi + \xi')^2}{4\sigma'} \right) \left( \frac{(\xi + \xi')}{2\sigma'} \right) \theta_{01}(\xi) \right] \partial \xi' +$$

$$\int_{\sigma=0}^{\sigma} \int_0^1 \exp \left[ \frac{-\sqrt{C_W} \xi'}{N - \sqrt{C_W} \xi'} \right] \frac{1}{(4\pi(\sigma - \sigma'))^{1/2}} \left( \exp \left( - \frac{(\xi - \xi')^2}{4(\sigma - \sigma')} \right) \cdot \right.$$

$$\left. \left( \frac{(\xi' - \xi)}{2(\sigma - \sigma')} \right) + \exp \left( - \frac{(\xi + \xi')^2}{4(\sigma - \sigma')} \right) \left( \frac{(\xi + \xi')}{2(\sigma - \sigma')} \right) \right] \left[ \frac{2 \xi' \exp(\xi'^2 / 2 \sigma')}{\sqrt{2\pi} \sigma'^{3/2}} - \right.$$

$$\left. \lambda \operatorname{sen} \left( \sigma' - \frac{\xi'}{\sqrt{2}} \right) \exp \left( - \frac{\xi'}{\sqrt{2}} \right) \right] +$$

$$\left( \frac{\exp \left( - \frac{(\xi - \xi')^2}{4\sigma} \right) - \exp \left( - \frac{(\xi + \xi')^2}{4\sigma} \right)}{(4\pi(\sigma - \sigma'))^{1/2}} \right) \cdot$$

$$\left( \frac{2\xi' \exp(\xi'^2 / 2\sigma')}{\sqrt{2\pi} \sigma'^{3/2}} \left( \frac{\xi'}{\sigma'} \right) + \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \left( \sigma' - \frac{\xi'}{\sqrt{2}} \right) \right. \\ \left. \exp \left( -\frac{\xi'}{\sqrt{2}} \right) \right) \partial \xi' \partial \sigma' \sqrt{\beta}$$

evaluando la expresión anterior para  $\xi = 0$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \left[ -\frac{1}{(4\pi\sigma')^{1/2}} \int_0^1 \xi' \exp\left(\frac{\xi'^2}{4\sigma'}\right) \operatorname{sen}(\xi') \partial \xi' + \right. \\ \left. \frac{1}{(4\pi)^{1/2}} \int_{\sigma=0}^{\sigma} \int_0^1 \frac{\xi'}{(\sigma - \sigma')^{3/2}} \exp\left[\frac{-\xi'^2}{4(\sigma - \sigma')}\right] - \left( \frac{-\sqrt{c\omega} \xi'}{N - \sqrt{c\omega} \xi'} \right) \right] \cdot \\ \left. \frac{2\xi'}{(2\pi)^{1/2}} \frac{\exp\left(\frac{\xi'^2}{4\sigma'}\right)}{(\sigma')^{3/2}} - \lambda \operatorname{sen} \left( \sigma' - \frac{\xi'}{\sqrt{2}} \right) \exp \left( -\frac{\xi'}{\sqrt{2}} \right) \right) \\ \partial \xi' \partial \sigma' \sqrt{\beta}$$

al substituir las igualdades, obtenemos:

$$\xi = \sqrt{\beta} X \quad y \quad \sigma = \beta \tau$$

$$\left. \frac{\partial \psi_1}{\partial X} \right|_{X=0} = -\sqrt{\beta} \left( \frac{1}{4 \pi \beta^{3/2} \tau^{3/2}} \int_0^1 \sqrt{\beta} X' \exp \left[ -\frac{X'^2}{4 \tau} \right] \right)$$

$$\theta_01 X' \sqrt{\beta} dX' = \frac{1}{(4 \pi)^{1/2}} \int_{\sigma=0}^{\sigma} \int_0^1 \frac{\sqrt{\beta} X'}{\beta (\tau - \tau')^{3/2}}$$

$$\exp \left[ \left( \frac{-X'^2}{4(\tau - \tau')} \right) - \left( \frac{X}{1 - X} \right) \right] = \frac{\sqrt{\beta} 2X'}{(2 \pi)^{1/2}} \frac{\exp \left( \frac{X'^2}{2 t'} \right)}{\beta (t')^{3/2}}$$

