UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

CARACTERIZACION DE BOCSES DE DIMENSION FINITA DE TIPO MANSO

T E S I S

Que para obtener el Grado Académico de

MAESTRO EN CIENCIAS
(MATEMATICAS)

p r e s e n t a

GUSTAVO MONTAÑO BERMUDEZ

Director de Tesis: Dr. Raymundo Bautista Ramos

CONTENIDO

INTRODUCCION

Algunos problemas, en Teoría de Representaciones, relacionados con la clasificación de módulos inescindibles se pueden reducir a problemas de álgebra lineal sobre equivalencia de matrices con respecto a un conjunto de operaciones elementales permitidas. Se han creado procedimientos para resolver estos "problemas matriciales" transfiriéndolos al lenguaje de categorías, aún cuando en algunas situaciones la interpretación categórica del problema matricial se ve de una forma muy natural, y en otras no resulta tan evidente.

Uno de los intentos en relación con estos problemas son los trabajos de A. V. Roiter y Kleiner [R-K_1] y [R-K_2], en los que muestran que una amplia clase de problemas matriciales pueden interpretarse como problemas de categorías graduadas diferenciales (DGC). Como las representaciones de DGC resultaron difíciles de manejar, A. V. Roiter introdujo, en [R], el concepto de birnódulo, sobre una categoría, con estructura de coálgebra (BOCS) y sus representaciones, una construcción menos complicada, y que esencialmente es equivalente a las representaciones de DGC.

Usando estos conceptos Drozd probó, en [D], el teorema que lleva su nombre, y que establece que toda álgebra Λ, de dimensión finita sobre un campo k, algebraicamente cerrado, es mansa o salvaje, pero no ambas. Informalmente, que Λ es un álgebra mansa significa que en cada dimensión d, todos excepto un número finito de Λ-módulos de dimensión d pertenecen a un número finito de familias con un parámetro; mientras que un álgebra salvaje es un álgebra cuya categoría de representaciones es tan complicada como la de $k\langle x, y\rangle$, el álgebra asociativa libre en dos indeterminadas. En [D] Drozd formula definiciones de bocses manso y salvaje en una clase suficientemente amplia que incluye los bocses asociados con las álgebras de dimensión finita, y prueba que un bocs de estos es manso o salvaje.

Como [D] es un poco mas que un sumario de resultados, es enunciado usando DGC en vez de bocses, Crawley-Boevey en [CB], incluye una prueba completa del Teorema de Drozd, reformula o cambia algunos de los conceptos, dando tratamientos alternativos, en ciertos casos bastante diferentes, de varios resultados técnicos de Drozd, algunos de los cuales no se han podido comprobar. En este artículo Crawley-Boevey utiliza el Teorema de Drozd para dar otros resultados sobre álgebras.

El objetivo de este trabajo es mostrar un desarrollo explícito de las técnicas de bocses propuestas por Crawley-Boevey , incluyendo la construcción de un bocs correspondiente a un álgebra.

El trabajo está organizado de la siguiente manera. En el primer capítulo se introducen algunas categorías que tienen un papel importante en todo lo que sigue. Empezamos definiendo y ejemplificando los conceptos de módulos izquierdos, derechos y bimódulos sobre una categoría. Enseguida se recuerdan las principales propiedades del producto tensorial de módulos y bimódulos sobre categorías. Estudiamos los bimódulos libres y las categorías libremente generadas y finalmente se introducen las ideas de categorías trivial y mínima.

El capítulo 2 se dedica a los concepto de bocs y la categoría de sus representaciones. Definimos morfismo de bocses y vemos como cada uno de éstos determina el llamado funtor inducido entre las correspondientes categorías de representaciones. Especialmente nos interesa la idea de bocs inducido a partir de un bocs dado y un funtor, la existencia de un morfismo de bocses entre el original y el inducido; notaremos que para este último morfismo tenemos un funtor inducido que resulta fiel y pleno (2.6). Esta técnica de inducir bocses y funtores entre categorías de representaciones, aplicada a los llamados bocses estratificados o con estratificación, es ampliamente utilizada en el capítulo 3. El concepto de estratificación resume las condiciones esenciales que caracterizan a los bocses que estaremos en posibilidad de manipular. Una idea clave en bocses estratificados es la de group-like, y especialmente la de reflector (2.7), por ella podemos hablar del diferencial que nos permite hacer una descripción mas manejable de los morfismos entre representaciones. En la parte final del capítulo se dedica a mostar en que condiciones un group-like resulta ser reflector.

En el capítulo 3 se estudian las operaciones sobre bocses que permitirán el paso inductivo en la demostración del teorema para bocses mansos y salvajes (capítulo 4). Todas las operaciones se obtienen usando bocses inducidos y pushouts que se construyen a partir de categorías libremente generadas (capítulo 1). Partimos de bocses estratificados que permitan describir el bocs inducido. En casi todos los casos trabajaremos con lo que definiremos como funtores admisibles (3.3) pues, como mostraremos en una de las afirmaciones centrales del capítulo, bocses estratificados producen bocses inducidos estratificados cuando se utilizan funtores admisibles para inducirlos. En algunos casos el funtor inducido entre las categorías de representaciones de los bocses correspondientes resultará una equivalencia.

En el capítulo 4 introducimos las definiciones de bocses salvajes, críticos y mínimos. La afirmación mas importante muestra algunas características de los bocses no salvajes, su demostración se basa en que estos bocses no poseen las configuraciones de los bocses críticos, y aquí utilizamos las operaciones sobre bocses estudiadas en el capítulo anterior. Terminamos el capítulo haciendo una detallada demostración de que los bocses críticos resultan salvajes.

En el capítulo 5 establecemos las relaciones entre bocses y álgebras, específicamente para cada k álgebra de dimensión finita construimos un bocs estratificado que le hacemos corresponder. Las respectivas categorías de representaciones no son equivalentes, pero la categoría de representaciones del bocs resultará equivalente a una categoría que se construye de los Λ-módulos proyectivos. Las construcciones y demostraciones son muy detalladas, no evitamos prácticamente ninguna verficación, excepto la de una afirmación acerca de módulos sobre álgebras semisimples.

1 CATEGORIAS

El objeto de este capítulo es introducir algunas categorías que tendrán un papel importante en los siguientes capítulos. En particular se formalizan las ideas de bimódulos libres, se recuerdan las principales propiedades del producto tensorial de módulos y bimódulos sobre una categoría, estudiaremos las categorías libremente generadas y finalmente se introduce la idea de categoría mínima.

DEFINICION 1.1 *Sea k un campo. Una categoría A es una* **k-categoría** *si para cada pareja de objetos X, Y de A, tenemos que $Hom_A(X,Y)$ es un k-espacio vectorial y la composición de morfismos es bilineal.*

Dadas A y B k-categorías, un funtor $F : A \longrightarrow B$ es un **k-funtor,** *si cada restricción $F : Hom_A(X,Y) \longrightarrow Hom_B(FX,FY)$ es una transformación lineal para $X, Y \in ObA$.*

Nótese que si A y B son k-categorías, entonces $A \times B$ también es una k-categoría. En todo lo que sigue las categorías son k-categorías y los funtores son k-funtores, a menos que se establezca explícitamente de otra forma.

DEFINICION 1.2 *Sea A una categoría. Un* **A-módulo izquierdo** *M, denotado $_AM$, es un funtor $M : A \longrightarrow Modk$. Un* **morfismo de A-módulos izquierdos** *es una transformación natural $\eta : M \longrightarrow M'$ de $k-$funtores, es decir para cada objeto X $\eta_X : N(X) \longrightarrow M'(X)$ es k-lineal. $(A, Modk)$ denota la categoría (k-categoría) de A-módulos izquierdos y sus morfismos.*

Tenemos algunas observaciones y ejemplos.

A. Si $F : A \longrightarrow B$ es un funtor y M es un $B-$módulo izquierdo, $_FM$ denota la composición $MF : A \longrightarrow Modk$, y entonces $_FM$ es un $A-$módulo izquierdo.

B. Cada objeto X en A determina el $A-$módulo izquierdo $A(X,-)$: Si $Y \in ObA$, entonces

$$A(X,-)(Y) := A(X,Y) = Hom_A(X,Y).$$

Si $f : Y_1 \longrightarrow Y_2$ en A, entonces

$$A(X,-)(f) := A(X,f) = A(X,Y_1) \longrightarrow A(X,Y_2),$$

tal que $g \mapsto fg$.

C. Sea $F : A \longrightarrow B$ un funtor y $X \in ObA$, entonces $_FB(FX,-)$ es un A-módulo izquierdo, y el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A(X,Y_1) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "{A(X,f)}"'] & B(F(X),F(Y_1)) \arrow[d, "{B(F(X),F(f))}"] \\
A(X,Y_2) \arrow[r, "F"'] & B(F(X),F(Y_2))
\end{tikzcd}$$

para $f : Y_1 \to Y_2$, muestra que $F : A(X,-) \longrightarrow {}_FB(FX,-)$ es un morfismo de A-módulos izquierdos.

D. Si M es un A-módulo izquierdo, un **elemento** m de M es un elemento $m \in M(X)$ para algún $X \in ObA$. Si $f : X \to Y$ en A entonces $fm := M(f)(m) \in M(Y)$.

DEFINICION 1.3 *Sea A una categoría. Un* **A-módulo derecho** *N, denotado N_A, es un funtor $N : A^{op} \longrightarrow Modk$. Un* **morfismo de A-módulos derechos** *es una transformación natural $\eta : N \longrightarrow N'$ de k-funtores. $(A^{op}, Modk)$ denota la categoría (k-categoría) de A-módulos derechos y sus morfismos.*

También tenemos algunas observaciones y ejemplos.

A. Si $F : A \longrightarrow B$ es un funtor y N es un B-módulo derecho, N_F denota la composición $NF : A \longrightarrow Modk$, y entonces N_F es un A-módulo derecho.

B. Cada objeto X en A determina el A-módulo derecho $A(-,X)$: si $Y \in ObA$, entonces

$$A(-,X)(Y) := A(Y,X) = Hom_A(Y,X).$$

Si $f : Y_1 \to Y_2$ en A entonces

$$A(-,X)(f) := A(f,X) = A(Y_2,X) \longrightarrow A(Y_1,X)$$

tal que $g \mapsto gf$.

C. Sea $F : A \longrightarrow B$ un funtor y $X \in ObA$, entonces $B(-,FX)_F$ es un A−módulo derecho, y el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A(Y_2,X) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "{A(f,X)}"'] & B(F(Y_2),F(X)) \arrow[d, "{B(F(f),F(X))}"] \\
A(Y_1,X) \arrow[r, "F"'] & B(F(Y_1),F(X))
\end{tikzcd}$$

para $f : Y_1 \rightarrow Y_2$, muestra que $F : A(-,X) \longrightarrow B(-,FX)_F$ es un morfismo de A-módulos derechos.

D. Si N es un A-módulo derecho, un **elemento** n de N es un elemento $n \in N(X)$ para algún X en ObA. Si $g : X \rightarrow Y$ en A^{op}, entonces $ng := N(g)(n) \in N(Y)$.

DEFINICION 1.4 *Sean A y B k-categorías. Un $A - B$* **bimódulo** *V, denotado por ${}_AV_B$ es un funtor $V : B^{op} \times A \longrightarrow Modk$ que es k-bilineal, es decir cada restricción*

$$V : (B^{op} \times A)[(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)] \longrightarrow Hom_k[V(X_1, Y_1), V(X_2, Y_2)]$$

es lineal en las dos coordenadas (recuérdese que

$$(B^{op} \times A)[(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)] = B^{op}(X_1, X_2) \times A(Y_1, Y_2)).$$

Un **morfismo de A-B bimódulos** *es una transformación natural $\eta : V \longrightarrow V'$. ${}_ABim_B$ denota la categoría de A-B bimódulos.*

Algunas observaciones y ejemplos.

A. Si $F : A_1 \longrightarrow A_2$ y $G : B_1 \longrightarrow B_2$ son funtores y V es un A_2-B_2 bimódulo, ${}_FV_G$ denota la composición

$$V(G \times F) : B_1^{op} \times A_1 \rightarrow B_2^{op} \times A_2 \rightarrow Modk,$$

que resulta un A_1-B_1 bimódulo.

B. Toda categoría A resulta un A-A bimódulo: Si $X, Y \in ObA$, entonces $A(X,Y) = Hom_A(X,Y)$. Además, para $(f,g) : (X,Y) \longrightarrow (X',Y')$ en $A^{op} \times A$ entonces $A(f,g) : A(X,Y) \longrightarrow A(X',Y')$ es tal que $A(f,g)(h) = ghf$.

Si $F : A \longrightarrow B$ es un funtor y $(f,g) : (X,Y) \longrightarrow (X',Y')$ en $A^{op} \times A$, entonces el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A(X,Y) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "A(f,g)"'] & B(F(X), F(Y)) \arrow[d, "B(F(f), F(g))"] \\ A(X',Y') \arrow[r, "F"'] & B(F(X'), F(Y')). \end{tikzcd}$$

En efecto, si $h \in A(X,Y)$,

$$B(Ff,Fg)F(h) = F(g)F(h)F(f) = F(ghf) = F A(f,g)h.$$

Así que $F : A \longrightarrow {}_F B_F$ es un morfismo de A-A bimódulos.

C. Si V es un A-B bimódulo, entonces un **elemento** v de V es un elemento $v \in V(X,Y)$, para algunos $X \in ObB$ y $Y \in ObA$, decimos que v es **inescindible** cuando X y Y son objetos inescindibles. Además si $(f,g) : (X,Y) \longrightarrow (X',Y')$ en $B^{op} \times A$, entonces

$$gvf := V(f,g)(v) \in V(X',Y').$$

D. Sean A y B categorías, M un A-módulo izquierdo y N un B-módulo derecho, entonces

$$M \otimes_k N : B^{op} \times A \longrightarrow Modk$$

es un A-B bimódulo definido de la siguiente manera: para $(X,Y) \in Ob(B^{op} \times A)$, tenemos

$$[M \otimes_k N](X,Y) = M(Y) \otimes_k N(X).$$

Si $(f,g) : (X,Y) \longrightarrow (X',Y')$ en $B^{op} \times A$, entonces

$$[M \otimes_k N](f,g) = M(g) \otimes_k N(f) : M(Y) \otimes_k N(X) \to M(Y') \otimes_k N(X').$$

E. En particular, si $X \in ObB$ y $Y \in ObA$, con F_{XY} se denota al bimódulo $A(Y,-) \otimes_k B(-,X)$. Nótese que si $(f,g) : (X_1,Y_1) \longrightarrow (X_2,Y_2)$ en $B^{op} \times A$, entonces $F_{XY}(f,g) = A(Y,g) \otimes_k B(f,X)$, y

$$F_{XY}(f,g) : A(Y,Y_1) \otimes_k B(X_1,X) \to A(Y,Y_2) \otimes_k B(X_2,X).$$

Además, para $(f,g) : (X,Y) \longrightarrow (X_1,Y_1)$ en $B^{op} \times A$, $g \otimes f \in F_{XY}(X_1,Y_1)$ y

$$\begin{aligned} g \otimes f &= A(Y,g)1_Y \otimes B(f,X)1_X \\ &= [A(Y,g) \otimes_k B(f,X)](1_Y \otimes 1_X) \\ &= F_{XY}(f,g)(1_Y \otimes 1_X) = g(1_Y \otimes 1_X)f. \end{aligned}$$

F. También tenemos la noción usual de conjunto de generadores para un bimódulo, así como la de un bimódulo finitamente generado. Un A-B bimódulo V es **generado** por $v_1, \ldots, v_r, v_i \in V(X_i,Y_i), i = 1,2,\ldots,r$, si para cada $v \in V(X,Y)$, existen $f_{ij} : X \to X_i$ en B y $g_{ij} : Y_i \to Y$ en A tales que

$$v = \sum_{i,j} g_{ij} v_i f_{ij}.$$

En E vimos que el A-B bimódulo F_{XY} está generado por el elemento $1_Y \otimes 1_X$.

G. Sea V un A-B bimódulo y $v \in V(X,Y)$, entonces existe un morfismo único de A-B bimódulos

$$\Psi : F_{XY} \longrightarrow V \qquad \text{tal que} \qquad 1_Y \otimes 1_X \mapsto v,$$

cuya existencia se sigue de la propiedad universal del producto tensorial sobre k y las características de V como funtor.

Mas generalmente, para $v_1, \ldots, v_r$ elementos de V, con $v_i \in V(X_i, Y_i), i = 1, \ldots, r$, por lo anterior existe un morfismo único de A-B bimodulos

$$\Psi : F_{X_1Y_1} \bigoplus \cdots \bigoplus F_{X_rY_r} \longrightarrow V$$

tal que $\Psi(1_{Y_i} \otimes 1_{X_i}) = v_i, i = 1, \ldots, r$.

DEFINICION 1.5 *Un A-B bimódulo V se dice* **libre** *si es isomorfo a una suma directa de bimódulos de la forma F_{XY}, y V es* **libremente generado** *por $v_1, \ldots, v_r$ con $v_i \in V(X_i, Y_i)$ si el morfismo Ψ es un isomorfismo.*

Recordamos que una categoría A es **esqueléticamente pequeña** si tiene una subcategoría densa pequeña. En lo que sigue supondremos que A es esqueléticamente pequeña. Por ahora recordaremos algunas propiedades del producto tensorial de A-módulos.

OBSERVACION 1.6 *Dada A, categoría preaditiva, Ab la categoría de grupos abelianos, con (A, Ab) denotamos la categoría de funtores aditivos de A en Ab. Existe un funtor único (hasta isomorfismo)*

$$\bigotimes_A : (A^{op}, Ab) \times (A, Ab) \longrightarrow Ab$$

llamado **producto tensorial** *con las siguientes propiedades:*

Sean $N : A^{op} \longrightarrow Ab$ y $M : A \longrightarrow Ab$ funtores aditivos, denotamos con $N \bigotimes_A M$ a $\bigotimes_A(N, M)$, entonces:

(1)

$$\begin{aligned} - \bigotimes_A M &: (A^{op}, Ab) \longrightarrow Ab \\ N \bigotimes_A - &: (A, Ab) \longrightarrow Ab \end{aligned}$$

son funtores exactos derechos.

(2) $-\bigotimes_A M$ *y* $N \bigotimes_A -$ *preservan sumas directas arbitrarias.*

(3) Para cada $X \in ObA$ *se tiene:*

$$N \bigotimes_A A(X,-) = N(X),$$

$$A(-,X) \bigotimes_A M = M(X).$$

Para consultar mas propiedades de este funtor veáse [A]. Existe una particularización de este funtor para k-categorías y también una descripción en términos de sus generadores.

