22
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

LA TRANSFORMADA DE LAPLACE EN ESPACIOS DE BANACH Y EL PROBLEMA DE CAUCHY

T E S I S

Que para obtener el título de:

M A T E M A T I C O

presenta

A L F R E D O N A V A T U D E L A

Ciudad Universitaria México, D.F. 1993

INTRODUCCION

El presente trabajo tiene por objeto el estudio detallado del trabajo realizado por Wolfgang Arendt en su artículo *Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems* [1].

Dado un espacio de Banach X sobre $\mathbb{K}$ y un operador A en X densamente definido, el teorema de Hille-Yosida nos asegura que si A es el generador de un semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset B(X)$ fuertemente continuo entonces el resolvente de A en $\lambda \in \mathbb{K}$ dado por $R(\lambda,A) := (\lambda - A)^{-1}$ esta relacionado con $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ via la transformada de Laplace, es decir $R(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)\, dt$. Con esto en mente buscamos las condiciones necesarias para que una función $R : (0,+\infty) \longrightarrow X$ sea la transformada de Laplace de una función $F : [0,+\infty) \longrightarrow X$. Para ello, utilizamos el teorema de D. V. Widder que caracteriza las funciones reales que son transformada de Laplace de otra función real. La representación obtenida es más débil que la dada en el teorema de Widder pero si X tiene la propiedad de Radon-Nikodym obtenemos la representación original. Después nos interesamos en los resolventes de operadores que puedan verse como transformadas de Laplace. Observamos que si un operador A en X es el generador de un semigrupo fuertemente continuo entonces $\dfrac{R(\lambda,A)}{\lambda^n}$ es una transformada de Laplace para toda n natural. Nos interesamos entonces en estudiar la condición más débil de que una función $R : (0,+\infty) \longrightarrow B(X)$ sea la transformada de Laplace de otra función $S : [0,+\infty) \longrightarrow B(X)$. Damos entonces las condiciones necesarias y la definición correspondiente para que podamos hablar de un generador A de lo que llamamos el semigrupo n veces integrado $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Caracterizamos dichos generadores utilizando la extensión del teorema de Widder dada por Arendt. Finalmente tratamos el problema de Cauchy y utilizamos los resultados obtenidos para los generadores de semigrupos n veces integrados para construir soluciones a dicho problema.

INDICE

CAPITULO 1: PRELIMINARES

CAPITULO 2: EL TEOREMA DE WIDDER Y SU GENERALIZACION

CAPITULO 3: TRANSFORMADA DE LAPLACE Y SEMIGRUPOS DE OPERADORES

CAPITULO 4: EL PROBLEMA DE CAUCHY

CAPITULO 1

PRELIMINARES

En este capítulo revisamos someramente los conceptos y el material necesarios para la comprensión de los siguientes capítulos. Los objetos con los que vamos a trabajar son espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, un campo que puede ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Estos espacios están dotados de una métrica que está inducida por una norma, y en el caso en que dichos espacios sean completos estaremos hablando de espacios de Banach. Mencionaremos también lo que son los semigrupos de operadores y los resultados relacionados con ellos enfocados a la prueba del teorema de Hille-Yosida, su relación con ecuaciones diferenciales, algo de teoría de medidas vectoriales y resultados diversos.

Resulta claro que no podremos dar una extensa descripción de estos temas pues la intención de este capítulo es únicamente poner en la mesa los elementos que son necesarios y susceptibles de más estudio para la comprensión del trabajo posterior. Con el fin de familiarizarse más con estos temas sugerimos consultar las referencias bibliográficas [2] a [9], [11] y [14].

1.0 DEFINICIONES BASICAS

1.0-1 Definición (Funcional lineal). Una *funcional lineal* ℓ es un operador lineal con dominio en un espacio vectorial X y rango en el campo escalar $\mathbb{K}$ de X, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ si X es real o complejo respectivamente. □

1.0-2 Definición (Espacio dual). El *espacio dual* de un espacio normado X es el conjunto

$$X' = \left\{ \ell : X \longrightarrow \mathbb{K} \mid \ell \text{ es una funcional lineal continua}^{1} \right\} \qquad \square$$

Observación: No hay que confundir el espacio dual X' de X con el espacio dual algebráico X^{*} de X, recordemos que

$$X^{*} = \left\{ \ell : \longrightarrow \mathbb{K} \mid \ell \text{ es una funcional lineal} \right\}$$

1.0-3 Definición (Operador acotado). Sean X y Y espacios normados y $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ un operador lineal, con dominio $\mathcal{D}(T) \subset X$. Decimos que el operador T es *acotado* si existe un número real c tal que

$$\|Tx\| \le c\|x\| \qquad \forall\ x \in \mathcal{D}(T) \qquad \square$$

1.0-4 Definición (Espacio de operadores acotados). Sean X y Y dos espacios normados (ambos reales o ambos complejos). Definimos el *espacio de operadores acotados* de X en Y por el conjunto B(X,Y) de operadores lineales acotados de X en Y dotado de la suma

$$(T_1 + T_2)x = T_1x + T_2x$$

el producto por escalares

$$(\alpha T)x = \alpha Tx$$

y la norma

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|Tx\|$$

Cuando X = Y denotamos a B(X,Y) por B(X) simplemente. $\square$

1.0-5 Definición (Conjunto total). Decimos que un subconjunto M de un

---

[1] La topología en X esta dada por los básicos

$$B_{\varepsilon}(x) = \left\{ y \in X \mid \|x-y\| < \varepsilon \right\}, \quad \varepsilon > 0, \ x \in X.$$

donde $\|\cdot\|$ denota la norma en X.

espacio normado X es un *conjunto total* (o *conjunto fundamental*) si la cerradura del subespacio generado por M es X, es decir $\overline{V(M)} = X$. □

TEOREMAS FUNDAMENTALES PARA ESPACIOS NORMADOS Y ESPACIOS DE BANACH

1.1 EL TEOREMA DE HAHN-BANACH

Este teorema fue descubierto por primera vez por H. Hahn (1927), redescubierto en su forma actual y más general por S. Banach (1929) y generalizado a espacios vectoriales complejos por H. F. Bohnenblust y A. Sobczyk (1938)

Cuando hablamos de un "problema de extensión" consideramos un objeto matemático definido en un subconjunto Z de un conjunto dado X y deseamos extender dicho objeto del conjunto Z al conjunto X de tal suerte que ciertas propiedades del objeto se preserven. En el caso del teorema de Hahn-Banach el objeto a extender es una funcional lineal ℓ definida en un subespacio Z de un espacio vectorial X y que tiene cierta propiedad de acotamiento que será formulada en términos de una funcional sublineal.

1.1-1 Definición. Decimos que una funcional real p definida en un espacio vectorial X es *sublineal* si es subaditiva, es decir

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \qquad \forall\ x, y \in X$$

y además

$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x) \quad \square$$

Ejemplo: La norma en un espacio normado es una funcional sublineal.

1.1-2 Teorema (Hahn-Banach, extensión de funcionales lineales). *Sea X un espacio vectorial real o complejo y p una funcional sublineal* *definida en X. Además, sea ℓ una funcional lineal definida en un subespacio Z de X tal que*

$$|\ell(x)| \leq p(x) \qquad \forall\ x \in Z$$

entonces ℓ tiene una extensión lineal $\tilde{\ell}$ a todo X que satisface

$$|\tilde{\ell}(x)| \leq p(x) \qquad \forall\ x \in X \tag{1.1}$$

esto es, $\tilde{\ell}$ es una funcional lineal definida en X que cumple (1.1) y además $\tilde{\ell}(x) = \ell(x)\ \ \forall\ x \in Z$ □

Observación: La prueba de este teorema utiliza el axioma de elección.

1.1-3 Teorema (Hahn-Banach en espacios normados). *Sea ℓ una funcional lineal acotada definida en un subespacio Z de un espacio normado X. Entonces existe una funcional lineal acotada $\tilde{\ell}$ definida en X que extiende a ℓ y que tiene la misma norma*

$$\|\tilde{\ell}\|_X = \|\ell\|_Z$$

con

$$\|\tilde{\ell}\|_X = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |\tilde{\ell}(x)| \quad , \quad \|\ell\|_Z = \sup_{\substack{x \in Z \\ \|x\|=1}} |\ell(x)|$$

y $\|\ell\|_Z = 0$ en el caso trivial $Z = \{0\}$ □

Como consecuencia de este resultado tenemos dos teoremas.

1.1-4 Teorema (Funcionales lineales acotadas). *Sea X un espacio normado y $x_0 \in X \setminus \{0\}$. Entonces existe una funcional lineal acotada tal que*

$$\|\ell\| = 1 \qquad \ell(x_0) = \|x_0\|$$ □

1.1-5 Teorema (Norma, vector cero). *Para todo x en un espacio normado X se tiene*

$$\|x\| = \sup_{\substack{\ell \in X' \\ \ell \neq 0}} \frac{|\ell(x)|}{\|\ell\|}$$

Así si x_0 es tal que $\ell(x_0) = 0\ \ \forall\ \ell \in X'$ entonces $x_0 = 0$ □

1.2 Los teoremas de categoria de Baire y del acotamiento uniforme

El teorema de acotamiento uniforme de S. Banach y H. Steinhaus (1927) es considerado frecuentemente una piedra angular del Análisis Funcional en espacios normados. A diferencia del teorema de Hahn-Banach éste teorema requiere de completez. De hecho caracteriza algunas de las propiedades más importantes de los espacios de Banach que los espacios normados no tienen en general. Este teorema es consecuencia del teorema de categoría de Baire, que tiene otras aplicaciones en Análisis Funcional y es de interés propio.

Los conceptos que se dan a continuación tienen dos nombres, uno nuevo y otro viejo (en paréntesis), el último esta entrando en desuso pues "categoría" se esta usando con otro sentido en Matemáticas.

1.2-1 Definición (Categoría). Decimos que un subconjunto M de un espacio métrico X es

(a) *raro (denso en ninguna parte) en* X si su cerradura $\overline{M}$ no tiene puntos interiores.

(b) *flaco (de la primera categoría) en* X si M es la unión numerable de conjuntos raros en X.

(c) *no flaco (de la segunda categoría) en* X si M no es flaco en X

□

1.2-2 Teorema (de categoría de Baire. Espacios métricos completos). *Si un espacio métrico* $X \neq \emptyset$ *es completo, es no flaco en sí mismo. Esto es, si* $X \neq \emptyset$ *es completo y* $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ (A_k cerrado) *entonces por lo menos un* A_k *contiene un conjunto abierto distinto del vacío.* □

Observación: El inverso del teorema de categoría de Baire no es cierto en general.

Enunciemos ahora el teorema del acotamiento uniforme. Este teorema dice que si X es un espacio de Banach y tenemos una sucesión de operadores $(T_n) \subset B(X,Y)$ tal que $(T_n x)$ esta acotada para todo $x \in X$ y toda $n \in \mathbb{N}$ entonces la sucesión es uniformemente acotada. En otras palabras, acotamiento puntual implica acotamiento en un sentido más riguroso, en este caso, acotamiento uniforme.

1.2-3 Teorema (Acotamiento uniforme). *Sea (T_n) una sucesión de operadores lineales acotados $T_n : X \longrightarrow Y$ de un espacio de Banach X en un espacio normado Y tal que $\left(\|T_n x\|\right)$ esta acotada para todo $x \in X$, digamos*

$$\|T_n x\| \le c_x \qquad n = 1,2,\ldots$$

donde $c_x \in \mathbb{R}$.

Entonces la sucesión de las normas $\left(\|T_n\|\right)$ está acotada, esto es, existe una c tal que

$$\|T_n\| \le c \qquad n = 1,2,\ldots \qquad \square$$

1.3 Convergencia debil y convergencia fuerte

1.3-1 Definición (Convergencia fuerte). Decimos que una sucesión (x_n) de un espacio normado X *converge fuertemente* (o que *es convergente en la norma*) si existe un $x \in X$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n - x \| = 0$$

Notación: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$

ó $x_n \longrightarrow x$

x se llama el *límite fuerte* de (x_n) y decimos que (x_n) *converge fuertemente* a x. $\square$

1.3-2 Definición (Convergencia débil). Decimos que una sucesión (x_n) en un espacio normado X *converge debilmente* si hay un $x \in X$ tal que para toda $\ell \in X'$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \ell(x_n) = \ell(x)$$

Notación: $x_n \xrightarrow{w} x$

Al punto x le llamamos *límite débil* de (x_n) y decimos que (x_n) *converge debilmente* a x. □

La convergencia débil tiene varias aplicaciones en Análisis. El concepto ilustra un principio básico del Análisis Funcional, el hecho de que el estudio de espacios se relacione con el estudio del espacio dual.

Para utilizar la convergencia débil debemos saber ciertas propiedades básicas, que se mencionan en el siguiente lema. En la prueba usamos los teoremas de Hahn-Banach, via 1.1-5 y el teorema del acotamiento uniforme. Esto demuestra la importancia de estos teoremas en conexión con la convergencia débil.

1.3-3 Lema (Convergencia débil). *Sea* (x_n) *una sucesión que converge débilmente a* x *en un espacio normado* X. *Entonces:*

(a) *El límite débil* x *de* (x_n) *es único.*

(b) *Toda subsucesión de* (x_n) *converge débilmente a* x.

(c) *La sucesión* $(\|x_n\|)$ *esta acotada.* □

1.3-4 Teorema (Convergencia débil y fuerte). *Sea* (x_n) *una sucesión en un espacio normado* X. *Entonces*

(a) *Convergencia fuerte implica convergencia débil con el mismo límite.*

(b) *El inverso de* (a) *no es cierto en general.*

(c) *Si* $\dim X < \infty$ *entonces convergencia débil implica convergencia fuerte.* □

1.3-5 Lema (Convergencia débil). *En un espacio normado* X *tenemos que*

$x_n \xrightarrow{w} x$ *si y solo si:*

(a) *La sucesión* $(\|x_n\|)$ *esta acotada.*

(b) *Para todo elemento* f *de un subconjunto total* $M \subset X'$ *tenemos*

$$f(x_n) \longrightarrow f(x) \qquad \square$$

1.4 Convergencia de sucesiones de operadores y funcionales

Las sucesiones de operadores y de funcionales acotadas surgen con frecuencia en la práctica. Su convergencia es de interés práctico.

La experiencia muestra que para sucesiones de elementos en un espacio normado, las convergencias débil y fuerte tales y como se definieron resultan ser conceptos de utilidad. Para sucesiones de operadores $T_n \in B(X,Y)$ tres tipos de convergencia suelen ser de interés teórico así como práctico, éstas son:

(1) Convergencia en la norma de $B(X,Y)$.

(2) Convergencia fuerte de $(T_n x)$ en Y.

(3) Convergencia débil de $(T_n x)$ en Y.

1.4-1 Definición (Convergencia de sucesiones de operadores). Sea X y Y espacios normados. Decimos que una sucesión de operadores $T_n \in B(X,Y)$

(1) *converge uniformemente* si (T_n) converge en la norma de $B(X,Y)$[2].

(2) *converge fuertemente* si $(T_n x)$ converge fuertemente en Y para todo $x \in X$.

---

[2]Recordemos que la norma de un operador en $B(X,Y)$ esta dada por

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|Tx\|$$

(3) *converge débilmente* si $(T_n x)$ converge débilmente en Y para todo $x \in X$.

En fórmulas esto significa que hay un operador $T : X \longrightarrow Y$ tal que

(1) $\| T_n - T \| \longrightarrow 0$

(2) $\| T_n x - Tx \| \longrightarrow 0 \qquad \forall\, x \in X$

(3) $| \ell(T_n x) - \ell(Tx) | \longrightarrow 0 \qquad \forall\, x \in X\ ,\ \forall\, \ell \in Y'$

respectivamente. Llamamos a T el *operador límite uniforme*, *fuerte* y *débil* de (T_n) respectivamente. □

Observación: (1) ⇒ (2) ⇒ (3).

Para sucesiones de funcionales lineales, por la parte (c) del teorema 1.3-4, los conceptos (2) y (3) son equivalentes pues las funcionales lineales son operadores con rango en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, espacios de dimensión finita. Los dos conceptos que quedan los llamamos convergencia fuerte y débil*, lease "débil estrella".

1.4-2 Definición (Convergencia fuerte y débil* de una sucesión de funcionales). Sea (ℓ_n) una sucesión de funcionales lineales acotadas definidas en un espacio normado X. Entonces

(a) *convergencia fuerte* de (ℓ_n) significa que hay una $\ell \in X'$ tal que

$$\| \ell_n - \ell \| \longrightarrow 0$$

Notación: $\ell_n \longrightarrow \ell$

(b) *convergencia débil** de (ℓ_n) significa que hay una $\ell \in X'$ tal que

$$\ell_n(x) \longrightarrow \ell(x) \qquad \forall\, x \in X$$

Notación: $\ell_n \xrightarrow{w} \ell$

a ℓ le llamamos el *límite fuerte* y el *límite débil** de (ℓ_n) respectivamente. □

Volviendo a los operadores $T_n \in B(X,Y)$, nos preguntamos que se puede decir del operador límite $T : X \longrightarrow Y$ en (1), (2) y (3).

Si la convergencia es uniforme entonces $T \in B(X,Y)$, si la convergencia es fuerte o débil T es lineal todavía pero puede no ser acotado si X no es completo.

1.4-3 Lema (Convergencia fuerte de operadores). *Sea $(T_n) \subset B(X,Y)$ una sucesión de operadores donde X es un espacio de Banach y Y un espacio normado. Si (T_n) converge fuertemente a T entonces $T \in B(X,Y)$.* □

Observación: Este resultado es consecuencia del teorema de acotamiento uniforme 1.2-3.

1.4-4 Teorema (Convergencia fuerte). *Una sucesión (T_n) de operadores en $B(X,Y)$, donde X y Y son espacios de Banach, es fuertemente convergente si y solo si*

(a) *La sucesión $(\|T_n\|)$ esta acotada.*

(b) *La sucesión $(T_n x)$ es de Cauchy en Y para todo x en un subconjunto total $M \subset X$.* □

1.4-5 Corolario (Funcionales). *Una sucesión (ℓ_n) de funcionales lineales acotadas definidas en un espacio de Banach X es débil* convergente, con límite una funcional lineal acotada, si y solo si*

(a) *La sucesión $(\|\ell_n\|)$ es acotada.*

(b) *La sucesión $(\ell_n(x))$ es de Cauchy para toda x en M, un subconjunto total de X.* □

1.5 El teorema del mapeo abierto

Ya se discutieron los teoremas de Hahn-Banach y del acotamiento uniforme, nos acercamos ahora al tercer "gran" teorema del capítulo, el teorema del mapeo abierto. Este teorema nos da condiciones bajo las cuales un operador lineal acotado es un mapeo abierto. Como en el caso del teorema del acotamiento uniforme, se necesita la completez. El teorema también da condiciones bajo las cuales el inverso de un operador lineal acotado resulta ser acotado. La prueba también utiliza el teorema de categoría de Baire.

1.5-1 Definición (Mapeo abierto). Sean X y Y espacios métricos. Decimos que $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ con dominio $\mathcal{D}(T) \subset X$ es un *mapeo abierto* si para todo conjunto abierto en $\mathcal{D}(T)$ la imagen es un conjunto abierto en Y. □

Observación: Si el mapeo no es suprayectivo debemos de tener cuidado en distinguir entre las dos afirmaciones de que el mapeo es un mapeo abierto como mapeo de su dominio

(a) en Y.

(b) en su rango.

1.5-3 Teorema (Mapeo abierto, inverso acotado). *Un operador lineal acotado T de un espacio de Banach X sobre un espacio de Banach Y es un mapeo abierto. Por lo que si T es biyectiva T^{-1} es continua y por lo tanto acotada.* □

1.6 Operadores lineales cerrados. El teorema de la grafica cerrada

No todos los operadores de interés práctico son acotados. Sin embargo prácticamente todos los operadores lineales que los analistas usan en su trabajo son de los llamados operadores lineales cerrados.

1.6-1 Definición (Operador lineal cerrado). Sean X y Y espacios normados y $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ un operador lineal con dominio $\mathcal{D}(T) \subset X$.

Decimos que T es un *operador lineal cerrado* si su gráfica

$$\mathcal{G}(T) = \left\{ (x,y) \ : \ x \in \mathcal{D}(T) \ , \ y = Tx \right\}$$

es cerrada en el espacio normado $X \times Y$ en donde las dos operaciones algebráicas se definen de manera usual, esto es

$$(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1 + x_2 \ , \ y_1 + y_2)$$

$$\alpha(x,y) = (\alpha x,\alpha y) \qquad \alpha \text{ un escalar}$$

y la norma definida por

$$\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|. \qquad \square$$

¿Bajo que condiciones un operador lineal cerrado será acotado?

1.6-2 Teorema (de la gráfica cerrada). *Sea* X *y* Y *espacios de Banach y* $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ *un operador lineal cerrado, con* $\mathcal{D}(T) \subset X$. *Entonces si* $\mathcal{D}(T)$ *es cerrado en* X, *el operador es acotado.* $\square$

Por definición $\mathcal{G}(T)$ es cerrada si y solo si $z = (x,y) \in \overline{\mathcal{G}(T)}$ implica que $z \in \mathcal{G}(T)$. Se puede probar que $z \in \mathcal{G}(T)$ si y solo si hay una sucesión $z_n = (x_n,y_n) \in \mathcal{G}(T)$ tal que $z_n \longrightarrow z$, así

$$x_n \longrightarrow x \quad , \quad Tx_n \longrightarrow y$$

y $z = (x,y) \in \mathcal{G}(T)$ si y solo si $x \in \mathcal{D}(T)$ y $y = Tx$. Esto prueba el siguiente criterio que expresa una propiedad que se toma a menudo como definición de operador lineal cerrado.

1.6-3 Teorema (Operador lineal cerrado). *Sean* X *y* Y *espacios normados. Sea* $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ *un operador lineal con* $\mathcal{D}(T) \subset X$. *Entonces* T *es cerrado si y solo si tiene la siguiente propiedad:*

Si $x_n \longrightarrow x$ *con* $x_n \in \mathcal{D}(T)$ *y* $Tx_n \longrightarrow y$ *entonces* $x \in \mathcal{D}(T)$ *y* $Tx = y$. $\square$

1.6-4 Lema (Operador lineal cerrado). *Sea* $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ *un operador lineal acotado con dominio* $\mathcal{D}(T) \subset X$, *donde* X *y* Y *son espacios normados. Entonces:*

(a) *Si* $\mathcal{D}(T)$ *es un subconjunto cerrado de* X, T *es cerrado.*

(b) *Si* T *es cerrado y* Y *es completo,* $\mathcal{D}(T)$ *es un subconjunto cerrado de* X. □

SEMIGRUPOS DE OPERADORES Y EL TEOREMA DE HILLE-YOSIDA

1.7 CONTRACCIONES Y EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BANACH

El teorema del punto fijo de Banach o teorema de contracción tiene que ver con ciertas funciones llamadas contracciones de un espacio métrico en si mismo, dicho teorema da condiciones suficientes para la existencia y unicidad de un punto fijo (un punto cuya imagen es él mismo).

1.7-1 Definición (Contracción). Sea (X,d)[3] un espacio métrico y C un subconjunto cerrado de X. Decimos que una función $T : C \longrightarrow X$ es una *contracción* si $d(Tx,Ty) \leq d(x,y)$ para todo $x,y \in C$. Decimos que T es una *contracción estricta* si existe $\alpha < 1$ tal que $d(Tx,Ty) \leq \alpha d(x,y)$ para todo $x,y \in C$. □

Observación: Como d es no negativa, esto fuerza a que $\alpha \geq 0$.

1.7-2 Teorema (del punto fijo de Banach). *Sea* $(X,d) = X$ *un espacio métrico,* $X \neq \emptyset$. *Supongase que* X *es completo y* $T : X \longrightarrow X$ *una contracción estricta. Entonces* T *tiene exactamente un punto fijo.*

Prueba: Construimos una sucesión (x_n) y mostramos que es de

---

[3] Recordemos que un espacio métrico es una pareja ordenada (X,d) tal que su primer elemento es un conjunto de "puntos" y cuyo segundo elemento es una función llamada "distancia" definida en $X \times X$ tal que

(m1) d es una función real, finita y no negativa.

(m2) $d(x,y) = 0$ si y solo si $x = y$.

(m3) $d(x,y) = d(y,x)$ (simetría).

(m4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (desigualdad del triángulo).

para todo $x,y,z \in X$ □

Cauchy. La sucesión converge en X pues X es completo y probamos que el límite x es un punto fijo de T y que además es único.

Tenemos que por hipótesis T es una contracción estricta, luego existe una α tal que

(1.2) $$d(Tx,Ty) \le \alpha d(x,y) \qquad 0 \le \alpha < 1$$

Sea $x_0 \in X$ y definamos una sucesión iterada (x_n) dada por

(1.3) $$x_0 \ , \ x_1 = Tx_0 \ , \ x_2 = Tx_1 = T^2x_0 \ , \ \dots \ , \ x_n = T^nx_0 \ , \ \dots$$

Claramente esta es la sucesión de imágenes de x_0 bajo aplicaciones repetidas de T. Veamos que (x_n) es de Cauchy. Por (1.2) y (1.3) tenemos

$$\begin{aligned} d(x_{m+1},x_m) &= d(Tx_m,Tx_{m-1}) \\ &\le \alpha d(x_m,x_{m-1}) \\ &= \alpha d(Tx_{m-1},Tx_{m-2}) \\ &\le \alpha^2 d(x_{m-1},x_{m-2}) \\ &\ \ \vdots \\ &\le \alpha^m d(x_1,x_2) \end{aligned}$$

Así, por la desigualdad del triángulo y la fórmula de la suma de una sucesión geométrica obtenemos, para $n > m$

$$\begin{aligned} d(x_m,x_n) &\le d(x_m,x_{m+1}) + \dots + d(x_{n-1},x_n) \\ &\le (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \dots + \alpha^{n-1}) d(x_0,x_1) \\ &= \alpha^m \frac{(1-\alpha^{n-m})}{1-\alpha} d(x_0,x_1) \qquad n > m \end{aligned}$$

Como $0 \le \alpha < 1$ en el numerador tenemos que $1 - \alpha^{n-m} < 1$ por lo que

$$d(x_m,x_n) \le \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0,x_1) \qquad n > m$$

En la derecha $0 \le \alpha < 1$ y $d(x_0,x_1)$ estan fijos así que podemos hacer el término de la derecha tan pequeño como queramos tomando m suficientemente grande. Esto prueba que (x_n) es de Cauchy. Como X es completo (x_n) converge, digamos a x. Veamos que x es un punto fijo de

T.