$$\lambda \operatorname{sen} \left( \beta \tau' - \sqrt{\beta} \frac{X'}{\sqrt{2}} \right) \exp \left( -\sqrt{\beta} \frac{X'}{\sqrt{2}} \right) \left. \right) \sqrt{\beta} \beta dX' dt'$$

$$\left. \frac{\partial \psi_1}{\partial X} \right|_{X=0} = \frac{1}{4 \pi \tau^{3/2}} \int_0^1 X' \exp \left[ -\frac{X'^2}{4 \tau} \right] \theta_01 X' dX' +$$

$$\frac{\beta}{(4\pi)^{1/2}} \int_{\sigma=0}^{\sigma} \int_0^1 \frac{X'}{(\tau - \tau')^{3/2}} \cdot \exp \left[ \left( \frac{-X'^2}{4(\tau - \tau')} \right) - \left( \frac{X}{1 - X} \right) \right] \cdot$$

$$\frac{2X'}{(2\pi)^{1/2}} \frac{\exp \left( \frac{-X'^2}{2t'} \right)}{\beta (t')^{3/2}} - \lambda \operatorname{sen} \left( \beta \tau' - \sqrt{\beta} \frac{X'}{\sqrt{2}} \right) \exp \left( -\sqrt{\beta} \frac{X'}{\sqrt{2}} \right)$$

$dX' d\tau'$

expresión a la cual se le dio solución numéricamente a través de la técnica de Runge-Kutta y del método de integración de Simpson.

APENDICE D SECCION 1  
AREAS CONVECTIVAS ADIMENSIONALES

De la observación (figura 1) de la aleta de sección constante se tiene:

$$A_{sc} = bL + 2Ll \quad (1)$$

mientras que para la aleta de sección variable, al considerar las mismas caras que para la aleta de sección constante, se tiene:

$$A_{sv} = b_l + 2ls \quad (2)$$

donde  $s$  es la longitud del arco formado por la función

$$f(X) = b_l \exp [-X/(1-X)]$$

al substituirse  $f(X)$  en (2) y recordando que  $2b_l/b = c_0$ , puede escribirse también como:

$$A_{sv} = b_l + c_0 \exp [-X/(1-X)] \quad (3)$$

la longitud de arco de la curva  $f(X)$  = y quedará determinado por la integral siguiente

$$\int ds = \int_0^L \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dX} \right)^2 \right]^{1/2} dX \quad (4)$$

al derivar respecto a  $X$  a  $f(X)$ , obtenemos

$$\frac{dy}{dX} = - \frac{c_0 \exp [-X/(1-X)]}{(1-X)^2} \quad (5)$$

como en este término se encuentra un término  $c_0$  que se eleva al cuadrado al ser substituido en la integral y habiendo formalizado que los términos de orden  $c_0^2$  no se encuentran incluidos en nuestro análisis, la integral resulta simplemente:

$$s = \int_0^L dX = L \quad (6)$$

por lo tanto el área de las mismas caras consideradas que para la aleta recta, esta dada por la ecuación :

$$A_{sv} = b l + 2Ll$$

o bien:

$$A_{sv} = 2Ll ( b/(2L) + 1 ) \quad (7)$$

APENDICE D SECCION 2  
EFICIENCIA DE LA ALETA DE SECCION CONSTANTE

Estando definida la eficiencia de la aleta como

$$\eta = \frac{q_{real}}{q_{maximo}} = \frac{A_{ST} Q_{real}}{A_f Q_{maximo}} \quad (1)$$

Tomando en cuenta las siguientes consideraciones:

$A_{ST}$  : es el área de la sección transversal de la aleta en cuestión, a través de la cual se efectúa la transferencia de calor.