DEFINICION 1.7 *Sean* M *un* A*-módulo izquierdo y* N *un* A*-módulo derecho, y* H *un* k*-espacio vectorial entonces una* **transformación A-balanceada** $\nu : N \times M \longrightarrow H$ *es una familia de funciones*

$$(\nu_X : N(X) \times M(X) \longrightarrow H)_{X \in ObA}$$

que satisface las condiciones

a) ν_X *es bilineal para cada* $X \in ObA$,

b) Si $f : X \to Y$ *es un morfismo en* A, *el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} N(Y) \times M(X) \arrow[r, "N(f)\times 1"] \arrow[d, "1 \times M(f)"'] & N(X) \times M(X) \arrow[d, "\nu_X"] \\ N(Y) \times M(Y) \arrow[r, "\nu_Y"'] & H \end{tikzcd} \qquad [1]$$

TEOREMA 1.8 *Sea* A *una categoría.*

(1) Existe un funtor único (hasta isomorfismo)

$$\bigotimes_A : (A^{op}, Modk) \times (A, Modk) \longrightarrow Modk$$

llamado producto tensorial con las mismas propiedades dadas en 1.6.

(2) Sean M *un* A*-módulo izquierdo y* N *un* A*-módulo derecho. Entonces existe* $\Phi : N \times M \to N \bigotimes_A M$, A*-balanceada con la propiedad de que cualquier otra* $\nu : N \times M \to H$ A*-balanceada, existe una transformación lineal* $\bar{\nu} : N \bigotimes_A M \to H$ *tal que para cada* $X \in ObA$ *el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} N(X)\times M(X) \arrow[r, "\nu_X"] \arrow[d, "\Phi_X"'] & H \\ N\bigotimes_A M \arrow[ur, dashed, "\bar\nu"'] & \end{tikzcd}$$

Tomando $n\otimes_X m := \Phi_X(n,m)$ *se tiene que*

$$\{n\otimes_X m \mid X\in ObA, m\in M(X), n\in N(X)\}$$

genera a $N\bigotimes_A M$*, como espacio vectorial.*

(3) Si M *y* M' *son* A*-módulos izquierdos,* N *y* N' *son* A*-módulos derechos,* $\mu: M\to M', \eta: N\to N'$ *son morfismos, entonces* $\eta\otimes_A\mu$ *es la única transformación lineal tal que, para cada* $X\in ObA$*, conmuta*

$$\begin{tikzcd} N(X)\times M(X) \arrow[r, "\Phi_X"] \arrow[d, "\eta_X\times\mu_X"'] & N\bigotimes_A M \arrow[d, "\eta\otimes_A\mu"] \\ N'(X)\times M'(X) \arrow[r, "\Phi'_X"'] & N'\bigotimes_A M' \end{tikzcd}$$

es decir, $(\eta\otimes\mu)(n\otimes_X m) = \eta_X(n)\otimes_X \mu_X(m)$.

<u>DEMOSTRACION</u>. (1) se sigue de la observación 1.6 y del hecho de que si A es k-categoría, entonces $(A,Ab)\approx(A,Modk)$.

En [S] se encuentra la demostración para (2) y (3) en las condiciones de 1.6, con Φ_X aditiva en cada coordenada y $\bar\nu$ y $\eta\otimes_X\mu$ morfismos de grupos. Así sólo falta mostrar que son transformaciones lineales. Nótese que $N\bigotimes_A M$ tiene estructura de espacio vectorial con el producto

$$\lambda x = (\lambda 1_N\otimes 1_M)(x) = (1_N\otimes\lambda 1_M)(x), \quad \text{si } \lambda\in k \quad \text{y } x\in N\bigotimes_A M.$$

Así que, si consideramos el diagrama [1] con $f=\lambda 1_X$ tenemos que $\lambda n\otimes_X m = n\otimes_X \lambda m$, de aquí que

$$(\lambda 1_N\otimes 1_M)(n\otimes_X m) = \lambda n\otimes_X m = n\otimes_X\lambda m = (1_N\otimes\lambda 1_M)(n\otimes_X m),$$

y además

$$\Phi_X(\lambda n, m) = \lambda n \otimes_X m = (\lambda 1_N \otimes 1_M)(n \otimes_X m) = \lambda(n \otimes_X m) = \lambda\Phi_X(n, m),$$

y también se tiene que $\Phi_X(n, \lambda m) = \lambda\Phi_X(n, m)$. De aquí que Φ_X es bilineal. Para ver que $\bar{\nu}$ es lineal basta verlo en generadores:

$$\bar{\nu}(\lambda n \otimes_X m) = \bar{\nu}\Phi_X(\lambda n, m) = \nu_X(\lambda n, m) = \lambda\nu_X(n, m) = \lambda\bar{\nu}(n \otimes_X m).$$

Lo mismo para $\eta \otimes_A \mu$:

$$\begin{aligned}[\eta \otimes_A \mu](\lambda n \otimes_X m) &= \eta_X(\lambda n) \otimes_X \mu_X(m) = \lambda\eta_X(n) \otimes_X \mu_X(m) \\ &= \lambda[\eta_X(n) \otimes_X \mu_X(m)] = \lambda[\eta \otimes_A \mu](n \otimes_X m).\square\end{aligned}$$

OBSERVACION 1.9 *Sean A, B y C categorías. Existe un funtor*

$${}_ABim_B \times {}_BBim_C \longrightarrow {}_ABim_C$$

que es bilineal, llamado el **producto tensorial de bimódulos**, *denotado por* $\bigotimes_B$, *y definido como sigue:*

Si ${}_AV_B$ y ${}_BW_C$ son bimódulos, entonces

$$V \bigotimes_B W : C^{op} \times A \longrightarrow Modk$$

es el funtor dado por las fórmulas

$$(V \bigotimes_B W)(X, Y) = V(-, Y) \bigotimes_B W(X, -)$$

$$(V \bigotimes_B W)(f, g) = V(-, g) \bigotimes_B W(f, -)$$

y para un par de morfismos de bimódulos

$$\eta : {}_AV_B \longrightarrow {}_AV'_B \quad , \quad \nu : {}_BW_C \longrightarrow {}_BW'_C,$$

podemos definir

$$\eta \otimes_B \nu : V \bigotimes_B W \longrightarrow V' \bigotimes_B W',$$

observando que para cada $(X, Y) \in Ob(C^{op} \times A)$:

$$\eta_{(-,Y)} : V(-, Y) \longrightarrow V'(-, Y)$$

$$\nu_{(X,-)} : W(X, -) \longrightarrow W'(X, -)$$

son transformaciones naturales, y podemos tomar

$$[\eta \otimes_B \nu]_{(X,Y)} = \eta_{(-,Y)} \otimes_B \nu_{(X,-)}.$$

En [S] se muestra que este producto tensorial goza de las siguientes dos propiedades:

a) Dado un bimódulo ${}_AV_B$, hay isomorfismos naturales de bimódulos

$$\sigma_V : {}_A(V \bigotimes_B B)_B \longrightarrow {}_AV_B \qquad \bar{\sigma}_V : {}_A(A \bigotimes_A V)_B \longrightarrow {}_AV_B$$

es decir, tales que si $\eta : V \to W$ es un morfismo de bimódulos entonces conmutan

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_A V \arrow[r, "\bar{\sigma}_V"] \arrow[d, "1 \otimes \eta"'] & V \arrow[d, "\eta"] & V \otimes_B B \arrow[l, "\sigma_V"'] \arrow[d, "\eta \otimes 1"] \\
A \otimes_A W \arrow[r, "\bar{\sigma}_W"'] & W & W \otimes_B B \arrow[l, "\sigma_W"]
\end{tikzcd}$$

Además, en generadores se calcula mediante las siguientes fórmulas, suponiendo que $v \in V(X, Y)$:

$$\sigma_V(v \otimes_X f) = vf \qquad \sigma_V^{-1}(v) = v \otimes_X 1_X$$
$$\bar{\sigma}_V \otimes_Y v) = gv \qquad \bar{\sigma}_V^{-1}(v) = 1_Y \otimes_Y v.$$

b) Si ${}_AV_{B_1}$, ${}_{B_1}V'_{B_2}$, ${}_{B_2}V''_C$ son bimódulos entonces hay un isomorfismo natural de bimódulos

$$\delta : (V \bigotimes_{B_1} V') \bigotimes_{B_2} V'' \longrightarrow V \bigotimes_{B_1} (V' \bigotimes_{B_2} V'')$$

es decir, tal que si

$${}_AV_{B_1} \xrightarrow{\eta} {}_AW_{B_1}, \qquad {}_{B_1}V'_{B_2} \xrightarrow{\eta'} {}_{B_1}W'_{B_2}, \qquad {}_{B_2}V''_C \xrightarrow{\eta''} {}_{B_2}W''_C,$$

son morfismos de bimódulos entonces conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(V \otimes V') \otimes V'' \arrow[r, "(\eta \otimes \eta') \otimes \eta''"] \arrow[d, "\delta"'] & (W \otimes W') \otimes W'' \arrow[d, "\delta"] \\
V \otimes (V' \otimes V'') \arrow[r, "\eta \otimes (\eta' \otimes \eta'')"'] & W \otimes (W' \otimes W'')
\end{tikzcd}$$

Ahora mostraremos que el ejemplo dado en 1.4(D) es un caso particular de producto tensorial de bimódulos.

Sea K la k-categoría tal que $ObK = \{k\}$ y $Hom_K(k,k) = Hom_k(k,k)$. (Por la conmutatividad en k, nótese que $K^{op} = K$).

LEMA 1.10 *Sea A una categoría, entonces*

$$(A, Modk) \cong {}_A Bim_K.$$

<u>DEMOSTRACION</u>. Definimos

$$F : (A, Modk) \longrightarrow {}_A Bim_K$$

de la siguiente forma:

a) Para $M \in (A, Modk)$, se tiene

$$FM : K^{op} \times A \longrightarrow Modk$$

tal que

$$FM(k, X) = M(X), \qquad \text{para} \quad X \in ObA,$$

y si $(\lambda 1_k, f) : (k, X) \to (k, Y)$ en $K^{op} \times A$, entonces

$$FM(\lambda 1_k, f) : FM(k, X) \longrightarrow FM(k, Y)$$

es tal que $FM(\lambda 1_k, f) = M(\lambda f) = \lambda M(f) : M(X) \to M(Y)$. Veamos que FM es $A - K$ bimódulo.

$$-) \qquad FM(1_k, 1_X) = M(1_X) = 1_{M(X)} = 1_{FM(k,X)},$$

$$\begin{aligned} -) \quad FM[(\lambda_1 1_k, f)(\lambda_2 1_k, g)] &= FM(\lambda_1\lambda_2 1_k, fg) = M(\lambda_1\lambda_2 fg) \\ &= M((\lambda_1 f)(\lambda_2 g)) = M(\lambda_1 f)M(\lambda_2 g) \\ &= FM(\lambda_1 1_k, f)FM(\lambda_2 1_k, g); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -) \quad FM(\lambda_1 1_k + \lambda_2 1_k, f) &= M((\lambda_1 + \lambda_2)f) = M(\lambda_1 f) + M(\lambda_2 f) \\ &= FM(\lambda_1 1_k, f) + FM(\lambda_2 1_k, f); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -) \quad FM(\lambda 1_k, f + g) &= M(\lambda(f + g)) = M(\lambda f) + M(\lambda g) \\ &= FM(\lambda 1_k, f) + FM(\lambda 1_k, g); \end{aligned}$$

$$-) \quad FM(\lambda_1\lambda_2 1_k, f) = M((\lambda_1\lambda_2)f) = \lambda_1 M(\lambda_2 f) = \lambda_1 FM(\lambda_2 1_k, f);$$

$$-) \quad FM(\lambda_1 1_k, \lambda_2 f) = M(\lambda_1(\lambda_2 f)) = \lambda_2 M(\lambda_1 f) = \lambda_2 FM(\lambda_1 1_k, f).$$

b) Sea $\eta : M \to N$ una transformación natural en $(A, Modk)$ entonces $F\eta : FM \to FN$ es tal que

$$F\eta_{(k,X)} : FM(k,X) \longrightarrow FN(k,X)$$

es la transformación lineal

$$\eta_X : M(X) \longrightarrow N(X).$$

Como η es transformación natural, claramente $F\eta$ también lo es.

Veamos que F es un funtor.

–) $F(1_M) = 1_{FM}$, pues:

$$(F1_M)_{(k,X)} = (1_M)_X = 1_{MX} = 1_{FM(k,X)};$$

–) $F(\eta\mu) = F\eta F\mu$, pues:

$$F(\eta\mu)_{(k,X)} = (\eta\mu)_X = \eta_X\mu_X = (F\eta)_{(k,X)}(F\mu)_{(k,X)} = (F\eta F\mu)_{(k,X)};$$

–) $F(\lambda\eta + \mu) = \lambda F\eta + F\mu$, pues:

$$F(\lambda\eta + \mu)_{(k,X)} = (\lambda\eta + \mu)_X = \lambda\eta_X + \mu_X = \lambda F\eta_{(k,X)} + F\mu_{(k,X)} = (\lambda F\eta + F\mu)_{(k,X)}.$$

F resulta un isomorfismo de categorías, pues su inversa

$$F^{-1} : {}_A Bim_K \longrightarrow (A, Modk)$$

está definida de la siguiente manera:

c) Para $V \in {}_A Bim_K$ se tiene

$$F^{-1}V : A \longrightarrow Modk$$

tal que

$$(F^{-1}V)(X) = V(k,X), \quad \text{para} \quad X \in Ob(A),$$

y si $f : X \longrightarrow Y$ en A, entonces

$$(F^{-1}V)(f) : (F^{-1}V)(X) \longrightarrow (F^{-1}V)(Y),$$

es tal que

$$(F^{-1}V)(f) = V(1,f) : V(k,X) \longrightarrow V(k,Y).$$

d) Para $\eta : V \longrightarrow W$ un morfismo en ${}_ABim_K$ tenemos

$$F^{-1}\eta : F^{-1}V \longrightarrow F^{-1}W$$

es tal que para cada $X \in Ob(A)$, entonces

$$(F^{-1}\eta)_X : (F^{-1}V)(X) \longrightarrow (F^{-1}W)(X)$$

está definido por

$$\eta_{(k,X)} : V(k,X) \longrightarrow W(k,X).$$

Fácilmente se muestra que F^{-1} está bien definido y que realmente es el inverso de F.□

COROLARIO 1.11 *Sea B una categoría, entonces*

$$(B^{op}, Modk) \cong {}_KBim_B.$$

<u>DEMOSTRACION</u>. Como $K^{op} = K$, entonces

$$K^{op} \times B^{op} = K \times B^{op} \cong B^{op} \times K,$$

así que por 1.10

$$(B^{op}, Modk) \cong {}_{B^{op}}Bim_K \cong {}_KBim_B.\square$$

Llamamos G al funtor que dá el isomorfismo de categorías en 1.11.

PROPOSICION 1.12 *Sean A y B categorías, M un A-módulo izquierdo, N un B-módulo derecho, entonces*

$$M \bigotimes_k N \simeq FM \bigotimes_K GN.$$

en ${}_ABim_B$.

<u>DEMOSTRACION</u>. Sea (X,Y) en $B^{op} \times A$, y consideremos el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
M(Y) \times N(X) \arrow[rr, "\theta_{(X,Y)}"] \arrow[d, equal] & & M(Y) \bigotimes_k N(X) \arrow[d, equal] \\
FM(k,Y) \times GN(X,k) \arrow[d, "\nu_k"'] & & (M \bigotimes_k N)(X,Y) \arrow[dll, dashed, bend right, "\epsilon_{(X,Y)}"'] \\
FM(-,Y) \bigotimes_K GN(X,-) \arrow[d, equal] \arrow[urr, dashed, "\delta_{(X,Y)}"'] & & \\
(FM \bigotimes_K GN)(X,Y) & &
\end{tikzcd}
$$

Donde ν es la transformación K-balanceada que corresponde a $FM \bigotimes_K GN$, y $\theta_{(X,Y)}$ es la transformación bilineal que corresponde a $M(Y) \bigotimes_k N(X)$. Afirmamos que $\theta_{(X,Y)}$ es K-balanceada. Así, sólo falta mostrar la conmutatividad dada en 1.7, es decir, si $\lambda 1_k : k \to k$, entonces conmuta el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
FM(k,Y) \times GN(X,k) \arrow[r, "FM(\lambda 1_k, Y) \times 1"] \arrow[d, "1 \times GN(X, \lambda 1_k)"'] & FM(k,Y) \times GN(X,k) \arrow[d, "\theta_{(X,Y)}"] \\
FM(k,Y) \times GN(X,k) \arrow[r, "\theta_{(X,Y)}"'] & (M \bigotimes_k N)(X,Y)
\end{tikzcd}
$$

En efecto, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\theta_{(X,Y)}(FM(\lambda 1_k, Y) \times 1)(m,n) &= \theta_{(X,Y)}(M(\lambda 1_Y) \times 1)(m,n) \\
&= \theta_{(X,Y)}(\lambda m, n) = \theta_{(X,Y)}(m, \lambda n) \\
&= \theta_{(X,Y)}(1 \times N(\lambda 1_X))(m,n) \\
&= \theta_{(X,Y)}(1 \times GN(X, \lambda 1_k))(m,n).
\end{aligned}
$$

Por 1.8(2), existe $\delta_{(X,Y)} : (FM \bigotimes_K GN)(X,Y) \to (M \bigotimes_k N)(X,Y)$, transformación lineal tal que $\delta_{(X,Y)}\nu_k = \theta_{(X,Y)}$. Además $\delta : FM \bigotimes_K GN \to M \bigotimes_k N$ es un morfismo de A-B bimódulos. En efecto, si $(f,g) : (X,Y) \to (X',Y')$ en $B^{op} \times A$, entonces el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
FM(-,Y)\bigotimes_K GN(X,-) \arrow[r, "\delta_{(X,Y)}"] \arrow[d, "FM(-,g)\bigotimes_K GN(f,-)"'] & M(Y)\bigotimes_k N(X) \arrow[d, "M(g)\bigotimes_k N(f)"] \\
FM(-,Y')\bigotimes_{K'} GN(X',-) \arrow[r, "\delta_{(X',Y')}"'] & M(Y')\bigotimes_k N(X')
\end{tikzcd}$$

pues

$$\begin{aligned}
[M(g)\bigotimes_k N(f)]\delta_{(X,Y)}(m\otimes_k n) &= [M(g)\bigotimes_k N(f)](m\otimes n)\\
&= M(g)(m)\otimes N(f)(n)\\
&= \delta_{(X',Y')}[M(g)(m)\otimes_k N(f)(n)]\\
&= \delta_{(X',Y')}[FM(1_k,g)(m)\otimes_k GN(f,1_k)(n)]\\
&= \delta_{(X',Y')}[FM(-,g)\bigotimes_K GN(f,-)](m\otimes_k n).
\end{aligned}$$

Para concluir basta mostrar que δ es un isomorfismo. Como ν_k es bilineal, entonces existe una única transformación lineal

$$\epsilon_{(X,Y)} : M(Y)\bigotimes_k N(X) \longrightarrow (FM\bigotimes_K GN)(X,Y)$$

tal que $\epsilon_{(X,Y)}\theta_{(X,Y)} = \nu_k$, así

$$\nu_k = \epsilon_{(X,Y)}\theta_{(X,Y)} = \epsilon_{(X,Y)}\delta_{(X,Y)}\nu_k$$

$$\theta_{(X,Y)} = \delta_{(X,Y)}\nu_k = \delta_{(X,Y)}\epsilon_{(X,Y)}\theta_{(X,Y)}.$$

De aquí que:

$$\begin{aligned}
m\otimes_k n &= \nu_k(m,n) = \epsilon_{(X,Y)}\delta_{(X,Y)}\nu_k(m,n) = \epsilon_{(X,Y)}\delta_{(X,Y)}(m\otimes_k n)\\
m\otimes n &= \theta_{(X,Y)}(m,n) = \delta_{(X,Y)}\epsilon_{(X,Y)}\theta_{(X,Y)}(m,n) = \delta_{(X,Y)}\epsilon_{(X,Y)}(m\otimes n),
\end{aligned}$$

es decir, $\epsilon_{(X,Y)}\delta_{(X,Y)}$ y $\delta_{(X,Y)}\epsilon_{(X,Y)}$ coinciden con la identidad en los generadores de $(FM\bigotimes_K GN)(X,Y)$ y $(M\bigotimes_k N)(X,Y)$, respectivamente, luegos se tiene que:

$$\epsilon_{(X,Y)}\delta_{(X,Y)} = 1_{(FM\bigotimes_K GN)(X,Y)}$$

$$\delta_{(X,Y)}\epsilon_{(X,Y)} = 1_{(M\bigotimes_k N)(X,Y)}.$$

así $\delta_{(X,Y)}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.□

Sea A una categoría y V un A-A bimódulo, el símbolo $V^{\otimes n}, n \in \mathbb{N}$, denota el producto tensorial $V \bigotimes_A \dots \bigotimes_A V$, n veces, $V^{\otimes 0} = A$. Además $V^{\otimes} = \coprod_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$, es una categoría con los mismos objetos que A, y la composición dada por el isomorfismo natural $V^{\otimes n} \bigotimes V^{\otimes m} \simeq V^{\otimes(n+m)}$. $V^{\otimes}$ es llamada la **Categoría Tensorial** sobre V.

