25
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

H-ESPACIOS

TESIS

Que para obtener el título de:

MATEMATICO

PRESENTA

MARTIN PAREDES MARTINEZ

"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"

Cd. Universitaria, México, D.F. Agosto de 1993.

INTRODUCCION

En algunos espacios topológicos es posible introducir una "multiplicación" continua, que los hace parecerse a los grupos topológicos, estos son los H-espacios. Los cuales tienen propiedades importantes y son tema de una extensa literatura de topología algebráica.

J.F. Adams en su libro "Infinite Loop Spaces", nos menciona que el concepto de "H-espacios" se remonta a J.P. Serre en 1951, quien eligió la letra H en honor del trabajo topológico de Hopf. También fué Serre quien hizo la observación que los espacios de lazos son H-espacios.
Aquí probaremos esto y el conocido resultado, que el Grupo Fundamental de cualquier H-espacio es abeliano.

Este trabajo se desarrolla dentro de la Topología General siguiendo principalmente la exposición del tema que hace J. Dugundji en su libro "Topology", complementándolo con ciertos resultados categóricos del libro "Algebraic Topology" de Spanier.

Adoptaremos la definición de H-espacio que da Dugundji, que es un poco más general que la usual, pues pide que la multiplicación continua tenga unidad homotópica (H-unidad) y no necesariamente una unidad. Es mas Spanier define los H-espacios en la categoría de Espacios Topológicos con punto base, donde el punto base debe de ser la unidad del H-espacio.

Un resultado importante en el desarrollo hecho por Dugundji es que todo H-espacio es H-isomorfo a un espacio con unidad.

Ahora daremos una breve descripción del contenido de este trabajo.

En las primeras cuatro secciones se dan los preeliminares de Homotopía, Espacios de Funciones, Espacios de Trayectorias y Grupos de Homotopía, que se requieren para desarrollar la teoria de H-espacios.

La sección V de Grupos Topológicos se da como antecedente de H-espacios; proporcionando varios ejemplos y algunos resultados que se generalizan en forma natural al caso de H-espacios.

En la sección VI se introducen los H-espacios, y los H-grupos; se presentan ejemplos importantes como los Espacios de Lazos.

Finalmente en la sección VII, damos la noción de H-homomorfismos, probándose aquí el teorema sobre la existencia de unidad para un H-espacio así como el teorema del grupo fundamental de H-espacios, los cuales se mencionaron anteriormente.

INDICE

I HOMOTOPIA

Homotopía

Función Nulhomotópica

Espacio Contraible

Equivalencia Homotópica

Inversa Homotópica

Homotopía Relativa

Trayectoria

Lazo

Categoría

Funtor Covariante

Funtor Contravariante

II ESPACIOS DE FUNCIONES

Topología Compacto-abierta

Función Composición

Función Evaluación

Teorema de la Correspondencia Exponencial

III ESPACIOS DE TRAYECTORIAS

Espacio de trayectorias

Espacio de lazos

Trayectorias Equivalentes

Producto de trayectorias

Funciones de Transición

IV GRUPOS DE HOMOTOPIA

Grupo Fundamental

N-ésimo Grupo de Homotopía

V GRUPOS TOPOLOGICOS

Grupo

Grupo Topológico

Cuaternios

Morfismos de Grupos Topológicos

Isomorfismos de Grupos Topológicos

Grupo Cociente

Función Cociente

VI H-ESPACIOS

H-espacio

H-unidad

Componente Principal

H-asociatividad

H-inversión

H-grupo

H-abeliano

Numeros de Cayley

VII H-HOMOMORFISMOS

H-homomorfismo

H-isomorfismo

Multiplicaciones Equivalentes

Transformación Natural

BIBLIOGRAFIA

I HOMOTOPIA

Definición.- Sean $f,g:X \longrightarrow Y$ dos funciones continuas, si existe una función continua $H : X\times I \longrightarrow Y$ tal que $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$ para toda $x\in X$, entonces se dice que f es <u>homotópica</u> a g, $f \simeq g$, y H es una <u>homotopía</u> de f a g, expresaremos esto usando la notación $H : f \simeq g$.

1.0 Proposición.- La relación $\simeq$ es una relación de equivalencia en el conjunto de funciones continuas de X en Y. La clase de homotopía de f es denotada por $[f]$.

Demostración. Consideremos f,g y h funciones continuas de X en Y. La función $F : X\times I \longrightarrow Y$ dada por $F(x,t) = f(x)$ para toda t, define una homotopía de f a f, luego $\simeq$ es reflexiva. Si $H:f \simeq g$, entonces $H^{*}(x,t) = H(x,1-t)$ define una homotopía H^{*} de g a f, de donde $\simeq$ es simétrica.

Para probar que $\simeq$ es transitiva, supongamos que

$$H:f \simeq g \quad y \quad H':g \simeq h, \text{ la función } H'': X \times I \longrightarrow Y$$

dada por

$$H''(x,t) = \begin{cases} H(x,2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ H'(x,2t-1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

está bien definida pues para $t = 1/2$, $H''(x,1/2) = h(x,1) = g(x) = H'(x,0)$ y es continua por ser la función combinada de dos funciones continuas cuyos dominios constituyen una cubierta cerrada finita de $X \times I$. Además $H''(x,0) = f(x)$ y $H''(x,1) = h(x)$; luego $H':f \simeq h$.

1.1 Proposición.- Sean $f,f': X \longrightarrow Y$ y $g,g': Y \longrightarrow Z$, funciones continuas, si $f \simeq f'$ y $g \simeq g'$ entonces $gf \simeq g'f'$.

Demostración. Si $F:f \simeq f'$ y $G:g \simeq g'$,

$$H(x,t) = \begin{cases} g(F(x,2t)) & \text{si } 0 \le t \le 1/2 \\ G(f'(x),2t-1) & \text{si } 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

define una función continua $H : X \times I \longrightarrow Z$, ya que $H(x,1/2) = g(F(x,1)) = g(f'(x)) = G(f'(x),0)$; además $H(x,0) = g(F(x,0)) = g(f(x))$ y $H(x,1) = G(f'(x),1) = g'(f'(x))$, luego $H : gf \simeq g'f'$.∎

En virtud de lo anterior se puede definir una "composición" para clases de homotopía $[g][f] = [gf]$.

Definición.- Una función es <u>nulhomotópica</u> si es homotópica a una función constante. Un espacio Y es <u>contraible</u> si 1_Y es nulhomotópica ; i.e., si existe una homotopía de 1_Y a una función constante.

Notación. Sean $D^2 = \left\{z \in \mathbb{R}^2 : |z| \le 1\right\}$ y $S^1 = \mathrm{Fr}\, D^2$ subespacios de $\mathbb{R}^2 = \mathbf{C}$.

1.2 Proposición.- 1) Un espacio Y es contraible si y sólo si, para cada espacio X no vacío, todas las funciones continuas de X en Y son homotópicas.

2) Una función continua $f : S^1 \longrightarrow Y$ es nulhomotópica si y sólo si existe una extensión continua $F : D^2 \longrightarrow Y$ de f.

Demostración. 1) Sea Y contraible. Existe $k : Y \longrightarrow Y$ tal que $k(y) = y_0$ para todo $y \in Y$ y $1_Y \simeq k$.

Ahora sean $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ funciones continuas, entonces

por la proposición 1.1 $\begin{cases} f_0 = 1_Y \circ f_0 \simeq k \circ f_0 = k' \\ f_1 = 1_Y \circ f_1 \simeq k \circ f_1 = k' \end{cases}$ donde $k'(x) = y_0$

para cada $x \in X$. Por lo tanto $f_0 \simeq f_1$.

El inverso es inmediato.

2) Supongamos $H : f \simeq k$, donde $k(s) = y_0 \in Y$, para cada $s \in S^1$.

Definimos $F : D^2 \longrightarrow Y$, como $F(z) = \begin{cases} y_0 & 0 \leq |z| \leq 1/2 \\ H(z/|z|,\ 2-2|z|) & 1/2 \leq |z| \leq 1 \end{cases}$

Ya que para $|z| = 1/2$, $H(z/|z|,1) = y_0$, la función F está bien definida y es continua. Como para $z \in S^1$, $F(z) = H(z,0) = f(z)$. Así F es una extensión continua de f a D^2.

Ahora si f tiene una extensión continua $G : D^2 \longrightarrow Y$, definimos $J : S^1 \times I \longrightarrow Y$ por $J(x,t) = G((1-t)x+tp_0)$ con $p_0 \in D^2$ fijo. Entonces $J(x,0) = G(x) = f(x)$ y $J(x,1) = G(p_0)$, luego J es una homotopía de f hacia la función constante $x \longmapsto G(p_0)$.∎

En particular, dada $\psi : \mathrm{Fr}\, I^2 \longrightarrow Y$ continua nulhomotópica, entonces existe una extensión continua $\Psi : I^2 \longrightarrow Y$.

Definición.- Una función continua $f : X \longrightarrow Y$ es una <u>equivalencia homotópica</u> si existe una función continua $g : Y \longrightarrow X$ tal que $gf \simeq 1_X$ y $fg \simeq 1_Y$; la función g es una <u>inversa homotópica</u> de f. Es claro que si g es inversa homotópica a f y $g \simeq g'$ entonces g' es también inversa homotópica de f. También es inmediato que la composición de equivalencias homotópicas es una equivalencia homotópica.

Definición.- Dos espacios X,Y son <u>homotópicamente</u> <u>equivalentes</u> o bien, tienen el <u>mismo</u> <u>tipo</u> <u>de</u> <u>homotopía</u> y se escribe $X \simeq Y$, si existe una equivalencia homotópica $f:X \longrightarrow Y$

1.3 Proposición.- Sean $f_\alpha, g_\alpha : X_\alpha \longrightarrow Y_\alpha$ $\forall \alpha \in a$ y $\pi f_\alpha, \pi g_\alpha : \Pi X_\alpha \longrightarrow \Pi Y_\alpha$, entonces $\pi f_\alpha \simeq \pi g_\alpha$ si y sólo si $f_\alpha \simeq g_\alpha$ $\forall \alpha \in a$.

Demostración. Sea $x^\bullet \in \Pi X_\alpha$ fijo y $i_\beta : X_\beta \longrightarrow \Pi X_\alpha$, dada por $p_\alpha \circ i_\beta(x_\beta) = x^\bullet_\alpha$ si $\alpha \neq \beta$ y $p_\alpha \circ i_\beta(x_\beta) = x_\beta$ si $\alpha = \beta$.

Si $\pi f_\alpha \simeq \pi g_\alpha$ entonces $f_\beta = p_\beta(\pi f_\alpha \circ i_\beta) \simeq p_\beta(\pi g_\alpha \circ i_\beta) = g_\beta$ $\forall \beta \in a$.

Supongamos que $f_\alpha \simeq g_\alpha$ $\forall \alpha \in a$, sea $H_\alpha : X_\alpha \times I \longrightarrow Y_\alpha$ la homotopía de f_α a g_α .

Con $d : X \longrightarrow X^a$ la función diagonal, del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Pi(X_\alpha \times I) \arrow[r, "\pi H\alpha = (H\alpha)"] & \Pi Y_\alpha \\
(\Pi X_\alpha) \times I^a \arrow[u, "h"] & \\
\Pi X_\alpha \times I \arrow[u, "1 \times d"] \arrow[uur, "H'"'] &
\end{tikzcd}$$

se sigue que H' es continua por ser composición de funciones continuas.

Si $(x,t) \in \Pi X_\alpha \times I$ entonces $H'(x,t) = (H_\alpha(x_\alpha,t))_{\alpha \in a}$ donde $x = (x_\alpha)$,

$H'(x,0) = (H_\alpha(x_\alpha,0))_{\alpha \in a} = (f_\alpha(x_\alpha))_{\alpha \in a} = (\pi f_\alpha)(x)$

y

$H'(x,1) = (H_\alpha(x_\alpha,1))_{\alpha \in a} = (g_\alpha(x_\alpha))_{\alpha \in a} = (\pi g_\alpha)(x)$, luego H' es una homotopía de πf_α a πg_α .■

Sea $(f_\alpha) = \left\{f_\alpha : X \longrightarrow Y\alpha\right\}_{\alpha\epsilon a}$ la función producto restringido, donde $(f_\alpha) : X \longrightarrow \Pi Y\alpha$ es la composición $(\pi f_\alpha)\circ d$, entonces $(f_\alpha)(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha\epsilon a}$.

1.4 Proposición.- Dos funciones continuas $(f_\alpha), (g_\alpha) : X \longrightarrow \Pi Y_\alpha$ son homotópicas si y sólo si $f_\alpha, g_\alpha : X \longrightarrow Y_\alpha$ son homotópicas para todo α.

Demostración. Supongamos que $(f_\alpha) \simeq (g_\alpha)$ procediendo como en 1.3 $f_\beta = p_\beta\circ(f_\alpha) \simeq p_\beta\circ(g_\alpha) = g_\beta \ \forall \beta\epsilon a$. Ahora supongamos que $f_\alpha \simeq g_\alpha \ \forall\alpha\epsilon a$ entonces $(\Pi f_\alpha)\circ d \simeq (\Pi g_\alpha)\circ d$.■

En particular si $f_i, g_i : X \longrightarrow Y_i$ $(i = 1,2)$, $(f_1,f_2) \simeq (g_1,g_2)$ si y sólo $f_1 \simeq g_1$ y $f_2 \simeq g_2$.

1.5 Proposición.- Si $X_\alpha \simeq Y_\alpha$ para cada $\alpha\epsilon a$ entonces $\Pi X_\alpha \simeq \Pi Y_\alpha$

Demostración. Supongamos que $X_\alpha \simeq Y_\alpha$ y sean $f_\alpha : X_\alpha \longrightarrow Y_\alpha$ equivalencias homotópicas con inversas homotópicas $f'_\alpha : Y_\alpha \longrightarrow X_\alpha \ \forall \alpha\epsilon a$.
entonces $(\pi f'_\alpha)\circ(\pi f_\alpha) = \pi(f'_\alpha\circ f_\alpha) \simeq \pi 1_{X_\alpha} = 1_{\pi X_\alpha}$
y $(\pi f_\alpha)(\pi f'_\alpha) = \pi(f_\alpha\circ f'_\alpha) = \pi 1_{Y_\alpha} \simeq 1_{\pi Y_\alpha}$
lo que se quería demostrar.■

Definición.- Sean $f, f' : X \longrightarrow Y$ tales que $f|A = f'|A$, se dice que f y f' son <u>homotópicas relativas</u> a A, $f \simeq f'$rel. A, cuando existe una homotopía $H : X\times I \longrightarrow Y$ que satisface :
$H(x,o) = f(x)$

$H(x,1) = f'(x)$

$H(x,t) = f(x) = f'(x) \quad x\in A$ y $t\in I$.

Definición.- Una trayectoria es una función continua $\alpha : I \longrightarrow X$, donde I es el intervalo cerrado [0,1] como subespacio de la recta real y $\alpha(0)$ es el punto inicial de α y $\alpha(1)$ el punto final. Una trayectoria α es un <u>lazo</u> basado en x cuando $\alpha(0) = \alpha(1) = x$.

Sea $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$ la trayectoria inversa de α.
Observemos que para un espacio discreto X las únicas trayectorias en X son las constantes.

1.6 Proposición .- Sea Y un espacio discreto y $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ funciones homotópicas entonces $f_0 = f_1$.

Demostración. Sea $F : X\times I \longrightarrow Y$ la homotopía de f_0 a f_1.
Entonces para cada $x\in X$ la trayectoria $I \xrightarrow{j_x} \{x\}\times I \xrightarrow{F} Y$ es continua.

$$t \longmapsto (x,t)$$

Como Y es discreto, $F\circ j_x$ debe de ser una función constante. En particular $f_0(x) = F\circ j_x(0) = F\circ j_x(1) = f_1(x)$.■

Cuando dos trayectorias α,β en X son homotópicas relativas a Fr I, $H : \alpha \simeq \beta$ rel.Fr I, entonces α y β tienen el mismo punto inicial y el mismo punto final. Si α es un lazo basado en x y $\alpha \simeq \beta$ rel. Fr I, β es tambien un lazo basado en x.

1.7 Proposición. Si $h,h': I \longrightarrow I$ son continuas, $h(0) = 0 = h'(1)$ y $h(1) = 1 = h'(0)$, entonces $h \simeq 1_I$ rel Fr I y para toda trayectoria α en X tenemos :

i) $\alpha \circ h \simeq \alpha$ rel.Fr I

ii) $\alpha \circ h' \simeq \alpha^{-1}$ rel.Fr I

Demostración.i) Definamos $H : I\times I \longrightarrow I$; $H(t,s) = (1-s)h(t)+st$, y observemos que:

$H(t,0) = h(t)$

$H(t,1) = t$

$H(0,s) = 0 = h(0) = 1_I(0)$

$H(1,s) = 1 = h(1) = 1_I(1)$

Así que $H:h \simeq 1_I$ rel.Fr I; entonces $\alpha \circ h \simeq \alpha$ rel.Fr I.

ii) Sea $\rho : I \longrightarrow I$ la función continua definida por $\rho(t) = 1-t$ para todo $t \in I$.

Definamos $H^*: I\times I \longrightarrow I$; $H^*(r,s) = (1-s)h'(t) + s\rho(t)$. Como antes resulta que $H^*:h' \simeq \rho$ rel.Fr I y entonces $\alpha \circ h' \simeq \alpha \circ \rho = \alpha^{-1}$ rel.Fr I .∎

DEFINICION

Una <u>categoría</u> $\mathcal{C}$ consta de:

(i) una clase de objetos, denotada por $ob(\mathcal{C})$.Cuando no hay peligro de confusion tambien escribimos $\mathcal{C}$ en lugar de $ob(\mathcal{C})$;

(ii) para cada par de objetos X,Y, un conjunto de morfismos de X en Y, denotado por $\mathcal{C}(X,Y)$;

(iii) para toda terna ordenada de objetos X,Y,Z una función de $\mathcal{C}(X,Y)\times\mathcal{C}(Y,Z)$ en $\mathcal{C}(X,Z)$, llamada la composición (la imagen de (α,β) se denota $\beta\circ\alpha$).

Que satisfacen los siguientes dos axiomas :

(iv) $\gamma\circ(\beta\circ\alpha) = (\gamma\circ\beta)\circ\alpha$ (asociatividad).

(v) para cada objeto X de $\mathcal{C}$, existe un morfismo identidad $1_X : X \longrightarrow X$, tal que $\alpha\circ 1_X = \alpha$ y $1_Y\circ\alpha = \alpha$ para toda $\alpha\in\mathcal{C}(X,Y)$.

1.A EJEMPLOS

1.-La categoría de conjuntos $\mathcal{S}$. Los objetos de esta categoría son todos los conjuntos (ob($\mathcal{S}$) = clase de todos los conjuntos), los morfismos son funciones (i.e. $\mathcal{C}(X,Y)$ = conjunto de todas las funciones de X en Y), y la composición es la composición usual de funciones.

2.-La categoría de grupos $\mathcal{G}$. Aquí ob($\mathcal{G}$) es la clase de todos los grupos, $\mathcal{G}(X,Y)$ es el conjunto de todos los homomorfismos de X en Y, y la composición es la usual .

3.-La categoría de grupos abelianos $\mathcal{GA}$. Aquí ob($\mathcal{GA}$) es la clase de todos los grupos abelianos, $\mathcal{GA}(X,Y)$ es el conjunto de todos los homomorfismos de X en Y, y la composición tiene el significado usual. La categoria $\mathcal{GA}$ se obtiene de la categoria $\mathcal{G}$ restringiendo los objetos a la clase de grupos abelianos, $\mathcal{GA}$ es una subcategoria de $\mathcal{G}$.