De la desigualdad del triángulo y (1.2) tenemos

$$\begin{aligned} d(x,Tx) &\le d(x,x_m) + d(x_m,Tx) \\ &\le d(x,x_m) + \alpha d(x_{m-1},x) \end{aligned}$$

y podemos hacer la suma de la derecha tan pequeña como queramos pues $x_m \longrightarrow x$. Así $d(x,Tx) = 0$ por lo que $x = Tx$. x es un punto fijo de T. Veamos que es el único.

Si $\hat{x} = T\hat{x}$ y $Tx = x$ tenemos de (1.2) que $d(x,\hat{x}) = d(Tx,T\hat{x}) \le \alpha d(x,\hat{x})$ que implica que $d(x,\hat{x}) = 0$ pues $\alpha < 1$, así $x = \hat{x}$. □

1.7-3 Teorema (Punto fijo). *Sea* $T : X \longrightarrow X$ *una función en un espacio métrico completo* $X = (X,d)$ *y supóngase que* T^m *es una contracción estricta en* X *para algún entero positivo* m. *Entonces* T *tiene un único punto fijo.*

Prueba: Por hipótesis, $B = T^m$ es una contracción estricta en X. Por el teorema 1.7-2 esta función tiene un único punto fijo $\hat{x}$, esto es $B\hat{x} = \hat{x}$, así $B^n\hat{x} = \hat{x}$ y el teorema 1.7-2 también implica que para $x \in X$

$$B^n x \longrightarrow \hat{x} \quad \text{conforme } n \longrightarrow \infty$$

Para el valor particular $x = T\hat{x}$, como $B^n = T^{nm}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{x} = \lim_{n \to \infty} B^n T\hat{x} &= \lim_{n \to \infty} TB^n\hat{x} \\ &= \lim_{n \to \infty} T\hat{x} = T\hat{x} \end{aligned}$$

esto prueba que $\hat{x}$ es un punto fijo de T, como todo punto fijo de T también lo es de B, esto implica que es único. □

1.8 Semigrupos de operadores. Definiciones y propiedades

1.8-1 Definición (Algebra de Banach). Sea X un espacio de Banach y definamos una multiplicación $(x,y) \longmapsto xy$ de $X \times X$ en X tal que

(1) X es un anillo con las operaciones $x + y$, xy

(2) $\|xy\| \le \|x\| \ \|y\|$

Entonces decimos que X es un *álgebra de Banach.* □

1.8-2 Lema (El álgebra de operadores lineales acotados). *Si* X *es un espacio de Banach entonces* $B(X) = B(X,X)$ *es un álgebra de Banach con la multiplicación dada por la composición, es decir* $ST(x) = S(T(x))$.

Prueba: Tenemos que $\left(B(X),+,\cdot \right)$ es claramente un anillo, por otro lado

$$\|ST\| = \sup_{\|x\|=1} \|(ST)x\| = \sup_{\|x\|=1} \|S(Tx)\| \le \|S\| \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \|S\| \ \|T\| \qquad \square$$

Observación: $B(X)$ visto como álgebra de Banach con la composición tiene una unidad dada por la identidad en X.

De este lema obtenemos el siguiente resultado.

1.8-3 Corolario. *Si* X *es un espacio de Banach y* $S \in B(X)$ *entonces*

$$\|S^k\| \le \|S\|^k \qquad \forall\ k \in \mathbb{N}. \qquad \square$$

1.8-4 Definición (Semigrupo de operadores). Decimos que una familia de operadores lineales acotados $\{T(t)\}_{t\ge0}$ a un parámetro real t en un espacio de Banach X, es un *semigrupo* si

(1) $T(0) = I_x$

(2) $T(s+t) = T(s)T(t) \qquad \forall\ s,t \ge 0$

Con $T(s)T(t) = T(s)\circ T(t)$.

Decimos que un semigrupo $\{T(t)\}$ en X es *fuertemente continuo* si

(3) $\lim\limits_{t \to 0} T(t)\ell = \ell \qquad \forall\ \ell \in X$

Lo llamamos un *semigrupo de contracciones* si

(4) $\|T(t)\| \le 1 \qquad \forall\ t \ge 0 \qquad \square$

Ejemplo: Dado un operador lineal acotado B en X definamos e^{tB} como

$$e^{tB} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k B^k \qquad t \geq 0.$$

Tenemos que

$$e^{0B} = \frac{1}{0!} 1B^0 + \frac{1}{1!} 0B^1 + \frac{1}{2!} 0B^2 + \ldots = \frac{1}{0!} 1I = I_x$$

y por otro lado se cumple

$$e^{sB}e^{tB} = \left(\frac{1}{0!} s^0B^0 + \frac{1}{1!} s^1B^1 + \frac{1}{2!} s^2B^2 + \ldots \right) \left(\frac{1}{0!} t^0B^0 + \frac{1}{1!} t^1B^1 + \frac{1}{2!} t^2B^2 + \ldots \right)$$

$$= \frac{1}{0!} s^0t^0B^0 + \frac{1}{1!} sB + \frac{1}{1!} tB + \frac{1}{2!} s^2B^2 + \frac{1}{1!} stB^2 + \frac{1}{2!} t^2B^2 + \ldots$$

$$= \frac{1}{0!} (s+t)^0B^0 + \frac{1}{1!} (s+t)^1B^1 + \frac{1}{2!} (s+t)^2B^2 + \ldots = e^{(s+t)B}$$

Por lo tanto $\left\{ e^{tB} \right\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo, más aún, esta familia resulta ser fuertemente continua. En efecto,

$$\| e^{tB}\ell - \ell \| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^kB^k\ell - \ell \right\|$$

$$= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} t^kB^k\ell \right\|$$

$$\leq \|\ell\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k\|B^k\|$$

y por el corolario 1.8-3 $\qquad \leq \|\ell\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k\|B\|^k \qquad \forall\ \ell \in X$

como $e^t - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k$ podemos concluir que

$$\|\ell\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k\|B\|^k = \|\ell\| \left(e^{t\|B\|} - 1 \right) \quad , \text{ así}$$

$$\| e^{tB}\ell - \ell \| \leq \|\ell\| \left(e^{t\|B\|} - 1 \right) \quad , \text{ de donde}$$

$$0 \leq \lim_{t \to 0} \| e^{tB}\ell - \ell \| \leq \lim_{t \to 0} \|\ell\| \left(e^{t\|B\|} - 1 \right) = 0$$

por lo tanto $\left\{ e^{tB} \right\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo fuertemente continuo.

Por otro lado tenemos que

$$\textbf{(1.4)} \quad \|e^{tB}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k\|B^k\| \leq \|\ell\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k\|B\|^k = e^{t\|B\|} \qquad t \geq 0$$

Una desigualdad de este tipo es válida para semigrupos fuertemente continuos en general.

1.8-5 Teorema (Acotamiento de la norma). *Sea* $\{T(t)\}$ *un semigrupo fuertemente continuo en* X. *Entonces existen constantes* $M \geq 1$ *y* $\omega \geq 0$ *tales que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \qquad \forall\ t \geq 0.$$

Prueba: Nótese primero que existen constantes $M \geq 1$ $t_0 > 0$ tales que

$$\|T(t)\| \leq M \qquad \forall\ t \in [0,t_0]$$

pues de lo contrario podríamos encontrar una sucesión $\{t_n\}$ de números positivos tendiendo a cero tal que $\|T(t_n)\| \longrightarrow \infty$, pero por el teorema del acotamiento uniforme 1.2-3 esto implicaría que

$$\sup_n \|T(t_n)\ell\| = \infty$$

para alguna $\ell \in X$ y esto iría en contra de la hipótesis de continuidad fuerte, es decir

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \| T(t_n)\ell - \ell \| \neq 0$$

Tomemos ahora $\omega = t_0^{-1}\ln M$. Dado $t \geq 0$ escribamos $t = kt_0 + s$ donde k es un entero no negativo y $s \in [0,t_0)$, entonces como $\{T(\cdot)\}$ es un semigrupo, el lema 1.8-2 y el corolario 1.8-3 nos permiten concluir que

$$\|T(t)\| = \|T(s)T(t_0)^k\| \leq MM^k \leq MM^{t/t_0} = Me^{\omega t}. \qquad \square$$

1.8-6 Corolario (Función continua). *Sea* $\{T(t)\}$ *un semigrupo fuertemente continuo en* X. *Entonces, para cada* $\ell \in X$, $t \longmapsto T(t)\ell$ *es una función continua de* $[0,+\infty)$ *en* X.

Prueba: Sea $\ell \in X$. Por el teorema 1.8-5 tenemos para $t \geq 0$, $h \geq 0$

$$\begin{aligned} \| T(t+h)\ell - T(t)\ell \| &= \left\| T(t)\Big(T(h)\ell - \ell\Big)\right\| \\ &\leq Me^{\omega t}\| T(h)\ell - \ell \| \end{aligned}$$

y si $h \in [0,t]$ entonces

$$\| T(t-h)\ell - T(t)\ell \| = \left\| T(t-h)\Big(T(h)\ell - \ell\Big)\right\|$$
$$\leq Me^{\omega t}\| T(h)\ell - \ell \|$$

Ahora bien, sea $t \in [0,+\infty)$, $\varepsilon > 0$, como $\lim\limits_{h \to 0} \| T(h)\ell - \ell \| = 0$ existe $h(\varepsilon M^{-1}e^{-\omega t},\ell) = \tilde{h}$ tal que $\|T(s)\ell - \ell\| < \dfrac{\varepsilon}{Me^{\omega t}}$ $\forall$ $s < \tilde{h}$ de donde si $\delta = \tilde{h}$ tendremos que

$$|(t+h) - t| < \delta \quad \text{implica} \quad \| T(t+h)\ell - \ell \| < \varepsilon$$
$$|(t-h) - t| < \delta \quad \text{implica} \quad \| T(t-h)\ell - \ell \| < \varepsilon$$

es decir $t \longmapsto T(t)\ell$ es continua para toda $\ell \in X$. □

Observación: Sea $\{T(t)\}$ un semigrupo fuertemente continuo, sabemos que existen $M,\omega \geq 0$ tales que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ para toda $t \geq 0$. Hagamos $S(t) = e^{-\omega t}T(t)$ para $t \geq 0$. Entonces $\{S(t)\}$ es un semigrupo fuertemente continuo en X tal que

(1.5) $$\|S(t)\| \leq M \qquad \forall\ t \geq 0$$

En particular si $M = 1$, $\{S(t)\}$ es entonces un semigrupo fuertemente continuo de contracciones en X.

Sea $\{S(t)\}$ un semigrupo fuertemente continuo en X tal que (1.5) se cumpla y definamos la norma $\|\cdot\|_*$ en X como

(1.6) $$\|\ell\|_* = \sup_{t \geq 0} \|S(t)\ell\|$$

Entonces, como $\|S(t)\| \leq M$, $t \geq 0$ y $\|S(t)\ell\| \leq \|S(t)\|\ \|\ell\|$ tenemos

$$\|\ell\| = \|S(0)\ell\| \leq \sup_{t \geq 0} \|S(t)\ell\| = \|\ell\|_* \leq \sup_{t \geq 0} \|S(t)\|\ \|\ell\| \leq M\|\ell\|$$

por lo tanto $\|\ell\| \leq \|\ell\|_* \leq M\|\ell\|$ y esto para cada $\ell \in X$, por lo que la nueva norma que definimos en (1.6) es equivalente a la norma original; también, con respecto a $\|\cdot\|_*$, $\{S(t)\}$ resulta ser un semigrupo fuertemente continuo de contracciones en X pues

$$\|S(t)\|_* = \sup_{\|x\|_* = 1} \|S(t)x\|_* = \sup_{\{x / \sup\limits_{t\geq 0}\|S(t)x\| = 1\}} \ \sup_{s\geq 0} \|S(s)S(t)x\|$$

$$= \sup_{\substack{\{x/\sup\|S(t)x\|=1\} \\ t\geq 0}} \ \sup_{s\geq 0} \|S(s+t)x\|$$

$$\leq \sup_{\substack{\{x/\sup\|S(t)x\|=1\} \\ t\geq 0}} \ \sup_{s\geq 0} \|S(s)x\| = 1$$

Esto lo único que nos esta diciendo es que para cada semigrupo fuertemente continuo podemos escoger una norma equivalente a la usual en la que nuestro semigrupo se va a ver como un semigrupo fuertemente continuo de contracciones. Es por esto que la mayor parte de los resultados que siguen a continuación los vamos a formular en términos de semigrupos fuertemente continuos de contracciones. Utilizar esta simplificación no es restrictiva ya que muchos de estos resultados se pueden reformular en términos de semigrupos fuertemente continuos no necesariamente de contracciones.

1.8-7 Definición (Generador infinitesimal). Sea $\{T(t)\}$ un semigrupo de operadores en X. El *generador (infinitesimal)* de $\{T(t)\}$ es el operador lineal A definido por

$$A\ell = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t}\Big(T(t)\ell - \ell\Big) \qquad \forall\ \ell \in \mathcal{D}(A).$$

Y el dominio $\mathcal{D}(A)$ de A es el subespacio de X de todas las ℓ para las cuales el límite existe. Escribimos $\frac{d}{dt}T(t) := A$. □

Antes de dar algunas de las propiedades de los generadores haremos una breve introducción al cálculo de las funciones valuadas en espacios de Banach. (E la sección 1.11 abarcaremos con mayor profundidad este tema).

Consideremos un espacio de Banach X. Sea Δ un intervalo cerrado en $(-\infty,+\infty)$ y sea $C(\Delta,X)$ el espacio de funciones continuas $u : \Delta \longrightarrow X$. Sea $C^1(\Delta,X)$ el espacio de las funciones continuamente diferenciables $u : \Delta \longrightarrow X$.

Si Δ es un intervalo finito $[a,b]$, decimos que $u : \Delta \longrightarrow X$ es (Riemann) integrable sobre Δ si $\lim\limits_{\delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} u(s_k)(t_k - t_{k-1})$ existe, donde $a = t_0 \le s_1 \le t_1 \le \ldots \le t_{n-1} \le s_n \le t_n = b$ y $\delta = \max\limits_{k} (t_k - t_{k-1})$. El límite lo denotamos por $\int_\Delta u(t)\, dt$ o $\int_a^b u(t)\, dt$.

Si $\Delta = [a,+\infty)$, decimos que $u : \Delta \longrightarrow X$ es integrable sobre Δ si $u|_{[a,b]}$ es integrable sobre $[a,b]$ para toda $b \ge a$ y $\lim\limits_{b \to \infty} \int_a^b u(t)\, dt$ existe; nuevamente, el límite lo denotamos por $\int_\Delta u(t)\, dt$ o $\int_a^\infty u(t)\, dt$.

1.8-8 Lema (Propiedades de la integral). *Sea* X *un espacio de Banach.*

(a) *Si* $u \in C(\Delta,X)$ *y* $\int_\Delta \|u(t)\|\, dt < \infty$, *entonces* u *es integrable sobre* Δ *y*

$$\left\| \int_\Delta u(t)\, dt \right\| \le \int_\Delta \|u(t)\|\, dt$$

En particular, si Δ *es un intervalo finito* $[a,b]$, *entonces toda función en* $C(\Delta,X)$ *es integrable sobre* Δ.

(b) *Sea* B *un operador lineal cerrado en* X. *Supongamos que* $u \in C(\Delta,X)$, $u(t) \in \mathcal{D}(B)$ *para toda* $t \in \Delta$, $Bu \in C(\Delta,X)$ *y que ambas* u *y* Bu *son integrables sobre* Δ. *Entonces* $\int_\Delta u(t)\, dt \in \mathcal{D}(B)$ *y*

$$B\int_\Delta u(t)\, dt = \int_\Delta Bu(t)\, dt$$

(c) *Si* $u \in C^1([a,b],X)$, *entonces*

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\, u(t)\, dt = u(b) - u(a)$$

(d) *Si* $u \in C([a,b],X)$ *y* $F(x) = \int_c^x u(s)\, ds$ *para* c , $x \in [a,b]$ *entonces* $F'(x) = u(x)$. □

1.8-9 Teorema (Semigrupos e integrales). *Sea* $\{T(t)\}$ *un semigrupo fuertemente continuo en* X *con generador* A.

(a) *Si* $f \in X$ *y* $t \ge 0$ *entonces* $\int_0^t T(s)f\, ds \in \mathcal{D}(A)$ *y*

$$T(t)\ell - \ell = A\int_0^t T(s)\ell \, ds$$

(b) *Si* $\ell \in \mathcal{D}(A)$ *y* $t \geq 0$ *entonces* $T(t)\ell \in \mathcal{D}(A)$ *y*

$$\frac{d}{dt} T(t)\ell = AT(t)\ell = T(t)A\ell$$

(c) *Si* $\ell \in \mathcal{D}(A)$ *y* $t \geq 0$ *entonces*

$$T(t)\ell - \ell = \int_0^t AT(s)\ell \, ds = \int_0^t T(s)A\ell \, ds$$

Prueba:

(a) Observemos que

$$\textbf{(1.7)} \qquad \frac{1}{h}\Big[T(h) - I \Big] \int_0^t T(s)\ell \, ds = \frac{1}{h}\int_0^t T(s+h)\ell - T(s)\ell \, ds$$

$$= \frac{1}{h}\left\{ \int_h^{t+h} T(s)\ell \, ds - \int_0^t T(s)\ell \, ds \right\}$$

$$= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)\ell \, ds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)\ell \, ds$$

para toda $h > 0$ y conforme $h \longrightarrow 0$ el lado derecho de (1.7) converge a $T(t)\ell - \ell$ por el lema 1.8-8 (d). Claramente el término que multiplica a la integral en el lado izquierdo de la ecuación (1.7) tiende al operador A cuando h tiende a cero, de donde concluimos la primera afirmación.

(b) Como

$$\frac{1}{h}\Big[T(t+h)\ell - T(t)\ell \Big] = A_h T(t)\ell = T(t)A_h\ell$$

para toda $h > 0$, con $A_h = h^{-1}[T(h) - I]$, se tiene que $T(t)\ell \in \mathcal{D}(A)$ y el límite por la derecha $\left(\frac{d}{dt}\right)^{+} T(t)\ell = AT(t)\ell = T(t)A\ell$. Por lo que basta probar que el límite por la izquierda $\left(\frac{d}{dt}\right)^{-} T(t)\ell$ es igual a $T(t)A\ell$ (suponiendo $t > 0$). Pero esto se sigue de la identidad

$$\frac{1}{-h}\Big[T(t-h)\ell - T(t)\ell \Big] - T(t)A\ell =$$

$$T(t-h)\Big[A_h - A \Big]\ell + [T(t-h) - T(t)]A\ell$$

válida para $0 < h \leq t$.

(c) Esto es consecuencia de (b) y del lema 1.8-8 (c) pues por (b) se tiene que $\frac{d}{dt} T(t)f = AT(t)f = T(t)Af$, integrando

$$\int_0^t \frac{d}{ds} T(s)f\, ds = \int_0^t AT(s)f\, ds = \int_0^t T(s)Af\, ds$$

y por el lema 1.8-8 (c)

$$\int_0^t \frac{d}{ds} T(s)f\, ds = T(t)f - f \qquad \square$$

1.8-10 Corolario (Generador cerrado). *Si* A *es el generador de un semigrupo fuertemente continuo* $\{T(t)\}$ *en* X*, entonces* $\mathcal{D}(A)$ *es denso en* X *y* A *es cerrado.*

Prueba: Como $\lim_{t \to 0^+} t^{-1}\int_0^t T(s)f\, ds = f$ para todo $f \in X$, el teorema 1.8-9 (a) implica que $\mathcal{D}(A)$ es denso en X. Para probar que A es cerrado probaremos que A cumple la equivalencia dada en el teorema 1.6-3. Sea $(f_n) \subset \mathcal{D}(A)$ una sucesión tal que $f_n \longrightarrow f$ y $Af_n \longrightarrow g$. Entonces $T(t)f_n - f_n = \int_0^t T(s)Af_n\, ds$ para toda $s > 0$, así haciendo $n \longrightarrow \infty$ tenemos que $T(t)f - f = \int_0^t T(s)g\, ds$ o equivalentemente que

$$\frac{T(t)f - f}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)g\, ds$$

que implica que

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)f - f}{t} = g$$

o en otras palabras que $f \in \mathcal{D}(A)$ y $Af = g$. $\square$

Antes de que prosigamos con el estudio de las propiedades de los semigrupos de operadores es necesario repasar ciertos resultados y conceptos de la teoría espectral.

1.9 ELEMENTOS DE TEORIA ESPECTRAL

La teoría espectral es una de las ramas principales del Análisis

Funcional moderno y sus aplicaciones. A grandes rasgos, ésta está relacionada con ciertos operadores inversos, sus propiedades generales y sus relaciones con los operadores originales. Tales operadores inversos surgen en forma natural al intentar resolver ecuaciones (sistemas de ecuaciones lineales algebráicas, ecuaciones diferenciales, ecuaciones integrales).

Haremos una suposición general para obtener una teoría satisfactoria, excluimos el espacio vectorial trivial $\{0\}$ y suponemos que todos los espacios son complejos a menos que mencionemos lo contrario.

1.9-1 Definición (Resolvente). Sea X un espacio normado y sea $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow X$ un operador lineal con dominio $\mathcal{D}(T) \subset X$. A T le asociamos el operador

$$T_\lambda = \lambda I - T$$

donde λ es un número complejo e I es el operador identidad en $\mathcal{D}(T)$. Si T_λ tiene un inverso, lo denotamos por $R_\lambda(T)$, esto es,

(1.8) $$R_\lambda(T) = T_\lambda^{-1} = (\lambda I - T)^{-1}$$

y le llamamos *operador resolvente* de T o simplemente *resolvente*[4] de T. En vez de $R_\lambda(T)$ también escribimos en forma simplificada R_λ cuando esta claro a que operador T nos estamos refiriendo. □

El nombre "resolvente" es apropiado pues nos ayuda a resolver la ecuación $T_\lambda x = y$, esto es, $x = T_\lambda^{-1}y = R_\lambda(T)y$ siempre y cuando $R_\lambda(T)$ exista. Más importante aun, la investigación de las propiedades de R_λ

---

[4]En la literatura podemos encontrar que algunos autores definen el resolvente por $(T - \lambda I)^{-1}$ o $(I - \mu T)^{-1}$, pero esto no modifica en nada la teoría pues la transición a la forma (1.8) es directa.

será básica para entender mejor al operador T mismo.

Para nuestra investigación de T, T_λ y R_λ necesitaremos los siguientes conceptos:

1.9-2 Definición (Valor regular, conjunto resolvente, espectro). Sea X un espacio normado complejo no trivial y $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow X$ un operador lineal con dominio $\mathcal{D}(T) \subset X$. Un *valor regular* λ de T es un número complejo tal que

(R1) $R_\lambda(T)$ existe,

(R2) $R_\lambda(T)$ esta acotado,

(R3) $R_\lambda(T)$ esta definido en un conjunto denso en X.

El *conjunto resolvente* $\rho(T)$ de T es el conjunto de valores regulares de T. Su complemento $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ en el plano complejo $\mathbb{C}$ se llama el *espectro* de T y $\lambda \in \sigma(T)$ se llama un *valor espectral* de T. Más aun, el espectro $\sigma(T)$ se divide en tres conjuntos disjuntos:

El *espectro puntual* o *espectro discreto* $\sigma_p(T)$ es el conjunto tal que $R_\lambda(T)$ no existe. A $\lambda \in \sigma_p(T)$ se le llama *valor propio* de T.

El *espectro continuo* $\sigma_c(T)$ es el conjunto tal que $R_\lambda(T)$ existe y satisface (R3) pero no (R2), esto es, $R_\lambda(T)$ no es acotado.

El *espectro residual* $\sigma_r(T)$ es el conjunto tal que $R_\lambda(T)$ existe pero no satisface (R3). □

Observación: $\rho(T), \sigma_p(T), \sigma_c(T)$ y $\sigma_r(T)$ son disjuntos y su unión es $\mathbb{C}$.

1.9-3 Teorema (Inverso). *Sea* $T \in B(X)$, *con X un espacio de Banach. Si* $\|T\| < 1$, *entonces* $(I - T)^{-1}$ *existe, es acotado y esta definido en todo X, además*

$$(1.9) \qquad (I - T)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} T^j = I + T + T^2 + \ldots$$

(la serie de la derecha es convergente en la norma de B(X)*).*

Prueba: Tenemos que $\|T^j\| \leq \|T\|^j$ (por el corolario 1.8-3) y que $\sum_{j=0}^{\infty} \|T\|^j$ converge pues $\|T\| < 1$ así la serie en (1.9) converge absolutamente, como X es completo B(X) también lo es y así convergencia absoluta implica convergencia. Sea $S = \sum_{j=0}^{\infty} T^j$, veamos que S es igual a $(I - T)^{-1}$

$$(I - T)(I + T + \dots + T^n) = (I + T + \dots + T^n)(I - T)$$
$$= I - T^{n+1}$$

cuando $n \longrightarrow \infty$ tenemos que $T^{n+1} \longrightarrow 0$ pues $\|T\| < 1$, por lo tanto $(I - T)S = S(I - T) = I$ □

Con este resultado podemos probar el importante hecho de que el espectro de un operador lineal acotado es un conjunto cerrado en el plano complejo.

1.9-4 Lema (Dominio de R_λ). *Sea X un espacio de Banach complejo, $T : X \longrightarrow X$ un operador lineal y $\lambda \in \rho(T)$. Supongamos que (a) T es cerrado o (b) T es acotado. Entonces $R_\lambda(T)$ esta definido en todo el espacio X y es acotado.*

Prueba:

(a) Como T es cerrado, por el teorema 1.6-3 T_λ también lo es. Así R_λ es cerrado. R_λ es acotado por (R2). Entonces su dominio $\mathcal{D}(R_\lambda)$ es cerrado por el lema 1.6-4 (b), así (R3) implica que $\mathcal{D}(R_\lambda) = \overline{\mathcal{D}(R_\lambda)} = X$.

