

14
2e;



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Facultad de Ciencias

TEORÍA DE LOS OSCILADORES Y
ALGUNAS DE SUS APLICACIONES

T E S I S

Que para obtener el grado de Licenciado
de la Carrera de Matemáticas

P r e s e n t a :

Rafael Herrera Guzmán

México, D.F.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Agosto de 1993



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Indice

Introducción	i
Capítulo 1. Teoría de los Osciladores Lineales	1
1. Notación y algunos preliminares	2
2. Osciladores lineales	9
3. Sistemas Lineales Degenerados	21
4. Esferas de Bendixson y de Poincaré	24
Capítulo 2. Teoría de los Osciladores No Lineales	36
1. Sistemas conservativos	36
2. Sistemas no conservativos	54
3. Oscilaciones de relajación	64
4. Sistemas sin ciclos límite	71
Capítulo 3. Oscilaciones Forzadas	74
1. Sistemas no autónomos	74
2. Ecuación de Cartwright-Littlewood	81
3. Existencia de una órbita periódica	90
Apéndice A.	98
1. Teoremas del capítulo 1	98
2. Teoremas del capítulo 2	102
3. Teoremas del capítulo 3	102
Apéndice B.	103
Acerca de los periodos de las órbitas de un centro no lineal	103
Bibliografía	107
Lista de los símbolos más usados	108

Introducción

Dentro del estudio de la electrotecnia, de los sistemas mecánicos, de los biológicos, etc., aparecen frecuentemente patrones de comportamiento periódicos, es decir, que se repiten una y otra vez al transcurrir cierto lapso, a los cuales se les aplica el nombre de *oscilaciones* y al sistema que los presenta, *oscilador*; para modelarlos y analizarlos matemáticamente contamos con las teorías de las ecuaciones diferenciales ordinarias y de los sistemas dinámicos, y ya que de las propiedades (dinámicas) del sistema de ecuaciones diferenciales que describe al fenómeno se verifican y en ocasiones se predicen propiedades de este último, identificaremos al sistema de ecuaciones con el oscilador mismo.

Tiene sentido e importancia modelar de manera matemática un oscilador (y en general cualquier fenómeno susceptible de ser modelado matemáticamente) porque los resultados del análisis del comportamiento del modelo nos ayudan a conocer y comprender propiedades del fenómeno, ya sea que conozcamos las leyes que lo gobiernan y querramos conocer características cualitativas (o cuantitativas dependiendo del tipo de modelo) que la ley no expresa, o que no conozcamos tales leyes y por medio del modelo matemático podamos inferir dichas propiedades que nos conduzcan a formular hipótesis plausibles acerca del fenómeno.

En este primer encuentro con los osciladores estudiaremos sistemas descritos por una ecuación diferencial de segundo orden, de las que nos interesa estudiar el comportamiento de sus soluciones, es decir, en esta tesis estudiamos los osciladores desde un punto de vista matemático (cualitativo) y las conclusiones que obtenemos en este sentido las aplicamos en algunos ejemplos físicos.

Nuestro objetivo es introducir al lector al estudio de los osciladores descritos por sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias utilizando algunos elementos de la teoría de los sistemas dinámicos. Los tipos de osciladores que desarrollamos son básicos en este tema. El material expuesto en los capítulos 1 y 2 fue extraído en su mayoría del estudio clásico de las oscilaciones de A. A. Andronov y S. E. Chaikin: *Theory of Oscillations*, el cual hemos procurado actualizar en algunas partes de su contenido simplificando el análisis de las ecuaciones diferenciales; el contenido del capítulo 3 fue extraído de el artículo *Forced Oscillations in Non-Linear Systems* de Mary Cartwright y del capítulo XI del libro *Differential Equations: Geometric Theory* de S. Lefschetz.

Introducción

De manera precisa, consideremos la siguiente ecuación

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}, t, \mu) = 0 \quad (1)$$

donde usualmente t representa al tiempo, x la posición con respecto al tiempo, μ es un parámetro (no depende de t) del que depende el sistema y $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$; así, nos interesa encontrar las soluciones $x(t)$ de (1) que sean periódicas con respecto al tiempo.

En el capítulo 1 aparece una lista de algunos conceptos y teoremas de los sistemas dinámicos que utilizamos a lo largo del texto, exponemos las propiedades y algunas aplicaciones de los osciladores lineales

$$m\ddot{x} + 2h\dot{x} + kx = 0,$$

estudiamos una manera de aproximar las soluciones de los osciladores lineales cuando la masa es despreciable ($m \approx 0$) y finalmente exponemos un método para completar el *retrato fase* de algunos sistemas dinámicos en el plano por medio de proyecciones estereográficas en las esferas de Poincaré y de Bendixson.

En el capítulo 2 estudiamos las oscilaciones no lineales presentes en los sistemas conservativos (las que aparecen alrededor de *centros*) y en los sistemas no conservativos (las que aparecen como *ciclos límite*) tanto *dissipativos* como *autosicilantes*

$$m\ddot{x} + kx = \phi(\dot{x});$$

así también, estudiamos las oscilaciones de relajación presentes en los sistemas no conservativos autosicilantes donde la masa es despreciable ($m \approx 0$) y por último un ejemplo de un sistema que no presenta oscilaciones.

En el capítulo 3 abordamos el problema de las oscilaciones forzadas en los osciladores del siguiente tipo

$$\ddot{x} + \mu f(x)\dot{x} + g(x) = \mu e(t)$$

que dependen de un parámetro μ y que fueron estudiados ampliamente por dos matemáticos ingleses: Mary Cartwright y J. E. Littlewood. Enunciamos algunas propiedades comunes a todos los sistemas forzados y la existencia de soluciones para ellos; también exhibimos la existencia de una órbita periódica del sistema cuando f y g cumplen ciertas hipótesis y finalizamos estudiando las propiedades estables de dicha órbita.

Los apéndices están constituidos por las demostraciones de algunos de los teoremas utilizados en el texto y que fueron demostrados como ejercicios a lo largo de la preparación del trabajo.

Este trabajo forma parte del proyecto "Sincronización de los Sistemas Circadianos" apoyado por la DGAPA, clave IN-202292, y fue realizado bajo la dirección del M. en C. Miguel Lara Aparicio, con el apoyo de una beca de la Facultad de Ciencias, UNAM, y una beca de lugar del Instituto de Matemáticas, UNAM. Agradecemos las valiosas sugerencias de los profesores Santiago López de Medrano, José Antonio Gómez Ortega, León Kushner Schnur y Angel M. Carrillo, que amable y cuidadosamente revisaron este trabajo.

Capítulo 1

Teoría de los Osciladores Lineales

Consideremos la siguiente ecuación:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}, t, \mu) = 0 \quad (1)$$

donde x pertenece a un intervalo abierto U de \mathbf{R} , t es elemento de \mathbf{R} , y μ está en un intervalo abierto V de \mathbf{R} ; f es una función de $U \times U \times \mathbf{R} \times V$ en \mathbf{R} y \dot{x} significa derivar con respecto a t , es decir, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. Usualmente t representa al tiempo, x la posición con respecto al tiempo, y μ es un parámetro (no depende de t) del que depende el sistema.

Por una solución de (1) entenderemos una función derivable de un intervalo $I \subseteq \mathbf{R}$ en \mathbf{R}

$$x: I \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$t \mapsto x(t)$$

tal que satisface (1), es decir,

$$\ddot{x}(t) + f(x(t), \dot{x}(t), t, \mu) = 0$$

para un valor dado de μ .

Este sistema descrito por una sola ecuación diferencial de segundo orden podemos escribirlo en forma equivalente a un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden como sigue

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -f(x, y, t, \mu) \end{aligned} \quad (1a)$$

que es un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden con un parámetro real μ , donde (x, y) es un elemento de \mathbf{R}^2 .

Inversamente, un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, y, t, \mu) & (a) \\ \dot{y} &= G(x, y, t, \mu) & (b) \end{aligned} \quad (2)$$

en el que a la pareja (F, G) le llamamos *campo vectorial* (donde F y G son funciones con valores reales continuamente diferenciables, y x, y, t, μ son como antes), es equivalente bajo ciertas condiciones a un sistema de una ecuación diferencial de segundo orden como (1).

Supongamos que $F(x, y, t, \mu)$ es derivable con respecto a (x, y, t) . Al derivar con respecto a t la ecuación (2a) obtenemos

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

y así

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} - \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} - \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

Cuando se puede "despejar" a y de la ecuación (2a)

$$y = H(x, \dot{x}, t, \mu)$$

y al sustituirla en (3), obtenemos

$$\ddot{x} + J(x, \dot{x}, t, \mu) = 0 \quad \left(\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} \right)$$

una ecuación diferencial de segundo orden, donde

$$J(x, \dot{x}, t, \mu) = \left(-\frac{\partial F}{\partial x} F - \frac{\partial F}{\partial y} G - \frac{\partial F}{\partial t} \right) \Big|_{(x, H(x, \dot{x}, t, \mu), t, \mu)}.$$

Cabe mencionar que en muchos casos podremos realizar tales operaciones de derivación y "despeje". Debido a esto, estudiaremos las propiedades de los sistemas del tipo (1) por medio de las propiedades de un sistema del tipo (2).

1. Notación y Algunos Preliminares

Con base en las observaciones anteriores, consideremos sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden en varias variables

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \mu) \quad (4)$$

donde $\mathbf{x} \in U$ subconjunto abierto de \mathbf{R}^n , $t \in \mathbf{R}$, $\mu \in V$ subconjunto abierto de \mathbf{R}^p (n y p enteros positivos), $\mathbf{f}: U \times \mathbf{R} \times V \rightarrow \mathbf{R}^n$ es una función de clase C^1 que denominamos *campo vectorial* (como llamamos en (2) a (F, G)); y μ es un parámetro del que depende el sistema.

Entenderemos por una *solución* de (4) una función derivable de un intervalo $I \subseteq \mathbf{R}$ en U

$$\mathbf{x}: I \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$$

$$t \mapsto \mathbf{x}(t)$$

tal que

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t, \mu)$$

dado un valor de μ y por una *solución del problema con valor inicial*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \mu_0) \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (5)$$

donde $\mathbf{x}_0 \in U$, $t_0 \in \mathbf{R}$ y $\mu_0 \in V$ un valor de parámetro, una función derivable

$$\mathbf{x}: I \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$$

$$t \mapsto \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, \mu_0)$$

tal que

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t, \mu_0) \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

Por simplicidad supondremos que $t_0 = 0$. La función \mathbf{x} es una curva tal que el vector tangente a ésta en el tiempo t está dado por $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t, \mu)$, para un valor fijo del parámetro μ .

En el caso en que \mathbf{f} no depende explícitamente del tiempo t , para un valor fijo $\mu = \mu_0$, decimos que (4) es un sistema *autónomo*, y en el caso contrario, que es un sistema *no autónomo*. Al espacio de puntos $\mathbf{x} \in U$, lo denominamos *espacio fase* de (4) (respectivamente de (1) cuando tiene la forma (1a)), y al espacio de puntos $(t, \mathbf{x}) \in \mathbf{R} \times U$, *espacio fase extendido* de (4) (respectivamente de (1)). Si $\mathbf{x}(t)$ es una solución de (4), a la curva cuya representación paramétrica es $\mathbf{x}(t)$ y cuya imagen está en el espacio fase le llamamos *curva fase*; a la gráfica de una curva fase $\mathbf{x}(t)$ en el espacio fase extendido (o sea, el conjunto de puntos $\{(u, \mathbf{v}) \in \mathbf{R} \times U : (u, \mathbf{v}) = (t, \mathbf{x}(t)), \text{ para alguna } t \in \mathbf{R}\}$), le llamamos *curva integral*. En nuestro caso, un oscilador de tipo (1), queremos estudiar el comportamiento de las soluciones de (1a) para, a su vez, comprender el comportamiento de las soluciones de (1) en su espacio fase. Al espacio fase junto con todas las imágenes de las curvas fase le llamamos *retrato fase* de (4) (respectivamente de (1)). Como ejemplo, consideremos el siguiente dibujo en el plano (t, x) (Figura 1), correspondiente a la gráfica de la solución de la ecuación diferencial $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$ con valores iniciales $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$

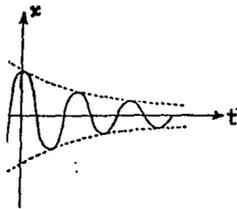


Figura 1.

La imagen en \mathbf{R}^2 de la curva fase correspondiente (respectivamente la imagen de la solución de (1a)) está dibujada en la figura 2.

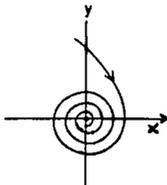


Figura 2.

Y la curva integral correspondiente en $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$ (respectivamente la gráfica de la solución de (1a)) está dibujada en la figura 3.

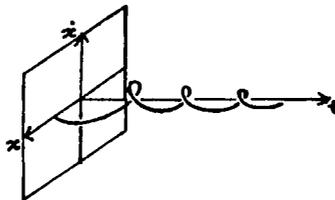


Figura 3.

Ahora estableceremos sin demostración algunos teoremas de importancia para nuestro desarrollo (vea [P]). Utilizamos el símbolo $B_r(\mathbf{z})$ para denotar la bola abierta en \mathbf{R}^n de radio r centrada en $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^n$, con la correspondiente distancia de \mathbf{R}^n para cada entero positivo n .

Teorema 1. (Teorema fundamental de existencia y unicidad de soluciones). Sean U un subconjunto abierto de \mathbf{R}^n que contiene a \mathbf{x}_0 , V un subconjunto abierto de \mathbf{R}^p que contiene a μ_0 (n y p enteros positivos), $\mathbf{f} \in \mathcal{C}(U \times \mathbf{R} \times V, U)$,¹ y supongamos que $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}$, $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mu}$ son continuas. Entonces existen $a > 0$ y $\delta > 0$ tales que para toda $\mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x}_0)$ y para toda $\mu \in B_\delta(\mu_0)$, el problema con valor inicial (5) tiene una única solución $\mathbf{u}(\mathbf{y}, t, \mu)$, donde $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^1([-a, a] \times B_\delta(\mathbf{x}_0) \times B_\delta(\mu_0))$.

Demostración. Vea el apéndice A. ■

¹ $\mathcal{C}^k(A, B) = \{\mathbf{f}: A \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}^m : \text{las derivadas } D^i \mathbf{f} \text{ son continuas para toda } 0 \leq i \leq k\}$ ($n, m \in \mathbf{Z}, n, m \geq 0$). En particular $\mathcal{C}^0(A, B)$ lo denotamos $\mathcal{C}(A, B)$.

De hecho, sólo necesitamos que f sea *localmente Lipschitz* (en las variables apropiadas), es decir, $|f(y, t, \mu) - f(x, t, \mu)| \leq K|y - x|$ para alguna $K > 0$ finita, y para cualesquiera x, y y elementos de U , donde K es llamada la *constante de Lipschitz* para f .

Para cada condición inicial $(x_0, \mu_0) \in U \times V$, del teorema 1 se deduce que existe una solución de (5) que toma el valor x_0 en el tiempo $t = 0$, que posee un intervalo de definición que depende del tamaño de la constante de Lipschitz de f ; la unión de todos los posibles intervalos de definición es el intervalo máximo de definición $I(x_0, \mu_0)$ de la solución, que por unicidad podemos considerar definida sobre todo el intervalo. Cuando $\mu = \mu_0$ es un valor fijo, sin ambigüedad denotamos al intervalo maximal por $I(x_0)$. Del teorema 1 y del hecho de que los intervalos máximos de existencia de las soluciones son abiertos, para cada $\mu \in V$, se infiere que el conjunto $W_\mu = \{(t, x) \in \mathbf{R} \times U : t \in I(x, \mu)\}$ es un abierto de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$.

Definición. Sean U, V, x_0, μ_0 y f como en el teorema 1 y supongamos además que f no depende de t . Sea $\phi(t, x_0, \mu_0)$ la solución del problema (5) con valor inicial x_0 definida en su intervalo máximo de existencia $I(x_0, \mu_0)$. Al conjunto de transformaciones

$$\phi_t^{\mu_0}: U \rightarrow U$$

dadas por

$$\phi_t^{\mu_0}(x) = \phi(t, x, \mu_0)$$

le llamamos *el flujo* de la ecuación diferencial (4) (con $\mu = \mu_0$) o *el flujo del campo vectorial* f .

Ejemplo 1. Considere el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

cuya solución es

$$\phi_t(c_1, c_2) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 e^t \end{pmatrix}$$

donde $(c_1, c_2) \in \mathbf{R}^2$. Para comprender la acción de ϕ_t en U vea la figura 4.

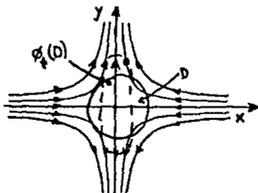


Figura 4. Punto silla.

Del mismo teorema 1 sabemos que para cada dos valores fijos μ y t , $\phi_t^\mu \in C^1(U, U)$ y además tiene las propiedades enunciadas en el teorema siguiente.

Teorema 2 ([P], pág. 96). Sean U, V y f como en el teorema 1, supongamos que f no depende de t y sea $\phi_t^{\mu_0}$ el flujo definido por (5) para el valor de $\mu = \mu_0$ (que denotamos por simplicidad por ϕ_t). Entonces el flujo cumple con las siguientes propiedades:

- (i) $\phi_0(x) = x$ para toda $x \in U$.
- (ii) Si $t \in I(x)$ y $s \in I(\phi_t(x))$, entonces $s + t \in I(x)$ y $\phi_{s+t}(x) = \phi_s(\phi_t(x))$.
- (iii) Existe una vecindad A de x tal que $t \times A \subseteq W_{\mu_0}$ y entonces $B = \phi_t(A)$ es abierto en U y

$$\phi_{-t}(\phi_t(x)) = x$$

para toda $x \in A$ y

$$\phi_t(\phi_{-t}(y)) = y$$

para toda $y \in B$. De este modo ϕ_t es un difeomorfismo.

- (iv) ϕ_t es un difeomorfismo que preserva orientación.

Los puntos de equilibrio, también llamados puntos fijos o ceros de (5), son una clase importante de las soluciones de una ecuación diferencial. Un punto de equilibrio \bar{x} es aquél en el que $f(\bar{x})=0$. Decimos que un punto de equilibrio \bar{x} es *estable* si para toda vecindad A de \bar{x} en U existe una vecindad $A_1 \subseteq A$, tal que toda solución $x(t, x_0, \mu_0)$ donde $x_0 \in A_1$ está definida y permanece en A para toda $t > 0$. Si además $x(t) \rightarrow \bar{x}$ cuando $t \rightarrow \infty$, decimos que \bar{x} es *asintóticamente estable*. Un punto fijo \bar{x} es *inestable* si no es estable (Figura 5).

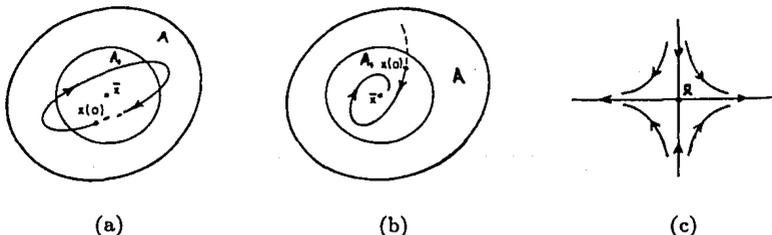


Figura 5. Un punto crítico: (a) estable, (b) asintóticamente estable, (c) inestable.

Ya que el desarrollo de Taylor de primer orden de f en la variable x alrededor del 0 es

$$f(x, \mu) = A_\mu x + R_2(x, \mu), \quad A_\mu = Df(0, \mu) \quad \text{y} \quad R_2 = O(x^2),$$

donde A_μ es la matriz derivada de f en el punto $(0, \mu)$ (ya que hemos trasladado el punto de equilibrio \bar{x} al 0) y $f(0, \mu) = 0$. Así, el sistema

$$\dot{y} = A_\mu y \quad (y \in \mathbb{R}^n = T_0\mathbb{R}^n) \tag{4a}$$

es llamado la linealización de (4).² Conociendo la solución del sistema lineal podemos analizar algunas propiedades de las soluciones de (4). Sean $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{y}(t)$ las soluciones de los sistemas (4) y (4a) respectivamente con condición inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{y}(0) = \mathbf{x}_0$.

Teorema 3. *Para toda $T > 0$ y para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|\mathbf{x}_0| < \delta$, entonces $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| < \varepsilon\delta$ para toda $t \in (0, T)$.*

Demostración. Véa el apéndice B donde aparece una versión más general de este teorema. ■

Por tanto, para un tiempo arbitrariamente grande, las soluciones $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{x}(t)$ de ambos sistemas con condición inicial $\mathbf{y}(0) = \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ permanecerán cercanas.

Teorema 4 (Hartman-Grobman, [P], pág. 119). *Sean $U \subseteq \mathbf{R}^n$ abierto que contiene al origen, $\mathbf{f} \in C^1(U)$, y ϕ_t el flujo generado por el sistema (4) (sin considerar el parámetro). Supongamos que $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ y que la matriz $A = D\mathbf{f}(\mathbf{0})$ no tiene valores propios con parte real igual a cero. Entonces existe un homeomorfismo $H: V \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow W \subseteq \mathbf{R}^n$, V, W abiertos que contienen al origen tales que para cada $\mathbf{x}_0 \in V$, existe un intervalo abierto $I_0 \subseteq \mathbf{R}$ que contiene al 0 y que para toda $\mathbf{x} \in V$ y $t \in I_0$*

$$H \circ \phi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^{At} H(\mathbf{x}),$$

donde $\mathbf{e}^{At} = Id + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots$ es la matriz exponencial de la matriz At , que simplemente es la solución del sistema linealizado (4a). ■

El teorema dice que H manda localmente curvas de (4) en curvas de (4a) cerca del origen preservando la parametrización, es decir, los flujos de (4) y (4a) son *topológicamente conjugados*.³

Los puntos fijos son importantes ya que alrededor de ellos el campo puede variar su dirección de modo inesperado (Figura 5); esto no sucede alrededor de los *puntos regu-*

² $T_0\mathbf{R}^n$ es el espacio tangente a \mathbf{R}^n en el $\mathbf{0}$.

³ Decimos que dos sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) & (\alpha) \\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}) & (\beta)\end{aligned}$$

son *topológicamente equivalentes* en una vecindad del origen (el punto de equilibrio) o que tienen la *misma estructura cualitativa cerca del origen* si existe un homeomorfismo H que mande un conjunto abierto V que contiene al origen sobre un conjunto abierto W que también contenga al origen, que mande trayectorias de (α) en V sobre trayectorias de (β) en W , y que preserve orientación. Si el homeomorfismo H preserva la parametrización de las curvas por el tiempo, decimos que los sistemas (α) y (β) son *topológicamente conjugados*.

lares⁴ ya que el flujo es localmente equivalente a un campo constante bajo un cambio de coordenadas apropiado (vea [S], pág. 205). Vea la figura 6.

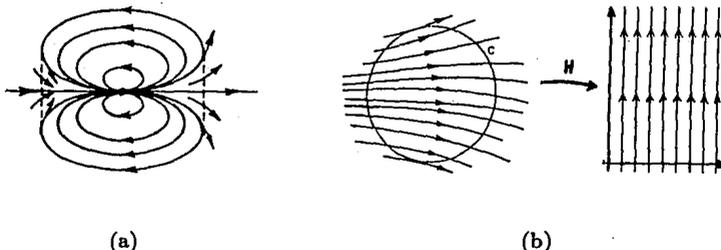


Figura 6. (a) Un dipolo; (b) trivialidad local del flujo alrededor de un punto regular.

*Órbitas periódicas.*⁵ Otra clase importante de soluciones $x(t)$ de (4) son aquellas para las cuales existe $T > 0$ tal que

$$x(t + T) = x(t), \text{ para toda } t \in \mathbf{R},$$

a las que llamamos *órbitas periódicas*, *órbitas cerradas* o *ciclos*. Decimos que una órbita periódica Γ es *estable* si para cada $\epsilon > 0$ existe una vecindad V de Γ tal que para toda $x \in V$ y $t \geq 0$, $d(\phi_t(x), \Gamma) < \epsilon$.⁶ Una órbita periódica Γ es *inestable* si no es estable; y Γ es llamada *asintóticamente estable* si para todos los puntos x en alguna vecindad V de Γ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi_t(x), \Gamma) = 0.$$

Vea la figura 7.

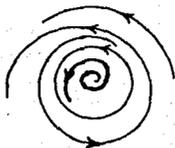


⁴ Un punto regular es un punto en el que f no se anula.

⁵ También llamamos *órbita* al conjunto imagen en \mathbf{R}^n de una curva fase.

⁶ $d(\phi_t(x), \Gamma) = d(\{\phi_t(x)\}, \Gamma)$ donde d es la distancia entre subconjuntos de \mathbf{R}^n definida por

$$d(A, B) = \inf \{ |a - b|, a \in A \subseteq \mathbf{R}^n, b \in B \subseteq \mathbf{R}^n \}.$$



(c)

Figura 7. Una órbita periódica (a) estable, (b) asintóticamente estable, (c) inestable.

Podemos obtener los retratos fase de la figura 7 mediante campos vectoriales de las siguientes formas: (a) $f_1(x, y) = (-y, x)$, (b) $f_2(x, y) = (-y + x(1 + x^2 + y^2), x + y(1 + x^2 + y^2))$ y (c) $f_3(x, y) = (-y + x(1 + x^2 + y^2)^2, x + y(1 + x^2 + y^2)^2)$.

Observación 1. Este tipo de soluciones son las que sirven para modelar procesos oscilatorios, y propiamente dicho la ecuación (1) es un oscilador si posee una solución que sea una órbita periódica.

Solamente nos falta definir los conjuntos α y ω -límite. El conjunto ω -límite de un punto $p \in \mathbf{R}^n$, $\omega(p)$, es el conjunto de los $q \in \mathbf{R}^n$ tales que existe una sucesión $\{t_n\}$ en \mathbf{R} donde $t_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$ y que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{t_n}(p) = q.$$

El conjunto α -límite de un punto $p \in \mathbf{R}^n$, $\alpha(p)$, se define de manera análoga pero con la condición de que $t_n \rightarrow -\infty$ cuando $n \rightarrow \infty$.

2. Osciladores Lineales

Consideremos el oscilador dado por la siguiente ecuación

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad (6)$$

donde a los números m , k y b , los llamamos parámetros oscilatorios. Esta ecuación describe distintos tipos de comportamientos de acuerdo con los diferentes valores que les demos a los parámetros oscilatorios; aquí describiremos los siguientes casos: (a) el *oscilador lineal sin fricción* ($b = 0$), (b) el *oscilador lineal con fricción* ($b > 0$), (c) el *oscilador lineal con fricción negativa* ($b < 0$) y (d) el *oscilador con fuerza repulsiva*.

2a. Oscilador lineal sin fricción. Tenemos el oscilador dado por la ecuación

$$m\ddot{x} + k_0x = 0 \quad (7)$$

que corresponde al *oscilador armónico*, donde m y k_0 son números reales positivos (constantes).

Ejemplo 1. Esta ecuación representa aproximadamente al sistema idealizado del movimiento horizontal de una masa m (constante) a lo largo de una barra suave bajo la acción de dos resortes, que suponemos idénticos, cerca de la posición de equilibrio; en este sistema los resortes aproximan una fuerza de restauración elástica (una fuerza proporcional al desplazamiento) y despreciamos la resistencia del aire y la fricción interna de los resortes (Figura 8).

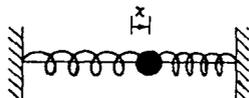


Figura 8. Oscilador armónico.

Proposición 1. *Bajo cualesquiera condiciones iniciales el sistema (7) experimenta un movimiento periódico alrededor del punto de equilibrio $(x, \dot{x}) = (0, 0)$, con la excepción del caso en que las condiciones iniciales corresponden al equilibrio.*

Demostración. Para realizar el análisis cualitativo del oscilador armónico escribamos (6) como

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (8)$$

donde $\omega_0^2 = \frac{k_0}{m}$, y considere el sistema equivalente

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega_0^2 x \end{aligned} \quad (9)$$

como campo vectorial de una ecuación de primer orden en dos variables, el que podemos expresar en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (10)$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así observamos que A es una matriz invertible y por tanto el único punto de equilibrio del sistema es $(x, y) = (x, \dot{x}) = (0, 0)$; podemos resolver (9) mediante la conjugación de la matriz A por la matriz

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde conjugar A por N significa tomar el producto $N^{-1}AN$, con lo que obtenemos el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \end{pmatrix} = N^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = N^{-1}ANN^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (11)$$

por la "regla de la cadena", en las coordenadas

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = N^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};$$

la solución es de la forma

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cos \omega_0 t - c_2 \sin \omega_0 t \\ c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \cos \omega_0 t \end{pmatrix}$$

donde $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ es una condición inicial de (10).

Por tanto,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \cos \omega_0 t \\ \omega_0 (c_1 \cos \omega_0 t - c_2 \sin \omega_0 t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cos(\omega_0 t + \alpha) \\ -\omega_0 k \sin(\omega_0 t + \alpha) \end{pmatrix}$$

donde $k = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\right)^2}$ y $\tan \alpha = -\frac{c_1}{c_2} = -\frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_0}$, si $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = y(0) = \dot{x}_0$ son las condiciones iniciales de (6).

Vemos así que $x(t)$ en el plano (t, x) está representada por una curva *senoidal* (Figura 9), es decir, el sistema oscila y esta oscilación está caracterizada por tres cantidades: k , a la que llamamos amplitud de la oscilación (determinada por las condiciones iniciales x_0, \dot{x}_0); ω_0 , frecuencia angular o número de oscilaciones durante 2π unidades de tiempo y α , el ángulo de fase. ■

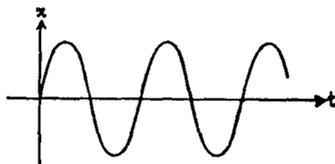


Figura 9. $x(t) = K \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2})$.

Las curvas fase son elipses

$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{k^2 \omega_0^2} = 1$$

y en el plano fase quedan descritas como se indica en la figura 10 (considerando a t creciente)

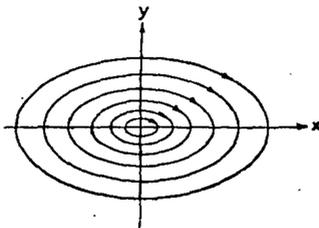


Figura 10. Retrato fase del oscilador lineal sin fricción.

ya que cuando $\dot{x} > 0$, x crece, y cuando $\dot{x} < 0$, x decrece. A un punto de equilibrio \bar{x} de un campo vectorial que posee una vecindad abierta U tal que toda curva fase con condición inicial en U es una curva cerrada, lo llamamos *centro*. Es importante mencionar que el sistema es *conservativo*, pues dada la función de energía (*primera integral*)

$$E(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} - \int_{x_0}^x -\omega_0^2 s ds$$

al derivarla con respecto al tiempo

$$\frac{dE}{dt}(x, \dot{x}) = \dot{x}\ddot{x} + \omega_0^2 x \dot{x} = -\omega_0^2 x \dot{x} + \omega_0^2 x \dot{x} = 0,$$

y E es constante a lo largo de las curvas fase, es decir, se conserva la energía total a lo largo de las curvas fase; por tanto, las elipses antes mencionadas son las curvas de nivel de E (en el capítulo 2 estudiaremos algunas propiedades de los sistemas conservativos).