PROPOSICION 1.13 *Sean $\phi' : A \longrightarrow B$ un funtor y $\psi : V \longrightarrow {}_{\phi'}B_{\phi'}$ un morfismo de A-A bimódulos entonces existe un funtor único $\phi : V^{\otimes} \longrightarrow B$ que extiende a ϕ' y ψ.*

DEMOSTRACION. Como A y $V^{\otimes}$ tienen los mismos objetos, en ellos hacemos coincidir ϕ y ϕ'. Solo tenemos que definir ϕ en morfismos. Nótese que el morfismo ψ, para $n \geq 1$, induce el morfismo

$$\psi^n : V^{\otimes n} \longrightarrow B$$

tal que $\psi^n(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n) = \psi(v_1)\psi(v_2)\dots\psi(v_n) \in B$. Si $n = 0$, entonces $\psi^0 = \phi'$. Obsérvese que si $v_i \in V^{\otimes i}$ y $v_j \in V^{\otimes j}$ entonces $\psi^i(v_i)\psi^j(v_j) = \psi^{i+j}(v_i v_j)$. Así podemos definir ϕ en morfismos de la siguiente manera: si $f = \sum_{i=1}^{\infty} v_i$ es un morfismo en $V^{\otimes}$, con $v_i \in V^{\otimes i}$, entonces

$$\phi(f) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi^i(v_i).$$

Veamos que ϕ es un funtor:

$$\begin{aligned}
-) \qquad \phi(1_X) &= \phi'(1_X) = 1_{\phi' X} = 1_{\phi X};\\[1em]
-) \quad \phi(f)\phi(g) &= (\sum_{i=0}^{\infty} \psi^i(v_i))(\sum_{j=0}^{\infty} \psi^j(w_j)) = \sum_i \sum_j \psi^i(v_i)\psi^j(w_j)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{n} \psi^i(v_i)\psi^{n-i}(w_{n-i})) = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{n} \psi^n(v_i w_{n-i}))\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \psi^n(\sum_{i=0}^{n} v_i w_{n-i}) = \phi(\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{n} v_i w_{n-i}))\\
&= \phi(\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} v_i w_j) = \phi(\sum_{i=0}^{\infty} v_i \sum_{j=0}^{\infty} w_j)\\
&= \phi(fg).
\end{aligned}$$

La unicidad de ϕ es clara.□

DEFINICION 1.14 *Sean A una categoría y A' una subcategoría con los mismos objetos que A. Decimos que A es* **libremente generada sobre A' por morfismos** *$a_1, \ldots a_n$ con $a_i \in A(X_i, Y_i)$ siempre que dados cualquier funtor $\phi' : A' \to B$ y $b_i \in B(\phi' X_i, \phi' Y_i)$ morfismos en B, entonces ϕ' se extiende de manera única a un funtor $\phi : A \to B$ tal que $\phi(a_i) = b_i$.*

En los siguientes lemas damos algunas propiedades básicas de categorías libremente generadas

LEMA 1.15 *A es una categoría libremente generada sobre A' por morfismos $a_1, \ldots, a_n$, con $a_i \in A(X_i, Y_i)$ si y sólo si existe un $A' - A'$ bimódulo libre V generado por $v_1, \ldots, v_n$, con $v_i \in V(X_i, Y_i)$, tal que $V^{\otimes} \simeq A$.*

DEMOSTRACION. Supongamos primero que V es un $A' - A'$ bimódulo libre generado por $v_1, \ldots, v_n$, con $v_i \in V(X_i, Y_i)$. Veamos que $V^{\otimes}$ es una categoría libre sobre A' generada por morfismos $v_1, \ldots, v_n$. Sea $\phi' : A' \to B$ un funtor y $b_i \in B(\phi' X_i, \phi' Y_i)$ morfismos en B, por 1.4(g) existe un morfismo único de A'-A' bimódulos $\psi : V \to B$ tal que $\psi(v_i) = b_i$. Por 1.13 existe un funtor único $\phi : V^{\otimes} \to B$ que extiende a ϕ' y ψ, es decir $\phi(v_i) = b_i$. Esto muestra nuestra afirmación.

Recíprocamente, supóngase que A es una categoría libre generada sobre A' por morfismos $a_1, \ldots, a_n$. Consideremos el A'-A' bimódulo libre

$$V = \bigoplus_{i=1}^{n} A'(Y_i, -) \bigotimes_{k} A'(-, X_i),$$

con $v_i = 1_{Y_i} \otimes 1_{X_i}, i = 1, \ldots, n$. Como $V^{\otimes}$ también es libre sobre A' generada por $v_1, \ldots, v_n$, para los funtores inclusión $A' \hookrightarrow A$ y $A' \hookrightarrow V^{\otimes}$ existen extensiones únicas $\phi : V^{\otimes} \to A$ y $\eta : A \to V^{\otimes}$, respectivamente tales que $\phi(v_i) = a_i$ y $\eta(a_i) = v_i$, consecuentemente $\phi\eta = 1_A$ y $\eta\phi = 1_{V^{\otimes}}$, luego $V^{\otimes} \simeq A$.□

LEMA 1.16 *Supóngase que A es libremente generada sobre A' por $a_1, \ldots a_n$, con $a_i \in A(X_i, Y_i)$. Entonces:*

(1) El funtor inclusión $\imath : A' \hookrightarrow A$ preserva clases de isomorfía.

(2) Supóngase $0 < j < n$ y sea C la subcategoría de A generada por A' y $a_1, \ldots, a_j$. Entonces C es libremente generada sobre A' por $a_1, \ldots, a_j$, y A es libremente generada sobre C por $a_{j+1}, \ldots, a_n$.

DEMOSTRACION. (1). Sea V el A'-A' subbimódulo de A generado por $a_1, \ldots, a_n$. De 1.15 se deduce que V es libre y $A \simeq V^{\otimes} = A' \bigoplus V \bigoplus \cdots$. La proyección canónica sobre A' dá un funtor $p : A \longrightarrow A'$ que es la identidad en objetos. Así $X \simeq Y$ en A, entonces $p(X) = X \simeq Y = p(Y)$ en A', y $X \simeq Y$ en A', entonces $\imath X = X \simeq Y = \imath Y$ en A.

(2). Sea $\phi' : A' \longrightarrow B$ un funtor y $b_i \in B(\phi' X_i, \phi' Y_i), i = 1, \ldots, j$, morfismos en B. Sean $b_{j+1}, \ldots, b_n$ morfismos arbitrarios en B tales que $b_i \in B(\phi'(X_i), \phi'(Y_i)), i = j+1, \ldots, n$. Entonces existe $\phi : A \longrightarrow B$ un único funtor que extiende a ϕ' tal que $\phi(a_i) = b_i, i = 1, \ldots, n$; y por lo tanto, tomando la restricción a C, tenemos un funtor $\phi : C \longrightarrow B$ que extiende a ϕ' y $\phi(a_i) = b_i, i = 1, \ldots, j$. Claramente ϕ es único. Ahora sea $\phi' : C \longrightarrow B$ un funtor y $b_i \in B(\phi'(X_i), \phi'(Y_i)), i = j+1, \ldots, n$. Sea $b_i = \phi'(a_i), i = 1, \ldots, j$. Restringiendo ϕ' a A' tenemos un funtor $\phi' : A' \longrightarrow B$, éste puede extenderse de manera única a $\phi : A \longrightarrow B$ tal que $\phi(a_i) = b_i$. Como $\phi(a_i) = b_i = \phi'(a_i)$, $i = 1, \ldots, j$, y extiende ϕ' sobre A', entonces $\phi = \phi'$ sobre C, pues los elementos de C son sumas finitas de composiciones finitas de morfismos en A' y $a_1, \ldots, a_j$. Así ϕ extiende a ϕ' y concluimos que A es libremente generada sobre C por $a_{j+1}, \ldots, a_n$. □

LEMA 1.17 *Sea A una categoría libremente generada sobre A' y supongamos que A' tiene sumas directas. Entonces:*

(1) A tiene sumas directas;

(2) El funtor inclusión $\imath : A' \longrightarrow A$ preserva inescindibilidad;

(3) Si A' tiene la propiedad de **Krull-Schmidt**, *es decir todo objeto es isomorfo a una suma directa finita de objetos inescindibles, y tal descomposición es única hasta isomorfismo y reordenación de los sumandos, entonces también A.*

DEMOSTRACION. (1) se sigue del hecho de que en categorías preaditivas las sumas directas están dadas por biproductos [Mc].

Para probar (2) empecemos observando que si X es inescindible en A, entonces X es inescindible en A', pues de otra manera ocurre que $\mathrm{Hom}_{A'}(X, X) \not\subset \mathrm{Hom}_A(X, X)$. Por otro lado, como en 1.16, consideremos la proyección canónica $p : A \longrightarrow A'$ tal que $p\imath = 1_{A'}$. Así si X inescindible en A' y supongamos que $\imath(X) = X_1 \bigoplus X_2$ en A, entonces $X = p\imath(X) = p(X_1) \bigoplus p(X_2)$ en A', luego X se escinde en A', así que $\imath(X) = X$ es inescindible en A. La afirmación (3) se sigue de (2). □

LEMA 1.18 *Sea A una categoría libremente generada sobre A' por elementos $a_1, \ldots, a_n, a_i \in A(X_i, Y_i)$. Si B' es una categoría y $\theta' : A' \longrightarrow B'$ es un funtor, entonces hay una categoría B que contiene a B' y con los mismos objetos, y un funtor $\theta : A \longrightarrow B$ que extiende a θ' y tal que:*

(1) B es libremente generada sobre B' por $\theta(a_1),\ldots,\theta(a_n)$; y

(2) El cuadro conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "\imath"] \arrow[d, "\theta'"'] & A \arrow[d, "\theta"] \\
B' \arrow[r, "\jmath"'] & B
\end{tikzcd}$$

es un diagrama de pushout en la categoría de las k-categorías esqueléticamente pequeñas y k-funtores.

<u>DEMOSTRACION</u>. Por 1.15, existe V un A'-A' subbimódulo de A libremente generado por $a_1,\ldots,a_n$ tal que $A \simeq V^{\otimes}$. Denotamos ${}^{B'}V^{B'} = B' \bigotimes_{A'} V \bigotimes_{A'} B'$ que es un B'-B' bimódulo, y definimos $B = {}^{B'}V^{B'\otimes}$. Consideremos en ${}^{B'}V^{B'}$ los elementos

$$b_i = \theta'(1_{Y_i}) \otimes a_i \otimes \theta'(1_{X_i}).$$

Como $V \simeq \bigoplus_i A'(Y_i,-) \bigotimes_k A'(-,X_i)$, entonces

$$\begin{aligned}
{}^{B'}V^{B'} &\simeq B' \bigotimes_{A'} [\bigoplus_i A'(Y_i,-) \bigotimes_k A'(-,X_i)] \bigotimes_{A'} B' \\
&\simeq \bigoplus_i B' \bigotimes_{A'} [A'(Y_i,-) \bigotimes_k A'(-,X_i)] \bigotimes_{A'} B' \\
&\simeq \bigoplus_i [B' \bigotimes_{A'} A'(Y_i,-)] \bigotimes_k [A'(-,X_i) \bigotimes_{A'} B'] \\
&\simeq \bigoplus_i B'(\theta' Y_i,-) \bigotimes_k B'(-,\theta' X_i)
\end{aligned}$$

y este isomorfismo es tal que $b_i \mapsto \theta'(1_{Y_i}) \otimes \theta'(1_{X_i})$. Así ${}^{B'}V^{B'}$ es un bimódulo generado libremente por $b_1,\ldots,b_n$.

El funtor $A' \xrightarrow{\theta'} B' \xrightarrow{\jmath} B$ induce un funtor $\theta : A \to B$ tal que $\theta(a_i) = b_i$, que hace conmutar el diagrama del enunciado. Veamos que el diagrama es un pushout. Consideremos funtores $\sigma : A \to C$ y $\tau : B' \to C$ tales que $\sigma\imath = \tau\theta'$. Como la categoría B es libremente generada sobre B' por $b_1, \ldots, b_n$, existe un funtor $\rho : B \to C$ con $\rho(b_i) = \sigma(a_i), i = 1, \ldots, n$, y $\rho\jmath = \tau$. Probemos que $\rho\theta = \sigma$. Nótese que

$$\rho\theta(a_i) = \rho(b_i) = \sigma(a_i).$$

Además, $\rho\theta\imath = \rho\jmath\theta' = \tau\theta' = \sigma\imath$, así $\rho\theta$ y σ coinciden al restringirse a A' y también en los a_i, como A es libremente generada sobre A' por los a_i, entonces $\rho\theta = \sigma$. Además ρ es único, pues si $\rho' : B \to C$ tal que $\rho'\jmath = \theta$ y $\rho'\theta = \sigma$, entonces ρ' restringido a B' es τ y $\sigma(a_i) = \rho'\theta(a_i) = \rho'(b_i)$, es decir ρ y ρ' coinciden al restringirse a B' y en los $b_i, i = 1, \ldots, n$, luego $\rho' = \rho$.□

Consideremos un diagrama de pushout

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\imath"] \arrow[d, "\theta'"'] & A \arrow[d, "\theta"] \\ B' \arrow[r, "\jmath"'] & B \end{tikzcd}$$

En lo que sigue estudiaremos las relaciones entre los núcleos:

$$K = ker(A \otimes_{A'} A \longrightarrow A); \qquad L = ker(B \otimes_{B'} B \longrightarrow B);$$
$$J = ker(B \otimes_{A} B \longrightarrow B); \qquad J' = ker(B' \otimes_{A'} B' \longrightarrow B').$$

Queremos mostrar que K y L son bimódulos libres, para lo cual basta considerar el caso de K.

LEMA 1.19 *Sea $K = ker(A \otimes_{A'} A \to A)$. Entonces K es un $A - A$ bimódulo libre generado por los elementos $1_{Y_i} \otimes a_i - a_i \otimes 1_{X_i}$, donde A es libremente generada sobre A' por $a_1, \ldots, a_n$, con $a_i \in A(X_i, Y_i), i = 1, \ldots, n$.*

<u>DEMOSTRACION</u>. Sea V el A'-A' bimódulo tal que $A = V^{\otimes}$. Consideremos el A-A morfismo

$$\psi : A \bigotimes_{A'} V \bigotimes_{A'} A \longrightarrow K$$

dado por $\psi(g\otimes v\otimes f) = g\otimes vf - gv\otimes f$. $A\bigotimes_{A'} V\bigotimes_{A'} A$ es un A-A bimódulo libre generado por los elementos $1_{Y_i}\otimes a_i\otimes 1_{X_i}$, así , si probamos que ψ es un isomorfismo, K resultará un A-A bimódulo libre con generadores
$\psi(1_{Y_i}\otimes a_i\otimes 1_{X_i}) = 1_{Y_i}\otimes a_i - a_i\otimes 1_{X_i}$.

$\underline{\psi \text{ es epimorfismo}}$: Sea $x = \sum g_i\otimes f_i \in K$, entonces $\sum_i g_i f_i = 0$, por lo tanto

$$x = \sum_i g_i\otimes f_i - \sum_i g_i f_i\otimes 1 = \sum_i g_i(1\otimes f_i - f_i\otimes 1).$$

Es decir, K es el A-A bimódulo generado por los elementos de la forma $\phi(f) := 1\otimes f - f\otimes 1$. Para $f = \sum_s f_s$, tenemos $\phi(f) = \sum_s \phi(f_s)$, y podemos suponer que cada f_s es de la forma $f_s = v_1 v_2\cdots v_l$, con $v_i\in V$. Obsérvese que $\phi(gf) = \phi(g)f + g\phi(f)$, luego

$$\begin{aligned}\phi(v_1v_2\dots v_l) &= \phi(v_1)v_2\dots v_l + v_1\phi(v_2\dots v_l) = \\ &= \phi(v_1)v_2\cdots v_l + v_1\phi(v_2)v_3\cdots v_l + \cdots + v_1v_2\cdots v_{l-1}\phi(v_l).\end{aligned}$$

Por lo que K es el A-A subbimódulo de $A\bigotimes_{A'} A$ generado por los elementos de la forma

$$g\phi(v)f = \psi(g\otimes v\otimes f),$$

por lo tanto $K = Im\psi$.