(b) Como $\mathcal{D}(T) = X$ es cerrado, T es cerrado por el lema 1.6-4 (a) y la afirmación se sigue de la parte (a) de esta prueba. □

1.9-5 Teorema (Espectro cerrado). *El conjunto resolvente $\rho(T)$ de un operador lineal acotado T en un espacio de Banach complejo X es abierto, por lo que el espectro es cerrado.*

Prueba: Si $\rho(T) = \emptyset$, es abierto. Supongamos que $\rho(T) \neq \emptyset$.

Sea $\lambda_0 \in \rho(T)$ fijo y $\lambda \in \mathbb{C}$, tenemos

$$T - \lambda I = T - \lambda_0 I - (\lambda - \lambda_0)I$$

$$= (T - \lambda_0 I)\left[I - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0 I)^{-1} \right]$$

Denotemos al operador en corchetes [...] por V, así

(1.10) $$T_\lambda = T_{\lambda_\circ} V \quad \text{con } V = I - (\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_\circ}$$

Como $\lambda_0 \in \rho(T)$ y T es acotado $R_{\lambda_\circ} = T^{-1}_{\lambda_\circ} \in B(X)$ por el lema 1.9-4 (b).

Más aun, por el teorema 1.9-3 V tiene un inverso

(1.11) $$V^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} [(\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_\circ}]^j = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j R^j_{\lambda_\circ}$$

en B(X) para toda λ tal que $\|(\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_\circ}\| < 1$, esto es,

(1.12) $$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_\circ}\|}$$

Como $T^{-1}_{\lambda_\circ} = R_{\lambda_\circ} \in B(X)$ tenemos de aqui y de (1.10) que para toda λ que satisfaga (1.12) el operador T_λ tiene inverso

(1.13) $$R_\lambda = T^{-1}_\lambda = (T_{\lambda_\circ} V)^{-1} = V^{-1} R_{\lambda_\circ}$$

Así (1.12) representa una vecindad de λ_0 consistente de valores regulares de T. Como $\lambda_0 \in \rho(T)$ fue arbitrario, $\rho(T)$ es abierto y por lo tanto su complemento $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ es cerrado. □

De esta prueba obtenemos a partir de (1.11), (1.12) y de (1.13) el siguiente teorema de representación.

1.9-6 Teorema (de representación del resolvente). *Para* X *y* T *como en el teorema* 1.9-5 *y todo* $\lambda_0 \in \rho(T)$ *el resolvente* $R_\lambda(T)$ *tiene la representación*

$$R_\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j R^{j+1}_{\lambda_\circ}$$

La serie es convergente para toda λ *en el disco abierto dado por*

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_\circ}\|}$$

en el plano complejo. El disco es un subconjunto de $\rho(T)$. □

1.9-7 Teorema (Espectro). *El espectro* $\sigma(T)$ *de un operador lineal* *acotado* $T : X \longrightarrow X$ *en un espacio de Banach complejo* X *es compacto y esta acotado por el disco dado por* $|\lambda| \le \|T\|$. *Así el resolvente* $\rho(T)$ *es no vacio.*

Prueba: Sea $\lambda \neq 0$ y $\kappa = \frac{1}{\lambda}$, del teorema 1.9-3 obtenemos la representación

$$R_\lambda = (\lambda I - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda}(I - \kappa T)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}(\kappa T)^j = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda}T\right)^j$$

donde, por el teorema 1.9-3, la serie converge para toda λ tal que

$$\left\|\frac{1}{\lambda}T\right\| = \frac{\|T\|}{|\lambda|} < 1 \qquad \text{esto es} \qquad |\lambda| > \|T\|$$

El mismo teorema prueba que tal λ con esta propiedad esta en $\rho(T)$, así $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ debe estar en el disco $\left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le \|T\| \right\}$ y $\sigma(T)$ esta acotado, por 1.9-5 $\sigma(T)$ es cerrado entonces $\sigma(T)$ es compacto. □

1.9-8 Teorema (Ecuación resolvente, conmutatividad). *Sea* X *un espacio de Banach complejo,* $T \in B(X)$ *y* $\lambda, \mu \in \rho(T)$. *Entonces:*

(a) *El resolvente* R_λ *de* T *satisface la relación de Hilbert o ecuación resolvente*

(1.14) $$R_\mu - R_\lambda = (\mu - \lambda)R_\mu R_\lambda$$

(b) R_λ *conmuta con cualquier* $S \in B(X)$ *que conmute con* T.

(c) *Tenemos*

(1.15) $$R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$$

Prueba:

(a) Por 1.9-4 el rango de T_λ es X, así $I = T_\lambda R_\lambda$ con I el operador identidad en X. También $I = R_\lambda T_\lambda$ por lo que

$$\begin{aligned} R_\mu - R_\lambda &= R_\mu(T_\lambda R_\lambda) - (R_\mu T_\mu)R_\lambda \\ &= R_\mu(T_\lambda - T_\mu)R_\lambda \\ &= R_\mu\Big[T - \lambda I - (T - \mu I)\Big]R_\lambda \\ &= (\mu - \lambda)R_\mu R_\lambda \end{aligned}$$

(b) Por hipótesis $ST = TS$, así $ST_\lambda = T_\lambda S$ usando $I = T_\lambda R_\lambda = R_\lambda T_\lambda$

tenemos

$$R_\lambda S = R_\lambda S T_\lambda R_\lambda = R_\lambda T_\lambda S R_\lambda = S R_\lambda$$

(c) R_μ conmuta con T por (b), por lo tanto R_λ conmuta con R_μ por (b). □

10 El teorema de Hille - Yosida

Prosigamos con nuestro estudio de los semigrupos de operadores.

1.10-1 Teorema (Resolvente de un generador). *Sea* $\{T(t)\}$ *un semigrupo fuertemente continuo de contracciones en* X *con generador* A. *Entonces* $(0,+\infty) \subset \rho(A)$ *y*

$$(\lambda - A)^{-1}\varphi = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)\varphi \, dt$$

para toda $\varphi \in X$ *y* $\lambda > 0$.

Prueba: Sea $\lambda > 0$ arbitrario. Definamos un operador u_λ en X por

$$u_\lambda\varphi = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)\varphi \, dt$$

Como

$$\|u_\lambda\varphi\| \le \int_0^\infty e^{-\lambda t}\|T(t)\varphi\| \, dt \le \|\varphi\| \int_0^\infty e^{-\lambda t}dt = \lambda^{-1}\|\varphi\|$$

para toda $\varphi \in X$, u_λ es un operador lineal acotado en X.

Sea ahora $\varphi \in X$ dado,

$$\frac{1}{h}\left[T(h) - I \right]u_\lambda\varphi = \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}[T(t+h)\varphi - T(t)\varphi] \, dt$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t+h)\varphi \, dt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)\varphi \, dt$$

haciendo $t + h = x \quad dt = dx$ tenemos

$$= \frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda(x - h)}T(x)\varphi \, dx - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)\varphi \, dt$$

$$= \frac{1}{h}\int_h^0 e^{-\lambda(t-h)}T(t)\varphi\,dt + \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda(t-h)}T(t)\varphi\,dt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)\varphi\,dt$$

$$= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)\varphi\,dt - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}T(t)\varphi\,dt$$

haciendo tender h a cero obtenemos que

$$\frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)\varphi\,dt \longrightarrow \lambda u_\lambda\varphi$$

$$-\frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}T(t)\varphi\,dt = -\frac{1}{h}\int_0^h e^{\lambda(h-t)}T(t)\varphi\,dt \longrightarrow -\varphi$$

por lo que

$$\frac{1}{h}\Big[\,T(h) - I\,\Big]u_\lambda\varphi \longrightarrow Au_\lambda\varphi$$

de donde $u_\lambda\varphi \in \mathcal{D}(A)$ y $Au_\lambda\varphi = \lambda u_\lambda\varphi - \varphi$, esto es

(1.16) $$(\lambda - A)u_\lambda\varphi = \varphi \qquad \forall\ \varphi \in X$$

Además, si $\varphi \in \mathcal{D}(A)$, por el lema 1.8-8 (b), tenemos

$$u_\lambda A\varphi = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)A\varphi\,dt = \int_0^\infty A(e^{-\lambda t}T(t)\varphi)\,dt = A\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)\varphi\,dt = Au_\lambda\varphi$$

de donde

(1.17) $$u_\lambda(\lambda - A)\varphi = \varphi \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(A)$$

Por (1.17), $\lambda - A$ es inyectiva pues supongamos que

$$(\lambda - A)\varphi_1 = (\lambda - A)\varphi_2$$

esto implica que

$$\varphi_1 = u_\lambda(\lambda - A)\varphi_1 = u_\lambda(\lambda - A)\varphi_2 = \varphi_2$$

y por (1.16) $\lambda - A$ es suprayectiva (por lo que $\lambda - A$ es una biyección de $\mathcal{D}(A)$ en X). También por (1.16) y (1.17) $(\lambda - A)^{-1} = u_\lambda$ así $\lambda \in \rho(A)$, como λ fue arbitrario, esto termina la prueba. □

1.10-2 Definición (Operador disipativo). Decimos que un operador lineal A en X es *disipativo* si $\|\lambda f - Af\| \geq \lambda\|f\|$ para toda $f \in \mathcal{D}(A)$ y $\lambda > 0$. □

1.10-3 Lema (Operador disipativo, cerrado). *Sea* A *un operador lineal disipativo en* X *y sea* $\lambda > 0$. *Entonces* A *es cerrado si y solo si* $\mathcal{R}(\lambda - A)$ *es cerrado.*

Prueba: Supongamos que A es cerrado. Si $(f_n) \subset \mathcal{D}(A)$ es una sucesión y $(\lambda - A)f_n \longrightarrow h$, tenemos que $\left((\lambda - A)f_n\right)$ es una sucesión de Cauchy, sea $\varepsilon > 0$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} \lambda\varepsilon &> \|(\lambda - A)f_n - (\lambda - A)f_m\| \qquad \forall\ n,m > N \\ &> \lambda\|f_n - f_m\| \qquad \text{pues A es disipativo} \end{aligned}$$

pero esto solo quiere decir que $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$, por lo tanto (f_n) es de Cauchy.

Así, existe $f \in X$ tal que $f_n \longrightarrow f$ y $Af_n \longrightarrow \lambda f - h$. Como A es cerrado, por el teorema 1.6-3 tenemos que $f \in \mathcal{D}(A)$ y $(\lambda - A)f = h$, se sigue inmediatamente que $\mathcal{R}(\lambda - A)$ es cerrado.

Supongamos que $\mathcal{R}(\lambda - A)$ es cerrado. Si $(f_n) \subset \mathcal{D}(A)$, $f_n \longrightarrow f$ y $Af_n \longrightarrow g$ entonces $(\lambda - A)f_n \longrightarrow \lambda f - g$ que es igual a $(\lambda - A)f_0$ para algún $f_0 \in \mathcal{D}(A)$. Por la disipatividad de A tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda\|f_n - f_0\| &\le \|(\lambda - A)f_n - (\lambda - A)f_0)\| = \|(\lambda - A)f_n - \lambda f + g\| \\ &\le \lambda\|f_n - f\| + \|Af_n - g\| \end{aligned}$$

de donde $f_n \longrightarrow f_0$, así $f = f_0 \in \mathcal{D}(A)$ y $Af = g$. Nuevamente por el teorema 1.6-3 A es cerrado. □

1.10-4 Lema (Conjunto resolvente). *Sea* A *un operador lineal cerrado disipativo en* X *y sea* $\rho^+(A) = \rho(A) \cap (0,+\infty)$. *Si* $\rho^+(A)$ *es no vacío entonces* $\rho^+(A) = (0,+\infty)$.

Prueba: Basta probar que $\rho^+(A)$ es abierto y cerrado en $(0,+\infty)$. Como $\rho(A)$ es abierto en $\mathbb{C}$ por el teorema 1.9-5, $\rho(A)^+$ es abierto en $(0,+\infty)$. Supongamos que $(\lambda_n) \subset \rho(A)^+$ y que $\lambda_n \longrightarrow \lambda$. Dado $g \in X$ sea

$$g_n = (\lambda - A)(\lambda_n - A)^{-1} \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

Tenemos

$$(1.18)\qquad \begin{aligned} \|\varphi_n - \varphi\| &= \|(\lambda - A)(\lambda_n - A)^{-1}\varphi - \varphi\| \\ &= \|(\lambda - \lambda_n + \lambda_n - A)(\lambda_n - A)^{-1}\varphi - \varphi\| \\ &= \|(\lambda - \lambda_n)(\lambda_n - A)^{-1}\varphi + (\lambda_n - A)(\lambda_n - A)^{-1}\varphi - \varphi\| \\ &= \|(\lambda - \lambda_n)(\lambda_n - A)^{-1}\varphi\| \\ &= |\lambda - \lambda_n|\,\|(\lambda_n - A)^{-1}\varphi\| \end{aligned}$$

Por otro lado se cumple $\|(\lambda_n - A)\varphi\| \geq \lambda_n\|\varphi\|$, sea $\omega = (\lambda_n - A)\varphi$ así $\varphi = (\lambda_n - A)^{-1}\omega$ de donde

$$\|\omega\| \geq \lambda_n\|(\lambda_n - A)^{-1}\omega\|$$

o equivalentemente $\qquad \|(\lambda_n - A)^{-1}\omega\| \leq \lambda_n^{-1}\|\omega\|$

de esto y de (1.18) tenemos que

$$\|\varphi_n - \varphi\| \leq \frac{|\lambda - \lambda_n|}{\lambda_n}\|\varphi\|$$

pasando al límite cuando $n \longrightarrow \infty$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\|\varphi_n - \varphi\| = \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{|\lambda - \lambda_n|}{\lambda_n}\|\varphi\| = 0$$

por lo que $\mathcal{R}(\lambda - A)$ es denso en X. Pero como A es cerrado y disipativo por el lema 1.10-3 tenemos que $\mathcal{R}(\lambda - A)$ es cerrado, así $\mathcal{R}(\lambda - A) = X$. Usando la disipatividad de A nuevamente $\lambda - A$ es inyectivo pues

$$\|(\lambda - A)\varphi_1 - (\lambda - A)\varphi_2\| \geq \lambda\|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

de donde si $\varphi_1 \neq \varphi_2$ entonces $(\lambda - A)\varphi_1 \neq (\lambda - A)\varphi_2$ y $\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \lambda^{-1}$ se sigue que $\lambda \in \rho^{+}(A)$ por lo que $\rho^{+}(A)$ es cerrado en $(0,+\infty)$. □

1.10-5 Lema (Aproximación de Yosida). *Sea* A *un operador lineal cerrado disipativo en* X *y supongamos que* $\mathcal{D}(A)$ *es denso en* X *y* $(0,+\infty) \subset \rho(A)$. *Entonces, la* Aproximación de Yosida A_λ *de* A *para* $\lambda > 0$ *definida por*

$$A_\lambda = \lambda A(\lambda - A)^{-1} \qquad \forall\ \lambda > 0$$

tiene las siguientes propiedades:

(a) *Para cada* $\lambda > 0$, A_λ *es un operador lineal acotado en* X *y*

$\left\{e^{tA_\lambda}\right\}$ *es un semigrupo de contracciones fuertemente continuo en X,*

(b) $A_\lambda A_\mu = A_\mu A_\lambda$ *para toda* $\lambda, \mu > 0$,

(c) $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow \infty} A_\lambda \ell = A\ell$ *para todo* $\ell \in \mathcal{D}(A)$.

Prueba:

(a) Para cada $\lambda > 0$ sea $R_\lambda = (\lambda - A)^{-1}$, como A es disipativo tenemos que $\|(\lambda - A)^{-1}\| \le \lambda^{-1}$. Como $(\lambda - A)R_\lambda = I$ en X (por la prueba del lema anterior) y $R_\lambda(\lambda - A) = I$ en $\mathcal{D}(A)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda A R_\lambda &= (\lambda^2 - \lambda^2 + \lambda A)R_\lambda \\ &= \left(\lambda^2 - \lambda(\lambda - A)\right)R_\lambda \\ &= \lambda^2 R_\lambda - \lambda(\lambda - A)R_\lambda \\ &= \lambda^2 R_\lambda - \lambda I \quad \text{ en X} \end{aligned}$$

o equivalentemente

(1.19) $$A_\lambda = \lambda^2 R_\lambda - \lambda I \quad \text{en X}, \ \forall \ \lambda > 0$$

y que

$$R_\lambda(\lambda - A) = I \quad \text{en } \mathcal{D}(A),$$

multiplicando por λ y reordenando terminos

$$\lambda^2 R_\lambda - \lambda = \lambda R_\lambda A \quad \text{en } \mathcal{D}(A)$$

o equivalentemente

(1.20) $$A_\lambda = \lambda R_\lambda A \quad \text{en } \mathcal{D}(A)\ , \ \lambda > 0$$

Por (1.19) tenemos que, para cada $\lambda > 0$, A_λ es un operador acotado por ser suma de operadores acotados y por (1.4)

$$\left\|e^{tA_\lambda}\right\| = \left\|e^{t(\lambda^2 R_\lambda - \lambda I)}\right\| \le e^{-t\lambda}\left\|e^{t\lambda^2 R_\lambda}\right\| \le e^{-t\lambda} e^{t\lambda^2\|R_\lambda\|} \le 1 \qquad \forall \ t \ge 0.$$

(b) Esto es consecuencia de (1.19) y el teorema 1.9-8 pues

$$\begin{aligned} A_\lambda &= \lambda^2 R_\lambda - \lambda I \\ A_\mu &= \mu^2 R_\mu - \mu I \\ A_\lambda A_\mu &= (\lambda^2 R_\lambda - \lambda I)(\mu^2 R_\mu - \mu I) \end{aligned}$$

$$= (\lambda\mu)^2 R_\lambda R_\mu - \lambda^2\mu R_\lambda - \lambda\mu^2 R_\mu + \lambda\mu I$$
$$= (\mu\lambda)^2 R_\mu R_\lambda - \mu^2\lambda R_\mu - \mu\lambda^2 R_\lambda + \mu\lambda I$$
$$= (\mu^2 R_\mu - \mu I)(\lambda^2 R_\lambda - \lambda I) = A_\mu A_\lambda$$

(c) Para probar esto primero afirmamos que

(1.21) $$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda R_\lambda \ell = \ell \qquad \forall\ \ell \in X$$

Notese primero que por (1.19) y (1.20)

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \|\lambda R_\lambda \ell - \ell\| = \lim_{\lambda \to +\infty} \|R_\lambda A\ell\| \le \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^{-1}\|A\ell\| = 0 \qquad \forall\ \ell \in \mathcal{D}(A)$$

y como $\mathcal{D}(A)$ es denso en X y $\|\lambda R_\lambda - I\| \le \lambda\|R_\lambda\| + 1 = \lambda\lambda^{-1} + 1 = 2$ tenemos que para $\varphi \in X$ existe una sucesión $(\varphi_n) \subset X$ tal que $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ y que $\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R_\lambda \varphi_n = \varphi_n$ por lo que

$$\begin{aligned}
\|\lambda R_\lambda \varphi - \varphi\| &= \|\lambda R_\lambda \varphi - \varphi + \varphi_n - \varphi_n + \lambda R_\lambda \varphi_n - \lambda R_\lambda \varphi_n\| \\
&\le \|\lambda R_\lambda \varphi - \varphi - (\lambda R_\lambda \varphi_n - \varphi_n)\| + \|\lambda R_\lambda \varphi_n - \varphi_n\| \\
&= \|(\lambda R_\lambda - I)(\varphi - \varphi_n)\| + \|\lambda R_\lambda \varphi_n - \varphi_n\| \\
&\le \|\lambda R_\lambda - I\|\|\varphi - \varphi_n\| + \|\lambda R_\lambda \varphi_n - \varphi_n\| \\
&= 2\|\varphi - \varphi_n\| + \|\lambda R_\lambda \varphi_n - \varphi_n\|
\end{aligned}$$

y como $\lim_{n \to \infty} \|\varphi - \varphi_n\| = 0$ y $\lim_{\substack{n \to \infty \\ \lambda \to +\infty}} \|\lambda R_\lambda \varphi_n - \varphi_n\| = 0$ (1.21) es valido para todo $\ell \in X$. Finalmente (c) es consecuencia de (1.20) y de (1.21):

Tenemos $$A_\lambda = \lambda R_\lambda A$$

y $$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R_\lambda \ell = \ell \qquad \forall\ \ell \in X$$

de donde $$A_\lambda \ell = \lambda R_\lambda A\ell \qquad \forall\ \ell \in X$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A_\lambda \ell = \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R_\lambda A\ell = A\ell \qquad \square$$

1.10-6 Lema (Acotamiento). *Si* B *y* C *son operadores lineales acotados en* X *tales que* $BC = CB$, $\|e^{tB}\| \le 1$ *y* $\|e^{tC}\| \le 1$ *para toda* $t \ge 0$, *entonces*

$$\|e^{tB}\ell - e^{tC}\ell\| \le t\|B\ell - C\ell\| \qquad \forall\ \ell \in X\ ,\ t \ge 0.$$

Prueba: El resultado es consecuencia de la siguiente identidad

$$e^{tB}\ell - e^{tC}\ell = \int_0^t \frac{d}{ds}\Big[e^{sB}e^{(t-s)C}\Big]\ell \, ds \qquad \text{por (c) del lema 1.8-8}$$

$$= \int_0^t e^{sB}(B - C)e^{(t-s)C}\ell \, ds$$

$$= \int_0^t e^{sB}e^{(t-s)C}(B - C)\ell \, ds \qquad \text{por tener } BC = CB$$

y de aquí tenemos que

$$\|e^{tB}\ell - e^{tC}\ell\| \le \int_0^t \|e^{sB}e^{(t-s)C}(B - C)\ell\| \, ds$$

$$\le \int_0^t \|e^{sB}\| \; \|e^{(t-s)C}\| \; \|(B - C)\ell\| \, ds$$

$$\le \int_0^t \|(B - C)\ell\| \, ds \qquad \text{pues } \|e^{tB}\|, \|e^{tC}\| \le 1 \quad \forall\ t \ge 0$$

$$= t\|(B - C)\ell\|$$

es decir

$$\|e^{tB}\ell - e^{tC}\ell\| \le t\|(B - C)\ell\| \qquad \square$$

Estamos listos para probar el teorema de Hille-Yosida en su versión original.

1.10-8 Teorema (Hille-Yosida). *Un operador lineal* A *en* X *es el generador de un semigrupo de contracciones fuertemente continuo en* X *si y solo si:*

(a) $\mathcal{D}(A)$ *es denso en* X,

(b) A *es disipativo,*

(c) $\mathcal{R}(\lambda - A) = X$ *para alguna* $\lambda > 0$.

Prueba: La necesidad de las condiciones (a), (b) y (c) es consecuencia del corolario 1.8-10, que nos da que $\mathcal{D}(A)$ es denso en X y que A es cerrado, y del teorema 1.10-1, que nos da que $(0,+\infty) \subset \rho(A)$ y para $\lambda \in (0,+\infty)$ $\mathcal{R}(\lambda - A) = X$ además en la prueba de este teorema obtenemos

$$\|u_\lambda g\| \le \lambda^{-1}\|g\| \qquad \|u_\lambda g\| = \|(\lambda - A)^{-1}g\|$$

de donde si $g = (\lambda - A)\lambda f$ con $f \in \mathcal{D}(A)$

$$\lambda\|f\| = \|(\lambda - A)^{-1}(\lambda - A)\lambda f\| \le \lambda^{-1}\|(\lambda - A)\lambda f\| \le \|(\lambda - A)f\|$$

por lo que A es disipativo.

Probemos la suficiencia. P - (b), (c) y el lema 1.10-3 A es cerrado por ser $\mathcal{R}(\lambda - A) = X$ cerrado y $\rho(A) \cap (0,+\infty)$ es no vacío pues tenemos que $\lambda - A$ es inyectivo por ser A disipativo. También tenemos que el rango de $\lambda - A$ es X pero falta ver que $(\lambda - A)^{-1}$ es acotado:

Por tener A disipativo $\|(\lambda - A)f\| \ge \lambda\|f\|$, sea $\omega = (\lambda - A)f$ asi $f = (\lambda - A)^{-1}\omega$ de donde $\|(\lambda - A)^{-1}\omega\| \le \lambda^{-1}\|\omega\|$ así

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| = \sup_{\|\omega\|=1} \|(\lambda - A)^{-1}\omega\| \le \sup_{\|\omega\|=1} \lambda^{-1}\|\omega\| = \lambda^{-1}$$

por lo tanto $(\lambda - A)^{-1}$ es acotado.

Asi, por el lema 1.10-4 $(0,+\infty) \subset \rho(A)$. Usando la notación del lema 1.10-5 definimos para cada $\lambda > 0$ el semigrupo de contracciones fuertemente continuo $\left\{T_\lambda(t)\right\}$ en X por $T_\lambda(t) = e^{tA_\lambda}$. Por los lemas 1.10-5 (b) y 1.10-6 tenemos

$$\|T_\lambda(t)f - T_\mu(t)f\| \le t\|A_\lambda f - A_\mu f\| \qquad \forall\, f \in X\ ,\ t \ge 0\ ,\ \lambda,\mu > 0.$$

Luego por el lema 1.10-5 (c) $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow +\infty} T_\lambda(t)f$ existe para toda $t \ge 0$, uniformemente en intervalos acotados, para toda $f \in \mathcal{D}(A)$ y por lo tanto para todo $f \in \overline{\mathcal{D}(A)} = X$. Denotemos por $T(t)f$ al límite, entonces usando la identidad

$$T(s+t)f - T(s)T(t)f = \Big[T(s+t) - T_\lambda(s+t)\Big]f + T_\lambda(s)\Big[T_\lambda(t) - T(t)\Big] + \Big[T_\lambda(s) - T(s)\Big]T(t)f$$

concluimos que $\left\{T(t)\right\}$ es un semigrupo de contracciones fuertemente continuo en X. Falta probar que A es el generador de $\{T(t)\}$.