Por tanto, el sistema (6) permanecerá oscilando. Es claro que la masa m no oscilará para siempre, puesto que la fricción del aire o de la barra la detendrá en un tiempo finito, pero el sistema (6) resulta ser una buena aproximación del fenómeno para intervalos de tiempo pequeños.

2b. Oscilador lineal con fricción. Ahora tenemos un sistema lineal no conservativo en el que incluimos una fricción lineal, es decir, una fuerza friccional proporcional a la velocidad \dot{x} , que es muy aproximada para velocidades pequeñas a la fricción en el aire y en los líquidos. Un ejemplo de un sistema tal es el dado por el modelo del péndulo con fricción, cuya ecuación aún es lineal

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad (6)$$

donde b es el coeficiente de fricción (fuerza friccional por unidad de velocidad) y m es la masa del cuerpo que pende.

Para realizar el análisis cualitativo de (6) escribamos $\frac{b}{m} = 2h$, $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, entonces

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

y escribamos también $\dot{x} = y$ para obtener

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (12)$$

cuyos polinomio característico y valores propios son $\lambda^2 + 2h\lambda + \omega_0^2$ y $\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega_0^2}$ respectivamente. También vemos que la matriz de (12) es invertible y por consiguiente el único punto de equilibrio del sistema es el $(0,0)$.

La solución $x(t)$ presenta dos comportamientos esencialmente distintos según los siguientes casos: si $h^2 < \omega_0^2$ tenemos *oscilaciones amortiguadas*; y si $h^2 > \omega_0^2$, un proceso *no periódico amortiguado*.

2b.1. Oscilaciones amortiguadas. Estudiemos primero el caso en que los valores propios tienen parte imaginaria distinta de 0, es decir, $h^2 < \omega_0^2$. Escribamos $\omega_1^2 = \omega_0^2 - h^2$ con lo cual $\lambda_{1,2} = -h \pm \omega_1 i$, donde $i = \sqrt{-1}$.

Proposición 2. *Para toda condición inicial en el espacio fase (x, \dot{x}) el sistema (6) experimenta una oscilación amortiguada alrededor del punto de equilibrio $(x, \dot{x}) = (0,0)$ con la excepción del caso en que las condiciones iniciales coinciden con el punto de equilibrio.*

Demostración. Al conjugar la matriz del sistema (12) por

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega_1 & -h \end{pmatrix}$$

queda el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h & -\omega_1 \\ \omega_1 & -h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (13)$$

en las coordenadas

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = N^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

cuya solución es

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = e^{-ht} \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t & -\operatorname{sen} \omega_1 t \\ \operatorname{sen} \omega_1 t & \cos \omega_1 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (14)$$

donde $(c_1, c_2) \in \mathbf{R}^2$ es una condición inicial del sistema (13); lo que implica en (12) que

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = e^{-ht} \begin{pmatrix} x_0 \cos \omega_1 t + \frac{hx_0 + \dot{x}_0}{\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 t \\ (hx_0 + \dot{x}_0) \cos \omega_1 t - (hx_0 + \frac{h\dot{x}_0}{\omega_1}) \operatorname{sen} \omega_1 t \end{pmatrix}$$

$$= Ke^{-ht} \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \alpha) \\ -h \cos(\omega_1 t + \alpha) - \omega_1 \text{sen}(\omega_1 t + \alpha) \end{pmatrix} \quad (14a)$$

donde (x_0, \dot{x}_0) es una condición inicial en el espacio fase de (6), $K^2 = x_0^2 + (\frac{hx_0 + \dot{x}_0}{\omega_1})^2$ y $\tan \alpha = -\frac{hx_0 + \dot{x}_0}{x_0 \omega_1}$. Dado que los isomorfismos lineales de coordenadas no afectan las cualidades estables de los sistemas (porque los hace topológicamente conjugados), analizaremos (12) por medio de (13) y sus soluciones.

La función

$$\begin{pmatrix} \cos \omega_1 t & -\text{sen} \omega_1 t \\ \text{sen} \omega_1 t & \cos \omega_1 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

representa un proceso oscilatorio, pero el factor $e^{-ht} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, lo que implica que la solución (14) no es una curva cerrada pues su módulo $|x'(t), y'(t)|$ no es el mismo al haber transcurrido un periodo de (15) (por eso a K la llamamos *amplitud condicionada*) y decrece exponencialmente con el tiempo, es decir, e^{-ht} *amortigua la oscilación*. Por lo anterior, decimos que el sistema (13) (respectivamente (6) y (12)) experimenta *oscilaciones amortiguadas*. ■

Al periodo de oscilación de (15), $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$, le llamamos *periodo condicionado* de (14) y (14a), que es el doble del lapso entre dos ceros consecutivos de x (o de \dot{x}); a la frecuencia angular de (15), ω_1 , la llamamos *frecuencia angular condicionada* de (14) y (14a).

Observemos que el $(0, 0)$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable para (12) y (13) (por ser topológicamente conjugados). En la figura 11 vemos que todo esto se traduce en que las imágenes de (14) son espirales logarítmicas que tienden hacia el origen cuando $t \rightarrow \infty$; esto sucede igualmente en el retrato fase de (6) y (12) salvo una deformación lineal dada por N .

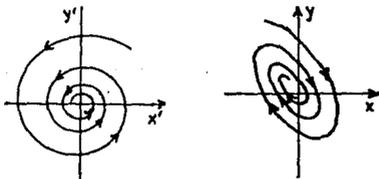


Figura 11. Retratos fase de oscilaciones amortiguadas.

En la figura 12 la gráfica de $x(t)$ está acotada por las gráficas de las funciones e^{-ht} y $-e^{-ht}$. La proporción del amortiguamiento puede ser caracterizada por h , el *coeficiente de amortiguamiento*. El *decrecimiento logarítmico* es

$$d = \log \frac{x(t)}{x(t+T)} = \log(e^{hT}) = hT$$

que refleja cómo decrece $|x|$ cuando ha transcurrido un periodo condicionado para cualquier $t \in \mathbf{R}$ (en el caso en que $t_0 = \frac{(2n+1)\pi + 2\alpha}{2\omega_1}$ para alguna $n \in \mathbf{Z}$, los valores del tiempo para los cuales $x(t_0) = 0$, se toma el límite cuando $t \rightarrow t_0$).

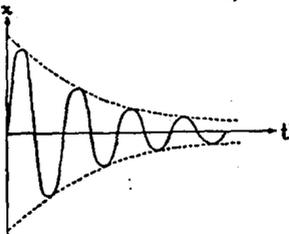


Figura 12. $x(t) = Ke^{-ht} \cos(\omega_1 t - \frac{\pi}{2})$.

Así podemos caracterizar una oscilación amortiguada por cuatro cantidades: el periodo condicionado T (o la correspondiente frecuencia angular condicionada ω_1), el decrecimiento logarítmico d , la amplitud condicionada K y el ángulo fase α .

A este tipo de punto fijo estable \bar{x} que tiene una vecindad W en la que toda curva solución con condición inicial en W tiende a \bar{x} cuando $t \rightarrow \infty$ describiendo una espiral, le llamamos *foco estable*.

Todo lo anterior significa que el péndulo oscilará todo el tiempo, cada vez más cerca del reposo (punto de equilibrio), pero sin alcanzarlo; esto se debe a que el sistema (6) es sólo una aproximación del sistema físico y que estamos despreciando varios factores que también influyen en la dinámica del péndulo, sin embargo, hemos logrado modelar varias características de él.

2b.2. Proceso no periódico amortiguado. Examinemos ahora el caso en que los valores propios del sistema son reales, es decir, $h^2 > \omega_0^2$. Escribamos $q^2 = h^2 - \omega_0^2$, lo que implica que $\lambda_{1,2} = -h \pm q$, donde $\lambda_j < 0$ para $j = 1, 2$ y $\lambda_1 > \lambda_2$ ya que $q > 0$.

Proposición 3. Para toda condición inicial en el espacio fase (x, \dot{x}) , el sistema (6) experimenta un amortiguamiento sin oscilación hacia el punto de equilibrio $(x, \dot{x}) = (0, 0)$, es decir, $(0, 0)$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

Demostración. Conjugamos la matriz del sistema (12) por

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ q-h & -(h+q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

con lo que obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h+q & 0 \\ 0 & -(h+q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (16)$$

en las coordenadas (x', y') ya conocidas, cuya solución es

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-(h+q)t} \\ c_2 e^{-(h+q)t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \quad (17)$$

donde $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ es una condición inicial del sistema (16).

Por tanto

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2q} \begin{pmatrix} (-\lambda_2 x_0 + \dot{x}_0) e^{\lambda_1 t} + (-\lambda_1 x_0 - \dot{x}_0) e^{\lambda_2 t} \\ ((h-q)\dot{x}_0 + \omega_0^2 x_0) e^{\lambda_1 t} + (\omega_0^2 x_0 - \lambda_2 \dot{x}_0) e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \quad (17a)$$

donde (x_0, \dot{x}_0) es una condición inicial en el espacio fase de (6).

Observemos en la figura 13 los retratos fase de (17) y (17a)

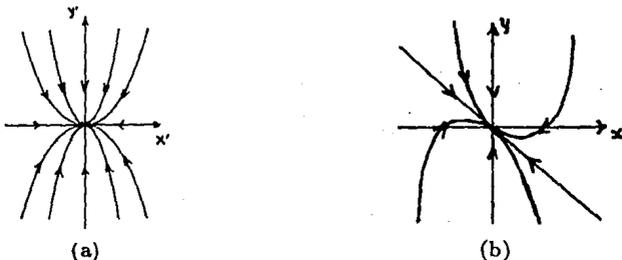


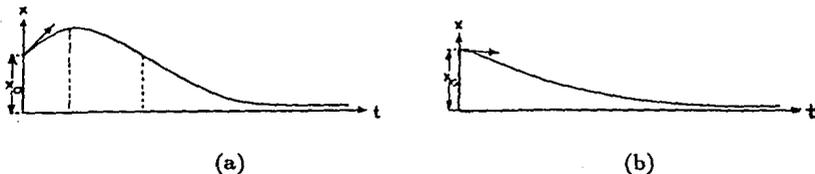
Figura 13. (a) Retrato fase de (17); (b) retrato fase de (17a).

donde las "parábolas"¹ (Figura 13a) que forman las imágenes de las curvas fase se deducen de la siguiente ecuación

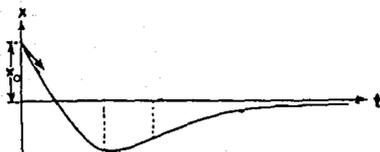
$$y'(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} = \frac{c_2}{c_1^\alpha} (c_1 e^{\lambda_1 t})^\alpha = C(x'(t))^\alpha$$

donde $C = \frac{c_2}{c_1^\alpha}$ y $\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, ecuación de tipo parabólico. Así las curvas de la figura 13b son las imágenes bajo el isomorfismo lineal N de las parábolas de la figura 13a, y por tanto siguen siendo parábolas.

De la figura 13 podemos deducir las gráficas siguientes de la solución $x(t)$ en el plano (t, x) , según la posición de la condición inicial en el plano fase (Figura 14).



¹ Dichas parábolas no son propiamente lugares geométricos que satisfacen una ecuación cuadrática, pero su forma y características de crecimiento son esencialmente las mismas que las de las parábolas cónicas.



(c)
Figura 14. La gráfica de $x(t)$ cuando $x_0 > 0$ y (a) $\dot{x}_0 > 0$, (b) $\dot{x}_0 = 0$, (c) $\dot{x}_0 < 0$.

Notemos que el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable en los planos fase de (12) y (16). A este tipo de punto fijo \bar{x} que posee una vecindad en la que existe una recta (en el plano) a la que todas las curvas solución al tender hacia el punto de equilibrio se aproximan tangencialmente, le llamamos *nodo impropio estable*; las rectas tangentes en los sistemas (12) y (16) son

$$y = \lambda_1 x \quad y \quad y' = 0$$

respectivamente.

Observación 1. La relación entre los parámetros $h^2 = \omega_0^2$ es demasiado estricta como para reproducirse en un sistema físico y por ello no tiene significación en este contexto, pero en el contexto matemático sí lo tiene por ser el punto de transición entre los procesos amortiguados periódico y no periódico.

Resolvamos el sistema (12) conjugando por la matriz

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -h & 1-h \end{pmatrix}$$

con lo que obtenemos el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h & 1 \\ 0 & -h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (18)$$

en las coordenadas (x', y') conocidas, cuya solución es

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = e^{-ht} \begin{pmatrix} c_1 + c_2 t \\ c_2 \end{pmatrix}$$

donde $(c_1, c_2) \in \mathbf{R}^2$, lo que implica para el sistema (12) que

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = e^{-ht} \begin{pmatrix} (1-ht)x_0 + t\dot{x}_0 \\ -htx_0 + (1-ht)\dot{x}_0 \end{pmatrix}$$

y los retratos fase correspondientes a los sistemas (12) y (17) en este caso los ilustramos en la figura 15; éstos son similares (más no difeomorfos) al retrato fase del proceso no periódico

amortiguado. En este caso $(0, 0)$ es también un punto de equilibrio asintóticamente estable, y en particular es un nodo impropio estable, cuyas rectas de tangencia son $y = -hx$ y $y' = 0$ es las coordenadas correspondientes.

También es importante conocer esta relación entre los parámetros ya que así podemos introducir valores apropiados al sistema para que aparezcan oscilaciones con amplitud condicionada de tamaño adecuado, o eliminar dichas oscilaciones haciendo $h^2 > \omega_0^2$ pero h^2 cercano a ω_0^2 . Podemos afirmar entonces que con la menor variación de los parámetros del sistema, este caso límite cambia a ser alguno de los otros dos: oscilación amortiguada o proceso no periódico amortiguado.

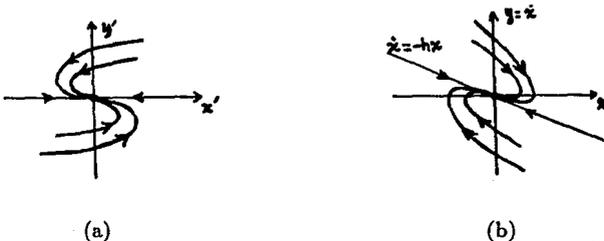


Figura 15. Retratos fase de nodos impropios estables.

2c. Oscilador lineal con fricción negativa. En la ecuación

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \tag{6}$$

hemos considerado al coeficiente b como un número positivo puesto que la fricción se opone al movimiento. El coeficiente positivo $h = \frac{b}{2m}$ significa que la acumulación de fricción requiere energía. Esto lo vemos claramente al realizar el cálculo siguiente por analogía con el oscilador lineal sin fricción. Multipliquemos (6) por \dot{x} e integramos de 0 a τ

$$m \int_0^\tau \dot{x}\ddot{x}dt + b \int_0^\tau \dot{x}^2dt + k \int_0^\tau x\dot{x}dt = 0,$$

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} \Big|_0^\tau + \frac{kx^2}{2} \Big|_0^\tau = -b \int_0^\tau \dot{x}^2dt$$

donde

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} \Big|_0^\tau \quad \text{y} \quad \frac{kx^2}{2} \Big|_0^\tau$$

son las energías cinética y potencial respectivamente, y la suma de ambas

$$-b \int_0^\tau \dot{x}^2dt$$

es la variación de energía total en el intervalo $[0, \tau]$. Si $b > 0$ entonces $-b \int_0^\tau \dot{x}^2 dt < 0$, es decir, la energía del sistema decrece por la pérdida de energía debida a la fricción. Si $b < 0$ entonces $-b \int_0^\tau \dot{x}^2 dt > 0$ que implica aumento en la energía del sistema.

Desde el punto de vista de los sistemas dinámicos la restricción de $h > 0$ ($b > 0$) sólo es una elección en los parámetros oscilatorios. Al manejar $h = -l < 0$ obtenemos

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = K e^{lt} \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \alpha) \\ l \cos(\omega_1 t + \alpha) - \omega_1 \sin(\omega_1 t + \alpha) \end{pmatrix}$$

donde (x_0, \dot{x}_0) es la condición inicial, $\omega_1^2 = \frac{k}{m} l^2$, $K^2 = x_0^2 + (\frac{h x_0 + \dot{x}_0}{\omega_1})^2$ y $\tan \alpha = -\frac{h x_0 + \dot{x}_0}{x_0 \omega_1}$ si $b^2 < 4mk$ (vea la sección 3 de este capítulo). O bien

$$x(t) = \frac{1}{2q} (-\lambda_2 x_0 + \dot{x}_0) e^{\lambda_1 t} + (-\lambda_1 x_0 - \dot{x}_0) e^{\lambda_2 t}$$

donde $q^2 = h^2 - \frac{k^2}{m^2}$ y $\lambda_{1,2} = l \pm q$, si $b^2 > 4mk$. Los retratos fase se ilustran en la figura 16, donde las curvas fase se alejan de la posición de equilibrio.



(a)

(b)

Figura 16. (a) Foco inestable, (b) nodo impropio inestable.

Ejemplo 2. Un modelo en el que existe una fuente de energía o fricción negativa ($b < 0$) es el siguiente (Figura 17).

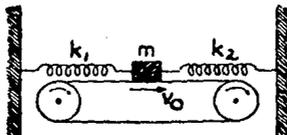


Figura 17.

Un cuerpo de masa m fijada por dos resortes k_1 y k_2 es colocada sobre una banda que se mueve con velocidad uniforme v_0 . La fricción de la banda sobre la masa es una función $F(v_0 - \dot{x})$. Sea k la constante del resorte resultante y supongamos que todas las demás fricciones son proporcionales a \dot{x} (por ejemplo la fricción interna de los resortes), entonces la ecuación de movimiento de la masa m es de la forma

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(v_0 - \dot{x}),$$

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}y - \frac{F(v_0 - \dot{x})}{m}.$$

También supongamos que $\dot{x} < v_0$. La linealización de este sistema en el $(\frac{1}{k}F(v_0), 0)$ es

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} - \frac{F'(v_0)}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

El coeficiente friccional es ahora $b + F'(v_0)$ que dependiendo de la forma de F es negativo o positivo

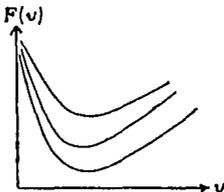


Figura 18. Posibles gráficas de F .

Si $b + F'(v_0) < 0$, el sistema tiene fricción negativa y la masa m experimenta oscilaciones de mayor amplitud conforme pasa el tiempo, que confirma nuestra intuición; es claro que la amplitud de la oscilación no puede crecer indefinidamente, y es por ello que el sistema lineal no puede describir el movimiento de la masa m para tiempos arbitrariamente grandes (de aquí surge la necesidad de utilizar sistemas no lineales).

2d. Oscilador con fuerza repulsiva. Ahora consideremos que la fuerza en el sistema tiende a alejar a éste de la posición de equilibrio ($k < 0$). Veámoslo en un ejemplo.

Ejemplo 3. Consideremos el péndulo sin fricción

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \text{sen } \theta = 0$$

donde $\theta \in S^1$, y cuyo retrato fase en el espacio fase (cilíndrico) es ilustrado en la figura 19.

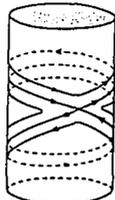
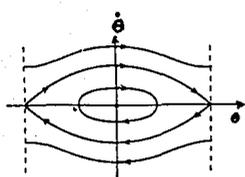


Figura 19.

La linealización del sistema alrededor de $\theta = \pi$

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \psi \end{pmatrix}$$

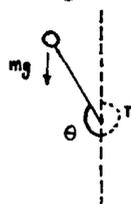


Figura 20.

posee una silla en el origen, y por el teorema de Hartman-Grobman el péndulo sin fricción posee una silla en $(\theta, \psi) = (\pi, 0)$ como se ve en la figura anterior, es decir, casi todos movimientos del péndulo tienden a alejarse de la posición vertical (Figura 20).

Por todo lo expuesto anteriormente *no pueden existir órbitas cerradas en sistemas lineales no conservativos.*

3. Sistemas Lineales Degenerados

En la ecuación que describe un sistema lineal con fricción o resistencia

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \tag{6}$$

aparecen tres coeficientes m , b y k (parámetros oscilatorios). Cada uno de estos coeficientes puede ser muy pequeño y hacer que el término correspondiente sea muy cercano a 0, si la variable correspondiente (x , \dot{x} o \ddot{x}) está acotada. Así podemos estudiar el sistema despreciando el término muy pequeño y reduciendo el orden de la ecuación. Si despreciamos el término $b\dot{x}$ obtenemos nuevamente el oscilador armónico; si despreciamos alguno de los otros dos términos, $m\ddot{x}$ o kx , obtenemos

$$b\dot{x} + kx = 0 \tag{19}$$

o

$$m\ddot{x} + b\dot{x} = 0. \tag{20}$$

Es claro que debemos de estimar qué tan buena es la aproximación de las soluciones de (6) por las soluciones de (19) o (20) según sea el caso.

Supongamos que $m = 0$, entonces la solución de (19) tiene la forma

$$x_d(t) = x_0 e^{-kt}, \quad (21)$$

con condición inicial $x(0) = x_0$ y derivada

$$\dot{x}_d(t) = -\frac{k}{b} x_0 e^{-kt}. \quad (21a)$$

Al despreciar alguno de los parámetros obtenemos sistemas con "medio grado de libertad" llamados *degenerados*; naturalmente ahora manejamos sólo una condición inicial x_0 ya que (19) es una ecuación diferencial de primer orden, es decir, el espacio fase correspondiente tiene dimensión 1.

Realizamos la estimación mencionada de manera directa entre las soluciones explícitas de los sistemas (6) y (19), suponiendo que m es pequeña pero diferente de 0. Si las condiciones iniciales son $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ la solución tiene la forma:

$$x(t) = K e^{-ht} \cos(\omega_1 t + \alpha)$$

donde $h = \frac{2b}{m}$, $\omega_1^2 = \frac{k}{m} - h^2$, $K^2 = x_0^2 + (\frac{h x_0 + \dot{x}_0}{\omega_1})^2$ y $\tan \alpha = -\frac{h x_0 + \dot{x}_0}{x_0 \omega_1}$ si $b^2 < 4mk$ (vea la sección 3 de éste capítulo). O bien

$$x(t) = \frac{1}{2q} (-\lambda_2 x_0 + \dot{x}_0) e^{\lambda_1 t} + (-\lambda_1 x_0 - \dot{x}_0) e^{\lambda_2 t}$$

donde $q^2 = h^2 - \frac{k^2}{m^2}$ y $\lambda_{1,2} = -h \pm q$, si $b^2 > 4mk$.

Puede demostrarse que la solución aproximada

$$x_1(t) = x_0 \left(e^{-\frac{k}{b}t} - \frac{mk}{b^2} e^{-\frac{k}{m}t} \right) + \dot{x}_0 \frac{m}{b} \left(e^{-\frac{k}{b}t} - e^{-\frac{k}{m}t} \right) \quad (22)$$

cumple que para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $m < \delta$

$$|x_1(t) - x(t)| < \varepsilon, \quad |\dot{x}_1(t) - \dot{x}(t)| < \varepsilon,$$

para toda $t > 0$.

Por lo anterior comparamos (21) y (22),

$$\begin{aligned} |x_1(t) - x_d(t)| &= \left| -x_0 \frac{mk}{b^2} e^{-\frac{k}{m}t} + \dot{x}_0 \frac{m}{b} (e^{-\frac{k}{b}t} - e^{-\frac{k}{m}t}) \right| \\ &\leq m \left(|x_0| \frac{k}{b^2} + |\dot{x}_0| \frac{2}{b} \right) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

para toda $t > 0$, si

$$m < \delta = \frac{\varepsilon}{\frac{k}{b^2} |x_0| + \frac{2}{b} |\dot{x}_0|}.$$

Por otro lado, no sucede lo mismo para la diferencia de las derivadas

$$\dot{x}_1(t) - \dot{x}_d(t) = x_0 \frac{k}{b} e^{-\frac{k}{m}t} - \dot{x}_0 \frac{mk}{b^2} e^{-\frac{k}{m}t} + \dot{x}_0 e^{-\frac{k}{m}t},$$

que cumple con que

$$\lim_{m \rightarrow 0} \dot{x}_1(0) - \dot{x}_d(0) = \dot{x}_0 + x_0 \frac{k}{b},$$

valor que no decrece con m (no podemos hacerlo pequeño mediante una elección adecuada de m). Aún así, para cualquier $\varepsilon > 0$ y m pequeña, existe $\tau = \tau(m) > 0$ tal que

$$|\dot{x}_1(t) - \dot{x}_d(t)| < \varepsilon$$

para toda $t > \tau$.¹

Así para toda m pequeña y $t > 0$, $|x(t) - x_d(t)|$ es tan pequeña como queramos, como también lo es $|\dot{x}_1(t) - \dot{x}_d(t)|$ después de un cierto tiempo τ . En síntesis, la aproximación de la ecuación (6) por la ecuación (19) es satisfactoria después de un cierto tiempo τ (también tan pequeño como queramos).

El mismo tipo de análisis puede llevarse a cabo en el caso $k = 0$, pero no abundaremos en él.

Ejemplo 1. Consideremos un cuerpo de masa pequeña moviéndose en un medio fuertemente resistente ($b \neq 0$) bajo el efecto de un resorte ($k \neq 0$). La ecuación de movimiento es la (6) donde m es un parámetro pequeño. Para (6) podemos elegir arbitrariamente la posición y velocidad iniciales. Por otro lado, después de cierto tiempo τ , el movimiento en el sistema puede ser descrito por la ecuación de primer orden (19) donde la condición \dot{x} no es arbitraria y depende de x . Supongamos que $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = 0$ (condiciones que no satisfacen a (19)). En tanto \dot{x} sea pequeña, el término $b\dot{x}$ no será importante y de acuerdo con (6), la aceleración está dada por la expresión aproximada

$$\ddot{x} \approx -\frac{k}{m}x.$$

Puesto que m es muy chica, la aceleración es muy grande y la velocidad crece rápidamente. Al mismo tiempo, la fricción se acumula y gran parte de la fuerza del resorte se utiliza

¹ Observemos la siguiente relación entre τ y m

$$\begin{aligned} |\dot{x}_1(t) - \dot{x}_d(t)| &\leq |x_0 \frac{k}{b} + \dot{x}_0| e^{-\frac{k}{m}t} + |\dot{x}_0| \frac{mk}{b^2} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

si

$$m < \frac{\varepsilon b^2}{2mk\dot{x}_0} \quad \text{y} \quad t > \tau(m) = -\frac{m}{b} \log\left(\frac{b\varepsilon}{2kx_0 + b\dot{x}_0}\right) > 0,$$

donde $\tau \rightarrow 0$ si $m \rightarrow 0$.

para vencer la fricción. Por tanto, la aceleración se hace cada vez más pequeña, y finalmente el término $m\ddot{x}$ deja de importar y el movimiento del sistema puede ser descrito satisfactoriamente mediante la ecuación (19) ya que \dot{x} adquiere un valor dependiente de x :

$$\dot{x} \approx -\frac{k}{b}x.$$

Así, si m es suficientemente pequeña, primero la aceleración es muy grande y la velocidad varía rápidamente. Después de un tiempo τ el sistema puede ser descrito por (19) y, si este tiempo es suficientemente pequeño x no experimenta un cambio apreciable aún cuando ocurre una gran aceleración (Figura 21).

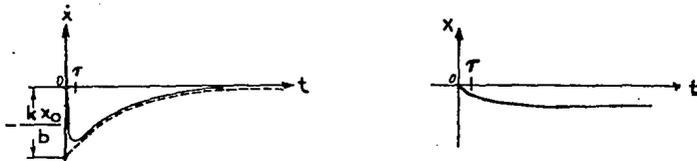


Figura 21.

En este último caso podemos considerar el paso de (6) a (19) como un salto instantáneo y sólo determinamos el estado final al que saltó el sistema (Figura 22). Entonces, podemos considerar al sistema como libre de masa dado que introducimos una nueva suposición, *que ocurre una discontinuidad en la velocidad \dot{x}* . En nuestro caso particular lo expresamos como sigue: La velocidad \dot{x} cambia de manera abrupta mientras la posición x permanece casi constante.

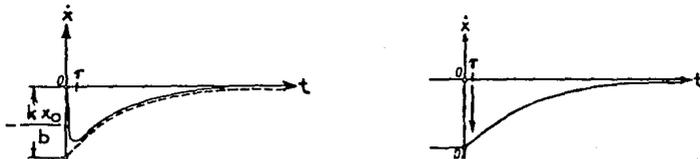


Figura 22.

4. Esferas de Bendixson y de Poincaré

En esta sección estudiamos dos transformaciones (topológicas) del espacio fase que nos sirven como recursos para completar el retrato fase y observar el comportamiento de las soluciones de

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbf{R}^2, f \in C^2(\mathbf{R}^2),$$

cuando $|x|$ es arbitrariamente grande, es decir, en el "infinito" del plano.

El conocer el comportamiento de las soluciones "cerca de infinito" es a menudo muy útil para obtener el retrato fase completo del sistema. El procedimiento a seguir consiste en proyectar el plano \mathbf{R}^2 sobre un subconjunto de la esfera unitaria en \mathbf{R}^3 , $\mathcal{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$; esto lo hacemos de dos maneras: a) proyectamos con respecto a un polo de la esfera (proyección estereográfica), para obtener la *esfera de Bendixson*, y b) proyectamos con respecto al centro de la esfera, para obtener la *esfera de Poincaré*.

4a. Esfera de Bendixson. Sean $N = (0, 0, 1) \in \mathcal{S}^2$ (polo norte de \mathcal{S}^2), y consideremos el haz de rectas en \mathbf{R}^3 concurrentes en N ; cada una de las rectas de este haz no contenidas en el plano tangente a \mathcal{S}^2 en N , corta a \mathcal{S}^2 en dos puntos distintos, N y N_1 , y en un solo punto M_1 al plano $\mathbf{R}^2 \times \{0\}$; así ponemos en correspondencia a N_1 con M_1 denotado por $\pi_1(N_1) = M_1$ (Figura 23), con lo que obtenemos un difeomorfismo

$$\begin{aligned} \pi_1: \mathcal{S}^2 - \{N\} &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \times \{0\} = \mathbf{R}^2 \\ (u, v, w) &\longmapsto \left(\frac{u}{1-w}, \frac{v}{1-w} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

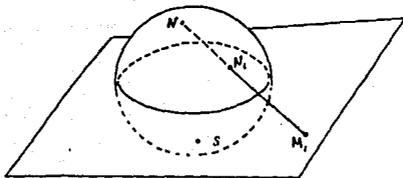


Figura 23. Proyección estereográfica.

Esta transformación tiene el inconveniente de que para el punto de equilibrio generado en el polo norte, generalmente es difícil determinar su estabilidad. Veamos esto en un ejemplo sencillo.