$Q_{max}$  : es el flujo de calor adimensional habido cuando la temperatura en toda la aleta se mantiene constante e igual a la temperatura de la base de la misma. Evaluado aquí como:

$$q_{maximo} = H A_f (T_b - T_\infty) \quad (2)$$

tomando en cuenta que  $A_{real}$  es el área de la sección transversal de una aleta de sección variable y que  $A_f$  es la calculada por la expresión (7) de la sección [1]; la expresión correspondiente a la eficiencia será:

$$\eta = \frac{b1 + 2l b1 \exp[-X/(1-X)] Q_{real}}{H (b1+2L1) (T_{bm} + (T_{bm}-T_\infty) \text{Acosh} \lambda l - T_\infty)} \quad (3)$$

Si consideramos que  $Q_{real}$  resulta de la expresión (III.1) y que este flujo de calor hasta ese momento es una cantidad adimensional, para una aleta de sección variable y una de sección constante respectivamente, la expresión para la eficiencia resulta:

para una aleta de sección constante,

$$\eta_{sc} = \frac{b1 + 2l L Q_{sc}}{H (b1+2Ll) (T_{bm} + (T_{bm}-T_{\infty}) \lambda \cos \omega t - T_{\infty})} \quad (4)$$

y para una de sección variable,

$$\eta_{sv} = \frac{b1 + 2l b1 \exp [-X/(1-X)] Q_{sv}}{H (b1+2Ll) (T_{bm} + (T_{bm}-T_{\infty}) \lambda \cos \omega t - T_{\infty})} \quad (5)$$

para las cuales  $Q_{sc}$  y  $Q_{sv}$  se encuentran definidas por las expresiones (IV.2) y (IV.1) respectivamente.

Por otra parte, las expresiones (4) y (5) pueden quedar definidas al manipularlas algebraicamente buscando sus parámetros adimensionales como:

$$\eta_{sc} = \frac{b1 Q_{sc}(\beta\tau)}{(12HL) (T_{bm}-T_{\infty}) (1 + \lambda \cos(\beta\tau))} \quad (6)$$

y

$$\eta_{sv} = \frac{b1 Q_{sv}(\beta\tau)}{(12HL) (T_{bm}-T_{\infty}) (1 + \lambda \cos(\beta\tau))} \quad (7)$$

Por otra parte, puesto que el flujo de calor através de la aleta recta de sección constante puede ser calculado mediante Fourier de la forma siguiente:

$$q_{real} = -k A \tau \frac{dT}{dx} = -k b1 \frac{(T_{bm} - T_{\infty})}{L} \frac{d\theta}{dx} \quad (8)$$

donde el factor  $(T_{bm} - T_{\infty})/L$  resulta de un cambio de variables de  $X$  a  $x$  y de  $\theta$  a  $T$ . Puede entonces, despejarse a  $\frac{d\theta}{dx}$  para considerarle evaluada en cero. Lo que representa a la postre el flujo de calor en la base  $(Q_{sc}|_{x=0})$ , y por lo tanto:

$$-\frac{d\theta}{dx} = \frac{L}{k (T_{bm} - T_{\infty})} q_{real} = b1 Q_{sc}|_{x=0} \quad (9)$$

si a esta expresi3n la substituyo en (6) obtengo:

$$\eta_{sc} = \frac{k b l \frac{(T_{bm} - T_{\infty})}{L} Q_{sc}|_{x=0}}{(12HL) (T_{bm} - T_{\infty}) (1 + \lambda \cos(\beta\tau))}$$

de lo cual se desprende:

$$\eta_{sc} = \frac{k b (T_{bm} - T_{\infty}) Q_{sc}|_{x=0}}{(2HL^2) (T_{bm} - T_{\infty}) (1 + \lambda \cos(\beta\tau))} \quad (10)$$

si igualo a  $N^2 = \frac{2HL^2}{b k}$ , obtengo en forma siaplicada la siguiente expresi3n:

$$\eta_{sc} = \frac{Q_{sc}|_{x=0}}{N^2 (1 + \lambda \cos(\beta\tau))} \quad (11)$$

APENDICE D SECCION 3  
EFICIENCIA DE LA ALETA DE SECCION TRANSVERSAL VARIABLE

Analogamente para la aleta de sección variable tenemos :

$$\eta_{sv} = \frac{A_{ST} Q_{real}}{A_f Q_{maximo}} \quad (1)$$

al considerar las ecuaciones (8) y (7) de la sección [1] en la ecuación (1), se halla:

$$= \frac{bl \left[ 1 + c_g \exp \left[ -X/(1-X) \right] \right] k \left[ Q_{sc} - c_g \left( \frac{d\theta_{01}}{dX} + \frac{d\psi_1}{dX} \right)_{x=0} \right]}{bh \left[ 1 + \frac{2L}{b} \right] \left[ (T_{bm} + (T_{bm} - T_{\infty}) \lambda \cos \omega t - T_{\infty}) \frac{L}{(T_{bm} - T_{\infty})} \right]}$$

desarrollando los productos,

$$= \frac{Q_{sc} - c_g \left[ \left( \frac{d\theta_{01}}{dX} + \frac{d\psi_1}{dX} \right)_{x=0} - Q_{sc} \exp \left[ -X/(1-X) \right] \right]}{\frac{2Lh}{kb} \left[ (T_{bm} + (T_{bm} - T_{\infty}) \lambda \cos \omega t - T_{\infty}) \frac{L}{(T_{bm} - T_{\infty})} \right]}$$

simplificando

$$= \frac{kb \left[ Q_{sc} - c_g \left( \frac{d\theta_{01}}{dX} + \frac{d\psi_1}{dX} \right)_{x=0} - Q_{sc} \exp \left[ -X/(1-X) \right] \right]}{2Lh (T_{bm} - T_{\infty}) \left[ 1 + \lambda \cos \omega t \right] \frac{L}{(T_{bm} - T_{\infty})}}$$

nuevamente al considerar  $N^2 = \frac{2hL^2}{bk}$ , puede escribirse:

$$\eta_{sv} = \frac{1}{N^2} \int \frac{Q_{sc} dt}{1 + \lambda \cos t} + \frac{c_g}{N^2} \int \frac{Q_{sc} dt}{1 + \lambda \cos t} - \frac{c_g}{N^2} \int \left( \frac{d\theta_{01}}{dX} + \frac{d\psi_1}{dX} \right)_{x=0} \frac{dt}{1 + \lambda \cos t}$$

y simplificando, como:

$$\bar{\eta}_{sv} = \bar{\eta}_{sc} + c_g \bar{\eta}_{sc} - \frac{c_g}{N^2} \int_0^1 \frac{\left( \frac{d\theta_{01}}{dX} + \frac{d\psi_1}{dX} \right) dt}{1 + \lambda \cos t} \quad (2)$$

Al despreciar la eficiencia promedio con geometría variable y al considerar el valor numéricamente obtenido para la integral, se encuentra:

$$\bar{\eta}_{sv} = \bar{\eta}_{sc} \left[ 1 + c_g \left( 1 + \frac{1.3469}{\bar{\eta}_{sc}} \right) \right]$$

de lo cual se reduce a:

$$\frac{\bar{\eta}_{sv}}{\bar{\eta}_{sc}} = 1 + c_g \left( 1 + \frac{1.3469}{\bar{\eta}_{sc}} \right) \quad (3)$$

Para evaluar el valor de la eficiencia promedio para la sección constante habiase llegado, capítulo IV sección segunda, a la conclusión expresada en la siguiente fórmula:

$$\bar{\eta}_{sc} = \frac{1}{N^2} \int_0^1 \left[ \frac{\frac{d\theta_{00}}{dX} + \frac{d\psi_{00}}{dX} + \frac{d\psi_{01}}{dX}}{1 + \lambda \cos t} \right] dt \quad (4)$$

la cual puede también expresarse, al substituir los términos diferenciales por sus correspondientes valores (capítulo IV), en la siguiente forma:

$$\bar{\eta}_{sc} = \frac{1}{N^2} \int_0^1 \left[ \frac{4.08248 + \lambda(\beta/2)^{1/2} (\cos t - \text{sen } t) \sqrt{\frac{\beta}{N^2 t}}}{1 + \lambda \cos t} \right] dt$$

Esta expresión puede también reescribirse como:

$$\bar{\eta}_{sc} = \frac{4.08248}{N^2} \int_0^1 \frac{dt}{1 + \lambda \cos t} + \frac{\lambda(\beta/2)^{1/2}}{N^2} \int_0^1 \left( \frac{\cos t - \sin t}{1 + \lambda \cos t} \right) dt -$$

$$\frac{\lambda(\beta)^{1/2}}{\pi N^2} \int_0^1 \frac{dt}{t^{1/2}(1 + \lambda \cos t)} \quad \text{ECUACION (5)}$$