4.-La categoría de espacios topológicos $\mathcal{T}$. Aquí ob($\mathcal{T}$) es la clase de todos los espacios topológicos, $\mathcal{T}(X,Y)$ es el conjunto de todas las funciones continuas de X en Y, y la composición tiene el significado usual.

5.-La categoría de Homotopía $\mathcal{H}$. En esta categoría se tiene que ob($\mathcal{H}$) = ob($\mathcal{T}$), y los morfismos de $\mathcal{H}(X;Y)$ son las clases de homotopía de funciones continuas de X en Y y la composición no tiene el sentido usual, sino que $[f][g] = [fg]$.

DEFINICION

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías. Un funtor covariante T de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$, en símbolos $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, consta de

(i) Una función $T : ob(\mathcal{C}) \longrightarrow ob(\mathcal{D})$, y de

(ii) funciones $T_{XY}: \mathcal{C}(X,Y) \longrightarrow \mathcal{D}(TX,TY)$, para todo par ordenado (X,Y) de objetos de $\mathcal{C}$, las cuales preservan la composición e identidades, es decir, satisfacen

(iii) $T_{XZ}(\beta\circ\alpha) = T_{YZ}(\beta)\circ T_{XY}(\alpha)$, para todos los morfismos $X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z$ en $\mathcal{C}$ y

(iv) $T_X(1_X) = 1_{TX}$, para todo $X \in ob(\mathcal{C})$.

Un funtor contravariante de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ se define como arriba reemplazando (ii) por $T_{XY}: \mathcal{C}(X,Y) \longrightarrow \mathcal{D}(TY,TX)$, y (iii) por $T(\beta\circ\alpha) = T(\alpha)\circ T(\beta)$.

1.B EJEMPLOS

1.-Para cualquier categoría $\mathcal{C}$ y un objeto fijo Y de $\mathcal{C}$ existe un funtor covariante $\mathcal{C}(Y,\ )$ de la categoría $\mathcal{C}$ en la categoría de conjuntos y funciones, el cual asigna a un objeto Z de $\mathcal{C}$ el conjunto $\mathcal{C}(Y,Z)$ y a un morfismo $h:Z \longrightarrow Z'$ la función $h_*: \mathcal{C}(Y,Z) \longrightarrow \mathcal{C}(Y,Z')$ definida por $h_*(g) = h\circ g$ para $g : Y \longrightarrow Z$.

2.-Para cualquier categoría $\mathcal{C}$ y un objeto fijo Y de $\mathcal{C}$ existe un funtor contravariante $\mathcal{C}(\ ,Y)$ de la categoría $\mathcal{C}$ en la categoría de conjuntos y funciones, el cual asigna a un objeto X de $\mathcal{C}$ el conjunto $\mathcal{C}(X,Y)$ y a un morfismo $h : X \longrightarrow X'$ de $\mathcal{C}$ la función $h^*: \mathcal{C}(X',Y) \longrightarrow \mathcal{C}(X,Y)$ definida por $h^*(f) = f\circ h$ para $f\in \mathcal{C}(X,Y)$.

3.-En particular para un espacio topológico fijo y no vacío Y, se tiene un funtor contravariante $[\ ,Y] : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{S}$ que a cada $X \in \mathcal{T}$ le asocia $[X,Y] = \mathcal{H}(X,Y)$ el conjunto de clases de homotopía de funciones continuas de X en Y y a cada $X \xrightarrow{\varphi} X'$ continua le asocia la función $\varphi^*: [X',Y] \longrightarrow [X,Y]$ $\varphi^*([f]) = [f \circ \varphi]$

4.-El funtor covariante $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{H}$ de la categoría de espacios topológicos $\mathcal{T}$ en la categoría de homotopía que asocia a cada espacio topológico X, el mismo espacio X como objeto $\mathcal{H}$ y a cada $f : X \longrightarrow Y$ continua, su clase de homotopía $[f] \in \mathcal{H}(X,Y)$.

II ESPACIOS DE FUNCIONES

Dados X,Y dos espacios topológicos, Y^X es el conjunto de funciones de X en Y.

Definición.- Para cada par de conjuntos $A\subset X$, $B\subset Y$, sea $(A,B) = \left\{f\in Y^X \mid f \text{ es continua y } f(A)\subset B\right\}$. La topología <u>compacto-abierta</u> ó <u>c-topología</u> en el conjunto de funciones continuas de X en Y es la que tiene como subbase a todos los conjuntos (A,B), donde A es un compacto de X y $B\subset Y$ es abierto.

Notación, <u>$C(X,Y)$</u> es el espacio de las funciones continuas de X en Y con la topología compacto-abierta.

2.1 Proposición.- Si Y es localmente compacto y Hausdorff (o regular), la función composición $c : C(X,Y)\times C(Y,Z) \longrightarrow C(X,Z)$, $c(f,g) = g\circ f$ es continua.

Demostración. Sea (K,W) un abierto subbásico de $C(X,Z)$, donde K es compacto de X y W es abierto de Z. Si $(f,g)\in c^{-1}((K,W))$, $g(f(K))\subset W$ y así $f(K)\subset g^{-1}(W)$.

Como Y es localmente compacto y Hausdorff (o regular) y, para cada $x\in K$, $f(x)$ está en el abierto $g^{-1}(W)$ de Y, existe $L(x)$ compacto en Y tal que $f(x)\in \mathring{L}(x)\subset L(x)\subset g^{-1}(W)$.

La cubierta abierta de $\left\{\mathring{L}(x)\right\}_{x\in K}$ del compacto $f(K)$ tiene una subcubierta finita $V = \mathring{L}(x_1)\cup\cdots\cup \mathring{L}(x_n)$; entonces $V\subset L = L(x_1)\cup\cdots\cup L(x_n)$ y L es un compacto contenido en $g^{-1}(W)$. Se tiene $f\in (K,V)$ y $g\in (L,W)$.

Si $(f',g') \in (K,V)\times(L,W)$ entonces tenemos $g'(f'(K)) \subset g'(V) \subset g'(L) \subset W$, de donde $c((K,V)\times(L,W)) \subset (K,W)$ y por tanto $c^{-1}(K,W)$ es abierta.∎

Definición.- Para $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X,Y)$ se define la <u>función evaluación</u> $E : \mathcal{F}\times X \longrightarrow Y$ como $E(f,x) = f(x)$.

2.2 Proposición.- Si X es localmente compacto y Hausdorff (o regular) y $\mathcal{F}$ un subespacio arbitrario de $\mathcal{C}(X,Y)$, la función evaluación $E : \mathcal{F}\times X \longrightarrow Y$ es continua.

Demostración. Supongamos que X satisface las condiciones que se piden, para una vecindad U de $E(f,x) = f(x)$ se puede encontrar una vecindad A de x con cerradura compacta contenida en $f^{-1}(U)$ así que $E((\bar{A},U)\times A) \subset U$. Esto prueba la continuidad de E en (f,x).∎

2.3 Proposición.-(<u>Teorema de la correspondencia exponencial</u>).- Sea X un espacio localmente compacto y Hausdorff o regular, Y y Z espacios arbitrarios no vacíos, entonces a cada función $g : Z \longrightarrow \mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ subespacio de $\mathcal{C}(X,Y)$, le asociamos una función $G = E\circ(g\times 1_X) : Z\times X \longrightarrow Y$, donde $E : \mathcal{F}\times X \longrightarrow Y$ es la función evaluación. Se tiene:

1) g es continua si y sólo si su asociada $G = E\circ(g\times 1_X)$ es continua.

2) Para $g_0, g_1 : Z \longrightarrow \mathcal{F}$ continuas, $g_0 \simeq g_1$ si y sólo si $G_0 \simeq G_1$.

Demostración.

1) Supongamos que g es continua. Entonces la composición $E\circ(g\times 1_X)$

es continua por ser composición de continuas.

Ahora supongamos que $G = E\circ(g\times 1_X)$ es continua. Sea $g(z)\in (K,U)$, K compacto de X y U abierto de Y, entonces $g(z)(K)\subset U$, es decir $G(\{z\}\times K)\subset U$. Pero G es continua y $(\{z\}\times K)\subset G^{-1}(U)$ es abierto de $Z\times X$ luego existe una vecindad V de z tal que $V\times K\subset G^{-1}(U)$, de donde $G(V\times K) = E(g(V)\times K) = g(V)(K)\subset U$ y por lo tanto $g(V)\subset (K,U)$.

2) Para cada función $h : Z\times I \longrightarrow \mathcal{F}$ su asociada $H : Z\times I\times X \longrightarrow \mathcal{F}$ induce $H' : Z\times X\times I \longrightarrow Y$ dada por $H'(z,x,t) = H(z,t,x) = E(h(z,t),x)$ entonces por (1), h es continua si y sólo si H' es continua, es más $h:g_0 \simeq g_1$ si y sólo si $H':G_0 \simeq G_1$ puesto que para $j = 0,1$ se tiene que $H'(z,x,j) = E(h(z,j),x) = g_j(z)(x) = G_j(z,x)$.∎

Las funciones continuas $\varphi : X\longrightarrow X'$ y $\psi : Y\longrightarrow Y'$ inducen las funciones $\varphi^* : \mathcal{C}(X',Y) \longrightarrow \mathcal{C}(X,Y)$ y $\psi_* : \mathcal{C}(X,Y) \longrightarrow \mathcal{C}(X,Y')$, dadas por $\varphi^*(f') = f'\circ\varphi \in \mathcal{C}(X,Y)$ $\forall f'\in \mathcal{C}(X',Y)$
y $\forall f\in \mathcal{C}(X,Y)$ $\psi^*(f) = \psi\circ f \in \mathcal{C}(X,Y')$.
Observese que esto tambien se deduce de los ejemplos 1.B(1) y 1.B(2).

2.4 Proposición.- (1) $\varphi : X \longrightarrow X'$ y $\psi : Y \longrightarrow Y'$ continuas inducen funciones continuas $\varphi^*: \mathcal{C}(X',Y) \longrightarrow \mathcal{C}(X,Y)$ y $\psi_*: \mathcal{C}(X,Y) \longrightarrow \mathcal{C}(X,Y')$.
(2) Si φ (ψ) es homeomorfismo, φ^* (ψ_*) es también un homeomorfismo.
(3) Si X' es Hausdorff y localmente compacto y $\varphi \simeq \varphi'$ ($\psi \simeq \psi'$) entonces $\varphi^* \simeq \varphi'^*$ ($\psi_* \simeq \psi'_*$).

Demostración. Si K es un subconjunto compacto de X y U un abierto de Y, entonces $(\varphi^*)^{-1}((K,U)) = (\varphi(K),U)$ es abierto de $\mathcal{C}(X',Y)$, y para L compacto de X y V abierto de Y′ tenemos que

$(\psi_*)^{-1}((L,V)) = (L,\psi^{-1}(V))$ es abierto de $C(X,Y)$, de donde φ^* y ψ_* son continuas. Por tratarse de los morfismos inducidos por los funtores contravariante $\mathcal{T}(\ ,Y)$ y covariante $\mathcal{T}(X,\ )$ de los ejemplos 1.B (1) y 1.B (2), si φ y ψ son homeomorfismos, φ^* y ψ_* también lo son.

Sea $H : X\times I \longrightarrow X'$ la homotopía $H:\varphi \simeq \psi$. Por la proposición 2.3 la función $h : I \longrightarrow C(X,X')$ definida por $h(t)(x) = H(x,t)$, es continua y por 2.1 se tiene que la composición

$$C(X',Y)\times I \xrightarrow{T} I\times C(X',Y) \xrightarrow{h\times 1} C(X,X')\times C(X',Y) \xrightarrow{c} C(X,Y)$$

es continua, donde $c(f,g) = g\circ f$ es la función composición. Definiendo $\forall\ f'\in C(X',Y)$ y $\forall\ t\in I$, $H'(f',t) = c\circ(h\times 1)\circ T(t,f')$ se tiene que

$$H'(f',0) = c(h(0),f') = c(\varphi,f') = f'\circ\varphi = \varphi^*(f')$$

y

$$H'(f',1) = c(h(1),f') = c(\varphi',f') = f'\circ\varphi' = \varphi'^*(f')$$

Por lo tanto $H': \varphi^* \simeq \varphi'^*$.

Con los cambios necesarios se prueba en forma semejante que si $\psi \simeq \psi'$ entonces $\psi_* \simeq \psi'_*$.■

III ESPACIO DE TRAYECTORIAS

Sea Y un espacio y a,b dos puntos de Y denotemos por $\Omega(Y,a,b)$ al espacio de todas las trayectorias en Y del punto a al punto b con la topología compacto-abierta. Esto es, $\Omega(Y,a,b)$ es un subespacio de $C(I,Y)$. Observamos que $\Omega(Y,a,b)\neq\phi$ si y sólo si a y b están en la misma componente por trayectorias de Y. Cuando a = b el espacio $\Omega(Y,a,a)$ se denota simplemente como $\Omega(Y,a)$ y es el espacio de lazos en Y basados en a.

El espacio de trayectorias $\Omega(Y,a,b)$ es, en general, no conectable por trayectorias. Llamamos dos trayectorias $\alpha,\beta\in\Omega(Y,a,b)$ equivalentes y escribimos $\alpha\sim\beta$ si α y β pertenecen a la misma componente por trayectorias.

3.1 Teorema. Para $\alpha,\beta\in\Omega(Y,a,b)$, $\alpha\sim\beta$ si y sólo si $\alpha\simeq\beta$ rel.Fr I.

Demostración. Sean $\alpha,\beta : I \longrightarrow Y$ trayectorias con $\alpha(0) = \beta(0) = a$ y $\alpha(1) = \beta(1) = b$.

Ahora supongamos que $\alpha\sim\beta$ y sea $\Gamma : I \longrightarrow \Omega(Y,a,b)$ una trayectoria que inicia en α y termina en β. Definamos $H : I\times I \longrightarrow Y$ como $H = E\circ(\Gamma\times 1)\circ T$ con $T(t,s) = (s,t)$. Esta función H es continua y

$H(t,s) = E\circ(\Gamma\times 1)\circ T(t,s) = E\circ(\Gamma\times 1)(s,t) = E(\Gamma(s),t) = \Gamma(s)(t)$

$H(t,0) = \Gamma(0)(t) = \alpha(t)$

$H(t,1) = \Gamma(1)(t) = \beta(t)$

$H(0,s) = \Gamma(s)(0) = a = \alpha(0) = \beta(0)$

$H(1,s) = \Gamma(s)(1) = b = \alpha(1) = \beta(1)$.

Por lo tanto $\alpha \simeq \beta$ rel.Fr I.

Inversamente, una homotopía rel.Fr I nos da una trayectoria de α hacia β.∎

3.2 Corolario. Para $\alpha,\beta \in \Omega(Y,a)$, $\alpha \sim \beta$ si y sólo si $\alpha \simeq \beta$ rel.Fr I

Definición.- El <u>producto de dos trayectorias</u> α,β, se define sólo cuando $\alpha(1) = \beta(0)$, y es la trayectoria $\alpha*\beta$ dada por

$$\alpha*\beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

3.3 Teorema.- La función $m : \Omega(Y,a,b)\times\Omega(Y,b,c) \longrightarrow \Omega(Y,a,c)$ dada por $m(\alpha,\beta) = \alpha*\beta$ es continua.

Demostración. Dado que el espacio de trayectorias $\Omega(Y,a,c)$ es un subespacio de $C(I,Y)$, podemos aplicar el teorema 2.3 de la correspondencia exponencial. Por lo tanto bastará probar que la función asociada $M = E\circ(m\times 1_I) : \Omega(Y,a,b)\times\Omega(Y,b,c)\times I \longrightarrow Y$ es continua. Fijemos $\alpha\in \Omega(Y,a,b)$, $\beta\in \Omega(Y,b,c)$ y $t\in I$. Para U una vecindad de $M(\alpha,\beta,t) = (\alpha*\beta)(t)$ en Y, existe una vecindad J de t en I tal que $(\alpha*\beta)(J)\subset U$ (por la continuidad de $\alpha*\beta$). Ahora bien, como los espacios de trayectorias tienen la topología compacto-abierta, mostraremos que existen K_1 y K_2 compactos en I, V_1 y V_2 abiertos de Y tales que $\alpha\in (K_1,V_1)$, $\beta\in (K_2,V_2)$ y como $(\alpha',\beta',t')\in [(K_1,V_1)\cap \Omega(Y,a,b)]\times[(K_2,V_2)\cap \Omega(Y,b,c)]\times J = A$ implica que $M(\alpha',\beta',t') = (\alpha'*\beta')(t')\in U$.

Podemos suponer que J satisface $(\alpha*\beta)(\bar{J})\subset U$. Por la definición de

$\alpha*\beta$ y la continuidad de α y β existe $K_1 = 2\bar{J}\cap I\subset \alpha^{-1}(U)$ y cuando $2\bar{J}\cap I = \emptyset$ se toma $K_1 = I$, en el primer caso definimos $V_1 = U$ y en el segundo $V_1 = Y$ y existe $K_2 = (2\bar{J}-1)\cap I\subset \beta^{-1}(U)$, y cuando $(2\bar{J}-1)\cap I = \emptyset$ se considera $K_2 = I$, sean $V_2 = U$ en el primer caso y en el segundo $V_2 = Y$.

Entonces para estos conjuntos se obtiene el abierto A del dominio de M, $(\alpha,\beta,t)\in A$ y si $(\alpha',\beta',t')\in A$

$$M(\alpha',\beta',t') = (\alpha'*\beta')(t') = \begin{cases} \alpha'(2t')\in \alpha'(K_1)\subset U & \text{si } 0\le t'\le 1/2 \\ \beta'(2t'-1)\in \beta'(K_2)\subset U & \text{si } 1/2\le t'\le 1 \end{cases}$$

por lo tanto $M(A)\subset U$, de donde se sigue la continuidad de M.

En particular la función multiplicación $m : \Omega(Y,a)\times\Omega(Y,a) \longrightarrow \Omega(Y,a)$ es continua.

3.4 Proposición.- Sea $h : I\longrightarrow I$ continua con $h(0) = 0$ y $h(1) = 1$. Entonces $h^{\#}(\alpha) = \alpha\circ h$ define una función $h^{\#}$ de $\Omega(Y,a,b)$ en sí mismo que es homotópica a la identidad.

Demostración. En 1.7 definimos una homotopía $H:h \simeq 1_I$ rel.Fr I con $H(t,s) = (1-s)h(t)+st$.

Ahora sea $h_s : I \longrightarrow I$; $h_s(t) = H(t,s)$, es claro que $h_s \simeq h_1 = 1_I$ rel.Fr I.

Por 2.4(3) se sigue que la función inducida $h^{\#} : C(I,Y) \longrightarrow C(I,Y)$ es homotópica a la función identidad, y ya que $h_s^{\#}(\Omega(Y,a,b))\subset \Omega(Y,a,b)$, se tiene lo que se quería demostrar.■

En I se definió la trayectoria inversa $\alpha^{-1} \in \Omega(Y,b,a)$ de $\alpha \in \Omega(Y,a,b)$ por la regla $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$, $0 \le t \le 1$. Designemos con $\varepsilon a \in \Omega(Y,a)$ el <u>lazo constante</u> $\varepsilon a(I) = a$.