Ejemplo 1. Consideremos el oscilador lineal con fricción

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (12)$$

definido en el plano. Ahora consideremos la proyección estereográfica con respecto al polo sur $S = (0, 0, -1)$

$$\begin{aligned} \pi_2: \mathcal{S}^2 - \{S\} &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \times \{0\} = \mathbf{R}^2 \\ (u, v, w) &\longmapsto \left(\frac{u}{1+w}, \frac{v}{1+w} \right), \end{aligned}$$

cuya inversa tiene por regla de correspondencia

$$\pi_2^{-1}(\xi, \eta) = \left(\frac{2\xi}{1+\xi^2+\eta^2}, \frac{2\eta}{1+\xi^2+\eta^2}, \frac{1-\xi^2-\eta^2}{1+\xi^2+\eta^2} \right).$$

La composición

$$\phi = \pi_1 \circ \pi_2^{-1}: \mathbf{R}^2 - \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}^2 - \{0\}$$

$$(\xi, \eta) \mapsto \left(\frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} \right)$$

que corresponde a la inversión geométrica con respecto al círculo unitario $S^1 \subseteq \mathbf{R}^2$. Calculemos mediante ϕ y $d\phi$ el campo inducido por el oscilador lineal en cada punto del plano (ξ, η) . Observemos que

$$d\phi_{(\xi, \eta)}^{-1} = -(\xi^2 + \eta^2)^2 \begin{pmatrix} \xi^2 - \eta^2 & 2\xi\eta \\ 2\xi\eta & \eta^2 - \xi^2 \end{pmatrix}$$

donde $d\phi_{(\xi, \eta)}$ es la derivada de ϕ en el punto (ξ, η) , por ello el campo inducido $g: \mathbf{R}^2 - \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}^2$ está dado por

$$g(\xi, \eta) = d\phi_{\xi, \eta}^{-1} f(\phi(\xi, \eta)) = -(\xi^2 + \eta^2)^2 \begin{pmatrix} \xi^2 - \eta^2 & 2\xi\eta \\ 2\xi\eta & \eta^2 - \xi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

que en realidad está definido en todo \mathbf{R}^2 . Es claro que el punto $(\xi, \eta) = (0, 0)$ es un punto de equilibrio no hiperbólico, lo que no permite la determinación de sus características estables a partir de la linealización del sistema. Más aún, al bosquejar el retrato fase en la esfera (Figura 24), nos damos cuenta de que N debe ser un punto de equilibrio inestable del tipo de los que surgen en los sistemas lineales.

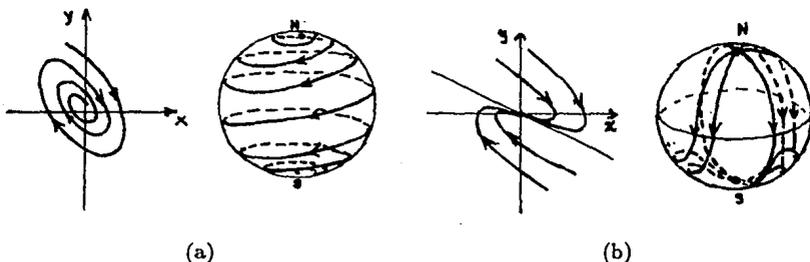


Figura 24. Retratos fase en la esfera de Bendixson de (a) un foco y (b) un nodo impropio estables.

Mediante este sencillo ejemplo, vemos que N será generalmente un punto de equilibrio no hiperbólico para el sistema inducido en S^2 , lo que nos deja un problema tan complicado como el inicial (completar el retrato fase en el plano (x, y)).¹

4b. Esfera de Poincaré. Ahora consideremos el haz de rectas en \mathbf{R}^3 que pasan por el origen $= (0, 0, 0)$ no contenidas en el plano $\mathbf{R}^2 \times \{1\}$. Cada una de estas rectas interseca a

¹ Es claro que el modo de analizar el punto de equilibrio al infinito mediante ϕ y $d\phi$ no es único, pero ejemplifica lo que generalmente sucede.

S^2 en dos puntos antípodas N_1 y N_2 , y corta al plano $\mathbf{R}^2 \times \{1\}$ en un solo punto M_1 . Con esto obtenemos un difeomorfismo del hemisferio superior (o inferior) de la esfera sobre el plano \mathbf{R}^2

$$\begin{aligned} \pi_3: \{(u, v, w) \in S^2 : w > 0\} &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \times \{1\} = \mathbf{R}^2 \\ (u, v, w) &\mapsto (x, y) = \left(\frac{u}{w}, \frac{v}{w}\right) \end{aligned} \quad (24)$$

cuya transformación inversa es

$$\pi_3^{-1}(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \right), \quad (24a)$$

donde los puntos del ecuador de S^2 corresponden al "círculo al infinito" o "puntos al infinito" del plano (Figura 25). El difeomorfismo de \mathbf{R}^2 sobre $\{(u, v, w) \in S^2 : w < 0\}$ lo obtenemos al sustituir $\sqrt{1+x^2+y^2}$ por $-\sqrt{1+x^2+y^2}$ en la ecuación (24a).

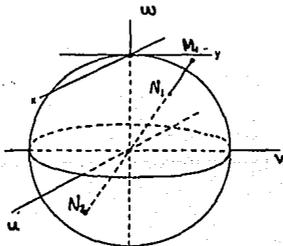


Figura 25. Esfera de Poincaré.

Así obtenemos dos "copias" del espacio fase de la ecuación

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y) \end{aligned} \quad (25)$$

en los dos hemisferios de la esfera y podemos considerar el sistema dinámico inducido en $\{(u, v, w) \in S^2 : w \neq 0\}$ obtenido al proyectar el sistema dinámico del plano; además podemos extenderlo a toda la esfera y analizar el carácter estable de los puntos al infinito.

Ahora es conveniente proyectar a otro plano para trabajar fácilmente. Esto lo hacemos proyectando canónicamente los subconjuntos de $\{(u, v, w) \in S^2 : u > 0, w \neq 0\}$ y $\{(u, v, w) \in S^2 : v > 0, w \neq 0\}$ de los casquetes de la esfera sobre los planos $u = 1$ y $v = 1$ de \mathbf{R}^3 respectivamente (Figura 25). Si $u = 1$ entonces

$$v = \frac{y}{x}, \quad w = \frac{1}{x}, \quad \text{con inversa} \quad x = \frac{u}{w}, \quad y = \frac{1}{w},$$

donde $x \neq 0$ y, análogamente, si $v = 1$,

$$u = \frac{x}{y}, \quad w = \frac{1}{y}, \quad \text{con inversa} \quad x = \frac{1}{w}, \quad y = \frac{v}{w},$$

donde $y \neq 0$. Estos difeomorfismos de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ y $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$ en $\{(\xi, w) \in B_1(0) : w \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ (donde $\xi = u \circ \xi = v$) preservan el carácter estable de los puntos singulares a distancia finita en \mathbb{R}^2 , es decir, los retratos fase son topológicamente conjugados; además el sistema inducido en los casquetes completos es topológicamente conjugado al resultante en $B_1(0)$.

De manera más precisa consideremos el caso en que $u = 1$ y observemos que

$$\dot{w} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{\dot{x}}{x^2} = -w^2 P(x, y) = -w^2 P \left(\frac{1}{w}, \frac{v}{w} \right)$$

$$\dot{v} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v}{x} \right) = \frac{x\dot{v} - v\dot{x}}{x^2} = wQ(x, y) - vwP(x, y) = wQ \left(\frac{1}{w}, \frac{v}{w} \right) - vwP \left(\frac{1}{w}, \frac{v}{w} \right).$$

Sean p y q los grados de los polinomios $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ respectivamente, entonces

$$P \left(\frac{1}{w}, \frac{v}{w} \right) = \frac{P^*(v, w)}{w^p}$$

$$Q \left(\frac{1}{w}, \frac{v}{w} \right) = \frac{Q^*(v, w)}{w^q}$$

donde P^* y Q^* son polinomios en u y v . Sin pérdida de generalidad supongamos que $q \geq p$ e introduzcamos un tiempo nuevo τ dado por la relación

$$d\tau = x^{q-1} dt = \frac{dt}{w^{q-1}};$$

si $x > 0$, τ crece cuando t crece; si $x < 0$ y q es impar, τ crece con t ; pero si $x < 0$ y q es par, τ decrece cuando t crece; los casos son análogos cuando t decrece (Figura 26).

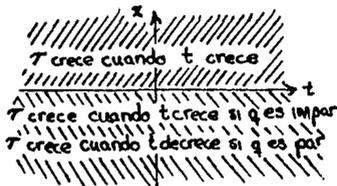


Figura 26.

Como la relación entre los tiempos es invertible en cada uno de los semiplanos ($d\tau/dt \neq 0$), por la regla de la cadena tenemos

$$\frac{dw}{d\tau} = \frac{dw}{dt} \frac{dt}{d\tau} = -w^{q-p+1} P^*(v, w),$$

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{dv}{dt} \frac{dt}{d\tau} = Q^*(v, w) - vw^{q-p} P^*(v, w). \tag{26}$$

Así para $w = 0$

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\tau} &= 0 \\ \frac{dv}{d\tau} &= Q^*(v, 0) \end{aligned} \tag{26a}$$

y tenemos bien definido el campo en el ecuador de S^2 (ya que dicho campo está bien definido en la proyección de éste), en donde el polinomio $Q^*(v, 0)$ puede tener raíces reales y, por tanto, el campo (26) tiene un número finito de puntos de equilibrio aislados. Análogamente cuando $v = 1$ obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\tau'} &= -wQ^{**}(u, w), \\ \frac{du}{d\tau'} &= w^{q-p}P^{**}(u, w) - uQ^{**}(u, w) \end{aligned} \tag{27}$$

donde P^{**} y Q^{**} son polinomios en (u, w) , $d\tau' = y^{q-1}dt = dt/w^{q-1}$. Ahora hemos completado el cálculo del campo inducido en la esfera de Poincaré y podemos analizar la naturaleza estable de las trayectorias "en el infinito".

Ejemplo 2. Considere un oscilador con un tubo de vacío (bulbo) con un circuito de rejilla sintonizada (Figura 27).

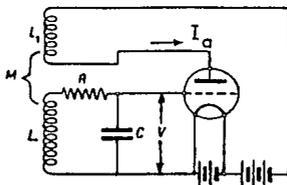


Figura 27.

La ecuación que determina la corriente en el circuito oscilante del tubo es

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int idt = M \dot{I}_a.$$

Supongamos que la corriente en la placa depende sólo del voltage de la rejilla (es decir, despreciamos la reacción de la placa) y supondremos que la característica del tubo está expresada por

$$I_a = I_0 + \frac{2I_s}{\pi} \text{angtan} \left(\frac{g_0 \pi}{2I_s} v_g \right),$$

donde I_s es la corriente de saturación, g_0 la conductancia mutua del tubo en el punto operante y $v_g = \int idt/C$ es el voltage de la rejilla. Además $I_a \rightarrow I_0 + I_s$ asintóticamente cuando $v_g \rightarrow \infty$, por lo que para v_g suficientemente grande consideramos a I_a como constante, es decir, $\dot{I}_a = 0$

Ahora tenemos el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dv_g}{dt} &= \frac{i}{C} = P(v_g, i) \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{R}{L}i - \frac{v_g}{L} = Q(v_g, i).\end{aligned}$$

donde $P(v_g, i)$, $Q(v_g, i)$ son polinomios de grado 1 en (v_g, i) . Para referirnos a nuestros cálculos anteriores escribamos $v_g = x$ e $i = y$. Entonces

$$\begin{aligned}\frac{dw}{d\tau} &= -wP^*(w, v) = -w^2 \frac{v}{Cw} = -\frac{wv}{C} \\ \frac{dv}{d\tau} &= -vP^*(w, v) + Q^*(w, v) = -vw \frac{v}{Cw} + w \left(-\frac{Rv}{Lw} - \frac{1}{Lw} \right) \\ &= -\frac{Rv}{L} - \frac{1}{L} - \frac{v^2}{C},\end{aligned}\tag{28}$$

que para $w = 0$ es

$$\begin{aligned}\frac{dw}{d\tau} &= 0 \\ \frac{dv}{d\tau} &= -\frac{Rv}{L} - \frac{1}{L} - \frac{v^2}{C}\end{aligned}$$

y cuyos nuevos puntos singulares están dados por la ecuación

$$\frac{Rv}{L} + \frac{1}{L} + \frac{v^2}{C} = 0$$

cuyas raíces son

$$v = \frac{-RC \pm \sqrt{R^2C^2 - 4LC}}{2L};$$

por tanto, si $R^2C < 4L$ no hay puntos singulares en el infinito y el ecuador es un ciclo; y si $R^2C > 4L$ hay cuatro puntos fijos en él, dos de los cuales resultan de las intersecciones del casquete $\{(u, v, w) \in S^2 : u > 0, w \neq 0\}$ con los planos

$$v = \frac{-RC + \sqrt{R^2C^2 - 4LC}}{2L}, \quad v = \frac{-RC - \sqrt{R^2C^2 - 4LC}}{2L},$$

y los otros dos son los puntos antípodas. Al linealizar el sistema (28) en los puntos de equilibrio $(w, v) = (0, v_j)$ con $j = 1, 2$, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{dw}{d\tau} &= -v_j w \\ \frac{dv}{d\tau} &= -2 \left(v_j + \frac{RC}{2L} \right) v,\end{aligned}$$

cuyos valores característicos son

$$\lambda_1 = v_j, \quad \lambda_2 = -2 \left(v_j + \frac{RC}{2L} \right),$$

donde $j = 1, 2$. Así para $j = 1$, $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$, y por el teorema de Hartman-Grobman el sistema no lineal (28) tiene una silla en $(0, v_1)$; para $j = 2$, $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$, por tanto, $(0, v_2)$ es un nodo inestable (teorema de Hartman-Grobman).

Así también, para el oscilador lineal con fricción

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega^2 x - 2hy, \end{aligned} \tag{12}$$

el campo inducido en el disco unitario es

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\tau} &= -wv \\ \frac{dv}{d\tau} &= -\omega^2 - 2hv - v^2 \end{aligned} \tag{29}$$

cuyo comportamiento alrededor del ecuador es igual al del sistema arriba descrito; además sabemos que para (12) el origen $(x, y) = (0, 0)$ es el único punto de equilibrio (estable) a distancia finita; como (12) es lineal todas las soluciones tienden al origen y, por tanto, si $h^2 \neq \omega^2$, el infinito es un ciclo inestable (es el α -límite de toda trayectoria en la esfera a excepción de N y S), y en la figura 28 presentamos las posibles disposiciones de las curvas solución en uno de los hemisferios (las curvas en el otro hemisferio son simétricas con respecto al $(0, 0, 0)$).

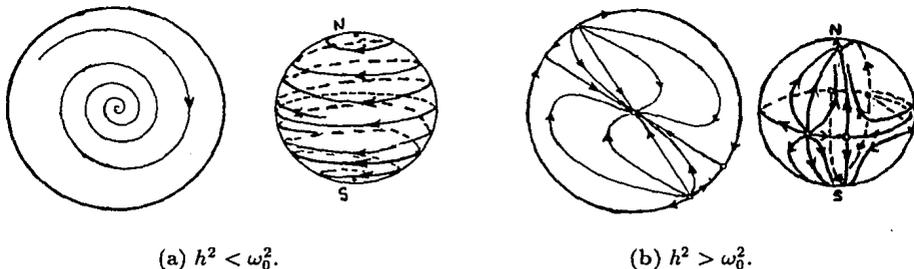
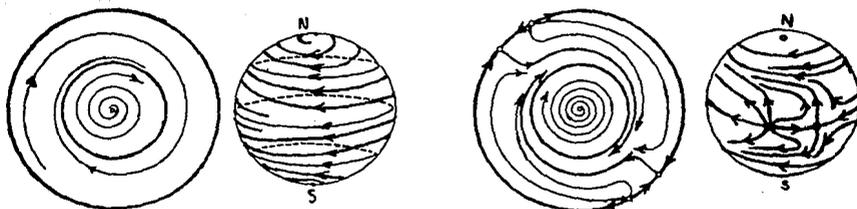


Figura 28. Retratos fase del oscilador lineal con fricción en la esfera de Poincaré.

Así, podemos concluir que para el sistema (28), si $R^2 C < 4L$ el ecuador es un ciclo límite inestable y como $(v_g, i) = (0, 0)$ es un foco inestable el conjunto $A = \{(u, v, w) \in S^2 : 0 < w < 1\}$ no contiene puntos de equilibrio; además $(0, 0, -1)$ y el ecuador no son conjuntos ω -límites de puntos en A , entonces por el teorema de Poincaré-Bendixson en la esfera [Pa], A contiene al menos una órbita cerrada, es decir, existen condiciones iniciales de voltaje y corriente tales que el circuito descrito arriba presenta una oscilación (que es el ω -límite de todas las órbitas con condiciones iniciales en la componente no acotada determinada por el ciclo, es decir, es un ciclo límite semiestable). La disposición de las curvas solución se ilustra en la figura 29.



(a) $R^2C < 4L$.

(b) $R^2C > 4L$.

Figura 29.

4c. El índice de un punto singular en las esferas de Bendixson y de Poincaré. Para finalizar esta sección relacionaremos ambas maneras de obtener campos vectoriales en la esfera a partir de campos en el plano, por medio del teorema del índice de Poincaré-Hopf ([G-P], pag. 134).

La herramienta que utilizamos es el *índice* de un campo vectorial en una variedad² M alrededor de un punto de equilibrio aislado, que se refiere al cambio direccional del campo en una vecindad del punto. Recordemos la definición intuitiva de índice de un campo vectorial X en el plano alrededor de un punto de equilibrio: consideremos una circunferencia S_p alrededor del punto singular p tal que el disco cerrado delimitado por ésta no contenga otro punto singular distinto de p ; el índice de X en el punto p , $ind_p X$, es el número total de vueltas que el vector $\frac{X}{|X|}$ da en S^1 mientras recorremos S_p en el sentido levógiro, contando una vuelta como -1 si es dada en el sentido extrógiro, y como $+1$ en el caso contrario.³ Veamos algunos ejemplos en la figura 30.

² Un campo vectorial en una variedad $M \subseteq \mathbb{R}^N$ es una transformación diferenciable $X: M \rightarrow \mathbb{R}^N$ tal que $X(m) \in T_m M$ (el espacio tangente a M en m) para toda $m \in M$.

³ En el plano, podemos calcular el índice por medio de la integral

$$ind_p X = \frac{1}{2\pi} \int_{S_p} \frac{PdQ - QdP}{Q^2 + P^2}.$$

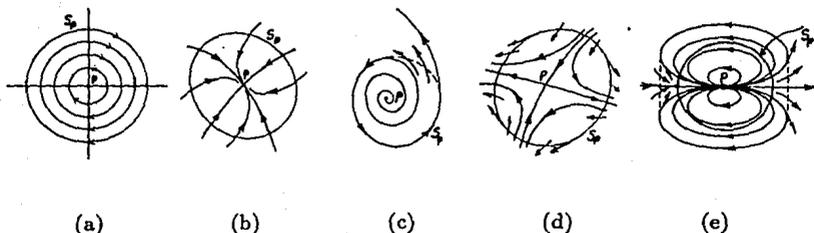


Figura 30. Puntos de equilibrio con índices: (a) +1, (b) +1, (c) +1, (d) -1 y (e) +2.

En nuestro caso nos interesan campos vectoriales X en $M = S^2$, y como ésta es localmente difeomorfa al plano, el índice de un campo en S^2 alrededor de un punto singular p lo definimos por medio de una parametrización; supongamos que $\phi: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$ es una parametrización local alrededor de p tal que $\phi(0) = p$. Inducimos el campo \bar{X} en U (pull back de X) por $\bar{X}(u) = d\phi_u^{-1}X(\phi(u))$ para toda $u \in U$. (vea la función g en la sección 4a), donde $d\phi_u$ es la matriz derivada (invertible) de ϕ en u ; ahora definimos⁴

$$\text{ind}_p X = \text{ind}_0 \bar{X}.$$

Teorema del índice de Poincaré-Hopf. Si X es un campo vectorial en la variedad M compacta y orientable, con un número finito de ceros (puntos de equilibrio), entonces la suma total de los índices de X alrededor de los ceros es igual a $\chi(M)$, la característica de Euler de M . ■

Observemos que al tener campos polinomiales en el plano e inducir campos en toda la esfera, estos últimos tienen un número finito de ceros ya que en el caso de la esfera de Bendixson solo estamos agregando un punto al espacio y, en el caso de la esfera de Poincaré, las ecuaciones (26a) y (27) implican que

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\tau} &= 0 \\ \frac{dv}{d\tau} &= Q^*(v, 0), \end{aligned} \tag{26a}$$

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\tau'} &= 0 \\ \frac{du}{d\tau'} &= -uQ^{**}(u, 0), \end{aligned} \tag{27a}$$

sólo tienen un número finito de ceros. Del teorema obtenemos la siguiente propiedad.

⁴ Esta definición no depende de la parametrización, pero no lo demostramos aquí.

Proposición 4. Sean $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ un campo vectorial (polinomial) en el plano, X_1 el campo inducido en la esfera de Bendixson, X_2 el campo inducido en la esfera de Poincaré y C el conjunto de ceros de X_2 en el ecuador. Supongamos que f tiene n ceros en \mathbf{R}^2 , entonces

$$\text{ind}_N X_1 = 1 + \frac{1}{2} \sum_{p \in C} \text{ind}_p X_2.$$

Demostración. Sean C_1, C_2 y C_3 los conjuntos de ceros de f, X_1 y X_2 , respectivamente. Ya que el índice de un campo alrededor de un cero es invariante bajo difeomorfismos, el índice de los puntos singulares de f en \mathbf{R}^2 no cambia y así tenemos

$$\begin{aligned} 2 = \mathcal{X}(S^2) &= \sum_{p \in C_2} \text{ind}_p X_1 \\ &= \sum_{p \in C_1} \text{ind}_p f + \text{ind}_N X_1 \\ &= \sum_{p \in C_3} \text{ind}_p X_2 \\ &= 2 \sum_{p \in C_1} \text{ind}_p f + \sum_{p \in C} \text{ind}_p X_2 \end{aligned}$$

de donde

$$\text{ind}_N X_1 = 1 + \frac{1}{2} \sum_{p \in C} \text{ind}_p X_2. \quad \blacksquare$$

Así podemos decir que el cero N de X_1 está *explotado* en el ecuador de la esfera de Poincaré, y que las propiedades estables de N para X_1 están distribuidas en los puntos de C para X_2 . Esto nos da una razón cuantitativa del por qué N es un cero difícil para analizar su estabilidad en la esfera de Bendixson (Figura 31). Notemos también que al proyectar estereográficamente la esfera de Poincaré por π_1 , la imagen del ecuador es S^1 (compuesta por trayectorias), que al contraerlo a un punto singular en el plano nos proporciona el retrato fase alrededor de N .

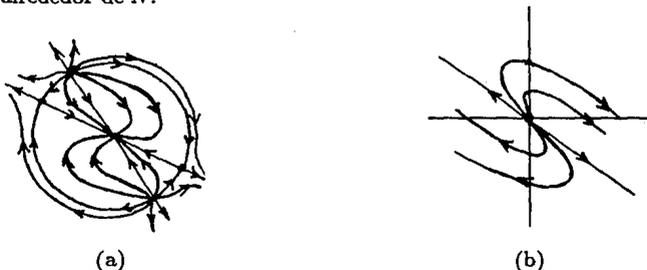


Figura 31. Proyecciones estereográficas con respecto al polo sur de (a) la esfera de Poincaré y (b) la esfera de Bendixson del ejemplo 2.

Por último diremos que ambas maneras de proyectar proporcionan compactaciones del plano; en el caso de la proyección estereográfica obtenemos la compactación por un punto (de Alexandroff); y en el caso de la proyección central, la compactación del plano real al plano proyectivo real (sin identificar los antípodas del ecuador).

Capítulo 2

Teoría de los Osciladores No Lineales

Considere el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \quad (n > 0) \quad (1)$$

donde $\mathbf{f}: W \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ es de clase C^1 . A un punto de equilibrio \mathbf{x}_0 de (1) tal que $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ no tiene valores propios iguales a 0, lo llamamos punto de equilibrio *no degenerado*.

De aquí en adelante siempre que encontremos un punto de equilibrio hiperbólico en un sistema no lineal y analicemos su estabilidad a partir de su linealización, daremos por hecho la aplicación del teorema de Hartman-Grobman.

1. Sistemas Conservativos

En esta sección consideraremos sistemas que son conservativos, es decir, aquéllos en donde despreciamos la disipación de energía, dado lo importantes que resultan ser en los sistemas dinámicos.

Sea $\mathbf{V}: W \rightarrow \mathbf{R}$ una función de clase C^n definida en un abierto $W \subseteq \mathbf{R}^n$. Decimos que $y \in \mathbf{R}$ es un *valor regular* de la función \mathbf{V} si $\mathbf{V}^{-1}(y)$ no contiene puntos críticos¹ de \mathbf{V} .

Definición. Llamamos *primera integral* del sistema (1) a una función $\mathbf{V}: W \rightarrow \mathbf{R}$ de clase C^n tal que su conjunto de puntos críticos tiene medida cero y que para toda curva fase $\mathbf{x}(t)$ de (1) (con $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in W$)

$$\frac{d}{dt} \mathbf{V}(\mathbf{x}(t))|_{t=t_0} \equiv 0 \quad \text{para toda } t_0 \in I(\mathbf{x}_0).$$

¹ Un punto crítico $x \in M$ de una transformación diferenciable $f: M \rightarrow N$ entre variedades diferenciables M y N , es un punto tal que la transformación lineal $df_x: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ no es suprayectiva.

A esta primera integral también le llamamos *ley de conservación* de (1). Debido a que la función V es constante a lo largo de las curvas fase de (1) con respecto al tiempo, las órbitas de (1) están contenidas en los conjuntos de nivel de V (Figura 32). Esto implica que el movimiento del punto $\mathbf{x}(t)$ está restringido a una *hipersuperficie*² $V^{-1}(c)$ ($c \in \mathbf{R}$) de \mathbf{R}^n (tal vez con singularidades³) invariante bajo el flujo; además podemos analizar la dinámica de (1) restringidos a cada hipersuperficie y podemos trabajar en un espacio fase de dimensión $n - 1$. Es claro que si el sistema (1) tiene $m > 1$ primeras integrales y éstas son funcionalmente independientes, las órbitas están contenidas en la intersección transversal de las hipersuperficies determinadas por las funciones, la que es una subvariedad de codimensión m (salvo en los puntos singulares); así, reducimos la dimensión del espacio fase.

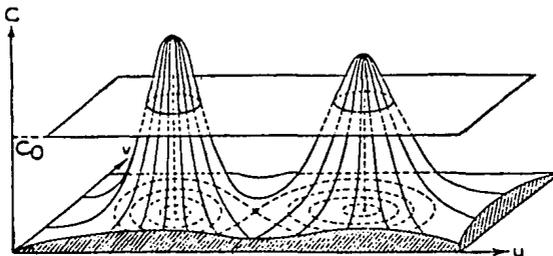


Figura 32. Gráfica y conjuntos de nivel de V .

Definición. Decimos que el sistema (1) es *conservativo* si posee una primera integral.

Denotamos

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt} V(\phi(t, \mathbf{x}))|_{t=0}$$

donde $\phi(t, \mathbf{x})$ es el flujo de (1).

Teorema 1 ([P], pág. 130). *Supongamos que \mathbf{x}_0 es un punto crítico de (1) y que existe una función $V \in C^1(W, \mathbf{R})$ y un subconjunto abierto $W_1 \subseteq W$ con $\mathbf{x}_0 \in W_1$, tales que satisfacen $V(\mathbf{x}_0) = 0$ y $V(\mathbf{x}) > 0$ si $\mathbf{x} \in W_2 = W_1 - \{\mathbf{x}_0\}$. Entonces: (a) si $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ para toda $\mathbf{x} \in W_1$, \mathbf{x}_0 es un punto crítico estable; (b) si $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ para toda $\mathbf{x} \in W_2$, \mathbf{x}_0 es asintóticamente estable; (c) si $\dot{V}(\mathbf{x}) > 0$ para toda $\mathbf{x} \in W_2$, \mathbf{x}_0 es inestable.* ■

Utilizando este teorema en los sistemas conservativos vemos que si \mathbf{x}_0 es un mínimo local estricto de $V = V$, entonces \mathbf{x}_0 es un punto crítico estable de (1), es decir, está contenido en un conjunto cerrado invariante bajo el flujo.

² Una hipersuperficie de \mathbf{R}^n es una subvariedad de \mathbf{R}^n de codimensión 1.

³ Una *singularidad* de $V^{-1}(c)$ es un punto crítico de V contenido en $V^{-1}(c)$.

Un tipo muy importante de sistema conservativo y al que dedicaremos nuestro estudio es el siguiente.

Definición. Sea $H: \mathbf{R}^{2n} \rightarrow \mathbf{R}$ una función de clase C^{2n} . Al sistema

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}} \\ \dot{\mathbf{y}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}\end{aligned}\quad (2)$$

donde $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \cong \mathbf{R}^{2n}$, lo llamamos *sistema hamiltoniano (con n grados de libertad)* y H es la *función hamiltoniana* H .

Notemos que si $(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$ es una curva fase de (2) con condición inicial $(\mathbf{x}(0), \mathbf{y}(0)) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$, entonces

$$\dot{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}} \dot{\mathbf{y}} \equiv 0$$

para toda $t \in I(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$, es decir, H es una primera integral para (2).

Observación 1. Si $y \in \mathbf{R}$ es un valor regular para la función H por el teorema de la función implícita $H^{-1}(y)$ es una subvariedad de \mathbf{R}^n de dimensión $n - 1$ y, por el teorema de Sard (vea el apéndice) casi todo $y \in \mathbf{R}$ es un valor regular.

Observación 2. Supongamos que (2) está definido en el plano,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x}\end{aligned}\quad (2a)$$

donde $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x, y) \in \mathbf{R}^2$. Así, para casi toda $y \in \mathbf{R}$, $H_1^{-1}(y)$ es una variedad de dimensión 1 en el plano, es decir, es difeomorfa al círculo unitario S^1 o al intervalo $(0, 1)$.

Observación 3. En un sistema hamiltoniano en el plano no pueden existir *focos* puesto que si una órbita describe una espiral tendiendo hacia un punto de equilibrio aislado (el punto fijo es el ω -límite de la órbita), entonces todas las órbitas cercanas tienen el mismo ω -límite; esto implica que la función H es localmente constante y no determina a cada una de las órbitas en esa vecindad, pero esto contradice a la definición de primera integral y, por tanto, no existen focos en los sistemas hamiltonianos en el plano.

El siguiente teorema clasifica a los puntos fijos no degenerados de los sistemas hamiltonianos en el plano.

Teorema 2 ([P], pág. 154). *Cualquier punto crítico no degenerado de (2a) es una silla o un centro; más aún, (x_0, y_0) es una silla de (2a) si y sólo si es una silla de la función*

hamiltoniana $H(x, y)$, y es un centro de (2a) si es un mínimo o máximo local estricto de $H(x, y)$. ■

Estudiemos el sistema conservativo (y hamiltoniano) más simple con un grado de libertad

$$\ddot{x} = f(x) \quad x \in \mathbf{R} \quad (3)$$

donde $f: J \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ (J intervalo abierto) es de clase C^k (con k tan grande como la necesitemos), o bien,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= f(x) \end{aligned} \quad (4)$$

con la primera integral (función de energía)

$$H_1(x, y) = \frac{y^2}{2} + U(x), \quad U(x) = - \int_0^x f(u) du,$$

donde $\frac{y^2}{2}$ y $U(x)$ son las energías cinética y potencial del sistema respectivamente; así, por el teorema fundamental del cálculo todo sistema de la forma (3) es conservativo.

Los puntos de equilibrio de (4) tienen la forma $(x, y) = (x_0, 0)$ donde x_0 es un punto crítico de U (x_0 es un cero de f). Observemos además que $H_1(x, y) = H_1(x, -y)$, implica que las órbitas son simétricas con respecto al eje x . Por la observación 2, para estudiar las curvas de nivel (de energía), debemos estudiar los puntos críticos de H_1 y sus vecindades.