#### APENDICE D SECCION 4

Como comparación entre los dos casos se realiza el cociente entre la diferencia de las eficiencias dividiéndose entre la eficiencia con geometría, de lo que resulta:

$$\frac{\bar{\eta}_{sv} - \bar{\eta}_{sc}}{\bar{\eta}_{sv}} = c_g \left[ 1 - \frac{c_g}{2\pi N^2} \int_{x=0}^1 \left( \frac{d\theta_{01}}{dX} + \frac{d\psi_1}{dX} \right) \frac{d\tau}{1 + \lambda \cos t} \left[ \frac{1}{\bar{\eta}_{sc}} \right] \right]$$

$$c_g \left[ 1 - \int_0^1 \left( \frac{d\theta_{01}}{dX} + \frac{d\psi_1}{dX} \right) \frac{d\tau}{1 + \lambda \cos t} \left[ \int_0^1 \left( \frac{d\theta_{00}}{dX} + \frac{d\psi_{00}}{dX} + \frac{d\psi_{01}}{dX} \right) \frac{1}{1 + \lambda \cos t} \right] \right] dt$$

de cálculos numéricos para  $0 \leq \tau \leq 1$  se sabe que el valor de la integral que ocupa el numerador del cociente es de: 1.3469.

APENDICE E SECCION 1  
METODOS DE PERTURBACION

La teoría de perturbación es un conjunto de métodos útiles para un análisis sistemático acerca del comportamiento general de ecuaciones diferenciales y en diferencias .

La idea fundamental de los métodos de perturbación es el descomponer un problema muy complejo en un número infinito de problemas relativamente más sencillos que tienen por común una nueva variable independiente.

La forma de hallar la solución a un problema mediante la técnica de perturbación es el de expresar y resolver la ecuación como la suma de una serie exponencial de  $\epsilon$  que representan a su vez la parte lineal y la no lineal de la ecuación.

$$y(x) = y_0(x) + \epsilon y_1(x) + \epsilon^2 y_2(x) + \dots$$

Estas series son llamadas Series de Perturbación. Tiene el particular atractivo que  $y_n(x)$  puede calcularse en términos de  $y_0(x) \dots y_{n-1}(x)$  como si se resolviese el caso para  $\epsilon=0$ . Si  $\epsilon$  es muy pequeña ,esperamos que  $y(x)$  será muy próxima a la solución exacta con apenas unos cuantos términos en la serie de perturbación.

En la teoría de perturbación es válido calcular solo algunos de la totalidad de los términos de la serie, independientemente de que esta sea convergente o no.

Por lo tanto la teoría de perturbación es de lo más útil cuando los primeros términos de una serie de perturbación contienen la mayor parte de la información de la solución de un problema.

La metodología general del análisis de perturbación es la siguiente:

1. Introducir en el problema original a un término cualquiera (c) con la única condición que este sea de un valor pequeño.

2. Representar al problema original como una serie de potencias de c y calcular los coeficientes de esta serie.

3. Calcular la solución final del problema mediante la suma de todos los términos de esta serie.

#### CLASIFICACION DE LAS SERIES DE PERTURBACION.

Las series de perturbación, también conocidas como expansiones se clasifican en dos grandes grupos que son:

*Regulares*

*Singulares*

Las series regulares se caracterizan por tener solución en todo el dominio para el cual esta definida la variable independiente, mientras que las *singulares* tienen uno o más puntos para los cuales la función es indeterminada.

APENDICE E SECCION 2  
 FUNCION DE GREEN

La función de Green es una de las principales herramientas en la solución de ecuaciones diferenciales parciales de la física matemática, no importar la nohomogeneidad de la ecuación ni su dimensión.

Su notación es la siguiente  $G(r, t | r', \tau)$  debido a una analogía hallada con un modelo discreto de la temperatura se asume que la parte del argumento "r,t", se refiere a la temperatura de una región R debida a una fuente puntual con características de impulso unitario localizada en r' que desprende su calor en el instante  $\tau$ . Por tal motivo las partes del argumento pueden quedar representadas de la siguiente forma:

$$G(r, t | r', \tau) = G(\text{efecto} | \text{impulso})$$

dicha concepción del problema tiene la ventaja de poder considerar la distribución inicial de la temperatura de un medio cualquiera como una fuente instantánea de calor distribuida en toda la región que libera su calor en un instante.