3.5 Teorema.-

(1) Las funciones $A_1, A_2 : \Omega(Y,a,b) \times \Omega(Y,b,c) \times \Omega(Y,c,d) \longrightarrow \Omega(Y,a,d)$ $A_1(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha*(\beta*\gamma)$ y $A_2(\alpha,\beta,\gamma) = (\alpha*\beta)*\gamma$ son homotópicas.

(2) Las tres funciones de $\Omega(Y,a,b)$ en sí mismo dadas por $\alpha \longrightarrow \alpha*\varepsilon_b$, $\alpha \longrightarrow \alpha$ y $\alpha \longrightarrow \varepsilon a*\alpha$ son homotópicas.

(3) $\alpha \longrightarrow \alpha*\alpha^{-1}$ y $\alpha \longrightarrow \varepsilon a$ definen funciones homotópicas de $\Omega(Y,a,b)$ en $\Omega(Y,a)$ y las funciones de $\Omega(Y,a,b)$ en $\Omega(Y,b)$ dadas por $\alpha \longrightarrow \alpha^{-1}*\alpha$ y $\alpha \longrightarrow \varepsilon_b$ son homotópicas.

Demostración. (1) consideremos la función $h : I \longrightarrow I$ definida como sigue

$$h(t) = \begin{cases} 2t & \text{si} \quad 0 \le t \le 1/4 \\ t+1/4 & \text{si} \quad 1/4 \le t \le 1/2 \\ (t+1)/2 & \text{si} \quad 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

se tiene que h es continua, $h(0) = 0$ y $h(1) = 1$. Por 3.4 $h^{\#} : \Omega(Y,a,d) \longrightarrow \Omega(Y,a,d)$ es homotópica a la función identidad.

Por otro lado, directamente se comprueba que $[\alpha*(\beta*\gamma)]\circ h = (\alpha*\beta)*\gamma$, entonces $A_2 = A_1 \circ h = h^{\#} \circ A_1$ y de $h^{\#} \simeq 1_{\Omega(Y,a,b)}$ se obtiene $A_2 \simeq A_1$.

(2) Sean $h_1 = \min\{1,2t\}$ y $h_2 = \max\{0,2t-1\}$ para todo $t \in I$. Las funciones $h_1, h_2 : I \longrightarrow I$ son continuas y $h_1(0) = 0 = h_2(0)$, $h_1(1) = 1 = h_2(1)$.

Entonces, por 3.4, $h_1^{\#}$, $h_2^{\#}$ y $1_{\Omega(Y,a,b)}$ son homotópicas. Ahora bien, $\alpha*\varepsilon_b = \alpha\circ h_1$ y $\varepsilon_a*\alpha = \alpha\circ h_2$ entonces como en (1) se obtiene que $\alpha \longrightarrow \alpha*\varepsilon_b$, $\alpha \longrightarrow \varepsilon_a*\alpha$ y $\alpha \longrightarrow \alpha$ son homotópicas.

(3) Para cada $s\in I$ consideremos $h_s, h'_s : I \longrightarrow I$ definidas por

$$h_s(t) = \begin{cases} 2t(1-s) & 0\le t\le 1/2 \\ 2(1-t)(1-s) & 1/2\le t\le 1 \end{cases} \quad \text{y}$$

$$h'_s(t) = \begin{cases} 1-2t(1-s) & 0 \le t \le 1/2 \\ 1-2(1-t)(1-s) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

Si $H(t,s) = h_s(t)$ y $H'(t,s) = h'_s(t)$, entonces claramente $H:h_0 \simeq h_1$ y $H':h'_0 \simeq h'_1$. Se comprueba fácilmente que $h_1(I) = 0$ y $h'_1(I) = 1$, $h_s(0) = 0 = h_s(1)$ y $h'_s(0)= 1 = h'_s(1)$. Además $\alpha\circ h_0 = \alpha*\alpha^{-1}$, $\alpha\circ h_1 = \varepsilon_a$, $\alpha\circ h'_0 = \alpha^{-1}*\alpha$ y $\alpha\circ h'_1 = \varepsilon_b$. Por 2.4(3) $h_0^\# \simeq h_1^\#$ y $h'^\#_0 \simeq h'^\#_1$, y así las funciones continuas $h_s^\# : \Omega(Y,a,b) \longrightarrow \Omega(Y,a)$ y $h'^\#_s : \Omega(Y,a,b) \longrightarrow \Omega(Y,b)$ inducen las homotopías

$(\alpha,s) \longrightarrow h_s^\#(\alpha) = \alpha\circ h_s$ y $(\alpha,s) \longrightarrow h'^\#_s(\alpha) = \alpha\circ h'_s$ de $\alpha \longrightarrow \alpha*\alpha^{-1}$ hacia $\alpha \longrightarrow \varepsilon_a$ y de $\alpha \longrightarrow \alpha^{-1}*\alpha$ hacia $\alpha \longrightarrow \varepsilon_b$ respectivamente.∎

3.6 Proposición.- La correspondencia $\alpha \longrightarrow \alpha^{-1}$ define un homeomorfismo $\Omega(Y,a,b) \longrightarrow \Omega(Y,b,a)$.

Demostración. Si $\rho : I \longrightarrow I$, $\rho(t) = 1-t$, entonces $\alpha^{-1} = \alpha\circ\rho = \rho^\#(\alpha)$ y $\rho^\# : C(I,Y) \longrightarrow C(I,Y)$ es un homeomorfismo (por 2.4) que restringido a $\Omega(Y,a,b)$ nos da el homeomorfismo buscado.∎

Sea $\alpha\in \Omega(Y,a,b)$ una trayectoria fija. Para cualquier $y\in Y$ dada, la trayectoria α induce <u>funciones de transición</u> $\alpha_R : \Omega(Y,y,a) \longrightarrow \Omega(Y,y,b)$ definidas por $\alpha_R(\gamma) = \gamma*\alpha$ y

$\alpha_L : \Omega(Y,b,y) \longrightarrow \Omega(Y,a,y)$ por $\alpha_L(\gamma) = \alpha*\gamma$.

Las funciones de transición α_R y α_L son continuas por teorema 3.3.

3.7 Teorema.- Sean α, $\beta\in \Omega(Y,a,b)$. Entonces

(a) $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha_R \simeq \beta_R$ [resp. $\alpha_L \simeq \beta_L$];

(b) cada α_R [resp.α_L] es una equivalencia homotópica con inverso homotópico $(\alpha^{-1})_R$ [resp$(\alpha^{-1}{}_L)$]

Demostración. Lo probaremos solamente para α_R ya que para β_L es de manera semejante.

(a) Supongamos que $\alpha \sim \beta$ entonces existe $\sigma:I\longrightarrow \Omega(Y,a,b)$ una trayectoria de α hacia β. Ahora $\Phi(\gamma,t) = \gamma*(\sigma(t))$ define a $\Phi : \Omega(Y,y,a)\times I \longrightarrow \Omega(Y,y,b)$ que es continua y satisface

$\Phi(\gamma,0) = \gamma*(\sigma(0)) = \gamma*\alpha = \alpha_R(\gamma)$ y

$\Phi(\gamma,1) = \gamma*(\sigma(1)) = \gamma*\beta = \beta_R(\gamma)$.

Por lo tanto $\Phi:\alpha_R \simeq \beta_R$.

Ahora supongamos que $\alpha_R \simeq \beta_R$. Entonces para toda $\gamma\in \Omega(Y,y,a)$ las trayectorias $\alpha_R(\gamma)$ y $\beta_R(\gamma)$ pertenecen a una misma componente por trayectorias, esto es, $\gamma*\alpha \sim \gamma*\beta$, así que $\gamma^{-1}*(\gamma*\alpha) \sim \gamma^{-1}*(\gamma*\beta)$, y en consecuencia $\alpha \sim \beta$.

(b) Nótese que el teorema 3.5 implica $(\alpha^{-1})_R\circ\alpha_R \simeq (\alpha*\alpha^{-1})_R$, ya que $\alpha*\alpha^{-1} \sim \varepsilon_a$. Se sigue de (a) que la función $\beta \longrightarrow \beta*(\alpha*\alpha^{-1})$ es homotópica a la identidad, i.e., $(\alpha*\alpha^{-1})_R \simeq 1$. Y con ello queda demostrado que $(\alpha^{-1})_R\circ\alpha_R \simeq 1$.∎

Cada $\alpha\in \Omega(Y,a,b)$ induce una función continua $\underline{\alpha^{+}:\Omega(Y,a) \longrightarrow \Omega(Y,b)}$ dada por $\underline{\alpha^{+}(\lambda)} = \underline{\alpha^{-1}*\lambda*\alpha}$; nótese que $\alpha^{+} = (\alpha^{-1})_L\circ\alpha_R$. Como la composición de equivalencias homotópicas es una equivalencia homotópica, se sigue de 3.7 el siguiente resultado.

3.8 Corolario. α^{*} es una equivalencia homotópica con inverso homotópico $(\alpha^{-1})^{*}$.

IV GRUPOS DE HOMOTOPIA

Consideremos Y un espacio no vacío, de la demostración del teorema 3.5 resulta que las trayectorias en Y tienen las siguientes propiedades:

1.-$\alpha*(\beta*\gamma) \simeq (\alpha*\beta)*\gamma$ rel.Fr I donde $\alpha(1) = \beta(0)$ y $\beta(1) = \gamma(0)$

2.-$\alpha*\varepsilon_b \simeq \alpha$ rel.Fr I y $\varepsilon_a*\alpha \simeq \alpha$ rel.Fr I con $a = \alpha(0)$ y $b = \alpha(1)$

3.- $\alpha*\alpha^{-1} \simeq \varepsilon_a$ rel Fr I y $\alpha^{-1}*\alpha \simeq \varepsilon_b$ rel.Fr I

4.1 Proposición.- Si $\alpha \simeq \alpha'$ rel.Fr I, $\beta \simeq \beta'$ rel.Fr I y $\alpha(1) = \beta(0)$, entonces $\alpha*\beta \simeq \alpha'*\beta'$rel.Fr I .

Demostración. Sean $F:\alpha \simeq \alpha'$ rel.Fr I y $G:\beta \simeq \beta'$ rel.Fr I definimos $H : I\times I \longrightarrow Y$ por

$$H(t,s) = \begin{cases} F(2t,s) & 0 \le t \le 1/2 \\ G(2t-1,s) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases} .$$

Entonces H es continua pues para $t = 1/2$

$F(1,s) = \alpha(1) = \beta(0) = G(0,s)$ y dado que

$H(t,0) = (\alpha*\beta)(t)$,

$H(t,1) = (\alpha'*\beta')(t)$,

$H(0,s) = F(0,s) = \alpha(0)$,

$H(1,s) = G(1,s) = \beta'(1)$ se sigue que $H:\alpha*\beta \simeq \alpha'*\beta'$rel.Fr I .∎

Sea $\pi_1(Y,y_0)$ el conjunto de clases de homotopía relativa a Fr I de lazos en Y basados en y_0. Si α es uno de estos lazos, $[\alpha]$ denota la clase de homotopía de α relativa a Fr I y si definimos la multiplicación $[\alpha][\beta] = [\alpha*\beta]$, de las propiedades anteriores se sigue

1.- $[\alpha]([\beta][\gamma]) = ([\alpha][\beta])[\gamma]$

2.- $[\alpha][\delta_{y_0}] = [\alpha] = [\delta_{y_0}][\alpha]$

3.- $[\alpha][\alpha^{-1}] = [\delta_{y_0}] = [\alpha^{-1}][\alpha]$

luego $\pi_1(Y,y_0)$ es un grupo con esta multiplicación $[\delta_{y_0}]$ es la unidad multiplicativa y $[\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$ el inverso.

$\pi_1(Y,y_0)$ es el <u>grupo</u> <u>fundamental</u> de Y basado en y_0, también se le conoce como el primer grupo de homotopía.

Sea y_1 un punto de Y en la misma componente por trayectorias que y_0, una trayectoria w en Y de y_0 a y_1 induce una función $w^*: \pi_1(Y,y_0) \longrightarrow \pi_1(Y,y_1)$ definida por $w^*([\alpha]) = [w^+(\alpha)]$ con $w^+(\alpha) = w^{-1}*\alpha*w$ pues $(w^{-1}*\alpha*w)(0) = w^{-1}(0) = w(1) = y_1$ y $(w^{-1}*\alpha*w)(1) = w(1) = y_1$.

4.2 Proposición.- $w^*: \pi_1(Y,y_0) \longrightarrow \pi_1(Y,y_1)$ es un isomorfismo.

Demostración. Sean $[\alpha]$ y $[\beta]$ elementos de $\pi_1(Y,y_0)$ $w^*([\alpha][\beta]) = w^*([\alpha*\beta]) = [w^{-1}*\alpha*\beta*w] = [(w^{-1}*\alpha*w)*(w^{-1}*\beta*w)] = (w^*([\alpha]))(w^*([\beta]))$ de donde w^* es un homomorfismo. La trayectoria w^{-1} de y_1 a y_0 induce $(w^{-1})^*: \pi_1(Y,y_1) \longrightarrow \pi_1(Y,y_0)$ que por lo anterior es un homomorfismo. Ahora $(w^{-1})^*(w^*([\alpha])) = (w^{-1})^*([w^{-1}*\alpha*w]) = [w*(w^{-1}*\alpha*w)*w^{-1}] = [\alpha]$ por lo tanto $(w^{-1})^* \circ w^*$ es la función identidad de $\pi_1(Y,y_0)$, análogamente se prueba que $w^* \circ (w^{-1})^*$ es la identidad en $\pi_1(Y,y_1)$, entonces w^* es un isomorfismo y $(w^*)^{-1} = (w^{-1})^*$.■

Los grupos fundamentales de un espacio conexo por trayectorias con puntos base distintos son isomorfos.

Sea $f : X \longrightarrow Y$; $x_0 \in X$ y $y_0 = f(x_0)$ entonces f induce una función $f_*: \pi_1(X,x_0) \longrightarrow \pi_1(Y,y_0)$ dada por $f_*([\alpha]) = [f\circ\alpha]$ pues $f\circ\alpha : I \longrightarrow Y$ y
$(f\circ\alpha)(0) = f(\alpha(0)) = f(x_0) = y_0$, $(f\circ\alpha)(1) = f(\alpha(1)) = f(x_0) = y_0$.

4.3 Proposición.- $f_*: \pi_1(X,x_0) \longrightarrow \pi_1(Y,y_0)$ es un homomorfismo y si $f \simeq f'$ rel $\{x_0\}$ entonces $f_* = f'_*$

Demostración. Sean $[\alpha]$ y $[\beta]$ en $\pi_1(X,x_0)$. Tenemos que $f_*([\alpha][\beta]) = f_*([\alpha*\beta]) = [f\circ(\alpha*\beta)]$ y es inmediato que $f\circ(\alpha*\beta) = (f\circ\alpha)*(f\circ\beta)$ luego $f_*([\alpha][\beta]) = [(f\circ\alpha)*(f\circ\beta)] = (f_*[\alpha])(f_*[\beta])$.

Ahora sean $f,f': X \longrightarrow Y$ funciones homotópicas relativas a x_0 tal que $f(x_0) = f'(x_0) = y_0$ y sea $F:f \simeq f'$rel $\{x_0\}$.Entonces para cada $[\alpha]\in \pi(X,x_0)$, por 1.1, $H(t,s) = F(\alpha(t),s)$ define una homotopía de $f\circ\alpha$ hacia $f'\circ\alpha$. Veremos que H es relativa a Fr I. En efecto para $j\in \{0,1\}$, $\alpha(j) = x_0$ entonces $H(j,s) = F(\alpha(j),s) = F(x_0,s) = y_0$. Por lo tanto $f_*([\alpha]) = [f\circ\alpha] = [f'\circ\alpha] = f'_*([\alpha])$.■

Cuando $H:f \simeq f'$ y $f'(x_0) = y_1$ se tendrá $f'_* = w^*f_*$ donde $w^*: \pi_1(Y,y_0) \longrightarrow \pi_1(Y,y_1)$ es el isomorfismo inducido por la trayectoria $w(s) = H(x_0,s)$ de y_0 a y_1. Y si f es una equivalencia homotópica, f_* es un isomorfismo. Si X,Y son conexos por trayectorias y del mismo tipo de homotopía entonces $\pi_1(X,x_0)$ y $\pi_1(Y,y_0)$ son isomorfos. Esto es, el grupo fundamental es un invariante homotópico.

Si $e_1, e_2 \in E$, decimos $e_1 \sim e_2$ si e_1 y e_2 están en la misma componente por trayectorias de E. Para $e \in E$, $cт(e)$ denota la componente por trayectorias de E que contiene a e y $\pi_0(E) = E/\sim$ es el conjunto de componentes por trayectorias de E.

El teorema 3.1 nos permite identificar cada $[\alpha] \in \pi_1(Y,y_0)$ con $cт(\alpha)$ la componente por trayectorias de $\Omega(Y,y_0)$ que contiene a α, de manera que se tiene la igualdad de conjunos $\pi_0(\Omega(Y,y_0)) = \pi_1(Y,y_0)$.

4.4 Teorema.- $\pi_0(\Omega(Y,y_0))$ con la multiplicación $(cт(\alpha), cт(\beta)) \longrightarrow cт(\alpha*\beta)$ es el grupo fundamental $\pi_1(Y,y_0)$.

Demostración. La multiplicación $m : \Omega(Y,y_0)\times\Omega(Y,y_0) \longrightarrow \Omega(Y,y_0)$, $m(\alpha,\beta) = \alpha*\beta$, es continua por teorema 3.3, y de aqui $m_{CT}(cт(\alpha), cт(\beta)) = cт(m(\alpha,\beta)) = cт(\alpha*\beta) = [\alpha*\beta] = [\alpha][\beta]$.■

Definición- $\pi_2(Y,y_0) = \pi_1(\Omega(Y,y_0), \varepsilon_{y_0})$ es el segundo grupo de homotopía de Y basado en y_0 y recursivamente se define el n-ésimo grupo de homotopía como $\pi_n(Y,y_0) = \pi_{n-1}(\Omega(Y,y_0), \varepsilon_{y_0})$.

V GRUPOS TOPOLOGICOS

Un <u>grupo</u> G es un conjunto provisto de una operación, pongamos la multiplicación $\mu : G\times G \longrightarrow G$, $\mu(x,y) = xy$, que cumple las siguientes tres condiciones :

I.- Satisface la ley asociativa $(xy)z = x(yz)$, esto corresponde a la conmutatividad del diagrama

(1)
$$\begin{array}{ccc} G\times G\times G & \xrightarrow{\mu\times 1_G} & G\times G \\ {\scriptstyle 1_G\times\mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ G\times G & \xrightarrow[\mu]{} & G \end{array}$$

II.- Existe un elemento unidad $e\in G$ que satisface $xe = x = ex$; lo cual corresponde a la existencia de una función constante que denotamos como $\underline{e} : G \longrightarrow G$ y que hace al siguiente diagrama conmutativo

(2)
$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{(\underline{e},1_G)} & G\times G \\ {\scriptstyle (1_G,\underline{e})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ G\times G & \xrightarrow[\mu]{} & G \end{array}$$

III.- Para cada $x\in G$ existe el elemento inverso $x^{-1}\in G$ de x que cumple $xx^{-1} = e = x^{-1}x$; esto significa que existe una función inversión $i : G \longrightarrow G$ de tal manera que el diagrama

(3)
$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{(i,1_G)} & G\times G \\ {\scriptstyle (1_G,i)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ G\times G & \xrightarrow[\mu]{} & G. \end{array}$$

es conmutativo.