Es conveniente imaginar una pelota rodando en una concavidad de la gráfica del potencial U . La energía cinética es no negativa, lo que implica que, la energía potencial es menor o igual a la energía total. Cuanto menor sea la energía potencial, mayor será la velocidad, es decir, la pelota no puede saltar fuera del pozo de potencial levantándose más alto que el nivel determinado por su energía inicial. Cuando la pelota cae en el pozo ésta gana velocidad (Figura 33).

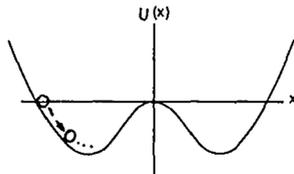


Figura 33.

Dado que los puntos críticos degenerados de U también nos interesan supongamos que $U(0) = 0$, $U'(0) = 0, \dots, U^{(k-1)}(0) = 0$ y $U^{(k)}(0) \neq 0$, y sin pérdida de generalidad supongamos también que 0 es un cero de U (hemos trasladado a x_0 al origen). Por el

teorema fundamental del cálculo tenemos que

$$\begin{aligned}
 U(x) &= \int_0^x U'(u) du = x \int_0^1 U(s_1 x) ds_1, \\
 U'(x) &= x \int_0^1 U(s_2 x) ds_2, \\
 &\vdots \\
 U^{(k-1)}(x) &= x \int_0^1 U^{(k)}(s_k x) ds_k,
 \end{aligned}$$

y por tanto,

$$U(x) = x^k g(x)$$

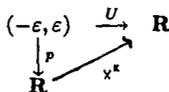
donde

$$g(x) = \int_0^1 s_1^{k-1} \dots \int_0^1 s_{k-1} \int_0^1 U^{(k)}(s_k s_{k-1} \dots s_1 x) ds_k ds_{k-1} \dots ds_1,$$

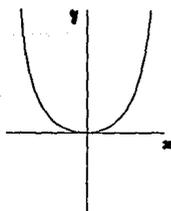
es una función continua (por lo menos), con $g(0) > 0$ si $U^{(k)}(0) > 0$ y $g(0) < 0$ si $U^{(k)}(0) < 0$; de hecho $g(x) > 0$ (resp. $g(x) < 0$) en toda una vecindad de 0. Esto significa que U es localmente equivalente a la función $h(x) = x^k$ bajo el cambio local de coordenadas "por la derecha" p

$$p(x) = \pm x(\pm g(x))^{\frac{1}{k}},$$

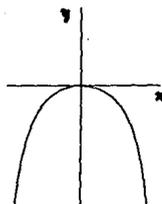
según sea el caso (que k sea par o impar).



Podemos expresar este resultado con gráficas como sigue: si k es par, U tiene localmente la forma de una parábola de grado k (Figura 34),



(a)



(b)

Figura 34. (a) $U^{(k)}(0) > 0$; (b) $U^{(k)}(0) < 0$.

y si k es impar, U tiene localmente la forma de una parábola "cúbica" de grado k (Figura 35).



Figura 35. (a) $U^{(k)}(0) > 0$; (b) $U^{(k)}(0) < 0$.

Esto implica que localmente el retrato fase de (4) alrededor del punto de equilibrio $(x_0, 0)$ para los diferentes valores de k es: un centro si k es par y $U^{(k)}(0) > 0$ (Figura 36);

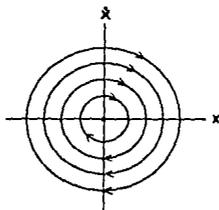


Figura 36. Un punto centro.

una silla si k es par y $U^{(k)}(0) < 0$ (Figura 37);

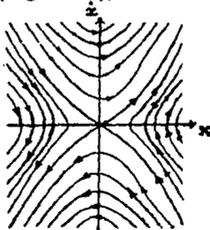


Figura 37. Un punto silla.

cúspides si k es impar y $U^{(k)}(0) \neq 0$ (Figura 38).

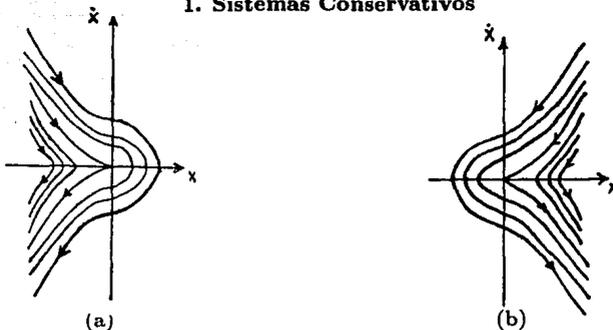


Figura 38. (a) $U^{(k)}(0) > 0$; (b) $U^{(k)}(0) < 0$.

La linealización de (4) en un punto de equilibrio no degenerado $(x_0, 0)$ es

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'(x_0) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

cuyos valores propios son $\pm \sqrt{f'(x_0)}$, por lo que es claro que $(x_0, 0)$ es una silla de (4) si $U(x_0)$ es un valor máximo y es un centro si $U(x_0)$ es un valor mínimo, lo que ya sabemos por el teorema 2 y por los comentarios anteriores.

Observación 4. Para que exista una órbita cerrada Γ de (4) es necesario que la gráfica de la energía potencial tenga una concavidad como la siguiente para un nivel de energía E_0 dado (Figura 39).

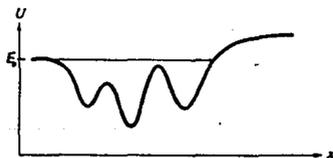


Figura 39.

Si U tiene un número finito de puntos críticos en el intervalo $[a, b]$ correspondiente y todos ellos son no degenerados, vemos que

$$\text{número de mínimos de } U = \text{números de máximos de } U + 1,$$

es decir,

$$\text{número de centros de (4)} = \text{números de sillas de (4)} + 1.$$

Esto puede verificarse también usando la teoría del índice y los resultados anteriores.

Ejemplo 1. Consideremos el movimiento de un punto material con masa m colocado en un círculo de radio r que gira con respecto a un eje vertical que coincide con un diámetro del círculo con velocidad angular constante ω (Figura 40).

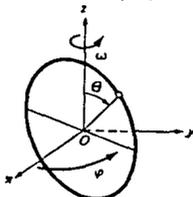


Figura 40.

Un sistema de este tipo es un péndulo fijo a un punto de un eje vertical que gira.

Sea $\theta \in [0, \pi]$ el ángulo comprendido entre el eje vertical y el radio del círculo que une al centro de éste con m . El sistema queda descrito por

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \phi \\ I\dot{\phi} &= m\omega^2 r^2 (\cos \theta - \lambda) \sin \theta \end{aligned} \quad (5)$$

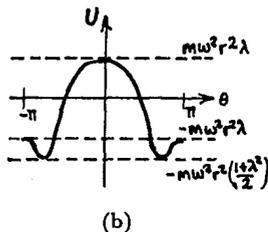
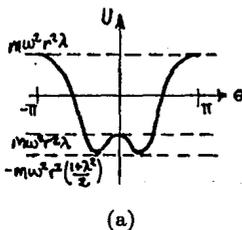
donde $\lambda = \frac{g}{\omega^2 r}$ e I es el momento de inercia del sistema con respecto al eje horizontal; ahora, el espacio fase es cilíndrico (por la periodicidad del sistema con respecto a θ), el sistema tiene la primera integral

$$H(\theta, \phi) = \frac{I\phi^2}{2} - m\omega^2 r^2 \left(\frac{\sin^2 \theta}{2} + \lambda \cos \theta \right),$$

donde

$$U = -m\omega^2 r^2 \left(\frac{\sin^2 \theta}{2} + \lambda \cos \theta \right),$$

y los puntos críticos de (5) son $(0, 0)$, $(\pi, 0)$ y $(\text{angcos } \lambda, 0)$ (donde $(\text{angcos } \lambda, 0)$ denota dos puntos críticos si $|\lambda| \leq 1$, dado que angcos es bivaluada al restringir su codominio a $[-\pi, \pi]$). Veamos las gráficas de U para diferentes valores de λ en la figura 41.



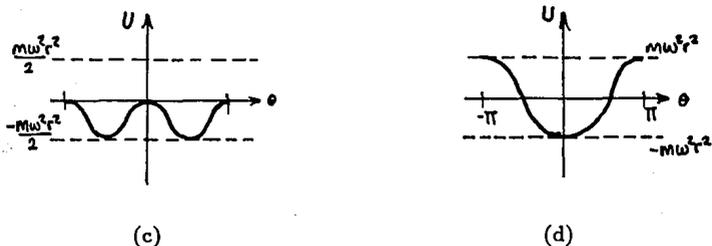


Figura 41. Gráficas de $U = -m\omega^2 r^2 \left(\frac{\text{sen}^2 \theta}{2} + \lambda \cos \theta \right)$ para (a) $0 < \lambda < 1$, (b) $-1 < \lambda < 0$, (c) $\lambda = 0$ y (d) $\lambda = 1$.

Así, obtenemos los retratos fase siguientes⁴ (Figura 42).

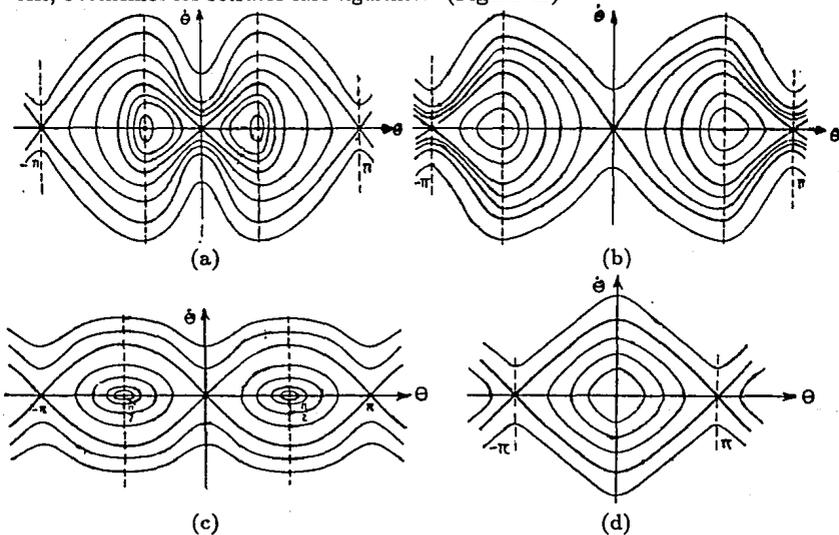


Figura 42. Retratos fase de (5) para (a) $0 < \lambda < 1$, (b) $-1 < \lambda < 0$, (c) $\lambda = 0$ y (d) $\lambda = 1$.

Por lo anterior sabemos que si $\lambda = 1$ el sistema experimenta oscilaciones similares a las del péndulo sin fricción, y que si $0 < |\lambda| < 1$ entonces el origen es inestable y el punto material permanece oscilando sin tocar el eje vertical (una órbita de alguno de los centros)

⁴ Observemos en la figura 41 que los puntos críticos angcos λ se colapsan a 0, y es por esto que el 0 es un punto crítico "múltiple" del sistema (5) ($U^{(4)}(0)$ es la primera derivada distinta de cero).

o recorre la circunferencia en un solo sentido sin parar (una órbita que rodea al cilindro). De hecho, los retratos fase en el cilindro para $0 < \lambda < 1$ y para $-1 < \lambda < 0$ son idénticos salvo por una rotación de π .

Observación 5. Los periodos de las curvas de un centro en un sistema conservativo dependen de la amplitud de la órbita o, dicho de otro modo, dependen de las condiciones iniciales; por esto, dos puntos cercanos que pertenecen a dos órbitas diferentes no permanecen cercanos siempre, sino que se alejan y se acercan un número infinito de veces conforme transcurre el tiempo. Consideremos por ejemplo el sistema hamiltoniano

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y\sqrt{x^2 + y^2} \\ \dot{y} &= x\sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

con función hamiltoniana $H(x, y) = -\frac{1}{3}(x^2 + y^2)^{3/2}$ y cuyas soluciones son $(x(t), y(t)) = (r_0 \cos(r_0 t + \theta_0), r_0 \sin(r_0 t + \theta_0))$ donde $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2$ y $\theta_0 = \arctan(y_0/x_0)$. Los periodos de las órbitas $T_{r_0} = \frac{2\pi}{r_0} \rightarrow \infty$ conforme la amplitud $r_0 \rightarrow 0$.

Observación 6. Por el teorema 3 del capítulo 1 y el teorema 1 de este capítulo sabemos que el periodo de las órbitas periódicas muy cercanas a un punto crítico centro tiende al periodo (que es uniforme) de las soluciones periódicas del sistema linealizado si éste es un oscilador armónico. También sabemos por el teorema 3 del capítulo 1 que el periodo de una curva del centro tiende a ∞ cuando su condición inicial tiende al punto silla, ya que le toma un tiempo arbitrariamente grande alejarse de la silla.

En el ejemplo 1 observamos que existen órbitas periódicas Γ de tres tipos en el espacio fase cilíndrico, que son: (a) aquellas que rodean sólo al punto singular que es un centro (Figura 43a), (b) aquellas que rodean varios puntos críticos y separatrices (Figura 43b), y aquellas que le dan la vuelta al cilindro fase (Figura 43c).

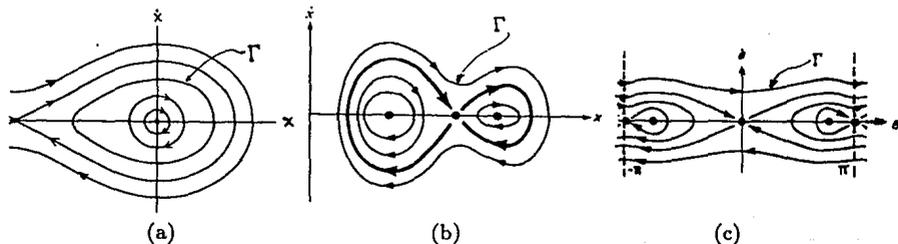


Figura 43.

Ahora continuemos nuestro estudio de sistemas conservativos con los sistemas lagrangianos⁵

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (6)$$

donde $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, cuya función lagrangiana $L: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ está dada por

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q}), \quad T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \geq 0,$$

donde

$$A(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} a_{11}(\mathbf{q}) & \cdots & a_{1n}(\mathbf{q}) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(\mathbf{q}) & \cdots & a_{nn}(\mathbf{q}) \end{pmatrix}.$$

es invertible para cada $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^n$; a T le llamamos la energía cinética y a U la energía potencial del sistema. Observemos que el oscilador armónico es un ejemplo de un sistema lagrangiano.

Podemos escribir las ecuaciones de Lagrange (5) de manera equivalente como un sistema hamiltoniano de $2n$ ecuaciones de primer orden como (1). Observemos que la relación

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

es invertible; por tanto, $\dot{\mathbf{q}} = A^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{p}$. Sea $H: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ dada por

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{p} \cdot A^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{p} - L(\mathbf{q}, A^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{p}). \quad (7)$$

Calculemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} &= 2A^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{p} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{\partial A^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{p}}{\partial \mathbf{p}} \\ &= 2\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q})A^{-1}(\mathbf{q})Id \\ &= 2\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}, \end{aligned}$$

(ya que $A(\mathbf{q})$ es simétrica) y

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{p} \cdot A^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{p} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{\partial A^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}} \\ &= -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = -\dot{\mathbf{p}}, \end{aligned}$$

por (6) y ya que

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{p} \cdot A^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{\partial A^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}}.$$

⁵ Estas ecuaciones resultan de algunos razonamientos del cálculo variacional y de la mecánica clásica, vea por ejemplo [A], capítulo 4.

Así, vemos que

$$\begin{aligned}\dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}\end{aligned}\quad (8)$$

es un sistema conservativo con la primera integral H dada en (7), y por ser equivalente a (6), éste también es conservativo.

Teorema 3. *El punto $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0)$ es un punto de equilibrio de (8) si y sólo si $\dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0}$ y \mathbf{q}_0 es un punto crítico de la energía potencial, es decir,*

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) = \mathbf{0}.$$

Demostración. En (8)

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0) = \mathbf{0}$$

implica que $\dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0}$, y como

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

entonces

$$\mathbf{0} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{0}, \mathbf{q}_0) = -\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{0}) - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0).$$

Inversamente, si $\dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0}$ y

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) = \mathbf{0},$$

entonces

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{0}, \mathbf{q}_0) = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

y, por tanto, $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ es un punto de equilibrio. ■

Teorema 4. *Si el punto \mathbf{q}_0 es un mínimo local estricto de la función de energía entonces $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$ es un punto de equilibrio estable.*

Demostración. Sea V una vecindad de \mathbf{x}_0 . Existe $r > 0$ tal que $B_r(\mathbf{x}_0) \subseteq V$. Sean $S_r = \overline{B_r(\mathbf{x}_0)} - B_r(\mathbf{x}_0)$ la esfera de radio r centrada en \mathbf{x}_0 y $E_0 = \min\{H(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbf{R}^{2n}\}$ que está bien definido por la continuidad de H y la compacidad de S_r (Figura 44).

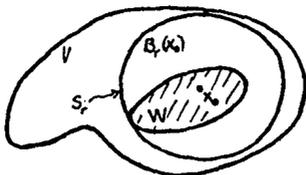


Figura 44.

La componente conexa W del conjunto $\{x \in \mathbb{R}^{2n} : H(x) \leq E_0\}$ que contiene a x_0 , está contenida en V , es decir, $W \subseteq V$ y además W es un conjunto invariante bajo el flujo; por tanto, x_0 es un punto de equilibrio estable. ■

Observemos que también podemos concluir la demostración del teorema 4 utilizando el teorema 1.

En particular, $H(0, q) = T(q, 0) - U(q) = U(q) > U(q_0)$, es decir, q_0 es un mínimo local estricto de U como sucedió antes para el sistema conservativo más simple. Así pues, estudiemos también el comportamiento de las soluciones de (6) alrededor de los puntos de equilibrio.

Proposición. Para linealizar (6) en el punto de equilibrio $q = 0$ (hemos trasladado el punto q_0 al origen), es suficiente reemplazar la energía cinética

$$T = \frac{1}{2} \sum a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

por su valor en $q = 0$

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad a_{ij} = a_{ij}(0),$$

y reemplazar la energía potencial $U(q)$ por su parte cuadrática

$$U_2 = \frac{1}{2} \sum b_{ij} q_i q_j, \quad b_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}(0).$$

Demostración. Una vez más utilicemos el sistema (8). El punto de equilibrio correspondiente es $(p, q) = (0, 0)$ y

$$H(p, q) = p \cdot \dot{q} - L(q, \dot{q}) = T(q, A^{-1}(q)p) + U(q).$$

Observemos que

$$\frac{\partial^2 T}{\partial p^2}(0, 0) = A^{-1}(0),$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 T}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{p}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) &= \mathbf{O} = \frac{\partial^2 T}{\partial \mathbf{q}^2}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \\
 &= \frac{\partial^2 T}{\partial \mathbf{p} \partial \mathbf{q}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{p}^2}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \\
 &= \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{p} \partial \mathbf{q}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{p}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \\
 \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{q}^2}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) &= U_2(\mathbf{0})
 \end{aligned}$$

donde \mathbf{O} es la matriz cero de rango n . Si

$$\mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \left(-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right),$$

entonces

$$D\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & -U_2(\mathbf{0}) \\ A^{-1}(\mathbf{0}) & \mathbf{O} \end{pmatrix};$$

por tanto, el sistema linealizado de (8) es

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{p}} &= -U_2(\mathbf{0})\mathbf{q} \\
 \dot{\mathbf{q}} &= A^{-1}(\mathbf{0})\mathbf{p}
 \end{aligned}$$

que es el sistema hamiltoniano correspondiente al sistema lagrangiano

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_2}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L_2}{\partial \mathbf{q}} = 0$$

donde $L_2 = T_2 - U_2$ y L_2 y T_2 son como en el enunciado de la proposición. ■

Vemos así que el sistema linealizado está dado en términos de formas cuadráticas y por ello existe una manera de desacoplarlo.

Definición. A los movimientos en una vecindad de un punto de equilibrio $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$ en un sistema linealizado ($L_2 = T_2 - U_2$) les llamamos *oscilaciones pequeñas*, aun cuando tales movimientos no sean propiamente oscilatorios. En el caso en que $\mathbf{q} = q \in \mathbf{R}$ al periodo y a la frecuencia les llamamos *periodo de oscilaciones pequeñas* y *frecuencia de oscilaciones pequeñas*, respectivamente.

Proposición. Un par de formas cuadráticas $\mathbf{q} \cdot A\mathbf{q}$ y $\mathbf{q} \cdot B\mathbf{q}$, la primera de las cuales es definitivamente positiva, pueden reducirse a ejes principales (diagonalizarse simultáneamente) mediante un cambio lineal de coordenadas $\mathbf{p} = C\mathbf{q}$, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$. ■

De hecho, podemos considerar a $\mathbf{q} \cdot A\mathbf{q}$ como el producto escalar canónico y luego reducir $\mathbf{q} \cdot B\mathbf{q}$ a ejes principales. Así, el producto escalar en las coordenadas \mathbf{p} se expresa como

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = \sum_{i=1}^n p_i^2.$$

Sean \mathbf{p} tales coordenadas, entonces $\dot{\mathbf{p}} = C\dot{\mathbf{q}}$ por linealidad, y

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^2 \quad \text{y} \quad U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i \dot{p}_i^2$$

donde los números λ_i son los valores propios de la forma B con respecto a A . Así,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L_2}{\partial \dot{\mathbf{p}}} - \frac{\partial L_2}{\partial \mathbf{p}} \\ &= \begin{pmatrix} \ddot{p}_1 + \lambda_1 p_1 \\ \vdots \\ \ddot{p}_n + \lambda_n p_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

es decir, el sistema queda desacoplado en n osciladores lineales (sin fricción) y hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 5. *Un sistema que experimenta oscilaciones pequeñas puede desacoplarse en n sistemas unidimensionales (osciladores lineales) que desarrollan oscilaciones pequeñas.* ■

Recordemos que para un oscilador lineal $\ddot{p} + \lambda p = 0$ tenemos tres casos (vea el capítulo 1):

CASO 1. Si $\lambda = \omega^2 > 0$, la solución

$$p(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \tag{10}$$

es periódica de periodo $\frac{2\pi}{\omega}$.

CASO 2. Si $\lambda = 0$, $\ddot{p} = 0$, $\dot{p}(t) = c_1$, $p(t) = c_1 t + c_2$ que es estable (Figura 45).

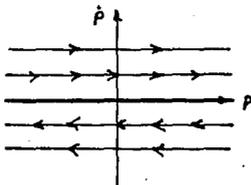


Figura 45.

CASO 3. Si $\lambda = -k^2 < 0$, los valores propios son $\pm k$, por lo que el punto de equilibrio es una silla.

Definición. El movimiento periódico (10) es llamado una *oscilación característica* del sistema (6) si λ es alguno de los λ_i ($1 \leq i \leq n$), y el número ω es llamado la *frecuencia característica*⁶. También llamamos oscilaciones características a los movimientos donde $\lambda = -k^2 < 0$ y $\omega = \sqrt{\lambda}$ (número complejo) es la frecuencia característica.

⁶ Las oscilaciones características también son llamadas *oscilaciones principales* o *modos normales*.

Observación 7. Todas las oscilaciones pequeñas se desacoplan en oscilaciones características y por ello las oscilaciones pequeñas generalmente no son periódicas, ya sea porque las razones entre las frecuencias características son números irracionales o por la inestabilidad de alguna de las oscilaciones características. En cualquier caso, el número máximo de periodos diferentes que podemos tener por las combinaciones lineales de oscilaciones características es $2^n - 1$.

Veamos dos ejemplos.

Ejemplo 2. Consideremos el sistema de dos péndulos con puntos de suspensión situados a la misma altura, de longitud $l_1 = l_2 = 1$ y masa $m_1 = m_2 = 1$ colocados en un campo gravitacional con $g = 1$. Supongamos que los péndulos están conectados por un resorte sin peso cuya longitud es igual a la distancia entre los puntos de suspensión de los péndulos (Figura 46).

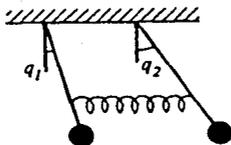


Figura 46. Péndulos acoplados por un resorte.

Denotemos por q_1, q_2 a los ángulos de inclinación de los péndulos. Entonces para las oscilaciones pequeñas de este sistema

$$T = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) \quad \text{y} \quad U = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2 + \alpha(q_1 - q_2)^2)$$

donde $\frac{1}{2}\alpha(q_1 - q_2)^2$ es la energía potencial de la elasticidad del resorte.

Sean

$$p_1 = \frac{q_1 + q_2}{\sqrt{2}}, \quad p_2 = \frac{q_1 - q_2}{\sqrt{2}},$$

entonces

$$q_1 = \frac{p_1 + p_2}{\sqrt{2}}, \quad q_2 = \frac{q_1 - q_2}{\sqrt{2}},$$

y ambas formas cuadráticas han sido reducidas a ejes principales

$$T = \frac{1}{2}(\dot{p}_1^2 + \dot{p}_2^2) \quad \text{y} \quad U = \frac{1}{2}(\omega_1^2 p_1^2 + \omega_2^2 p_2^2)$$

donde $\omega_1 = 1$ y $\omega_2 = \sqrt{1 + 2\alpha}$, por lo que los conjuntos de nivel de U son elipses (Figura 47) y los conjuntos de nivel de la función hamiltoniana H correspondiente son elipsoides tridimensionales en \mathbf{R}^4 .

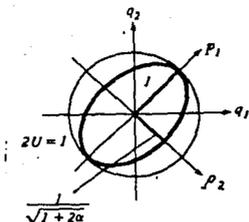


Figura 47. Conjuntos de nivel de U .

Así, las dos oscilaciones características son las siguientes:

1. Cuando $p_2 = 0$ ($q_1 = q_2$) ambos péndulos se mueven en fase con la frecuencia original 1, y el resorte no tiene efecto alguno sobre ellos (Figura 48a).
2. Cuando $p_1 = 0$ ($q_1 = -q_2$) los péndulos se mueven en fase opuesta con frecuencia $\omega_2 > 1$ debido a la acción del resorte (Figura 48b).

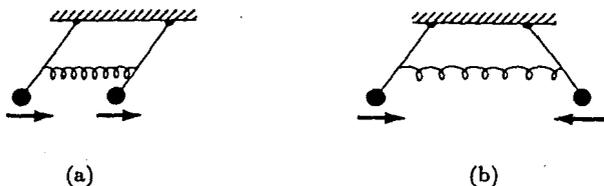


Figura 48.

Ahora supongamos que el resorte es muy débil ($\alpha \ll 1$), entonces ocurre un efecto interesante llamado *intercambio de energía*, que ilustramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3. Supongamos que los péndulos están en reposo en el momento inicial, y a uno de ellos le es dada una velocidad inicial $\dot{q}_1 = v$. Mostraremos que después de algún tiempo T el primer péndulo estará casi en reposo y toda la energía se habrá transmitido al segundo.

Se sigue de las condiciones iniciales que $p_1(0) = p_2(0) = 0$ y por tanto, $p_1(t) = c_1 \sin t$ y $p_2(t) = c_2 \sin \omega t$ con $\omega = \sqrt{1+2\alpha} \approx 1 + \alpha$ ($\alpha \ll 1$). Ya que $\dot{p}_1(0) = \dot{p}_2(0) = \frac{v}{\sqrt{2}}$, $c_1 = \frac{v}{\sqrt{2}}$ y $c_2 = \frac{v}{\omega\sqrt{2}}$ y las soluciones tienen la forma

$$q_1(t) = \frac{v}{2} \left(\sin t + \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right)$$

$$q_2(t) = \frac{v}{2} \left(\sin t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right)$$

o bien, al observar que

$$\frac{v}{\omega} \sin \omega t = v \sin \omega t + v\left(\frac{1}{\omega} - 1\right) \sin \omega t \approx v \sin \omega t$$

ya que $v\left(\frac{1}{\omega} - 1\right) \sin \omega t$ es muy pequeño porque α lo es,

$$q_1(t) = \frac{v}{2}(\sin t + \sin \omega t) = v \cos \epsilon t \sin \omega' t$$

$$q_2(t) = \frac{v}{2}(\sin t - \sin \omega t) = v \cos \omega' t \sin \epsilon t$$

donde $\epsilon = \frac{\omega-1}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$ y $\omega' = \frac{\omega+1}{2} \approx 1$. La cantidad $\epsilon \approx \frac{\alpha}{2}$ es pequeña y, por tanto, q_1 experimenta una oscilación de frecuencia $\omega' \approx 1$ con amplitud que cambia lentamente $v \cos \epsilon t$. Después del tiempo $T = \frac{\pi}{2\epsilon} \approx \frac{\pi}{\alpha}$ esencialmente sólo el segundo péndulo estará oscilando; después de el tiempo $2T$ sólo estará oscilando el primero y así sucesivamente (Figuras 49 y 50).

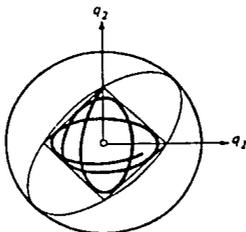


Figura 49. Intercambio de energía de los péndulos acoplados del ejemplo 3.

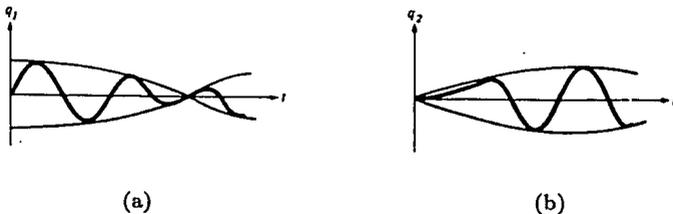


Figura 50. Las oscilaciones de (a) q_1 y (b) q_2 respectivamente.

2. Sistemas No Conservativos

Hemos visto que en los osciladores lineales con fricción no existen los movimientos periódicos y que en los sistemas conservativos éstos aparecen alrededor de centros y sus amplitudes son determinadas por las condiciones iniciales. Ahora estudiaremos dos tipos de sistemas donde las oscilaciones están determinadas por el sistema mismo: los sistemas *disipativos* y los *auto-oscilantes*.

En los ejemplos que estudiamos, debido a la idealización que hacemos de ciertos elementos, trabajaremos sólo un plano fase pero varias ecuaciones diferenciales para describirlos en distintas regiones del plano, y las curvas fase las obtendremos "pegando" las curvas de cada ecuación en la frontera de cada una de las regiones.

2a. Sistemas disipativos. En este caso la ecuación de Lagrange es

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} - \Phi = 0 \quad (11)$$

donde $q \in \mathbf{R}$ y Φ es una función de \dot{q} . Al multiplicar (11) por \dot{q} vemos que

$$\dot{W} - \Phi \dot{q} = 0$$

donde $W = \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L$ es la energía total del sistema. Si

$$\Phi \dot{q} \leq 0 \quad (12)$$

la energía del sistema (11) decrece. A los sistemas (11) que satisfacen (12) los llamamos *disipativos*.

Observación 1. Puesto que la energía de un sistema disipativo siempre decrece, no pueden existir movimientos periódicos en él.

Ahora veamos dos ejemplos de sistemas disipativos en los que la función Φ tiene características distintas. En el primer ejemplo Φ es diferenciable en todos los puntos y en el segundo es discontinua en un punto.