$\underline{\psi \text{ es monomorfismo}}$: Supóngase que se tiene

$$\psi(\sum_i g_i\otimes v_i\otimes f_i) = \sum_i g_i\otimes v_i f_i - g_i v_i\otimes f_i = 0. \qquad [1]$$

Como $A = V^{\otimes} = \coprod_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$, A es una categoría graduada, y $A\bigotimes A = \coprod_{i,j} V^{\otimes i}\bigotimes_{A'} V^{\otimes j}$ es un A-A bimódulo graduado por las parejas de enteros no negativos (i,j), pues $V^{\otimes n}(V^{\otimes i}\bigotimes_{A'} V^{\otimes j}) \subseteq V^{\otimes(n+i)}\bigotimes_{A'} V^{\otimes j}$, mientras que $(V^{\otimes i}\bigotimes_{A'} V^{\otimes j})V^{\otimes n} \subseteq V^{\otimes i}\bigotimes_{A'} V^{\otimes(j+n)}$. En la suma [1], para cada i,j, $g_i = \sum_{l=0} g_i^{(l)}$ y $f_j = \sum_{m=0} f_j^{(m)}$, donde $g_i^{(l)}, f_j^{(l)} \in V^{\otimes l}$. De aquí que:

$$\begin{aligned}\sum_i g_i\otimes v_i\otimes f_i &= \sum_i(\sum_{l=0} g_i^{(l)})\otimes v_i\otimes(\sum_{m=0} f_i^{(m)}) = \\ &= \sum_i\sum_l\sum_m g_i^{(l)}\otimes v_i\otimes f_i^{(m)} \\ &= \sum_{n=0}\sum_{s=0}^{n}\sum_i g_i^{(s)}\otimes v_i\otimes f_i^{(n-s)},\end{aligned}$$

de donde

$$\psi(\sum_i g_i \otimes v_i \otimes f_i) = \sum_{n=0} \sum_{s=0}^{n} \sum_i g_i^{(s)} \otimes v_i f_i^{(n-s)} - g_i^{(s)} v_i \otimes f_i^{(n-s)}, \qquad [2]$$

y por [1], el sumando de [2] en cada grado (l, m) se anula:

$$\sum_i g_i^{(l)} \otimes v_i f_i^{(m-1)} - \sum_i g_i^{(l-1)} v_i \otimes f_i^{(m)} = 0.$$

Para un entero fijo n, veremos que $\sum_i g_i^{(s)} \otimes v_i \otimes f_i^{(n-s)} = 0$, para cada $s = 0, 1, \ldots, n$. Usamos inducción sobre s. Para $s = 0$, el término de grado $(0, n+1)$ de la suma [2] es

$$0 = \sum_i g_i^{(0)} \otimes v_i f_i^{(n)},$$

pero $A' \otimes_{A'} V^{\otimes(n+1)} \simeq A' \bigotimes_{A'} V \bigotimes_{A'} V^{\otimes n} \subseteq A \bigotimes_{A'} A$, y bajo este isomorfismo $\sum_i g_i^{(0)} \otimes v_i f_i^{(n)}$ se transforma en $\sum_i g_i^{(0)} \otimes v_i \otimes f_i^{(n)} = 0$. Supongamos cierto el resultado para $s-1$ y lo probamos para s. Tenemos

$$\sum_i g_i^{(s-1)} \otimes v_i \otimes f_i^{(n-s+1)} = 0,$$

por lo tanto $\sum_i g_i^{(s-1)} v_i \otimes f_i^{(n-s+1)} = 0$, pues $V^{\otimes(s-1)} \bigotimes_{A'} V \bigotimes_{A'} V^{\otimes(n-s+1)} \simeq V^{\otimes s} \bigotimes_{A'} V^{\otimes(n-s+1)}$. Como el término de grado $(s, n-s+1)$ de [2] es

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i g_i^{(s)} \otimes v_i f_i^{(n-s)} - \sum_i g_i^{(s-1)} v_i \otimes f_i^{(n-s+1)} = \\ &= \sum_i g_i^{(s)} \otimes v_i f_i^{(n-s)} \in V^{\otimes s} \bigotimes_{A'} V^{\otimes(n-s+1)} \simeq V^{\otimes s} \bigotimes_{A'} V \bigotimes_{A'} V^{\otimes(n-s)} \end{aligned}$$

y con este isomorfismo la última suma se transforma en $\sum g_i^{(s)} \otimes v_i \otimes f_i^{(n-s)} = 0$, lo cual prueba nuestra afirmación. En consecuencia, $\sum_i g_i \otimes v_i \otimes f_i = 0$ y ψ resulta un isomorfismo.□

Ahora vemos las relaciones entre K y L.

De la sucesión exacta

$$0 \to K \to A \bigotimes_{A'} A \to A \to 0,$$

obtenemos la sucesión exacta

$$\begin{tikzcd}
B \otimes_A K \otimes_A B \arrow[r] \arrow[d, "="'] & B \otimes_A (A \otimes_{A'} A) \otimes_A B \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & B \otimes_A A \otimes_A B \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\
{}^B K^B \arrow[r] & B \otimes_{A'} B \arrow[r] & B \otimes_A B \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Y también el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & {}^B K^B \arrow[r] \arrow[d, dashed] & B \otimes_{A'} B \arrow[r] \arrow[d] & B \otimes_A B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & B \otimes_{B'} B \arrow[r] & B \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Por consiguiente, la aplicación ${}^B K^B \longrightarrow B \otimes_{B'} B$ tiene imagen contenida en L y determina un morfismo ${}^B K^B \longrightarrow L$.

LEMA 1.20 *El morfismo ${}^B K^B \longrightarrow L$ es un isomorfismo*

<u>DEMOSTRACION</u>. Sabemos que K es A-A bimódulo con generadores $1_{Y_i} \otimes a_i - a_i \otimes 1_{X_i}$, así ${}^B K^B$ es un B-B bimódulo libre con generadores

$$1_{\theta(Y_i)} \otimes (1_{Y_i} \otimes a_i - a_i \otimes 1_{X_i}) \otimes 1_{\theta(X_i)},$$

cuya imagen en $B \otimes_{B'} B$ son los elementos

$$1_{\theta(Y_i)} \otimes \theta(a_i) - \theta(a_i) \otimes 1_{\theta(X_i)}.$$

Pero sabemos que los elementos $\theta(a_i)$ generan libremente a B sobre B', así los elementos $1_{\theta(Y_i)} \otimes \theta(a_i) - \theta(a_i) \otimes 1_{\theta(X_i)}$ generan libremente a L como B'-B' bimódulo. De aquí que ${}^B K^B \longrightarrow L$ envía generadores libres en generadores libres y es un isomorfismo.□

Veamos ahora las relaciones entre J y J'.

Tomemos la sucesión exacta

$$0 \to J' \to B' \bigotimes_{A'} B' \to B' \to 0$$

Como, por 1.18, $B_{B'}$ y ${}_{B'}B$ son B'-módulos planos, se induce la sucesión exacta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B\otimes_{B'} J'\otimes_{B'} B \arrow[r] \arrow[d, "="'] & B\otimes_{B'}(B'\otimes_{A'} B')\otimes_{B'} B \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & B\otimes_{B'} B'\otimes_{B'} B \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\
0 \arrow[r] & {}^{B}J'^{B} \arrow[r] & B\otimes_{A'} B \arrow[r] & B\otimes_{B'} B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \qquad [3]$$

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & & {}^{B}K^{B} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & L \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & {}^{B}J'^{B} \arrow[r] \arrow[d, dashed] & B\otimes_{A'} B \arrow[r] \arrow[d] & B\otimes_{B'} B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & J \arrow[r] & B\otimes_{A} B \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

en el que conmutan los cuadros completos. Observemos que la aplicación

$${}^{B}J'^{B} \to B\bigotimes_{A'} B \to B\bigotimes_{A} B \to B$$

es cero, por lo que la aplicación ${}^{B}J'^{B} \to B\otimes_{A} B$ induce un morfismo ${}^{B}J'^{B} \to J$ que hace conmutar el diagrama anterior. De aquí se sigue que ${}^{B}K^{B} \to B\otimes_{A'} B$ es mono y, por el Lema de la Serpiente, ${}^{B}J'^{B} \to J$ es iso. Luego se ha mostrado el siguiente

LEMA 1.21 *La transformación [3] induce un isomorfismo* ${}^{B}J'^{B} \longrightarrow J$. □

En lo que sigue el siguiente resultado será muy útil.

LEMA 1.22 *Sea*

$$0 \to X \to Y \to A \to 0 \qquad [4]$$

una sucesión exacta de A-A bimódulos, supóngase que la sucesión

$$0 \to X_{A'} \to Y_{A'} \to A_{A'} \to 0$$

de A-A' bimódulos se escinde. Entonces

(1)La sucesión inducida

$$0 \to {}^{B}X^{B} \to {}^{B}Y^{B} \to B \bigotimes_{A} B \to 0$$

es exacta;

(2) Si J' es libre como B'-B' bimódulo, el núcleo de la composición ${}^{B}Y^{B} \to B \otimes_{A} B \to B$ es isomorfo a ${}^{B}X^{B} \bigoplus {}^{B}J'^{B}$.

DEMOSTRACION. Obsérvese el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & {}^{B}X \otimes_{A} K^{B} \arrow[r] \arrow[d] & {}^{B}Y \otimes_{A} K^{B} \arrow[r] \arrow[d] & {}^{B}K^{B} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & {}^{B}X \otimes_{A'} A^{B} \arrow[r] \arrow[d] & {}^{B}Y \otimes_{A'} A^{B} \arrow[r] \arrow[d] & {}^{B}A \otimes_{A'} A^{B} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & {}^{B}X^{B} \arrow[r] \arrow[d] & {}^{B}Y^{B} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & B \otimes_{A} B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo y exacto, se obtiene de [4] aplicando $B \bigotimes_A -$ y $- \bigotimes_A K^B$ para el primer renglón, para el segundo aplicamos $B \bigotimes_A -$ y $- \bigotimes_{A'} A^B$ y utilizando que la sucesión [4] se escinde como A-A' bimódulos, mientras que para el tercer renglón aplicamos $B \bigotimes_A -$ y $- \bigotimes_A B$. De la sucesión

$$0 \to K \to A \bigotimes_{A'} A \to A \to 0$$

obtenemos la primera columna al aplicar ${}^BX \bigotimes_A -$ y $- \bigotimes_A B$, la segunda columna se obtiene aplicando ${}^BY \bigotimes_A -$ y $- \bigotimes_A B$, y finalmente la tercera columna se obtiene aplicando $B \bigotimes_A -$ y $- \bigotimes_A B$, y de la demostración del lema 1.21.

Utilizando el Lema de la Serpiente, concluimos que $\ker\alpha \simeq {}^BX^B$ y obtenemos la sucesión exacta

$$0 \to {}^BX^B \to \alpha^{-1}(J) \to J \to 0.$$

Como J' es B'-B' bimódulo libre y $J \simeq {}^BJ'^B$, J es B-B bimódulo libre, y la sucesión anterior se escinde como B-B bimódulos, y

$$ker({}^BY^B \to B \bigotimes_A B \to B) = \alpha^{-1}(J) \simeq J \bigoplus {}^BX^B. \square$$

Terminamos este capítulo introduciendo el concepto de categoría mínima. Diremos que una categoría esquelética es **trivial** si es equivalente a un producto de un número finito de copias de $mod(k)$, la categoría de k-espacios vectoriales de dimensión finita.

DEFINICION 1.23 *Decimos que una categoría esquelética A es* **mínima** *si es equivalente a un producto*

$$B \times P(R_1) \times \ldots \times P(R_n),$$

donde B es trivial y los R_i son anillos de la forma $k[x, f(x)^{-1}]$ y $P(R)$ denota la categoría de R-módulos izquierdos proyectivos finitamente generados.

Mostramos las propiedades básicas de las categorías mínimas.

LEMA 1.24 *(I) Sea C una categoría con un número finito de objetos, $C(X, Y) = 0$ para $X \neq Y$, y para todo X, $C(X, X) = k$ o $C(X, X) = k[x, f(x)^{-1}]$, donde $f(x)$ es un polinomio no cero dependiente de X. Entonces C puede sumergirse como una subcategoría plena de una categoría mínima A en tal forma que $C = ines(A)$;*

(2) Los endomorfismo idempotentes en una categoría mínima se escinden;

(3) Las categorías mínimas tienen la propiedad de Krull-Schmidt;

(4) Si A es una categoría mínima y B una categoría con sumas directas, entonces cualquier funtor $ines(A) \longrightarrow B$ se extiende a un funtor $A \longrightarrow B$;

(5) Si A es una categoría mínima y C es una subcategoría, entonces la subcategoría plena de A cuyos objetos son aquellos que no tienen ningún sumando directo no cero isomorfo a un sumando directo de un objeto de C es mínima.

DEMOSTRACION. Consideremos la categoría $(C^{op}, Modk)$. En ésta tomamos la subcategoría plena esquelética A cuyos objetos son $\bigoplus_{X \in ObC} m_X C(-,X)$, m_X es entero no negativo, y A es una categoría mínima. En efecto, sean $X_1, \ldots, X_l \in ObC$ tales que $C(X_i, X_i) = k, i = 1, \ldots, l$ y $X_{l+1}, \ldots, X_{l+n} \in ObC$ tales que $C(X_{l+i}, X_{l+i}) = k[x, f_i(x)^{-1}] = R_i, i = 1, \ldots, n$. Definimos el funtor

$$\theta : A \longrightarrow modk \times \ldots \times modk \times P(R_1) \times \ldots \times P(R_n).$$

-) Para $M \in ObA$, $\theta M = (M(X_1), \ldots, M(X_l), M(X_{l+1}), \ldots, M(X_{l+n})$. Nótese que si $M = \bigoplus m_X C(-,X)$, entonces $M(X_{l+i}) = m_{X_{l+i}} R_i$ que es un objeto en $P(R_i)$.

-) Para cada morfismo $\eta : M \longrightarrow N$ en A, tomamos

$$\theta\eta : \theta M \rightarrow \theta N, \qquad \theta\eta = (\eta_{X_i})_{i=1,\ldots,n+l}$$

Nótese que $\eta_{X_{l+i}}$ es R_i-morfismo, pues si $m \in M(X_{l+i})$ y $r \in R_i$, por la naturalidad de η se tiene:

$$\eta_{X_{l+i}}(rm) = \eta_{X_{l+i}} M(r)(m) = N(r)\eta_{X_{l+i}}(m) = r\eta_{X_{l+i}}(m).$$

Fácilmente se muestra que θ es una equivalencia, en particular θ resulta denso ya que en los anillos R_i módulos proyectivos son libres, y se sigue la afirmación (1). Las afirmaciones (2), (3) y (4) son claras. Veamos (5). A tiene un número finito de objetos inescindibles, digamos $X_1, \ldots, X_t$. Sean $X_1, \ldots, X_r$ los inescindibles de A que son sumando directo de algún objeto en C, entonces la subcategoría de A con objetos que no tienen sumando directo no cero isomorfo a un sumando directo de un objeto de C es $Add(X_{r+1}, \ldots, X_t)$, es decir la subcategoría plena de A con objetos que sólo tienen sumandos directos inescindibles isomorfos a $X_{r+1}, \ldots, X_t$. Si D es la subcategoría plena de A cuyos objetos son $X_{r+1}, \ldots, X_t$, entonces argumentando como en (1), se muestra que $Add(X_{r+1}, \ldots, X_t)$ es equivalente a $\bigoplus_{X_j \in Ob(D)} m_j D(-, X_j)$ con m_j un entero no negativo.□

2 BOCSES

En este capítulo damos la definición de bocs, estudiamos la categoría de representaciones de un bocs, y finalmente consideramos el concepto de bocs estratificado.

DEFINICION 2.1 *Un par $\mathcal{A} = (A, V)$ es un* bocs *(o un k-bocs) si A es una categoría (esqueléticamente pequeña) y V es una A-coálgebra. Esto es, V es un A-A bimódulo con una counidad $\varepsilon : V \longrightarrow A$ y una comultiplicación $\mu : V \longrightarrow V \otimes_A V$, que son morfismos de A-A bimódulos que satisfacen las leyes*

$$(1 \otimes \mu)\mu = (\mu \otimes 1)\mu \qquad y \qquad (\varepsilon \otimes 1)\mu = 1 = (1 \otimes \varepsilon)\mu,$$

con mayor precisión tenemos los diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
 & & V \otimes_A (V \otimes_A V) \arrow[dd, "\simeq"] \\
V \arrow[r, "\mu"] & V \otimes_A V \arrow[ur, "1 \otimes \mu"] \arrow[dr, "\mu \otimes 1"'] & \\
 & & (V \otimes_A V) \otimes_A V
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & V \arrow[dl, dash, "\sigma_V"'] \arrow[dr, dash, "\overline{\sigma}_V"] \arrow[dd, "\mu"] & \\
V \otimes_A A & & A \otimes_A V \\
 & V \otimes_A V \arrow[ul, "1 \otimes \varepsilon"] \arrow[ur, "\varepsilon \otimes 1"'] &
\end{tikzcd}$$

OBSERVACION. La conmutatividad de los diagramas anteriores queda descrita en términos de elementos en la siguiente forma: para $v \in V$, si

$$\mu(v) = \sum_i w_i \otimes_{X_i} u_i, \qquad \mu(u_i) = \sum_j u''_{ij} \otimes_{Y_{ij}} u'_{ij}, \qquad \mu(w_i) = \sum_\ell w''_{i\ell} \otimes_{Z_{i\ell}} w'_{i\ell},$$

entonces

$$\sum_{i,j} w_i \otimes_{X_i} (u''_{ij} \otimes_{Y_{ij}} u'_{ij}) = (1 \otimes \mu)\mu(v) = (\mu \otimes 1)\mu(v) = \sum_{i,\ell} (w''_{i\ell} \otimes_{Z_{i\ell}} w'_{i\ell}) \otimes_{X_i} u_i \quad [1]$$

y

$$\sum_i w_i \varepsilon(u_i) = (1 \otimes \varepsilon)\mu(v) = v = (\varepsilon \otimes 1)\mu(v) = \sum_i \varepsilon(w_i) u_i \qquad [2]$$

Si A es una k-categoría, A es desde luego un A-A bimódulo, y tomando $\varepsilon = 1_A : A \longrightarrow A$ y $\mu : A \longrightarrow A \bigotimes_A A$, dado por $\mu(f) = f \otimes 1_X = 1_Y \otimes f$, para $f \in A(X,Y)$, entonces $\Pi = (A, A)$ es un bocs, el **bocs principal** sobre A.