De esta manera el grupo G determina tres funciones μ , $\underline{e}$, i con las propiedades que hacen conmutativos los diagramas (1), (2) y (3) y a su vez tres funciones μ , $\underline{e}$, i con estas propiedades determinan el grupo G.

Definición.- Un <u>grupo topológico</u> G es un conjunto con dos estructuras; una de grupo con funciones μ , $\underline{e}$, i y otra de espacio topológico, de manera que las dos estructuras son compatibles, esto es, las funciones del grupo G $\mu : G \times G \longrightarrow G$ e $i : G \longrightarrow G$ son continuas, donde $G \times G$ es el espacio producto topológico. Obsérvese que $\underline{e}$ siempre es continua por ser una función constante.

5.A EJEMPLOS.-

i) $\mathbb{R}$ respecto a la suma y la topología usual de la recta real.

ii) $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ respecto a la multiplicación y la topología de subespacio de $\mathbb{R}$.

iii) $\mathbb{C}$ respecto a la suma compleja y la topología del plano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.

iv) $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ respecto a la multiplicación compleja y la topología relativa de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

v) Todo grupo con la topología discreta es un grupo topológico.

En lo sucecivo G denotará un grupo topológico con funciones μ , $\underline{e}$, i.

Sea H un subgrupo de G. H como subespacio de G, es decir con la topología relativa, es un grupo topológico puesto que la multiplicación e inversión en H son $\mu|_{H\times H}$ e $i|_H$ restringiendo funciones continuas. Diremos que H es un <u>subgrupo topológico</u> de G.

5.B EJEMPLOS.-

Las esferas unitarias S^0, S^1 y S^3 son grupos topológicos. En efecto, $\mathbb{Z}$ el grupo aditivo de los enteros como subgrupo topológico de $\mathbb{R}$ es es un grupo topológico discreto, el subgrupo $S^0 = \left\{-1,1\right\}$ de $\mathbb{Z}^*$ es un grupo topológico discreto.

$S^1 = \left\{z\in \mathbb{C} : |z|=1\right\}$ es un subgrupo topológico de $\mathbb{C}^*$.

Para mostrar que S^3 es grupo topológicos definimos el <u>algebra de los cuaternios</u> $\mathbb{H}$: $\mathbb{H}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con base $\left\{1, i, j, k\right\}$ cuya multiplicación $\mu : \mathbb{H}\times\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ es bilineal dada en los elementos base por $i^2=j^2=k^2=-1$, $ij=-ji=k$, $jk=-kj=i$, $ki=-ik=-j$, el elemento $1\in\mathbb{R}$ es la unidad multiplicativa y la multiplicación es asociativa, lo cual puede comprobarse directamente en los elementos base.

Para $h = x_1 1+x_2 i+x_3 j+x_4 k$ un elemento arbitrario de $\mathbb{H}$ definimos su conjugado como $\bar{h} = x_1 1-x_2 i-x_3 j-x_4 k$. La conjugación satisface

$\overline{(\bar{h})} = h$, $(\overline{a_1h_1+a_2h_2}) = a_1\bar{h}_1+a_2\bar{h}_2$ para a_1, a_2 reales y

$(\overline{h_1h_2}) = \bar{h}_2\,\bar{h}_1$.

La norma de $h = x_1 1+x_2 i+x_3 j+x_4 k$ es $|h| = \left[x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\right]^{1/2}$, y se tiene que $h\bar{h} = |h|^2 = \bar{h}h$. Cada $h \neq 0$ tiene inverso multiplicativo $h^{-1} = |h|^{-2}\bar{h}$.

$\mathbb{H}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ es isomorfo a $\mathbb{R}^4$ y la norma en $\mathbb{H}$

corresponde a la norma euclideana de los vectores en $\mathbb{R}^4$. Podemos vía un isomorfismo de $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{H}$ de grupos aditivos trasladar la topología de $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{H}$, así que $\mathbb{H}$ con respecto a la suma y esta topología es un grupo topológico, y el subespacio $\mathbb{H}^* = \mathbb{H}-\{0\}$ de $\mathbb{H}$ con respecto a la multiplicación es un grupo topológico, identificando $\mathbb{H}$ con $\mathbb{R}^4$, se obtiene el subgrupo topológico $S^3 = \{h\in \mathbb{H} : |h| = 1\}$ de $\mathbb{H}^*$.

Definición.- Un morfismo entre grupos topológicos G y G', es un homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow G'$ de grupos que es una función continua. Estos son los morfismos de la categoria $\mathcal{GT}$ cuyos objetos son los grupos topológicos. Cuando φ es un isomorfismo continuo y φ^{-1} es continua, es decir φ es un homeomorfismo, entonces φ es un isomorfismo de grupos topológicos.

En cada grupo G existe la función $\nu : G\times G \longrightarrow G$ $\nu(x,y) = xy^{-1}$, y para cada $x\in G$,$R_x : G \longrightarrow G$, $R_x(y) = yx$ es la translación por la derecha y $L_x : G \longrightarrow G$, $L_x(y) = xy$, es la translación por la izquierda.

5.1 Proposición.- Sea G un grupo con una estructura topológica, entonces G es un grupo topológico si y sólo si ν es continua y en este caso R_x, L_x son homeomorfismos para todo $x\in G$.

Demostración. Sean μ , $\underline{e}$, i las funciones del grupo G, se tiene que $\nu = \mu\circ(1_G\times i)$ así que si G es grupo topológico entonces ν es continua. Ahora si ν es continua , $i = \nu\circ(\underline{e},1_G)$ es continua y entonces

$\mu = \nu \circ (1_G \times i)$ es continua. Así G es un grupo topológico.

Supongamos que G es un grupo topológico, sea $\underline{x} : G \longrightarrow G$ la función constante con imagen $\{x\}$; como $L_x = \mu \circ (\underline{x}, 1_G)$ y $R_x = \mu \circ (1_G, \underline{x})$ entonces L_x y R_x son continuas y como $(L_x)^{-1} = L_{x^{-1}}$, $(R_x)^{-1} = R_{x^{-1}}$ entonces las translaciones son homeomorfismos.∎

Para $A, B \subset G$ y $x \in G$, tenemos que

$xA = L_x(A) = \{xa : a \in A\}$ y $Ax = R_x(A) = \{ax : a \in A\}$,

$AB = \{ab : a \in A,\ b \in B\} = \bigcup_{b \in B} R_b(A)$ y $BA = \{ba : a \in A,\ b \in B\} = \bigcup_{b \in B} L_b(A)$.

5.2 Proposición.- Sea G un grupo topológico. Entonces

1) si A es abierto o cerrado de G, Ax y xA son abiertos o cerrados respectivamente.

2) si A es abierto entonces AB y BA son abiertos para todo $B \subset G$.

3) si A es cerrado y B es finito, AB y BA son cerrados de G.

4) si $\mathbb{B}$ es una base de vecindades de e en G, $\{Vx : V \in \mathbb{B}\}$ y $\{xV : V \in \mathbb{B}\}$ son base de vecindades de x en G.

Demostración. 1) Sea A abierto (o cerrado) en el grupo topológico G Vamos a demostrar que Ax y xA son abiertos (o cerrados). Como las translaciones $R_x, L_x : G \longrightarrow G$ son homeomorfismos, $R_x(A) = Ax$ y $L_x(A) = xA$ son abiertos (o cerrados) respectivamente.

2) Sean A abierto en G y $B \subset G$, entonces $AB = \bigcup_{b \in B} Ab$ y $BA = \bigcup_{b \in B} bA$ son uniones de abiertos.

3) Ahora sea A cerrado y $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subset G$. Entonces

$AB = \bigcup_{i=1}^{n} Ab_i$ y $BA = \bigcup_{i=1}^{n} b_iA$ son uniones finitas de cerrados.

4) Dado que $e \in \mathcal{V}$ se tiene que $x \in Vx$ y $x \in xV$ para toda $V \in \mathcal{B}$. Ahora sea $\eta \in N_x$, luego $x^{-1}\eta$ es vecindad de e, por lo tanto existe $\nu \in \mathcal{B}$ tal que $\nu \subset x^{-1}\eta$ lo cual implica que $\nu x \subset \eta$.■

Sea H un subgrupo topológico de G y $G/H = \left\{xH : x \in G\right\}$ el conjunto de clases laterales izquierdas de H, la función $q : G \longrightarrow G/H$, $q(x) = xH$, define en G/H la topología cociente: U es abierto (o cerrado) de G/H si y sólo si $q^{-1}(U)$ es abierto (o cerrado) de G respectivamente.

5.3 Proposición.- La función cociente $q : G \longrightarrow G/H$ es abierta y si H es un subgrupo normal de G, G/H es un grupo topológico.

Demostración. Sea A abierto de G, $q(A) = \bigcup_{x \in A} xH = AH$ es abierto por 5.2(2), luego q(A) es abierto en el espacio cociente G/H. Sean $\overline{\mu}$, $\overline{e}$, $\overline{I}$ las funciones del grupo cociente en G/H dadas por $\overline{\mu}((x_1H),(x_2H)) = x_1x_2H$ e $\overline{I}(xH) = (xH)^{-1} = Hx^{-1} = x^{-1}H$ respectivamente, se tiene $\overline{\mu}\circ(q \times q) = q\circ\mu$, $\overline{I}\circ q = q\circ i$. Pero q y $q \times q$ son funciones cociente ya que son suprayectivas, continuas y abiertas, entonces por la propiedad de las funciones cociente (si p es función cociente y $f\circ p$ es continua entoces f es continua), se sigue que $\overline{\mu}$ e $\overline{I}$ son continuas.

De donde G/H es un grupo topológico y q es un morfismo abierto de grupos topológicos.■

5.C EJEMPLO.-

Tomando a $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ es un subgrupo topológico discreto de $\mathbb{R}$, el grupo cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es isomorfo como grupo topológico a S^1. En efecto, la función $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ $\exp(x) = e^{i2\pi x} \in S^1 \subset \mathbb{C}$ es un homomorfismo continuo y como $e^{i2\pi x} = e^{i2\pi y} \Leftrightarrow x-y$ es un entero, entonces la función exponencial induce un isomorfismo $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow S^1$ de grupos topológicos.

5.4 Proposición.- Sean $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de grupos topológicos el producto topológico $\Pi G_\alpha = G$ tiene una estructura natural de grupo, el producto de grupos (con multiplicación $(x_\alpha)(y_\alpha) = (x_\alpha y_\alpha)$, unidad $e = (e_\alpha)$ e inverso $(x_\alpha)^{-1} = (x_\alpha^{-1})$.

Demostración. Si μ, e, i son las funciones del grupo G y μ_α, e_α, i_α son las funciones de G_α para toda α, entonces :

$$\begin{tikzcd} G\times G \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "P_\alpha\times P_\alpha"'] & G \arrow[d, "P_\alpha"] \\ G_\alpha\times G_\alpha \arrow[r, "\mu_\alpha"'] & G_\alpha \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "i"] \arrow[d, "P_\alpha"'] & G \arrow[d, "P_\alpha"] \\ G_\alpha \arrow[r, "i_\alpha"'] & G_\alpha \end{tikzcd}$$

con P_α la proyección coordenada, son diagramas conmutativos. Ahora bien, por la propiedad del producto topológico ($f : X \longrightarrow \Pi Y_\alpha$ es continua si y sólo si $P_\alpha \circ f : X \longrightarrow Y_\alpha$ es continua $\forall\alpha$) las funciones multiplicación μ e inversión i de G son continuas.

El producto topológico de grupos topológicos es un grupo topológico y cada proyección coordenada es un homomorfismo de grupos topológicos.

5.D EJEMPLO.-

El n-toro $T^n = S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1$ es un grupo topológico isomorfo al grupo topológico cociente $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, por el ejemplo 5.C.

En general si H_α es un subgrupo normal de G_α para cada α, $H = \Pi H_\alpha$ es un subgrupo normal de G y G/H es isomorfo como grupo topológico a $\Pi(G_\alpha/H_\alpha)$.

5.5 Proposición.- Sea G un grupo topológico con unidad e.

(1) Todo subgrupo que es vecindad de e es abierto y cerrado en G.

(2) La componente por trayectorias P de G que contiene a e es un subgrupo normal de G y las clases laterales de P son las componentes por trayectorias de G, esto es $G/P = \pi_0(G)$.

(3) Si e tiene una vecindad conexa por trayectorias, el grupo topológico cociente G/P es discreto.

Demostración. (1) Sea H un subgrupo de G que contiene una vecindad abierto U de e. Entonces $e \in U \subset H$ implica $H = HU$ luego H es abierto de G por serlo U. Por otro lado, las clases laterales de H son abiertas, ya que son homeomorfas a H por 5.1, y como G-H es abierto, por ser unión de clases laterales que son abiertas, H es cerrado.
(2) Como la componente por trayectorias P de G que contiene a e es conexa por trayectorias, 5.1 implica que $Rx^{-1}(P) = Px^{-1}$ y $Ly(Ry^{-1}(P)) = yPy^{-1}$ también son componentes por trayectorias para,

todo $x,y\in G$. Si $x\in P$, entonces $e\in Px^{-1}$. Además $e\in yPy^{-1}$ para todo $y\in G$ de donde $Px^{-1} = P$. $yPy^{-1} = P$ lo cual significa que P es un subgrupo normal de G.

(3) Ahora si P contiene una vecindad abierta de e por (1) y (2), P y todas sus clases laterales Pz son abiertos de G y como estos son imagenes inversas de puntos de G/P respecto a la función cociente, G/P es discreto.■

5.E EJEMPLO.-

Sea G un grupo topológico con funciones μ , $\underline{e}$, i. En el espacio discreto $\pi_0(G)$ de las componentes por trayectorias de G se define la multiplicación $\mu_{CT} : \pi_0(G)\times\pi_0(G) \longrightarrow \pi_0(G)$ por $\mu_{CT}(CT(x_1),CT(x_2)) = CT(x_1x_2)$ con $\mu(x_1,x_2) = x_1x_2$, la cual está bien definida. En efecto, $\mu : G\times G \longrightarrow G$ es continua e induce la función $\mu_0 : \pi_0(G\times G) \longrightarrow \pi_0(G)$ dada por $\pi_0(\mu)(CT(x_1,x_2)) = CT(\mu(x_1,x_2)) = CT(x_1x_2)$, pero $\pi_0(G\times G) = \pi_0(G)\times\pi_0(G)$ pues $CT(x_1,x_2) = (CT(x_1),CT(x_2))$ así que $\mu_{CT} = \pi_0(\mu)$.

La continuidad se cumple por ser $\pi_0(G)\times\pi_0(G)$ discreto. Dado que $CT(ex) = CT(x) = CT(xe)$, $CT(e)$ es la unidad multiplicativa de $\pi_0(G)$ y como $CT(x^{-1}x) = CT(e) = CT(xx^{-1})$ entonces $CT(x^{-1})$ es el inverso de $CT(x)$; asi que la inversión $i : \pi_0(G) \longrightarrow \pi_0(G)$, $i(CT(x)) = CT(x^{-1})$ es continua. Al grupo topológico discreto $\pi_0(G)$ con esta multiplicación μ_{CT} le llamaremos el inducido en las componentes por trayectorias.

5.F EJEMPLO.-

Sean G un grupo topológico con multiplicación μ, unidad $\underline{e}$, e inversión i y X un espacio de Hausdorff localmente compacto. consideremos $C(X,G)$ el espacio de funciones continuas de X en G con la topología compacto-abierta. Para $f,g\in C(X,G)$ sea $\mu_*(f,g)(x) = \mu(f(x),g(x))$ la función inducida por μ en $C(X,G)$. Entonces,

$\mu_* : C(X,G)\times C(X,G) \longrightarrow C(X,G)$.

A continuación vamos a probar que $C(X,G)$ con la topología compacto-abierta y la multiplicación μ_* es un grupo topológico.

Sea (k,U) un abierto subbásico de $C(X,G)$, esto es $K\subset X$ compacto y U abierto de G, y $(f,g)\in \mu_*^{-1}(K,U)$. Entonces $\mu(f(K),g(K))\subset U$. Dado que $f(K)$ y $g(K)$ son compactos, U abierto y $\mu : G\times G) \longrightarrow G$ es continua existen U_1 y U_2 abiertos de G tal que $\mu(U_1,U_2) = U_1U_2\subset U$. Así, $\mu_*[(K,U_1),(K,U_2)](K) = \mu(U_1,U_2)\subset U$, por lo tanto $(K,U_1)\times(H,U_2)$ es una vecindad de (f,g) contenida en $\mu_*^{-1}((K,U))$ con lo que queda probada la continuidad de μ_*.

La asociatividad de μ_* se sigue de las igualdades

$\mu_*\circ(\mu_*\times 1_{C(X,G)})(f,g,h) = \mu\circ(\mu\circ(f,g),h) = \mu\circ(\mu\times 1_G)\circ(f,g,h) =$
$\mu\circ(1_G\times\mu)\circ(f,g,h) = \mu_*\circ(1_{C(X,G)}\times\mu_*)(f,g,h)$.

La unidad de $C(X,G)$ es la función constante $k_e : X \longrightarrow G$ $k_e(X) = e$ y se tiene que

$\mu_*\circ(1_{C(X,G)},k_e)(f) = \mu\circ(f,e) = \mu\circ(1_G,e)\circ f = f = \mu_*\circ(k_e,1_{C(X,G)})(f)$.

La función inversión es $i_*(f) = i\circ f$, en efecto,

$\mu_*\circ(1_{C(X,G)},i_*)(f) = \mu\circ(f,i\circ f) = \mu\circ(1_G,i)\circ f = k_e = \mu_*\circ(i_*,1_{C(X,G)})(f)$.

Veremos la continuidad. Dado (K,U) abierto subbásico de $C(X,G)$ y $f\in i_*^{-1}(K,U)$ se tiene que $i_*(f)(K) = i\circ(f(K))\subset U$. Por la continuidad de i existe un abierto V de G tal que $f(K)\subset V\subset i^{-1}(K)$ de donde $i_*((K,V))\subset (K,U)$. Hemos probado que $C(X,G)$ es un grupo topológico con funciones μ_*, k_e, i_*.■

5.G EJEMPLO.-

Combinando los dos ejemplos anteriores: Si G es un grupo topológico y X es un espacio de Hausdorff localmente compacto entonces $\pi_0(C(X,G))$ es grupo topológico discreto isomorfo como grupo a $C(X,G)/P$ con $P = c\tau(k_e)$, pues por la proposición 5.5(2) P es un subgrupo normal de $C(X,G)$, y los puntos del grupo cociente son las componentes por trayectorias de $C(X,G)$. Si P contiene una vecindad de k_e en $C(X,G)$, entonces $C(X,G)/P$ es discreto. Este es el caso cuando X es compacto y U es una vecindad de e contraible en G pues si $f\in (X,U)$ abierto subbásico de $C(X,G)$, $f = j\circ f'$ con $f'\colon X \longrightarrow U$, $j\colon U\subset G$ y como $j \simeq k_e$; $k_e(U) = e$ entonces $f \simeq k_e\circ f' = k_e$ implica $f\in [k_e] = P$ y por lo tanto $(X,U)\subset P$.