Ejemplo 1. Consideremos el péndulo con fricción. Sea $\Phi = -b\dot{q}$ con $b > 0$, entonces $\Phi \dot{q} = -b\dot{q}^2 \leq 0$ para toda \dot{q} . El lagrangiano es

$$L = \frac{I\dot{\phi}^2}{2} + mgl(\cos\phi - 1)$$

y la ecuación de Lagrange es un sistema disipativo

$$I\ddot{\phi} + b\dot{\phi} + mgl\sin\phi = 0,$$

$$\dot{\phi} = \psi$$

$$I\dot{\psi} = -mgl\sin\phi - b\psi$$

cuyos puntos singulares son $(k\pi, 0)$ ($k \in \mathbf{Z}$) y cuya linealización en $(k\pi, 0)$ es

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ I\dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -mgl\cos k\pi & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}.$$

El punto de equilibrio $(k\pi, 0)$ es una silla si k es impar; es un foco estable si k es par y $b^2 < 4Imgl$ y, es un nodo impropio estable si k es par y $b^2 > 4Imgl$ (vea la sección 2 del capítulo 1). En la figura 54 mostramos el retrato fase del sistema.

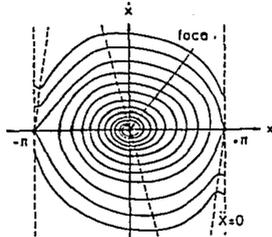


Figura 54.

Así, el péndulo después de dar un número finito de revoluciones completas pierde velocidad y su oscilación llega a ser amortiguada.

Ejemplo 2. Consideremos un bloque que tiene una masa m , que yace sobre una superficie y que está sujeto a dos paredes por dos resortes idénticos (Figura 55).

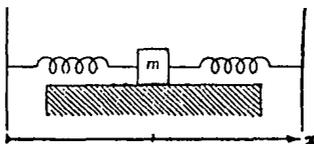


Figura 55.

La ecuación de movimiento es

$$m\ddot{x} + kx = \Phi \tag{13}$$

donde $k = m\omega^2$ y

$$\Phi = \begin{cases} -a\omega^2 & \text{si } \dot{x} \geq 0 \\ a\omega^2 & \text{si } \dot{x} < 0 \end{cases}$$

es la fricción (que es constante en valor absoluto pero discontinua en 0). Así, este sistema es disipativo. Observemos que

$$m\ddot{x} + kx = -a\omega^2 \tag{3a}$$

es un oscilador armónico cuyo centro es $(-a, 0)$ y

$$m\ddot{x} + kx = a\omega^2 \tag{3b}$$

es otro oscilador armónico cuyo centro es $(a, 0)$, y que cada uno describe una fase del sistema según sea que $\dot{x} > 0$ o que $\dot{x} < 0$ respectivamente. Para dibujar el retrato fase

de (13), usamos las curvas de (3a) en aquellos puntos en que $\dot{x} > 0$ y usamos las curvas de (3b) en los puntos en los que $\dot{x} < 0$ (Figura 56); para los puntos en los que $\dot{x} = 0$ sólo "pegamos" las curvas fase de ambas mitades del plano.

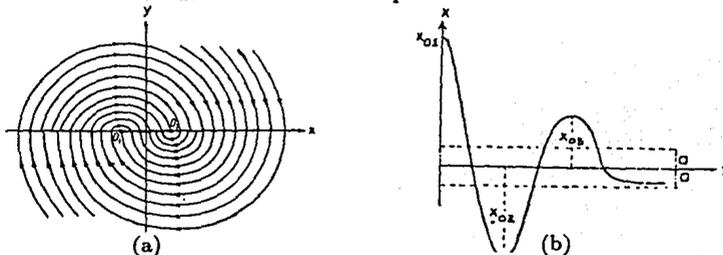


Figura 56. (a) Retrato fase de (13); (b) gráfica de la solución $x(t)$ de (13).

Para aquellos puntos $(x, 0)$ con $-a \leq x \leq a$ las curvas fase de ambos osciladores armónicos llegan con sentidos opuestos, es decir, el movimiento no puede continuar y estos puntos son *estados de equilibrio*¹; esto se debe a que la fuerza de restauración de los resortes cumple con que $|kx| < am\omega^2$. Así, hemos obtenido un movimiento periódico amortiguado para x suficientemente grande ($|x| \gg a$), con periodo condicionado $T = \frac{2\pi}{\omega}$ hasta antes de tocar el intervalo $[-a, a]$ y el amortiguamiento es como sigue: si $x(t)$ es solución de (13) con $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = 0$ entonces $|x(T/2)| = |x_0 - 2a|$, $|x(T)| = |x_0 - 4a|$, y así sucesivamente, es decir, el movimiento es amortiguado de acuerdo a una progresión geométrica.

2b. Sistemas auto-oscilantes. En este inciso trabajamos con ecuaciones del siguiente tipo

$$\ddot{x} + kx = \phi(\dot{x})$$

donde ϕ representa tanto el amortiguamiento del sistema por disipación de energía como la compensación de esta disipación mediante un estímulo externo.

En esta sección trabajamos básicamente con tres ejemplos en los que ϕ tiene diferentes propiedades.

Ejemplo 3. Consideremos el circuito mostrado en la figura 57.

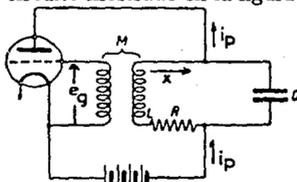


Figura 57.

¹ Estos puntos no son puntos de equilibrio ya que ni siquiera tenemos un campo vectorial bien definido en ellos, sin embargo, ellos corresponden a estados del sistema en que las fuerzas que actúan sobre el punto material están equilibradas.

Este esquema² contiene un circuito resonante en paralelo, conectado en serie con la placa del bulbo y el acoplamiento de retroalimentación incluido en el circuito de la rejilla. Despreciamos la reacción de la placa y llamamos x a la corriente de la rama del circuito que contiene la inductancia y que está conectada a la placa. Así, la ecuación que representa el comportamiento del circuito es

$$L\dot{x} + Rx + \frac{1}{C} \int (x - i_p) dt = 0,$$

que implica que

$$L\ddot{x} + R\dot{x} + \frac{x}{C} = \frac{i_p}{C} = \frac{f(e_g)}{C}$$

donde e_g es la energía electromotriz e $i_p = f(e_g)$ es la transferencia característica del bulbo (la corriente de la placa como función del voltaje de la rejilla).

Idealizamos esta relación haciendo a f constante por pedazos

$$f(e_g) = \begin{cases} I_s & \text{si } e_g > 0 \\ 0 & \text{si } e_g \leq 0. \end{cases}$$

Por tanto, consideremos el siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x &= \omega_0^2 c & \dot{x} &> 0 & (a) \\ \ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0 & \dot{x} &< 0 & (b) \end{aligned} \tag{14}$$

donde $c = I_s > 0$ y $h = \frac{R}{2L}$ es muy pequeña (ahora $\phi = \omega_0^2 f(e_g) - 2h\dot{x}$). Ambas ecuaciones son osciladores lineales con fricción que presentan oscilaciones amortiguadas idénticas (con el mismo periodo T , decrecimiento logarítmico d , etc.) pero con distinto punto singular (el de (4a) es $(c, 0)$ y el de (4b) es $(0, 0)$). El término $\omega_0^2 c - 2h\dot{x}$ es una compensación de la energía disipada en el lapso en que $\dot{x} < 0$. Las soluciones de (4a) son

$$x_1(t) = Ae^{-ht} \cos(\omega t - \alpha)$$

donde $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}$ y, las soluciones de (4b) son

$$x_2(t) = c + Be^{-ht} \cos(\omega t - \beta).$$

Las soluciones que deseamos para el sistema (14) las construimos pegando arcos de las soluciones de ambas ecuaciones. Dado un punto (x_0, \dot{x}_0) , digamos que $\dot{x}_0 > 0$, la curva fase de (4a) que pasa por él cruza el eje x en $(x_1, 0)$ ($x_1 > 0$) después de un tiempo finito, momento en el cual el punto comenzará a moverse sobre la curva fase de (4b) que pasa por $(x_1, 0)$; el pegado es análogo para aquellos puntos con $\dot{x}_0 < 0$. Observemos que el arco

² Las bobinas deben conectarse de tal modo que $M > 0$ para que $e_g > 0$ implique que $\dot{x} > 0$.

construido de esta manera en el plano fase (x, \dot{x}) no se rompe y, por tanto, la solución $x(t)$ y la función $\dot{x}(t)$ son continuas (Figura 58).

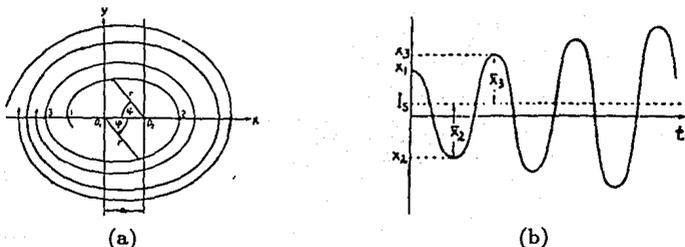


Figura 58. (a) Retrato fase de (14); (b) gráfica de la solución $x(t)$ de (14).

Consideremos una solución $x(t)$ de (14) con $x(0) = x_1 \geq 0$. El tiempo que permanece en un semiplano dado $\dot{x} > 0$ o $\dot{x} < 0$ es $\frac{T}{2}$ donde $T = \frac{2\pi}{\omega}$ es el periodo condicionado de los osciladores (4a) y (4b). Sean $x_2 = x(T/2)$ y $x_3 = x(T)$; el movimiento de $x(t)$ cuando $0 < t < T/2$ es en el plano inferior y, por tanto, sobre una curva de (4b), lo que implica que

$$-x_2 = x_1 e^{-\frac{\lambda T}{2}}$$

Ahora el movimiento prosigue sobre una solución de (4a) y se cumple que

$$x_3 - c = (-x_2 + c)e^{-\frac{\lambda T}{2}} = x_1 e^{-\lambda T} + c e^{-\frac{\lambda T}{2}}$$

y así

$$x_3 = x_1 e^{-\lambda T} + c(1 + e^{-\frac{\lambda T}{2}}).$$

Sean $\lambda = e^{-\lambda T} < 1$ y $\mu = c(1 + e^{-\frac{\lambda T}{2}})$. Así, $x_3 = \lambda x_1 + \mu$. Por inducción tenemos que las intersecciones sucesivas con el eje x cumplen que

$$x_{2k+1} = \lambda x_{2k-1} + \mu$$

$$x_{2k-1} = \lambda x_{2k-3} + \mu$$

⋮

$$x_3 = \lambda x_1 + \mu$$

y, por tanto,

$$x_{2k+1} = \lambda^k x_1 + \mu(1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{k-1}).$$

Como $0 < \lambda < 1$ entonces

$$x_{2k+1} \rightarrow x_0 = \frac{\mu}{1 - \lambda} \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty$$

donde

$$x_0 = \frac{c(1 + e^{-\frac{\lambda T}{2}})}{1 - e^{-\lambda T}} = \frac{c}{1 - e^{-\frac{\lambda T}{2}}}.$$

El punto x_0 va al punto $\bar{x}_0 = -x_0 e^{-hT}$ después de $\frac{T}{2}$ unidades de tiempo y éste a su vez va al punto x_0 , es decir, hemos obtenido, gracias a una *transformación de Poincaré* y a que las soluciones de (4a) y (4b) son espirales que no se separan sino que se acercan conforme transcurre el tiempo, una órbita cerrada de (14) que es asintóticamente estable con periodo T .

Ahora veamos dos ejemplos que pertenecen a la *teoría del reloj*. El mecanismo de un reloj incluye: un sistema oscilatorio horizontal o vertical (por ejemplo un péndulo), una fuente de energía (un peso o un resorte) y un control que relacione los dos elementos anteriores. Para ciertas posiciones del péndulo opera el control y permite que pase la energía requerida en la forma de un impulso. Supondremos que la duración del impulso es muy corta. El control opera generalmente dos veces por período cuando la velocidad es máxima (cuando el péndulo está cerca de la posición de equilibrio). Una característica importante es que el momento en que opera el control depende solamente de la posición del péndulo y, más aún, la acción y el tamaño del impulso dependen solamente de la posición y de la velocidad del péndulo. Por lo anterior y debido a que el sistema no depende del tiempo, éste es un sistema autónomo.

Por simplicidad suponemos que el control opera una vez por cada periodo y que produce un cambio instantáneo en la velocidad. Consideramos también dos *leyes de impulso*: si v_0 y v_1 son las velocidades del péndulo justo antes y después del impulso entonces,

1. el cambio en la velocidad es constante, es decir, $v_1 - v_0$ es constante, o,
2. el cambio en la energía cinética es constante, es decir, $mv_1^2 - mv_0^2$ es constante.

La segunda de las leyes es más plausible ya que dice que cada impulso contribuye con la misma cantidad de energía.

Además de la naturaleza del impulso hay dos hipótesis que podemos hacer con respecto a la fricción: que la fricción es lineal (la fricción es proporcional a la velocidad) o que la fricción es constante.

Ejemplo 4. Reloj con fricción lineal. El movimiento está descrito por la ecuación

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

donde h es muy pequeña (el amortiguamiento es pequeño), excepto en los puntos (x, \dot{x}) tales que $x = 0$ y $\dot{x} > 0$ en donde suponemos que opera el control permitiendo el aumento de la energía del sistema por medio de un impulso.

Primero analicemos el caso en que consideramos la ley 1. Sean $y = \dot{x}$, a el cambio de la velocidad producida por el control, d el decrecimiento logarítmico del oscilador lineal y y_1 la velocidad inicial (inmediatamente después del primer impulso). La figura 59 muestra el retrato fase de este sistema.

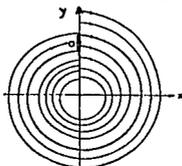


Figura 59.

Entonces las velocidades y_2 y y_3 justo antes y después del segundo impulso son

$$y_2 = y_1 e^{-d}, \quad y_3 = y_1 e^{-d} + a.$$

Para obtener un movimiento periódico debe cumplirse la relación $y_3 = y_1 = y_0$, por lo que

$$y_0 = \frac{a}{1 - e^{-d}}$$

y también tenemos que para cualquier $y_1 > 0$ las velocidades y_{2k+1} después de cada impulso cumplen con que

$$y_{2k+1} = \lambda y_{2k-1} + a$$

$$y_{2k-1} = \lambda y_{2k-3} + a$$

$$\vdots$$

$$y_3 = \lambda y_1 + a$$

donde $0 < \lambda = e^{-d} < 1$; así,

$$y_{2k+1} = y_1 \lambda^k + a(1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{k-1}) \rightarrow y_0 \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty,$$

es decir, por esta transformación de Poincaré y por las espirales del oscilador lineal, la oscilación es asintóticamente estable con periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Por tanto, el sistema se autoexcita para oscilar dada cualquier condición inicial; es por esto que el sistema no modela realmente el comportamiento del reloj.

Ahora analicemos el sistema utilizando la ley 2. La ley 2 nos dice que

$$y_3^2 - y_2^2 = b^2,$$

entonces

$$y_2 = y_1 e^{-d}, \quad y_3 = \sqrt{y_2^2 + b^2} = \sqrt{y_1^2 e^{-2d} + b^2}.$$

La condición en la amplitud para que exista un movimiento periódico es $y_3 = y_1 = y_0$,

$$y_0^2(1 - e^{-2d}) = b^2, \quad y_0 = \frac{b}{\sqrt{1 - e^{-2d}}}.$$

La transformación de Poincaré ahora está dada por la relación

$$y_{2k+1} = \sqrt{y_{2k-1}^2 e^{-2d} + b^2},$$

e inductivamente

$$y_{2k+1} = \sqrt{y_1^2 e^{-2kd} + b^2(1 + e^{-2d} + \dots + e^{-2(k-1)d})} \rightarrow y_0$$

cuando $k \rightarrow \infty$ para toda $y_1 \geq 0$. Por tanto, encontramos una órbita periódica asintóticamente estable de periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$. La única diferencia en este caso es que a no es fija, sino que está dada por la relación

$$a = \sqrt{y_2^2 + b^2} - y_2,$$

pero además de esto no hay ninguna diferencia con el primer caso. Así, este caso tampoco se apega al comportamiento del reloj y podemos concluir que la fricción lineal no es admisible para modelar al reloj.

Ejemplo 5. Reloj con fricción constante. Ahora el movimiento está descrito por la ecuación

$$\ddot{x} + x = \phi(\dot{x})$$

donde

$$\phi(\dot{x}) = \begin{cases} -c & \text{si } \dot{x} > 0 \\ c & \text{si } \dot{x} < 0 \end{cases}$$

y $c > 0$, o por el par de ecuaciones

$$\begin{aligned} \ddot{x} + x &= -c & \text{si } \dot{x} > 0 \\ \ddot{x} + x &= c & \text{si } \dot{x} < 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Ambas ecuaciones representan centros lineales (osciladores armónicos) pero con diferente punto singular; cuando $\dot{x} > 0$ el centro es $(-c, 0)$ y cuando $\dot{x} < 0$ el centro es $(c, 0)$ (Figura 60). Las curvas fase de (15) las obtenemos al pegar las curvas dadas cuando $\dot{x} > 0$ con las dadas cuando $\dot{x} < 0$. Supongamos que el impulso es aplicado de manera instantánea cuando la curva fase cruza la recta $x = -c$.

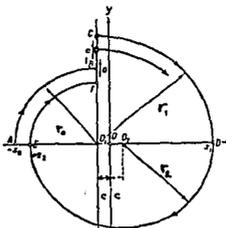


Figura 60.

Analicemos el sistema de acuerdo con la ley de impulso 1. Ya hemos visto que las curvas fase son espirales formadas por arcos de elipses (vea sistemas disipativos, ejemplo 2). Consideremos un punto $(-r_0 - c, 0)$ sobre un círculo de radio r_0 centrado en $(-c, 0)$; después de recorrer un arco de $\frac{\pi}{2}$ el punto corta a la recta $x = -c$ y le es dado un impulso y queda sobre el círculo de radio $r_0 + a$ centrado en $(-c, 0)$; después de girar otra vez $\frac{\pi}{2}$ el punto corta el eje x positivo en $(r_0 + a - c, 0)$ y sigue moviéndose sobre el círculo de radio $r_0 + a - 2c$ centrado en $(c, 0)$ hasta que llega de nuevo al eje x negativo y prosigue su movimiento sobre el círculo de radio $r_0 + a - 4c$ centrado en $(-c, 0)$. Así, el carácter del movimiento (de la transformación de Poincaré) depende del signo de $a - 4c$.

CASO 1. $a - 4c < 0$. Las oscilaciones son amortiguadas y después de un tiempo finito el punto llega al conjunto de estados de equilibrio $-c < x < c$ (Figura 61).

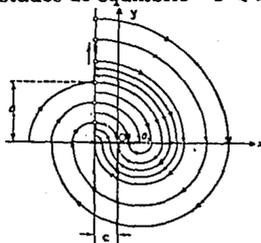


Figura 61. Retrato fase de (15) cuando $a - 4c < 0$.

CASO 2. $a - 4c > 0$. Mostramos el retrato fase en la figura 62. Los puntos en la región sombreada alcanzarán los estados de equilibrio $-x < x < c$ después de un tiempo finito. El movimiento del resto de los puntos del plano crecerá arbitrariamente

$$r_0 + k(a - 4c) \rightarrow \infty \text{ cuando } k \rightarrow \infty.$$

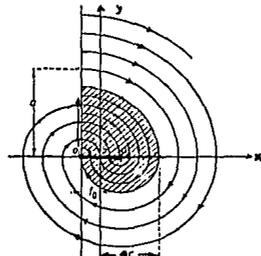


Figura 62. Retrato fase de (15) cuando $a - 4c > 0$.

CASO 3. $a - 4c = 0$. Mostramos el retrato fase en la figura 63. Los puntos en la región sombreada alcanzan el equilibrio antes de describir una revolución completa. Para todos los puntos fuera de la región sombreada su movimiento es periódico (de periodo 2π) con amplitud dependiente del punto inicial.

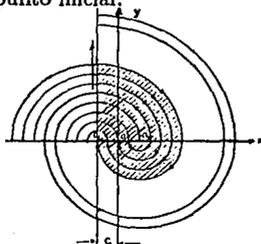


Figura 63. Retrato fase de (15) cuando $a - 4c = 0$.

Observemos que en este último caso tenemos una banda de órbitas periódicas e

inestabilidad estructural, ya que para cualquier perturbación en el valor de c obtenemos alguno de los casos 1 y 2. Por tanto, la fricción constante junto con la ley de impulso 1 no corresponden al comportamiento de relojes reales.

Examinemos el sistema (15) utilizando la ley de impulso 2. La ley de impulso 2 nos dice que

$$y_1^2 - y_0^2 = b^2, \quad a = \sqrt{y_0^2 + b^2} - y_0$$

donde b es constante. Mostramos el retrato fase en la figura 64.

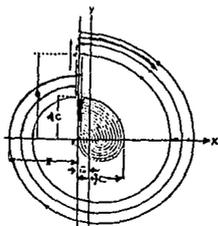


Figura 64.

La condición inicial $(-x_0, 0)$ en el círculo de radio r_0 y centro en $(-c, 0)$, se mueve después de recorrer $\frac{\pi}{2}$ a un círculo de radio r_1 donde $r_1^2 - r_0^2 = b^2$, entonces corta el eje x positivo en $(x_1, 0)$ donde $x_1 = r_1 - c$. Después sigue sobre el círculo de radio $r_2 = r_1 - c$ con centro en $(c, 0)$ y de nuevo corta el eje x negativo en $(-x_2, 0)$ donde $x_2 = r_1 - 3c$. De aquí

$$(x_2 + 3c)^2 - (x_0 - c)^2 = b^2.$$

Para tener un movimiento periódico es necesario que $x_2 = x_0 = \bar{x}$; sustituimos $x_2 = x_0 = \bar{x}$ en la ecuación anterior y obtenemos que

$$\bar{x} = \frac{b^2}{8c} - c.$$

También necesitamos que $\bar{x} > c$ o que $b^2 > 16c^2$, ya que de otro modo $(-\bar{x}, 0)$ es un estado de equilibrio. Esto implica que la fuente de energía debe ser de mayor poder para c más grande. Si se cumple esta condición tenemos una órbita periódica única estable con amplitud definida³. Entre más grande es la fricción, más grande debe ser el impulso inicial.

Este modelo tiene dos características fundamentales del reloj: la existencia de una amplitud estacionaria única estable y la necesidad de un impulso inicial de cierta magnitud para iniciar la oscilación; por tanto, este caso sí es satisfactorio para modelar el reloj.

³ Al calcular la transformación de Poincaré como en los ejemplos anteriores obtenemos una sucesión definida de manera recursiva

$$x_{2k} = -3c + \sqrt{b^2 + (x_{2(k-1)} - c)^2}$$

que es monótona y acotada, que converge a \bar{x} .

3. Oscilaciones de Relajación

Principiemos por considerar un ejemplo sencillo para obtener una idea intuitiva de lo que son las oscilaciones de relajación. Consideremos un "sube y baja" que en el lado *A* tenga un recipiente y en el lado *B* un bloque pesado (Figura 65a). De un grifo cae agua en el recipiente y conforme éste es llenado el lado *A* baja lentamente; cuando el recipiente está lleno el lado *A* toca el piso, el recipiente vacía su contenido automáticamente y el "sube y baja" regresa rápidamente a su posición original y el proceso comienza de nuevo. En la figura 65b graficamos la distancia del punto *A* al piso con respecto al tiempo.

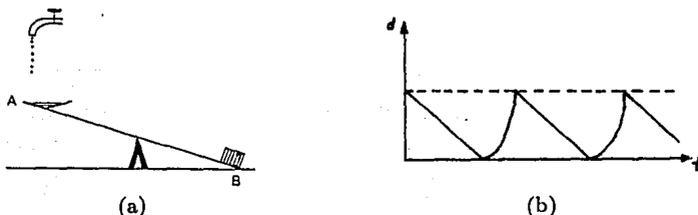


Figura 65.

Esta oscilación está caracterizada por intervalos de tiempo en que "casi no pasa nada" o "lo que sucede, sucede muy lentamente", seguidos de lapsos cortos en los que toman lugar cambios notables. De hecho el rasgo que nos interesa de este tipo de oscilación es el cambio tan brusco que sufre la velocidad.

Llamamos *oscilación de relajación* a cualquier oscilación cuya gráfica de la posición con respecto al tiempo tenga forma de diente de sierra (o zigzag). Nuestro estudio lo desarrollamos a partir de la ecuación

$$m\ddot{x} + kx = \phi(\dot{x}) \quad (16)$$

para un sistema auto-oscilatorio, donde m es un parámetro muy pequeño y despreciable.

La ecuación degenerada es

$$kx = \phi(\dot{x}) \quad (17)$$

(vea la sección 3 del capítulo 1), que es una ecuación diferencial de primer orden y cuyo espacio fase es unidimensional (*línea fase*).

Observación 1. La ecuación (17) determina una curva γ en el plano fase de (16); por la pequeñez de m , γ debe corresponder de manera aproximada a subconjuntos de órbitas de (16). Nuestro objetivo es estudiar algunas cualidades de (16) por medio de (17) y la curva γ antes mencionada, pero nos restringimos a estudiar sólo la dinámica de aquellos puntos que están sobre γ .

Si de la ecuación (17) podemos despejar a \dot{x} , tenemos

$$\dot{x} = f(x) \tag{18}$$

una ecuación diferencial de primer orden. Para (18) existen soluciones únicas en los intervalos donde f es una función localmente Lipschitz y, es claro que si $f(x) > 0$, el punto x se mueve hacia la derecha en la línea fase (de acuerdo a nuestro sistema de coordenadas), y si $f(x) < 0$, el punto x se mueve hacia la izquierda (Figura 66).

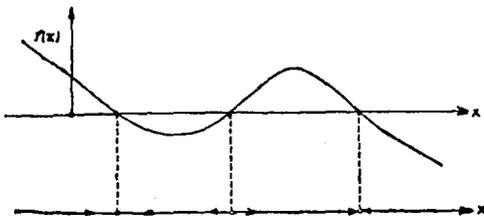


Figura 66.

Los puntos de equilibrio x_0 de (18) no son necesariamente puntos de equilibrio de (16) y debido a esto es que no sabemos si son "alcanzados" en un tiempo finito o infinito. De manera más precisa, el sistema (16) es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ m\dot{y} &= \phi(y) - kx, \end{aligned} \tag{19}$$

y si x_0 es punto de equilibrio de (18), el punto $(x, y) = (x_0, \dot{x})$ es un punto de equilibrio de (16) si y sólo si $y = 0$; todas los demás puntos (x_0, y) sobre γ con $y \neq 0$ no son puntos de equilibrio de (16), pero sabemos la dirección en la que se mueven por el signo de f (Figura 66). Así, el punto (x_0, y) es alcanzado en un tiempo finito si $y = 0$, y no lo es si $y \neq 0$.

Supongamos que la gráfica de $\phi(y)$ tiene localmente la siguiente forma (Figura 67).

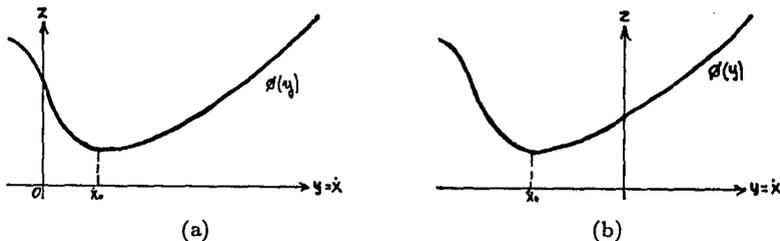


Figura 67. Las dos posibles gráficas de ϕ .

De la forma de (16) y la gráfica de ϕ se desprende la existencia de dos fases en el movimiento de un punto (x_1, \dot{x}_1) sobre la curva: a) cuando es válido considerar (17) y,

b) cuando $m\ddot{x}$ deja de ser despreciable y hay que utilizar una *condición de salto*. Estas dos fases son las dos propiedades de (17) por las cuales encontraremos oscilaciones de relajación.

a) Para esta primera fase tenemos que \ddot{x} está acotada, $m\ddot{x}$ es despreciable y es válido considerar a (17). Sea $(x_0, 0)$ una posición de equilibrio de (16). La dinámica sobre γ es como se ilustra en la figura 68.

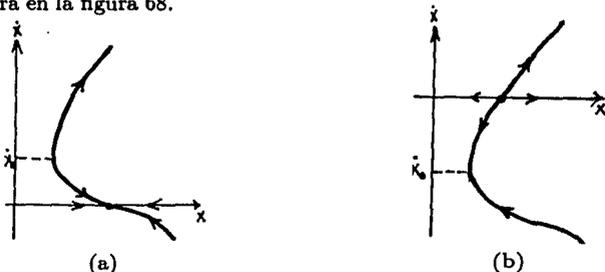


Figura 68. Las curvas correspondientes a las gráficas de ϕ en el plano (x, \dot{x}) .

Si $\phi'(0) < 0$ entonces ϕ es localmente invertible (es estrictamente decreciente) y para (18) implica que

$$\frac{df}{dx}(x_0) = -\frac{1}{\phi'(0)} > 0,$$

y, por tanto, $(x_0, 0)$ es un punto de equilibrio inestable. Análogamente, si $\phi'(0) > 0$,

$$\frac{df}{dx}(x_0) = -\frac{1}{\phi'(0)} < 0,$$

y $(x_0, 0)$ es un punto de equilibrio estable.

Observemos que (17) implica que

$$\phi'(\dot{x})\ddot{x} = k\dot{x},$$

es decir,

$$\ddot{x} = \frac{k\dot{x}}{\phi'(\dot{x})} \tag{20}$$

cuando $\phi'(\dot{x}) \neq 0$. Entonces $\ddot{x} \rightarrow \pm\infty$ si $\phi'(\dot{x}) \rightarrow 0$ cuando $\dot{x} \rightarrow \dot{x}_0$ para alguna $\dot{x}_0 \in \mathbf{R}$; esto sucede cuando las dos ramas de f se "juntan".

Por tanto, la fase a) termina cuando $\phi'(\dot{x}) = 0$ y $\ddot{x} = \infty$.

Vemos así, que el tiempo que dura esta fase es

$$T = \frac{1}{k} \int_{\dot{x}_1}^{\dot{x}_0} \frac{\phi'(\dot{x})}{\dot{x}} d\dot{x} \tag{20a}$$

donde \dot{x}_1 es la ordenada del punto donde iniciamos el movimiento y \dot{x}_0 es el punto donde $\phi'(\dot{x}_0) = 0$.

b) En esta fase \ddot{x} es muy grande y $m\ddot{x}$ ya no es despreciable, por lo que ya no es válido utilizar (17). También ocurre que \dot{x} crece rápidamente pero x no tiene tiempo para cambiar notablemente, es decir, permanece casi constante; así, tenemos un movimiento casi vertical muy rápido en el plano fase cuya dirección depende del signo de \dot{x} (vea (20) y la figura 68b). Por lo pequeño de este lapso, consideramos que el movimiento de \dot{x} es instantáneo y por ello, que \dot{x} tiene una discontinuidad (un salto vertical en el plano fase); por lo anterior, debemos dar una *condición de salto* para determinar el estado del sistema después de dicha discontinuidad.

Veamos dos ejemplos.