Por el teorema 1.8-9 (c) tenemos

$$(1.22) \qquad T_\lambda(t)\ell - \ell = \int_0^t T_\lambda(s)A_\lambda\ell \, ds \qquad \forall\, \ell \in X \,,\ t \geq 0,\ \lambda > 0.$$

Para cada $\ell \in \mathcal{D}(A)$ y $t \geq 0$ la identidad

$$T_\lambda(s)A_\lambda\ell - T(s)A\ell = T_\lambda(s)\left(A_\lambda\ell - A\ell\right) + \left[T_\lambda(s) - T(s)\right]A\ell$$

junto con el lema 1.10-5 (c) implica que $T_\lambda(s)A_\lambda\ell$ tiende a $T(s)A\ell$ cuando λ tiende a $+\infty$ uniformemente en $(0,t)$. Por lo tanto (1.22) nos da $T(t)\ell - \ell = \int_0^t T(s)A\ell \, ds$ para todo $\ell \in \mathcal{D}(A)$ y $t \geq 0$. De aquí encontramos que el generador B de $\{T(t)\}$ es una extensión de A. Pero para cada $\lambda > 0$ $\lambda - B$ es inyectiva por la necesidad de (b) y $\mathcal{R}(\lambda - A)$ es igual a X ya que $\lambda \in \rho(A)$. Concluimos que $B = A$. □

1.10-9 Lema. *Sea* A *un operador lineal disipativo en* X. *Supongamos que* $u : [0,+\infty) \longrightarrow X$ *es continua*, $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ *para toda* $t > 0$, Au *es continua en* $(0,+\infty)$ *y*

$$u(t) = u(\varepsilon) + \int_\varepsilon^t Au(s)\, ds$$

para toda $\varepsilon \in (0,t)$. *Entonces* $\|u(t)\| \leq \|u(0)\|$ *para toda* $t \in (0,+\infty)$.

Prueba: Sea $0 < \varepsilon = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ entonces

$$\|u(t)\| = \|u(\varepsilon)\| + \sum_{i=1}^{n}\left(\|u(t_i)\| - \|u(t_{i-1})\|\right)$$

$$= \|u(\varepsilon)\| + \sum_{i=1}^{n}\left(\|u(t_i)\| - \|u(t_i) - (t_i - t_{i-1})Au(t_i)\|\right)$$
$$+ \sum_{i=1}^{n}\left(\|u(t_i) - (t_i - t_{i-1})Au(t_i)\| - \|u(t_i) - u(t_i) + u(t_{i-1})\|\right)$$

Por la disipatividad de A tenemos

$$\|u(t_i) - (t_i - t_{i-1})Au(t_i)\| = (t_i - t_{i-1})\left\|\frac{u(t_i)}{t_i - t_{i-1}} - Au(t_i)\right\| \geq \|u(t_i)\|$$

de donde

$\|u(t)\| \leq \|u(\varepsilon)\|$

$$+\sum_{i=1}^{n}\Big(\|u(t_i)-(t_i-t_{i-1})Au(t_i)\| - \|u(t_i)-(t_i-t_{i-1})Au(t_i)\|$$

$$+\|u(t_i)-(t_i-t_{i-1})Au(t_i)\| - \|u(t_i)-u(t_i)+u(t_{i-1})\|\Big)$$

$$\le \|u(\varepsilon)\| + \sum_{i=1}^{n}\Big(\|u(t_i)-(t_i-t_{i-1})Au(t_i)\|$$

$$- \|u(t_i)-u(t_i)+u(t_{i-1})\|\Big)$$

usando $u(t) - u(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{t} Au(s)\,ds$ tenemos

$$\le \|u(\varepsilon)\| + \sum_{i=1}^{n}\Big(\|u(t_i)-(t_i-t_{i-1})Au(t_i)\|$$

$$- \Big\|u(t_i) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} Au(s)\,ds\Big\|\Big) .$$

usando $\|a\| - \|b\| \le \|a-b\|$ tenemos

$$\le \|u(\varepsilon)\| + \sum_{i=1}^{n}\Big(\Big\|u(t_i)-(t_i-t_{i-1})Au(t_i)-u(t_i)+\int_{t_{i-1}}^{t_i} Au(s)\,ds\Big\|\Big)$$

$$\le \|u(\varepsilon)\| + \sum_{i=1}^{n}\Big\|\int_{t_{i-1}}^{t_i} Au(s)\,ds-(t_i-t_{i-1})Au(t_i)\Big\|$$

$$\le \|u(\varepsilon)\| + \sum_{i=1}^{n}\Big\|\int_{t_{i-1}}^{t_i} Au(s)\,ds-\int_{t_{i-1}}^{t_i} Au(t_i)\,ds\Big\|$$

$$\le \|u(\varepsilon)\| + \sum_{i=1}^{n}\Big\|\int_{t_{i-1}}^{t_i} \Big(Au(s)-Au(t_i)\Big)\,ds\Big\|$$

$$\le \|u(\varepsilon)\| + \sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|Au(s)-Au(t_i)\|\,ds \qquad (1.23)$$

Como $\|Au(s) - Au(t_i)\|$ es uniformemente continua en $[\varepsilon, t]$ tenemos que dado $\varepsilon' > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\max_i (t_i - t_{i-1}) < \delta$ entonces

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|Au(s)-Au(t_i)\|\,ds \le \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon'\,ds$$

por lo que (1.23) es menor o igual que

$$\|u(\varepsilon)\| + \sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon'\,ds = \|u(\varepsilon)\| + \varepsilon'(t-\varepsilon)$$

podemos hacer ε' tan pequeño como queramos asi $\|u(t)\| \le \|u(\varepsilon)\|$, pero esto para ε arbitrariamente chico por lo tanto $\|u(t)\| \le \|u(0)\|$. □

1.10-10 Lema. *Sean* $\{T(t)\}$ *y* $\{S(t)\}$ *semigrupos de contracciones* *fuertemente continuos en X con generadores A y B respectivamente. Si $A = B$ entonces $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$.*

Prueba: Por el teorema 1.8-9 (b) tenemos que para $\ell \in \mathcal{D}(A)$ y $g \in \mathcal{D}(B)$, $\frac{d}{dt} T(t)\ell = AT(t)\ell$ y $\frac{d}{dt} S(t)g = BS(t)g$ respectivamente para $t \geq 0$. Integrando tenemos

$$\int_{\varepsilon}^{t} AT(s)\ell \, ds = T(t)\ell - T(\varepsilon)\ell$$

y
$$\int_{\varepsilon}^{t} BS(s)g \, ds = S(t)g - S(\varepsilon)g \qquad \forall \ \varepsilon > 0$$

de aquí que, como $A = B$,

$$\int_{\varepsilon}^{t} \Big(AT(s)\ell - AS(s)\ell\Big) \, ds = T(t)\ell - S(t)\ell + S(\varepsilon)\ell - T(\varepsilon)\ell \qquad \forall \ \varepsilon > 0$$

o equivalentemente

$$\int_{\varepsilon}^{t} A\Big(T(s) - S(s)\Big)\ell \, ds = \Big(T(t) - S(t)\Big)\ell - \Big(T(\varepsilon) - S(\varepsilon)\Big)\ell \qquad \forall \ \varepsilon > 0$$

entonces por el lema 1.10-9 tenemos que

$$\|[T(t) - S(t)]\ell\| \leq \|[T(0) - S(0)]\ell\| = 0$$

por lo tanto $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$. □

El teorema de Hille-Yosida y este último lema nos dan el siguiente resultado.

1.10-11 Teorema (Aproximación). *Sea $\{T(t)\}$ un semigrupo fuertemente continuo de contracciones en X con generador A y sea A_λ la aproximación de Yosida de A. Entonces*

$$\left\|e^{tA_\lambda}\ell - T(t)\ell\right\| \leq t\|A_\lambda \ell - A\ell\| \qquad \forall \ \ell \in \mathcal{D}(A) \ , \ t \geq 0 \ , \ \lambda > 0$$

y por lo tanto, para cada $\ell \in X$, $\lim_{\lambda \to +\infty} e^{tA_\lambda}\ell = T(t)\ell$ para todo $t \geq 0$, uniformemente en intervalos acotados.

Prueba: Definamos $T_\lambda(t) = e^{tA_\lambda}$, la prueba del teorema de Hille-Yosida nos da que

$$\|T_\lambda(t)\ell - T_\mu(t)\ell\| \leq t\|A_\lambda \ell - A_\mu \ell\|$$

pasando al límite cuando $\mu \longrightarrow +\infty$ tenemos que

$$\|T_\lambda(t)\ell - T'(t)\ell\| \le t\|A_\lambda\ell - A\ell\| \qquad \forall\ \ell \in \mathcal{D}(A)$$

uniformemente en intervalos acotados para t. Pero $\{T'(t)\}$ y $\{T(t)\}$ son semigrupos de contracciones fuertemente continuos con el mismo generador, por lo que $T'(t) = T(t)$ para todo $t \ge 0$ como consecuencia del lema 1.10-10, asi

$$\|T_\lambda(t)\ell - T(t)\ell\| \le t\|A_\lambda\ell - A\ell\| \qquad \forall\ \ell \in \mathcal{D}(A)\ ,\ t \ge 0\ ,\ \lambda > 0$$

por lo que, como $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$, para cada $\ell \in X$ $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow +\infty} e^{tA_\lambda}\ell = T(t)\ell$ para cada $t \ge 0$, uniformemente en intervalos acotados para t. □

1.10-12 Corolario. *Sea* $\{T(t)\}$ *un semigrupo de contracciones fuertemente continuo en* X *con generador* A. *Para* $M \subset X$, *sea*

$$\Lambda_M = \left\{ \lambda > 0 \ \vdots\ \lambda(\lambda - A)^{-1} : M \longrightarrow M \right\}.$$

Ya sea que se tenga que

(a) M *es un subconjunto convexo cerrado de* X *y que* Λ_M *no esta acotado,*

o que se tenga que

(b) M *es un subespacio cerrado de* X *y que* Λ_M *es no vacío,*

entonces $T(t) : M \longrightarrow M$ *para toda* $t \ge 0$.

Prueba: Sean $\lambda, \mu > 0$ tales que $|1 - \frac{\mu}{\lambda}| < 1$. Sabemos que $\|(\lambda - A)^{-1}\| \le \lambda^{-1}$ y que si $|\lambda - \mu| < \|(\lambda - A)^{-1}\|^{-1}$ entonces, por el teorema 1.9-6, tendríamos que

$$(\mu - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^n \Big((\lambda - A)^{-1} \Big)^{n+1}$$

de donde como $|1 - \frac{\mu}{\lambda}| < 1$ es equivalente a $|\lambda - \mu| < \lambda = \|(\lambda - A)^{-1}\|^{-1}$ tenemos efectivamente que

$$(\mu - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^n \Big((\lambda - A)^{-1} \Big)^{n+1}$$

o lo que es lo mismo

$$\mu(\mu - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(\lambda - \mu)^n \Big((\lambda - A)^{-1}\Big)^{n+1}$$

o equivalentemente

$$\mu(\mu - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu}{\lambda^{n+1}}(\lambda - \mu)^n \Big(\lambda(\lambda - A)^{-1}\Big)^{n+1}$$

o que

$$\text{(1.24)} \qquad \mu(\mu - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu}{\lambda}(1 - \frac{\mu}{\lambda})^n \Big(\lambda(\lambda - A)^{-1}\Big)^{n+1}$$

De aquí que, si M es un subconjunto convexo cerrado de X entonces $\lambda \in \Lambda_M$ implica que $(0,\lambda] \subset \Lambda_M$. Veamoslo:

Tenemos $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu}{\lambda}(1 - \frac{\mu}{\lambda})^n$, con $0 < \mu < \lambda$ que equivale a $0 < \frac{\mu}{\lambda} < 1$.

Sabemos que si $0 < a < 1$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1 - a}$, sea $r = \frac{\mu}{\lambda}$ asi

$$\sum_{n=0}^{\infty} r(1 - r)^n = r\sum_{n=0}^{\infty} (1 - r)^n = \frac{r}{1 - 1 + r} = 1$$

Como $\Big(\lambda(\lambda - A)^{-1}\Big)^{n+1} : M \longrightarrow M$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y toda $\lambda > 0$, tenemos que (1.24) es una suma convexa en un convexo cerrado, con lo que probamos nuestra afirmación.

Ahora, bajo las condiciones de (a) como M es convexo y cerrado y no esta acotado la discusión anterior nos da que $\Lambda_M = (0,+\infty)$.

Bajo las condiciones de (b), con $\lambda < \mu < 2\lambda$ también tenemos que $|1 - \frac{\mu}{\lambda}| < 1$ por lo que (1.24) es válido y

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu}{\lambda}(1 - \frac{\mu}{\lambda})^n \Big(\lambda(\lambda - A)^{-1}\Big)^{n+1} : M \longrightarrow M$$

pues M es un subespacio cerrado, asi $(0,2\lambda) \subset \Lambda_M$ de donde $\Lambda_M = (0,+\infty)$. Entonces bajo (a) o (b) tenemos que $\Lambda_M = (0,+\infty)$. Finalmente por (1.19) tenemos que

$$e^{tA_\lambda} = e^{-t\lambda}e^{t\lambda[\lambda(\lambda-A)^{-1}]} = e^{-t\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\lambda)^n}{n!}\Big(\lambda(\lambda - A)^{-1}\Big)^n \quad \forall\ t \ge 0\ ,\lambda > 0$$

y la conclusión es consecuencia del teorema 1.10-11 pues

$$\lambda(\lambda - A)^{-1} : M \longrightarrow M \qquad \forall\ \lambda > 0$$

$$e^{-t\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t\lambda)^n}{n!} = e^{-t\lambda}e^{t\lambda} = 1$$

por lo tanto

$$e^{-t\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t\lambda)^n}{n!}\left(\lambda(\lambda - A)^{-1}\right)^n : M \longrightarrow M$$

de donde $T(t)f = \lim_{\lambda \to +\infty} e^{tA_\lambda}f \in M$ para todo $f \in M$, es decir $T(t) : M \longrightarrow M$. □

En muchas aplicaciones, una forma alternativa del teorema de Hille-Yosida es más útil. Para enunciarla damos dos definiciones y un lema.

1.10-13 Definición (Operador cerrable). Decimos que un operador lineal A en X es *cerrable* si tiene una extensión lineal cerrada. □

1.10-14 Definición (La cerradura de un operador). Si A es un operador lineal en X cerrable, entonces la *cerradura* $\overline{A}$ de A es la mínima extensión lineal cerrada de A; más específicamente, el operador lineal cerrado $\overline{A}$ es el operador cuya gráfica es la cerradura (en $X \times X$) de la gráfica de A. □

1.10-15 Lema. *Sea* A *un operador lineal disipativo en* X *con* $\mathcal{D}(A)$ *denso en* X. *Entonces* A *es cerrable y* $\overline{\mathcal{R}(\lambda - A)} = \mathcal{R}(\lambda - \overline{A})$ *para toda* $\lambda > 0$.

Prueba: Para la primera afirmación, basta mostrar que si $(f_n) \subset \mathcal{D}(A)$, $f_n \longrightarrow 0$ y $Af_n \longrightarrow g \in X$, entonces $g = 0$.

Sea $(g_m) \subset \mathcal{D}(A)$ tal que $g_m \longrightarrow g$, esto lo puedo hacer pues $\mathcal{D}(A)$ es denso en X. Por la disipatividad de A tenemos que

$$\begin{aligned}\|(\lambda - A)g_m - \lambda g\| &= \lim_{n \to \infty}\|(\lambda - A)g_m - \lambda Af_n\| \\ &= \lim_{n \to \infty}\|(\lambda - A)g_m + \lambda^2 f_n - \lambda Af_n\|\end{aligned}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \|(\lambda - A)g_m + \lambda(\lambda - A)f_n\|$$
$$= \lim_{n \to \infty} \|(\lambda - A)g_m + (\lambda - A)\lambda f_n\|$$
$$= \lim_{n \to \infty} \|(\lambda - A)(g_m + \lambda f_n)\|$$
$$\geq \lim_{n \to \infty} \|g_m + \lambda f_n\| = \lambda\|g_m\|$$

Dividiendo por λ y haciendo $\lambda \longrightarrow +\infty$, tenemos que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda}\|(\lambda - A)g_m - \lambda g\| \geq \|g_m\|$$

pero $\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda}\|(\lambda - A)g_m - \lambda g\| = \|\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{(\lambda - A)}{\lambda}g_m - g\|$

y como $\|\frac{(\lambda - A)}{\lambda}g_m - g_m\| = \frac{1}{\lambda}\|Ag_m\|$

tenemos $\|g_m - g\| \geq \|g_m\|$

Haciendo $m \longrightarrow \infty$, tenemos que $\|g\| = 0$ de donde $g = 0$.

Sea $\lambda > 0$. La inclusión $\overline{\mathcal{R}(\lambda - A)} \supset \mathcal{R}(\lambda - \bar{A})$ es obvia. Para probar la igualdad basta probar que $\mathcal{R}(\lambda - \bar{A})$ es cerrado, pues $\mathcal{R}(\lambda-A) \subset \mathcal{R}(\lambda-\bar{A})$ por ser $\bar{A}$ una extensión de A. Pero $\mathcal{R}(\lambda - \bar{A})$ es cerrado si y solo si $\bar{A}$ es cerrado por el lema 1.10-3. □

1.10-16 Teorema (Hille-Yosida, versión operador cerrable). *Un operador A en X es cerrable y su cerradura $\bar{A}$ es el generador de un semigrupo de contracciones fuertemente continuo en X si y solo si:*

(a) $\mathcal{D}(A)$ *es denso en X,*

(b) A *es disipativo,*

(c) $\mathcal{R}(\lambda - A)$ *es denso en X para algún $\lambda > 0$.*

Prueba: Por el lema 1.10-15 A satisface (a), (b) y (c) si y solo si A es cerrable y $\bar{A}$ satisface las condiciones del teorema de Hille-Yosida en su versión original. □

Para terminar esta sección damos un resultado concerniente a las ecuaciones diferenciales operacionales.

1.10-17 Teorema (Ecuaciones diferenciales operacionales). *Sea A un operador* $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow X$ *en un espacio de Banach X ,* $\ell : [0,+\infty) \longrightarrow X$ *una función continuamente diferenciable y* $x_0 \in \mathcal{D}(A)$. *Si A es el generador de un semigrupo de operadores fuertemente continuo* $\{T(t)\}$ *entonces existe una única solución a la ecuación diferencial operacional*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + Ax(t) = \ell(t) & \forall\ t > 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

que es continua del $[0,+\infty)$ *a* $\mathcal{D}(A)$ *y diferenciable del* $(0,+\infty)$ *a X. La solución esta dada por*

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)\ell(s)\, ds. \qquad \square$$

1.11 ELEMENTOS DE LA TEORIA GENERAL DE MEDIDAS VECTORIALES

Nuestro trabajo utiliza la "integral" en espacios de Banach.[5] Las ideas que hay en esta sección son una extensión natural de aquellas que se desarrollan en los cursos de cálculo y análisis cuando se estudia la integral de Riemann. Es tiempo entonces de que demos algunas definiciones y resultados de la teoría general de medidas vectoriales. Con esto terminamos el capítulo.

1.11-1 Definición (Algebra, espacio de medida). Sea Ω un conjunto. Decimos que una pareja ordenada $(\Omega,\mathcal{A})$ es un *álgebra booleana* o

[5] De hecho en la sección anterior ya hemos trabajado con ella para desarrollar nuestro trabajo referente a los semigrupos de contracciones fuertemente continuos.

simplemente un *álgebra* si $\mathcal{A}$ es una familia de subconjuntos de Ω tal que

(a) $\Omega \in \mathcal{A}$,

(b) $a^c \in \mathcal{A}$ siempre que $a \in \mathcal{A}$, donde $a^c = \left\{ x \in \Omega \mid x \notin a \right\}$ y

(c) $a \cup b \in \mathcal{A}$ para cualesquiera $a, b \in \mathcal{A}$.

Si además para toda familia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ tenemos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathcal{A}$ entonces decimos que $(\Omega, \mathcal{A})$ es una *σ-álgebra*.

Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ una σ-álgebra. Decimos que una tercia ordenada $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es un *espacio de medida* si μ es una función no negativa σ-aditiva definida sobre $\mathcal{A}$, esto es

(d) $\mu(a) \geq 0$ para toda $a \in \mathcal{A}$ y

(e) $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} a_n\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(a_n)$ para toda sucesión $(a_n) \subset \mathcal{A}$ disjunta.

Si además Ω puede expresarse como la unión contable de subconjuntos $a_n \in \mathcal{A}$ tales que $\mu(a_n) < +\infty$ para toda n, decimos que $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es un *espacio de medida finito.* □

1.11-2 Definición (Medida vectorial). Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un álgebra. Decimos que una función F de $\mathcal{A}$ en un espacio de Banach X es una *medida vectorial finito aditiva* o simplemente una *medida vectorial* si siempre que $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ sean ajenos entonces

$$F(a_1 \cup a_2) = F(a_1) + F(a_2)$$

Si además $F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} a_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F(a_n)$ en la topología de la norma en X para toda sucesión (a_n) de miembros disjuntos dos a dos de $\mathcal{A}$ tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathcal{A}$ entonces decimos que F es una *medida vectorial numerablemente aditiva*, o simplemente *contablemente aditiva.* □

1.11-3 Definición (Variación, semivariación). Sea $F : \mathcal{A} \longrightarrow X$ una medida vectorial. La *variación* de F es la función extendida, no negativa var(F) cuyo valor en un conjunto $a \in \mathcal{A}$ esta dado por

$$\operatorname{var}(F)(a) = \sup_{\pi} \sum_{b \in \pi} \|F(b)\|$$

donde el supremo esta tomado sobre todas las particiones Π de a en un número finito de subconjuntos ajenos dos a dos de $\mathcal{A}$. Si $\operatorname{var}(F)(\Omega) < +\infty$ entonces diremos que F es una *medida de variación acotada.* La *semivariación* de F es la función extendida no negativa semivar(F) cuyo valor en un conjunto $a \in \mathcal{A}$ esta dado por

$$\operatorname{semivar}(F)(a) = \sup \left\{ \operatorname{var}(xF)(a) \mid x \in X' \ , \ \|x\| \leq 1 \right\}$$

con var(xF) la variación de la medida real valuada xF. Si $\operatorname{semivar}(F)(\Omega) < +\infty$ entonces diremos que F es una *medida de semivariación acotada.* □

Observaciones:

(1) var(F) es una función monótona finito aditiva en $\mathcal{A}$.

(2) semivar(F) es una función monótona subaditiva en $\mathcal{A}$.

(3) Para todo $a \in \mathcal{A}$, $\operatorname{semivar}(F)(a) \leq \operatorname{var}(F)(a)$.

Veamos las definiciones y propiedades básicas de las integrales de funciones vector valuadas con respecto a medidas escalares e integrales de funciones escalar valuadas con respecto a medidas vectoriales. La base para este material es un espacio de medida finita $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ y un espacio de Banach X.

1.11-4 Definición (Función simple, μ-medible). Decimos que una función $f : \Omega \longrightarrow X$ es *simple* si existen $x_1, \dots, x_n \in X$ y $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$ tales que $f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{a_i}$, donde $\chi_{a_i}(\omega) = 1$ si $\omega \in a_i$ y $\chi_{a_i}(\omega) = 0$ en otro caso. Decimos que una función $f : \Omega \longrightarrow X$ es *μ-medible* si existe una sucesión de funciones simples (ℓ_n) tal que $\lim_{n \longrightarrow \infty} \|\ell_n(x) - \ell(x)\| = 0$ μ-casi dondequiera[6]. Decimos que una función $\ell : \Omega \longrightarrow X$ es *débilmente μ-medible* si para cada $x \in X'$ la función numérica $x\ell$ es μ-medible. Más generalmente si $\Gamma \subset X'$ y $x\ell$ es medible para cada $x \in \Gamma$ entonces decimos que ℓ es Γ-medible. □

1.11-5 Teorema (de medibilidad de Pettis). *Una función $\ell : \Omega \longrightarrow X$ es μ-medible si y solo si*

(a) *ℓ es μ-escencialmente separable valuada, i.e. existe $a \in \mathcal{A}$ con $\mu(a) = 0$ tal que $\ell(\Omega \setminus a)$ es separable (en norma).*

(b) *ℓ es débilmente μ-medible.* □

1.11-6 Corolario. *Una función $\ell : \Omega \longrightarrow X$ es μ-medible si y solo si ℓ es el μ-casi dondequiera límite uniforme de una sucesión de funciones contable valuadas μ-medibles.* □

1.11-7 Corolario. *Una función $\ell : \Omega \longrightarrow X$ μ-escencialmente separable valuada es μ-medible si existe un conjunto normal[7] $\Gamma \subset X'$ tal que la función numérica $x\ell$ es μ-medible para cada $x \in \Gamma$.* □

1.11-8 Definición (Integral de Bochner). Una función $\ell : \Omega \longrightarrow X$ μ-medible es *Bochner integrable* si existe una sucesión de funciones simples (ℓ_n) tal que

$$\lim_n \int_\Omega \|\ell_n - \ell\| \, d\mu = 0$$

---

[6] Recordemos que una propiedad $p(x)$ se cumple μ-casi dondequiera si el conjunto en donde no se cumple tiene medida 0, dicho de otra forma si $E = \{x \in \Omega \mid \neg p(x) \text{ es verdadera}\}$ entonces $\mu(E) = 0$.

[7] Recordemos que $\Gamma \subset X'$ es normal si $\|x\| = \sup \left\{ \frac{|x'x|}{\|x'\|} \; ; \; x' \in \Gamma \right\}$ para todo $x \in X$.

En este caso $\int_a \ell \, d\mu$ esta definida para cada $a \in \mathcal{A}$ por

$$\int_a \ell \, d\mu = \lim_n \int_a \ell_n \, d\mu$$

con $\int_a \ell_n \, d\mu = \sum_{i=1}^{m} x_i \mu(a \cap a_i)$ donde $\ell_n = \sum_{i=1}^{m} x_i \chi_{a_i}$. □

1.11-9 Teorema (Bochner integrabilidad). *Una función $\ell : \Omega \longrightarrow X$ es Bochner integrable si y solo si $\int_\Omega \|\ell\| \, d\mu < +\infty$.* □

1.11-10 Teorema (de convergencia dominada). *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finito y (ℓ_n) una sucesión de funciones X-valuadas Bochner integrables en Ω. Si $\lim_n \ell_n = \ell$ en μ-medida*[8] *y si existe una función real valuada Lebesgue integrable g en Ω con $\|\ell_n\| \leq g$ μ-casi dondequiera, entonces ℓ es Bochner integrable y*

$$\lim_n \int_a \ell_n \, d\mu = \int_a \ell \, d\mu \qquad \forall\ a \in \mathcal{A}$$

De hecho $\lim_n \int_\Omega \|\ell - \ell_n\| \, d\mu = 0$. □

Damos a continuación más hechos elementales acerca de esta integral.