Ahora definimos $R(\mathcal{A})$, la categoría de representaciones del bocs $\mathcal{A}$. Los objetos de $R(\mathcal{A})$ son funtores $M : A \longrightarrow mod(k)$. Si M y N son dos objetos, un morfismo de M a N está dado por un A-morfismo $\phi : V \bigotimes_A M \longrightarrow N$. Si $\psi : N \longrightarrow L$ es otro morfismo en $R(\mathcal{A})$, la composición $\psi\phi$ está dada por la composición de A-morfismos:

$$V \bigotimes_A M \xrightarrow{\mu \otimes 1_M} V \bigotimes_A V \bigotimes_A M \xrightarrow{1_V \otimes \phi} V \bigotimes_A N \xrightarrow{\psi} L$$

Mientras que el morfismo identidad $I_M : V \bigotimes_A M \longrightarrow M$ está dado por la composición de A-morfismos:

$$V \bigotimes_A M \xrightarrow{\epsilon \otimes 1_M} A \bigotimes_A M \xrightarrow{\simeq} M$$

PROPOSICION 2.2 *$R(\mathcal{A})$ es una categoría.*

DEMOSTRACION. Sea $\phi : M \longrightarrow N$ un morfismo en $R(\mathcal{A})$, los siguientes diagramas conmutativos muestran que $\phi I_M = \phi = I_N \phi$, respectivamente.

$$\begin{tikzcd}
V \otimes M \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\simeq"] \arrow[dd, "\mu \otimes 1_M"'] & & N \\
(1) & V \otimes A \otimes M \arrow[dr, "\simeq"] & (3) \\
V \otimes V \otimes M \arrow[ur, "1_V \otimes \epsilon \otimes 1_M"'] \arrow[rr, "(2)", "1_V \otimes I_M"'] & & V \otimes M \arrow[uu, "\phi"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
V \otimes M \arrow[rrr, "\phi"] \arrow[dr, "\simeq"] \arrow[dd, "\mu \otimes 1_M"'] & & & N \\
(1) & A \otimes V \otimes M \arrow[r, "1_A \otimes \phi"] \arrow[r, phantom, "(4)", yshift=30pt] & A \otimes N \arrow[ur, "\simeq"] & (3) \\
V \otimes V \otimes M \arrow[ur, "\epsilon \otimes 1_V \otimes 1_M"'] \arrow[rrr, "(2)", "1_V \otimes \phi"'] & & & V \otimes N \arrow[ul, "\epsilon \otimes 1_N"] \arrow[uu, "I_N"']
\end{tikzcd}$$

En el primer diagrama, el triángulo (1) conmuta por la definición de bocs, el (2) lo hace por la definición de I_M y (3) conmuta pues la composición de los dos isomorfismos es la identidad en $V \bigotimes M$. En el segundo diagrama, el triángulo (1) conmuta por definición de bocs, (3) por definición de I_N, la conmutatividad de (4) es evidente, y (2) lo hace pues

$$\begin{aligned}(1_A \otimes \phi)(\varepsilon \otimes 1_V \otimes 1_M) &= (1_A\varepsilon) \otimes [\phi(1_V \otimes 1_M)] = \varepsilon \otimes \phi = \varepsilon 1_V \otimes 1_N\phi \\ &= (\varepsilon \otimes 1_N)(1_V \otimes \phi)\end{aligned}$$

Ahora veamos la asociatividad de la composición.

$$\begin{tikzcd}
V \bigotimes M \arrow[rrrr, "\rho(\psi\phi)"] \arrow[dddd, "(\rho\psi)\phi"'] \arrow[ddr, "\mu \otimes 1_M"] & & & & K \\
 & & (1) & & V \bigotimes L \arrow[u, "\rho"'] \\
 & (V \bigotimes V) \bigotimes M \arrow[urrr, "1_V \otimes \psi\phi"] \arrow[r, "1_V \otimes \mu \otimes 1_M"'] \arrow[d, "1_V \otimes \phi"] \arrow[dr, "\mu \otimes 1_V \otimes 1_M"] \arrow[dl, phantom, "(3)"] & V \bigotimes (V \bigotimes V) \bigotimes M \arrow[d, "\simeq"] \arrow[ddrr, "1_V \otimes 1_V \otimes \phi"] \arrow[dl, phantom, "(7)"] \arrow[d, phantom, "(5)"'] & (2) & \\
 & V \bigotimes N \arrow[dl, "\rho\psi"] \arrow[drrr, "\mu \otimes 1_N"] & (V \bigotimes V) \bigotimes V \bigotimes M \arrow[drr, "1_V \otimes 1_V \otimes \phi"] \arrow[r, phantom, "(6)"] & & \\
K & V \bigotimes L \arrow[l, "\rho"] & (4) & & V \bigotimes V \bigotimes N \arrow[lll, "1_V \otimes \psi"] \arrow[uuu, "1_V \otimes \psi"']
\end{tikzcd}$$

Sean $\phi : M \longrightarrow N$, $\psi : N \longrightarrow L$ y $\rho : L \longrightarrow K$ morfismos en $R(\mathcal{A})$, entonces $\rho(\psi\phi) = (\rho\psi)\phi$ pues el diagrama previo conmuta ya que así lo hacen los cuadros (1), (2), (3), y (4) por definición de composición en $R(\mathcal{A})$, el triángulo (5) conmuta por definición de bocs, la conmutatividad de (6) es evidente, y finalmente el cuadro (7) lo hace pues

$$\begin{aligned}(\mu \otimes 1_N)(1_V \otimes \phi) &= \mu 1_V \otimes 1_N\phi = \mu \otimes \phi = (1_V \otimes 1_V)\mu \otimes \phi(1_V \otimes 1_M) \\ &= [(1_V \otimes 1_V) \otimes \phi][\mu \otimes (1_V \otimes 1_M)].\square\end{aligned}$$

Observemos que si Π es el bocs principal sobre la categoría A los morfismos en $R(\Pi)$ están dados por morfismos $\phi : A \bigotimes_A M \longrightarrow N$, pero $M \simeq A \bigotimes_A M$, por tanto son transformaciones naturales de M en N y la composición es la usual. $R(A)$ denota a $R(\Pi)$.

DEFINICION 2.3 *Sean $\mathcal{A} = (A, V)$ y $\mathcal{B} = (B, W)$ dos bocses, un* **morfismo de bocses** *$\theta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es un par (θ_0, θ_1) donde $\theta_0 : A \longrightarrow B$ es un funtor y $\theta_1 : V \longrightarrow {}_{\theta_0}W_{\theta_0}$ es un A-A morfismo de manera tal que los siguientes diagramas son conmutativos:*

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\theta_1"] \arrow[d, "\epsilon_V"'] & {}_{\theta_0}W_{\theta_0} \arrow[d, "\epsilon_W"] \\
A \arrow[r, "\theta_0"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "\theta_1"] \arrow[d, "\mu_V"'] & & {}_{\theta_0}W_{\theta_0} \arrow[dr, "\mu_W"] & \\
V \bigotimes_A V \arrow[rr, "\theta_1 \otimes \theta_1"'] & & W \bigotimes_A W \arrow[r, "\pi"'] & W \bigotimes_B W
\end{tikzcd}
$$

donde π es el morfismo natural que envía $W \bigotimes_A W$ en $W \bigotimes_B W$.

Si $\theta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es un morfismo de bocses, inducimos una aplicación

$$\theta^* : R(\mathcal{B}) \longrightarrow R(\mathcal{A})$$

definida de la siguiente manera:

Para $M \in R(\mathcal{B})$, tenemos $\theta^*(M) = M\theta_0 = {}_{\theta_0}M \in R(\mathcal{A})$

Para $\phi : M \longrightarrow N$ un morfismo en $R(\mathcal{B})$, tenemos

$$\theta^*(\phi) : V \bigotimes_A {}_{\theta_0}M \xrightarrow{\theta_1 \otimes 1} {}_{\theta_0}W_{\theta_0} \bigotimes_A {}_{\theta_0}M \xrightarrow{\pi} {}_{\theta_0}W \bigotimes_B M \xrightarrow{\phi} {}_{\theta_0}N$$

Enseguida mostramos que θ^* es un k-funtor que llamaremos el **funtor inducido** por θ.

PROPOSICION 2.4 *$\theta^* : R(\mathcal{B}) \longrightarrow R(\mathcal{A})$ es un k-funtor.*

<u>DEMOSTRACION</u>. El siguiente diagrama conmutativo muestra que, para cada $M \in R(\mathcal{B})$, $\theta^*(I_M) = I_{\theta^*(M)}$. El triángulo (1) conmuta por definición de $I_{\theta^*(M)}$, (2) lo hace por definición de θ^*, (3) por definición de morfismo de bocses, la conmutatividad de (4) y (5) es evidente y (6) lo hace por definición de I_M.

$$\begin{tikzcd}
 & & & V \bigotimes_A {}_\theta M \arrow[dddlll, "I_{\theta^* M}"'] \arrow[dll, "\epsilon_V \otimes 1_M"] \arrow[drr, "\theta_1 \otimes 1_M"'] \arrow[dddrrr, "\theta^* I_M"] \arrow[d, phantom, "(3)"] & & & \\
 & A \bigotimes_A {}_\theta M \arrow[ddl, "\simeq"'] \arrow[dr, phantom, "(4)"] \arrow[drr, "\theta_0 \otimes 1_M"] \arrow[l, phantom, "(1)"] & & & & {}_\theta W_\theta \bigotimes_A {}_\theta M \arrow[dll, "\epsilon_W \otimes 1_M"'] \arrow[d, "\pi"] \arrow[dl, phantom, "(5)"] \arrow[r, phantom, "(2)"] & \\
 & & & {}_\theta B_\theta \bigotimes_A {}_\theta M \arrow[d, "\pi"'] & & {}_A W \bigotimes_B M \arrow[dll, "\epsilon_W \otimes 1_M"] \arrow[dr, "I_M"] \arrow[d, phantom, "(6)"] & \\
{}_\theta M & & & {}_\theta B \bigotimes_B M \arrow[lll, "\simeq"] \arrow[rrr, "\simeq"'] & & & {}_\theta M
\end{tikzcd}$$

Que θ^* preserva la composición se sigue de la conmutatividad del diagrama de la siguiente página, donde $\phi : M \longrightarrow N$ y $\psi : N \longrightarrow L$ son morfismos en $R(B)$. Nótese que los diagramas (1), (10) y (11) conmutan por la definición de θ^*, (2) y (12) por definición de composición, (4) por definición de bocs, y para el resto la conmutatividad es evidente.

Finalmente, es muy claro que θ^* es un k-funtor.□

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un bocs, B una categoría y $\theta : A \longrightarrow B$ un funtor. Se construye un par de morfismos de A-A bimódulos mediante las siguientes composiciones: la primera ε_B

$$^B V^B \xrightarrow{1\otimes\varepsilon\otimes 1} {}^B A^B \simeq B \bigotimes_A B \longrightarrow B,$$

$$\varepsilon_B(b_2 \otimes v \otimes b_1) = b_2 \theta\varepsilon(v) b_1,$$

y la segunda μ_B

$$^B V^B \xrightarrow{1\otimes\mu\otimes 1} {}^B V \bigotimes_A V^B \simeq {}^B V \bigotimes_A A \bigotimes_A V^B \xrightarrow{1\otimes\theta\otimes 1} {}^B V \bigotimes_A B \bigotimes_A V^B \simeq {}^B V^B \bigotimes_B {}^B V^B$$

$$\mu_B(b_2 \otimes v \otimes b_1) = \sum_i (b_2 \otimes w_i \otimes 1_{\theta X_i}) \otimes (1_{\theta X_i} \otimes u_i \otimes b_1)$$

si se tiene que $\mu(v) = \sum_i w_i \otimes_{X_i} u_i$.

$$
\begin{tikzcd}
V\otimes_A M \arrow[rrrrrr, "\theta^*(\psi\phi)"] \arrow[drr, "\theta_1\otimes 1_M"] \arrow[dddddd, "\theta^*\psi\theta^*\phi"'] \arrow[dddddr, "\mu_V\otimes 1_M"] & & & & & & L \\
& & W\otimes_A M \arrow[rr, "\pi"] \arrow[d, "\mu_W\otimes 1_M"] \arrow[urr, phantom, "(1)"] \arrow[drr, phantom, "(3)"] & & W\otimes_B M \arrow[urr, "\psi\phi"] \arrow[d, "\mu_W\otimes 1_M"] & & \\
& & W\otimes_B W\otimes_A M \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dl, phantom, "(4)"] \arrow[drr, phantom, "(5)"] & & W\otimes_B W\otimes_B M \arrow[r, "1_W\otimes\phi"] \arrow[dr, phantom, "(8)"] & W\otimes_B N \arrow[uur, "\psi"] \arrow[u, phantom, "(2)"] \arrow[dr, phantom, "(10)"] & \\
& & W\otimes_A W\otimes_A M \arrow[rr, "\pi"] \arrow[u, "\pi\otimes 1_M"] \arrow[drr, phantom, "(7)"] & & W\otimes_A W\otimes_B M \arrow[r, "1_W\otimes\phi"] \arrow[u, "\pi\otimes 1_M"] & W\otimes_A N \arrow[u, "\pi"] \arrow[d, phantom, "(9)"] & \\
& & V\otimes_A W\otimes_A M \arrow[rr, "1_V\otimes\pi"] \arrow[u, "\theta_1\otimes 1_{W\otimes M}"] \arrow[drr, phantom, "(11)"] & & V\otimes_A W\otimes_B M \arrow[u, "\theta_1\otimes 1_{W\otimes M}"] \arrow[ddrr, "1_V\otimes\phi"] & & \\
& V\otimes_A V\otimes_A M \arrow[uur, "\theta_1\otimes\theta_1\otimes 1_M"] \arrow[ur, "1_V\otimes\theta_1\otimes 1_M"'] \arrow[drrrrr, "1_V\otimes\theta^*\phi"] \arrow[u, phantom, "(6)"] \arrow[drr, phantom, "(12)"] & & & & & \\
L & & & & & & V\otimes_A N \arrow[llllll, "\theta^*\psi"] \arrow[uuuuuu, "\theta^*\psi"'] \arrow[uuul, "\theta_1\otimes 1_N"]
\end{tikzcd}
$$

PROPOSICION 2.5 *El par $\mathcal{A}^B$ ó $\mathcal{A}^\theta = (B,{}^BV^B)$ es un bocs con counidad ϵ_B y comultiplicación μ_B.*

<u>DEMOSTRACION</u>. Tenemos que mostrar que ${}^BV^B$ tiene estructura de coalgebra, es decir la conmutatividad de los diagramas:

$$
\begin{tikzcd}
& {}^BV^B \arrow[dl, "\sigma_{{}^BV^B}"'] \arrow[dr, "\overline{\sigma}_{{}^BV^B}"] \arrow[dd, "\mu_B"] & \\
{}^BV^B\otimes_B B & & B\otimes_B {}^BV^B \\
& {}^BV^B\otimes_B {}^BV^B \arrow[ul, "1\otimes\epsilon_B"] \arrow[ur, "\epsilon_B\otimes 1"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$\begin{tikzcd}
 & & {}^BV^B \otimes ({}^BV^B \otimes {}^BV^B) \arrow[dd, "\simeq"] \\
{}^BV^B \arrow[r, "\mu_B"] & {}^BV^B \otimes {}^BV^B \arrow[ur, "1 \otimes \mu_B"] \arrow[dr, "\mu_B \otimes 1"'] & \\
 & & ({}^BV^B \otimes {}^BV^B) \otimes {}^BV^B
\end{tikzcd}$$

Si $b_2 \otimes_Y v \otimes_X b_1 \in {}^B V^B(Z', Z)$ entonces, por [2] tenemos:

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_B \otimes 1)\mu_B(b_2 \otimes v \otimes b_1) &= (\varepsilon_B \otimes 1)[\sum_i (b_2 \otimes w_i \otimes 1_{\theta X_i}) \otimes (1_{\theta X_i} \otimes u_i \otimes b_1] \\
&= \sum_i \varepsilon_B(b_2 \otimes w_i \otimes 1_{\theta X_i}) \otimes (1_{\theta X_i} \otimes u_i \otimes b_1) \\
&= \sum_i b_2\theta\varepsilon(w_i) \otimes (1_{\theta X_i} \otimes u_i \otimes b_1) \\
&= \sum_i 1_Z \otimes_Z [b_2\theta\varepsilon(w_i) \otimes u_i \otimes b_1] \\
&= 1_Z \otimes_Z [\sum_i b_2 \otimes \varepsilon(w_i)u_i \otimes b_1] \\
&= 1_Z \otimes_Z b_2 \otimes [\sum_i \varepsilon(w_i)u_i] \otimes b_1 \\
&= 1_Z \otimes b_2 \otimes v \otimes b_1 = \bar{\sigma}_{{}^BV^B}(b_2 \otimes v \otimes b_1).
\end{aligned}$$

Esto muestra que $(\varepsilon_B \otimes 1)\mu_B = \bar{\sigma}_{{}^BV^B}$ y de manera análoga se tiene que $(1 \otimes \varepsilon_B)\mu_B = \sigma_{{}^BV^B}$.

Por otro lado, queremos mostrar que

$$(1 \otimes \mu_B)\mu_B(b_2 \otimes v \otimes b_1) = (\mu_B \otimes 1)\mu_B(b_2 \otimes v \otimes b_1)$$

es decir, usando la notación dada en [1], que

$$\sum_{ij} (b_2 \otimes w_i \otimes 1_{\theta X_i}) \otimes \left[(1_{\theta X_i} \otimes u''_{ij} \otimes 1_{\theta Y_{ij}}) \otimes (1_{\theta Y_{ij}} \otimes u'_{ij} \otimes b_1)\right] =$$

$$= \sum_{i,k} [(b_2 \otimes w''_{ik} \otimes 1_{\theta Z_{ik}}) \otimes (1_{\theta Z_{ik}} \otimes w'_{ik} \otimes 1_{\theta X_i})] \otimes (1_{\theta X_i} \otimes u_i \otimes b_1)$$

Para ello consideramos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
{}^BV \bigotimes\limits_A (V \bigotimes\limits_A V)^B \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\simeq"'] & {}^B(V \bigotimes\limits_A V) \bigotimes\limits_A V^B \arrow[d, "\simeq"] \\
{}^B(V \bigotimes\limits_A A) \bigotimes\limits_A (V \bigotimes\limits_A A \bigotimes\limits_A V)^B \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\theta"'] & {}^B(V \bigotimes\limits_A A \bigotimes\limits_A V) \bigotimes\limits_A (A \bigotimes\limits_A V)^B \arrow[d, "\theta"] \\
{}^B(V \bigotimes\limits_A B) \bigotimes\limits_A (V \bigotimes\limits_A B \bigotimes\limits_A V)^B \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\simeq"'] & {}^B(V \bigotimes\limits_A B \bigotimes\limits_A V) \bigotimes\limits_A (B \bigotimes\limits_A V)^B \arrow[d, "\simeq"] \\
{}^B(V \bigotimes\limits_A B \bigotimes\limits_B B) \bigotimes\limits_A (V \bigotimes\limits_A B \bigotimes\limits_B B \bigotimes\limits_A V)^B \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\simeq"'] & {}^B(V \bigotimes\limits_A B \bigotimes\limits_B B \bigotimes\limits_A V) \bigotimes\limits_A (B \bigotimes\limits_B B \bigotimes\limits_A V)^B \arrow[d, "\simeq"] \\
{}^BV^B \bigotimes\limits_B ({}^BV^B \bigotimes\limits_B {}^BV^B) \arrow[r, "\simeq"] & {}^B(V^B \bigotimes\limits_B {}^BV^B) \bigotimes\limits_B {}^BV^B
\end{tikzcd}$$

Llamando ϕ y ψ a los morfismos de la primera y segunda columna, respectivamente, y recordando que

$$(1 \otimes \mu)\mu(v) = (\mu \otimes 1)\mu(v),$$

se tiene que

$$\phi(b_2 \otimes (1 \otimes \mu)\mu(v) \otimes b_1) = \psi(b_2 \otimes (\mu \otimes 1)\mu(v) \otimes b_1),$$

y además, nuevamente de [1], sabemos que

$$\phi(b_2 \otimes (1 \otimes \mu)\mu(v) \otimes b_1) = (1 \otimes \mu_B)\mu_B(b_2 \otimes v \otimes b_1)$$

y

$$\psi(b_2 \otimes (\mu \otimes 1)\mu(v) \otimes b_1) = (\mu_B \otimes 1)\mu_B(b_2 \otimes v \otimes b_1)\square$$