Ejemplo 1. Freno de Prony. Consideremos un bloque de masa m pequeña, sujeta a una estructura fija con un resorte, que yace sobre una mesa giratoria que gira uniformemente (Figura 69).

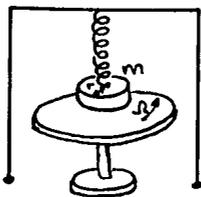


Figura 69. Freno de Prony.

Despreciamos el momento de inercia ($m\ddot{\theta}$) y la ecuación de movimiento es

$$rF[(\Omega - \dot{\theta})r] = k\theta \quad (21)$$

donde k es la constante del resorte, Ω es la velocidad angular de la mesa, $\dot{\theta}$ es la velocidad angular absoluta del bloque, r es el radio del bloque y $F(v)$ es la fuerza friccional que depende de la velocidad relativa $v = r(\Omega - \dot{\theta})$. La función F tiene la siguiente gráfica (Figura 70).

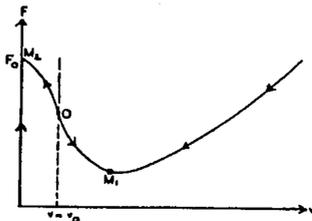


Figura 70. La gráfica de $F(v)$.

La gráfica correspondiente en el plano fase (Figura 70) tiene la forma que dijimos anteriormente y, por tanto, en un primer momento el punto (x, \dot{x}) se moverá sobre la curva determinada por la ecuación (21), y después tendremos un salto vertical si el punto de equilibrio $(x_0, 0)$ es inestable. En el caso en el que el punto de equilibrio es estable no existe dicho salto.

La condición de salto está dada por el freno mismo: después del salto el bloque gira junto con la barra ya que $k\theta < F(0)$, es decir, la ecuación que describe el movimiento es

$$\dot{\theta} = \Omega,$$

por lo que $\ddot{\theta} = 0$ y $\theta(t) = \Omega t + \theta_0$; esto sucede hasta el momento en que la fuerza friccional $F(0)$ y la fuerza de restauración del resorte $k\theta$ se igualan y entonces tenemos otra condición de salto (puesto que el bloque "se regresa" a su posición original) regresando hacia la curva determinada por (21). Después de esto el movimiento prosigue sobre γ hasta que la energía del resorte se disipa (Figura 71).

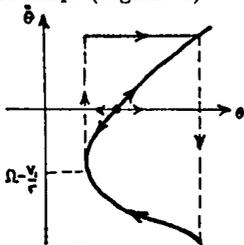


Figura 71.

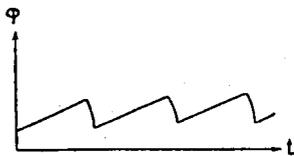


Figura 72.

Así, tenemos oscilaciones de relajación del freno de Prony¹ (Figura 72). Claramente, la amplitud de las oscilaciones es

$$\theta_a = \frac{r}{k}(F(0) - F(v_1))$$

donde v_1 es el punto en que F alcanza su valor mínimo; es claro también que el periodo de la oscilación es $T = T_1 + T_2$ donde

$$T_1 = \frac{\theta_a}{\Omega} = \frac{r}{k\Omega}(F(0) - F(v_1))$$

porque el movimiento es uniforme sobre la recta $\dot{\theta} = \Omega$ y,

$$T_2 = \frac{r^2}{k} \int_{\dot{\theta}_1}^{\dot{\theta}_2} \frac{F'[r(\Omega - \dot{\theta})]}{\dot{\theta}} d\dot{\theta}$$

por (20a).

¹ Al considerar el momento inercial los picos en las oscilaciones se suavizan, pero la forma de diente de sierra se preserva.

Ejemplo 2. Consideremos dos bulbos en un circuito sin inductancia o bien sin capacitancia. En la figura 73, mostramos el esquema más simple de un multivibrador.

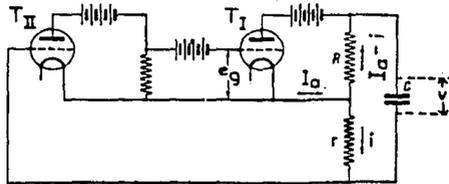


Figura 73.

El bulbo T_2 sirve para proveer el signo necesario para la retroalimentación de voltaje revirtiendo la fase del voltaje aplicado. Despreciamos la reacción en la placa y las corrientes de las rejillas, y trasladamos I_0 (la componente constante de la corriente de la placa del tubo T_1) al origen. Sean ϕ la relación entre el voltaje y la corriente en T_1 y k_2 el coeficiente de amplificación (constante). El sistema queda descrito por las ecuaciones

$$\begin{aligned} (R+r)i + v &= R\phi(k_2 r i) & (a) \\ C\dot{v} &= i. & (b) \end{aligned} \tag{22}$$

Derivamos (6a) y sustituimos \dot{v} para obtener

$$[k_2 r R \phi'(k_2 r i) - (R+r)] \frac{di}{dt} = \frac{i}{C} \tag{23}$$

donde ϕ' es la derivada de ϕ con respecto a su argumento. Supongamos que $\phi(k_2 r i)$ tiene la gráfica que mostramos en la figura 74

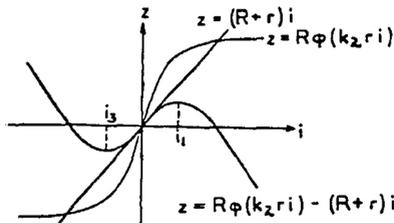
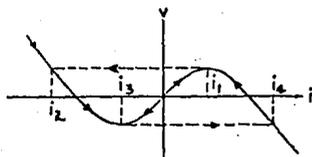


Figura 74.

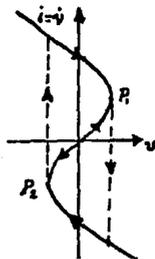
y sea $i = 0$ el punto operante correspondiente a la transductancia máxima de placa-rejilla g , es decir, $\phi'(0) = g$. En este caso $i = 0$ es inestable si $k_2 r R g > R + r$ y de hecho, lo suponemos así. La función definida por (22a)

$$v(i) = R\phi(k_2 r i) - (R+r)i \tag{24}$$

tiene la gráfica siguiente (Figura 75a)



(a)



(b)

Figura 75.

y, por tanto, un punto sobre la curva definida por (24) distinto de $(v, i) = (0, 0)$ se mueve² hacia uno de los puntos P_i y de ahí da un salto vertical hasta cortar otra vez a la curva (24) (ésta es la condición de salto); por tanto, la corriente experimenta oscilaciones de relajación (Figuras 75b y 76).

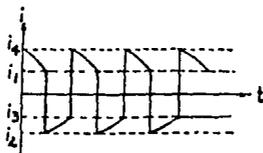


Figura 76. Oscilaciones de relajación de la corriente.

El periodo de la oscilación lo calculamos a partir de (23)

$$T = C \int_{i_2}^{i_3} \frac{v'(i)di}{i} + C \int_{i_4}^{i_1} \frac{v'(i)di}{i}$$

y de hecho puede utilizarse una aproximación de $R\phi(k_2ri) - (R+r)i$ como la de la figura 77 para calcular el periodo aproximado

$$T = 2C(R+r) \log \left(\frac{2I_s Rr}{V_s(R+r)} - 1 \right).$$

² El movimiento sobre la curva es obvio por la identidad (24) en el plano.

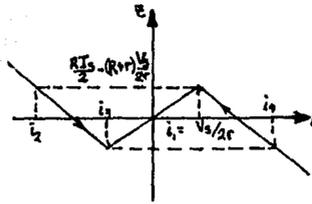


Figura 77. Aproximación poligonal de la función $R\phi(k_2 r i) - (R + r)i$.

Observación 2. Para conocer el movimiento de los puntos fuera de la curva determinada por (17) es necesario trabajar con la ecuación diferencial de segundo orden original y examinar la estabilidad de la oscilación de relajación que hemos determinado.

4. Sistemas sin Ciclos Límite

En esta última sección tan sólo queremos mostrar un ejemplo de un sistema que no presenta estados oscilatorios.

Ejemplo 1. Conexión de generadores de corriente directa. Consideremos dos generadores de corriente directa cada uno conectado en serie, idénticos y que se conectan en paralelo (Figura 78).

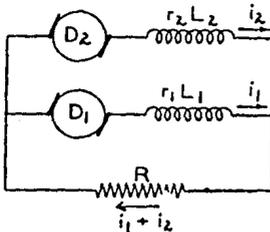


Figura 78.

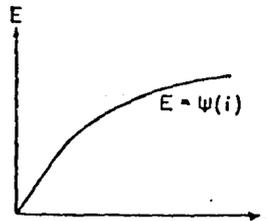


Figura 79.

Donde, debido a la simetría $r_1 = r_2 = r$ es la resistencia común de los generadores y $L_1 = L_2 = L$ es el campo común de inductancia. Mostramos su característica común $\psi(i)$ en la figura 79 y suponemos que $\psi(-i) = -\psi(i)$. Sea $\rho = \psi'(0)$.

Las ecuaciones que describen el comportamiento del sistema son

$$\begin{aligned} L \frac{di_1}{dt} &= -Ri_2 - (R + r)i_1 + \psi(i_1) \\ L \frac{di_2}{dt} &= -Ri_1 - (R + r)i_2 + \psi(i_2). \end{aligned} \tag{25}$$

Los estados de equilibrio están dados por las ecuaciones

$$\begin{aligned} Ri_2 + (R+r)i_1 - \psi(i_1) &= 0 \\ Ri_1 + (R+r)i_2 - \psi(i_2) &= 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Las dos curvas cuya intersección es el conjunto de puntos críticos, son simétricas con respecto a la diagonal $i_1 = i_2$.

Los puntos singulares de (25) los mostramos en la figura 80 para diferentes valores del parámetro $R+r$.

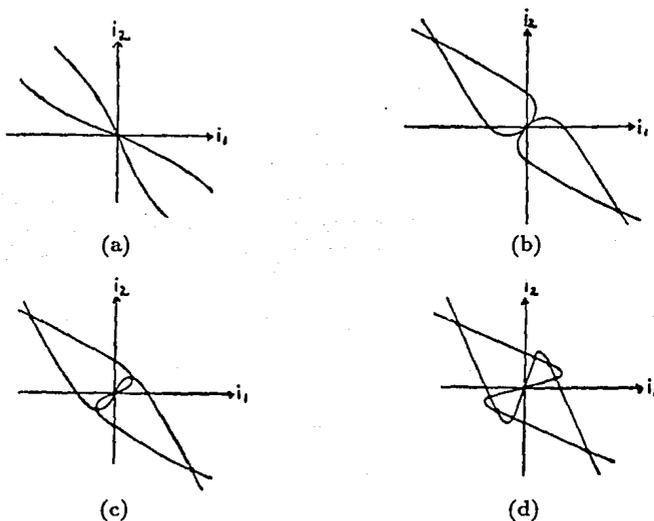


Figura 80.

La linealización de (25) en el origen es

$$\begin{pmatrix} L \frac{di_1}{dt} \\ L \frac{di_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho - R - r & -R \\ -R & \rho - R - r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

cuyos valores propios son $\lambda_1 = \rho - r - 2R$ y $\lambda_2 = \rho - r$. Si $r > \rho$ entonces $(0, 0)$ es un punto de equilibrio estable; si $r < \rho$ entonces $(0, 0)$ es inestable en cuyo caso si $\rho - 2R < r < \rho$, $(0, 0)$ es un punto silla y si $r < \rho - 2R < \rho$, $(0, 0)$ es un nodo inestable.

Para los puntos críticos sobre $i_2 = -i_2$, sea i_0 el valor de la corriente; si $\rho_0 = \psi'(i_0)$ entonces la linealización en este punto es

$$\begin{pmatrix} L \frac{di_1}{dt} \\ L \frac{di_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_0 - R - r & -R \\ -R & \rho_0 - R - r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}.$$

Puesto que i_0 es grande¹, ρ_0 es pequeña y así, $\rho_0 < r$ con lo que los valores propios de la linealización son negativos y los puntos de equilibrio sobre $i_1 = -i_2$ son nodos estables.

Los puntos críticos sobre $i_1 = i_2 = i$ están definidos por $\psi(i) = (2R + r)i$. Dicho conjunto es no vacío si $2R + r < \psi'(0)$ con lo que ambos valores propios de la linealización

$$\begin{pmatrix} L \frac{di_1}{dt} \\ L \frac{di_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 - R - r & -R \\ -R & \rho_1 - R - r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

en (i_0, i_0) donde $\rho_1 = \psi'(i_0)$, son mayores que 0, es decir, estos puntos de equilibrio son nodos inestables

Para los puntos que están fuera de las diagonales puede verificarse que son sillas por medio de la teoría del índice; así, obtenemos los retratos fase siguientes (Figura 81).

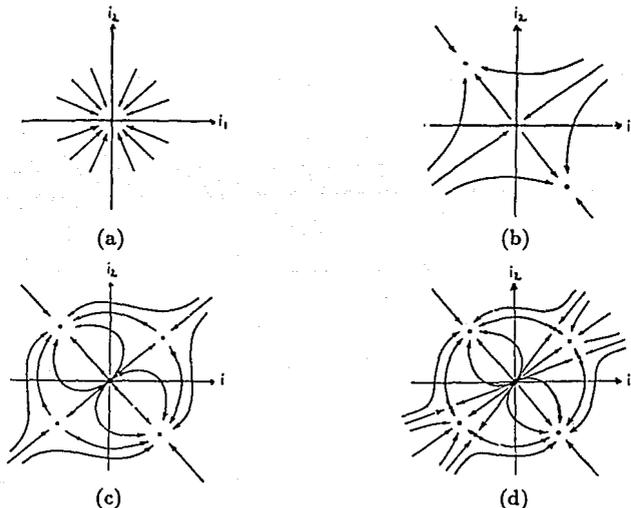


Figura 81. Los retratos fase correspondientes a cada uno de los casos en la figura 80.

La conclusión para el circuito es que en vista de la estabilidad de los puntos ($i_1 = -i_2$, estados dañinos) no deben conectarse en paralelo generadores excitados en serie.

¹ Los puntos de intersección de las curvas determinadas por (26) quedan lejos del origen.

Capítulo 3

Oscilaciones Forzadas

1. Sistemas No Autónomos

En este capítulo nos interesa estudiar ciertas oscilaciones que son el resultado de agregar un término que depende del tiempo a las ecuaciones diferenciales de segundo orden autónomas. Veámoslo en un ejemplo: consideremos el oscilador lineal con fricción

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + x = 0 \quad (1)$$

con solución $x_1(t) = e^{-ht}(c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \operatorname{sen} \omega_0 t)$ donde (c_1, c_2) queda determinado por las condiciones iniciales y $\omega_0 = \sqrt{1-h^2}$, y cuyas características estables ya conocemos (vea la sección 2 del capítulo 1); observemos que esta ecuación da lugar a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden autónomo en dos variables

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - 2hy. \end{aligned}$$

Ahora agreguemos del lado derecho de la ecuación (1) el término $\gamma \cos \omega t$

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + x = \gamma \cos \omega t \quad ; \quad 0 \leq h < 1 \quad (1a)$$

que es equivalente al sistema no autónomo

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \cos \omega t \end{pmatrix}.$$

La solución de (1a) es $x(t) = x_1(t) + A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t$ (Figura 82) donde

$$A = \frac{(1-\omega^2)\gamma}{(1-\omega^2)^2 + 4h^2 + \omega^2}, \quad B = \frac{2h\omega\gamma}{(1-\omega^2)^2 + 4h^2 + \omega^2},$$

y ahora (c_1, c_2) es determinado por las condiciones iniciales de la siguiente manera: si $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = y_0$ entonces $c_1 = x_0 - A$ y $c_2 = \frac{y_0 + h(x_0 - A) - \omega B}{\omega_0}$. A $\gamma \cos \omega t$ le llamamos el término de forzamiento y a la ecuación (1a) oscilador lineal con fricción forzado.

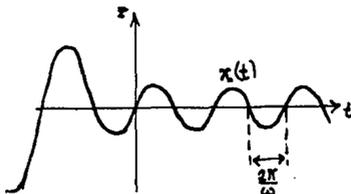


Figura 82. Gráfica de $x(t) = x_1(t) + \cos \omega t + \sin \omega t$.

De manera más general, cuando a una ecuación

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0$$

le agregamos una función $p(t)$ (que depende exclusivamente del tiempo)

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = p(t) \tag{2}$$

diremos que este último es el sistema forzado y que $p(t)$ es su término de forzamiento. Como nuestro propósito es producir soluciones $x(t)$ periódicas a menudo pedimos que la función $p(t)$ sea periódica.

Observación 1. En los sistemas no autónomos las soluciones periódicas obviamente producen órbitas cerradas, pero las órbitas cerradas no siempre corresponden a soluciones periódicas. Por ejemplo, consideremos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2yt \\ \frac{dy}{dt} &= -2xt \end{aligned}$$

cuya solución es $(x(t), y(t)) = (c_1 \cos t^2 + c_2 \sin t^2, -c_1 \sin t^2 + c_2 \cos t^2)$ para $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$, que da lugar a una órbita cerrada

$$x^2 + y^2 = c_1^2 + c_2^2,$$

pero que claramente no es una solución periódica.

Observemos que

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = p(t) \tag{2}$$

tiene como sistema equivalente a

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -f(x, y) + p(t) \end{aligned} \tag{2a}$$

que ya no podemos considerar como un campo vectorial en un espacio fase \mathcal{E} bidimensional, puesto que a cada punto (x, y) se le asocia una colección de vectores $\{(y, -f(x, y) + p(t)) : t \in \mathbf{R}\}$, es decir, el vector asociado a un punto (x, y) varía con el tiempo; para trabajar con un sistema que sea autónomo introducimos la función $\theta(t) = t$ y agregamos la ecuación $\dot{\theta} = 1$ al sistema (2a)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -f(x, y) + p(\theta) \\ \dot{\theta} &= 1; \end{aligned} \tag{2b}$$

así, hemos obtenido un sistema autónomo en el espacio fase $\mathcal{E} \times \mathbf{R}$, cuya relación con el sistema no autónomo original la explicamos en los siguientes párrafos.

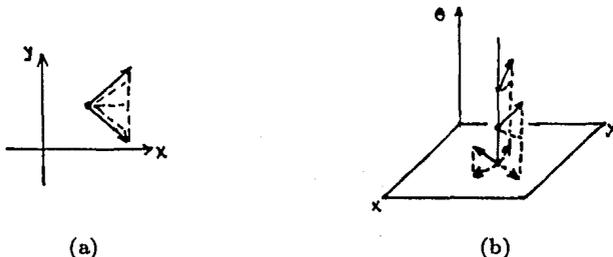


Figura 83. (a) Conjunto de vectores asociados a un punto por un sistema no autónomo; (b) campo vectorial generado al realizar el producto $\mathcal{E} \times \mathbf{R}$.

Es claro que si $(x(t), y(t), \theta(t))$ es solución de (2b) que satisface la condición inicial $(x(0), y(0), \theta(0)) = (x_0, y_0, \theta_0)$ entonces $x(t)$ es solución de (2) que cumple la condición inicial $(x(\theta_0), \dot{x}(\theta_0)) = (x_0, y_0)$.¹

Observación 2. El campo vectorial (2b) es siempre distinto de $\mathbf{0}$ y transversal² a las subvariedades $\mathcal{E} \times \{\theta\}$ para todo $\theta \in \mathbf{R}$ (ya que su última función coordenada es $\dot{\theta} = 1$).

Observación 3. Es importante el valor de t_0 para el cual $(x(t_0), \dot{x}(t_0)) = (x_0, y_0)$ ya que para el sistema (2b) significa comenzar en el plano horizontal de altura t_0 ; las imágenes de

¹ Obviamente la existencia y unicidad de las soluciones de los sistemas que hablamos están sujetas a que las funciones f y p cumplan ciertas condiciones de continuidad y de Lipschitz.

² El vector no está contenido en el espacio tangente de la subvariedad correspondiente.

$(x_1(t), \dot{x}_1(t))$ y $(x_2(t), \dot{x}_2(t))$ son generalmente distintas si $(x(t_1), \dot{x}(t_1)) = (x(t_2), \dot{x}(t_2)) = (x_0, y_0)$ para $t_1 \neq t_2$. Este es un rasgo fundamental que distingue a los sistemas no autónomos de los autónomos (en estos últimos todas las curvas solución que pasan por un punto (x_0, y_0) son iguales salvo una reparametrización).

Cuando $p(t)$ es una función periódica de periodo τ , el vector $(y, -f(x, y) + p(\theta_0 + n\tau), 1)$ es el mismo para cada $n \in \mathbf{N}$ (para alguna θ_0), es decir, el campo vectorial (2b) sólo depende de (x, y) en cada plano horizontal de altura $\theta_0 + n\tau$. Esto nos sugiere realizar el cociente³ $\mathbf{R}/\tau\mathbf{Z} \cong S^1$ ya que por la periodicidad de $p(t)$ basta considerar al tiempo en el intervalo $[0, \tau]$. Así, podemos considerar que el espacio fase de (2b) es la variedad de tridimensional $\mathcal{E} \times S^1$ (Figura 84).

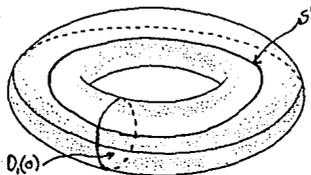


Figura 84. $\mathbf{R}^2 \times S^1 \cong D_1(0) \times S^1$.

Sea $\phi_t: \mathcal{E} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{E} \times \mathbf{R}$ el flujo de (2b) y considere la transformación

$$T = \pi \circ \phi_\tau \circ i: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$$

donde

$$i: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \times \mathbf{R},$$

$$\pi: \mathcal{E} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{E},$$

$$i(x, y) = (x, y, 0),$$

$$\pi(x, y, \theta) = (x, y)$$

(Figura 85).

³ $\mathbf{R}/\tau\mathbf{Z}$ es el espacio de los números reales módulo τ que es homeomorfo a S^1 (el círculo unitario en \mathbf{R}^2).

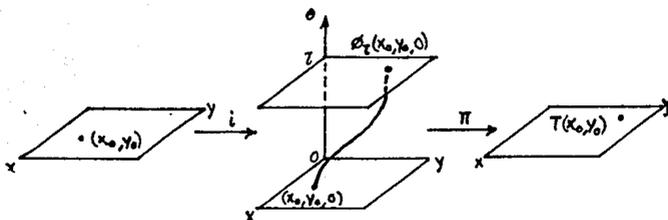


Figura 85. La transformación T .

Proposición 1. La transformación T tiene las siguientes propiedades:

- 1) T es difeomorfismo que preserva orientación.
- 2) $T^n = \pi \circ \phi_{n\tau} \circ i$ para toda $n \in \mathbb{N}$.⁴
- 3) T es topológicamente conjugado de clase C^1 a $T_\theta = \pi \circ \phi_\tau \circ i_\theta$ para toda $\theta \in [0, \tau]$, donde $i_\theta: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \times \mathbb{R}$ con $i_\theta(x, y) = (x, y, \theta)$ y el difeomorfismo para la conjugación es $h = \pi \circ \phi_\theta \circ i: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$.

Demostración.

1) T es diferenciable ya que es composición de transformaciones diferenciables.

T es inyectiva ya que si $T(x_1, y_1) = T(x_2, y_2)$,

$$\pi \circ \phi_\tau(x_1, y_1, 0) = \pi \circ \phi_\tau(x_2, y_2, 0),$$

es decir, $\phi_\tau(x_1, y_1, 0)$ y $\phi_\tau(x_2, y_2, 0)$ tienen la misma tercera coordenada (están en el mismo plano horizontal ya que ϕ_τ manda al plano $\mathcal{E} \times \{0\}$ en el plano $\mathcal{E} \times \{\tau\}$ pues la tercera coordenada del flujo es $\theta(t) = t + \theta_0$); por tanto, $\phi_\tau(x_1, y_1, 0) = \phi_\tau(x_2, y_2, 0)$ y como ϕ_τ es inyectivo, $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

T es supratectiva ya que si $(x, y) \in \mathcal{E}$ existe $(x', y') = \pi \circ \phi_{-\tau}(x, y, \tau) \in \mathcal{E}$ tal que

$$T(x', y') = T \circ \pi \circ \phi_{-\tau}(x, y, \tau) = \pi \circ \phi_0 \circ \phi_{-\tau}(x, y, \tau) = \pi \circ \phi_0(x, y, \tau) = \pi(x, y, \tau) = (x, y)$$

ya que $\phi_{-\tau}(x, y, \tau)$ tiene tercera coordenada igual a 0 e $i \circ \pi$ "quita" y "vuelve a poner" este 0 como tercera coordenada dejando intactas las otras dos.

⁴ Sean X un espacio topológico y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Al conjunto de iteraciones de f le llamamos un sistema dinámico discreto en X , es decir, si denotamos la composición de f consigo misma k veces $f \circ \dots \circ f = f^k$ donde $k \geq 1$, y definamos $f^0 \equiv Id$ donde Id significa la identidad en X , el sistema dinámico es $\{f^k: X \rightarrow X, \text{ tales que } k \text{ es un entero no negativo}\} = \{f^k\}_{k=0}^\infty$.

Observemos que por la regla de la cadena

$$DT_{(x,y)} = D\pi(\phi_r(x, y, 0))D\phi_r(x, y, 0)Di(x, y)$$

es una multiplicación de matrices de rango 2 y, por tanto, $DT_{(x,y)}$ es una matriz de rango 2 e invertible; así por el teorema de la función inversa T es un difeomorfismo local, que al ser inyectivo y suprayectivo es un difeomorfismo global.

2) **Afirmación.** $\phi_t(x, y, n\tau) = \phi_t(x, y, 0) + (0, 0, n\tau)$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.

Esta igualdad se deduce fácilmente al sustituir el lado derecho de ella en el sistema (2b), ya que por la periodicidad de p , $\phi_t(x, y, 0) + (0, 0, n\tau)$ satisface a (2b), tiene como condición inicial a $(x, y, n\tau)$ y como las soluciones de (2b) son únicas

$$\phi_t(x, y, n\tau) = \phi_t(x, y, 0) + (0, 0, n\tau).$$

Ahora realizaremos la demostración por inducción. Para $n = 1$ la identidad se cumple por definición. Supongamos que la identidad $T^n = \pi \circ \phi_{nr} \circ i$ es válida; hay que demostrar que $T^{n+1} = \pi \circ \phi_{(n+1)r} \circ i$ o también es cierta. Denotemos por $[]_1$ y $[]_2$ las primera y segunda funciones coordenadas respectivamente. Evaluemos

$$\begin{aligned} T^{n+1}(x, y) &= T \circ T^n(x, y) = \pi \circ \phi_r \circ i \circ \pi \circ \phi_{nr} i(x, y) \\ &= \pi \circ \phi_r([\phi_{nr}(x, y, 0)]_1, [\phi_{nr}(x, y, 0)]_2, 0) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \pi \circ \phi_{(n+1)r} \circ i(x, y) &= \pi \circ \phi_r \circ \phi_{nr}(x, y, 0) \\ &= \pi \circ \phi_r([\phi_{nr}(x, y, 0)]_1, [\phi_{nr}(x, y, 0)]_2, n\tau) \\ &= \pi \circ \phi_r([\phi_{nr}(x, y, 0)]_1, [\phi_{nr}(x, y, 0)]_2, 0) + (0, 0, n\tau) \\ &= \pi \circ \phi_r([\phi_{nr}(x, y, 0)]_1, [\phi_{nr}(x, y, 0)]_2, 0) \end{aligned}$$

(por la propiedad mencionada en la afirmación y por la linealidad de π). Por tanto, $T^n = \pi \circ \phi_{nr} \circ i$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

3) En la figura 86 ilustramos cómo es la conjugación topológica de T y T_θ .

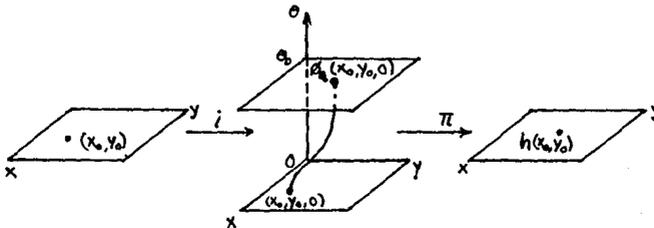


Figura 86. El difeomorfismo h .

Basta demostrar que $T_\theta \circ h = h \circ T$. Sea $(x, y) \in \mathcal{E}$

$$\begin{aligned} T_\theta \circ h(x, y) &= \pi \circ \phi_\tau \circ i \circ \pi \circ \phi_\theta \circ i(x, y) \\ &= \pi \circ \phi_\tau \circ \phi_\theta(x, y, 0) = \pi \circ \phi_{\tau+\theta}(x, y, 0) \end{aligned}$$

ya que $i_\theta \circ \pi$ deja intactas las coordenadas de $\phi_\theta(x, y, 0)$; ahora

$$\begin{aligned} h \circ T(x, y) &= \pi \circ \phi_\theta \circ i \circ \pi \circ \phi_\tau \circ i(x, y) \\ &= \pi \circ \phi_\theta([\phi_\tau(x, y, 0)]_1, [\phi_\tau(x, y, 0)]_2, 0) \\ &= \pi \circ \phi_\theta([\phi_\tau(x, y, 0)]_1, [\phi_\tau(x, y, 0)]_2, \tau) \\ &= \pi \circ \phi_\theta \circ \phi_\tau(x, y, 0) \\ &= \pi \circ \phi_{\tau+\theta}(x, y, 0), \end{aligned}$$

por lo tanto $T \sim T_\theta$ para toda $\theta \in [0, \tau]$. ■

Observación 4. Por el inciso 2) sabemos que aplicar iteradamente T ("subir" con el flujo a tiempo τ (ϕ_τ) al plano $\mathcal{E} \times \{\tau\}$ y bajar con π hacia $\mathcal{E} \times \{0\}$ n veces), es equivalente a "subir" con el flujo a tiempo $n\tau$ ($\phi_{n\tau}$) al plano $\mathcal{E} \times \{n\tau\}$ y bajar una sola vez con π a $\mathcal{E} \times \{0\}$ (Figura 87). Esto nos permite definir ϕ_τ en $\mathcal{E} \times S^1$ y T resulta ser la transformación de Poincaré de ϕ_τ en la subvariedad $\mathcal{E} \times \{0\}$ transversal a $\{0\} \times S^1$ en $\mathcal{E} \times S^1$. Por el inciso 3) sabemos que no importa en que subvariedad $\mathcal{E} \times \{\theta\}$ definamos la transformación de Poincaré T_θ puesto que la conjugación topológica de clase C^1 y preserva todas las características estables del sistema dinámico discreto generado por T_θ en \mathcal{E} .

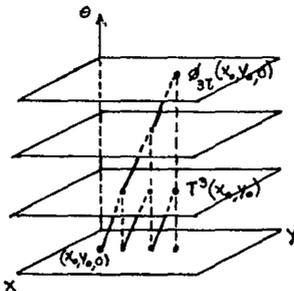


Figura 87.