1.11-11 Teorema (Integral de Bochner). *Si ℓ es μ-Bochner integrable entonces*

(a) $\lim_{\mu(a) \longrightarrow 0} \int_a \ell \, d\mu = 0$

(b) $\|\int_a \ell \, d\mu\| \leq \int_a \|\ell\| \, d\mu \qquad \forall\ a \in \mathcal{A}$

(c) *Si (a_n) es una sucesión disjunta dos a dos de elementos de $\mathcal{A}$ y $a = \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n$ entonces $\int_a \ell \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a \ell \, d\mu$ donde la suma de la derecha es absolutamente convergente.*

(d) *Si $F(a) = \int_a \ell \, d\mu$ entonces F es de variación acotada y*

---

[8] Es decir, $\lim_n \mu\Big(\{\omega \in \Omega : \|\ell_n(\omega) - \ell(\omega)\| \geq \varepsilon\} \Big) = 0 \qquad \forall\ \varepsilon > 0.$

$$\operatorname{var}(F)(a) = \int_a \|f\|\, d\mu \qquad \forall\ a \in \mathcal{A}. \qquad \square$$

1.11-12 Corolario. *Si f y g son Bochner integrables y* $\int_a f\, d\mu = \int_a g\, d\mu$ *para todo $a \in \mathcal{A}$ entonces $f = g$ μ-casi dondequiera.* $\square$

1.11-13 Teorema (Hille). *Sea T un operador lineal cerrado definido en X con valores en Y, un espacio de Banach. Si f y Tf son Bochner integrables con respecto a μ, entonces*

$$T\int_a f\, d\mu = \int_a Tf\, d\mu \qquad \forall\ a \in \mathcal{A} \qquad \square$$

1.11-14 Corolario. *Sean f y g μ-medibles. Si para cada $x \in X'$, $xf = xg$ μ-casi dondequiera entonces $f = g$ μ-casi dondequiera.* $\square$

1.11-15 Corolario. *Sea f Bochner integrable con respecto a μ. Entonces para cada $a \in \mathcal{A}$ con $\mu(a) > 0$ tenemos*

$$\frac{1}{\mu(a)} \int_a f\, d\mu \in \overline{\mathrm{Co}}(f(a)). \qquad \square$$

1.11-16 Teorema(Integral de Bochner y medida de Lebesgue). *Sea f Bochner integrable en $[0,1]$ con respecto a la medida de Lebesgue. Entonces para casi toda $s \in [0,1]$ tenemos*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_s^{s+h} \|f(t) - f(s)\|\, dt = 0$$

por lo que para casi toda $s \in [0,1]$ tenemos

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_s^{s+h} f(t)\, dt = f(s) \qquad \square$$

Veamos ahora los espacios Lebesgue-Bochner. Si $1 \le p < +\infty$ el símbolo $\mathcal{L}_p(\Omega,\mathcal{A},\mu,X)$ $\left(= \mathcal{L}_p(\mu,X) \right)$ representa a (las clases de equivalencia) las funciones μ-Bochner integrables $f : \Omega \longrightarrow X$ tales que $\|f\|_p = \left(\int_\Omega \|f\|_X^p\, d\mu\right)^{p^{-1}} < +\infty$.

Este conjunto, normado por la funcional $\|\cdot\|_p$, es un espacio de Banach (la prueba es como en el caso real).

El símbolo $\mathcal{L}_\infty(\Omega,\mathcal{A},\mu,X)$ $\left(= \mathcal{L}_\infty(\mu,X) \right)$ se usa para (las clases de equivalencia) las funciones escencialmente acotadas μ-Bochner integrables $f : \Omega \longrightarrow X$, normado con la funcional $\|\cdot\|_{\infty}$ definida para $f \in \mathcal{L}_{\infty}(\mu,X)$ por $\|f\|_{\infty} = \text{sup ess } \|f\|_X$, $\mathcal{L}(\mu,X)$ resulta ser un espacio de Banach.

El símbolo $\mathcal{L}_p(\mu)$ $(1 \le p \le \infty)$ siempre significará $\mathcal{L}_p(\mu,X)$ para X igual a un campo de escalares (i.e. $X = \mathbb{R}$ o $Y = \mathbb{C}$).

Uno de los aspectos más interesantes de la teoría de la integral de Bochner se centra en la siguiente pregunta:

¿Cuándo una medida vectorial toma la forma de una integral indefinida de Bochner?. Examinemos la cuestión brevemente:

Si $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ es un espacio de medida finito y $F : \mathcal{A} \longrightarrow X$ es una medida vectorial de la forma

$$F(a) = \int_a f \, d\mu$$

para alguna f Bochner integrable, entonces el teorema 1.11-11 garantiza que F es contable aditiva, μ-continua y de variación acotada. Inversamente, si $F : \mathcal{A} \longrightarrow X$ es cualquier medida contable aditiva μ-continua de variación acotada con un rango de dimensión finita, entonces el teorema clásico de Radon-Nikodym produce una función Bochner integrable f para la cual $F(a) = \int_a f \, d\mu$. Para la integral general de Bochner esto no es necesariamente cierto.

La falla del teorema de Radon-Nikodym para la integral de Bochner no debe de interpretarse como un aspecto negativo de la integral de Bochner. De hecho, la falla de un teorema general de Radon-Nikodym para la integral de Bochner en casos especiales tiene poderosas repercusiones en teoría de operadores, la geometría de los espacios de Banach, la teoría dual para espacios de Banach, teoría de probabilidad vector-valuada y en la teoría de integración en si misma.

Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida finito, entonces dos teoremas básicos de la teoría de medida, el teorema de representación de Riesz y el teorema de Radon-Nikodym, garantizan que $\mathcal{L}_1'(\mu) = \mathcal{L}_\infty(\mu)$ y que si λ es una medida escalar valuada finita μ-continua en $\mathcal{A}$, entonces existe $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$ tal que $\lambda(a) = \int_a f \, d\mu$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Cada uno de estos teoremas se puede derivar el uno del otro y no es de sorprenderse que sus extensiones vector valuadas esten relacionadas en sus aspectos más íntimos.

1.11-17 Metateorema. *Las siguientes teoremas son equivalentes.*

Teorema (de representación de Riesz). *Si* X *es un espacio de Banach y* $T : \mathcal{L}_1(\mu) \longrightarrow X$ *es un operador lineal continuo entonces existe* $g \in \mathcal{L}_\infty(\mu, X)$ *tal que* $Tf = \int_\Omega fg \, d\mu$ *para toda* $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$.

Teorema (Radon-Nikodym). *Si* $G : \mathcal{A} \longrightarrow X$ *es una medida vectorial* μ*-continua de variación acotada, entonces existe una función Bochner integrable* $g \in \mathcal{L}_1(\mu, X)$ *tal que* $G(a) = \int_a g \, d\mu$ *para todo* $a \in \mathcal{A}$. □

1.11-18 Definición (Propiedad de Radon-Nikodym). Un espacio de Banach X tiene la *propiedad de Radon-Nikodym con respecto a* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ si para cada medida vectorial μ-continua $G : \mathcal{A} \longrightarrow X$ de variación acotada existe $g \in \mathcal{L}_1(\mu, X)$ tal que $G(a) = \int_a g \, d\mu$ para todo $a \in \mathcal{A}$.

Un espacio de Banach tiene la *propiedad de Radon-Nikodym* si X tiene la propiedad de Radon-Nikodym con respecto a todo espacio de medida finito. □

Damos finalmente dos teoremas fundamentales de la teoría de los espacios de Banach. No siempre se reconoce que ambos son simples consecuencias de las propiedades de la integral de Bochner.

1.11-19 Teorema (Krein-Smulian). *La cerradura de la envolvente convexa de un subconjunto débilmente compacto de un espacio de Banach es débilmente compacta.* □

1.11-20 Teorema (Mazur). *La cerradura de la envolvente convexa de un subconjunto compacto en la norma de un espacio de Banach es compacta en la norma.* □

CAPITULO 2

EL TEOREMA DE WIDDER Y SU GENERALIZACION

Este capítulo lo dedicamos al teorema de Widder. La versión clásica de este teorema data de 1934 y fue vista por este matemático en su libro *An introduction to transform theory* [12] y en su artículo *The inversion of the Laplace integral and the related moment problem* [13]. En estas obras el autor caracteriza aquellas funciones reales que son transformadas de Laplace de funciones acotadas. Después damos una versión vector-valuada en espacios arbitrarios de Banach de W. Arendt que generaliza estos resultados. Finalmente, caracterizamos los espacios en los cuales la representación vector-valuada coincide con la representación de la versión real.

2.1 EL TEOREMA DE WIDDER. VERSION ORIGINAL

¿Porqué es importante el teorema que nos ocupa en esta sección? Se trata aquí de un problema de representación de una función mediante una integral. Más precisamente queremos caracterizar a las funciones del espacio $C^{\infty}((0,+\infty),\mathbb{R})$ que sean la transformada de Laplace de alguna función del espacio $\mathcal{L}_{\infty}((0,+\infty),\mathbb{R})$. Este conocimiento es útil para la inversión de la transformada de Laplace, herramienta que se utiliza en la teoría de ecuaciones diferenciales.

Primero mencionamos los resultados necesarios para seguir la prueba del teorema de Widder y proseguimos con la demostración.

2.1-1 Definición. Una función f es *completamente monotónica en* $(a,+\infty)$

si y solo si

(2.1) $\ell \in C^{\infty}(a,+\infty)$

(2.2) $(-1)^k \ell^{(k)}(x) \geq 0 \quad \forall\, x > a\ ,\ k = 0,1,2,\ldots$

Si además $\lim_{x \to a^+} \ell(x) < +\infty$ entonces ℓ es *completamente monotónica en* $[a,+\infty)$. □

2.1-2 Teorema (Bernstein). *Sea ℓ una función. ℓ es completamente monotónica en $[a,+\infty)$ si y solo si* $\ell(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt}\, d\alpha(t) \quad \forall\, x > a$, *con α no decreciente y ℓ cumple* (2.2) *en* $[0,+\infty)$ □

2.1-3 Corolario. *Sea ℓ una función. ℓ es completamente monotónica en* $(a,+\infty)$ *si y solo si*

$$\ell(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} d\alpha(t) \qquad \forall\, x > a$$

con α no decreciente en $[0,+\infty)$ □

2.1-4 Teorema(Widder). *Sea* $r \in C^{\infty}((0,+\infty),\mathbb{R})$. *Existe* $\ell \in \mathcal{L}_{\infty}((0,+\infty),\mathbb{R})$ *tal que*

$$r(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \ell(t)\, dt \qquad \forall\, \lambda > 0 \tag{2.3}$$

si y solo si

$$\sup \left\{ \left| \lambda^{n+1} r^{(n)}(\lambda)/n! \right| \ :\ \lambda > 0\ ,\ n = 0,1,2,\ldots \right\} < +\infty \tag{2.4}$$

Prueba: Observese primero que las condiciones (2.3) y (2.4) son equivalentes a las condiciones

$$r(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \ell(t)\, dt \quad , \quad |\ell(t)| \leq M \text{ para alguna } M \tag{2.5}$$

$$|r^{(k)}(\lambda)| \leq \frac{Mk!}{\lambda^{k+1}} \quad \text{para alguna } M\ ,\ 0 < \lambda < +\infty\ ,\ k = 0,1,2,\ldots \tag{2.6}$$

respectivamente.

Supongamos que se cumple la representación (2.5) derivando $r(\lambda)$ con respecto a λ se tiene

$$r'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\ell(t)\ dt = \int_0^\infty \frac{d}{d\lambda}\ e^{-\lambda t}\ell(t)\ dt = \int_0^\infty -te^{-\lambda t}\ell(t)\ dt$$

por lo que para $k = 0,1,2,\ldots$ se tiene

$$r^{(k)}(\lambda) = \int_0^\infty (-1)^k t^k e^{-\lambda t}\ dt$$

esto implica que

$$|r^{(k)}(\lambda)| \le \int_0^\infty t^k e^{-\lambda t}|\ell(t)|\ dt \le \int_0^\infty t^k e^{-\lambda t}M\ dt = \frac{Mk!}{\lambda^{k+1}} \qquad \forall\ \lambda > 0$$

Obtenemos así (2.6).

Inversamente, de la condición (2.6) se tiene que

$$-\frac{Mk!}{\lambda^{k+1}} \le (-1)^k r^{(k)}(\lambda) \le \frac{Mk!}{\lambda^{k+1}} \qquad \forall\ \lambda > 0$$

Esto es equivalente a decir que las funciones $\frac{M}{x} - r(x)$ y $r(x) + \frac{M}{x}$ son completamente monotónicas en $(0,+\infty)$, pues ambas funciones son infinitamente diferenciables en $(0,+\infty)$ por lo que se cumple la condición (2.1). Veamos que cumplen la condición (2.2).

$$\left(\frac{M}{x} - r(x)\right)' = -M\ x^{-2} - r(x)', \text{ de donde}$$

$$\left(\frac{M}{x} - r(x)\right)^{(k)} = (-1)^k\ M\ k!\ x^{-(k+1)} - r^{(k)}(x)$$

por lo tanto

$$(-1)^k\left((-1)^k\ M\ k!\ x^{-(k+1)} - r^{(k)}(x)\right) = Mk!x^{-(k+1)} + (-1)^{k+1}r^{(k)}(x)$$

Si k es impar

$M\ k!\ x^{-(k+1)} + r^{(k)}(x) \ge 0$ o equivalentemente $-M\ k!\ x^{-(k+1)} \le r^{(k)}(x)$

que es cierto por hipótesis.

Si k es par

$M\ k!\ x^{-(k+1)} - r^{(k)}(x) \ge 0$ o equivalentemente $r^{(k)}(x) \le M\ k!\ x^{-(k+1)}$

que también se cumple por hipótesis.

Esto nos dice que $\frac{M}{x} - r(x)$ satisface (2.2). Análogamente para $r(x) + \frac{M}{x}$, por lo tanto $\frac{M}{x} - r(x)$ y $r(x) + \frac{M}{x}$ son completamente monotónicas en $(0,+\infty)$. El regreso de la equivalencia es inmediato de las observaciones anteriores.

Por el corolario 2.1-3, existen funciones β y γ no decrecientes tales que

$$\frac{M}{x} - r(x) = \int_0^\infty e^{-xt} d\beta(t) \quad , \quad \frac{M}{x} + r(x) = \int_0^\infty e^{-xt} d\gamma(t) \qquad \forall\ x > 0$$

Por el teorema de unicidad tenemos

$$r(x) = \int_0^\infty e^{-xt} d\alpha(t)$$

(2.7) y salvo una constante $\alpha(t) = M\ t - \beta(t) = \gamma(t) - M\ t$

donde $\frac{M}{x}$ se tomó como la transformada de Laplace-Stieltjes de Mt.

La ecuación (2.7) prueba que $\alpha(t)$ debe de ser de variación acotada y por lo tanto tiene una derivada $\ell(t)$ casi dondequiera; ésta misma ecuación nos da que para todo $\delta > -t$

(2.8) $$-M \leq \frac{\alpha(t+\delta) - \alpha(t)}{\delta} \leq M$$

pues $$\frac{\alpha(t+\delta) - \alpha(t)}{\delta} = \frac{Mt + M\delta - \beta(t+\delta) - Mt + \beta(t)}{\delta}$$
$$= M + \frac{\beta(t) - \beta(t+\delta)}{\delta} \leq M$$

$$\frac{\alpha(t+\delta) - \alpha(t)}{\delta} = \frac{\gamma(t+\delta) - Mt - M\delta - \gamma(t) + Mt}{\delta}$$
$$= -M + \frac{\gamma(t+\delta) - \gamma(t)}{\delta} \geq -M$$

De (2.8) tenemos $-M\delta \leq \alpha(t+\delta) - \alpha(t) \leq M\delta$ que implica que α es continua, por lo que podemos usar el teorema del límite de Lebesgue para mostrar que

$$\lim_{\delta \to 0} \int_0^t \frac{\alpha(y+\delta) - \alpha(y)}{\delta} dy = \int_0^t \ell(y)\ dy$$

Tenemos que $\displaystyle\int_0^t \frac{\alpha(y+\delta) - \alpha(y)}{\delta} dy = \frac{1}{\delta} \int_t^{t+\delta} \alpha(y)\ dy - \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \alpha(y)\ dy$ de

donde $$\lim_{\delta \to 0} \int_0^t \frac{\alpha(y+\delta) - \alpha(y)}{\delta} dy = \alpha(t) - \alpha(0)$$

por lo tanto α es absolutamente continua y $\alpha(t) + \alpha(0) = \int_0^t \ell(y)\, dy$

que implica además que $\alpha(0) = 0$ y finalmente

$$r(x) = \int_0^\infty e^{-xt} d\alpha(t) = \int_0^\infty e^{-xt}\ell(t)\, dt \qquad \square$$

2.2 El teorema de Widder. Version vector-valuada

Sea G un espacio de Banach. ¿Hay una generalización posible del teorema de Widder para funciones $r : (0,+\infty) \longrightarrow G$? W. Arendt nos da la respuesta. En general se cumple una representación más debil que 2.1-4 (2.3) pero en el caso en que G tenga la propiedad de Radon-Nykodym obtenemos la representación dada por Widder.

2.2-1 Teorema (W. Arendt). *Sea* $r : (0,+\infty) \longrightarrow G$ *una función. Sea* $M \geq 0$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(a) r *es infinitamente diferenciable y*

$$\sup \left\{ \|\lambda^{n+1} r^{(n)}(\lambda) \;/\; n!\| \;:\; \lambda > 0 \quad n = 0,1,2,\ldots \right\} \leq M$$

(b) *Existe una función* $F : [0,+\infty) \longrightarrow G$ *que satisface*

$F(0) = 0$ y $\|F(t+h) - F(t)\| \leq Mh \quad \forall\, t \geq 0\ ,\ h \geq 0$ tal que

(2.9) $$r(\lambda) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} F(t)\, dt \qquad \forall\, \lambda > 0$$

Prueba: Supongamos (a). Sea $x \in G'$, el espacio dual de G, es decir $G' = \left\{ x : G \longrightarrow \mathbb{R} \;:\; x \text{ es funcional lineal continua} \right\}$.

Si consideramos $f_x(\lambda) = \langle r(\lambda),x\rangle$, la evaluación $x(r(\lambda))$, tenemos que $f_x : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\left(f_x\right)'(\lambda) = \lim_{h \to 0} \frac{\langle r(\lambda+h),x\rangle - \langle r(\lambda),x\rangle}{h} = \left\langle \lim_{h \to 0} \frac{r(\lambda+h) - r(\lambda)}{h}, x\right\rangle$$

$= \langle r'(\lambda),x\rangle$ ya que x es lineal y continua

Análogamente para $k \in \mathbb{N}$ se puede probar que

$$\left(f_x\right)^{(k)}(\lambda) = \langle r^{(k)}(\lambda),x\rangle$$

Tenemos que

$$\left|\frac{\lambda^{k+1}}{k!}\, f_x^{(k)}(\lambda)\right| = \left|\langle\lambda^{k+1} r^{(k)}(\lambda)\ /\ k!\,,x\rangle\right|$$

pero $\quad\left|\langle\lambda^{k+1} r^{(k)}(\lambda)\ /\ k!\,,x\rangle\right| \le \left\|\lambda^{k+1} r^{(k)}(\lambda)\ /\ k!\right\|\|x\|$

y por hipótesis $\left\|\lambda^{k+1} r^{(k)}(\lambda)\ /\ k!\right\| \le M$ para alguna $M \ge 0$, para toda $\lambda \ge 0$, $k \in \mathbb{N}$, por lo tanto

$$\left|\frac{\lambda^{k+1}}{k!}\, f_x^{(k)}(\lambda)\right| \le M\ \|x\| \qquad \forall\ \lambda > 0$$

es decir $\quad\left|f_x^{(k)}(\lambda)\right| \le \dfrac{M\ \|x\|}{\lambda^{k+1}}\ k! \qquad \forall\ \lambda > 0$

Por el teorema de Widder 2.1-4, existe $f(\ \cdot\ ,x) \in \mathcal{L}_\infty([0,+\infty),\mathbb{R})$ tal que

$$\|f(\ \cdot\ ,x)\|_\infty \le M\ \|x\|$$

y $\quad \langle r(\lambda),x\rangle = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t,x)\ dt \qquad \forall\ \lambda > 0$

$f(\ \cdot\ ,x) : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, defínase $F(\ \cdot\ ,x) : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$F(t,x) = \int_0^t f(s,x)\ ds$$

Integrando por partes obtenemos

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} F(t,x)\ dt = \Big[\ -e^{-\lambda t} F(t,x)\ \Big]_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-\lambda t} f(t,x)\ dt$$

$$= \quad 0 \quad + \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t,x)\ dt = \langle r(\lambda),x\rangle$$

de donde

$$\langle r(\lambda),x\rangle = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} F(t,x)\ dt \qquad \forall\ \lambda > 0$$

Ahora bien

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} F(t,\alpha x+y)\ dt = \langle r(\lambda),\alpha x+y\rangle$$

$$= \alpha\langle r(\lambda),x\rangle + \langle r(\lambda),y\rangle$$

$$= \alpha \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} F(t,x)\ dt \ + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} F(t,y)\ dt$$

así que $\displaystyle\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\Big[F(t,\alpha x+y) - \alpha F(t,x) - F(t,y)\Big]\, dt \equiv 0$

como $F(\ \cdot\ ,x)$ es continua, por ser derivable, por el teorema de unicidad para transformadas de Laplace tenemos que $F(t,x)$ es lineal en $x \in G'$, es decir, $F(t,\alpha x+y) = \alpha F(t,x) + F(t,y)$. Más aún

$$\Big| F(t+h,x) - F(t,x) \Big| = \Big| \int_0^{t+h} f(s,x)\, ds - \int_0^{t} f(s,x)\, ds \Big|$$

$$= \Big| \int_t^{t+h} f(s,x)\, ds \Big| \le \int_t^{t+h} |f(s,x)|\, ds$$

$$\le \int_t^{t+h} M\|x\|\, ds = \Big[M\|x\|s \Big]_{s=t}^{t+h} = M\|x\|h$$

de donde

$$\Big| F(t+h,x) - F(t,x) \Big| \le M\|x\|h \qquad \forall\ h \ge 0\ ,\ t \ge 0\ ,\ x \in G'$$

Por lo tanto (como $F(\ \cdot\ ,x)$ es continua y lineal en x) para toda $t \ge 0$ existe $F(t) \in G''$ tal que $F(t,x) = \langle F(t),x\rangle$ para toda $x \in G'$. La afirmación (b) será probada si mostramos que $F(t) \in G$ (hacemos la identificación de G con un subespacio cerrado de G'' via evaluación). Sea $q : G'' \longrightarrow G''/G$ el mapeo cociente (entiendase G como $\phi(G)$, donde $\phi : G \longrightarrow G''$ tal que $x \longmapsto g_x$ con $g_x(f) = f(x)$, $f \in G'$). Como $r(\lambda)$ pertenece a G tenemos

$$\langle r(\lambda),x\rangle = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} F(t,x)\, dt$$

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} F(t,x)\, dt = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \langle F(t),x\rangle\, dt$$

$$= \Big\langle \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} F(t)\, dt, x\Big\rangle \qquad \forall\ x \in G'$$

por lo tanto

$$\langle r(\lambda),\ \cdot\ \rangle = \Big\langle \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} F(t)\, dt\ ,\ \cdot\ \Big\rangle \in G''$$

podemos aplicar q

$$0 = < q\left(\frac{r(\lambda)}{\lambda}\right), \cdot > = < \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} q\left(F(t)\right) dt , \cdot > \qquad \forall x \in G$$

esto implica que $q\left(F(t)\right) = 0$ o equivalentemente que $F(t) \in G$ ($\phi(G)$).

Supongamos (b). Tenemos que $r(\lambda) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} F(t)\, dt$. Sea $x \in G'$, definimos $F(t,x) = <F(t),x>$, la evaluación. F es lipschitz entonces es derivable c.d. y es igual a la integral de su derivada.

$$F(t,x) = \int_0^t f(s,x)\, ds \qquad \forall\ t \geq 0$$

Sea $<r(\lambda),x> = \int_0^\infty <\lambda e^{-\lambda t} F(t),x>\, dt = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} F(t,x)\, dt$. Integrando por partes y usando $F(0) = 0$ tenemos que

$$<r(\lambda),x> = 0 + \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t,x) dt$$

de $\|F(t+h) - F(t)\| \leq Mh$ tenemos que $f(t,x) \in \mathcal{L}_\infty([0,+\infty),\mathbb{R})$ por lo tanto, por el teorema de Widder 2.1-4 tenemos que

$$\sup \left\{ \left| \frac{\lambda^{n+1} <r(\lambda),x>}{n!} \right| ; \lambda > 0 , n = 0,1,2,... \right\} < M_x$$

Finalmente, por el teorema del acotamiento uniforme 1.2-3, tenemos que

$$\sup \left\{ \left\| \frac{\lambda^{n+1} <r(\lambda),x>}{n!} \right\| ; \lambda > 0 , n = 0,1,2,... \right\} < +\infty \qquad \square$$

2.2-2 Corolario (W. Arendt). *Sea* $a \geq 0$ *y* $r : (a,+\infty) \longrightarrow X$ *una función infinitamente diferenciable. Para* $M \geq 0$, $\omega \in (-\infty,a]$ *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $\left\|(\lambda-\omega)^{n+1} \frac{r(\lambda)^{(n)}}{n!}\right\| \leq M \qquad \forall\ \lambda > a , n = 0,1,...$

(b) *Existe una función* $F : [0,+\infty) \longrightarrow X$ *tal que* $F(0) = 0$ *y*

$$\limsup_{h \longrightarrow 0^+} \frac{1}{h} \|F(t+h) - F(t)\| \leq Me^{\omega t} \qquad \forall\ t \geq 0$$

tal que

$$r(\lambda) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} F(t)\, dt \qquad \forall\ \lambda > a \tag{2.10}$$

Más aún, r *tiene una extensión analítica a* $\left\{ \lambda \in \mathbb{C} ; \mathrm{Re}\lambda > \omega \right\}$ *que esta dada por* (2.10) *si* $\mathrm{Re}\lambda > 0$. $\square$

2.3 El teorema de Widder y la propiedad de Radon-Nikodym

Nos interesa saber bajo que condiciones podemos obtener una representación como (2.3) en el caso real para la representación vector-valuada (2.9) del teorema de Widder.