VI H-ESPACIOS

Definición.- Un <u>H-espacio</u> consta de un espacio topológico Y y de una función continua $\mu : Y\times Y \longrightarrow Y$ tal que existe una función constante $\underline{e} : Y \longrightarrow Y$ con $\underline{e}(y) = e$ que satisface $\mu\circ(1_Y,\underline{e}) \simeq 1_Y$ y $\mu\circ(\underline{e},1_Y) \simeq 1_Y$. Esto es, el diagrama:

$$
(1) \quad \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{(1_Y,\underline{e})} & Y\times Y \\ {\scriptstyle (\underline{e},1_Y)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ Y\times Y & \xrightarrow[\mu]{} & Y \end{array}
$$

es homotópicamente conmutativo.

A μ se le llama la <u>multiplicación</u> del H-espacio (Y,μ) y a $\underline{e}$ una <u>H-unidad</u> de (Y,μ).

Observación: Un H-espacio puede tener varias H-unidades, por ejemplo si $\underline{e} \simeq \underline{e}'$ con $\underline{e}'$ otra función constante de $Y \longrightarrow Y$, entonces $(1_Y,\underline{e}) \simeq (1_Y,\underline{e}')$ y $(\underline{e},1_Y) \simeq (\underline{e}',1_Y)$ por (proposición 1.4) de donde $\underline{e}'$ es H-unidad de (Y,μ). Es más si las funciones $\underline{e}$ y $\underline{e}'$ son H-unidades de (Y,μ) entonces $\underline{e} \simeq \underline{e}'$, para verlo basta mostrar que hay una trayectoria α en Y de e a e' pues entonces $\forall\ y\in Y$ $H(y,t) = \alpha(t)$ define una homotopía de $\underline{e}$ a $\underline{e}'$ y esto es consecuencia de la siguiente proposición.

6.1 Proposición.- Sea (Y,μ) H-espacio y sea $P = \left\{e\in Y \mid \underline{e} \text{ es una H-unidad de } (Y,\mu)\right\}$ entonces P es una componente por trayectorias de Y. Si además e y e' están en P tenemos que $\mu(e,e')$ está en P.

Demostración. Sea $e_\circ \in P$, por demostrar que $P = c\tau(e_\circ)$

$\Rightarrow$) Sea $e \in c\tau(e_\circ)$. Tomemos una trayectoria α de e a $e_\circ$, la función continua $\mu\circ(1_Y \times \alpha) : Y \times I \longrightarrow Y$ es una homotopía de $\mu(1_Y, \underline{e})$ a $\mu(1_Y, \underline{e_\circ})$. Ya que $\mu\circ(1_Y\times\alpha)(y,0) = \mu(y,\alpha(0)) = \mu(y,e) = \mu(1_Y,\underline{e})(y)$ y $\mu\circ(1_Y\times\alpha)(y,1) = \mu(y,\alpha(1)) = (y,e_\circ) = \mu(1_Y,\underline{e_\circ})(y)$ $\forall y \in Y$. Ahora como $\mu(1_Y,\underline{e_\circ}) \simeq 1_Y$ tenemos que $\mu(1_Y,\underline{e}) \simeq 1_Y$. De manera similar $\mu(\underline{e},1_Y) \simeq 1_Y$ lo que implica que $e \in P$. Por lo tanto tenemos que $c\tau(e_\circ) \subset P$.

$\Leftarrow$) Sea $e \in P$, entonces para cada $a \in Y$, los puntos $\mu(a,e)$ y a deben de pertenecer a la misma componente, de igual manera los puntos $\mu(e_\circ,a)$ y a están en la misma componente. Ya que como antes se mencionó una homotopía de $\mu(1_Y,e)$ hacia la 1_Y nos proporciona una trayectoria de $\mu(a,e)$ hacia a. De esta manera $\mu(e_\circ,e)$, e, $e_\circ \in c\tau(e_\circ)$, luego $P \subset c\tau(e_\circ)$.

De lo anterior P es una componente por trayectorias y $\mu(e,e')$ pertenece a P si e, $e' \in P$.■

La componente por trayectorias P es llamada la <u>componente principal</u> del H-espacio (Y,μ).

6.2 Proposición. Sea (Y,μ) un H-espacio y P su componente principal entonces $(P,\mu|_{P\times P})$ es un H-espacio.

Demostración. Es consecuencia inmediata de 6.1, dado que el producto de dos elementos que pertenecen a la componente principal está en la componente principal.

6.3 Proposición.- Para que Y sea un H-espacio es necesario, y si Y es localmente conexo también es suficiente, que una componente por trayectorias de Y sea un H-espacio.

Demostración. La necesidad se sigue de 6.1 y 6.2.

Ahora sea Y un espacio localmente conexo y supongamos que existe una componente por trayectorias Y' y una multiplicación $\mu': Y'\times Y' \longrightarrow Y'$ continua de tal forma que (Y',μ') es H-espacio.

Fijemos $e\in Y'$ y definamos $\mu : Y\times Y \longrightarrow Y$ de la manera siguiente

$$\mu(y_1,y_2) = \begin{cases} e & \text{si } y_1\notin Y', y_2\notin Y' \\ y_2 & \text{si } y_1\in Y', y_2\notin Y' \\ y_1 & \text{si } y_1\notin Y', y_2\in Y' \\ \mu'(y_1,y_2) & \text{si } y_1\in Y', y_2\in Y' \end{cases}$$

Así tenemos que

$\mu|_{(Y-Y')\times(Y-Y')}$ es constante por lo que es continua.

$$\left.\begin{matrix} \mu|_{(Y-Y')\times Y'} \\ \mu|_{Y'\times(Y-Y')} \end{matrix}\right\} \text{ son proyecciones y por lo tanto continuas}$$

$\mu|_{Y'\times Y'} = \mu'$ continua

Como Y es un espacio localmente conexo y Y' es una componente por trayectorias tenemos que Y' es abierto y cerrado lo que implica que $Y-Y'$ es abierto y cerrado con lo que μ es continua.

Por demostrar que $\mu\circ(1_Y,\underline{e}) \simeq 1_Y$ y $\mu\circ(\underline{e},1_Y) \simeq 1_Y$. Dado que (Y',μ') es H-espacio existe $H':\mu(1_{Y'},\underline{e}) \simeq 1_{Y'}$.

Definamos $H : Y\times I \longrightarrow Y$ como $H(y,t) = \begin{cases} y & \text{si } y\in Y-Y' \\ H'(y,t) & \text{si } y\in Y' \end{cases}$. Entonces H es continua y se tiene

$$H(y,0) = \begin{cases} y & \text{si } y\in Y-Y' \\ H'(y,0) & \text{si } y\in Y' \end{cases} = \left\{\begin{matrix} y & \text{si } y\in Y-Y' \\ \mu'(y,e) & \text{si } y\in Y' \end{matrix}\right\} = \mu(y,e) = \mu(1_Y,\underline{e})(y)$$

y

$$H(y,1) = \begin{cases} y & \text{si } y\in Y-Y' \\ H(y,0) & \text{si } y\in Y' \end{cases} = \left\{\begin{matrix} y & \text{si } y\in Y-Y' \\ 1_{Y'}(y) & \text{si } y\in Y' \end{matrix}\right\} = 1_Y(y)$$

Lo que implica que $H:\mu(1_Y,\underline{e}) \simeq 1_Y$. De manera semejante se prueba que $\mu(\underline{e},1_Y) \simeq 1_Y$ con lo que queda demostrado que (Y,μ) es H-espacio

Definición.- Una <u>unidad</u> de un H-espacio (Y,μ) es una H-unidad $\underline{e}$ que hace el diagrama (1) conmutativo, es decir que $\mu(e,y) = \mu(y,e) = y$ para toda $y \in Y$.

6.4 Proposición.- Si el H-espacio (Y,μ) tiene unidad ésta es única.

Demostración. Sean e y e' dos unidades de (Y,μ) por lo tanto tenemos que $e' = \mu(e,e') = \mu(e',e) = e$

6.A EJEMPLO.-

Todo espacio discreto Y es H-espacio, incluso para cualquier $e\in Y$ existe una multiplicación μ en Y con unidad $\underline{e}$.

En efecto sea $e\in Y$ fijo, definamos la multiplicación de la siguiente manera $\mu : Y\times Y \longrightarrow Y$; $\mu(x,z) = \begin{cases} x \text{ si } x\neq e \\ z \text{ si } x=e \end{cases}$

la continuidad de μ se sigue de que $Y\times Y$ es discreto

Notemos que para todo $x\in Y$

$$\mu\circ(1_Y,\underline{e})(x) = \mu(x,e) = x \text{ y } \mu\circ(\underline{e},1_Y)(x) = \mu(e,x) = x .$$

Por lo que concluimos que (Y,μ) es H-espacio con unidad e.

Es más, cualquier H-unidad de un H-espacio topológico discreto es una unidad, debido a 1.6.

En particular, si X un espacio topológico, a $\pi_0(X)$ el espacio discreto de las componentes por trayectorias de X, le podemos dar una estructura de H-espacio con unidad cualquier componente por trayectorias $cr(x)$ de X.

Definición.- La multiplicación μ de un H-espacio (Y,μ) se dice que es <u>H-asociativa</u> si el cuadro

$$\begin{tikzcd} Y\times Y\times Y \arrow[r, "\mu\times 1_Y"] \arrow[d, "1_Y\times\mu"'] & Y\times Y \arrow[d, "\mu"] \\ Y\times Y \arrow[r, "\mu"] & Y \end{tikzcd}$$

es homotópicamente conmutativo, es decir, $\mu\circ(\mu\times 1_Y) \simeq \mu\circ(1_Y\times\mu)$ y μ es <u>asociativa</u> si $\mu\circ(\mu\times 1_Y) = \mu\circ(1_Y\times\mu)$, en tal caso se dice que el H-espacio es asociativo.

Definición. Una función continua $\varphi : Y \longrightarrow Y$ es una <u>H-inversión</u> para el H-espacio (Y,μ) si cada una de las siguientes composiciones:

$$Y \xrightarrow{(1_Y,\varphi)} Y\times Y \xrightarrow{\mu} Y \quad \text{y} \quad Y \xrightarrow{(\varphi,1_Y)} Y\times Y \xrightarrow{\mu} Y$$

es homotópica a $\underline{e} : Y \longrightarrow Y$ una H-unidad fija de (Y,μ) y se dice que es <u>inversión</u> si $\mu\circ(1_Y,\varphi) = \underline{e} = \mu\circ(\varphi,1_Y)$.

Definición.- A un H-espacio cuya multiplicación es H-asociativa y tiene una función H-inversión, satisface las propiedades que resultan de reemplazar, en los axiomas de grupo, las igualdades por homotopías, le llamaremos <u>H-grupo</u>.

Todo grupo topológico es un H-grupo .

6.B EJEMPLO.-

Dado (Y,μ) un H-espacio, consideremos μ_{CT} la multiplicación inducida por μ en el espacio discreto $\pi_0(Y)$ como en el ejemplo 5.E . Veremos que $(\pi_0(Y),\mu_{CT})$ es H-espacio y si (Y,μ) es H-grupo, $(\pi_0(Y),\mu_{CT})$ es grupo.

Sea $\underline{e}$ H-unidad de (Y,μ). $\mu\circ(1_Y,\underline{e}) \simeq 1_Y \simeq \mu\circ(\underline{e},1_Y)$ implica que $CT(\mu(x,e)) = CT(x) = CT(\mu(e,x))$ $\forall$ $x\in Y$. De aqui

$\mu_{CT}\circ(1,\underline{CT(e)})(CT(x)) = \mu_{CT}(CT(x),CT(e)) = CT(\mu(x,e)) = CT(x) =$
$CT(\mu(e,x)) = \mu_{CT}(CT(e),CT(x)) = \mu_{CT}\circ(\underline{CT(e)},1)(CT(x))$.

Por lo tanto $(\pi_0(Y),\mu_{CT})$ es H-espacio con unidad $\underline{CT(e)}$.

Ahora supongamos que (Y,μ) es H-grupo. En forma semejante a la demostración anterior, se prueba que la H-asociatividad de μ, $\mu\circ(\mu\times 1_Y) \simeq \mu(1_Y\times\mu)$ implica la asociatividad de μ_{CT}.

Sea φ una H-inversión de (Y,μ), Definimos φ_{CT}: $\pi_0(Y) \longrightarrow \pi_0(Y)$ por $\varphi_{CT}(CT(z)) = CT(\varphi(z))$ para $z\in Y$. Se tiene que

$\mu_{CT}\circ(1,\varphi_{CT})(CT(z)) = \mu_{CT}(CT(z),CT(\varphi(z))) = CT(\mu(z,\varphi(z))) = CT(e) =$
$CT(\mu(\varphi(z),z) = \mu_{CT}(CT(\varphi(z)),CT(z)) = \mu_{CT}\circ(\varphi_{CT},1)(CT(z))$. Así $(\pi_0(Y),\mu_{CT})$ es un grupo discreto con multiplicación μ_{CT}, unidad $\underline{CT(e)}$ e inversión φ_{CT}. Lo que se quería mostrar.∎

6.5 Proposición.-Todo H-grupo discreto es un grupo topológico.

Demostración. Sea (Y,μ) H-grupo, Y espacio topológico discreto. Entonces $\mu\circ(\mu\times 1_Y) \simeq \mu\circ(1_Y\times\mu)$ y por la proposición 1.6 se tiene que $\mu\circ(\mu\times 1_Y) = \mu\circ(1_Y\times\mu)$.

Así que μ es asociativa. Además como se vió en el ejemplo 6.A, (Y,μ) tiene una unidad .

Sabiendo que (Y,μ) tiene H-inversión, como antes podemos concluir que la H-inversión es una inversión.

Y con esto hemos probado que (Y,μ) es un grupo topológico .■

6.6 Teorema.- Si (Y,μ) es un H-grupo entonces todas las componentes por trayectorias de Y pertenecen al mismo tipo de homotopía.

Demostración. Sea P la componente principal de (Y,μ), sea C cualquier componente por trayectorias de (Y,μ) y $\varphi : Y \longrightarrow Y$ una H-inversión.

Fijemos $c_0 \in C$, definimos $f : P \longrightarrow C$ por $f(p) = \mu(p,c_0)$ y $g : C \longrightarrow P$ por $g(c) = \mu(c,\varphi(c_0))$ estos puntos están en C y en P respectivamente ya que $p \in P$ es H-unidad y φ es H-inversión, entonces $f = \mu\circ(1_P,\underline{c_0})$ y $g = \mu\circ(1_C,\underline{\varphi(c_0)})$. Como φ es H-inversión para $e \in P$ fija $\mu\circ(1_Y,\varphi) \simeq \underline{e}$ y $\mu\circ(\varphi,1_Y) \simeq \underline{e}$, ahora tenemos por la H-asociatividad de μ que

$$g\circ f = \mu\circ(\mu(1_P,\underline{c_0}),\underline{\varphi(c_0)}) \simeq \mu\circ(1_P,\mu(\underline{c_0},\underline{\varphi(c_0)})) \simeq \mu(1_P,\underline{e}) \simeq 1_P.$$

y

$$f\circ g = \mu\circ(\mu(1_C,\underline{\varphi(c_0)}),\underline{c_0}) \simeq \mu\circ(1_C,\mu(\underline{\varphi(c_0)},\underline{c_0})) \simeq \mu(1_C,\underline{e}) \simeq 1_C.$$

Que es lo se quería probar.■

Definición.- Sea (Y,μ) un H-espacio se dice que μ es <u>H-abeliana</u> si el triángulo siguiente es homotópicamente conmutativo

$$\begin{tikzcd} Y\times Y \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\mu"'] & & Y\times Y \arrow[dl, "\mu"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

donde $T(y_1,y_2) = (y_2,y_1)$. Y si el diagrama es conmutativo, μ es abeliana.

Definición.- Un H-grupo con multiplicación H-abeliana es llamado un H-grupo abeliano.

6.C EJEMPLO.- El grupo discreto $S^0 = \{-1,1\}$ y el subespacio S^1 de $\mathbb{R}^2$, con la multiplicación compleja son H-grupos abelianos. S^3 con la multiplicación cuaterniona como subespacio de $\mathbb{R}^4$ es H-grupo no abeliano.

6.7 Proposición.- Todo H-espacio contraible es H-grupo abeliano.

Demostración. Sea (Y,μ) un H-espacio con Y contraible esto es $1_Y \simeq \underline{c}$, con $c \in Y$. Por 1.2 las funciones continuas $\mu\circ(\mu\times 1_Y)$, $\mu\circ(1_Y\times\mu)$: $Y\times Y\times Y \longrightarrow Y$ son homotópicas. Luego μ es H-asociativa. Sea $\underline{e}$ una H-unidad de (Y,μ), otra vez por 1.2 las funciones constantes $\underline{c}$, $\underline{e}$: $Y \longrightarrow Y$ son homotópicas, definimos $\varphi := \underline{e}$, entonces $\mu\circ(1_Y,\varphi) = \mu\circ(1_Y,\underline{e}) \simeq 1_Y \simeq \underline{c} \simeq \underline{e}$, análogamente $\mu\circ(\varphi,1_Y) \simeq \underline{e}$ y con esto φ es una H-inversion de (Y,μ).

Como μ, $\mu\circ T$ son funciones continuas de $Y\times Y$ en Y y Y es un contraible, son homotópicas y por lo tanto μ es H-abeliana.

Así queda demostrado que (Y,μ) es H-grupo abeliano.∎

6.8 Teorema.- Sea (Y,μ) un H-espacio. Entonces para cada espacio de Hausdorff localmente compacto X, el espacio de funciones $C(X,Y)$ con multiplicación μ_*, dada por $\mu_*(f,g) = \mu\circ(f,g)$, es un H-espacio. Si μ es H-asociativa, la multiplicación inducida μ_* también lo es. Si (Y,μ) admite una H-inversión, entonces el H-espacio $(C(X,Y),\mu_*)$ también admite H-inversión.

Demostración. Como X es localmente compacto y Hausdorff tenemos por 2.2 que la función evaluación $C(X,Y)\times X \xrightarrow{E} Y$ es continua. Por lo tanto $R = (E\times E)\circ(1_{C(X,Y)}\times T\times 1_X)\circ(1_{C(X,Y)}\times 1_{C(X,Y)}\times\Delta)$ es continua ya que es composición de funciones continuas como se puede apreciar en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
C(X,Y)\times C(X,Y)\times X \arrow[r, "1_{C(X,Y)}\times 1_{C(X,Y)}\times\Delta"] \arrow[rdd, "R"'] & C(X,Y)\times C(X,Y)\times X\times X \arrow[d, "1_{C(X,Y)}\times T\times 1_X"] \\
& C(X,Y)\times X\times C(X,Y)\times X \arrow[d, "E\times E"] \\
& Y\times Y
\end{tikzcd}$$

donde $T(g,x) = (x,g)$ para $g\in C(X,Y)$ y $x\in X$.

Sea γ la composición $C(X,Y)\times C(X,Y)\times X \xrightarrow{R} Y\times Y \xrightarrow{\mu} Y$, mostraremos que γ es la función asociada a μ_*, es decir $\gamma = E\circ(\mu_*\times 1_X)$. Para $(f,g,x)\in C(X,Y)\times C(X,Y)\times X$, tenemos

$$\begin{aligned}
\mu\circ R(f,g.x) &= \mu\circ(E\times E)\circ(1_{C(X,Y)}\times T\times 1_X)\circ(1_{C(X,Y)}\times 1_{C(X,Y)}\times\Delta)(f,g,x)\\
&= \mu\circ(E\times E)\circ(1_{C(X,Y)}\times T\times 1_X)\circ(f,g,x,x)\\
&= \mu\circ(E\times E)(f,x,g,x) = \mu(f(x),g(x))\\
&= E\circ(\mu_*(f,g),x) = E\circ(\mu_*\times 1_X)(f,g,x)
\end{aligned}$$

Aplicando la proposición 2.2 tenemos que la continuidad de

$E\circ(\mu_{*}\times 1_{X}) = \gamma : C(X,Y)\times C(X,Y)\times X \longrightarrow Y$ implica que

$\mu_{*}: C(X,Y)\times C(X,Y) \longrightarrow C(X,Y)$ es continua.