Se cita a continuación un método sistemático en la determinación de la misma, que utiliza como base de construcción a la solución de la ecuación diferencial homogénea.

Consideremos en primer lugar al siguiente problema de conducción de calor con condición homogénea en una de sus fronteras :

$$\nabla^2 T(r, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} \quad \text{en la región R, } t > 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial n_1} + H_1 T = 0 \quad \text{en } S_1, \quad t > 0$$

$$T(r, t) = F(r) \quad \text{para } t=0 \quad \text{en la región R}$$

La apropiada función de Green para la solución de este problema ,  
 cumple a su vez el siguiente problema auxiliar:

$$\nabla^2 G + \frac{1}{\alpha} \delta(r-r')\delta(t-\tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial G}{\partial t} \quad \text{en la región } R, t > \tau$$

$$\frac{\partial G}{\partial n_i} + H_i G = 0 \quad \text{sobre } S_i, t > \tau$$

y sujeto a la condición  $G = 0$  para  $t < \tau$

definimos como  $H_i = h_i/k_i$ .

La solución ,  $T(r,t)$  ,del problema original en términos de la  
 función de Green ,que satisface a su vez el problema auxiliar es:

$$T(r,t) = \int_R G(r,t|r',\tau) \Big|_{t=0} F(r') dv'$$

Por otra parte resolviendo este problema por separación de  
 variables proporciona una solución que podría expresarse en  
 general como:

$$T(r,t) = \int_R [K(r,r',t)] F(r') dv$$

Comparando esta función con la anterior se observa claramente que

$$G(r,t|r',\tau) \Big|_{t=0} = K(r,r',t)$$

de lo anterior se puede concluir que  $G(r,t|r',\tau) \Big|_{t=0}$  puede ser  
 obtenida resolviendo la parte homogénea del problema de conducción  
 e identificando aquella parte correspondiente con la ecuación en  
 términos de la función de Green.

También es necesario saber que para resolver este tipo de problemas es indispensable conocer a la función de Green como parte de la solución del problema, en ese momento la labor se reduce a hallar a  $G(r, t | r', \tau)$  cuando  $G(r, t | r', \tau)|_{t=0}$  es conocida. Al resolver mediante ambos métodos el mismo problema se observa que  $G(r, t | r', \tau)$  puede obtenerse al substituir en la segunda,  $G(r, t | r', \tau)|_{t=0}$ ,  $t$  por  $(t-t')$ .

Para el problema unidimensional ( $x$ ) de transferencia de calor expresado por las ecuaciones precedentes, la solución mediante la función de Green queda reducida a los siguientes términos:

$$\begin{aligned}
 T(x, t) = & \int_L x'^P G(x, t | x', \tau) |_{\tau=0} F(x') dx' \\
 & + \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t d\tau \int_L x'^P G(x, t | x', \tau) | g(x', \tau) dx' \\
 & + \alpha \int_{t=0}^t d\tau \sum_{i=1}^2 \left[ x'^P G(x, t | x', \tau) \right]_{x'=x_i} \frac{1}{k_i} f_i(r, t) dS_i
 \end{aligned}$$

donde  $x'^P$  es la función de Sturm-Liouville para la cual se tienen las siguientes consideraciones acerca del valor de  $P$ :

$$P = \begin{cases} 0 & \text{para una al ta} \\ 1 & \text{para un cilindro} \\ 2 & \text{para una esfera} \end{cases}$$

$L$  se refiere a la longitud de la región unidimensional y

$G(x, t | x', \tau)|_{x'=x_i}$  es el valor de la función de Green evaluada en la frontera  $x'=x_i$ .

APENDICE E SECCION 3  
 METODOS NUMERICOS PARA SOLUCIONAR ECUACIONES  
 DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN\*

En el presente capítulo se hace una descripción general de los métodos numéricos útiles para la solución de ecuaciones diferenciales de primer orden obtenidas durante el desarrollo de la solución del presente problema de Tesis.