2.3-1 Definición (El teorema de Widder se cumple). Sea G un espacio de Banach. Decimos que *el teorema de Widder se cumple en* G si toda función $r \in C^{\infty}((0,+\infty),G)$ tal que

$$\sup \left\{ \|\lambda^{n+1} r^{(n)}(\lambda) \ / \ n!\| \ \vdots \ \lambda > 0 \quad n = 0,1,2,\dots \right\} \leq +\infty$$

puede ser representada en la forma

$$r(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \ell(t)\, dt \qquad \forall\ \lambda > 0$$

donde $\ell \in \mathcal{L}_{\infty}([0,+\infty),G)$. □

Aquí $\mathcal{L}_{\infty}([0,+\infty),G)$ denota al espacio de Banach de todas las clases de funciones medibles ℓ: $[0,+\infty) \longrightarrow G$ tales que $\|\ell\|_{\infty} = \sup\limits_{t\geq 0}\|\ell(t)\| < +\infty$

Queremos caracterizar aquellos espacios de Banach G en los cuales el teorema de Widder se cumple. Si G = $\mathbb{R}$ tenemos el teorema clásico de Widder.

2.3-2 Teorema (de caracterización). *Un espacio de Banach* G *tiene la propiedad de Radon-Nikodym si y solo si el teorema de Widder se cumple en* G.

Antes de probar este teorema necesitamos un lema y mencionamos una caracterización de la propiedad de Radon-Nikodym.

2.3-3 Lema. *Sea* G *un espacio de Banach,* $M \geq 0$ *y* $\ell : [0,1] \longrightarrow G$ *una función tal que*

$$\|\ell(s) - \ell(t)\| \leq M|s - t| \qquad \forall\ s,t \in [0,1]$$

Si ℓ *es diferenciable casi dondequiera, entonces* $\ell' \in L_{\infty}([0,1],G)$ *y*

$$\ell(t) = \int_0^t \ell'(s)\, ds \qquad \forall\ t \in [0,1]$$

Prueba: Para esta prueba usaremos el teorema de Pettis 1.11-5. Sea ℓ diferenciable casi dondequiera, entonces existe $N \subset [0,1]$ tal que $\mu(N) = 0$ y ℓ' existe para $s \in [0,1] \setminus N$. Definamos $\ell'(t) = 0$ para $t \in N$. Entonces ℓ' es debilmente medible y $\|\ell'\| \le M$ para toda $s \in [0,1]$ pues de la propiedad $\|\ell(s) - \ell(t)\| \le M|s - t|$ tenemos que

$$\left\| \frac{\ell(s) - \ell(t)}{s - t} \right\| \le M$$

sea $t \in [0,1] \setminus N$ entonces

$$\lim_{s \to t} \left\| \frac{\ell(s) - \ell(t)}{s - t} \right\| = \|\ell'(t)\| \le M$$

sea $t \in N$ entonces

$$\|\ell'(t)\| = 0 \le M$$

y para ver que ℓ' es debilmente medible sea $x \in G'$.

Sea $\varphi_n(s) = x\left(\dfrac{\ell(s+1/n) - \ell(s)}{1/n} \right)$, asi

$$\begin{aligned}
\|\varphi_n(s) - x\ell'(s)\| &= \left\| x\left(\frac{\ell(s+1/n) - \ell(s)}{1/n} \right) - x\ell'(s) \right\| \\
&= \left\| x\left(\frac{\ell(s+1/n) - \ell(s)}{1/n} - \ell'(s) \right) \right\|
\end{aligned}$$

Sea $s \in [0,1] \setminus N$ entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} \|\varphi_n(s) - x\ell'(s)\| &= \lim_{n \to \infty} \left\| x\left(\frac{\ell(s+1/n) - \ell(s)}{1/n} - \ell'(s) \right) \right\| \\
&= \left\| x\left(\lim_{n \to \infty} \frac{\ell(s+1/n) - \ell(s)}{1/n} - \ell'(s) \right) \right\| \\
&= \|x(\ell'(s) - \ell'(s))\| = 0
\end{aligned}$$

por lo tanto $\lim_{n \to \infty} \|\varphi_n(t) - x\ell'(t)\| = 0$ μ-casi dondequiera por lo que ℓ' es debilmente μ-medible. Veamos por último que ℓ' es separable valuada (μ-esencialmente separable valuada). Como ℓ es continua tenemos que $\ell([0,1])$ es separable. Ahora bien $Y = \overline{V(\ell([0,1]))}$ es un Banach separable. Podemos pensar que $\ell : [0,1] \longrightarrow Y$. ℓ' existe c.d.

y $\ell' : [0,1] \longrightarrow Y$ (donde ℓ' no exista la definimos como 0). $\ell'([0,1])$ es un subconjunto de un espacio métrico separable, por lo que $\ell'([0,1])$ resulta separable. La segunda parte de la afirmación se prueba como en el caso real. □

2.3-4 Teorema (caracterización de la propiedad de Radon-Nikodym). *Un espacio de Banach* G *tiene la propiedad de Radon-Nikodym si y solo si toda función Lipschitz continua* $\ell : [0,1] \longrightarrow G$ *es diferenciable casi dondequiera.* □

Probemos el teorema 2.3-2:

Supongamos que G tiene la propiedad de Radon-Nikodym.

Sea $r \in C^{\infty}([0,+\infty),G)$ tal que

$$M = \sup\left\{ \|\lambda^{n+1} r^{(n)}(\lambda) \ / \ n!\| \ : \lambda > 0 \quad n = 0,1,2,\ldots \right\} \le +\infty$$

Por el teorema 2.2-1 existe una función $F : [0,+\infty) \longrightarrow G$ que satisface $F(0) = 0$ y $\|F(s) - F(t)\| \le M|s - t|$ tal que

$$r(\lambda) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} F(t)\, dt \qquad \forall\, \lambda > 0 \tag{2.11}$$

Por el teorema 2.3-4 y el lema 2.3-3 la derivada $\ell(s) = F'(s)$ existe casi dondequiera y $\ell \in \mathcal{L}_{\infty}([0,+\infty),G)$. Integrando por partes (2.11) obtenemos

$$r(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \ell(t)\, dt \qquad \forall\, \lambda > 0$$

Esto prueba una implicación. Supongamos ahora que el teorema de Widder se cumple en G. Probamos que G tiene la propiedad de Radon-Nikodym. Para ello usamos nuevamente la caracterización que da el teorema 2.3-4. Sea $F : [0,1] \longrightarrow G$ tal que $\|F(s) - F(t)\| \le M|s - t|$ para s,t en $[0,1]$. Tenemos que probar que F es diferenciable casi dondequiera. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $F(0) = 0$ pues de lo contrario trabajamos con $F - F(0)$. Extendemos F a $F^{\#} : [0,+\infty) \longrightarrow G$

de tal forma que

$$F^{\#}(t) = \begin{cases} F(t) & t \in [0,1] \\ F(1) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Definamos $r \in C^{\infty}((0,+\infty),G)$ como

$$r(\lambda) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} F^{\#}(t)\,dt \qquad \forall\ \lambda > 0 \tag{2.12}$$

Entonces $\|\lambda^{n+1} r^{(n)}(\lambda) \,/\, n!\| \le M$ para $\lambda > 0$ y $n = 0,1,2,\ldots$ .Como el teorema de Widder se cumple en G por suposición, tenemos que existe una función $\ell \in \mathcal{L}_{\infty}([0,+\infty),G)$ tal que

$$r(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \ell(t)\,dt = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{t} \ell(s)ds\,dt \qquad \forall\ \lambda > 0$$

Esto, junto con (2.12) y el teorema de unicidad para transformadas de Laplace implican que $F^{\#}(t) = \int_0^t \ell(s)\,ds$ para toda $t \ge 0$. Se sigue por 1.11-16 que F es diferenciable casi dondequiera. □

CAPITULO 3

TRANSFORMADA DE LAPLACE Y SEMIGRUPOS DE OPERADORES

La clave para la relación que existe entre la definición clásica de la transformada de Laplace y los semigrupos de operadores nos la da el estudio de los semigrupos de operadores fuertemente continuos, más precisamente el teorema 1.10-1. Podemos observar que la propiedad de semigrupo corresponde precisamente a la ecuación resolvente via la transformada de Laplace. En este capítulo exploramos esta relación. Además estudiamos condiciones más débiles para obtener lo que llamamos generadores de semigrupos n veces integrados y los caracterizamos. Finalmente preparamos el terreno para atacar el problema de Cauchy y exponemos resultados con ese fin.

3.1 RESOLVENTES COMO TRANSFORMADAS DE LAPLACE

3.1-1 Definición (Transformada de Laplace). Sea X un espacio de Banach y $R : (\omega,+\infty) \longrightarrow B(X)$[9] una función (donde $\omega \in \mathbb{R}$). Decimos que R es una *transformada de Laplace* si existe una función fuertemente continua $S : [0,+\infty) \longrightarrow B(X)$ que satisface $\|S(t)\| \le Me^{\omega t}$ para toda $t \ge 0$ tal que
$$R(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)\, dt \qquad \forall\ \lambda > \omega$$
También decimos que R es *la transformada de Laplace de* S. □

---

[9] Recordemos que $B(X)$ es el espacio de los operadores lineales acotados de X en X, i.e. $B(X) = \left\{ T : X \longrightarrow X \mid T \text{ es lineal acotado} \right\}$

Para $x \in X$ y $\lambda > \omega$ denotamos por $\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)x\,dt$ la integral de Bochner que coincide con la integral impropia de Riemann.

Por $\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)\,dt \in B(X)$ entendemos el operador que a $x \in X$ le asocia $\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)x\,dt$.

3.1-2 Definición (Seudoresolvente). Sea X un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{C}$ localmente convexo y $B(X)$ el álgebra de los operadores lineales acotados de X en X. Un *seudoresolvente* J_λ es una función definida en un subconjunto $\mathcal{D}(J)$ de $\mathbb{C}$ con valores en $B(X)$ tal que

(3.1) $$J_\lambda - J_\mu = (\mu - \lambda)J_\lambda J_\mu \qquad \forall\ \lambda,\mu \in \mathcal{D}(J)$$

La ecuación (3.1) se llama *la ecuación resolvente.* □

En el resto de esta sección X representa un espacio de Banach.

3.1-3 Lema (Seudoresolvente). *Sea* $T : [0,+\infty) \longrightarrow B(X)$ *fuertemente continua tal que* $\|T(t)\| \le Me^{\omega t}$ *para alguna* M *y* ω *en* $\mathbb{R}$ *y toda* $t \ge 0$. *Sea* $R(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)\,dt$ *con* $\lambda > \omega$. *Entonces* $\{R(\lambda)\}_{\lambda>\omega}$ *es un seudoresolvente si y solo si*

$$T(s)T(t) = T(s+t) \qquad \forall\ s,t \ge 0$$

Prueba: Sean $\lambda,\mu > \omega$ tales que $\lambda - \mu < 0$. Tenemos que

$$\Big(R(\lambda) - R(\mu)\Big)\cdot\frac{1}{\mu - \lambda} = \int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t}R(\lambda)\,dt - \int_0^\infty \frac{1}{\mu - \lambda}\, e^{(\lambda-\mu)t}e^{-\lambda t}T(t)\,dt$$

pues

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t}R(\lambda)\,dt - \int_0^\infty \frac{1}{\mu - \lambda}\, e^{(\lambda-\mu)t}e^{-\lambda t}T(t)\,dt \\
&= R(\lambda)\int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t}\,dt - \frac{1}{\mu - \lambda}\int_0^\infty e^{-\mu t}T(t)\,dt \\
&= R(\lambda)\left[\frac{e^{(\lambda-\mu)t}}{\lambda - \mu}\right]_{t=0}^{\infty} - \frac{R(\mu)}{\mu - \lambda} \\
&= \frac{R(\lambda)}{\mu - \lambda} - \frac{R(\mu)}{\mu - \lambda}
\end{aligned}$$

pero

$$\int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t}R(\lambda)\ dt - \int_0^\infty \frac{1}{\mu - \lambda}\ e^{(\lambda-\mu)t}e^{-\lambda t}T(t)\ dt$$
$$= \int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t} \int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)ds\ dt - \int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t} \int_0^t e^{-\lambda s}T(s)ds\ dt$$

pues integrando por partes

$$\int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t} \int_0^t e^{-\lambda s}T(s)ds\ dt$$
$$= \left[\frac{e^{(\lambda-\mu)t}}{\lambda - \mu} \int_0^t e^{-\lambda s}T(s)ds \right]_{t=0}^{\infty} - \int_0^\infty \frac{1}{\lambda - \mu}\ e^{(\lambda-\mu)t}e^{-\lambda t}T(t)\ dt$$
$$= \int_0^\infty \frac{1}{\mu - \lambda}\ e^{(\lambda-\mu)t}e^{-\lambda t}T(t)\ dt$$

pero

$$\int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t} \int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)ds\ dt - \int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t} \int_0^t e^{-\lambda s}T(s)ds\ dt$$
$$= \int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t} \int_t^\infty e^{-\lambda s}T(s)ds\ dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-\mu t} \int_t^\infty e^{-\lambda(s-t)}T(s)ds\ dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-\mu t} \int_0^t e^{-\lambda s}T(s+t)ds\ dt$$

Por otro lado

$$R(\mu)R(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\mu t}T(t)\ dt \int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)\ ds$$
$$= \int_0^\infty e^{-\mu t} \int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)T(t)ds\ dt$$

de donde la afirmación se cumple por el teorema de unicidad para la transformada de Laplace. □

3.1-4 Teorema. *Un operador lineal* A *en* X *es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo*[10] *si y solo si existe* $\omega \in \mathbb{R}$ *tal*

---

[10] Recordemos que si $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset B(X)$ satisface las condiciones

1) $T_tT_s = T_{t+s} \quad \forall\ t,s \geq 0$
2) $T_0 = I_X$
3) $\lim_{t \longrightarrow t_0} \|T_tx - T_{t_0}x\| = 0 \quad \forall\ t_0 \geq 0\ ,\ x \in X$

que $(\omega,+\infty) \subset \rho(A)$ *(el conjunto resolvente de* A*) y* $R : (\omega,+\infty) \longrightarrow B(X)$ *definida por* $R(\lambda) = (\lambda - A)^{-1}$ *es una transformada de Laplace. En ese caso* R *es la transformada de Laplace del semigrupo generado por* A.

Prueba: Supongamos que $R(\lambda) = (\lambda - A)^{-1}$ para $\lambda > \omega$ es la transformada de Laplace de $T : [0,+\infty) \longrightarrow B(X)$. Tenemos que

$$\|T(t)\| \le Me^{\omega t} \quad \text{y} \quad \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)\,dt = R(\lambda) = (\lambda - A)^{-1}$$

de donde, por el teorema 1.9-8 (a)[11], $R(\lambda)$ cumple la ecuación resolvente (3.1). Entonces por el lema 3.1-3 tenemos que

$$T(s+t) = T(s)T(t) \qquad \forall\ s,t \ge 0$$

de donde $T(0) = T(0+0) = T(0)T(0) = T^2(0)$, por lo que $T(0)$ es una proyección[12]. Así, si $T(0)x = 0$ entonces $T(t)x = T(t)T(0)x = 0$ para toda $t \ge 0$ por lo que en ese caso

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt = \int_0^\infty 0\,dt = 0 \qquad \forall\ \lambda > \omega$$

de donde $(\lambda - A)^{-1}x = R(\lambda)x = 0$ implica que

$$(\lambda - A)(\lambda - A)^{-1}x = (\lambda - A)0$$

o lo que es lo mismo que $x = 0$. Sea entonces $x \in X$, tenemos que

$$\begin{aligned} T(0)\Big[\ T(0)x - x\ \Big] &= T^2(0)x - T(0)x \\ &= T(0)x - T(0)x \\ &= 0 \end{aligned}$$

pero por las observaciones anteriores esto implica que $T(0)x = x$, así tenemos que $T(0) = I_X$. Veamos finalmente que $\lim\limits_{x \to 0} \|T(t)x - T(0)x\| = 0$

$\{T(t)\}_{t\ge0}$ se llama un semigrupo fuertemente continuo o de clase C_0

[11] Tenemos que pedir que X sea un espacio complejo.

[12] Recordemos que por definición una transformación lineal $T : W \longrightarrow W$ en un espacio vectorial W es una proyección si y solo si $T^2 = T$.

pero esto es inmediato del siguiente hecho

(3.2) $$\|T(t)x - T(0)x\| \le \|T(t) - T(0)\|\|x\|$$

pues como $T : [0,+\infty) \longrightarrow B(X)$ es fuertemente continua, el término de la derecha en la ecuación (3.2) tiende a cero cuando t tiende a cero. Hemos probado así que $\{T(t)\}_{t\ge0}$ es un semigrupo de clase C_0. Denotemos por B a su generador, entonces

$$(\lambda - B)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)\,dt = (\lambda - A)^{-1} \qquad \forall\ \lambda > \omega$$

por lo que A = B. Esto prueba una implicación. La otra implicación nos la da el teorema 1.10-1. □

Observación: El teorema de Hille-Yosida, en su extensión dada por Feller, Miyadera y Phillips, afirma que un operador A densamente definido es un generador de un semigrupo de clase C_0 si y solo si $(\omega,+\infty) \subset \rho(A)$ para alguna $\omega \in \mathbb{R}$ y

$$\|(\lambda - \omega)^{m+1}R(\lambda,A)^{(m)}/m!\| \le M$$

para toda $\lambda > \omega$, $m = 0,1,\ldots$ y alguna $M \ge 0$. Por lo que a la luz del teorema 3.1-4 el teorema de Hille-Yosida puede ser reformulado diciendo que el teorema de Widder se cumple para resolventes de operadores lineales densamente definidos.

3.2 Semigrupos integrados y sus generadores

Sea $\{T(t)\}_{t\ge0}$ un semigrupo de clase C_0 con generador $A : X \longrightarrow X$ con X un espacio de Banach. Entonces por el teorema del acotamiento de la norma 1.8-5 tenemos que existen constantes $M,\omega \in \mathbb{R}$ tales que

$$\|T(t)\| \le Me^{\omega t} \qquad \forall\ t \ge 0$$

Para $n \in \mathbb{N}$ sea

$$(3.3) \qquad S^n(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} T(s)\, ds \qquad \forall\ t \geq 0$$

Probemos que para $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda > \omega$

$$(3.4) \qquad \frac{R(\lambda, A)}{\lambda^n} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S^n(t)\, dt \qquad \forall\ \lambda > \max\{\omega, 0\}$$

Tenemos que

$$(3.5) \qquad (\lambda - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\, dt \qquad \forall\ \lambda > \omega$$

Para n = 1 (3.3) se escribe como

$$S^1(t) = \int_0^t T(s)\, ds$$

Así, integrando por partes una vez (3.5), tenemos

$$(\lambda - A)^{-1} = \left[e^{-\lambda t} \int_0^t T(s)\, ds \right]_{t=0}^\infty + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t T(s)\, ds\, dt$$

$$= 0 + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} S^1(t)\, dt$$

de donde

$$(3.6) \qquad \frac{(\lambda - A)^{-1}}{\lambda} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S^1(t)\, dt$$

Hemos visto que para n = 1 (3.4) es cierto, veamos que pasa para n = 2 para darnos una idea de que esta sucediendo.

$$(3.7) \qquad S^2(t) = \int_0^t \frac{(t-s)}{1} T(s)\, ds = t\int_0^t T(s)\, ds - \int_0^t sT(s)\, ds$$

Volviendo a integrar por partes pero ahora (3.6) tenemos

$$(\lambda - A)^{-1} = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S^1(t)\, dt$$

$$= \lambda \left[\left[e^{-\lambda t} \int_0^t S^1(s)\, ds \right]_{t=0}^\infty + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t S^1(s) ds\, dt \right]$$

$$= \lambda^2 \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^t S^1(s)\, ds\, dt$$

Ahora bien

$$\int_0^t S^1(s)\, ds = \int_0^t\int_0^s T(h)\, dh\, ds$$

Manipulemos un poco $S^2(t)$, por (3.7) tenemos que

$$S^2(t) = t\int_0^t T(s)\, ds - \int_0^t sT(s)\, ds^{13}$$

$$= t\int_0^t T(s)\, ds - \left[\left[s\int_0^s T(h)\, dh\right]_{s=0}^{t} - \int_0^t\int_0^s T(h)\, dh\, ds \right]$$

$$= t\int_0^t T(s)\, ds - t\int_0^t T(h)\, dh + \int_0^t\int_0^s T(h)\, dh\, ds$$

$$= \int_0^t\int_0^s T(h)\, dh\, ds = \int_0^t S^1(s)\, ds$$

por lo que

$$S^2(t) = \int_0^t S^1(s)\, ds \tag{3.8}$$

Así las cosas, tenemos que

$$(\lambda - A)^{-1} = \lambda^2\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t S^1(s)\, ds\, dt = \lambda^2\int_0^\infty e^{-\lambda t}S^2(t)\, dt$$

de donde

$$\frac{(\lambda - A)^{-1}}{\lambda^2} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}S^2(t)\, dt$$

por lo que para $n = 2$ (3.4) también se cumple.

Supongamos que

$$\frac{(\lambda - A)^{-1}}{\lambda^n} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}S^n(t)\, dt$$

se cumple y probemos que el resultado es cierto para $n + 1$.

$$(\lambda - A)^{-1} = \lambda^n\int_0^\infty e^{-\lambda t}S^n(t)\, dt$$

---

[13] Para pasar a la siguiente linea hay que integrar por partes este término. Esta técnica se repite todo el tiempo.

$$= \lambda^n \left[\left[e^{-\lambda t} \int_0^t S^n(h)\, dh \right]_{t=0}^{\infty} + \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \int_0^{\infty} S^n(h)\, dh\, dt \right]$$

$$= \lambda^{n+1} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \int_0^t S^n(r)\, dr\, dt$$

Que es lo mismo que

$$\frac{(\lambda - A)^{-1}}{\lambda^{n+1}} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \int_0^t S^n(r)\, dr\, dt$$

Entonces para probar (3.4) basta probar que

$$S^{n+1}(t) = \int_0^t S^n(r)\, dr \qquad \forall\ n = 1,2,\ldots$$

Por (3.8) tenemos que el resultado es cierto para n = 1. Supongamos cierto el resultado para n y probemoslo para n + 1.

$$S^{n+2}(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{n+1}}{(n+1)!} T(s)\, ds$$

$$= \left[\frac{(t-s)^{n+1}}{(n+1)!} \int_0^s T(r)\, dr \right]_{s=0}^{t} + \int_0^t \frac{(t-s)^n}{n!} \int_0^s T(r)\, dr\, ds$$

$$= \int_0^t \frac{(t-s)^n}{n!} S^1(s)\, ds$$

integrando por partes n veces y utilizando la hipótesis inductiva tenemos

$$S^{n+2}(t) = \int_0^t S^{n+1}(s)\, ds$$

Enunciemos este resultado en un teorema.

3.2-1 Teorema. *Sea* X *un espacio de Banach. Sea* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *un semigrupo de clase* C_0 *con generador* $A : X \longrightarrow X$. *Para* $n \in \mathbb{N}$ *sea*

$$S^n(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} T(s)\, ds \qquad \forall\ t \geq 0$$

Entonces $$\frac{R(\lambda, A)}{\lambda^n} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} S^n(t)\, dt \qquad \forall\ \lambda > \max\{\omega, 0\} \qquad \square$$

¿Porqué hemos puesto tanto empeño en este resultado? La principal razón por la cual los generadores de semigrupos de clase C_0 son de gran interés es porque el problema de Cauchy asociado (del cual hablaremos después) tiene una solución única para un gran conjunto de valores iniciales. Pero para ello no es esencial que $R(\lambda,A)$ sea una transformada de Laplace, a la luz del teorema 3.2-1, el estudiar la condición más débil de que $\dfrac{R(\lambda,A)}{\lambda^n}$ sea una transformada de Laplace puede ser de interés.

Tenemos pues, por el teorema antes mencionado, que si $R(\lambda,A)$ es una transformada de Laplace entonces $\dfrac{R(\lambda,A)}{\lambda^n}$ también lo es para $n \in \mathbb{N}$.

Vamos a considerar la clase de operadores para los cuales la función $\lambda \longmapsto \dfrac{R(\lambda,A)}{\lambda^n}$ es una transformada de Laplace de alguna función $S : [0,+\infty) \longrightarrow B(X)$ para alguna $n \in \mathbb{N}$.

3.2-2 Teorema (Seudoresolvente). *Sea* $S : [0,+\infty) \longrightarrow B(X)$ *fuertemente continua tal que* $\|S(t)\| \le Me^{\omega t}$ *para alguna* $M,\omega \in \mathbb{R}$ *y para toda* $t \ge 0$. *Sea* $n \in \mathbb{N}$ *y*

$$R(\lambda) = \int_0^\infty \lambda^n e^{-\lambda t} S(t)\, dt \qquad \forall\ \lambda > \omega$$

Entonces $\{R(\lambda,A)\}_{\lambda>\omega}$ *es un seudoresolvente si y solo si*

(3.9)

$$S(t)S(s) = \frac{1}{(n-1)!}\left[\int_t^{s+t} (s+t-r)^{n-1} S(r)\, dr - \int_0^s (s+t-r)^{n-1} S(r)\, dr\right]$$

para todo $s,t \ge 0$.

Prueba: Recordemos que para probar que $J_\lambda : \mathcal{D}(J) \longrightarrow B(X)$ es un seudoresolvente hay que ver que $J_\lambda - J_\mu = (\mu-\lambda)J_\lambda J_\mu$.