Ahora consideremos $\underline{e}$ una H-unidad de (Y,μ), $H_1:\mu\circ(\underline{e},1_Y) \simeq 1_Y$ y $H_2:\mu\circ(1_Y,\underline{e}) \simeq 1_Y$. Sea $k_e : X \longrightarrow Y$, como $k_e(x) = e$, y definamos $\underline{k_e} : C(X,Y) \longrightarrow C(X,Y)$, $\underline{k_e}(f) = k_e$, demostraremos

$\mu_{*}\circ(\underline{k_e},1_{CT(X,Y)}) \simeq 1_{CT(X,Y)}$ y $\mu_{*}\circ(1_{CT(X,Y)},\underline{k_e}) \simeq 1_{CT(X,Y)}$

sea $H_{1*}: C(X,Y)\times I \longrightarrow C(X,Y)$ de manera que su asociada $\hat{H}_1(f,t)(x) = H_1(f(x),t)$, luego $\hat{H}_1 = H_1\circ(E\times 1_I)\circ(1_{CT(X,Y)}\times T)$ y por lo tanto continua. Para $t = 0$ $\hat{H}_1(f,0)(x) = H_1(f(x),0) = \mu\circ(\underline{e},1_Y)(f(x)) = \mu_{*}\circ(\underline{k_e},1_{CT(X,Y)})(f)(x)$ y si $t = 1$ $\hat{H}_1(f,1)(x) = H_1(f(x),1) = 1_Y(f(x)) = 1_{CT(X,Y)})(f)(x)$ por lo tanto

$H_{1*}:\mu_{*}\circ(\underline{k_e},1_{CT(X,Y)}) \simeq 1_{CT(X,Y)}$, análogamente

$H_{2*}:\mu_{*}\circ(1_{CT(X,Y)},\underline{k_e}) \simeq 1_{CT(X,Y)}$ de donde $(C(X,Y),\mu_{*})$ es H-espacio.

Supongamos que μ es H-asociativa, $H:\mu\circ(\mu\times 1_Y) \simeq \mu\circ(1_Y\times\mu)$, demostraremos $\mu_{*}\circ(\mu_{*}\times 1_{CT(X,Y)}) \simeq \mu_{*}\circ(1_{CT(X,Y)}\times\mu_{*})$.

Sea $H_{*}:C(X,Y)\times C(X,Y)\times C(X,Y)\times I \longrightarrow C(X,Y)$ y su asociada $\hat{H}(f,g,h,t)(x) = H(f(x),g(x),h(x),t)$, entonces $\hat{H}$ es composición de funciones continuas y por lo tanto continua. Así

$H_{*}:\mu_{*}\circ(\mu_{*}\times 1_{CT(X,Y)}) \simeq \mu_{*}\circ(1_{CT(X,Y)}\times\mu_{*})$ ya que

$\hat{H}(f,g,h,0) = H(f(x),g(x),h(x),0) = \mu\circ(\mu\times 1_Y)(f(x),g(x),h(x)) = \mu_{*}\circ(\mu_{*}\times 1_{CT(X,Y)})(f,g,h)(x)$ y

$\hat{H}(f,g,h,1) = H(f(x),g(x),h(x),1) = \mu\circ(1_Y\times\mu)(f(x),g(x),h(x)) = \mu_{*}\circ(1_{CT(X,Y)},\mu_{*})(f,g,h)(x)$.

Sea φ H-inversión de (Y,μ), entonces existen Γ

$\Gamma_0:\mu\circ(\varphi,1_Y) \simeq \underline{e}$ y $\Gamma_1:\mu\circ(1_Y,\varphi) \simeq \underline{e}$, demostraremos que

$\mu_*\circ(\varphi_*,1_{CT(X,Y)}) \simeq \underline{k_0}$ y $\mu_*\circ(1_{CT(X,Y)},\varphi_*) \simeq \underline{k_0}$ donde

$\varphi_*: C(X,Y) \longrightarrow C(X,Y)$, $\varphi_*(f) = \varphi\circ f$

sea $\Gamma_{0*}: C(X,Y) \longrightarrow C(X,Y)$, con función asociada

$\hat{\Gamma}_0(f,t)(x) = \Gamma_0(f(x),t)$, por su definición $\hat{\Gamma}_0$ es continua y

$\Gamma_{0*}: \mu_*\circ(\varphi_*,1_{CT(X,Y)}) \simeq \underline{k_0}$, de manera análoga

$\Gamma_{1*}: \mu_*\circ(1_{CT(X,Y)},\varphi_*) \simeq \underline{k_0}$.■

6.9 Teorema.- El espacio de lazos $\Omega(Y,y_0)$, con multiplicación $m(u,v) = u*v$, es un H-grupo, m es llamada la <u>multiplicación natural</u> en $\Omega(Y,y_0)$, la designamos * .

Demostración. Por el teorema 3.3 m es continua, ahora mostraremos que $\underline{\mathcal{E}} : \Omega(Y,y_0) \longrightarrow \Omega(Y,y_0)$, $\underline{\mathcal{E}}(\alpha) = \mathcal{E}y_0$ el lazo constante es una H-unidad, es decir $m\circ(1_{\Omega(Y,y_0)},\underline{\mathcal{E}}) \simeq 1_{\Omega(Y,y_0)}$ y $m\circ(\underline{\mathcal{E}},1_{\Omega(Y,y_0)}) \simeq 1_{\Omega(Y,y_0)}$. Esto es resultado del teorema 3.5(2) para $a = b = y_0$, con ello queda demostrado que $(\Omega(Y,y_0),*)$ es H-espacio, aún más es un H-grupo como veremos.

La H-asociatividad de * es consecuencia inmediata del teorema 3.5(1), y definiendo $\varphi : \Omega(Y,y_0) \longrightarrow \Omega(Y,y_0)$, como $\varphi(\alpha) = \alpha^{-1}$. Por 3.5(3) $m\circ(1_{\Omega(Y,y_0)},\varphi) : \alpha \longrightarrow \alpha*\alpha^{-1}$ es homotópica a $\underline{\mathcal{E}} : \alpha \longrightarrow \mathcal{E}y_0$. Así mismo $m\circ(\varphi,1_{\Omega(Y,y_0)})$ y $\underline{\mathcal{E}}$ son homotópicas, por lo tanto φ es una H-inversión y $(\Omega(Y,y_0),*)$ es un H-grupo.■

6.10 Corolario.- Sea Y cualquier espacio conectable por trayectorias. Entonces: (a) Para cada $y_0 \in Y$, todas las componentes por trayectorias de $\Omega(Y;y_0)$ pertenecen a un tipo de homotopía común.

(b) $\pi_0(\Omega(Y;y_0))$ es siempre un grupo discreto con multiplicación m_{CT}, de hecho es el grupo fundamental $\pi_1(Y,y_0)$.

Demostración. (a) Es consecuencia de los teoremas 6.6 y 6.9,

(b) se sigue del teorema 6.9, ejemplo 6.B y de $m_{CT}(\text{cT}(\alpha),\text{cT}(\beta)) = \text{cT}(\alpha*\beta) = [\alpha*\beta] = [\alpha][\beta]$ como vimos en 4.4.

6.11 Proposición.- Sea (Y,μ) un H-espacio con unidad e; entonces la multiplicación inducida μ_* sobre el espacio de funciones $C(I,Y)$ restringida al subespacio $\Omega(Y,e)$ es una multiplicación en $\Omega(Y,e)$.

Demostración. Sean (Y,μ) H-espacio con unidad $\underline{e}$ y μ_* la multiplicación inducida en $C(I,Y)$ con H-unidad $\underline{k_e} : C(I,Y) \longrightarrow C(I,Y)$; $\underline{k_e}(f) = \underline{e}$. Basta, por el teorema 6.8, con demostrar que la restricción de μ_* a $\Omega(Y,e)$ es cerrada:

Sean α,β dos lazos de $\Omega(Y,e)$ entonces $\mu_*(\alpha,\beta) = \mu\circ(\alpha,\beta)$, ahora evaluando en $t = 0$ y en $t = 1$, se observa que

$$\mu\circ(\alpha,\beta)(0) = \mu(\alpha(0),\beta(0)) = \mu(e,e) = e \quad \text{y}$$

$$\mu\circ(\alpha,\beta)(1) = \mu(\alpha(1),\beta(1)) = \mu(e,e) = e$$

Con lo cual queda probado que $\mu_*(\alpha,\beta) = \mu\circ(\alpha,\beta)$ es un lazo basado en e y por lo tanto la restricción de μ_* a $\Omega(Y,e)$ es cerrada.

Así encontramos para un H-espacio (Y,μ), dos H-espacios $(\Omega(Y,e),\mu_*)$ y $(\Omega(Y,e),*)$, éste último es siempre un H-grupo. Si (Y,μ) es un H-grupo, $(\pi_0(\Omega(Y,y_0),\mu_{*CT})$ y $(\pi_0(\Omega(Y,y_0),m_{CT})$ son grupos discretos, éste último es el grupo fundamental $\pi_1(Y,y_0)$.

6.D Ejemplo.-

Los Octonios o Números de Cayley $\mathbb{O}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ isomorfo a $\mathbb{R}^8$, para definir la multiplicación en $\mathbb{O}$ consideremos a los octonios como parejas (A,B) de cuaternios y definimos la multiplicación de dos octonios de la manera siguiente

$(A,B)(C,D) = (AC-\bar{D}B, DA+B\bar{C})$; ésta es bilineal y (1,0) es una unidad.

El conjugado de (A,B), dado por $\overline{(A,B)} = (\bar{A},-B)$, es lineal y de las propiedades de la conjugación cuaternia dadas en el ejemplo 5.B, se sigue que $\bar{\bar{X}} = X$ y $\overline{XY} = \bar{Y}\,\bar{X}$ para todos los octonios X, Y.

Es fácil mostrar que $(A,B)\overline{(A,B)} = (A\bar{A}+B\bar{B},0)$, y si $A = x_1+x_2i+x_3j+x_4k$ y $B = x_5+x_6i+x_7j+x_8k$ tenemos que

$$(A,B)\overline{(A,B)} = \sum_{i=1}^{8} x_i^2$$

de esta manera

$|(A,B)| = (A,B)\overline{(A,B)} = A\bar{A}+B\bar{B}$ es la norma usual en $\mathbb{R}^8$.

Consideremos $A = x_1+x_2i+x_3j+x_4k$ y $B = z_1+z_2i+z_3j+z_4k$ dos cuaternios y sea $r(A) = x_1$ la parte real de A, luego

$r(AB) = x_1z_1-x_2z_2-x_3z_3-x_4z_4 = r(BA)$. Por lo tanto $r(AB-BA) = 0$.

Sí $R(C) = 0$, $C+\bar{C} = 0$ de donde $(AB-BA)+\overline{(AB-BA)} = 0$.

Ahora consideremos $X = (A,B)$ y $Y = (C,D)$ dos octonios $|XY|^2 = |(AB-DB,DA+BC)|^2 = |X|^2|Y|^2$. Entonces la multiplicación es cerrada en $S^7 = \left\{X\in \mathbb{O} : |X| = 1\right\}$ tiene unidad $1 = (1,0)$, no es conmutativa pues $(i.0)(j.0) = (k,0) \neq (-k,0) = (j,0)(i,0)$ ni es asociativa ya que $((i,0)(j,0))(0,i) = (k,0)(0,i) = (0,-j)$ y $(i,0)((j,0)(0,i)) = ((i,0)(0,k) = (0,j)$ pero sí tiene inversión, puesto que $X\overline{X} = |X|^2 = \overline{X}X$ luego si $X \in S^7$ $X^{-1} = \overline{X}$.

Así, S^7 es H-espacio con unidad e inversión pero no es grupo topológico. J.F. Adams probó que S^0, S^1, S^3 y S^7 son las únicas esferas que admiten una estructura de H-espacio, teorema 2.3 [Stasheff].

En el ejemplo 1.B (4) se definió el funtor contravariante $[\ ,Y] : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{S}$, veremos ahora qué pasa cuando Y es un H-grupo y cuando el funtor toma valores en $\mathcal{G}$.

6.12 Teorema.- Si (Y,μ) es un H-grupo, $[\ ,Y]$ es un funtor contravariante de la categoría de homotopía $\mathcal{H}$ con valores en la categoría $\mathcal{G}$ de grupos y homomorfismos. Si μ es H-abeliana, este funtor toma valores en la categoría de grupos abelianos.

Demostración. Sea (Y,μ) H-grupo y dado cualquier espacio X, definamos la multiplicación en $[X,Y]$ por $[g_1][g_2] = [\mu\circ(g_1,g_2)]$, donde $[g]$ es la clase de homotopía de $g : X \longrightarrow Y$ continua. Como (Y,μ) es H-grupo, $\mu\circ(\mu\times 1_Y) \simeq \mu\circ(1_Y\times\mu)$, así que

$$\begin{aligned}
[g_1]([g_2][g_3]) &= [g_1][\mu\circ(g_2,g_3)] = [\mu\circ(g_1,\mu\circ(g_2,g_3))] = \\
&= [\mu\circ(1_Y\times\mu)\circ(g_1,g_2,g_3)] = [\mu\circ(\mu\times 1_Y)\circ(g_1,g_2,g_3)] = \\
&= [\mu\circ(\mu\circ(g_1,g_2),g_3)] = [\mu\circ(g_1,g_2)][g_3] = \\
&= ([g_1][g_2])[g_3]
\end{aligned}$$

por lo tanto la multiplicación es asociativa.

Sea $e \in Y$ una H-unidad de μ, entonces $[k_e]$ es la unidad de $[X,Y]$ con $k_e(X) = e$. En efecto, $[k_e][g] = [\mu\circ(k_e,g)] = [g] = [\mu\circ(g,k_e)] = [g][k_e]$.

Ahora sea $\varphi : Y \longrightarrow Y$ una H-inversión de (Y,μ),

$\mu\circ(1_Y,\varphi) \simeq \underline{e} \simeq \mu\circ(\varphi,1_Y)$, mostraremos que $[\varphi g] = [g]^{-1}$

$[g][\varphi g] = [\mu\circ(g,\varphi g)] = [\mu\circ(1_Y,\varphi)\circ(g)] = [k_\circ\circ g] = [k_\circ]$

$[\varphi g][g] = [\mu\circ(\varphi g,g)] = [\mu\circ(\varphi,1_Y)\circ(g)] = [k_\circ\circ g] = [k_\circ]$.

Si μ es H-abeliana, es decir $\mu\circ T \simeq \mu$, tenemos que $[g_1][g_2] = [\mu\circ(g_1 g_2)] = [\mu\circ T\circ(g_2,g_1)] = [\mu(g_2,g_1)] = [g_2][g_1]$.

Finalmente probaremos que si $f : X \longrightarrow X'$ continua entonces $f^{\#}:[X',Y] \longrightarrow [X,Y]$ es un homomorfismo ,es decir para cualesquiera $h_1,h_2 : X' \longrightarrow Y$ continuas $f^{\#}([h_1][h_2]) = f^{\#}([h_1])f^{\#}([h_2])$, dado que $f^{\#}([h_1][h_2]) = f^{\#}([\mu\circ(h_1,h_2)]) = [\mu\circ(h_1,h_2)\circ f] = [\mu\circ(h_1\circ f,h_2\circ f)] = [h_1\circ f][h_2\circ f)] = (f^{\#}[h_1])(f^{\#}[h_2])$ lo que se queria probar.∎

6.13 Teorema.- Si Y es un espacio tal que [,Y] toma valores en la categoría de grupos (abelianos), entonces Y es un H-grupo (abeliano). De manera que, para cualquier espacio X, la estructura de grupo sobre [X,Y] es la misma que la dada por el teorema 6.12.

Demostración. Sean $p_1: Y\times Y \longrightarrow Y$, $p_2: Y\times Y \longrightarrow Y$ las proyecciones y sea $\mu : Y\times Y \longrightarrow Y$ una función de tal forma que $[\mu] = [p_1]*[p_2]$, donde $*$ es la regla de composición en el grupo $[Y\times Y,Y]$. Para cualesquiera funciones $f,g : X \longrightarrow Y$ continuas, $(f,g)^{\#}: [Y\times Y,Y] \longrightarrow [X,Y]$ es un homomorfismo por hipótesis y entonces

$$[\mu\circ(f,g)] = (f,g)^{\#}[\mu] = (f,g)^{\#}([p_1]*[p_2])$$
$$= (f,g)^{\#}([p_1])*(f,g)^{\#}([p_2]) = [f]*[g]$$

esto muestra que la multiplicación en [X,Y] está inducida como en 6.12 por la función μ. A continuación probaremos que (Y,μ) es un H-grupo.

Sea X un espacio de un solo punto. La única función $X \longrightarrow Y$ representa al elemento identidad del grupo $[X,Y]$. Por otro lado la única función $Y \longrightarrow X$ induce un homomorfismo $[X,Y] \longrightarrow [Y,Y]$, se sigue que la composición $Y \longrightarrow X \longrightarrow Y$, la cual es la función constante que denotaremos $\underline{e}$, representa el elemento identidad de $[Y,Y]$, esto es, $\mu\circ(1_Y,\underline{e}) \simeq 1_Y \simeq \mu\circ(\underline{e},1_Y)$ por lo tanto (Y,μ) es un H-espacio.

Para probar que μ es H-asociativa, sean q_1,q_2,q_3: $Y\times Y\times Y \longrightarrow Y$ las proyecciones entonces

$$\begin{aligned}[\mu\circ(1_Y \times \mu)] = (1_Y\times\mu)^{\#}[\mu] &= (1_Y\times\mu)^{\#}([p_1]*[p_2]) \\ &= (1_Y\times\mu)^{\#}[p_1]*(1_Y\times\mu)^{\#}[p_2] \\ &= [q_1]*[\mu(q_2,q_3)] \\ &= [q_1]*([q_2]*[q_3])\end{aligned}$$

de manera similar obtenemos $[\mu\circ(\mu \times 1_Y)] = ([q_1]*[q_2])*[q_3]$ ya que $*$ es asociativa, $\mu\circ(\mu \times 1_Y) \simeq \mu\circ(1_Y \times \mu)$.

Para mostrar que (Y,μ) tiene H-inversión, consideramos en el grupo $[Y,Y]$ el inverso $[\varphi]$ de $[1_Y]$, esto es $\varphi : Y \longrightarrow Y$ continua es tal que $[1_Y]*[\varphi] = [\underline{e}]$ y $[\varphi]*[1_Y] = [\underline{e}]$, luego $\mu\circ(1_Y,\varphi) \simeq \underline{e}$ y $\mu\circ(\varphi,1_Y) \simeq \underline{e}$. Así φ es H-inversión de (Y,μ).