Ejemplo 1. La transformación de Poincaré para el oscilador lineal con fricción forzado es

$$T_1(x_0, y_0) = e^{-2h\pi/\omega} (c_1 \cos(2\pi\omega_0/\omega) + c_2 \text{sen}(2\pi\omega_0/\omega))$$

$$T_2(x_0, y_0) = e^{-2h\pi/\omega} [-h(c_1 \cos(2\pi\omega_0/\omega) + c_2 \operatorname{sen}(2\pi\omega_0/\omega)) \\ + \omega_0(-c_1 \operatorname{sen}(2\pi\omega_0/\omega) + c_2 \cos(2\pi\omega_0/\omega))] \\ + \omega B$$

que en el caso de *resonancia*, $\omega = \omega_0 = \sqrt{1 - h^2}$, resulta ser

$$T(x_0, y_0) = ((x_0 - A)e^{-2h\pi/\omega} + A, (y_0 - \omega B)e^{-2h\pi/\omega} + \omega B)$$

Observación 5. Claramente un punto fijo de T corresponde a una solución periódica de (2).

2. Ecuación de Cartwright-Littlewood

A partir de este momento y en lo que resta del capítulo trabajaremos con una familia de ecuaciones de la forma

$$\ddot{x} + \mu f(x)\dot{x} + g(x) = \mu e(t) \quad (3)$$

dependiente de un parámetro μ , que fue estudiada ampliamente por dos matemáticos ingleses: Mary Cartwright y J. E. Littlewood.

Antes que otra cosa, consideremos la ecuación

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \quad (4)$$

llamada *ecuación de Lienard*; ésta ecuación tiene por sistema equivalente a

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - F(x) \\ \dot{y} &= -g(x) \end{aligned} \quad (5)$$

donde

$$F(x) = \int_0^x f(u)du \quad \text{y} \quad y = - \int_0^t g(x(s))ds,$$

obtenido de la integración de (4) en el intervalo de tiempo $[0, t]$. Haciendo una analogía con el oscilador lineal sin fricción, consideremos

$$\frac{y^2}{2} \quad \text{y} \quad G(x) = \int_0^x g(u)du$$

como las energías cinética y potencial del sistema respectivamente, con lo que obtenemos una función de energía

$$u(x, y) = \frac{y^2}{2} + G(x)$$

que cumple con que

$$du = ydy - g(x)dx = dy(dx - F(x)) + dydx = F(x)dy.$$

La integral $\int Fdy$ a lo largo de una solución es la energía disipada por el sistema sobre esa solución.

Debido a la similitud de (4) con (3) (cuando $\mu = 1$ y $e(t) \equiv 0$), consideraremos el sistema equivalente (no autónomo) de (3) dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - \mu(F(x) - E(t)) \\ \dot{y} &= -g(x)\end{aligned}\tag{6}$$

donde $\mu \geq 0$,

$$F(x) = \int_0^x f(u)du, \quad G(x) = \int_0^x g(u)du, \quad E(t) = \int_0^t e(s)ds$$

$$y = \dot{x} + \mu(F(x) - E(t));$$

Aquí,

$$u(x, y) = \frac{y^2}{2} + G(x)$$

es la función de energía de (6) que cumple con que

$$du = \mu(F(x) - E(t))dy$$

y $\int \mu(F(x) - E(t))dy$ a lo largo de una solución es la energía disipada de (3) sobre esa solución.

Para las funciones involucradas en (3) supondremos que están definidas en todo \mathbf{R} y que:

I. f es continua y g es localmente Lipschitz.

II. Existen constantes positivas α , α y β tales que

$$f(x) \geq \alpha \quad \text{para} \quad |x| \geq \alpha$$

$$|g(x)| \geq \beta \quad \text{para} \quad |x| \geq \alpha$$

III. $e(t)$ es continua y $|E(t)|$ es acotada por un número positivo M .

Observación 1. La hipótesis I implica que las F y G están bien definidas y tienen derivadas continuas.

Observación 2. La hipótesis II implica que $|F(x)| \rightarrow \infty$ y $|G(x)| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Observación 3. $|g|$ alcanza su máximo en $[-a, a]$ porque g es continua. Sea $\delta > 0$ tal que $|g(x)| \leq \delta$ para toda $x \in [-a, a]$.

IV. Supongamos que a es suficientemente grande y tal que

- (a) Existe $\gamma > 0$ tal que $|F(x) - M| \geq \gamma$ para $|x| \geq a$.
 (b) $G(x) > 0$ para $|x| \geq a$.

Teorema 1. Sean f, g, e, μ como en las hipótesis I, II, III y IV. Entonces para cada condición inicial $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$, existe una única solución de la ecuación (3) que satisface esta condición inicial en el tiempo $t = t_0$.

Demostración. Esto se desprende del hecho de que el campo vectorial (6) es localmente Lipschitz en las variables x, y, μ y continuo en t ; por tanto, (6) satisface las hipótesis del teorema 1 de la sección 1 del capítulo I (existencia y unicidad). Es claro que si $(x(t), y(t))$ es la solución de (6) con condición inicial (x_0, y_0) en el tiempo $t = t_0$, la función $x(t)$ satisface la ecuación (3) con condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$ y $\dot{x}(t_0) = y_0 - \mu(F(x_0) - E(t_0))$; inversamente, si $x(t)$ satisface la ecuación (3) con condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$, la función $(x(t), y(t)) = (x(t), \dot{x}(t) + \mu(F(x) - E(t)))$ satisface a (6) con condición inicial $(x_0, \dot{x}_0 + \mu(F(x_0) - E(t_0)))$ en el tiempo $t = t_0$. ■

Teorema 2. Existe una región Ω homeomorfa al disco unitario $D_1(0) = \{x \in \mathbf{R}^2 : |x| < 1\}$ tal que toda solución $(x(t), y(t))$ cumple con que $(x(t), y(t)) \in \Omega$ para toda $t > t_0$ donde t_0 generalmente depende de la solución.

Para la demostración del teorema 2 utilizaremos varios lemas

Sea λ_0 una cota superior para $|F(x)| + |E(t)|$ en $[-a, a]$ (que se obtiene por continuidad), y sea λ_1 una constante positiva que especificaremos posteriormente. Consideremos el rectángulo

$$\mathcal{R} = \begin{cases} [-a, a] \times [-(\lambda_0\mu + \lambda_1), \lambda_0\mu + \lambda_1] & \text{si } \mu \geq 1 \\ [-a, a] \times [-(\lambda_0 + \lambda_1), \lambda_0 + \lambda_1] & \text{si } \mu \leq 1. \end{cases}$$

Lema 1. Una trayectoria $\Gamma : (x(t), y(t))$ que permanece fuera del rectángulo abierto \mathcal{R}^o necesariamente describe una espiral alrededor de \mathcal{R} y cada vuelta es completada en un tiempo finito.

Demostración. La pendiente de la trayectoria es

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{-g(x)}{y - \mu(F(x) - E(t))}.$$

Dentro de la banda $\mathcal{B} = [-a, a] \times \mathbf{R}$ y fuera de \mathcal{R} (Figura 88)

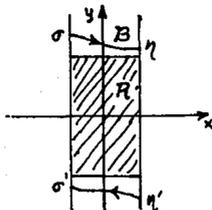


Figura 88.

$$|F(x) - E(t)| \leq |F(x)| + |E(t)| \leq \lambda_0,$$

de aquí

$$|y - \mu(F(x) - E(t))| \geq |y| - \mu|F(x) - E(t)| \geq \lambda_1.$$

También $|g(x)| \leq \delta$ y entonces

$$|m| \leq \frac{\delta}{\lambda_1} = m_0.$$

De aquí, Γ debe cruzar B en una sola dirección puesto que la pendiente está acotada y arriba del rectángulo \mathcal{R}

$$y \geq \begin{cases} \lambda_0 \mu + \lambda_1 & \text{si } \mu \geq 1 \\ \lambda_0 + \lambda_1 & \text{si } \mu \leq 1 \end{cases}$$

y

$$-\lambda_0 \mu \leq -\mu(F(x) - E(t)) \leq \lambda_0 \mu,$$

lo que implica que

$$\dot{x} = y - \mu(F(x) - E(t)) \geq \lambda_1 > 0$$

y, por tanto, x es estrictamente creciente. Así, el arco $\sigma\eta$ es descrito de izquierda a derecha (vea la figura 88). Lo mismo sucede en el caso en que

$$y \leq \begin{cases} -(\lambda_0 \mu + \lambda_1) & \text{si } \mu \geq 1 \\ -(\lambda_0 + \lambda_1) & \text{si } \mu \leq 1 \end{cases}$$

y

$$-\lambda_0 \mu \leq -\mu(F(x) - E(t)) \leq \lambda_0 \mu$$

ya que

$$\dot{x} = y - \mu(F(x) - E(t)) \leq -\lambda_1 < 0$$

y, por tanto, x es estrictamente decreciente (vea la figura 88). Note que por este hecho una trayectoria puede dejar B arriba de \mathcal{R} sólo hacia la derecha, y de manera similar una trayectoria puede dejar B por debajo de \mathcal{R} sólo por la izquierda (Figura 88).

Afirmación 1. El tiempo en que una trayectoria cruza \mathcal{B} arriba o abajo de \mathcal{R} tiene una cota superior τ_1 .

Consideremos el arco $\sigma\eta$ donde el cruce es η . En este arco

$$\dot{x} = y - \mu(F(x) - E(t)) \geq \lambda_1 > 0,$$

$$dt < \frac{dx}{\lambda_1}$$

y, por tanto,

$$t(\eta) - t(\sigma) \leq \frac{2a}{\lambda_1} = \tau_1;$$

lo mismo sucede para el arco $\eta'\sigma'$.

Ahora analizaremos las partes de la trayectoria fuera de la banda y recurriremos a la función de energía u . A lo largo de una trayectoria en la cual $x \geq a$

$$\dot{y} = -g(x) \leq -\beta \quad \text{y} \quad F(x) - E(t) \geq \gamma > 0,$$

entonces

$$\frac{du}{dt} = \mu(F(x) - E(t))\dot{y} \leq -\mu(F(x) - E(t))\beta \leq -\mu\beta\gamma,$$

$$du < -\mu\beta\gamma dt;$$

esto también se cumple para los arcos del lado izquierdo de \mathcal{B} , es decir,

$$du < -\mu\beta\gamma dt \quad \text{para toda} \quad |x| \geq a$$

y, por tanto, u decrece fuera de \mathcal{B} a lo largo de cualquier solución de (3).

En cualquier curva de energía constante, es decir, donde $du = ydy + g(x)dx = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-g(x)}{y}$$

vemos que $|m| \rightarrow \infty$ cuando $y \rightarrow 0$ y los arcos tienen la forma dada en la figura 89. Ellas son de hecho simétricas con respecto al eje x porque son curvas de una función hamiltoniana u simétrica con respecto al eje x , $u(x, y) = u(x, -y)$. El valor de u decrece pasando de los arcos exteriores a los interiores ya que los valores de $\frac{y^2}{2}$ y $G(x)$ decrecen al acercarnos al origen.

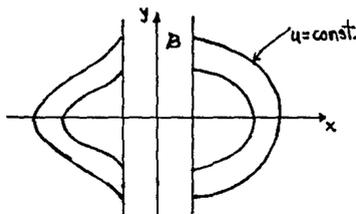


Figura 89.

Afirmación 2. Una trayectoria con puntos fuera de \mathcal{B} , entra en \mathcal{B} en un tiempo finito.

Sea (x_1, y_1) con $x_1 > a$; u decrece estrictamente a lo largo del arco que pasa por (x_1, y_1) fuera de \mathcal{B} ya que

$$\frac{du}{dt} < -\mu\beta\gamma < 0;$$

además, u permanece positiva fuera de \mathcal{B} y, por tanto, alcanza un mínimo u_0 sobre la recta $x = a$ (cuando $(x(t), y(t))$ ya regresó a \mathcal{B}); como $u(x(t), y(t))$ es localmente inyectiva podemos integrar de $u_1 = u(x_1, y_1)$ a u_0 la siguiente desigualdad

$$\frac{dt}{du} < -\frac{1}{\mu\beta\gamma},$$

$$t(u_0) - t(u_1) < -\frac{1}{\mu\beta\gamma}(u_0 - u_1) = \frac{1}{\mu\beta\gamma}(u_1 - u_0);$$

algo análogo sucede para los puntos en los que $x \leq -a$.

Así, tenemos que las curvas se comportan como en la figura 90, es decir, describen espirales alrededor de \mathcal{R} y cada vuelta es realizada en un tiempo finito. ■

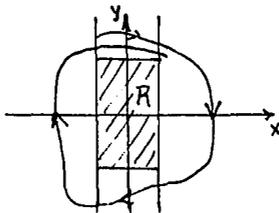


Figura 90.

Lema 2. Sea $\Gamma : (x(t), y(t))$ una curva como en la afirmación 2 y que cruza una de las rectas $x = \pm a$ en dos puntos consecutivos $\xi_0 = (\pm a, y_0)$, $\xi_1 (\pm a, y_1)$ en el mismo lado de \mathcal{B} . Entonces para λ_1 suficientemente grande $|y_1| < |y_0|$ (ξ_1 es más cercano a \mathcal{R} que ξ_0) y $y_0^2 - y_1^2$ tiene una cota inferior positiva μq . De aquí, después de un número finito de vueltas (un tiempo finito) Γ debe entrar a \mathcal{R}° .

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que ξ_0 es como en la figura 91.

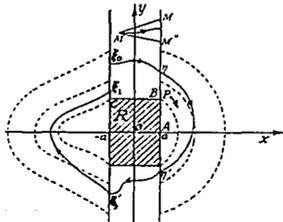


Figura 91.

El incremento de u a lo largo de $\xi_0\eta$ es a lo más

$$\begin{aligned} \left| \int_{\xi_0\eta} du \right| &= \left| \mu \int_{\xi_0\eta} (F(x) - E(t)) \frac{dy}{dx} dx \right| \\ &\leq \mu \int_{-a}^a |F(x) - E(t)| \left| \frac{dy}{dx} \right| dx \\ &\leq \mu \int_{-a}^a \lambda_0 m dx \\ &\leq \mu \int_{-a}^a \lambda_0 m_0 dx \\ &= 2a\mu\lambda_0 m_0 = \frac{2a\mu\lambda_0\delta}{\lambda_1}, \end{aligned}$$

y la misma estimación es válida para los arcos en \mathcal{B} por debajo de \mathcal{R} ($\eta'\xi'$ en la figura 91). Entonces la ganancia total de u a lo largo de estos dos arcos $\xi_0\eta$, $\eta'\xi'$ es a lo más $4a\mu\lambda_0\delta/\lambda_1$.

Por otra parte, u decrece de η a η' (sobre la trayectoria $\eta\eta'$). Puesto que para $x \geq a$, $F(x) - E(t) \geq \gamma$, el decrecimiento de u a lo largo del arco $\eta\eta'$ es al menos

$$\left| \int_{\eta\eta'} du \right| = \mu \left| \int_{\eta\eta'} (F(x) - E(t)) dy \right| \geq 2\mu\lambda_1\gamma$$

ya que $|\eta - \eta'| > 2\lambda_1$, y análogamente sobre el arco $\xi'\xi_1$. Finalmente

$$\begin{aligned} u(\xi_0) - u(\xi_1) &= \int_{\xi_0\eta + \eta\eta' + \eta'\xi' + \xi'\xi_1} du \\ &= \int_{\xi_0\eta} du + \int_{\eta\eta'} du + \int_{\eta'\xi'} du + \int_{\xi'\xi_1} du \\ &\geq 4\mu\left(\lambda_1\gamma - \frac{\lambda_0 a\delta}{\lambda_1}\right) > 0 \end{aligned}$$

si $\lambda_1 > \sqrt{\lambda_0 a\delta/\gamma}$. Como $\xi_0 = (-a, y_0)$ y $\xi_1 = (-a, y_1)$ entonces

$$y_0^2 - y_1^2 = 2(u(-a, y_0) - u(-a, y_1)) \geq 8\mu\left(\lambda_1\gamma - \frac{\lambda_0 a\delta}{\lambda_1}\right) = \mu q > 0$$

donde $q = 8(\lambda_1\gamma - (\lambda_0 a\delta)/\lambda_1)$. ■

Ahora seguimos con la construcción de la región cerrada Ω para lo cual utilizaremos la noción de curva de Jordan.

Definición. Sea X un espacio topológico. Decimos que un conjunto $\mathcal{J} \subseteq X$ es una curva de Jordan si existe una función $p: \mathcal{S}^1 \rightarrow X$ inyectiva, continua y abierta tal que $\mathcal{J} = p(\mathcal{S}^1)$.

Teorema de la curva de Jordan. *Toda curva de Jordan \mathcal{J} en la esfera \mathcal{S}^2 , divide a \mathcal{S}^2 en dos componentes conexas abiertas R_1, R_2 , con frontera común $\partial R_1 = \partial R_2 = \mathcal{J}$ y $R_i \cup \mathcal{J}$ ($i = 1, 2$) es homeomorfa al disco unitario $D_1(0)$. Lo mismo sucede para una curva de Jordan en \mathbf{R}^2 salvo que sólo una de las dos regiones, digamos R_1 , es acotada y homeomorfa a $D_1(0)$.* ■

A la componente acotada R_1 determinada por una curva de Jordan en el plano la llamamos la *componente interior* de la curva de Jordan.

En la figura 92 los puntos tales como B, B' o C, C', \dots , son simétricos con respecto al eje x . El rectángulo sombreado es \mathcal{R} y las líneas punteadas tienen pendientes $\pm m_0$. Los arcos tales como DQD' , ..., son partes de las curvas $u = \text{constante}$. La región cerrada Ω es la componenete inerior de la curva de Jordan $F P F' G' S G F$ unión la curva misma. La región abierta Σ es la componenete interior de la curva de Jordan $EDQD'H'K'RKE$. Así, $\bar{\Sigma} \subseteq \Omega^\circ$ (el interior topológico de Ω) y $d(\partial\Sigma, \partial\Omega) > 0$.¹

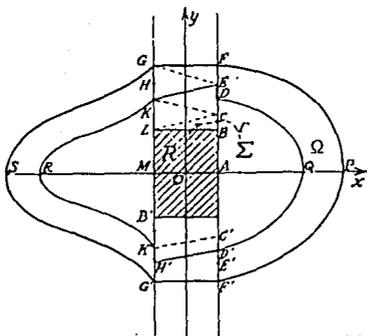


Figura 92.

Ya sabemos que toda solución entra en \mathcal{R} después de un tiempo finito t_0 , por ello para demostrar el teorema 2 sólo necesitamos el siguiente lema.

Lema 3. *Toda curva $\Gamma : (x(t), y(t))$ que deja \mathcal{R} permanece en la región Σ .*

¹ d es la distancia entre subconjuntos de \mathbf{R}^n definida por

$$d(A, B) = \inf \{ |a - b|, a \in A \subseteq \mathbf{R}^n, b \in B \subseteq \mathbf{R}^n \}.$$

Demostración. Si Γ sale de \mathcal{R} , digamos por BB' , como no puede cruzar el arco de la curva $u = \text{constante}$ que une a B y B' , permanece en Σ o bien fuera de \mathcal{R} o regresa a \mathcal{R} (de hecho sólo sucede la segunda opción). Lo mismo sucede si Γ deja \mathcal{R} por LL' .

Si Γ deja \mathcal{R} por LB entonces no puede tocar a LC y así deja \mathcal{B} por BC . Puesto que no cruza el arco DQD' , permanece en Σ fuera de la banda y o bien retorna a \mathcal{R} o regresa a \mathcal{B} por $B'C'$. Entonces Γ o regresa a \mathcal{R} o cruza \mathcal{B} por arriba de $K'C'$ y por abajo de $L'B'$. Entonces Γ o regresa a \mathcal{R} o permaneciendo en Σ vuelve a entrar en \mathcal{B} por LK . Γ debe entonces reingresar a \mathcal{R} o dejar \mathcal{B} debajo de su partida anterior (Lema 2) y de aquí, sale por CB . Repitiendo el argumento vemos que $\Gamma : (x(t), y(t)) \in \Sigma$ para todo $t > t_0$. ■

Con esto hemos concluido la demostración del teorema 2.

Teorema 3. Toda curva solución entra y permanece en el rectángulo $[-c, c] \times [-c(1 + \mu), c(1 + \mu)]$ desde $c > 0$ es una constante independiente de μ .

Puesto que para $\mu < 1$, Ω está contenida en una región como la que afirmamos, podemos suponer que $\mu \geq 1$. De la construcción de Ω se sigue que

$$|y| < A + B\mu; \quad A, B > 0.$$

Por tanto, sólo necesitamos demostrar el siguiente lema.

Lema 4. Para $\mu > 1$, existe $d > 0$ tal que $|x(t)| \leq d$ para toda $t > t_0$ para algún $t_0 \in \mathbf{R}$.

Demostración. Si $\Gamma : (x(t), y(t))$ permanece en \mathcal{R} no hay nada que demostrar. Por el lema 2 sabemos que Γ entra en \mathcal{R} . Supongamos que sale por la recta $x = a$ en el tiempo t_0 y que $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$. Existe un tiempo t_1 tal que $\dot{x}(t_1) = 0$ ya que por el lema 2 $x(t)$ oscila. Integramos la ecuación

$$\ddot{x} + \mu f(x)\dot{x} + g(x) = \mu e(t) \tag{3}$$

y encontramos que

$$\begin{aligned} -\dot{x}_0 + \mu(F(x(t_1)) - F(a)) + \beta(t_1 - t_0) &\leq -\dot{x}_0 + \mu(F(x(t_1)) - F(a)) + \int_{t_0}^{t_1} g(x(s)) ds \\ &\leq \mu(E(t) - E(t_0)) \leq 2\mu M, \end{aligned}$$

puesto que $g > \beta$ para $x \geq a$ y $E(t) \leq M$. De aquí,

$$\mu(F(x(t_1)) - F(a)) \leq 2\mu M + \dot{x}_0.$$

Por la ecuación (6) el máximo valor de \dot{x}_0 en $x = a$ es de la forma $\mu C + D \leq \mu(C + D)$. Por tanto, la desigualdad anterior implica que para $x \geq a$

$$F(x(t)) \leq F(a) + 2M + C + D = K > 0$$

ya que los valores t_1 son puntos críticos de x (máximos). Puesto que $F(x)$ es monótona creciente y positiva para $x \geq a$ entonces $x(t)$ también debe permanecer acotada, es decir, existe $L \geq a$ tal que $x(t) \leq L$. El caso en que $x \leq -a$ es análogo. ■

Con esto hemos demostrado el teorema 3.

Teorema 4. Si $f(x) > A > 0$, $\mu > 1$ y t es grande, entonces $|\dot{x}| < B$ donde $B > 0$.

Demostración. También podemos decir que bajo estas condiciones el punto (x, \dot{x}) penetra en el cuadrado de lado R , donde R no depende de μ .

Dado cualquier $L > 0$ no podemos tener $\dot{x}(t) > L$ para toda t puesto que $|x(t)|$ es acotada. De aquí o bien

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

y así se cumple el teorema, o $\dot{x}(t)$ oscila indefinidamente cuando $t \rightarrow \infty$. Si t_1 es cualquiera de sus máximos entonces $\ddot{x}(t_1) = 0$. Por (3)

$$\dot{x}(t_1) = \frac{\mu e(t_1) - g(x(t_1))}{f(x(t_1))}.$$

Como $|x(t)|$ es acotada independientemente de μ , así lo es $g(x)$, digamos que $|g(x)| < N$. Ya que $\mu \geq 1$ tenemos que

$$\dot{x}(t_1) < \frac{\mu M + N}{\mu A} \leq \frac{\mu M + \mu N}{\mu A} = K,$$

donde K es independiente de μ . Así, $\dot{x}(t)$ tiene una cota superior fija independiente de μ en todos estos máximos, y de aquí para toda t suficientemente grande. Lo mismo sucede para los valores mínimos de \dot{x} . ■

3. Existencia de una órbita periódica

3a. Oscilaciones autónomas ($E(t) \equiv 0$). Cuando $E(t) = 0$, la ecuación (3) adquiere la forma

$$\ddot{x} + \mu f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \quad (7)$$

que es una forma generalizada de la ecuación de Lienard. El sistema equivalente es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - \mu F(x) \\ \dot{y} &= -g(x). \end{aligned} \quad (8)$$

Hacemos además las siguientes hipótesis:

$$V. f(0) = \alpha_1 < 0;$$

VI. $\gamma_1(x) = \frac{g(x)}{x} > 0$ es continua.

VII. f y g son de clase C^1 para toda $x \in \mathbf{R}$.

Teorema 5. *Bajo todas nuestras hipótesis el sistema (8) tiene al menos un ciclo límite y, por tanto, (7) tiene al menos una órbita periódica.*

Demostración. Bajo nuestras suposiciones el origen es el único punto crítico. La linealización de (8) es

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu\alpha_1 & 1 \\ -\beta_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

donde $\beta_1 = \gamma_1(0)$. El polinomio característico es $\lambda^2 + \mu\alpha\lambda + \beta = 0$, cuyas raíces son

$$\lambda = \frac{-\mu\alpha \pm \sqrt{\mu^2\alpha^2 - 4\beta}}{2}$$

que tienen parte real positiva y así el origen es un nodo o un foco inestable (teorema de Hartman-Grobman); por tanto las soluciones permanecen fuera de un disco $\mathcal{D}_r(\mathbf{0})$ para una r apropiada. Por el teorema 2 todas las soluciones entran y permanecen en Σ y, por tanto, en $\Omega - \mathcal{D}_r(\mathbf{0})$. Por el teorema de Poincaré-Bendixson (vea el apéndice A) existe una ciclo límite para (8) y una órbita periódica para (7). ■

3b. Oscilaciones forzadas ($E(t)$ es una función periódica). Sea $E(t)$ una función periódica de periodo τ .

Teorema 6. *Si $E(t)$ tiene periodo τ existe una solución periódica con periodo τ .*

Demostración. Recordando la notación de la sección 1 sean ϕ_t el flujo del sistema

$$\dot{x} = y - \mu(F(x) - E(\theta))$$

$$\dot{y} = -g(x)$$

$$\dot{\theta} = 1$$

y $T_{t_1}: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ el difeomorfismo dado como

$$T_{t_1}(x, y) = \pi \circ \phi_{t_1} \circ i_{t_0}(x, y)$$

donde $i_{t_0}(x, y) = (x, y, t_0)$ es una inclusión de \mathbf{R}^2 en \mathbf{R}^3 . En particular sea $T = T_\tau$.

Sea $(x_0, y_0) \in \Omega$ y $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x, y) = (x(t), y(t)) = \pi \circ \phi_t(x_0, y_0, t_0)\}$. Por el lema 2 existe t_1 tal que $(x(t_1), y(t_1)) \in \mathcal{R}$. Puesto que $T_{t_1}(x_0, y_0) \in \mathcal{R}$ y T_{t_1} es continua, existe una vecindad U_1 de $(x(t_1), y(t_1))$ en \mathcal{R}^o . De aquí, $T_{t_1}^{-1}(U_1) = U$ es una vecindad de (x_0, y_0) tal que si $V = U \cap \Omega$ entonces $T_{t_1}(V) \subseteq \mathcal{R}$. Así, $T_t(V) \subseteq \Sigma$ para todo $t \geq t_1$.

Sea $n = n(V)$ el mínimo múltiplo de τ tal que $n\tau \geq t_1$. Entonces $T^{n\tau}(V) \subseteq \Sigma$ para toda $m \geq n$. Así, hemos construido una vecindad V para cada punto $(x_0, y_0) \in \Omega$.

Puesto que Ω es compacto y $\{V\}$ es una cubierta abierta de Ω existe una subcubierta finita $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$. Sea $N = \prod n(V_i)$. Entonces $T^m(\Omega) \subseteq \Sigma$ para toda $m \geq N$.

Como toda solución que sale del rectángulo \mathcal{R} permanece en Σ implica que $T_t(\mathcal{R}) \subseteq \Sigma$ para toda t . En particular $T^k(\mathcal{R}) \subseteq \Omega$ para toda k .

Consideremos ahora las imágenes sucesivas $\Omega_0 = \Omega$, $\Omega_1 = T(\Omega)$, ..., $\Omega_k = T^k(\Omega)$, ..., y sean Z_0, Z_1, \dots , los complementos cerrados de las componentes no acotadas de los exteriores de $\Omega_0, \Omega_0 \cup \Omega_1, \dots$. Puesto que $T^k(\mathcal{R}) \subseteq \Omega_0$ para toda k , $\Omega_k \cap \Omega$ es no vacío. Ahora utilizaremos el siguiente teorema.

Teorema ([L], pág. 345). Sean $\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_n$ curvas de Jordan en \mathbf{R}^2 y sea U_i la componente interior de \mathcal{J}_i : Si U_i y U_{i+1} se intersecan para cada $i = 1, 2, \dots, n-1$, entonces la componente infinita de $\mathbf{R}^2 - (\mathcal{J}_1 \cup \dots \cup \mathcal{J}_n)$ tiene por frontera una curva de Jordan \mathcal{J} contenida en $\mathcal{J}_1 \cup \dots \cup \mathcal{J}_n$. ■

Si $\mathcal{J}_0, \mathcal{J}_1, \dots$, son las curvas de Jordan fronteras de $\Omega_0, \Omega_1, \dots$, y H_0, H_1, \dots , aquéllas de Z_0, Z_1, \dots , entonces $H_k \subseteq \mathcal{J}_0 \cup \dots \cup \mathcal{J}_k$. Sean $H = H_{N-1}$ y $Z = Z_{N-1}$. Puesto que $T^N(\Omega_0) \subseteq \Omega_0$, tenemos que $T^N(\mathcal{J}_0) \subseteq \Omega_0 \subseteq Z$. De aquí, $T(\mathcal{J}_0 \cup \dots \cup \mathcal{J}_{N-1}) \subseteq Z$ y por tanto $T(H) \subseteq Z$. Si W es la componente interior cerrada de $T(H)$ entonces $W \subseteq Z$. Pero la componente interior cerrada de $T(H)$ es $T(Z)$. Así, $T(Z) \subseteq Z$. Puesto que Z es homeomorfo a $D_1(0)$, por el teorema del punto fijo de Brouwer (vea el apéndice A) T tiene un punto fijo (x_1, y_1) en Z . Así, si $\Gamma_1 : (x(t), y(t))$ es la trayectoria con condición inicial $(x(t_0), y(t_0)) = (x_1, y_1)$ entonces $(x(t_0 + \tau), y(t_0 + \tau)) = (x_1, y_1)$. Por tanto, hemos obtenido una órbita periódica para (4) y una solución periódica para (3). ■

Corolario 1. Una trayectoria cerrada (solución periódica) no puede rodear el rectángulo cerrado \mathcal{R} . Esto sucede en particular para la oscilación autónoma de (7) y la oscilación forzada de (3). ■

Ahora probaremos bajo hipótesis más fuertes sobre las funciones f y g la siguiente propiedad.

Teorema 7 (Teorema de convergencia). Supongamos que $f(x) \geq \alpha_2 > 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$, que existe $g''(x)$ y es acotada en \mathcal{R} y que $g'(x) \geq \beta_2 > 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$. Entonces para μ suficientemente grande todas las soluciones $(x(t), \dot{x}(t))$ convergen a otra cuando $t \rightarrow \infty$.