Sean $\lambda,\mu > \omega$, $\lambda \ne \mu$.

Como $$\frac{R(\lambda)}{\lambda^n}\ \frac{R(\mu)}{\mu^n} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)\, dt \int_0^\infty e^{-\mu s} S(s)\, ds$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)\int_0^\infty e^{-\mu s}S(s)\, ds\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\mu s}S(t)S(s)\, ds\, dt$$

basta probar que

$$\frac{1}{\mu-\lambda}\,\frac{1}{\lambda^n}\,\frac{1}{\mu^n}\Big(R(\lambda) - R(\mu)\Big) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\mu s}\frac{1}{(n-1)!}\int_t^{s+t}(s+t-r)^{n-1}S(r)\, drdsdt$$

$$- \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\mu s}\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{s}(s+t-r)^{n-1}S(r)\, drdsdt \tag{3.10}$$

pues así el teorema se sigue por el teorema de unicidad de las transformadas de Laplace, ya que por substitución directa obtenemos la igualdad deseada.

Tenemos pues que

$$\frac{1}{\mu^n(\mu-\lambda)}\left(\frac{R(\lambda)}{\lambda^n} - \frac{R(\mu)}{\mu^n}\right) + \frac{1}{(\mu-\lambda)}\left(\frac{1}{\mu^n} - \frac{1}{\lambda^n}\right)\frac{R(\mu)}{\mu^n} =$$

$$= \frac{R(\lambda)}{(\mu\lambda)^n(\mu-\lambda)} - \frac{R(\mu)}{\mu^{2n}(\mu-\lambda)} + \frac{R(\mu)}{\mu^{2n}(\mu-\lambda)} - \frac{R(\mu)}{(\mu-\lambda)(\lambda\mu)^n}$$

$$= \frac{R(\lambda) - R(\mu)}{(\mu\lambda)^n\ (\mu-\lambda)} = (\mu-\lambda)^{-1}\lambda^{-n}\mu^{-n}\Big(R(\lambda) - R(\mu)\Big)$$

o equivalentemente

$$(\mu-\lambda)^{-1}\lambda^{-n}\mu^{-n}\Big(R(\lambda) - R(\mu)\Big) = \frac{1}{\mu^n(\mu-\lambda)}\left(\frac{R(\lambda)}{\lambda^n} - \frac{R(\mu)}{\mu^n}\right) + \frac{1}{(\mu-\lambda)}\left(\frac{1}{\mu^n} - \frac{1}{\lambda^n}\right)\frac{R(\mu)}{\mu^n} \tag{3.11}$$

Como estamos suponiendo que $R(\lambda)$ es un seudoresolvente, remplazando $R(\lambda)$ por $\frac{R(\lambda)}{\lambda^n}$ en la prueba del lema 3.1-3, tenemos que

$$(\mu-\lambda)^{-1}\left(\frac{R(\lambda)}{\lambda^n} - \frac{R(\mu)}{\mu^n}\right) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\mu s}S(t+s)\, ds\, dt \tag{3.12}$$

integrando una vez por partes el miembro de la derecha en la igualdad anterior obtenemos

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\mu s}S(t+s)\ ds\ dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(\left[e^{-\mu s}\int_0^s S(t+r)\ dr\right]_{s=0}^{\infty} + \mu\int_0^\infty e^{-\mu s}\int_0^s S(t+r)\ dr\ ds\right) dt$$

$$= \mu\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\mu s}\int_0^s S(t+r)\ dr\ ds\ dt$$

De donde integrando n veces por partes $\int_0^\infty e^{-\mu s}S(t+s)\ ds$ obtenemos

$$\int_0^\infty e^{-\mu s}S(t+s)\ ds = \mu^n\int_0^\infty e^{-\mu s}\int_0^s \frac{(s-r)^{n-1}}{(n-1)!}S(r+t)\ dr\ ds$$

Así (3.12) se puede escribir como

$$\mu^{-n}(\mu-\lambda)^{-1}\left(\frac{R(\lambda)}{\lambda^n} - \frac{R(\mu)}{\mu^n}\right) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\mu s}\int_0^s \frac{(s-r)^{n-1}}{(n-1)!}S(r+t)\ dr\ ds\ dt$$

Finalmente hagamos el cambio de variable $u = r+t$ en el segundo miembro de esta igualdad

$$\mu^{-n}(\mu-\lambda)^{-1}\left(\frac{R(\lambda)}{\lambda^n} - \frac{R(\mu)}{\mu^n}\right) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\mu s}\int_t^{s+t}\frac{1}{(n-1)!}(s+t-u)^{n-1}S(u)\ du\ ds\ dt$$

o equivalentemente

$$\mu^{-n}(\mu-\lambda)^{-1}\left(\frac{R(\lambda)}{\lambda^n} - \frac{R(\mu)}{\mu^n}\right) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\mu s}\int_t^{s+t}\frac{1}{(n-1)!}(s+t-r)^{n-1}S(r)\ dr\ ds\ dt$$

Esto es el primer término en el lado derecho de (3.10), falta calcular el segundo término en (3.6).

Hagamos primero unos cálculos

$$\frac{1}{\mu-\lambda}\left(\frac{1}{\mu^n} - \frac{1}{\lambda^n}\right) = \frac{1}{\mu-\lambda}\left(\frac{\lambda^n-\mu^n}{(\mu\lambda)^n}\right) = -\frac{1}{\mu-\lambda}\,\frac{\mu^n-\lambda^n}{(\mu\lambda)^n}$$

$$= -\frac{\mu^{n-1}+\mu^{n-2}\lambda + \dots + \mu\lambda^{n-2}+\lambda^{n-1}}{(\mu\lambda)^n}$$

$$= -\left(\mu^{n-1}+\mu^{n-2}\lambda + \dots + \mu\lambda^{n-2}+\lambda^{n-1}\right)(\mu\lambda)^{-n}$$

$$= -\left(\mu^{n-1-n}\lambda^{-n}+\mu^{n-2-n}\lambda^{1-n}+ \dots + \mu^{1-n}\lambda^{n-2-n}+\mu^{-n}\lambda^{n-1-n}\right)$$

$$= -\left(\mu^{-1}\lambda^{-n}+\mu^{-2}\lambda^{1-n}+ \dots + \mu^{1-n}\lambda^{-2}+\mu^{-n}\lambda^{-1}\right)$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^{-(k+1)}\mu^{-(n-k)}$$

De donde

$$\text{(3.13)}\qquad \frac{1}{\mu-\lambda}\left(\frac{1}{\mu^n}-\frac{1}{\lambda^n}\right) = -\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^{-(k+1)}\mu^{-(n-k)}$$

Tenemos entonces que por (3.13)

$$(\mu-\lambda)^{-1}(\mu^{-n}-\lambda^{-n})\,\frac{R(\mu)}{\mu^n} = -\left(\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^{-(k+1)}\mu^{-(n-k)}\right)\frac{R(\mu)}{\mu^n}$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^{-(k+1)}\int_0^\infty \mu^{k-n}e^{-\mu s}S(s)\,ds$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^{-(k+1)}\int_0^\infty e^{-\mu s}\int_0^\infty \frac{(s-r)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}S(r)\,dr\,ds^{14}$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,\frac{t^k}{k!}\,dt\int_0^\infty e^{-\mu s}\int_0^\infty \frac{(s-r)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}S(r)\,dr\,ds^{15}$$

$$= -\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\mu s}\int_0^s \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(s-r)^{n-k-1}t^kS(r)\,drdsdt$$

$$= -\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\mu s}\frac{1}{(n-1)!}\int_0^s (s+t-r)^{n-1}S(r)\,drdsdt$$

Observemos que este es el término de la derecha en (3.10) y comparemos todo lo que hemos obtenido con (3.11). Con esto concluimos la prueba. □

Notemos que la condición (3.9) implica que

(3.14) $S(t)S(s) = S(s)S(t) \quad \forall\ s,t \geq 0$

(3.15) $S(t)S(0) = 0 \quad \forall\ t \geq 0$

---

[14] Esto se obtiene integrando por partes n-k veces.

[15] Que $\lambda^{-(k+1)} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\,\frac{t^k}{k!}\,dt$ es un resultado conocido de la teoría de la transformada de Laplace.

Prueba: De (3.9) tenemos que para $s, t \geq 0$

$$S(t)S(s) = \frac{1}{(n-1)!}\left[\int_t^{s+t} (s+t-r)^{n-1}S(r)\, dr - \int_0^s (s+t-r)^{n-1}S(r)\, dr\right]$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\left[\int_t^0 * + \int_0^s * + \int_s^{s+t} * - \int_0^s *\right] = \frac{1}{(n-1)!}\left[\int_t^0 * + \int_s^{s+t} *\right]$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\left[\int_s^{s+t} * - \int_0^t *\right] = S(s)S(t)$$

con $* = (s+t-r)^{n-1}S(r)\, dr$. Esto prueba (3.14)

Para (3.15) tenemos que para toda $t \geq 0$

$$S(t)S(0) = \frac{1}{(n-1)!}\left[\int_t^{0+t} (s+t-r)^{n-1}S(r)\, dr - \int_0^0 (s+t-r)^{n-1}S(r)\, dr\right] = 0$$

con lo que (3.15) queda probado. □

3.2-3 Definición (Semigrupo integrado n veces). Sea $n \in \mathbb{N}$. Una familia fuertemente continua $\{S(t)\}_{t\geq0} \subset B(X)$ se llama un *semigrupo integrado n veces* si (3.9) se satisface y $S(0) = 0$. Decimos que $\{S(t)\}_{t\geq0}$ es *no degenerada* si $S(t)x = 0$ para toda $t \geq 0$ implica que $x = 0$. Finalmente, decimos que $\{S(t)\}_{t\geq0}$ es *exponencialmente acotada* si existen $M, \omega \in \mathbb{R}$ tales que $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$ para toda $t \geq 0$. □

Sea $\{S(t)\}_{t\geq0}$ un semigrupo n veces integrado con $n \in \mathbb{N}$. Supongamos además que $\{S(t)\}_{t\geq0}$ es exponencialmente acotado. Definamos $R(\lambda)$ como en el teorema 3.2-2, esto es

$$R(\lambda) = \int_0^\infty \lambda^n e^{-\lambda t}S(t)\, dt \qquad \forall\ \lambda > \omega$$

con ω tal que $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$ para alguna $M \in \mathbb{R}$ y para toda $t \geq 0$.

Por la ecuación resolvente se cumplen

$$R(\lambda) = (\mu-\lambda)R(\lambda)R(\mu) + R(\mu)$$

$$R(\mu) = (\lambda-\mu)R(\mu)R(\lambda) + R(\lambda)$$

por lo que claramente si $x \in \text{Nuc } R(\lambda)$[16] entonces $x \in \text{Nuc } R(\mu)$ y viceversa, esto es, tenemos que

$$\text{Nuc } R(\mu) = \text{Nuc } R(\lambda) \qquad \forall\ \lambda,\mu > \omega$$

o en otras palabras que el núcleo de $R(\lambda)$ es independiente de $\lambda > \omega$. Entonces por el teorema de unicidad $R(\lambda)$ es inyectiva si y solo si $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es no degenerado.

Prueba: Supongamos que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es no degenerado, así $R(\lambda)x = 0$ equivale a decir que $\int_0^\infty \lambda^n e^{-\lambda t} S(t)x\ dt = 0$ pero por la observación que hicimos arriba para $\mu \neq \lambda$ también tenemos que $\int_0^\infty \mu^n e^{-\mu t} S(t)x\ dt = 0$ de donde

$$\int_0^\infty \lambda^n e^{-\lambda t} S(t)x\ dt = \int_0^\infty \lambda^n e^{-\lambda t} S(t)x\ dt \qquad \forall\ t \geq 0$$

pero el teorema de unicidad implica que $S(t)x = 0$ para toda $t \geq 0$ como $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es no degenerado tenemos entonces que $x = 0$ por lo que $R(\lambda)$ es inyectiva para toda $\lambda > \omega$.

Inversamente, supongamos que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es degenerado, entonces existe $x_0 \neq 0$ tal que $S(t)x_0 = 0$ para toda $t \geq 0$, por lo que

$$\int_0^\infty \lambda^n e^{-\lambda t} S(t)x_0\ dt = 0 \qquad \forall\ \lambda > \omega$$

y entonces $R(\lambda)$ no es inyectiva para ninguna $\lambda > \omega$. $\square$

En ese caso existe un único operador A que cumple $(\omega,+\infty) \subset \rho(A)$ tal que $R(\lambda) = (\lambda - A)^{-1}$ para toda $\lambda > \omega$. Este operador se llama *el generador de* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Prueba: Por las observaciones anteriores el operador $R(\lambda)$ es

---

[16] Recordemos que el núcleo o kernel de un operador $T : X \longrightarrow X$ es el conjunto $\text{Nuc } T = \{ x \in X \mid Tx = 0 \}$.

inyectivo y cumple la ecuación resolvente (3.1), de donde $Im(R(\lambda)) = \mathcal{R}$ no depende de λ y $\lambda - R(\lambda)^{-1} = \mu - R(\mu)^{-1}$ para toda $\lambda, \mu > \omega$. Sea A el operador dado por $A := \lambda - R(\lambda)^{-1}$, así $(\lambda - A)^{-1} = R(\lambda)$ para $\lambda > \omega$. La unicidad de A esta dada por la unicidad de $R(\lambda)^{-1}$. □

Resumamos estos resultados en el siguiente teorema.

3.2-4 Teorema (Generador de un semigrupo n veces integrado). *Sea* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un semigrupo* n *veces integrado no degenerado de orden exponencial, entonces existen* $M, \omega \in \mathbb{R}$ *tales que* $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$ *para toda* $t \geq 0$ *y el operador* $R(\lambda) = \int_0^\infty \lambda^n e^{-\lambda t} S(t)\, dt$ *esta definido para toda* $\lambda > \omega$, *más aún existe un único operador* $A : \mathcal{R}(R(\lambda)) \longrightarrow X$ *que cumple* $(\omega, +\infty) \subset \rho(A)$ *tal que* $R(\lambda) = (\lambda - A)^{-1}$ *para toda* $\lambda > \omega$, *dicho operador se llama el generador de* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. □

Por conveniencia decimos que un semigrupo de clase C_0 es un semigrupo 0 veces integrado.

Usualmente, el objeto dado es el operador. Entonces para $n \in \mathbb{N}$[17], un operador A es el generador de un semigrupo n veces integrado si y solo si $(a, +\infty) \subset \rho(A)$ para alguna $a \in \mathbb{R}$ y la función $\lambda \longrightarrow \frac{(\lambda - A)^{-1}}{\lambda^n}$ es una transformada de Laplace. Por el teorema de Widder en su versión vector valuada de W. Arendt 2.2-1, para el caso $n = 0$, esto es consistente con la definición del generador de un semigrupo de clase C_0.

3.2-5 Lema. *Sea* A *el generador de un semigrupo* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ n *veces integrado, con* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces para toda* $x \in \mathcal{D}(A)$ *y* $t \geq 0$

(3.16) $$S(t)x \in \mathcal{D}(A) \quad y \quad AS(t)x = S(t)Ax$$

y

[17] Para nosotros $0 \in \mathbb{N}$.

(3.17)
$$S(t)x = \frac{t^n}{n!}x + \int_0^t S(s)Ax\,ds$$

Más aún, $\int_0^t S(s)x\,ds \in \mathcal{D}(A)$ *para toda* $x \in X$, $t \geq 0$ *y*

(3.18)
$$A\int_0^t S(s)x\,ds = S(t)x - \frac{t^n}{n!}x$$

Prueba: Existen $\omega, M \geq 0$ tales que $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$ para toda $t \geq 0$ y

$$R(\lambda,A) = (\lambda - A)^{-1} = \int_0^\infty \lambda^n e^{-\lambda t}S(t)\,dt \qquad \forall\ \lambda > \omega$$

Como $R(\lambda,A)$ cumple la ecuación resolvente para $\lambda,\mu > \omega$ tenemos que

$$\begin{cases} R(\lambda,A) - R(\mu,A) = (\mu-\lambda)R(\lambda,A)R(\mu,A) \\ R(\mu,A) - R(\lambda,A) = (\lambda-\mu)R(\mu,A)R(\lambda,A) \end{cases}$$

equivale a

$$\begin{cases} \dfrac{R(\lambda,A) - R(\mu,A)}{\mu - \lambda} = R(\lambda,A)R(\mu,A) \\ \dfrac{R(\lambda,A) - R(\mu,A)}{\mu - \lambda} = R(\mu,A)R(\lambda,A) \end{cases}$$

para $\lambda \neq \mu$, por lo que $R(\lambda,A)$ y $R(\mu,A)$ conmutan. Cuando $\lambda = \mu$ estos dos operadores también conmutan claramente por lo que

(3.19)
$$R(\lambda,A)R(\mu,A) = R(\mu,A)R(\lambda,A) \qquad \forall\ \lambda,\mu > \omega$$

Fijemos $\mu \in \rho(A)$. Entonces por (3.19) y propiedades de la integral de Bochner tenemos que para toda $\lambda > \omega$ y $x \in X$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)R(\mu,A)x\,dt &= \lambda^{-n}R(\lambda,A)R(\mu,A)x \\ &= \lambda^{-n}R(\mu,A)R(\lambda,A)x \\ &= R(\mu,A)\lambda^{-n}R(\lambda,A)x \\ &= R(\mu,A)\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)x\,dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}R(\mu,A)S(t)x\,dt\end{aligned}$$

Por el teorema de unicidad tenemos entonces que

(3.20)
$$R(\mu,A)S(t) = S(t)R(\mu,A) \qquad \forall\ \mu \in \rho(A)\ ,\ t \geq 0$$

Recordemos que $S(t) : X \longrightarrow X$ y que $R(\mu,A) : X \longrightarrow X$, por lo que si

$x \in \mathcal{D}(A)$ podemos componer por la derecha con $R(\mu,A)^{-1} = \mu - A$ en (3.20) de donde

$$(\mu - A)^{-1}S(t)(\mu - A)x = S(t)x \qquad \forall\ x \in \mathcal{D}(A)$$

pero por tener $(\mu - A)^{-1}$ al final en el primer miembro de esta ecuación, esto nos dice que podemos componer por la izquierda con μ-A, pero esto solo nos dice que $S(t)x \in \mathcal{D}(A)$, además de

$$(\mu - A)(\mu - A)^{-1}S(t)(\mu - A)x = (\mu - A)S(t)x \qquad \forall\ x \in \mathcal{D}(A)$$

tenemos $\qquad S(t)(\mu - A)x = (\mu - A)S(t)x \qquad \forall\ x \in \mathcal{D}(A)$

de donde $\qquad S(t)Ax = AS(t)x \qquad \forall\ x \in \mathcal{D}(A)$

Así, (3.20) implica (3.16). Sea $x \in \mathcal{D}(A)$, sabemos que $\int_0^\infty \lambda^{n+1}e^{-\lambda t}\frac{t^n}{n!}dt=1$ entonces para toda $\lambda > \omega$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \lambda^{n+1}e^{-\lambda t}\frac{t^n}{n!}x\ dt &= x \\
&= R(\lambda,A)(\lambda - A)x \\
&= \lambda R(\lambda,A)x - R(\lambda,A)Ax \\
&= \int_0^\infty \lambda^{n+1}e^{-\lambda t}S(t)x\ dt - \int_0^\infty \lambda^{n}e^{-\lambda t}S(t)Ax\ dt \\
&= \int_0^\infty \lambda^{n+1}e^{-\lambda t}S(t)x\ dt - \int_0^\infty \lambda^{n+1}e^{-\lambda t}\int_0^t S(s)Ax\ ds\ dt
\end{aligned}$$

por el teorema de unicidad tenemos

$$\frac{t^n}{n!}x = S(t)x - \int_0^t S(s)Ax\ ds$$

o equivalentemente $\qquad S(t)x = \frac{t^n}{n!} + \int_0^t S(s)Ax\ ds \qquad$ que es (3.17).

Para probar (3.18) sea $x \in X$, $t \geq 0$, $\lambda > \omega$. Entonces por (3.16), (3.17) y (3.20) tenemos que

$$\int_0^t S(s)x\ ds = (\lambda - A)R(\lambda,A)\int_0^t S(s)x\ ds$$[18]

---

[18] Observemos que $R(\lambda,A)\int_0^t S(s)x\ ds \in \mathcal{D}(A)$.

$$= \lambda R(\lambda,A)\int_0^t S(s)x\,ds - A\int_0^t S(s)R(\lambda,A)x\,ds$$
$$= \lambda R(\lambda,A)\int_0^t S(s)x\,ds - \int_0^t S(s)AR(\lambda,A)x\,ds$$
$$= \lambda R(\lambda,A)\int_0^t S(s)x\,ds - S(t)R(\lambda,A)x + \frac{t^n}{n!}R(\lambda,A)x$$
$$= R(\lambda,A)\lambda\int_0^t S(s)x\,ds - R(\lambda,A)S(t)x + R(\lambda,A)\frac{t^n}{n!}x$$

Por lo que, como todos los términos están en $\mathcal{D}(A)$, $\int_0^t S(s)x\,ds \in \mathcal{D}(A)$ y

$$(\lambda - A)\int_0^t S(s)x\,ds = \lambda\int_0^t S(s)x\,ds - S(t)x + \frac{t^n}{n!}x$$

de donde

$$A\int_0^t S(s)x\,ds = S(t)x - \frac{t^n}{n!}x \qquad \square$$

3.2-6 Corolario. *Para todo* $x \in X$ *tenemos que* $S(t)x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$. *Más aún, sea* $x \in X$. *Entonces* $S(\cdot)x$ *es diferenciable por la derecha en* $t \geq 0$ *si y solo si* $S(t)x \in \mathcal{D}(A)$, *en ese caso*

$$\left(\frac{d}{ds}\Big|_{s=t}\right)S(s)x = \begin{cases} AS(t)x + \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}x & \textit{si } n > 0 \\ AS(t)x & \textit{si } n = 0 \end{cases}$$

Prueba: Por el lema anterior tenemos que para toda $x \in X$ y $t \geq 0$ $\int_0^t S(s)x\,ds \in \mathcal{D}(A)$. Como

$$S(t)x = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}\left(\int_0^{t+h} S(s)x\,ds - \int_0^t S(s)x\,ds\right)$$

podemos ver a $S(t)x$ como el límite de una sucesión de elementos de $\mathcal{D}(A)$, por lo que $S(t)x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$.

Para la segunda afirmación, sea $S(t)x \in \mathcal{D}(A)$. Consideremos el caso en que $n > 0$. Entonces, también por el lema anterior, tenemos que

$$S(t+h)x = \frac{(t+h)^n}{n!}x + \int_0^{t+h} S(s)Ax\,ds$$
$$S(t)x = \frac{t^n}{n!}x + \int_0^t S(s)Ax\,ds$$

de donde

$$\frac{S(t+h)-S(t)}{h}x = \frac{1}{h}\frac{(t+h)^n - t^n}{n!} + A\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(s)x\,ds$$

pasando al límite cuando $h \longrightarrow 0^+$

$$\left(\frac{d}{ds}\bigg|_{s=t}\right)S(s)x = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}x + AS(t)x$$

claramente si $n = 0$ entonces $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}x$ se cambia por 0. □

3.3 Caracterizacion de los generadores de semigrupos integrados

El siguiente teorema se sigue del corolario 2.2-2.

3.3-1 Teorema (Caracterización). *Sea* $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in \mathbb{R}$, $M \geq 0$. *Un operador lineal* A *es el generador de un semigrupo* $n+1$ *veces integrado* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *que cumple*

(3.21) $$\limsup_{h \longrightarrow 0^+} \frac{1}{h}\|S(t+h) - S(t)\| \leq Me^{\omega t} \qquad \forall\ t \geq 0$$

si y solo si existe $a \geq \max\{\omega, 0\}$ *tal que* $(a, +\infty) \subset \rho(A)$ *y*

(3.22) $$\left\|(\lambda-\omega)^{k+1}\left[\frac{R(\lambda, A)}{\lambda^n}\right]^{(k)}\frac{1}{k!}\right\| \leq M \qquad \forall\ \lambda > a\ ,\ k = 0,1,\ldots$$

Prueba: Tenemos que

$$\frac{(\lambda - A)^{-1}}{\lambda^{n+1}} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)\,dt \qquad y \qquad \limsup_{h \longrightarrow 0^+} \frac{1}{h}\|S(t+h) - S(t)\| \leq Me^{\omega t}$$

Sea $a_0 = \max\{\omega, 0\}$ y $a \geq a_0$ tal que $(a, +\infty) \subset \rho(A)$. Por la parte (b) del corolario 2.2-2, haciendo

$$\frac{(\lambda - A)^{-1}}{\lambda^n} = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}S(t)\,dt$$

tenemos $$\left\|(\lambda-\omega)^{k+1}\left[\frac{R(\lambda, A)}{\lambda^n}\right]^{(k)}\frac{1}{k!}\right\| \leq M \qquad \forall\ \lambda > a$$

el regreso es claro. □

Ahora supongamos que las condiciones equivalentes (3.21) y (3.22) se cumplen. Sea $F_1 = \left\{ x \in X\ :\ S(\cdot)x \in C^1([0,+\infty), X)\right\}$ y sea (x_n) una sucesión de puntos en F_1 tales que $x_n \longrightarrow x$ cuando $n \longrightarrow \infty$, entonces

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} - \frac{S(t+h)x_n - S(t)x_n}{h} \right\| =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\| \frac{S(t+h)(x-x_n) - S(t)(x-x_n)}{h} \right\|$$

$$\leq \lim_{h \to 0} \left\| \frac{S(t+h) - S(t)}{h} \right\| \|x - x_n\|$$

pero por (3.21) $\leq Me^{\omega t}\|x - x_n\|$

que tiende a cero conforme n tiende a infinito, así F_1 resulta ser un subespacio cerrado de X. Sea $F = \overline{\mathcal{D}(A)}$, tenemos entonces que $F \subset F_1$.