Para abordar el problema consideraremos las siguientes condiciones iniciales

$$(1) \quad \psi' = f(x, \psi) \quad , \quad \psi(x_0) = \psi_0.$$

como es sabido se recurre a estos métodos cuando no se puede solucionar una ecuación diferencial mediante un método exacto y además se tiene acceso a una computadora que agiliza y aproxima la solución con mucha más rapidez.

En esta clase de soluciones se produce un ciclo iterativo que consiste en iterar sucesivamente los valores de la función  $\psi$  cuando se obtiene una solución de la misma función en términos de Serie de Taylor como la siguiente

$$\psi(x+h) = \psi(x) + h\psi'(x) + \frac{h^2}{2} \psi''(x) + \dots$$

La exactitud de esta solución depende definitivamente del factor  $h$ , que representa un incremento de las abscisas, cuyo valor normalmente es pequeño por ejemplo 0.2, 0.1 ó bien 0.001. Geométricamente este método es la aproximación a la función  $\psi(x)$  por medio de polígono mostrado en la figura 7.

De la ecuación (1) tenemos que  $\psi' = f$ , de ahí que  $\psi'' = f'$ ; entonces la serie de Taylor adquiere el siguiente aspecto:

$$(2) \quad \psi(x+h) = \psi(x) + hf + \frac{h^2}{2} f' + \frac{h^3}{6} f'' + \dots$$

las derivadas  $f'$ ,  $f''$ , .... son evaluadas en  $\{x, \psi(x)\}$ .

Se considera adicionalmente que  $f$  es tal que (1) tiene solución única para un cierto intervalo que contenga a  $x_0$ . Tomando en cuenta que  $h$  es de magnitud pequeña, los términos  $h^2, h^3, h^4, \dots$  de (2) serán tan pequeños que podemos despreciar quedando la siguiente aproximación:

$$\psi(x+h) \approx \psi(x) + hf.$$

Utilizando esta fórmula entonces procedemos a calcular de la siguiente forma; para el primer cálculo:

$$\psi_1 = \psi_0 + hf(x_0, \psi_0),$$

lo que le aproxima al valor verdadero  $\psi(x_1) = \psi(x_0 + h)$ . En segundo lugar calculamos

$$\psi_2 = \psi_1 + hf(x_1, \psi_1),$$

que análogamente nos proporciona una aproximación del valor de la verdadera función  $\psi(x_2) = \psi(x_0 + 2h)$ , etc. La expresión general para este procedimiento es la siguiente

$$(3) \quad \psi_{n+1} = \psi_n + hf(x_n, \psi_n).$$

de esta forma obtenemos aproximaciones de la verdadera función  $\psi(x)$  con los valores iniciales especificados por (1). Este simple procedimiento es llamado el METODO DE EULER-CAUCHY

Este método cae dentro de los clasificados como Métodos de Primer Orden debido a que se tomó de la ecuación (2) exclusivamente a los términos de exponente inferior ó igual a la unidad de  $h$ . Esta omisión acarrea consigo un error llamado *error de truncamiento* cuyo valor se hace más pequeño mientras más alto sea el exponente del término  $h$  manejado en la solución.

Por otra parte, si la solución exacta es desconocida una idea de la aproximación con que nos hemos acercado a esta nos la puede dar el iterar de nueva cuenta con un valor  $h/2$  y comparando los resultados obtendremos una cifra de la aproximación alcanzada.

Tomando en cuenta un mayor número de términos de la ecuación (2) y el uso de algoritmos numéricos podemos obtener expresiones de la solución más simples y mucho más exactas.

Demostrando lo anterior se presenta a continuación los fundamentos de un par de métodos numéricos con las características anteriores.

#### METODO MEJORADO DE EULER-CAUCHY

En cada una de las aproximaciones de este método se calcula en primer lugar el valor auxiliar

$$(4a) \quad y_{n+1}^* = y_n + hf(x_n, y_n)$$

eseguida el nuevo valor

$$(4b) \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \left[ f(x_{n+1}, y_{n+1}^*) + f(x_n, y_n) \right]$$

geométricamente esto representa la aproximación de  $y(x)$  para el valor  $x \geq x_n$  a través de la línea  $(x_n, y_n)$  de pendiente  $f(x_n, y_n)$  hasta que  $x$  alcanza el valor de  $x_n + 1/2 h$  continuando enseguida por la línea de pendiente  $(x_{n+1}, y_{n+1}^*)$ , ver la figura 8.