A $\mathcal{A}^\theta$ ó $\mathcal{A}^B$ lo llamamos el **bocs inducido**. También tenemos otro morfismo de A-A bimódulos dado por

$$\theta_1 : V \simeq {}^AV^A \xrightarrow{\theta\otimes 1\otimes\theta} {}^BV^B$$

tal que para $v \in V(X,Y)$, $\theta_1(v) = 1_{\theta Y} \otimes v \otimes 1_{\theta X}$

PROPOSICION 2.6 *Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un bocs, B una categoría y $\theta : A \longrightarrow B$ un funtor. Entonces*

(1) $\theta = (\theta, \theta_1) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}^B$ *es un morfismo de bocses, y*

(2) $\theta^* : R(\mathcal{A}^B) \longrightarrow R(\mathcal{A})$ *es fiel y pleno.*

DEMOSTRACION. Para mostrar (1) es necesario verificar la conmutatividad de los diagramas:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\theta_1"] \arrow[d, "\epsilon"'] & {}^BV^B \arrow[d, "\epsilon_B"] \\ A \arrow[r, "\theta"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\theta_1"] \arrow[d, "\mu"'] & & {}^BV^B \arrow[dr, "\mu_B"] & \\ V \bigotimes_A V \arrow[r, "\theta_1 \otimes \theta_1"'] & {}^BV^B \bigotimes_A {}^BV^B \arrow[rr, "\pi"] & & {}^BV^B \bigotimes_B {}^BV^B \end{tikzcd}$$

si $v \in V(X, Y)$ entonces

$$\varepsilon_B\theta_1(v) = \varepsilon_B(1_{\theta(Y)} \otimes v \otimes 1_{\theta(X)}) = 1_{\theta(Y)}\theta\varepsilon(v)1_{\theta(X)} = \theta\varepsilon(v)$$

y

$$\begin{aligned} \pi(\theta_1 \otimes \theta_1)\mu(v) &= \pi(\theta_1 \otimes \theta_1)(\sum_i w_i \otimes_{X_i} u_i) = \pi(\sum_i \theta_1(w_i) \otimes_{X_i} \theta_1(u_i)) \\ &= \pi[\sum_i (1_{\theta(Y)} \otimes w_i \otimes 1_{\theta(X_i)}) \otimes_{X_i} (1_{\theta(X_i)} \otimes u_i \otimes 1_{\theta(X)})] \\ &= \sum_i (1_{\theta(Y)} \otimes w_i \otimes 1_{\theta(X_i)}) \otimes_{\theta(X_i)} (1_{\theta(X_i)} \otimes u_i \otimes 1_{\theta(X)}) \\ &= \mu_B(1_{\theta(Y)} \otimes v \otimes 1_{\theta(X)}) = \mu_B\theta_1(v). \end{aligned}$$

Para mostrar (2), sea $\phi : M \longrightarrow N$ un morfismo en $R(\mathcal{A}^B)$, así $\phi : {}^BV^B \bigotimes_B M \longrightarrow N$, entonces

$$\theta^*(\phi) : V \bigotimes_A {}_\theta M \xrightarrow{\theta_1 \otimes 1} {}_\theta{}^BV^B{}_\theta \bigotimes_A {}_\theta M \xrightarrow{\pi} {}_\theta{}^BV^B \bigotimes_B M \xrightarrow{\phi} {}_\theta N,$$

así que $\theta^*(\phi) = \phi\pi(\theta_1 \otimes 1)$. Sea $\psi : {}_\theta M \longrightarrow {}_\theta N$ un morfismo en $R(\mathcal{A})$, luego $\psi : V \bigotimes_A {}_\theta M \longrightarrow {}_\theta N$. Definamos

$$\bar{\theta}(\psi) : {}^BV^B \bigotimes_B M \xrightarrow{\sim} {}^BV \bigotimes_A {}_\theta M \xrightarrow{1_B \otimes \psi} {}^B({}_\theta N) \xrightarrow{\sim} B \bigotimes_B N \xrightarrow{\sim} N$$

es decir
$$\bar{\theta}(\psi) = \sigma_N \pi(1_B \otimes \psi)(1_{BV} \otimes \sigma_M)$$
donde $\sigma_M : B \bigotimes M \xrightarrow{\sim} M$ tal que $\sigma_M(f \otimes m) = fm$.

Nótese que

$$\begin{aligned}
\bar{\theta}\theta^*(\phi)[(b_2 \otimes v \otimes b_1) \otimes m] &= \sigma_N \pi(1_B \otimes \theta^*(\phi))(1_{BV} \otimes \sigma_M)[(b_2 \otimes v \otimes b_1) \otimes m] \\
&= \sigma_N \pi(1_B \otimes \theta^*(\phi))((b_2 \otimes v) \otimes b_1 m) \\
&= \sigma_N \pi[b_2 \otimes (\theta^*(\phi)(v \otimes b_1 m))] \\
&= \sigma_N(b_2 \otimes \phi[(1 \otimes v \otimes 1) \otimes b_1 m]) \\
&= b_2 \phi[(1 \otimes v \otimes 1) \otimes b_1 m] = \phi[(b_2 \otimes v \otimes b_1) \otimes m],
\end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}
\theta^* \bar{\theta}(\psi)(v \otimes m) &= \bar{\theta}(\psi)\pi(\theta_1 \otimes 1)(v \otimes m) = \bar{\theta}(\psi)[(1 \otimes v \otimes 1) \otimes m] \\
&= \sigma_N \pi(1_B \otimes \psi)(1_{BV} \otimes \sigma_M)[(1 \otimes v \otimes 1) \otimes m] \\
&= \sigma_N \pi(1_B \otimes \psi)[(1 \otimes v) \otimes m] = \sigma_N(1 \otimes \psi(v \otimes m)) \\
&= \psi(v \otimes m).
\end{aligned}$$

Esto muestra que

$$\bar{\theta}\theta^* = 1_{Hom_{R(A^B)}(M,N)} \qquad \text{y} \qquad \theta^* \bar{\theta} = 1_{Hom_{R(A)}({}_\theta M, {}_\theta N)},$$

y por consiguiente que θ^* es fiel y pleno. □

DEFINICION 2.7 *Sean $\mathcal{A} = (A, V)$ un bocs y A' una subcategoría con los mismos objetos que A. Un morfismo de A'-A' bimódulos $\omega : A' \longrightarrow {}_{A'}V_{A'}$ es un* **group-like,** *de $\mathcal{A}$ relativo a A' si el par $(\imath, \omega) : (A', A') \longrightarrow \mathcal{A}$ es un morfismo de bocses; así, conmutan los diagramas*

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "1"'] & {}_{A'}V_{A'} \arrow[d, "\epsilon"] \\
A' \arrow[r, "\imath"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "\omega"] \arrow[dd, "\mu_{A'}"'] & {}_{A'}V_{A'} \arrow[dr, "\mu"] & \\
 & & V \bigotimes_A V \\
A' \bigotimes_{A'} A' \arrow[r, "\omega \otimes \omega"'] & V \bigotimes_{A'} V \arrow[ur, "\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

Si además, $(\imath, \omega)^* : R(\mathcal{A}) \longrightarrow R(A')$ refleja isomorfismos, diremos que ω es un **reflector.**

OBSERVACION 2.8 *(1) Si $\mathcal{A}$ tiene un group like $\omega : A' \longrightarrow {}_{A'}V_{A'}$, entonces $\varepsilon\omega = \imath$, así ω es monomorfismo y ε resulta epimorfismo, pues si $f \in A(X,Y)$ entonces $f = f1_X = f\varepsilon\omega(1_X) = \varepsilon[f\omega(1_X)]$.*

(2) Si $\omega : A' \longrightarrow {}_{A'}V_{A'}$ es un group-like, entonces para cada objeto X de A, $\mu(\omega(1_X)) = \omega(1_X) \otimes \omega(1_X)$, y $\varepsilon\omega(1_X) = 1_X$. Recíprocamente, si $\omega : A' \longrightarrow_{A'} V_{A'}$ es un morfismo de $A' - A'$ bimódulos y $\mu(\omega(1_X)) = \omega(1_X) \otimes \omega(1_X)$ y $\varepsilon\omega(1_X) = 1_X$, entonces ω es un group-like. En efecto, si $f \in A'(X,Y)$, tenemos que

$$f = f1_X = f\varepsilon\omega(1_X) = \varepsilon\omega(f1_X) = \varepsilon\omega(f)$$

y esto muestra que $\varepsilon\omega = \imath 1_{A'}$. Pero además

$$\begin{aligned}\mu(\omega(f)) &= \mu(f\omega(1_X)) = f\mu\omega(1_X)\\ &= f(\omega(1_X) \otimes \omega(1_X)) = [f\omega(1_X)] \otimes \omega(1_X)\\ &= \omega(f) \otimes \omega(1_X) = \pi(\omega \otimes \omega)\mu_{A'}(f)\end{aligned}$$

por lo que tenemos $\mu\omega = \pi(\omega \otimes \omega)\mu_{A'}$.

DEFINICION 2.9 *Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un bocs con group-like ω. La* **diferencial** *de ω es el par $\delta = (\delta_1, \delta_2)$ de morfismos de $A' - A'$ bimódulos*

$$\delta_1 : {}_{A'}A_{A'} \longrightarrow {}_{A'}V_{A'} \qquad y \qquad \delta_2 : {}_{A'}\overline{V}_{A'} \longrightarrow {}_{A'}V \bigotimes_A V_{A'},$$

donde $\overline{V}$ es el A-A subbimódulo de V determinado por el núcleo de la counidad $\varepsilon : V \longrightarrow A$, y definidos por

$$\begin{aligned}\delta_1(a) &= \omega(1_Y)a - a\omega(1_X), \qquad si\ a \in A(X,Y), \qquad y\\ \delta_2(v) &= \mu(v) - v \otimes w(1_X) - \omega(1_Y) \otimes v, \qquad si\ v \in \overline{V}(X,Y).\end{aligned}$$

OBSERVACION 2.10 *Afirmamos que $\delta_1(a) \in \overline{V}$, y que $\delta_2(v)$ es un elemento en $\overline{V} \bigotimes_A \overline{V}$.*

En efecto, la primera afirmación es clara. Para la segunda consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \overline{V} \longrightarrow V \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

Tenemos los morfismos $\omega_L : A \longrightarrow V$ y $\omega_R : A \longrightarrow V$, tales que $\omega_L(f) = f\omega(1_X)$ y $\omega_R(f) = \omega(1_Y)f$, $f \in A(X,Y)$. ω_L es un morfismo de A-A' bimódulos y ω_R lo es de

A'-A bimódulos. Claramente ambos son inversos derechos de ε, y en consecuencia la sucesión anterior se escinde, de aquí que

$$V_{A'} \simeq \overline{V}_{A'} \bigoplus A_{A'} \qquad \text{y} \qquad {}_{A'}V \simeq {}_{A'}\overline{V} \bigoplus {}_{A'}A.$$

Y además

$${}_{A'}V \bigotimes_A V_{A'} \simeq {}_{A'}\overline{V} \bigotimes_A \overline{V}_{A'} \bigoplus {}_{A'}\overline{V} \bigotimes_A A_{A'} \bigoplus {}_{A'}A \bigotimes_A \overline{V}_{A'} \bigoplus {}_{A'}A \bigotimes_A A_{A'}.$$

Por lo tanto el A'-A' subbimódulo de ${}_{A'}V \otimes_A V_{A'}$ generado por los elementos de la forma $v_2 \otimes v_1$, con $v_1, v_2 \in \overline{V}$, es isomorfo a ${}_{A'}\overline{V} \otimes_A \overline{V}_{A'}$. Si $v \in \overline{V}(X, Y)$, entonces

$$\delta_2(v) = \mu(v) - v \otimes \omega(1_X) - \omega(1_Y) \otimes v = \sum_i y_i \otimes x_i$$

como

$$\begin{aligned}
(\varepsilon \otimes 1)\delta_2(v) &= (\varepsilon \otimes 1)\mu(v) - \varepsilon(v) \otimes \omega(1_X) - \varepsilon\omega(1_Y) \otimes v \\
&= 1_Y \otimes v - 0 \otimes \omega(1_X) - 1_Y \otimes v = 0
\end{aligned}$$

y análogamente $(1 \otimes \varepsilon)\delta_2(v) = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
0 &= (1 \otimes \varepsilon)\delta_2(v) = \sum_i y_i \otimes \varepsilon(x_i) \in V \bigotimes_A A \simeq V, \\
0 &= (\varepsilon \otimes 1)\delta_2(v) = \sum_i \varepsilon(y_i) \otimes x_i \in A \bigotimes_A V \simeq V; \quad \text{y} \\
0 &= (\varepsilon \otimes 1)(1 \otimes \varepsilon)\delta_2(v) = \sum_i \varepsilon(y_i) \otimes \varepsilon(x_i) \in A \bigotimes_A A \simeq A,
\end{aligned}$$

de donde

$$\sum_i y_i\varepsilon(x_i) = 0, \quad \sum_i \varepsilon(y_i)x_i = 0, \quad \text{y} \quad \sum_i \varepsilon(y_i)\varepsilon(x_i) = 0.$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned}
\delta_2(v) = \sum_i y_i \otimes x_i = \sum_i y_i \otimes x_i - \\
\sum_i y_i\varepsilon(x_i) \otimes \omega(1_X) - \sum_i \omega(1_Y) \otimes \varepsilon(y_i)x_i + \sum_i \omega(1_Y)\varepsilon(y_i) \otimes \varepsilon(x_i)\omega(1_X) \\
= \sum_i y_i \otimes x_i - y_i \otimes \varepsilon(x_i)\omega(1_X) - \omega(1_Y)\varepsilon(y_i) \otimes x_i + \omega(1_Y)\varepsilon(y_i) \otimes \varepsilon(x_i)\omega(1_X)
\end{aligned}$$

$$= \sum_i y_i \otimes [x_i - \varepsilon(x_i)\omega(1_X)] - \omega(1_Y)\varepsilon(y_i) \otimes [x_i - \varepsilon(x_i)\omega(1_X)]$$

$$= \sum_i [y_i - \omega(1_Y)\varepsilon(y_i)] \otimes [x_i - \varepsilon(x_i)\omega(1_X)] \in \overline{V} \bigotimes_A \overline{V}.$$

En adelante omitiremos los subíndices de δ_1 y δ_2, y ambos morfismos serán denotados por δ.

En seguida veremos de que manera la diferencial δ permite describir los morfismos en $R(\mathcal{A})$ para un bocs $\mathcal{A} = (A, V)$ con group-like ω y en el que $\overline{V}$ es un A-A bimódulo libre finitamente generado por $v_1, \ldots, v_r$, $v_i \in \overline{V}(X_i, Y_i)$. Esta descripción quedará determinada por las siguientes dos fórmulas.

Si M y N son dos objetos de $R(\mathcal{A})$ y $\phi : M \longrightarrow N$ es un morfismos en $R(\mathcal{A})$, entonces para toda $a \in A(X, Y)$ y $m \in M(X)$ se tiene que

$$\phi_Y(\delta(a) \otimes_X m) = \phi_Y[\omega(1_Y) \otimes_Y M(a)(m)] - N(a)\phi_X[\omega(1_X) \otimes m]. \qquad [3]$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \phi_Y(\delta(a) \otimes_X m) &= \phi_Y([\omega(1_Y)a - a\omega(1_X)] \otimes_X m) \\ &= \phi_Y[\omega(1_Y)a \otimes_X m - a\omega(1_X) \otimes_X m] \\ &= \phi_Y[\omega(1_Y) \otimes_Y M(a)(m)] - \phi_Y[a\omega(1_X) \otimes_X m] \\ &= \phi_Y[\omega(1_Y) \otimes_X M(a)(m)] - N(a)\phi_X[\omega(1_X) \otimes_X m]. \end{aligned}$$

Por otro lado, si $v \in V(X, Y)$, entonces $v = [v - \omega_R(\varepsilon(v))] + \omega_R(\varepsilon(v))$, y nótese que $v - \omega_R(\varepsilon(v)) \in \overline{V}$, luego

$$v - \omega_R(\varepsilon(v)) = \sum_{i,j} a'_{ij} v_i a_{ij},$$

para algunos $a_{ij} \in A(X, X_i)$ y $a'_{ij} \in A(Y_i, Y)$. Tomando $m \in M(X)$ tenemos:

$$\phi_Y(v \otimes_X m) = \sum_{i,j} N(a'_{ij})\phi_{Y_i}[v_i \otimes_{X_i} M(a_{ij})(m)] + \phi_Y[\omega(1_Y) \otimes_Y M(\varepsilon(v))(m)] \quad [4]$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \phi_Y(v \otimes_X m) &= \phi_Y[([v - \omega_R(\varepsilon(v))] + \omega_R(\varepsilon(v))) \otimes_X m] \\ &= \phi_Y([v - \omega_R(\varepsilon(v))] \otimes_X m) + \phi_Y[\omega_R(\varepsilon(v)) \otimes_X m] \\ &= \phi_Y(\sum_{i,j} a'_{ij} v_i a_{ij} \otimes_X m) + \phi_Y[\omega(1_Y)\varepsilon(v) \otimes_X m] \\ &= \sum_{i,j} \phi_Y[a'_{ij} v_i \otimes_{X_i} M(a_{ij})(m)] + \phi_Y[\omega(1_Y) \otimes_Y M(\varepsilon(v))(m)] \\ &= \sum_{i,j} N(a_{ij})\phi_{Y_i}[v_i \otimes_{X_i} M(a_{ij})(m)] + \phi_Y[\omega(1_Y) \otimes_Y M(\varepsilon(v))(m)]. \end{aligned}$$

La fórmula [3] sugiere definir, para cada objeto X de A una función

$$\phi_X^0 : M(X) \longrightarrow N(X)$$

tal que para $m \in M(X)$ se tiene:

$$\phi_X^0(m) = \phi_X(\omega(1_X) \otimes_X m). \qquad [5]$$

Claramente ϕ_X^0 resulta una k-transformación lineal.

Consideremos la familia de transformaciones lineales

$$\phi^0 = \left\{ \phi_X^0 \mid X \in Ob(A) \quad \text{y} \quad \phi_X^0 \in \mathrm{Hom}_k(M(X), N(X)) \right\}. \qquad [6]$$

A su vez, [4] sugiere para $v \in V(X,Y)$, también podemos definir:

$$\phi_v : M(X) \longrightarrow N(Y),$$

una transformación lineal de tal manera que para $m \in M(X)$ se tiene

$$\phi_v(m) = \phi_Y(v \otimes_X m). \qquad [7]$$

Si además $v \in \overline{V}$ y $v = \sum_{i,j} a'_{ij} v_i a_{ij}$, entonces, por [4] se sigue que:

$$\phi_v = \sum_{ij} N(a'_{ij}) \phi_{v_i} M(a_{ij}). \qquad [8]$$

Consideremos la familia de transformaciones lineales

$$\phi^1 = \{ \phi_{v_i} \mid i = 1, \ldots, r, \quad \text{y} \quad \phi_{v_i} \in \mathrm{Hom}_k(M(X_i), N(Y_i)) \}. \qquad [9]$$

Usando la familia [6] y [7], le ecuación [3] se convierte en

$$\phi_{\delta(a)} = \phi_Y^0 M(a) - N(a) \phi_X^0. \qquad [10]$$

Como $\delta(a) \in \overline{V}(X,Y)$, escribiendo $\delta(a) = \sum_{i,j} a'_{ij} v_i a_{ij}$, por [8], la ecuación anterior se convierte en:

$$\phi_Y^0 M(a) - N(a) \phi_X^0 = \sum_{i,j} N(a'_{ij}) \phi_{v_i} M(a_{ij}), \qquad [11]$$

para toda $a \in A(X,Y)$.