Queda probado que (Y,μ) es un H-grupo y que la multiplicación en $[\ ,Y]$ es la inducida por μ, como en el teorema 6.12. Ahora si $[Y\times Y,Y]$ es abeliano entonces $[\mu] = [p_1]*[p_2] = [p_2]*[p_1] = [\mu\circ T]$ entonces $\mu \simeq \mu\circ T$ y por lo tanto μ es H-abeliana.■

VII H-HOMOMORFISMOS

Definición.- Si (Y,μ) y (Y',μ') son H-espacios una función continua $f : Y \longrightarrow Y'$ es un <u>H-homomorfismo</u> si el cuadro

$$\begin{array}{ccc} Y\times Y & \xrightarrow{\mu} & Y \\ {\scriptstyle f\times f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ Y'\times Y' & \xrightarrow[\mu']{} & Y' \end{array}$$

es homotópicamente conmutativo y, si es conmutativo, es decir $f\circ\mu = \mu'\circ(f\times f)$, entonces f es un <u>homomorfismo</u> de (Y,μ) a (Y,μ').

Definición.- Un H-homomorfismo $f : Y \longrightarrow Y'$ es un <u>H-isomorfismo</u> si existe un H-homomorfismo $g : Y' \longrightarrow Y$ tal que $g\circ f \simeq 1_X$ y $f\circ g \simeq 1_Y$; en forma natural se dice que f es <u>isomorfismo</u> si f es homomorfismo biyectivo y f^{-1} es homomorfismo.

Nótese que todo H-isomorfismo es una equivalencia homotópica y todo isomorfismo es un homeomorfismo.

7.A EJEMPLO.- Sean $a,b \in Y$, y sea w cualquier trayectoria de a hacia b. $w^*: \Omega(Y;a) \longrightarrow \Omega(Y;b)$, $w^*(\alpha) = w^{-1}*\alpha*w$ veremos que es un H-homomorfismo respecto a la multiplicación natural. Es más es un H-isomorfismo, pues por 3.8 w^* es una equivalencia homotópica con inversa homotópica $(w^{-1})^*$ que también es un H-homomorfismo.

Como $m\circ(w^*\times w^*) : (\alpha,\beta) \longrightarrow (w^{-1}*\alpha*w)*(w^{-1}*\beta*w)$ y $w^*\circ m : (\alpha,\beta) \longrightarrow w^{-1}*(\alpha*\beta)*w$, por el teorema 3.5 ambas funciones son homotópicas.∎

7.1 Proposición.- Sea $f : (X,a) \longrightarrow (Y,b)$ continua. Entonces f induce un H-homomorfismo $f_*: \Omega(X,a) \longrightarrow \Omega(Y,b)$ con la multiplicación natural definido por $f_*(\alpha) = f\circ\alpha$. Si f es una equivalencia homotópica, entonces f_* es un H-isomorfismo.

Demostración. Veremos que el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \Omega(X,a)\times\Omega(X,a) & \xrightarrow{m} & \Omega(X,a) \\ f_*\times f_* \big\downarrow & & \big\downarrow f_* \\ \Omega(X,b)\times\Omega(X,b) & \xrightarrow{m} & \Omega(X,b) \end{array}$$

Para $(\alpha,\beta) \in \Omega(X,a)\times\Omega(X,a)$ y $t\in I$

$$f_*\circ m(\alpha,\beta)(t) = f_*\circ(\alpha*\beta)(t)) = f\circ\begin{cases}\alpha(2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ \beta(2t-1) & 1/2\le t\le 1\end{cases} =$$

$$\begin{cases}f\circ\alpha(2t) & 0\le t\le 1/2 \\ f\circ\beta(2t-1) & 1/2\le t\le 1\end{cases} = (f\circ\alpha * f\circ\beta)(t) = m\circ(f_*\times f_*)(\alpha,\beta)(t)$$

Ahora, $f_*: \Omega(X,a) \longrightarrow \Omega(Y,b)$ es continua por ser restricción de la función $f_*: C(I,X) \longrightarrow C(I,Y)$ que es continua por 2.4.

Si f es una equivalencia homotópica, con g una inversa homotópica; $g\circ f\simeq 1_X$ y $f\circ g\simeq 1_Y$ implican por 2.4 $g_*\circ f_*=(g\circ f)_*\simeq (1_X)_*= 1_{\Omega(X,a)}$.∎

Para cualesquiera dos espacios X,Y, una función continua $f:X \longrightarrow Y$ induce una función $f_{CT}:\pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y)$ por $f_{CT}(CT(x))=CT(f(x))$.

7.2 teorema .- Si $(X,\mu),(Y,\mu')$ son H-espacios, y $f:X \longrightarrow Y$ es un H-homomorfismo (H-isomorfismo), entonces $f_{CT}:\pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y)$ es un homomorfismo (isomorfismo). Por lo tanto, H-homomorfismos homotópicos, $f \simeq g$ inducen el mismo homomorfismo $f_{CT}= g_{CT}$.

Demostración. Sean (X,μ), (Y,μ') H-espacios y $f:X \longrightarrow Y$ H-homomorfismo, esto es, $f\circ\mu\simeq \mu'\circ(f\times f)$. Probaremos $f_{CT}\circ\mu_{CT}= \mu'_{CT}\circ(f_{CT}\times f_{CT})$

Sean $cT(w), cT(z) \in \pi_0(X)$

$$f_{CT}\circ\mu_{CT}(cT(w),cT(z)) = f_{CT}(cT(\mu(w,z))) = cT(f\circ\mu(w,z))$$
$$= cT(\mu'\circ(f\times f)(w,z)) = cT(\mu'\circ(f(w),f(z)))$$
$$= \mu'_{CT}(cT(f(w)),cT(f(z))) = \mu'_{CT}(f_{CT}(w),f_{CT}(z))$$
$$= \mu'\circ(f_{CT}\times f_{CT})(w,z)$$

por lo tanto f_{CT} es homomorfismo

Supongamos que f es H-isomorfismo, luego existe $g:Y \longrightarrow X$ H-homomorfismo tal que $f\circ g \simeq 1_Y$ y $g\circ f \simeq 1_X$; por lo anterior g_{CT} es homomorfismo. Se tiene $g_{CT}\circ f_{CT}(cT(z)) = cT(g\circ f(z)) = cT(1_X(z))$, luego $g_{CT}\circ f_{CT}= 1_{\pi_0(X)}$, análogamente $f_{CT}\circ g_{CT}= 1_{\pi_0(Y)}$ así que f_{CT} es isomorfismo, lo que se quería demostrar.■

Definición.- Sean (Y,μ), (Y,μ') dos H-espacios sobre el mismo espacio. Note que la identidad 1_Y es un H-isomorfismo si y sólo si $\mu \simeq \mu'$; en este caso decimos que μ,μ' son <u>equivalentes</u> sobre Y.

7.3 Teorema.- Multiplicaciones equivalentes sobre Y inducen la misma multiplicación en $\pi_0(Y)$.

Demostración. Sean $(Y,\mu),(Y,\mu')$ H-espacios tal que $\mu \simeq \mu'$. Para $x,z \in Y$, $\mu_{CT}(cT(x),cT(z)) = cT(\mu(x,z)) = cT(\mu'(x,z)) = \mu'_{CT}(cT(x),cT(z))$ lo que se quería demostrar.■

7.B EJEMPLO.- Sea Y un espacio contraible y sea $\mu:Y\times Y \longrightarrow Y$ cualquier función continua. Entonces (Y,μ) es un H-espacio dado que todas las funciones constantes de $Y \longrightarrow Y$ son H-unidad ya que todas las funciones continuas de un espacio arbitrario X en Y son homotópicas.

Es más por 6.7 (Y,μ) es un H-grupo abeliano. Y puede tener muchas multiplicaciones pero por la razón anterior todas son equivalentes. En particular el intervalo I, con la multiplicación $\mu(t_1,t_2)=|t_1-t_2|$ es un H-grupo abeliano, μ es abeliana pero no es asociativa. En efecto

$$||t_1-t_2|-t_3| \neq |t_1-|t_2-t_3|| \quad \text{para} \quad t_1 = t_2 = 1/2 \text{ y } t_3 = 1$$

7.C EJEMPLO.- Distintas multiplicaciones sobre un espacio discreto Y (con mas de un punto) nunca son equivalentes pues μ y μ'son homotópicas si y sólo si $\mu = \mu'$.

Usando herramientas de la topología algebraica se ha probado que S^3 admite 12 clases de equivalencia de multiplicaciones distintas y S^7 admite 120, como lo afirma el teorema 3.7 de [Stasheff].

7.4 Teorema.- Si Y' tiene el mismo tipo de homotopía que (Y,μ) un H-espacio (H-grupo) entonces existe μ' tal que (Y',μ') es un H-espacio (H-grupo) de forma que la equivalencia homotópica es un H-isomorfismo.

Demostración. Sean $f:Y \longrightarrow Y'$ y $g:Y' \longrightarrow Y$ continuas tales que $f\circ g \simeq 1_{Y'}$ y $g\circ f \simeq 1_Y$. Sea $e\in P$ la componente principal de (Y,μ), entonces $\underline{e} \simeq g\circ f\circ \underline{e}$ son H-unidades de (Y,μ) luego las funciones constantes $g\circ\underline{f(e)}$, $\underline{e}\circ g$: $Y' \longrightarrow Y$ cuyas imagenes $g\circ f(e)$, e están en P, son homotópicas. La función $\mu'= f\circ\mu\circ(g\times g):Y'\times Y' \longrightarrow Y'$ es continua y $\mu'\circ(1_{Y'},\underline{f(e)}) = f\circ\mu\circ(g\times g)(1_{Y'},\underline{f(e)}) = f\circ\mu\circ(g\circ 1_{Y'},g\circ\underline{f(e)}) \simeq$ $f\circ\mu(g,\underline{e}\circ g) = f\circ\mu\circ(1_Y,\underline{e})\circ g$

Ahora como $\mu\circ(1_Y,\underline{e}) \simeq 1_Y$ por ser (Y,μ) H-espacio tenemos que $f\circ\mu\circ(1_Y,\underline{e})\circ g \simeq f\circ 1_Y\circ g \simeq 1_{Y'}$ y por lo tanto $\mu'\circ(1_{Y'},\underline{f(e)}) \simeq 1_{Y'}$. Análogamente se obtiene que $\mu'\circ(\underline{f(e)},1_{Y'}) \simeq 1_{Y'}$ luego (Y',μ') es H-espacio.

Como $g\circ\mu' = g\circ f\circ\mu\circ(g\times g) \simeq 1_Y\circ\mu\circ(g\times g) \simeq \mu\circ(g\times g)$ el cuadro

$$\begin{tikzcd} Y'\times Y' \arrow[r, "\mu'"] \arrow[d, "g\times g"'] & Y' \arrow[d, "g"] \\ Y\times Y \arrow[r, "\mu"'] & Y \end{tikzcd}$$ conmuta homotópicamente

Así que g es un H-homomorfismo y $\mu'\circ(f\times f) = f\circ\mu\circ(g\times g)\circ(f\times f) \simeq f\circ\mu$ luego f es un H-homomorfismo.

Ahora como $f\circ g \simeq 1_{Y'}$ y $g\circ f \simeq 1_Y$, se tiene que f y g son H-isomorfismos.

Si μ es H-asociativa veremos que μ' es H-asociativa, tenemos que $g\circ\mu'\circ(f\times f) = g\circ f\circ\mu\circ(g\times g)\circ(f\times f) \simeq \mu$, por lo tanto $\mu\circ(\mu\times 1_Y) \simeq$

$g\circ\mu'\circ(f\times f)\circ[g\circ\mu'\circ(f\times f)\ \times 1_Y] = g\circ\mu'\circ[f\circ g\circ\mu'\circ(f\times f),f) \simeq$

$g\circ\mu'\circ[\mu'\circ(f\times f),f) = g\circ\mu'\circ(\mu'\times 1_{Y'})(f\times f\times f)$ ----------1

y $\mu\circ(1_Y\times\mu) \simeq g\circ\mu'\circ(f\times f)\circ[1_Y\times\ g\circ\mu'\circ(f\times f)] = g\circ\mu'\circ[f,f\circ g\circ\mu'\circ(f\times f)] \simeq$

$g\circ\mu'\circ[f,\mu'\circ(f\times f)] = g\circ\mu'\circ(1_Y,\times\mu')(f\times f\times f)$ -----------2

como μ es H-asociativa y sucede (1) y (2) entonces

$g\circ\mu'\circ(\mu'\times 1_{Y'})\circ(f\times f\times f) \simeq g\circ\mu'\circ(1_{Y'}\times\mu')(f\times f\times f)$

por lo tanto $\mu'\circ(\mu'\times 1_Y) \simeq \mu'\circ(1_Y\times\mu')$ con lo que tenemos que μ' es H-asociativa.

Y si $\varphi:Y \longrightarrow Y$ es una H-inversión para (Y,μ), entonces $\varphi' = f\circ\varphi\circ g$ es una H-inversión para (Y',μ'). En efecto tenemos que $\mu\circ(1_Y,\varphi) \simeq \underline{e}$

y por lo tanto $f\circ\mu\circ(1_Y,\varphi)\circ g \simeq f\circ\underline{e}\circ g$ de donde $f\circ\mu\circ(g,\varphi\circ g) \simeq \underline{f(e)}$.

Pero $\mu \simeq g\circ\mu'\circ(f\times f)$ entonces

$f\circ\mu\circ(g,\ \varphi\circ g) \simeq f\circ g\circ\mu'\circ(f\times f)\circ(g,\ \varphi\circ g) \simeq \mu'\circ(f\circ g, f\circ\varphi\circ g) \simeq \mu'\circ(1_{Y'},\varphi')$,

por $\mu'\circ(1_{Y'},\varphi') \simeq \underline{f(e)}$, de manera similar $\mu'\circ(\varphi',1_Y) \simeq \underline{f(e)}$.

De lo que concluimos que φ' es una H-inversión para (Y',μ'), y entonces Y'es un H-grupo si Y lo es.■

Del teorema anterior se sigue que si un tipo de homotopía contiene un H-espacio (en particular un grupo topológico) esta compuesto únicamente de H-espacios.

Definición.- Un espacio X se dice que está <u>dominado</u> por un espacio Y si existen funciones continuas $f:X \longrightarrow Y$ y $g:Y \longrightarrow X$ tal que $g\circ f \simeq 1_X$.

7.5 Teorema.- Todo espacio dominado por un H-espacio conectable por trayectorias es también un H-espacio.

Demostración. Sean (Y,μ) un H-espacio, Y conectable por trayectorias y X un espacio dominado por Y. Por lo tanto existen $f:X \longrightarrow Y$ y $g:Y \longrightarrow X$ con $g\circ f \simeq 1_X$

Sea $\mu_X = g\circ\mu\circ(f\times f)$ como se muestra en el cuadro siguiente

$$\begin{tikzcd} X\times X \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "f\times f"'] & X \\ Y\times Y \arrow[r, "\mu"] & Y \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

Vamos a demostrar que (X,μ_X) es un H-espacio como Y es un espacio conectable por trayectorias entonces Y tiene una sola componente, Y mismo. Por lo tanto Y es la componente principal de (Y,μ).

sea $x_0 \in X$ fija, definamos $h:Y \longrightarrow Y$ como $h = \mu\circ(1_Y,\underline{f(x_0)})$ por lo tanto $h \simeq 1_Y$ y $\mu_X\circ(1_X,x_0) = g\circ h\circ f$ pues para toda $x \in X$

$$\mu_X\circ(1_X,\underline{x_0})(x) = \mu_X(x,x_0) = g\circ\mu\circ(f\times f)(x,x_0) = g\circ\mu(f(x),f(x_0)) \text{ y}$$

$$g\circ h\circ f(x) = (g\circ h)(f(x)) = (g\circ\mu(1_Y,\underline{f(x_0)})(f(x)) = g\circ\mu[f(x),f(x_0)].$$

ahora como $h \simeq 1_Y$ entonces $g\circ h\circ f \simeq g\circ 1_Y\circ f = g\circ f \simeq 1_X$, por lo tanto $\mu_X(1_X,\underline{x_0}) \simeq 1_X$.

De manera similar definimos $h':Y \longrightarrow Y$ como $h'(y) = \mu(\underline{f(x_0)},1_Y)$ con lo que obtenemos que $\mu_X(\underline{x_0},1_X) \simeq 1_X$ y por lo tanto queda demostrado que (X,μ_X) es un H-espacio.■

7.C EJEMPLO.- Todo retracto de un H-espacio Y conectable por trayectorias es también un H-espacio. Ya que Y domina a cada uno de sus retractos. Más aún si A es retracto de (Y,μ), (Y,μ) es un H-espacio, y A intersecta a la componente principal de Y entonces A admite una multiplicación que lo hace H-espacio.

7.D EJEMPLO.- Veremos que $\Omega(Y,a,b)$ es un H-espacio y mostraremos que $\Omega(Y,a,b) \simeq \Omega(Y,a)$.

Sea $\delta \in \Omega(Y,a,b)$, fija.

Definamos $\mu:\Omega(Y,a,b)\times\Omega(Y,a,b) \longrightarrow \Omega(Y,a,b)$, como $\mu(\alpha,\beta) = \alpha*\delta^{-1}*\beta$. Claramente, μ es continua. Dado que $\mu(\delta,\beta) = \delta*\delta^{-1}*\beta$ y $\mu(\beta,\delta) = \beta*\delta^{-1}*\delta$ concluimos por 3.5, como en 7.A, que δ es H-unidad para el H-espacio $(\Omega(Y,a,b),\mu)$.

Ahora definamos $f:\Omega(Y,a) \longrightarrow \Omega(Y,a,b)$ como $f(\alpha) = \alpha*\delta$ y

$g:\Omega(Y,a,b) \longrightarrow \Omega(Y,a)$ por $g(\beta) = \beta * \mathcal{E}^{-1}$, sean $\gamma \in \Omega(Y,a)$ y $\lambda \in \Omega(Y,a,b)$ $(g\circ f)(\gamma) = g(\gamma * \mathcal{E}) = (\gamma * \mathcal{E}) * \mathcal{E}^{-1}$, $(f\circ g)(\lambda) = f(\lambda * \mathcal{E}^{-1}) = (\lambda * \mathcal{E}^{-1}) * \mathcal{E}$ por 3.5, $g\circ f \simeq 1_{\Omega(Y,a)}$ y $f\circ g \simeq 1_{\Omega(Y,a,b)}$ luego $\Omega(Y,a,b) \simeq \Omega(Y,a)$. Por último mostraremos que f y g son H-homomorfismos, sean $\alpha,\beta \in \Omega(Y,a)$ entonces tenemos que $\mu\circ(f\times f)(\alpha,\beta) = \mu(\alpha*\mathcal{E},\beta*\mathcal{E}) = \alpha*\mathcal{E}*\mathcal{E}^{-1}*\beta*\mathcal{E}$, $f\circ\mu(\alpha,\beta) = f(\alpha*\beta) = \alpha*\beta*\mathcal{E}$ y por 3.5 $\mu\circ(f\times f) \simeq f\circ\mu$, procediendo de manera análoga se tiene que g es H-homomorfismo.∎

7.6 Lema.- Sean (Y,μ) un H-espacio, e un punto en la componente principal y R una homotopía de la función $y \longrightarrow \mu(e,y)$ hacia 1_Y. Entonces existe una homotopía L de la función $y \longrightarrow \mu(y,e)$ hacia 1_Y de tal forma que las trayectorias $L_e(t) = L(e,t)$ y $R_e(t) = R(e,t)$ de $\mu(e,e)$ hacia e son equivalentes.