Demostración. Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos soluciones y sean

$$z(t) = x_2(t) - x_1(t), \quad \Delta F = F(x_2(t)) - F(x_1(t)),$$

$$\Delta g = g(x_2(t)) - g(x_1(t)).$$

De la ecuación 3 vemos que

$$\ddot{z} + \mu \frac{d\Delta F}{dt} + \Delta g = 0.$$

Multiplicamos esta ecuación por \dot{z} e integramos de t_0 a t , $t \geq t_0 \geq 0$, para obtener

$$\frac{1}{2} \dot{z}^2 \Big|_{t_0}^t + \mu \dot{z} \Delta F \Big|_{t_0}^t - \mu \int_{t_0}^t \ddot{z} \Delta F dt + \mu \int_{t_0}^t \dot{z} \Delta g dt = 0.$$

Sustituyendo \ddot{z} e integrando por partes encontramos

$$\left[\frac{1}{2} \dot{z}^2 + \mu \dot{z} \Delta F + \frac{\mu^2}{2} (\Delta F)^2 + \frac{z \Delta g}{2} \right]_{t_0}^t + \int_{t_0}^t z^2 \left[\mu \frac{\Delta F}{z} \frac{\Delta g}{z} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \frac{\Delta g}{z} \right] dt = 0. \quad (10)$$

Denotaremos por $O(1)$ a una función que sea acotada cuando $t \rightarrow \infty$; sustituyendo en la ecuación anterior y observando que z , \dot{z} , x_1 , \dot{x}_1 , x_2 y \dot{x}_2 son todas $O(1)$:

$$\int_{t_0}^t z^2 \left[\mu \frac{\Delta F}{z} \frac{\Delta g}{z} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \frac{\Delta g}{z} \right] dt = O(1). \quad (11)$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\Delta g}{z} &= \frac{d}{dt} \frac{g(x_1 + z) + g(x_1)}{z} \\ &= \frac{\dot{x}_1(t)}{x_1(t)} [g'(x_1 + z) - g'(x_1)] - \frac{\dot{z}(t)}{z^2} [g(x_1 + z) - g(x_1) - zg'(x_1 + z)] \\ &= \dot{x}_1(t) g''(x_1 + \theta z) \frac{\dot{z}(t)}{z^2} \left[\frac{z^2}{2} g''(x_1 + \theta' z) \right] = O(1), \end{aligned}$$

$$0 \leq \theta, \theta' \leq 1.$$

Así,

$$\left| \frac{d}{dt} \frac{\Delta g}{z} \right| < \alpha_3, \quad \alpha_3 > 0,$$

para t grande. Por otra parte,

$$\frac{\Delta F}{z} = f(x_1 + \eta z), \quad \frac{\Delta g}{z} = g'(x_1 + \eta' z),$$

$$0 \leq \eta, \eta' \leq 1.$$

De aquí, para t grande

$$\frac{\Delta F}{z} \frac{\Delta g}{z} \geq \alpha_2 \beta_2.$$

Por tanto, si $\mu \alpha_2 \beta_2 > \alpha_3$ la expresión dentro del paréntesis en la ecuación (11) es positivo y $O(1)$. Así,

$$\int_0^t z^2 dt = O(1)$$

y dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe $t_0 > 0$ tal que para todo $t > t_0$

$$\int_{t_0}^t z^2 dt < \varepsilon. \tag{12}$$

Afirmación 1. La desigualdad (12) implica que $z \rightarrow 0$.

Si no sucede así, existe $\rho > 0$ y una sucesión de tiempos $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ tal que $t_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$ y $z^2(t_n) > \rho$. Podemos suponer que los valores t_n están tan espaciados entre sí que para algún $t_n < t'_n < t_{n+1}$ tenemos que $z^2(t'_n) < \frac{1}{2}\rho$ puesto que de otro modo no podría suceder (12). Además, sea t'_n el primer tiempo mayor que t_n donde esto ocurre y sea $\delta t_n = t'_n - t_n$. Así,

$$\int_{t_0}^t z^2 dt > \frac{1}{2}\rho \sum \delta t_n.$$

De aquí, $\delta t_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por otro lado, $|\dot{z}(t)|$ alcanza en $[t_n, t'_n]$ un valor mayor que $\frac{\rho}{2\delta t_n}$, que contradice que $\dot{z}(t) = O(1)$. Por tanto, $z \rightarrow 0$.

Regresemos a (10)

$$\dot{z}^2|_{t_0}^t = -2[\mu\dot{z}\Delta F + \frac{\mu^2}{2}(\Delta F)^2 + \frac{z\Delta g}{2}]_{t_0}^t + O(1) \int_{t_0}^t z^2 dt.$$

Puesto que $\dot{z} = O(1)$ y $x_2 \rightarrow x_1$, podemos elegir t_0 tan grande que

$$|[\mu\dot{z}\Delta F + \frac{\mu^2}{2}(\Delta F)^2 + \frac{z\Delta g}{2}]_{t_0}^t| < \frac{\varepsilon}{4}$$

para cualquier $t > t_0$, y por la afirmación 1 tal que

$$|O(1) \int_{t_0}^t z^2 dt| < \frac{\varepsilon}{2},$$

lo que implica que $\dot{z}^2|_{t_0}^t < \varepsilon$. Así, $\dot{z}^2(t)$ tiene límite cuando $t \rightarrow \infty$, digamos que $\dot{z}^2 \rightarrow k^2 > 0$. Entonces $\dot{z} \rightarrow \pm k$. Porque si no, existe una sucesión $t_1 < t_2 < \dots$, tal que $t_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \dot{z}(t_{2n}) = k \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \dot{z}(t_{2n+1}) = -k.$$

Sea $\{\varepsilon_n\}$ una sucesión tal que $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$ para toda $n \in \mathbf{N}$ y $\varepsilon_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, y elijamos la sucesión $\{t_i\}$ tal que $\dot{z}(t_{2n+1}) \in (-k - \varepsilon_{2n+1}, -k + \varepsilon_{2n+1})$ y $\dot{z}(t_{2n}) \in (k - \varepsilon_{2n}, k + \varepsilon_{2n})$. Puesto que \dot{z} es continua, existen valores t'_n ($t_{2n} < t'_n < t_{2n+1}$) tales que $\dot{z}(t'_n) = 0$ para todo n , es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \dot{z}(t'_n) = 0,$$

y de aquí,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \dot{z}^2(t'_n) = 0,$$

que contradice que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{z}^2(t) = k^2 > 0.$$

Por tanto, digamos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{z}(t) = k > 0.$$

Pero esto implica que $z(t)$ es estrictamente creciente cuando $t \rightarrow \infty$; entonces $z(t) \rightarrow 0$ por la izquierda de 0 y $\dot{z}(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Análogamente si $\dot{z}(t) \rightarrow -k$.

Por tanto, $(z(t), \dot{z}(t)) \rightarrow (0, 0)$ cuando $t \rightarrow \infty$. ■

Corolario 2. *Supongamos que $E(t)$ tiene periodo τ tal que existe una solución periódica. Entonces bajo las hipótesis del teorema 7 todas las soluciones convergen a $(x(t), \dot{x}(t))$. Por tanto, esta solución periódica es estable.* ■

El hecho es que la solución periódica sólo tiende a sí misma y por ello las demás soluciones tienen a ella.

Concluiremos este capítulo examinando una propiedad de estos sistemas con respecto al área de subconjuntos del plano bajo la acción de T .

Teorema 8. *Si f y g son de clase C^2 y e es de clase C^1 con periodo $\tau = \frac{2\pi}{\lambda}$ entonces cualquier área suficientemente pequeña $dA = dx dy$ es transformada en un área*

$$(e^{-\int_0^\tau f(\psi_1(x, y, t)) dt} + \epsilon) dx dy$$

bajo T , donde

$$\psi_1(x, y, t) = [\pi \circ \Phi_t \circ i]_1 \quad y \quad \psi_2(x, y, t) = [\pi \circ \Phi_t \circ i]_2,$$

Φ_t es el flujo del sistema¹

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -f(x)y - g(x) - e(\theta) \\ \dot{\theta} &= 1 \end{aligned} \tag{9}$$

y además $\epsilon \rightarrow 0$ cuando $dx dy \rightarrow 0$.

Demostración. Después de un t el área $dx dy$ es transformada en un área aproximada de $J(t) dx dy$ donde

$$J(t) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \end{pmatrix} \Big|_{(x_0, y_0, t)}$$

¹ Claramente este sistema tiene soluciones únicas y un flujo de clase C^1 .

para algún (x_0, y_0) contenido en el conjunto que estamos considerando. Así,

$$\begin{aligned} \frac{dJ(t)}{dt} &= \det \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{d}{dt} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} & \frac{d}{dt} \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \frac{d\psi_1}{dt} & \frac{\partial}{\partial y} \frac{d\psi_1}{dt} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{d\psi_2}{dt} & \frac{\partial}{\partial y} \frac{d\psi_2}{dt} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{d\psi_2}{dt} &= \frac{\partial}{\partial x} \dot{y} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (-f(\psi_1)\psi_2 - g(\psi_1) - c(t)) \\ &= -f(\psi_1) \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - (f'(\psi_1)\psi_2 + g'(\psi_1)) \frac{\partial \psi_1}{\partial x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \frac{d\psi_2}{dt} &= \frac{\partial}{\partial y} \dot{y} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} (-f(\psi_1)\psi_2 - g(\psi_1) - c(t)) \\ &= -f(\psi_1) \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - (f'(\psi_1)\psi_2 + g'(\psi_1)) \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \end{aligned}$$

y así,

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{d\psi_2}{dt} & \frac{\partial}{\partial y} \frac{d\psi_2}{dt} \end{pmatrix} &= -f(\psi_1) \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &\quad - (f'(\psi_1)\psi_2 + g'(\psi_1)) \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= -f(\psi_1)J(t); \end{aligned}$$

además,

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \frac{d\psi_1}{dt} & \frac{\partial}{\partial y} \frac{d\psi_1}{dt} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \end{pmatrix} = 0;$$

por tanto,

$$\frac{dJ(t)}{dt} = -f(\psi_1)J(t).$$

Integramos de 0 a $\tau = \frac{2\pi}{\lambda}$ obtenemos que

$$\begin{aligned} \log J(\tau) - \log J(0) &= \log J(\tau) - \log 1 = \log J(\tau) \\ &= - \int_0^\tau f(\psi_1(x, y, t)) dt, \end{aligned}$$

es decir,

$$J(\tau) \approx e^{-\int_0^\tau f(\psi_1(x, y, t)) dt}.$$

Corolario 3. Si $f \geq \alpha > 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$ entonces cualquier área suficientemente pequeña $dxdy$ es transformada en un área menor que

$$e^{-\alpha r} dxdy$$

bajo T y así, toda área finita tiende a 0 bajo las iteraciones de T , es decir, si $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{R}^2$ tiene área finita $\text{área}(\mathcal{A}) > \infty$, entonces

$$\text{área}(T^n(\mathcal{A})) \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty. \quad \blacksquare$$

Claramente este corolario lo obtenemos de dar una partición (finita) lo suficientemente fina de cualquier conjunto con área finita.

APENDICE A

1. Teoremas del capítulo 1

Teorema 1. (Teorema fundamental de existencia y unicidad de soluciones, [P], pág. 73). Sean U un subconjunto abierto de \mathbf{R}^n que contiene a \mathbf{x}_0 , V un subconjunto abierto de \mathbf{R}^p que contiene a μ_0 (n y p enteros positivos), $\mathbf{f} \in \mathcal{C}(U \times \mathbf{R} \times V, U)$, y suponemos que $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}$, $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mu}$ son continuas. Entonces existen $a > 0$ y $\delta > 0$ tales que para toda $\mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x}_0)$ y para toda $\mu \in B_\delta(\mu_0)$, el problema con valor inicial

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \mu) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0\end{aligned}\tag{1}$$

tiene una única solución $\mathbf{u}(\mathbf{y}, t, \mu)$, donde $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^1([-a, a] \times B_\delta(\mathbf{x}_0) \times B_\delta(\mu_0))$ si (1) es un sistema autónomo.

Demostración. Demostraremos el teorema utilizando aproximaciones sucesivas y el principio de inducción. Sea $a > 0$ un número real cuyo tamaño determinaremos después. Por el hecho de que $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}$, $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mu}$ son continuas consideraremos a los puntos $(\mathbf{x}, \mu) \in \mathbf{R}^{n+p}$ como puntos $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$ ($m = n + p$), agregando a (1) las ecuaciones de primer orden $\dot{\mu}_i = 1$ para toda $1 \leq i \leq p$ y consideramos a al campo $(\mathbf{f}, 1, \dots, 1)$ como una nueva \mathbf{f} (abusando de la notación). Sea $f: U \times U \times [-a, a] \rightarrow \mathbf{R}$ dada por

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \begin{cases} \frac{|\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{f}(\mathbf{y}, t)|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} & \text{si } \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \\ \left| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) \right| & \text{si } \mathbf{x} = \mathbf{y}, \end{cases}$$

que es una función continua en $U \times U \times [-a, a]$. Sean $\mathbf{x}_0 \in U$, $\mathbf{y} \in U$ y $\varepsilon > 0$ tales que $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \subseteq U$. Sea $b = \frac{\varepsilon}{2}$ y sean $A = \overline{B_b(\mathbf{x}_0)} \times [-a, a]$ y $B = \overline{B_b(\mathbf{x}_0)} \times \overline{B_b(\mathbf{x}_0)} \times [-a, a]$ dos conjuntos compactos, entonces

$$M = \max_{(\mathbf{x}, t) \in A} |\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)|, \quad K = \max_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \in B} |f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)|$$

están bien definidos por la compacidad de A y B y la continuidad de \mathbf{f} y f .

Sea $\{u_i\}$ la sucesión de funciones de $[-a, a]$ en $U \times U$ dada por

$$\begin{aligned} u_0(t) &= x_0 \\ u_1(t) &= x_0 + \int_0^t f(u_0(s), s) ds \\ &\vdots \\ u_i(t) &= x_0 + \int_0^t f(u_{i-1}(s), s) ds \\ &\vdots \end{aligned}$$

Es claro que $u_0(t) = x_0 \in \overline{B_b(x_0)}$ para toda $t \in [-a, a]$. Las hipótesis de inducción son que $u_i(t)$ está definida y es continua en $[-a, a]$ y que

$$\max_{t \in [-a, a]} |u_i(t) - x_0| \leq b.$$

Entonces $f(u_i(t), t)$ está definida y es continua en $[-a, a]$, lo que implica que

$$u_{i+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(u_i(s), s) ds$$

está definida y es de clase C^1 en $[-a, a]$. Además,

$$|u_{i+1}(t) - x_0| \leq \int_0^t |f(u_i(s), s)| ds \leq Ma$$

y podemos pedir que $0 < a < \frac{b}{M}$, con lo cual

$$|u_{i+1}(t) - x_0| \leq b \quad \text{para toda } t \in [-a, a],$$

es decir,

$$\max_{t \in [-a, a]} |u_{i+1}(t) - x_0| \leq b,$$

y por el principio de inducción definimos la sucesión de funciones $u_i: [-a, a] \rightarrow \overline{B_b(x_0)} \subset U$.

Observemos que

$$\begin{aligned} |f(x, t) - f(y, t)| &= \begin{cases} |x - y|f(x, y, t) & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} K|x - y| & \text{si } x \neq y \\ |x - y| = 0 & \text{si } x = y, \end{cases} \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_2(t) - \mathbf{u}_1(t)| &\leq \int_0^t |\mathbf{f}(\mathbf{u}_1(s), s) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_0(s), s)| ds \\ &\leq K \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{x}_0| ds \\ &\leq Kab, \end{aligned}$$

es decir,

$$\max_{t \in [-a, a]} |\mathbf{u}_2(t) - \mathbf{u}_1(t)| \leq Kab.$$

Ahora nuestra hipótesis de inducción es

$$\max_{t \in [-a, a]} |\mathbf{u}_i(t) - \mathbf{u}_{i-1}(t)| \leq (Ka)^{i-1} b$$

para $i \geq 2$. Así,

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_{i+1}(t) - \mathbf{u}_i(t)| &\leq \int_0^t |\mathbf{f}(\mathbf{u}_i(s), s) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_{i-1}(s), s)| ds \\ &\leq K \int_0^t |\mathbf{u}_i(s) - \mathbf{u}_{i-1}(s)| ds \\ &\leq (Ka)^i b, \end{aligned}$$

es decir,

$$\max_{t \in [-a, a]} |\mathbf{u}_{i+1}(t) - \mathbf{u}_i(t)| \leq (Ka)^i b$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Aquí también podemos pedir que $0 < a < \frac{1}{K}$ ($\alpha = Ka < 1$).

Ahora, para $l > i \geq N$ y $t \in [-a, a]$ vemos que

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_l(t) - \mathbf{u}_i(t)| &\leq \sum_{j=i}^{l-1} |\mathbf{u}_{j+1}(t) - \mathbf{u}_j(t)| \\ &\leq \sum_{j=i}^{l-1} \max_{t \in [-a, a]} |\mathbf{u}_{j+1}(t) - \mathbf{u}_j(t)| \\ &\leq \sum_{j=N}^{l-1} \alpha^j b \\ &\leq \sum_{j=N}^{\infty} \alpha^j b \\ &= b \frac{\alpha^N}{1 - \alpha} \end{aligned}$$

y que $\alpha^N \rightarrow 0$ cuando $N \rightarrow \infty$. Entonces para toda $\delta > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ ($N > \frac{\log(1-\alpha)\delta - \log b}{\log \alpha}$) tal que

$$|u_i - u_j| = \max_{t \in [-a, a]} |u_i(t) - u_j(t)| \leq b \frac{\alpha^N}{1 - \alpha} < \delta \quad \text{si } i, j \geq N,$$

es decir, $\{u_i\}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio de funciones $C([-a, a], U)$ y, por tanto, converge uniformemente a una función $u \in C([-a, a], U)$.¹ Si tomamos el límite cuando $i \rightarrow \infty$ en la ecuación

$$u_i(t) = x_0 + \int_0^t f(u_{i-1}(s), s) ds,$$

la curva u cumple con que

$$u(t) = x_0 + \int_0^t f(u(s), s) ds$$

y que

$$\max_{t \in [-a, a]} |u(t) - x_0| \leq b;$$

así, por el teorema fundamental del cálculo

$$\dot{u}(t) = f(u(t), t)$$

$$u(0) = x_0$$

y, por tanto, u es una solución al problema con valor inicial (1) y es de clase C^1 en la variable $t \in [-a, a]$, donde $a \leq \min\{\frac{1}{K}, \frac{b}{M}\}$.

Ahora demosremos la unicidad de la solución u . Sea $v(t)$ otra solución de (1). La función $|u(t) - v(t)|$ es continua, entonces existe un valor $t_0 \in [-a, a]$ donde alcanza su máximo

$$\begin{aligned} |u - v| &= \max_{t \in [-a, a]} |u(t) - v(t)| \\ &= |u(t_0) - v(t_0)| \\ &\leq \int_0^{t_0} |f(u(s), s) - f(v(s), s)| ds \\ &\leq K \int_0^{t_0} |u(s) - v(s)| ds \\ &\leq Ka|u - v|, \end{aligned}$$

pero esto es una contradicción si $u \neq v$, ya que $Ka < 1$. Por tanto, la solución u es única.

La demostración de que u es de clase C^1 en la variable x puede verse en [P], pág. 79. ■

¹ $C([-a, a], U)$ es un espacio completo con la norma

$$\|u\| = \max_{t \in [-a, a]} |u(t)|.$$

Teorema (Poincaré-Bendixson, [Pa], pág. 19). *Sea X un campo vectorial en S^2 de clase C^r ($r \geq 1$) con un número finito de singularidades. Sea $p \in S^2$ y $\omega(p)$ su conjunto ω -límite. Entonces ocurre una de las siguientes posibilidades:*

- (i) $\omega(p)$ es una singularidad,
- (ii) $\omega(p)$ es una órbita cerrada,
- (iii) $\omega(p)$ está constituido por singularidades p_1, \dots, p_n y órbitas regulares tales que si $\gamma \subset \omega(p)$ entonces $\alpha(\gamma) = p_i$ y $\omega(\gamma) = p_j$ para algunos i, j .

2. Teoremas del capítulo 2

Teorema de Sard en \mathbf{R}^n ([Ab/M/R], pág. 221). *Sean $U \subseteq \mathbf{R}^m$ un conjunto abierto y $f: U \rightarrow \mathbf{R}^n$ una transformación de clase C^k , donde $k > \max\{0, m - n\}$. Entonces el conjunto de los valores críticos de f tiene medida cero en \mathbf{R}^n .*

3. Teoremas del capítulo 3

Teorema del punto fijo de Brouwer en dimensión 2 ([M], pág. 74). *Sea $f: \overline{D_1(\mathbf{0})} \rightarrow \overline{D_1(\mathbf{0})}$ una transformación continua. Entonces f tiene al menos un punto fijo, es decir, existe $\mathbf{x} \in \overline{D_1(\mathbf{0})}$ tal que $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.*

APENDICE B

En este apéndice demostraremos que los periodos de las órbitas de un centro no lineal tienden a ∞ conforme la amplitud de ellas tiende a 0. Este problema me fue planteado por el Dr. Santiago López de Medrano durante la revisión de la sección referente a los *sistemas conservativos* (específicamente de la observación 6 de la sección 1 del capítulo 2) de una versión preliminar de esta tesis.

Acerca de los Periodos de las Orbitas de un Centro No Lineal

Primero veremos dos resultados que necesitaremos para la demostración de la propiedad antes mencionada.

Lema 1 (Desigualdad de Gronwall). Sean $u, v: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ funciones no negativas, $C \geq 0$ y $K > 0$. Supongamos que

$$u(t) \leq C + K \int_0^t u(s)v(s)ds \quad \text{para toda } t \in \mathbf{R},$$

entonces

$$u(t) \leq Ce^{K \int_0^t v(s)ds} \quad \text{para toda } t \in \mathbf{R}. \quad \blacksquare$$

Sea $f: U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ una función continua tal que $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ donde $U \subseteq \mathbf{R}^n$ es un conjunto abierto que contiene al origen, que tiene derivada en $\mathbf{0}$ ($A = Df(\mathbf{0})$) y supongamos que existe $K > 0$ tal que

$$|f(\mathbf{x})| \leq K|\mathbf{x}| \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n.$$

Consideremos las ecuaciones

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}, \quad (2)$$

y denotemos con $\mathbf{x}(t)$ a las soluciones de (1), con $\mathbf{y}(t)$ a las soluciones de (2) y con $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) = \mathbf{y}(0)$ a las condiciones iniciales.

Notemos que

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + R(\mathbf{x})$$

donde

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{|R(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|} = 0,$$

es decir, $R(\mathbf{x}) = o(\mathbf{x})$.

Teorema 1. Sean \mathbf{f} un campo vectorial como enunciamos en los párrafos anteriores, $\mathbf{x}(t)$ la solución de (1) y $\mathbf{y}(t)$ la solución de (2) ambas con condición inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{y}(0) = \mathbf{x}_0$. Entonces para toda $T > 0$ y para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|\mathbf{x}_0| < \delta$, entonces $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| < \varepsilon|\mathbf{x}_0|$ para toda $t \in (0, T)$.

Demostración. Por el teorema fundamental del cálculo

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t (A\mathbf{x}(s) + R(\mathbf{x}(s)))ds$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t A\mathbf{y}(s)ds.$$

Consideremos

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| &= \left| \int_0^t (A\mathbf{x}(s) - A\mathbf{y}(s) + R(\mathbf{x}(s)))ds \right| \\ &\leq |A| \int_0^t |\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}(s)|ds + \int_0^t |R(\mathbf{x}(s))|ds, \end{aligned}$$

donde $|A|$ es la norma de la transformación lineal A . Debido a la forma de esta ecuación utilizaremos el lema de Gronwall para demostrar la desigualdad deseada.

Ahora, $R(\mathbf{x}) = o(\mathbf{x})$ significa que para toda $\xi > 0$ existe $\eta = \eta(\xi) > 0$ tal que si $|\mathbf{x}| < \eta$, entonces

$$\frac{|R(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|} < \xi, \quad \text{o bien} \quad |R(\mathbf{x})| < \xi|\mathbf{x}|.$$

Así, sólo necesitamos acotar a $|\mathbf{x}(t)|$ con una η apropiada para hacer a $|R(\mathbf{x})|$ tan pequeño como queramos.

Así,

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}(t)| &\leq |\mathbf{x}_0| + \int_0^t |\mathbf{f}(\mathbf{x}(s))|ds \\ &\leq |\mathbf{x}_0| + K \int_0^t |\mathbf{x}(s)|ds, \end{aligned}$$

que por la desigualdad de Gronwall implica que

$$|\mathbf{x}(t)| \leq |\mathbf{x}_0|e^{Kt} \leq |\mathbf{x}_0|e^{KT}.$$

Entonces $|\mathbf{x}(t)| < \eta$ si $|\mathbf{x}_0| < \delta = e^{-KT}\eta$. Por tanto,

$$|R(\mathbf{x}(t))| < \xi|\mathbf{x}(t)| < \xi|\mathbf{x}_0|e^{KT}$$

si $|\mathbf{x}_0| < \delta$, lo que implica que

$$\int_0^t |R(\mathbf{x}(s))| ds < \xi T|\mathbf{x}_0|e^{KT},$$

y así,

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| \leq \xi T|\mathbf{x}_0|e^{KT} + |A| \int_0^t |\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}(s)| ds,$$

y por la desigualdad de Gronwall tenemos que

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| \leq \xi T|\mathbf{x}_0|e^{(K+|A|)t} < \xi T|\mathbf{x}_0|e^{(K+|A|)T}.$$

Entonces $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| < \varepsilon|\mathbf{x}_0|$ para todo $t \in (0, T)$ si $\xi \leq \frac{\varepsilon}{T}e^{-(K+|A|)T}$ y $\delta = e^{-KT}\eta$. ■

Teorema 2. *Supongamos que \mathbf{f} cumple las hipótesis del teorema 1, que (1) está definido en el plano ($n = 2$), que el origen es un centro para (1) y que la derivada $A = D\mathbf{f}(\mathbf{0})$ tiene una de las formas siguientes (salvo por un cambio lineal de coordenadas)*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces el periodo de las órbitas del centro no lineal tiende a ∞ cuando la amplitud de ellas tiende a 0.

Demostración. Sean $\varepsilon = 1/2$ y $T > 0$. Hay que demostrar que dada una $T > 0$ fija existe una vecindad del origen en la que todas las órbitas (periódicas) con condición inicial en ella, tienen periodo mayor que T .

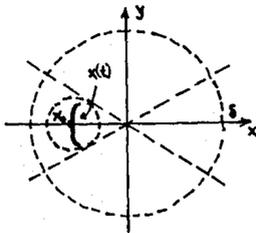
Nota. Puesto que las órbitas de un centro rodean al origen basta demostrar que los periodos de las soluciones con condición inicial en una recta que pase por el origen son mayores que T .

Observemos que las soluciones del sistema linealizado con condiciones iniciales en el eje x , que es el núcleo de A , son constantes: si $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^2$ es tal que $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ entonces $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}_0$ para todo $t \in \mathbf{R}$. Además, cualquiera de las órbitas del centro cruza el eje x , y, por tanto, por el teorema 1 existe $\delta > 0$ tal que si $|\mathbf{x}_0| < \delta$ entonces

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0| < \frac{|\mathbf{x}_0|}{2}$$

para todo $t \in (0, T)$. Así, para $|\mathbf{x}_0| < \delta$ ya que las bolas $D_{|\mathbf{x}_0|/2}(\mathbf{x}_0)$ no contienen al origen y que las soluciones $\mathbf{x}(t)$ correspondientes deben permanecer en dichas bolas para todo

$t \in (0, T)$, estas órbitas no pueden rodear al origen y, por tanto, no pueden cerrar, por lo que su periodo es mayor que T .



El segundo caso se demuestra con el mismo argumento. ■

Observación 1. Este teorema se aplica a los sistemas hamiltonianos como un caso particular. Sea $H: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ una función de clase C^2 con un mínimo local estricto en el origen y consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3)$$

Ya que $(0, 0)$ es un mínimo local estricto de H , el origen es un centro de (3) y en el caso en que el $(0, 0)$ es un punto crítico degenerado de H , el periodo de las órbitas tienden a ∞ cuando la amplitud de las órbitas tiende a 0.

Observación 2. A lo largo de la demostración del teorema 2 claramente observamos que la propiedad expresada para los periodos de un centro no lineal reside en dos hechos: uno topológico y otro algebraico. El hecho topológico es que las órbitas de un centro son variedades de dimensión 1 que rodean al origen; el hecho algebraico es que el núcleo de la derivada $Df(0)$ es no trivial.

Por esto podemos afirmar que si consideramos sólo sucesiones infinitas (numerables) de órbitas cerradas $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ (de un campo vectorial como en el teorema 1) que rodean al origen y que tienden a éste (su amplitud tiende a 0), los periodos $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ de dichas órbitas tienden a infinito

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \infty.$$

Bibliografía

[Ab/M/R] Abraham, R., Marsden, J. E., Ratiu, T., *Manifolds, Tensor Analysis and Applications*, Second Edition, Springer-Verlag, New York Inc., 1988.

[A] Arnold, V.I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York Inc., 1989.

[H/S] Hirsch, M.W., Smale, S., *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Pure and Applied Mathematics, Academic Press, California, USA, 1970.

[L] Lefschetz, S., *Differential Equations: Geometric Theory*, Pure and Applied Mathematics, Vol. VI, Interscience Publishers, Inc., New York, 1958.

[M] Massey, W. S., *Introducción a la Topología Algebraica*, Editorial Reverté, 1967.

[Pa] Palis, J., de Melo, W., *Introdução aos sistemas dinâmicos*, Projeto Euclides, Editora Edgard Blücher, Ltda., São Paulo, Brasil, 1978.

[P] Perko, L., *Differential Equations and Dynamical Systems*, Texts in Applied Mathematics, Vol. 7, Springer-Verlag, New York Inc., 1991.

[S] Spivak, M., *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. I, Publish or Perish, inc., Houston, Texas, USA, 1979.

Lista de los Símbolos más Usados

\mathbf{R}	el conjunto de los números reales
\mathbf{N}	el conjunto de los números naturales
\mathbf{Z}	el conjunto de los números enteros
$[a, b], (a, b)$	intervalos de números reales
$A \times B$	el producto cartesiano de los conjuntos A y B
$A \cup B$	la unión de los conjuntos A y B
$A \cap B$	la intersección de los conjuntos A y B
$A - B$	la resta del conjunto B al conjunto A
\mathbf{R}^n	el producto cartesiano de n veces \mathbf{R}
\in	pertenece a
\subseteq, \subset	subconjunto de
\mapsto	transforma en
$f: A \rightarrow B$	función del conjunto A en el B
$f(x)$	el elemento de B asociado a x por f
$f^{-1}(C)$	la preimagen del subconjunto $C \subset B$
f^{-1}	la función inversa de f
Df_x	la derivada de f en x
df	la diferencial de f
$x \rightarrow \alpha$	x tiende a α
$>, <$	mayor y menor que respectivamente
\geq, \leq	mayor y menor o igual que respectivamente
$=$	igual a
\approx	aproximadamente
\cong	homeomorfo a (difeomorfo a)
\equiv	idénticamente
lím	límite
mín	mínimo

máx	máximo
\bar{A}	la cerradura topológica del conjunto A
A°	el interior topológico de A
∂A	la frontera topológica de A
$B_r(x), D_r(x)$	las bolas abiertas con centro en x y radio r
$T_m M$	el espacio tangente a la variedad M en el punto m
\dot{x}	la derivada de la función $x(t)$ con respecto a t
$\frac{d}{dt}$	la diferencial con respecto a t
$\frac{\partial}{\partial x}$	la diferencial parcial con respecto a x
$ x $	la norma (el módulo) de x
e^x	la exponencial de x
ϕ_t	el flujo de un campo vectorial
Γ	la órbita de un punto bajo ϕ_t
\int	integral
S^n	la esfera de dimensión n