Nuestro objetivo será mostrar que las familias [6] y [9] junto con la condición [11] determinan de manera única los elementos del conjunto $\mathrm{Hom}_{R(\mathcal{A})}(M, N)$. Denotamos con $\Xi(M, N)$ el conjunto de parejas (ϕ^0, ϕ^1) tales que

$$\phi^0 \in \times_{X \in Ob(A)} \mathrm{Hom}_k(M(X), N(X)),$$

y

$$\phi^1 \in \times_{i=1}^{r} \mathrm{Hom}_k(M(X_i), N(Y_i)),$$

y que satisfacen [11].

PROPOSICION 2.11 *Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un boes con group-like ω relativo a A', diferencial δ y tal que $\overline{V}$ es un A-A bimódulo libre finitamente generado por $v_1, \ldots, v_r$, $v_i \in \overline{V}(X_i, Y_i)$. Para dos objetos cualesquiera M y N en $R(\mathcal{A})$, entonces la aplicación*

$$\Omega : Hom_{R(\mathcal{A})}(M, N) \longrightarrow \Xi(M, N),$$

tal que $\Omega(\phi) = (\phi^0, \phi^1)$ es una biyección.

<u>DEMOSTRACION</u>. Debemos construir una inversa para Ω:

$$\Psi : \Xi(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R(\mathcal{A})}(M, N).$$

Para $(\varphi^0, \varphi^1) \in \Xi(M, N)$ deseamos contruir una transformación natural

$$\varphi : V \bigotimes_A M :\longrightarrow N.$$

Así para cada objeto Y en A tenemos que definir

$$\varphi_Y : V(-, Y) \bigotimes_A M \longrightarrow N(Y).$$

Con el objeto Y fijo, definimos

$$\nu_X : V(X, Y) \times M(X) \longrightarrow N(Y)$$

tal que

$$\nu_X(v, m) = \sum_{i,j} N(a'_{ij}) \varphi_{v_i} M(a_{ij})(m) + \varphi^0_Y(M(\varepsilon(v))(m)),$$

donde $v - \omega_R(\varepsilon(v)) = \sum_{i,j} a'_{ij} v_i a_{ij}$. Debemos probar que

$$\{\nu_X : V(X, Y) \times M(X) \longrightarrow N(Y)\}_{X \in Ob(A)}$$

es A-balanceada, es decir que:

i) ν_X es bilineal para cada objeto X. En efecto, es claramente lineal en la primera coordenada. Mientras que en la segunda, observemos que si $v,\ u \in V(X,Y)$ tales que

$$v - \omega_R(\varepsilon(v)) = \sum_{i,j} a'_{ij} v_i a_{ij}, \qquad \text{y} \qquad u - \omega_R(\varepsilon(u)) = \sum_{i,l} b'_{il} v_i b_{il}$$

y $\lambda \in k$ entonces

$$\begin{aligned}
(\lambda v + u) - \omega_R[\varepsilon(\lambda v + u)] &= (\lambda v + u) - [\lambda \omega_R(\varepsilon(v)) + \omega_R(\varepsilon(v))] \\
&= \lambda[v - \omega_R(\varepsilon(v))] + [u - \omega_R(\varepsilon(v))] \\
&= \sum_{i,j} \lambda a'_{ij} v_i a_{ij} + \sum_{i,l} b'_{il} v_i b_{il}.
\end{aligned}$$

De aquí que:

$$\begin{aligned}
\nu_X(\lambda v + u, m) &= \sum_{i,j} N(\lambda a'_{ij} \varphi_{v_i} M(a_{ij} + \sum_{il} N(b'_{il} \varphi_{v_i} M(b_{il} + \\
&\qquad + \varphi^0_Y[M(\varepsilon(\lambda v + u))(m)] \\
&= \lambda \sum_{i,j} N(a'_{ij}) \varphi_{v_i} M(a_{ij})(m) + \sum_{i,l} N(b'_{il}) \varphi_{v_i} M(b_{il})(m) + \\
&\qquad + \varphi^0_Y[[\lambda M(\varepsilon(v)) + M(\varepsilon(u))](m)] \\
&= \lambda \sum_{i,j} N(a'_{ij}) \varphi_{v_i} M(a_{ij})(m) + \sum_{i,l} N(b'_{il}) \varphi_{v_i} M(b_{il})(m) + \\
&\qquad + \lambda \varphi^0_Y[M(\varepsilon(v))(m)] + \varphi^0_Y[M(\varepsilon(u))(m)] \\
&= \lambda \nu_X(v, m) + \nu_X(u, m).
\end{aligned}$$

ii) Si $f : X \longrightarrow Z$ en A, entonces conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
V(Z,Y) \times M(X) \arrow[r, "V(f,Y) \times 1"] \arrow[d, "1 \times M(f)"'] & V(X,Y) \times M(X) \arrow[d, "\nu_X"] \\
V(Z,Y) \times M(Z) \arrow[r, "\nu_Z"'] & N(Y),
\end{tikzcd}$$

en efecto, primero observemos que para $v \in V(Z,Y)$:

$$\begin{aligned}
vf - \omega_R(\varepsilon(vf)) &= vf - \omega_R(\varepsilon(v))f = [v - \omega_R(\varepsilon(v))]f \\
&= \sum_{i,j} a'_{ij} v_i a_{ij} f.
\end{aligned}$$

De aquí que, para $m \in M(X)$:

$$
\begin{aligned}
\nu_X[V(f,Y)\times 1](v,m) =&\nu_X(vf,m)\\
&=\sum_{i,j} N(a'_{ij})\varphi_{v_i}M(a_{ij}f)(m)+\phi^0_Y(M(\varepsilon(vf))(m))\\
&=\sum_{i,j} N(a'_{ij})\varphi_{v_i}M(a_{ij})M(f)(m)+\phi^0_Y(M(\varepsilon(v))M(f)(m))\\
&=\sum_{i,j}[N(a'_{ij})\varphi_{v_i}M(a_{ij})][M(f)(m)]+\varphi^0_Y(M(\varepsilon(v))[M(f)(m)])\\
&=\nu_Z(v,M(f)(m))\\
&=\nu_Z[1\times M(f)](v,m).
\end{aligned}
$$

Luego. 1.8 asegura la existencia φ_Y tal que

$$\varphi_Y(v\otimes_X m)=\sum_{i,j} N(a'_{ij})\varphi_{v_i}M(a_{ij})(m)+\varphi^0_Y(M(\varepsilon(v))(m)),$$

donde $v\in V(X,Y)$, $m\in M(X)$ y $v-\omega_R(\varepsilon(v))=\sum_{i,j} a'_{ij}v_ia_{ij}$.

Podemos definir

$$\Psi(\varphi^0,\varphi^1)=\varphi=(\varphi_Y)_{Y\in Ob(A)}$$

si logramos mostrar que $\varphi\in\mathrm{Hom}_{R(A)}(M,N)$, es decir que para $f:Y\longrightarrow Z$ en A, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
V(-,Y)\bigotimes_A M \arrow[r, "\varphi_Y"] \arrow[d, "V(-,f)\bigotimes_A 1_M"'] & N(Y) \arrow[d, "N(f)"] \\
V(-,Z)\bigotimes_A M \arrow[r, "\varphi_Z"'] & N(Z).
\end{tikzcd}
$$

Antes notemos que:

$$fv-\omega_R(\varepsilon(fv))=\sum_{i,j} fa'_{ij}v_ia_{ij}-\sum_{i,l} b'_{il}v_ib_{il}\varepsilon(v),$$

cuando $\delta(f) = \omega(1_Z)f - f\omega(1_Y) = \sum_{i,l} b'_{il}v_ib_{il}$. En efecto:

$$\begin{aligned}
fv - \omega_R(\varepsilon(fv)) &= fv - \omega(1_Z)\varepsilon(fv)\\
&= fv - [\omega(1_Z)f]\varepsilon(v)\\
&= fv - [\delta(f) + f\omega(1_Y)]\varepsilon(v)\\
&= fv - f\omega(1_Y)\varepsilon(v) - \delta(f)\varepsilon(v)\\
&= f[v - \omega_R(\varepsilon(v))] - \delta(f)\varepsilon(v)\\
&= \sum_{i,j} fa'_{ij}v_ia_{ij} - \sum_{i,l} b'_{il}v_ib_{il}\varepsilon(v).
\end{aligned}$$

Ahora veamos la conmutatividad del diagrama anterior.

$$\begin{aligned}
&\varphi_Z[V(-,f)\bigotimes_A 1_M](v \otimes_X m) = \varphi_Z(fv \otimes_X m)\\
= \;& \sum_{i,j} N(fa'_{ij})\varphi_{v_i}M(a_{ij})(m) - \sum_{i,l} N(b'_{il})\varphi_{v_i}M(b_{il}\varepsilon(v))(m) +\\
&\qquad \varphi^0_Z[M(\varepsilon(fv))(m)]\\
= \;& \sum_{i,j} N(fa'_{ij})\varphi_{v_i}M(a_{ij})(m) - \sum_{i,l} N(b'_{il})\varphi_{v_i}M(b_{il})M(\varepsilon(v))(m) +\\
&\qquad \varphi^0_Z[M(f)M(\varepsilon(v))(m)]\\
= \;& \sum_{i,j} N(fa'_{ij})\varphi_{v_i}M(a_{ij})(m) - \sum_{i,l} N(b'_{il})\varphi_{v_i}M(b_{il})[M(\varepsilon(v))(m)] +\\
&\qquad \varphi^0_Z M(f)[M(\varepsilon(v))(m)]\\
= \;& \sum_{i,j} N(f)N(a'_{ij})\varphi_{v_i}M(a_{ij})(m) + N(f)\varphi^0_Y[M(\varepsilon(v))(m)] \qquad \text{por [11]}\\
= \;& N(f)\left[\sum_{i,j} N(a'_{ij})\varphi_{v_i}M(a_{ij})(m) + \varphi^0_Y[M(\varepsilon(v))(m)]\right]\\
= \;& N(f)\varphi_Y(v \otimes_X m).
\end{aligned}$$

Sólo resta mostrar que Ω y Ψ son inversas.

Veamos que $\Psi\Omega = 1_{\mathrm{Hom}_{R(\mathcal{A})}(M,N)}$. Sea $\phi : M \longrightarrow N$ en $R(\mathcal{A})$, probaremos que para todo objeto Y en A se tiene:

$$[(\Psi\Omega)(\phi)]_Y = \phi_Y.$$

En efecto:

$$[(\Psi\Omega)(\phi)]_Y(v \otimes_X m) \;=\; [\Psi(\Omega(\phi))]_Y(v \otimes_X m)$$

$$\begin{aligned} &= [\Psi(\phi^0,\phi^1)]_Y(v\otimes_X m) \\ &= \sum_{i,j} N(a'_{ij})\phi_{v_i}M(a_{ij})(m) + \phi^0_Y[M(\varepsilon(v))(m)] \\ &= \phi_Y(v\otimes_X m), \end{aligned}$$

como se sigue de [4].

También se tiene que $\Omega\Psi = 1_{\Xi(M,N)}$. Sea $(\varphi^0,\varphi^1)\in\Xi(M,N)$, probaremos que

$$([\Psi(\varphi^0,\varphi^1)]^0,[\Psi(\varphi^0,\varphi^1)]^1) = \Omega\Psi(\varphi^0,\varphi^1) = (\varphi^0,\varphi^1),$$

es decir que para cada objeto X en A y para $i=1,\ldots,r$, se tiene

$$[\Psi(\varphi^0,\varphi^1)]^0_X = \varphi^0_X, \quad \text{y} \quad [\Psi(\varphi^0,\varphi^1)]_{v_i} = \varphi_{v_i}.$$

En efecto, si $m\in M(X)$, entonces

$$\begin{aligned} [\Psi(\varphi^0,\varphi^1)]^0_X(m) &= [\Psi(\varphi^0,\varphi^1)]_X(\omega(1_X)\otimes_X m) \\ &= \varphi^0_X[M(\varepsilon(\omega(1_X)))(m)] \\ &= \varphi^0_X(M(1_X)(m)) = \varphi^0_X(m), \end{aligned}$$

pues $\omega(1_X)-\omega_R(\varepsilon(\omega(1_X)))=0$.

Mientras que si $m\in M(X_i)$, entonces

$$[\Psi(\varphi^0,\varphi^1)]_{v_i}(m) = [\Psi(\varphi^0,\varphi^1)]_{Y_i}(v_i\otimes m) = \varphi_{v_i}(m),$$

pues $\varepsilon(v_i)=0$ y $v_i-\varepsilon(v_i)=v_i$. □

Evidentemente de aquí en adelante identificaremos cada morfismo ϕ con el par (ϕ^0,ϕ^1).

PROPOSICION 2.12 *Sea $\mathcal{A}=(A,V)$ un bocs con group-like ω relativo a A', y supongamos que $\overline{V}$ es un A-A bimódulo libre finitamente generado por $v_1,\ldots,v_r$. Para $\phi: M\longrightarrow N$ en $R(\mathcal{A})$ se tiene:*

(1) ϕ^0 es un morfismo en $R(A')$;

(2) Si A tiene la propiedad de Krull-Schmidt, entonces para cada $X\in ObA$, con $X=\bigoplus_i X_i$, X_i inescindible se cumple que

$$\phi^0_X = \sum_i N(e_i)\phi^0_{X_i}M(p_i),$$

donde $e_i: X_i\longrightarrow X$ y $p_i: X\longrightarrow X_i$ son las inclusiones y proyecciones naturales correspondientes.

(3) Si A es libremente generada sobre A' por $a_1,\ldots,a_n$ entonces: a_i satisface [11] para $i=1,\ldots,n$ si y sólo si todo $a\in A$ satisface [11].

<u>DEMOSTRACION</u>. Para probar (1) recuérdese que

$$(\iota,\omega)^*(\phi) : M \xrightarrow{\sim} A' \bigotimes_{A'} M \xrightarrow{\omega \otimes 1_M} V \bigotimes_{A'} M \xrightarrow{\pi} V \bigotimes_{A} M \xrightarrow{\phi} N,$$

así que para $X \in ObA$ y $m \in M(X)$:

$$[(i,\omega)^*\phi]_X(m) = \phi_X(\omega(1_X) \otimes_X m) = \phi^0_X(m).$$

(2) se muestra observando que $M(X) = \bigoplus_i M(X_i)$, de aquí que $1_{M(X)} = \sum_i M(e_i)M(p_i)$, por lo que:

$$\begin{aligned} \phi^0_X &= \phi^0_X 1_{M(X)} = \phi^0_X \sum_i M(e_i)M(p_i) \\ &= \sum_i \phi^0_X M(e_i)M(p_i) = \sum_i N(e_i)\phi^0_{X_i} M(p_i). \end{aligned}$$

Finalmente en el caso en que A es libremente generada sobre A' por $a_1, ..., a_n$, sólo es interesante mostrar que si los morfismos generadores satisfacen [11], entonces así lo hacen todos los morfismos en A. En efecto, como los morfismos en A, son sumas finitas de composiciones finitas de los morfismos $a_1, ..., a_n$ y de morfismos en A', si todos éstos satisfacen [11], es suficiente ver que: si a y b son morfismos en A y satisfacen [11], entonces también lo hacen $a+b$ y ab, para concluir que todo morfismo en A satisface [11]. Si $a, b \in A(X,Y)$ y como $\delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b)$ entonces, por [3] y [10] se tiene:

$$\begin{aligned} \phi_{\delta(a+b)} &= \phi_{\delta(a)+\delta(b)} = \phi_{\delta(a)} + \phi_{\delta(b)} \\ &= \phi^0_Y M(a) - N(a)\phi^0_X + \phi^0_Y M(b) - N(b)\phi^0_X \\ &= \phi^0_Y M(a+b) - N(a+b)\phi^0_X. \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos que

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b),$$

y si

$$\delta(a) = \sum_{i,j} a'_{ij} v_i a_{ij} \qquad \text{y} \qquad \delta(b) = \sum_{i,j} b'_{ij} v_i b_{ij},$$

entonces

$$\delta(ab) = \sum_{i,j} a'_{ij} v_i a_{ij} b + \sum_{i,j} a b'_{ij} v_i b_{ij}.$$

Por [11] se tiene que

$$\begin{aligned}
\phi_{\delta(ab)} &= \sum_{i,j} N(a'_{ij})\phi_{v_i}M(a_{ij}b) + \sum_{i,j} N(ab'_{ij})\phi_{v_i}M(b_{ij}) \\
&= \sum_{ij} N(a'_{ij})\phi_{v_i}M(a_{ij})M(b) + N(a)\sum_{ij} N(b'_{ij})\phi_{v_i}M(b_{ij}) \\
&= \phi_{\delta(a)}M(b) + N(a)\phi_{\delta(b)} \\
&= [\phi^0_Z M(a) - N(a)\phi^0_Y]M(b) + N(a)[\phi^0_Y M(b) - N(b)\phi^0_X] \\
&= \phi^0_Z M(ab) - N(ab)\phi^0_X . \square
\end{aligned}$$

OBSERVACION 2.13 *(1) Si $I_M : M \longrightarrow M$ es el morfismo identidad de M en $R(\mathcal{A})$ e $I_M = (I^0_M, I^1_M)$ entonces*

$$(I^0_M)_X = 1_{M(X)} \qquad e \qquad (I_M)_{v_i} = 0$$

(2) Si $\phi = (\phi^0, \phi^1) : M \longrightarrow N$ y $\psi = (\psi^0, \psi^1) : N \longrightarrow L$ son morfismos en $R(\mathcal{A})$, entonces

$$\psi\phi = ((\psi\phi)^0, (\psi\phi)^1) : M \longrightarrow L$$

es tal que

$$(\psi\phi)^0_X = \psi^0_X\phi^0_X$$

y

$$(\psi\phi)_{v_i} = \psi_{v_i}\phi^0_{X_i} + \psi^0_{Y_i}\phi_{v_i} + \sum_j \psi_{v'_{ij}}\phi_{v_{ij}}$$

donde $v_i \in \overline{V}(X_i, Y_i)$ y $\delta(v_i) = \sum_j v'_{ij} \otimes v_{ij}$.

(3) Para un morfismo $\phi : M \longrightarrow N$ en $R(\mathcal{A}), \phi = (\phi^0, \phi^1)$, si ϕ^0 es isomorfismo en $R(A')$ y $\phi^1 = 0$, entonces ϕ es isomorfismo.