Demostración. Como $\underline{e}$ es una H-unidad existe una homotopía $\mathcal{L}$: $\mu\circ(1_Y,\underline{e}) \simeq 1_Y$. Sea $\mathcal{L}_e:I \longrightarrow Y$ dada por $\mathcal{L}_e(t) = \mathcal{L}(e,t)$ entonces R_e y $\mathcal{L}_e$ son trayectorias de $\mu(e,e)$ en e, ya que $\mathcal{L}_e(0)=\mu\circ(1_Y,\underline{e})(e) = \mu(e,e) = \mu\circ(\underline{e},1_Y)(e) = R_e(0)$ y $\mathcal{L}_e(1) = 1_Y(e) = R_e(1) = e$, luego $\gamma = R_e * \mathcal{L}_e^{-1}$ es un lazo basado en $\mu(e,e)$.

Primero mostraremos que existe un lazo α basado en e tal que $R_e \simeq (\mu\circ(\underline{e},1_Y)\circ\alpha) * \mathcal{L}_e$.

Sea $r:I\times I \longrightarrow (0\times I)\cup(I\times 0)\cup(1\times I)$ una retracción (por ejemplo proyectando desde el punto (1/2,2) el cuadrado I^2 sobre los tres lados). La función $H':(0\times I)\cup(I\times 0)\cup(1\times I) \longrightarrow Y$ dada por $H'(t,0) = \gamma(t)$ $H'(0,s) = H'(1,s) = R_e(s)$, está bien definida pues $H'(0,0) = \gamma(0) = R_e(0)$ y $H'(1,0) = \gamma(1) = \mathcal{L}^{-1}(1) = \mathcal{L}_e(0) = R_e(0)$, por lo tanto es continua. La composición $H = H'\circ r:I\times I \longrightarrow Y$ es entonces una homotopía del lazo γ a un lazo α basado en e, en efecto $\alpha(t)= H(t,1)$, para $i = 0,1$ $\alpha(i) = H'(r(i,1)) = H'(i,1) = R_e(1)$. Entonces $H:\gamma \simeq \alpha$ y R inducen las homotopías $H^{\bullet}: \mu\circ(\underline{e},1_Y)\circ\alpha \simeq \mu\circ(\underline{e},1_Y)\circ\gamma$ y $R^{\bullet}: \mu\circ(\underline{e},1_Y)\circ\gamma \simeq 1_Y\circ\gamma = \gamma$ de donde $(\mu\circ(\underline{e},1_Y)\circ\alpha)*\mathcal{L}_e \simeq \gamma*\mathcal{L}_e =$

$(R_e*\mathcal{L}_e^{-1})*\mathcal{L}_e \simeq R_e$.

Ahora definimos $L(y,t) = \begin{cases}\mu(y,\alpha(2t)) & 0\leq t \leq 1/2\\ \mathcal{L}(y,2t-1) & 1/2\leq t \leq 1\end{cases}$

para $t = 1/2$ tenemos $L(y,1/2) = \mu(y,\alpha(1)) = \mu(y,e) = \mathcal{L}(y,0)$, así que L está bien definida y es continua por ser continua en $Y\times[0,1/2]$ y en $Y\times[1/2,1]$ cubierta cerrada y finita de $Y\times I$.

Ahora $L(y,0) = \mu(y,\alpha(0)) = \mu(1_Y,e)(y)$ y $L(y,1) = \mathcal{L}(y,1) = 1_Y(y)$ de donde $L: \mu\circ(1_Y,\underline{e}) \simeq 1_Y$.

Definimos $L_e(t) = L(e,t) = \begin{cases}\mu(e,\alpha(2t) & 0 \leq t \leq 1/2\\ \mathcal{L}(e,2t-1) & 1/2 \leq t\leq 1\end{cases} =$

$((\mu(e,1_Y)\circ\alpha)* \mathcal{L}_e)(t)$ por lo tanto $L_e \simeq R_e$.■

7.7 teorema.- Sea (Y,μ) un H-espacio, e un punto de la componente principal y Y' el subespacio $(Y\times 0)\cup(e\times I)$ de $Y\times I$. Entonces:

(1) La multiplicación μ, Y identificado con $Y\times 0$, se puede extender a una multiplicación μ' sobre Y' con unidad, $e\times 1$.

(2) La retracción de Y' sobre Y que envía a $e\times I$ en el punto $e\times\{0\}$, es un H-isomorfismo del H-espacio (Y',μ') en (Y,μ).

Demostración. (1) Para obtener una extensión $\mu':Y'\times Y'\longrightarrow Y'$ de μ necesitamos definir $\mu'(y,s)$, $\mu'(t,y)$ y $\mu'(t,s)$ para $y\in Y$ y $s,t\in I$ identificando $e\times I$ con I para simplificar la notación.

Sean R y L las homotopías del lema anterior. Definamos $\mu'(y,s) =$

$L(y,s)$ y $\mu'(t,y) = R(y,t)$. Para definir $\mu'(t,s)$ primero consideremos la función $J:Fr(I^2) \longrightarrow Y'$ dada por $J(t,1) = J(1,t) = t$, $J(0,s) = L(e,s)$, $J(t,0) = R(e,t)$. Sobre $Fr(I^2)$ está función es homotópica a $L_e * R_e^{-1}$, la cual es nul-homotópica por el lema anterior; y por teorema 1.2(2) existe una extensión continua $\Psi:I^2 \longrightarrow Y'$ de J. Ahora definimos

$\mu'(t,s) = \Psi(t,s)$, se tiene que μ' es continua y

$\mu'(e,0) = L(e,0) = \Psi(0,0)$,

$\mu'(y,1) = L(y,1) = y$, $\mu'(1,y) = R(y,1) = y$, y

$\mu'(1,s) = \Psi(1,s) = J(1,s) = s$, $\mu'(t,1) = \Psi(t,1) = J(t,1) = t$

de donde (Y',μ') es un H-espacio con unidad.

(2) Es claro que la retracción $r:Y' \longrightarrow Y$ es una equivalencia homotópica con inverso homotópico la inclusión $i:Y \longrightarrow Y'$. Como i es evidentemente un H-homomorfismo, solo probaremos que r lo es también.

Sea $H:Y'\times Y'\times I \longrightarrow Y$

$H(y,y',\tau) = \mu(y,y')$ si $y,y'\in Y$

$H(y,s,\tau) = L(y,s\tau)$ si $y\in Y, s\in I$

$H(t,y,\tau) = R(y,t\tau)$ si $y\in Y, t\in I$

$H(t,s,\tau) = r\circ\Psi(t\tau,s\tau)$ si $t,s\in I$

H está bien definida y es continua

$H(y,y',0) = \mu(y,y') = \mu\circ(r\times r)(y,y')$ si $y,\ y'\in Y$

$H(y,s,0) = L(y,0) = \mu(y,e) = \mu\circ(r\times r)(y,s)$ si $y\in Y,\ s\in I$

$H(t,y,0) = R(y,0) = \mu(e,y) = \mu\circ(r\times r)(t,y)$ si $y\in Y, t\in I$

$H(t,s,0)= r\circ\Psi(0,0)= r\circ J(0,0)= r\circ L(e,e)= L(e,e)= \mu\circ(r\times r)(t,s)$ si $s,t\in I$

y

$H(y,y',1) = \mu'(y,y') = r\circ\mu'(y,y')$ si $y,y'\in Y$

$H(y,s,1) = L(y,s) = r\circ L(y,s)$ si $y\in Y$, $s\in I$

$H(t,y,1) = R(y,t) = r\circ R(y,t) = r\circ\mu'(t,y)$ si $y\in Y$, $t\in I$

$H(t,s,1) = r\circ\Psi(t,s) = r\circ\mu'(t,s)$ si $t,s\in I$

Luego $H:\mu\circ(r\times r) \simeq r\circ\mu'$ y por lo tanto r es H-homomorfismo.∎

7.8 Corolario.- Todo H-espacio es H-isomorfo a un H-espacio con unidad.

7.9 Teorema.- Sean (X,μ) y (Y,μ') H-espacios y sea $f:X \longrightarrow Y$ un H-isomorfismo.

(a) Si uno de ellos es H-asociativo, o H-abeliano, entonces también lo es èl otro respectivamente.

(b) Si el H-espacio (Y,μ') admite una H-inversión φ', entonces puede ser definida una H-inversión φ en (X,μ) de tal forma que $x \longrightarrow f(\varphi(x))$ y $x \longrightarrow \varphi'(f(x))$ sean homotópicas.

(c) Si (Y,μ') es H-grupo, (X,μ) es también H-grupo.

Demostración: Sean $f:X \longrightarrow Y$ y $g:Y \longrightarrow X$ H-isomorfismos tales que $f\circ g \simeq 1_Y$ y $g\circ f \simeq 1_X$

(a) Supongamos que μ es H-asociativa

Por demostrar que $\mu'\circ(\mu'\times 1_Y) \simeq \mu'\circ(1_Y\times\mu')$

dado que f es H-isomorfismo tenemos $f\circ\mu \simeq \mu'\circ(f\times f)$, luego

$\mu \simeq g\circ\mu'\circ(f\times f)$ y por lo tanto

$\mu\circ(\mu\times 1_X) \simeq (g\circ\mu'\circ(f\times f))\circ((g\circ\mu'\circ(f\times f))\times 1_X) =$

$g\circ\mu'\circ((f\circ g\circ\mu'\circ(f\times f))\times f) \simeq g\circ\mu'\circ((\mu'\circ(f\times f))\times f) = g\circ\mu'\circ(\mu'\times 1_Y)(f\times f\times f)$

es decir

$(1)\ldots\mu\circ(\mu\times 1_X) \simeq g\circ\mu'\circ(\mu'\times 1_Y)(f\times f\times f)$

y de manera similar

$(2)\ldots\mu\circ(1_X\times\mu) \simeq g\circ\mu'\circ(1_Y\times\mu')\circ(f\times f\times f)$

por (1), (2) y la H-asociatividad de μ obtenemos que

$(3)\ldots\ g\circ\mu'\circ(\mu'\times 1_Y)\circ(f\times f\times f) \simeq g\circ\mu'\circ(1_Y\times\mu')\circ(f\times f\times f)$

Ya que $f\circ g \simeq 1_Y$, y componiendo 3 con f por la izquierda y $g\times g\times g$ por la derecha resulta que $\mu'\circ(\mu'\times 1_Y) \simeq \mu'\circ(1_Y\times\mu')$ y por lo tanto μ' es H-asociativa .

Supongamos que μ es H-abeliana, por demostrar que $\mu'\simeq \mu'\circ T$. Dado que g es H-homomorfismo $g\circ\mu'\simeq \mu\circ(g\times g)$ y como $\mu \simeq \mu\circ T$ sucede que

$(4)\ldots g\circ\mu'\simeq \mu\circ T\circ(g\times g)$

Y por lo tanto

$(5)\ldots g\circ\mu'\circ T \simeq \mu\circ(g\times g)\circ T$

Afirmación. $(g\times g)\circ T = T\circ(g\times g)$. En efecto, para $(u,v)\in X\times X$, $(g\times g)\circ T(u,v) = (g\times g)(v,u) = (g(v),g(u)) = T(g(u),g(v)) = T\circ(g\times g)(u,v)$.

Luego

(6). $g\circ\mu'\circ T \simeq \mu\circ T\circ(g\times g)$, de 4 y 6 tenemos que $g\circ\mu'\simeq g\circ\mu'\circ T$ y $\mu'\simeq \mu'\circ T$ que es lo se quería demostrar.

(b) Supongamos que $\varphi':Y \longrightarrow Y$ es H-inversión de (Y,μ') con H-unidad $\underline{e}'$ es decir, $\mu'(1_Y,\varphi') \simeq \underline{e}'$. Definimos $\varphi = g\circ\varphi'\circ f$.

Como g es H-homomorfismo tenemos que $g\circ\mu'\simeq \mu\circ(g\times g)$, luego $\mu\circ(1_X,\varphi) \simeq \mu\circ(g\circ f,g\circ\varphi'\circ f) = \mu\circ(g\times g)\circ(1_Y,\varphi')\circ f \simeq g\circ\mu'\circ(1_Y,\varphi')\circ f \simeq g\circ\underline{e}'\circ f$, pero $g\circ\underline{e}'\circ f = \underline{ge}'$ es H-unidad de (X,μ) por teorema 7.4. De manera similar $\mu\circ(\varphi,1_X) \simeq \underline{ge}'$, por lo tanto φ es una H-inversión de (X,μ).

Y además $f\circ\varphi = f\circ g\circ\varphi'\circ f \simeq \varphi'\circ f$

(c) Es consecuencia de (a) y (b).∎

7.10 Proposición.- Si (Y,μ) es un H-espacio con unidad y_0, la multiplicación inducida μ_* del H-espacio $(\Omega(Y,y_0),\mu_*)$ (Ejemplo 6.B) es equivalente a la multiplicación natural m del H-grupo $(\Omega(Y,y_0),*)$ (6.9). Y por lo tanto $(\Omega(Y,y_0),\mu_*)$ es un H-grupo.

Demostración. Si $h_0(t) = \text{máx}\{0,2t-1\}$ y $h_1(t) = \text{mín}\{1,2t\}$ $h_0 \simeq 1 \simeq h_1$ rel.Fr.I entonces por 1.7
H_1: $\alpha \simeq \alpha\circ h_1$ rel.Fr I, H_0: $\beta \simeq \beta\circ h_0$ rel.Fr I para cada $\alpha,\beta\in \Omega(Y,y_0)$
y por lo tanto
$(\alpha,\beta) \longrightarrow \mu\circ(\alpha,\beta)$, $(\alpha,\beta) \longrightarrow \mu\circ(\alpha h_1,\beta h_0)$ son funciones homotópicas de $\Omega(Y,y_0)\times\Omega(Y,y_0) \longrightarrow \Omega(Y,y_0)$ y como
$\mu\circ(\alpha,\beta) = \mu_*(\alpha,\beta)$, $\mu\circ(\alpha\circ h_1,\beta\circ h_0) = \alpha*\beta = m(\alpha,\beta)$, μ_* y m son equivalentes.

7.11 Teorema.- Sea Y un H-espacio (conexo por trayectorias). Entonces la multiplicación natural en $\Omega(Y,y_0)$ es siempre abeliana y $\pi_1(Y,y_0)$ es un grupo abeliano.

Demostración. Caso 1 El H-espacio (Y,μ) tiene unidad e, tenemos que $(\Omega(Y,y_0),\mu_*)$ H-espacio, además $\mu\circ T$ induce
$(\mu\circ T)_* = \mu_*(\beta,\alpha) = \mu\circ(\beta,\alpha) = \mu\circ T\circ(\alpha,\beta)$.
Entonces $(\Omega(Y,y_0),(\mu\circ T)_*)$ es también H-espacio pues $(Y,\mu\circ T)$ es H-espacio con unidad e porque
$(\mu\circ T)\circ(1_Y,\underline{e})(y) = \mu(T(y,e)) = \mu(e,y) = y$

$(\mu\circ T)\circ(\underline{e},1)(y) = \mu(T(e,y)) = \mu(y,e) = y$, pero por el teorema anterior, μ_* y $(\mu\circ T)_* = \mu_*\circ T$ son equivalentes ambas a m, luego son equivalentes entre sí y entonces μ_* es H-abeliana. Aplicando el teorema 7.9, m es H-abeliana esto es $\alpha*\beta \simeq \beta*\alpha$ rel.Fr I para todo $\alpha,\beta\in \Omega(Y,y_0)$ de donde

$[\alpha][\beta] = [\beta][\alpha]$ para todo $[\alpha],[\beta]\in \pi_1(Y,y_0)$ y con ello $\pi_1(Y,y_0)$ es grupo abeliano.

Caso 2. Si (Y,μ) es H-espacio con H-unidad e, por 7.7 Y es del mismo tipo de homotopía que Y′ con unidad e′ y (Y,μ), (Y',μ') son H-isomorfos por lo tanto el H-espacio $(\Omega(Y,y_0),\mu_*)$, y el H-espacio H-abeliano $(\Omega(Y',y_0),\mu'_*)$ son isomorfos al H-grupo H-abeliano $(\Omega(Y,y_0),*)$. Por lo tanto éste es un H-grupo H-abeliano debido al teorema 7.9. Luego $\pi_1(Y,y_0) = \pi_0(\Omega(Y,y_0),*)$ es un grupo abeliano discreto.

Definición.- Sean $S,T:\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ funtores de la misma varianza. Una <u>Transformación</u> <u>Natural</u> Φ de S hacia T es una función de los objetos de los objetos de $\mathcal{C}$ hacia los morfismos de $\mathcal{D}$ de tal forma que para todo morfismo $f:X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{C}$ uno de los siguientes diagramas es conmutativo

$$\begin{tikzcd} S(X) \arrow[r, "S(f)"] \arrow[d, "\Phi(X)"'] & S(Y) \arrow[d, "\Phi(Y)"] \\ T(X) \arrow[r, "T(f)"] & T(Y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S(X) \arrow[d, "\Phi(X)"'] & S(Y) \arrow[l, "S(f)"'] \arrow[d, "\Phi(Y)"] \\ T(X) & T(Y) \arrow[l, "T(f)"'] \end{tikzcd}$$

S,T covariantes   S,T contravariantes

7.13 Teorema.- Sea $f:Y \longrightarrow Y'$ una función continua entre H-grupos (H-abelianos). Entonces f induce una transformación natural f_* del funtor [,Y] al funtor [,Y'] que toma valores en la categoría de grupos (abelianos) si y sólo si f es un H-homomorfismo.

Demostración. En virtud de 6.12, basta probar que para $h: X' \longrightarrow X$ continua, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} [X,Y] & \xrightarrow{h^*} & [X',Y] \\ {\scriptstyle f_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ [X,Y'] & \xrightarrow{h^*} & [X',Y'] \end{array}$$

y que f_* es homorfismo cuando f es un H-homomorfismo.

Sea $[g],[g_1],[g_2] \in [X,Y]$, comprobamos la conmutatividad de diagrama $(f_* \circ h^*)([g]) = f_*([g\circ h]) = [f\circ g\circ h]$ y

$(h^* \circ f_*)([g]) = h^*([f\circ g]) = [f\circ g\circ h]$.

Ahora demostraremos que f_* es un homomorfismmo, es decir $f_* \circ \mu_*([g_1],[g_2]) = \mu_* \circ (f_* \times f_*)([g_1],[g_2])$ si y sólo si f es un H-homomorfismo. Tenemos que

$$f_*(\mu_*([g_1],[g_2])) = f_*([\mu(g_1,g_2)]) = [f\circ\mu(g_1,g_2)]$$

y

$$\begin{aligned} \mu_*(f_* \times f_*)([g_1],[g_2]) &= \mu_*([f\circ g_1],[f\circ g_2]) = [\mu(f\circ g_1, f\circ g_2)] \\ &= [\mu\circ(f\times f)(g_1,g_2)] \end{aligned}$$

De modo que $[f\circ\mu(g_1,g_2)] = [\mu\circ(f\times f)(g_1,g_2)]$ si y sólo si $f\circ\mu \simeq \mu\circ(f\times f)$ lo que se quería demostrar.■

BIBLIOGRAFIA

[DUGUNDJI] Dugundji, J.
<u>Topology</u>
Allyn and bacon, Boston, 1966.

[GRAY] Gray, B.
<u>The Hopf Invariant and Related Topics</u>
Arlins Universitet, Lectures Series No. 24, 1970.

[HIGGINS] Higgins, J.
<u>Introduction to Group Theory</u>
Cambridge U. Press

[SPANIER] Spanier, E.
<u>Algebraic Topology</u>
McGraw-Hill, New York, 1966.

[STASHEFF] STASHEFF, J.
<u>H-Spaces from a Homotopy Point of View</u>
Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York 1970