Puede demostrarse que en la realidad el Método Mejorado de Euler-Cauchy es un método de segundo orden pues el error de truncamiento es del orden  $h^3$ .

Aún más exacto que los dos anteriores métodos presentados anteriormente el método de Método de RUNGE-KUTTA supera las capacidades de los mismos. En éste método en primer lugar se calculan las cantidades auxiliares

$$(6a) \quad A_n = hf(x_n, y_n), \quad B_n = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{A_n}{2}\right)$$

$$C_n = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{A_n}{2}\right), \quad D_n = hf(x_{n+1}, y_n + C_n)$$

y el nuevo valor

$$(6b) \quad y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} \left( A_n + 2B_n + 2C_n + D_n \right)$$

Puede demostrarse que el error de truncamiento de este método es de orden  $h^5$  y por lo tanto el orden del método es el cuarto.

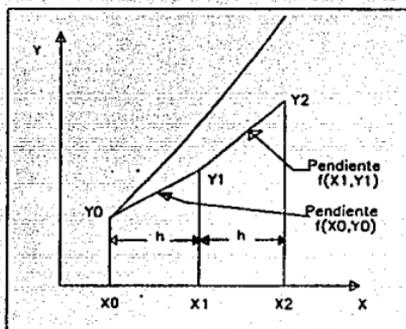


Figura 7

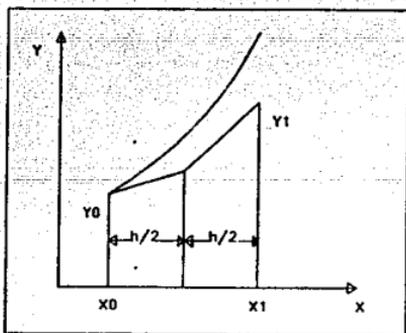


Figura 8

APENDICE E SECCION 4  
INTEGRACION APROXIMADA

La regla de Simpson, en comparación con la integración mediante la regla rectangular, logra una mejor aproximación de la función integral (  $I(x)$  ) mediante el ajuste de segmentos parabólicos entre cada uno de los extremos de los subintervalos de la función , figura 9.

Para este propósito se subdivide al intervalo de integración  $a \leq x \leq b$  en un determinado número de subintervalos ,por ejemplo  $2n$  de una longitud  $\Delta x = (b - a)/2n$  con extremos en  $x_0 = a, x_1, \dots, x_{2n-1}, x_{2n} = b$ .

En los dos primeros subintervalos ,la función  $I(x)$  es aproximada por un polinomio de la forma  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$  que pasa por los puntos  $A_0, A_1, A_2$ . En los siguientes dos subintervalos la curva es aproximada por otra parábola semejante a la que le corresponden los puntos  $A_2, A_3, A_4$  , etcétera.

De esta forma una aproximación de el área contenida bajo la curva  $I(x)$  es determinada por la relación

$$(6) \int I(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} \left[ I(x_0) + 4I(x_1) + 2I(x_2) + 4I(x_3) + \dots + 2I(x_{n-2}) + 4I(x_{2n-1}) + I(x_{2n}) \right]$$

donde ,  $\Delta x = (b - a)/2n$ .

Esta última relación es conocida también como REGLA DE SIMPSON, que de otra manera puede quedar expresada como

$$(7) \int I(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} \left[ I(x_0) + 4I(x_1) + 2I(x_2) + 4I(x_3) + \dots + I(x_{2n}) \right] - E_s$$

donde  $E_s$  es el error aproximado, determinado por :

$$E_s = \frac{\Delta x^5}{90} I^4(\xi), \quad x_1 \leq \xi \leq x_{1+1}$$

el algoritmo de cálculo utilizado se encuentra en la referencia 15.

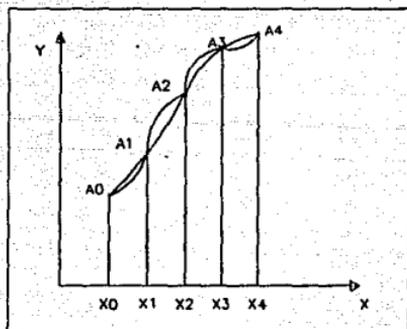


Figura 9