Prueba: Sea $x \in \mathcal{D}(A)$, por el lema 3.2-5 (3.17)

$$S(t)x = \frac{t^n}{n!} x + \int_0^t S(s)Ax\, ds$$

que es claramente derivable con respecto a t, como F_1 es cerrado y $\overline{\mathcal{D}(A)}$ es el mínimo cerrado que contiene a $\mathcal{D}(A)$ entonces $\overline{\mathcal{D}(A)} \subset F_1$□

Sea $x \in F$ y $T(t)x = \frac{d}{dt} S(t)x$ para toda $t \geq 0$, que tiene sentido por tener $F \subset F_1$[19], entonces $T(t)x \in F$.

Prueba: Como $x \in F$ tenemos que $S(t+h)x$, $S(t)x \in C^1([0,+\infty),X)$ y por el corolario 3.2-6 esto implica que $S(t+h)x$, $S(t)x \in \mathcal{D}(A)$. Como el dominio de A es un subespacio de E tenemos que

$$\frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} \in \mathcal{D}(A)$$

por lo que $$T(t)x = \lim_{h \to 0} \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} \in \overline{\mathcal{D}(A)} = F \qquad \square$$

Entonces obtenemos una familia fuertemente continua $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores lineales en F, i.e. $T(t) : F \longrightarrow F$ para toda $t \geq 0$. Se sigue de (3.21) que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ para toda $t \geq 0$.

Prueba: Veamos primero que es una familia fuertemente continua

$$\lim_{s \to 0} T(t+s) - T(s) = \lim_{s \to 0} \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[S(t+s+h)-S(t+s)-\left(S(t+h)-S(t)\right)\right]$$

---

[19]Claramente F_1 es subespacio pues $S(\cdot)0 = 0$ que es de clase C^1 y dados dos $x_1,x_2 \in F_1$ $S(t)(x_1+\lambda x_2) = S(t)x_1 + \lambda S(t)x_2$ por lo que $x_1 + x_2 \in F_1$.

$$= \lim_{h\to 0} \lim_{s\to 0} \frac{1}{h}\left[S(t+s+h)-S(t+h)-S(t+s)+S(t)\right] = 0$$

donde la última igualdad se obtiene a partir de que $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset B(X)$.

Finalmente $\|T(t)\| = \limsup_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\|S(t+h) - S(t)\| \leq Me^{\omega t}$ para $t \geq 0$. □

Sea A_F la parte de A en F, i.e. $A_F x = Ax$ para $x \in \left\{ x \in \mathcal{D}(A) \mid Ax \in F\right\}$ $= \mathcal{D}(A_F)$. Entonces $(a,+\infty) \subset \rho(A_F)$ e integrando una vez por partes

$$R(\lambda,A_F)x = \int_0^\infty \lambda^{n+1}e^{-\lambda t}S(t)x\,dt = \int_0^\infty \lambda^n e^{-\lambda t}T(t)x\,dt \qquad \forall\ \lambda > a\ ,\ x \in F$$

Hemos probado entonces el siguiente corolario.

3.3-2 Corolario. *Si* A *satisface las condiciones equivalentes del teorema* 3.3-1 *entonces la parte de* A *en* $\overline{\mathcal{D}(A)}$ *es el generador de un semigrupo* n *veces integrado.* □

En el caso en que $\mathcal{D}(A)$ sea denso en X, obtenemos la siguiente caracterización.

3.3-3 Teorema (de caracterización). *Sea* A *un operador densamente definido tal que* $(a,+\infty) \subset \rho(A)$ *para alguna* $a \geq 0$. *Sea* $n \in \mathbb{N}$, $M \geq 0$ *y* $\omega \in (-\infty,a]$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(a) A *genera un semigrupo* n *veces integrado* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *tal que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \qquad \forall\ t \geq 0$$

(b) $\left\|(\lambda-\omega)^{k+1}\left[\frac{R(\lambda,A)}{\lambda^n}\right]^{(k)}\frac{1}{k!}\right\| \leq M \qquad \forall\ \lambda > a\ ,\ k = 0,1,\ldots$

Prueba: Inmediata del teorema 3.3-1, el corolario 3.3-2 y del hecho de que $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$. □

Observación: El caso n = 0 es el teorema de Hille-Yosida.

CAPITULO 4

EL PROBLEMA DE CAUCHY

En este cuarto y último capítulo definimos y estudiamos el problema de Cauchy. En dicho estudio utilizaremos los resultados desarrollados principalmente en el capítulo tres. Finalmente retomamos los resultados del capítulo dos y revisamos el teorema de Hille-Yosida en espacios con la propiedad de Radon-Nikodym.

4.1 EL PROBLEMA DE CAUCHY

El problema Cauchy es un problema de valores iniciales que consiste en resolver una ecuación diferencial ordinaria de primer orden definida en términos de un operador, una función continua y un punto del espacio en cuestión. Como de costumbre, sea X un espacio de Banach.

4.1-1 Definición. Sea A un operador en X , $u_0 \in X$ y $\ell \in C([0,b],X)$ con $b > 0$. Por *una solución de*

$$P(u_0,\ell) = \begin{cases} u'(t) = Au(t) + \ell(t) & \forall\ t \in [0,b] \\ u\ (0) = u_0 \end{cases}$$

entendemos una función $u \in C^1([0,b],X)$ tal que $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ para toda t en $[0,b]$ y que $P(u_0,\ell)$ se cumple. □

Supongamos ahora que A es el generador de un semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ n veces integrado, donde $n \in \mathbb{N}$. Mostremos primero que a lo más existe una solución de $P(u_0,\ell)$. Consideremos la función $\nu \in C([0,b],X)$ dada por

(4.1) $$\nu(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(s)\ell(t-s)\,ds$$

4.1-2 Lema (Unicidad). *Si existe una solución* u *de* $P(u_0,\ell)$, *entonces* $\nu \in C^{n+1}([0,b],X)$ *y* $u = \nu^{(n)}$.

Prueba: Sea $0 \le t \le b$. Para $s \in [0,t]$ sea $w(s) = S(t-s)u(s)$. Como $u(s) \in \mathcal{D}(A)$ por hipótesis, obtenemos del lema 3.2-5 (3.17) que

$$S(t)x = \frac{t^n}{n!}x + \int_0^t S(s)Ax\,ds \qquad \forall\ x \in \mathcal{D}(A)$$

como $u(s) \in \mathcal{D}(A)$, de $w(s) = S(t-s)u(s)$ tenemos que

$$\begin{aligned} w'(s) &= S'(t-s)u(s) + S(t-s)u'(s) \\ &= -\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}u(s) - S(t-s)Au(s) + S(t-s)u'(s) \\ &= -\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}u(s) + S(t-s)\ell(s) \end{aligned}$$

para toda $s \in [0,t]$. Por otro lado, como w es solución de $P(u_0,\ell)$, también se cumple que

$$w(0) = S(t)u(0) = S(t)u_0 \quad y \quad -w(t) = -S(0)u(t) = -0u(t) = 0$$

de donde

$$\begin{aligned} S(t)u_0 &= w(0) - w(t) \\ &= -\int_0^t w'(s)\,ds \\ &= \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}u(s)\,ds - \int_0^t S(t-s)\ell(s)\,ds \\ &= \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}u(s)\,ds + \int_t^0 S(t-s)\ell(s)\,ds \\ &= \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}u(s)\,ds - \int_0^t S(s)\ell(t-s)\,ds^{[20]} \end{aligned}$$

---

[20] Hacemos el cambio de variable $u = t - s$, $du = -ds$ y finalmente volvemos a llamar s a u.

para toda $t \in [0,b]$. De esto y de (4.1) tenemos que

$$S(t)u_0 = \nu(t) - \int_0^t S(s)\ell(t-s)\,ds$$

$$S(t)u_0 = \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}u(s)\,ds - \int_0^t S(s)\ell(t-s)\,ds$$

restamos estas dos ecuaciones y obtenemos que

$$\nu(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}u(s)\,ds \qquad \square$$

Para mostrar que existe una solución basta probar que $\nu \in C^{n+1}[0,b]$, pues probaremos el siguiente

4.1-3 Teorema (Existencia). *Si* $\nu \in C^{n+1}[0,b]$ *entonces* $u = \nu^{(n)}$ *es una solución de* $P(u_0,\ell)$.

La prueba del teorema 4.1-3 esta basada en el siguiente lema.

Observación: No necesitaremos $u_0 \in \mathcal{D}(A)$. $\square$

4.1-4 Lema. *Para toda* $t \geq 0$ *se tiene que* $\int_0^t \nu(s)\,ds \in \mathcal{D}(A)$ *y*

(4.2) $$A\int_0^t \nu(s)\,ds = \nu(t) - \frac{t^n}{n!}u_0 - \int_0^t \frac{(t-r)^n}{n!}\ell(r)\,dr \qquad \forall\ t \in [0,b]$$

Prueba: Por el teorema de Fubini tenemos

$$\int_0^t\int_0^r S(s)\ell(r-s)\,dsdr = \int_0^t\int_s^t S(s)\ell(r-s)\,drds$$

$$= \int_0^t\int_0^{t-s} S(s)\ell(r)\,drds$$

$$= \int_0^t\int_0^{t-r} S(s)\ell(r)\,dsdr$$

Por otro lado, si integramos ambos lados de la ecuación (4.1) con respecto a t y utilizamos la observación anterior obtenemos

(4.3) $$\int_0^t \nu(s)\,ds = \int_0^t S(s)u_0\,ds + \int_0^t\int_0^r S(s)\ell(r-s)\,dsdr$$

$$= \int_0^t S(s)u_0\,ds + \int_0^t\int_0^{t-r} S(s)\ell(r)\,dsdr$$

Por el lema 3.2-5 tenemos que los dos términos del miembro derecho de

(4.3) están en $\mathcal{D}(A)$, por lo que $\int_0^t \nu(s)\, ds \in \mathcal{D}(A)$. Podemos entonces aplicar A de ambos lados de la ecuación (4.3) y utilizando (3.18)

$$A\int_0^t \nu(s)\, ds = A\int_0^t S(s)u_0\, ds + \int_0^t A\int_0^{t-r} S(s)\ell(r)\, dsdr$$

$$= S(t)u_0 - \frac{t^n}{n!}u_0 + \int_0^t \left(S(t-r)\ell(r) - \frac{(t-r)^n}{n!}\ell(r)\right)dr$$

O lo que es lo mismo

$$A\int_0^t \nu(s)\, ds = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-r)\ell(r)\, dr - \frac{t^n}{n!}u_0 - \int_0^t \frac{(t-r)^n}{n!}\ell(r)\, dr$$

$$= S(t)u_0 + \int_0^t S(r)\ell(t-r)\, dr - \frac{t^n}{n!}u_0 - \int_0^t \frac{(t-r)^n}{n!}\ell(r)\, dr$$

De donde utilizando (4.1) obtenemos (4.2). □

Probemos el teorema 4.1-3.

Prueba: Supongamos que $\nu \in C^{n+1}[0,b]$. Como A es cerrado, podemos diferenciar (4.2) n+1 veces y obtener

(4.4) $$A\nu^{(k)}(t) = \nu^{(k+1)}(t) - \frac{t^{n-k-1}}{(n-k-1)!}u_0 - \int_0^t \frac{(t-r)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}\ell(r)\, dr$$

para $k = 0,\dots,n-1$ y $\nu^{(n)}(t) \in \mathcal{D}(A)$ y

(4.5) $$A\nu^{(n)}(t) = \nu^{(n+1)}(t) - \ell(t) \qquad \forall\ t \in [0,b]$$

de donde si hacemos $u := \nu^{(n)}$, u cumple la ecuación diferencial:

$$Au(t) = u'(t) - \ell(t) \text{ o equivalentemente } u'(t) = Au(t) + \ell(t)$$

para $t \in [0,b]$. Más aún, si $n = 0$ entonces por (3.17) tenemos que $S(0)$ es la identidad en $\mathcal{D}(A)$ y para $t = 0$

$$u(0) = \nu(0) = S(0)u_0 + \int_0^0 S(r)\ell(0-r)\, dr = u_0$$

Si $n > 0$ entonces, nuevamente por (3.17), tenemos que $S(0) = 0$ y $\nu(0) = 0$. Se sigue de (4.4) que $\nu^{(k)}(0) = 0$ para $k < n$, y para $k = n-1$ se tiene $\nu^{(n)}(0) = u_0 + A\nu^{(n-1)}(0) = u_0$. Veamoslo:

$$0 = A\nu^{(0)}(0) = \nu^{(1)}(0)$$

$$\vdots$$

$$A\nu^{(k)}(0) = \nu^{(k+1)}(0) = 0 \text{ si } k \le n - 1$$

de donde para $k = n - 1$ en (4.4) tenemos

$$0 = A\nu^{(n-1)}(t) = \nu^{(n)}(t) - \frac{t^0}{0!}u_0 - \int_0^t \frac{(t-r)^0}{0!}\ell(r)\,dr$$

de donde $\nu^{(n)}(0) = u_0$. Por lo tanto $u(0) = u_0$ en cualquier caso. □

Ahora veamos que la siguiente condición en ℓ y u_0 es suficiente para la existencia de una solución de $P(u_0,\ell)$ (y por lo tanto única).

4.1-5 Teorema (Solución de $P(u_0,\ell)$). *Si* $\ell \in C^{n+1}([0,b],X)$ *y* $u_0 \in \mathcal{D}(A)$,

$$u_1 := Au_0 + \ell(0) \in \mathcal{D}(A),\ u_2 := Au_1 + \ell'(0) \in \mathcal{D}(A),\ \ldots$$

$$\ldots,\ u_{k+1} := Au_k + \ell^{(k)}(0) \in \mathcal{D}(A),\ \ldots,\ u_n := Au_{n-1} + \ell^{(n)}(0) \in \mathcal{D}(A)$$

entonces $P(u_0,\ell)$ *tiene una solución única.*

Prueba: Tenemos que $\nu(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(r)\ell(t-r)\,dr$, como $S(t)u_0$ esta en $\mathcal{D}(A)$ podemos usar (3.17), así $S(t)u_0 = \frac{t^n}{n!}u_0 + \int_0^t S(r)Au_0\,dr$ de donde sustituyendo en la expresión para $\nu(t)$ tenemos que

$$\nu(t) = \frac{t^n}{n!}u_0 + \int_0^t S(r)Au_0\,dr + \int_0^t S(r)\ell(t-r)\,dr$$

por lo que podemos derivar $\nu(t)$ con respecto a t, i.e. $\nu \in C^1$ y

$$\nu'(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u_0 + S(t)Au_0 + S(t)\ell(0) + \int_0^t S(r)\ell'(t-r)\,dr$$

Utilicemos la hipótesis de que $Au_0 + \ell(0) \in \mathcal{D}(A)$ para probar ahora que $\nu \in C^2$:

$$\nu'(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u_0 + S(t)\Big(Au_0 + \ell(0)\Big) + \int_0^t S(r)\ell'(t-r)\,dr$$

como $Au_0 + \ell(0) \in \mathcal{D}(A)$ por (3.17) tenemos que

$$S(t)\Big(Au_0 + \ell(0)\Big) = \frac{t^n}{n!}\Big(Au_0 + \ell(0)\Big) + \int_0^t S(r)A\Big(Au_0 + \ell(0)\Big)\,dr$$

y entonces

$$\nu'(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u_0 + \frac{t^n}{n!}\Big(Au_0 + \ell(0)\Big) + \int_0^t S(r)A\Big(Au_0 + \ell(0)\Big)\,dr +$$

$$+\int_0^t S(r)\ell'(t-r)\,dr$$

de donde $\nu \in C^2$ y $\nu'' = \ldots$ etc.

Repitiendo este argumento llegamos a que $\nu \in C^{n+1}[0,b]$ y el resultado se sigue del teorema 4.1-3 y del lema 4.1-2. □

4.2 El teorema de Hille-Yosida y la propiedad de Radon-Nikodym

4.2-1 Teorema (W. Arendt). *Sea* X *un espacio de Banach con la propiedad de Radon-Nikodym. Sea* A *un operador, no densamente definido*[21]*, en* X *tal que* $(a,+\infty) \subset \rho(A)$ *para alguna* $a \geq 0$ *tal que* $\left\|\frac{\lambda^{k+1}}{k!}R(\lambda,A)\right\| \leq M$ *para alguna* $M \geq 0$, *para toda* $\lambda > a$ *y para toda* $k = 0,1,2,\ldots$

Entonces existe un semigrupo $\{T(t)\}_{t>0}$ *que es fuertemente continuo para* $t > 0$ *y satisface* $\|T(t)\| \leq M$ *para toda* $t > 0$ *tal que*

$$R(\lambda,A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)\,dt \qquad \forall\ \lambda > a \tag{4.6}$$

Más aún, el semigrupo integrado una vez $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *generado por* A *esta dado por*

$$S(t) = \int_0^t T(s)\,ds \tag{4.7}$$

Observaciones:

(1) Las integrales (4.6) y (4.7) deben de entenderse fuertemente, como integrales de Bochner o equivalentemente como integrales de Riemann que son impropias en 0 y en $+\infty$ para (4.6) y en 0 para (4.7).

(2) Tenemos que $\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x$ si y solo si $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$. De hecho, si $\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x$, entonces $\left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} S(t)x = x$ que implica $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$.

---

[21] Es decir que $\overline{\mathcal{D}(A)}$ no necesariamente es X.

(c.f. corolario 3.2-6 y teorema 3.3-1). El regreso lo obtenemos del hecho de que $\{T(t)|_F\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo de clase C_0 en $F = \overline{\mathcal{D}(A)}$.□

Para la prueba necesitamos el siguiente lema:

4.2-2 Lema. *Sea* $a > 0$ *y* $N \subset (0,a]$ *un conjunto de medida cero tal que* $s,t \notin N$ $s + t \leq a$ *implican que* $s + t \notin N$. *Entonces* $N = \emptyset$.

Prueba: Supongamos que existe $b \in N$. Sin péridida de generalidad podemos suponer que $b = a$; pues si $b = \sup N$ claramente $N \subset (0,b]$, si no, sea $N_s = N \cup \{\sup N\}$, claramente $N \subset N_s$ y ahora $N \subset (0,\sup N]$ hagamos $b = \sup N$ y probemos que $N_s = \emptyset$.

Sea $x \in (0,a] \setminus N_s$. Si $a - x \notin N_s$, $x + a - x = a \notin N_s$ que es una contradicción con la suposición de que $a \in N_s$ por lo que $a - x \in N_s$. Tenemos entonces que $x \in (0,a]$ implica que $a - x \in N_s$ o lo que es lo mismo que $-x \in -a + N_s$ que equivale a que $x \in a - N_s$ de donde $(0,a]$ esta incluido en $a - N_s$, i.e. $(0,a] \subset a - N_s$. Así, tenemos que

$$(0,a] = \Big((0,a] \setminus N_s \cup N_s\Big) \subset (a - N_s) \cup N_s \tag{4.8}$$

que es una contradiccion con el hecho de que $\mu(N_s) = 0$ pues (4.8) implica que $a = \mu\Big((0,a]\Big) \leq \mu\Big((a - N_s) \cup N_s\Big) = 0$ y $a > 0$. Así $N_s = \emptyset$.□

Prueba del teorema 4.2-1: Por el teorema 3.3-1 existe un semigrupo integrado fuertemente continuo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ que cumple con

$$\|S(t) - S(s)\| \leq M|t - s| \tag{4.9}$$

tal que
$$R(\lambda,A) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} S(t)\, dt \qquad \forall\ \lambda > a$$

para alguna $M \geq 0$ y para toda s , $t > 0$. Mostraremos que $S(t)x$ es continuamente diferenciable para toda $t > 0$ y toda $x \in X$.

Sea $x \in X$. Consideremos $X_0 = \overline{\mathcal{V}(\{S(t)x \mid t\geq 0\})}$[22]. Veamos que X_0 es

---

[22]$\mathcal{V}(E)$ es el espacio vectorial generado por $E \subset X$ sobre el campo de X.

separable. Consideremos el conjunto $G = \{S(q)x \mid q\in\mathbb{Q}^+\}$ y sea $\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}(G)$ el espacio vectorial generado por G sobre $\mathbb{Q}$[23]. Sea $y \in X_0$ entonces existe una sucesión $(y_n) \subset \mathcal{V}(\{S(t)x \mid t\geq 0\})$ tal que $y_n \longrightarrow y$ cuando $n \longrightarrow \infty$, para cada y_n existe una sucesión $(z^n_m) \subset \mathcal{V}_{\mathbb{Q}}(G)$ tal que $z^n_m \longrightarrow y_n$ cuando $m \longrightarrow \infty$, entonces tenemos que $z^s_s \longrightarrow y$ cuando $s \longrightarrow \infty$ por lo que $y \in \overline{\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}(G)}$ pero como y fue un elemento arbitrario de X_0 tenemos que $X_0 \subset \overline{\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}(G)}$ pero $\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}(G) \subset \mathcal{V}(\{S(t)x \mid t\geq 0\})$ de donde $X_0 = \overline{\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}(G)}$. Basta hacer notar que $|\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}(G)| = \aleph_0$, así X_0 es separable. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un conjunto total en X_0. Como X_0 tiene la propiedad de Radon-Nikodym el conjunto

$$N = \left\{ t \in [0,+\infty) \mid S(\cdot)x_n \text{ no es diferenciable en } t \text{ p.a. } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

tiene medida cero. Veamoslo: Como X_0 es a su vez un espacio de Banach, el teorema 2.3-4 nos asegura que el conjunto

$$N^n_m = \left\{ t \in [0,m] \mid S(\cdot)x_n \text{ no es diferenciable en } t \right\}$$

tiene medida cero pues (4.9) nos dice precisamente que $S(\cdot)x_n$ es Lipschitz continua[24]. Sea $N_m = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N^n_m$, como N_m es una unión numerable de conjuntos de medida cero $\mu(N_m) = 0$. Finalmente solo hay que hacer notar que $N = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} N_m$ y por el mismo argumento $\mu(N) = 0$.

Para $t \notin N$ sea $T_0(t)y = \left(\frac{d}{dr}\right)_{r=t} S(r)y$ para toda $y \in X_0$. Claramente la

---

[23] Si X es un espacio complejo consideremos entonces los complejos cuya parte real e imaginaria son racionales.

[24] El teorema 2.3-4 habla de una función f del $[0,1]$ en un espacio de Banach, pero lo relevante es que va de un compacto en un espacio de Banach. Considérese la función $g(t) = m\cdot t$ y la composición $f\circ g(t)$. Si dicha composición es derivable entonces $f'(t) = \frac{1}{m}(f\circ g)'(m^{-1}t)$.

aplicación $y \longmapsto T_0(t)y$ define un operador lineal $T_0(t)$ en X_0 que cumple, por (4.9), $\|T_0(t)\| \le M$ para toda $t \notin N$. Afirmamos que

(4.10) $$s,t \notin N \text{ implican } s+t \notin N \text{ y}$$

$$T_0(s+t)y = T_0(s)T_0(t)y \qquad \forall\, y \in E_0$$

De hecho, por el teorema 3.2-2 tomando $n = 1$ y $\omega = 0$, tenemos que

$$S(s)S(t) = \frac{1}{(1-1)!}\left[\int_s^{t+s} S(r)\,dr - \int_0^t S(r)\,dr\right]$$
$$= \int_0^{t+s} S(r)\,dr - \int_0^s S(r)\,dr - \int_0^t S(r)\,dr$$

Diferenciando con respecto a t obtenemos

$$S(s)T_0(t)y = S(s+t)y - S(t)y \qquad \forall\, t \notin N\,,\; y \in X_0$$

por lo que para $t \notin N$ y $y \in X_0$

$$S(r+t)y = S(r)T_0(t)y + S(t)y$$

es diferenciable en $r = s$ cuando $s \notin N$ y

$$\left(\frac{d}{dr}\right)_{r=s+t} S(r)y = T_0(s)T_0(t)y \qquad \forall\, s,t \notin N\,,\; y \in X_0$$

Por lo que (4.10) se cumple. Se sigue del lema 4.2.2 que $N \subset \{0\}$. Como $x \in X$ fue arbitrario, tenemos que $S(t)x$ es diferenciable en toda $t > 0$ para toda $x \in X$ y que $T(t)x = \left(\frac{d}{dr}\right)_{r=t} S(r)x$ define un semigrupo $\{T(t)\}_{t>0}$ en X. Por (4.9) $\|T(t)\| \le M$[25] y $S(t)x = \int_0^t T(s)x\,ds$ para $x \in X$ y $t \ge 0$. Por lo que, integrando por partes, tenemos finalmente

$$R(\lambda,A)x = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} S(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\,dt \qquad \forall\, \lambda > a \qquad \square$$

---

[25] Se puede probar que $\{T(t)\}_{t>0}$ es fuertemente continuo.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

[1] Arendt, W. (1987), *Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems.* Israel Journal of Mathematics **59**, 327-352

[2] Bosch, C. y Fernández, E. (1989), *Análisis Funcional 1.* Monografías del Instituto de Matemáticas. México: UNAM

[3] Brezis, H. (1973), *Operateurs Maximaux Monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert.* Amsterdam: North-Holland Publishing Company

[4] Diestel, J. y Uhl, J.J. (1977), *Vector Measures.* Providence, Rhode Island: American Mathematical Society

[5] Ethier, S. N. y Kurtz, T. G. (1986), *Markov Processes, Characterization and Convergence.* New York: Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, John Wiley & Sons

[6] Friedman, A. (1982), *Foundations of Modern Analysis.* New York: Dover Publications Inc.

[7] Kreyszig, E. (1978), *Introductory Functional Analysis with Applications.* Wiley Classics Library Edition 1989. New York: John Wiley & Sons

[8] Köthe, G. (1979), *Topological Vector Spaces I.* Berlin: Springer Verlag

[9] Medina, J. (1991), *La integral de Bochner y la propiedad de Radon-Nikodym.* Facultad de Ciencias. Tesis profesional. México: UNAM

[10] Miyadera, I. (1952), *On the representation theorem by the Laplace transformation of vector-valued functions.* Tôhoku Mathematical Journal **8**, 170-180

[11] Royden, H. L. (1968), *Real Analysis.* 2nd edition. London: The Macmillan Company

[12] Widder, D. V. (1971), *An introduction to Transform Theory.* New York: Academic Press

[13] Widder, D. V. (1934), *The inversion of the Laplace integral and the related moment problem.* Transactions of the American Mathematical Society **36**, 107-200

[14] Yosida, K. (1975), *Functional Analysis.* 3rd edition. Berlin: Springer Verlag