<u>DEMOSTRACION.</u>"(1)". Recordemos que

$$I_M : V \bigotimes M \xrightarrow{\varepsilon \otimes 1_M} A \bigotimes M \xrightarrow{\sim} M,$$

así que para $X \in ObA$ y $m \in M(X)$:

$$(I_M)^0_X(m) = (I_M)_X(\omega(1_X) \otimes m) = \varepsilon\omega(1_X) \otimes m = 1_X \otimes m = m$$

y para $m \in M(X_i)$:

$$(I_M)_{v_i}(m) = (I_M)_{Y_i}(v_i \otimes m) = \varepsilon(v_i) \otimes m = 0 \otimes m = 0.$$

"(2)" Tenemos que

$$\psi\phi : V \bigotimes_A M \xrightarrow{\mu\otimes 1_M} V \bigotimes_A V \bigotimes_A M \xrightarrow{1_V\otimes\phi} V \bigotimes_A N \xrightarrow{\psi} L$$

así que para $X \in ObA$ y $m \in M(X)$:

$$\begin{aligned}
(\psi\phi)^0_X(m) &= (\psi\phi)_X(\omega(1_X)\otimes m) \\
&= \psi_X(1_V \otimes \phi_X)(\mu\otimes 1_M)(\omega(1_X)\otimes m) \\
&= \psi_X(1_V \otimes \phi_X)(\mu\omega(1_X)\otimes m) \\
&= \psi_X(1_V \otimes \phi_X)(\omega(1_X)\otimes\omega(1_X)\otimes m) \\
&= \psi_X[\omega(1_X)\otimes\phi_X(\omega(1_X)\otimes m)] \\
&= \psi_X(\omega(1_X)\otimes\phi^0_X(m)) = \psi^0_X\phi^0_X(m).
\end{aligned}$$

Por otro lado, sabemos que

$$\delta(v_i) = \mu(v_i) - v_i\otimes\omega(1_{X_i}) - \omega(1_{Y_i})\otimes v_i,$$

entonces, para $m \in M(X_i)$:

$$\begin{aligned}
(\psi\phi)_{v_i}(m) &= (\psi\phi)_{Y_i}(v_i\otimes m) \\
&= [\psi(1_V\otimes\phi)(\mu\otimes 1_M)]_{Y_i}(v_i\otimes m) = [\psi(1_V\otimes\phi)]_{Y_i}(\mu(v_i)\otimes m) \\
&= [\psi(1_V\otimes\phi)]_{Y_i}[(v_i\otimes\omega(1_{X_i}) + \omega(1_{Y_i})\otimes v_i + \delta(v_i))\otimes m] \\
&= \psi_{Y_i}[v_i\otimes\phi_{X_i}(\omega(1_{X_i})\otimes m)] + \psi_{Y_i}[\omega(1_{Y_i})\otimes\phi_{Y_i}(v_i\otimes m)] + \\
&\quad +[\psi(1_V\otimes\phi)]_{Y_i}(\delta(v_i)\otimes m).
\end{aligned}$$

Pero

$$\psi_{Y_i}[v_i\otimes\phi_{X_i}(\omega(1_{X_i})\otimes m)] = \psi_{Y_i}[v_i\otimes\phi^0_{X_i}(m)] = \psi_{v_i}\phi^0_{X_i}(m),$$

y

$$\psi_{Y_i}[\omega(1_{Y_i})\otimes\phi_{Y_i}(v_i\otimes m)] = \psi_{Y_i}[\omega(1_{Y_i})\otimes\phi_{v_i}(m)] = \psi^0_{Y_i}\phi_{v_i}(m).$$

Mientras que

$$\begin{aligned}
\psi(1_V\otimes\phi)_{Y_i}(\delta(v_i)\otimes m) &= \psi(1_V\otimes\phi)_{Y_i}(\sum_j v'_{ij}\otimes v_{ij}\otimes m) \\
&= \sum_j \psi(v'_{ij}\otimes\phi(v_{ij}\otimes m)) \\
&= \sum_j \psi(v'_{ij}\otimes\phi_{v_{ij}}(m)) = \sum_j \psi_{v'_{ij}}\phi_{v_{ij}}(m).
\end{aligned}$$

"(3)": Como $\phi_X^0 : M(X) \longrightarrow N(X)$ es un isomorfismo, podemos definir

$$\psi = (\psi^0, \psi^1) : N \longrightarrow M$$

tal que $\psi_X^0 = (\phi_X^0)^{-1}$ y $\psi_{v_i} = 0$, para $i = 1, 2, ..., r$. ψ es un morfismo en $R(\mathcal{A})$. En efecto, para $a \in A(X, Y)$, [11] se convierte en:

$$\phi_Y^0 M(a) - N(a)\phi_X^0 = 0$$

puesto que $\phi_{v_i} = 0$, implica que $\phi_{\delta(a)} = 0$. También se tiene que $\psi_{\delta(a)} = 0$ y además

$$0 = M(a)(\phi_X^0)^{-1} - (\phi_Y^0)^{-1}N(a) = M(a)\psi_X^0 - \psi_X^0 N(a),$$

es decir (ψ^0, ψ^1) satisfacen [11]. Por otro lado

$$\psi\phi = I_M \qquad \text{y} \qquad \phi\psi = I_N$$

ya que

$$(\psi\phi)_X^0 = \psi_X^0\phi_X^0 = (\phi_X^0)^{-1}\phi_X^0 = 1_{M(X)}$$

$$(\psi\phi)_{v_i} = \psi_{v_i}\phi_{X_i}^0 + \psi_{Y_i}^0\phi_{v_i} + \sum_j \psi_{v'_{ij}}\phi_{v_{ij}} = 0$$

pues $\psi_{v_i} = 0$ y $\phi_{v_i} = 0$ y $\phi_{v_{ij}} = 0$. Análogamente se tiene que $\phi\psi = I_N$.□

Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un bocs y supongamos que A tiene la propiedad de Krull-Schmidt. Para una representación M de $\mathcal{A}$ el, **vector dimensión de** M, $\underline{\dim}(M)$, está dado por un vector indexado por las clases de isomorfía de objetos inescindibles X en A con componentes

$$(\underline{\dim}(M))_X = \dim M(X),$$

y llamamos **dimensión total** de M, $\dim M$, a la suma de las componentes de $\underline{\dim}(M)$, en el caso que sea finita. De los lemas 1.16 y 1.24(3), se sigue inmediatamente el siguiente.

LEMA 2.14 *Sean A' mínima, A libremente generada sobre A' y M una representación de $\mathcal{A} = (A, V)$, entonces*

$$\underline{\dim}(M) = \underline{\dim}({}_{A'}M) \qquad y \qquad \dim M = \dim_{A'} M. \ \square$$

DEFINICION 2.15 *Sea A una categoría libremente generada sobre una subcategoría mínima A' por $a_1, ..., a_n$ con $a_i \in A(X_i, Y_i)$ y M una representación de $\mathcal{A} = (A, V)$, definimos la* **norma** *de M, $\| M \|$, como*

$$\| M \| = \sum_i \dim M(X_i) \dim M(Y_i) + \sum_X [\dim M(X)]^2$$

donde X corre sobre los objetos inescindibles de A', con $A'(X, X) \neq k$.

Por ahora queremos estudiar ciertos bocses con group-like que resulte reflector. En el resto de este capítulo consideraremos un bocs $\mathcal{A} = (A, V)$ con una colección

$$(A'; \omega; a_1, \ldots, a_n; v_1, \ldots, v_r)$$

tal que

1.- A' es mínima;

2.- A es libremente generada sobre A' por los elementos inescindibles $a_1, \ldots, a_n$;

3.- ω es un group-like con respecto a A';

4.- $\overline{V}$ es libremente generado como A-A bimódulo por elementos inescindibles $v_1, \ldots, v_r$,

Denotaremos por δ la diferencial correspondiente a ω.

Empecemos observando que los morfismos en $R(\mathcal{A})$ para esta clase de bocses pueden describirse con familias mas pequeñas de transformaciones lineales. En efecto de 1.17(3) y 2.12(2), se tiene la siguiente

PROPOSICION 2.16 *Sean $\mathcal{A} = (A, V)$ un bocs que satisface las cuatro condiciones anteriores, y $\phi = (\phi^0, \phi^1) : M \longrightarrow N$ un morfismo en $R(\mathcal{A})$, entonces ϕ^0 puede sustituirse por*

$$\phi^0 = \{ \phi^0_X \mid \phi^0_X \in Hom_k(M(X), N(X)) \ \ y \ \ X \in ines(A) \} . \square$$

DEFINICION 2.17 *(1) Para $i \geq 1$ escribimos A_i para denotar la subcategoría de A generada por A' y $a_1, \ldots, a_i$, y $A_0 = A'$ decimos que la diferencial δ es* **0-triangular** *si para cualquier $0 \leq i < n$, $\delta(a_{i+1})$ está contenido en el A_i-A_i subbimódulo de $\overline{V}$ generado por $v_1, \ldots, v_r$.*

(2) Decimos que la diferencial δ es **1-triangular izquierda**, *si existe un orden parcial en $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ tal que $\delta(v_i) \in \overline{V}^{(2)}_i \subseteq \overline{V} \bigotimes_A \overline{V}$, en donde $\overline{V}^{(2)}_i$ es el A-A subbimódulo de $\overline{V} \bigotimes_A \overline{V}$ generado por los elementos $\gamma_1 \otimes \gamma_2$ en donde para $\gamma_1 = \sum_{u,j} a'_{ju} v_j a_{ju}$ con a'_{ju} y $a_{ju} \in A$ se tiene $v_j < v_i$.*

Tenemos el siguiente resultado

LEMA 2.18 *Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un bocs con diferencial δ 0-triangular y 1-triangular izquierda. $\phi : M \longrightarrow N$ es un isomorfismo en $R(\mathcal{A})$ si y sólo si ϕ^0 es un isomorfismo en $R(A')$.*

Para probar 2.18 necesitamos algunas consideraciones. Estudiaremos las representaciones con vector dimensión fijo $\underline{m} = (m_X)_{X \in \mathrm{ind}\, A}$, de un bocs $\mathcal{A}$ con diferencial 0-triangular.

Sea M una representación de $\mathcal{A}$ con $\underline{\dim} M = \underline{m}$, y supongamos que $M(X) = k^{m_X}$ para cada objeto inescindible X de A. Para $a_i : X_i \longrightarrow Y_i$ tomamos por $M(a_i)$ la representación matricial asociada a las bases canónicas de $k^{m_{X_i}}$ y $k^{m_{Y_i}}$. ${}_{A'}M$ denota la restricción de M a A'.

Así las representaciones de $\mathcal{A}$ con vector dimensión $\underline{m}$, están descritas por

$$R(\underline{m}) = R_{\underline{m}}(A') \times \left[\times_{a_i} M_{m_{Y_i} \times m_{X_i}}(k)\right],$$

donde $R_{\underline{m}}(A')$ denota las representaciones de A' con vector dimensión $\underline{m}$.

Sea $\phi : M \longrightarrow N$ un morfismo en $R(\mathcal{A})$ tal que ϕ^0 es un isomorfismo, y así $\underline{\dim} M = \underline{\dim} N = \underline{m}$. Para cada objeto X de $\mathcal{A}$, por ϕ^0_X tomamos la representación matricial asociada a la base canónica de $k^{m_X} = M(X) = N(X)$, así $\phi^0_X \in \mathcal{GL}(m_X, k)$. Para $v_j \in \overline{V}(X_j, Y_j)$, por ϕ_{v_j} tomamos la representación matricial asociada a las bases canónicas de $k^{m_{X_j}} = M(X_j)$ y $k^{m_{Y_j}} = N(Y_j)$.

Denotando $\mathcal{G}(\underline{m}) = \times_X \mathcal{GL}(m_X, k)$, tenemos que los morfismos ϕ, con ϕ^0 iso, quedan descritos como los elementos de

$$\mathcal{H}(\underline{m}) = \mathcal{G}(\underline{m}) \times \times_{v_j} M_{m_{Y_j} \times m_{X_j}}(k)$$

que satisfacen [11].

Definimos una correspondencia

$$\theta : \mathcal{H}(\underline{m}) \times R(\underline{m}) \longrightarrow R(\underline{m}).$$

Sea $\phi \in \mathcal{H}(\underline{m})$ y $M = ({}_{A'}M, (M(a_i))) \in R(\underline{m})$ y pongamos

$$\theta(\phi, M) = ({}_{A'}N, (N(a_i)))$$

en donde ${}_{A'}N = {}_{A'}M$ y $N(a_i)$ está definida por inducción sobre i:

Para $a_1 : X_1 \longrightarrow Y_1$, entonces

$$\delta(a_1) = \sum_{i,j} a'_{ij} v_i a_{ij}, \qquad \text{con} \qquad a_{ij}, a'_{ij} \in A'$$

entonces tomamos

$$N(a_1) = \phi_{Y_1} M(a_1)\phi_{X_1}^{-1} - \sum_{i,j} {}_{A'}N(a'_{ij})\phi_{v_i} M(a_{ij})\phi_{X_1}^{-1}.$$

Supongamos definida $N(a_t)$ para $t \leq i$ y definimos $N(a_{i+1})$. Tenemos que $\delta(a_{i+1}) = \sum_{s,j} b'_{sj} v_j b_{sj}$ en donde $b'_{sj} \in A_i$, es decir, b'_{sj} es una combinación de composiciones en las que únicamente intervienen morfismos de A' y $a_1, \ldots, a_i$, así $N(b'_{sj})$ está definida, y por lo tanto podemos definir

$$\phi_{\delta(a_{i+1})} = \sum_{s,j} N(b'_{sj})\phi_{v_j} M(b_{sj})$$

y tomamos

$$N(a_{i+1}) = \phi_{Y_{i+1}} M(a_{i+1})\phi_{X_{i+1}}^{-1} - \phi_{\delta(a_{i+1})}\phi_{X_{i+1}}^{-1}.$$

Denotamos $\theta(\phi, M) = {}^{\phi}M$.

Nótese que si $\phi \in \mathcal{H}(\underline{m})$, entonces ϕ define un morfismo en $R(\mathcal{A})$ de M en ${}^{\phi}M$. Recíprocamente, si $\phi \in \mathcal{H}(\underline{m})$ es un morfismo de M en N, en $R(\mathcal{A})$ entonces $N = {}^{\phi}M$.

DEFINICION 2.19 *Sea T es un conjunto parcialmente ordenado. Para $t \in T$ decimos que t tiene* **altura** *h si es el máximo entero tal que si $t = t_1 > \ldots > t_h$, entonces t_h es es mínimo. Decimos que la* **altura** *de T es m si es la máxima de las alturas de todos los elementos de T.*

Sea $\phi : M \longrightarrow N$ tal que $\phi_X^0 = 1_{k^{m_X}}$ para todo objeto inescindibles X de A. Definiremos

$$\phi^{[u]} : M \longrightarrow M_{\phi}^{[u]}$$

para cierto $M_{\phi}^{[u]}$, de la siguiente manera:

Para $u = 1$, ponemos

$$\phi^{[1]} = \phi \qquad \text{y} \qquad M_{\phi}^{[1]} = N.$$

Para $u = 2$, definimos $\phi^{[2]}$ y $M_{\phi}^{[2]}$ como sigue: tomamos $\hat{\phi} \in \mathcal{H}(\underline{m})$ definido por

$$\hat{\phi}_X = 1_{k^{m_X}} \quad \text{para todo objeto inescindible } X \text{ de } A, \text{ y}$$

$$\hat{\phi}_{v_i} = -\phi_{v_i} \qquad \text{para cada generador} \quad v_i \in \overline{V}.$$

Entonces

$$M_\phi^{[2]} = {}^{\hat\phi}(M_\phi^{[1]}) \qquad \text{y} \qquad \phi^{[2]} = \hat\phi\phi : M \longrightarrow M_\phi^{[2]}$$

Si $\phi^{[u]} : M \longrightarrow M_\phi^{[u]}$ está definido, ponemos

$$M_\phi^{[u+1]} = {}^{\widehat{\phi^{[u]}}}(M_\phi^{[u]}) \quad \text{y} \quad \phi^{[u+1]} = \widehat{\phi^{[u]}}\phi^{[u]}$$

En lo que sigue suponemos que el bocs $\mathcal{A}$ también tiene diferencial 1-triangular izquierda.

LEMA 2.20 *Sea m la altura del conjunto parcialmente ordenado $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$, entonces $\phi^{[m]} : M \longrightarrow M_\phi^{[m]}$ es tal que*

$$\phi_{v_i}^{[m+1]} = 0 \qquad \textit{para} \qquad i = 1, ..., r.$$

<u>DEMOSTRACION</u>. Observemos que si v_i es mínima, entonces $\phi_{v_i}^{[2]} = 0$. En efecto $\phi^{[2]} = \hat\phi\phi$, y como $\delta(v_i) = 0$ pues v_i es mínima, $v_i \in \overline{V}(X_i, Y_i)$, tenemos, de 2.12,

$$\phi_{v_i}^{[2]} = (\hat\phi\phi)_{v_i} = \hat\phi_{v_i}\phi_{X_i} + \hat\phi_{Y_i}\phi_{v_i} = -\phi_{v_i} + \phi_{v_i} = 0.$$

Observemos ahora que si v_i tiene altura 2, $\phi_{v_i}^{[3]} = 0$. En efecto, si $\delta(v_i) = \sum_t \gamma_t' \otimes \gamma_t''$, entonces γ_t' está formado por elementos v_j menores que v_i, es decir todas las v_j son mínimas. Por lo que si

$$\gamma_t' = \sum_{j,u} a_{ju}' v_j a_{ju}$$

con $v_j < v_i, a_{ju}, a_{ju}' \in A$, entonces

$$\widehat{\phi^{[2]}}_{\gamma_t'} = -\sum_{j,u} M_\phi^{[3]}(a_{ju}')\phi_{v_j}^{[2]} M_\phi^{[2]}(a_{ju}) = 0$$

De aquí que

$$\begin{aligned}
(\phi^{[3]})_{v_i} &= (\widehat{\phi^{[2]}}\phi^{[2]})_{v_i} \\
&= \widehat{\phi^{[2]}}_{v_i}\phi_{X_i}^{[2]} + \widehat{\phi_{Y_i}^{[2]}}\phi_{v_i}^{[2]} + \sum_t \widehat{\phi^{[2]}}_{\gamma_t'}\phi_{\gamma_t''}^{[2]} \\
&= -\phi_{v_i}^{[2]} + \phi_{v_i}^{[2]} + 0 = 0.
\end{aligned}$$

Por inducción concluimos que $\phi_{v_i}^{[m+1]} = 0$ para todos los elementos de altura $\leq m$, pero estos son todos los elementos de $\{v_1, ..., v_r\}$, y se sigue el lema.□

COROLARIO 2.21 *Si $\phi : M \longrightarrow N$ en $R(\mathcal{A})$ es tal que $\phi_X = 1_{k^{m_X}}$ para todo objeto inescindible X de A, entonces ϕ es un isomorfismo.*

DEMOSTRACION. En 2.20 hemos probado que para tal ϕ existe $\phi^{[m+1]} : M \longrightarrow M_\phi^{[m+1]}$ con $\phi_{v_i}^{[m+1]} = 0$ para todo $v_i, i = 1, \ldots, r$. Así que por 2.14(2), $\phi^{[m+1]}$ es un isomorfismo. Luego existe $\phi_1 : M_\phi^{[m+1]} \longrightarrow M$ tal que $\phi_1\phi^{[m+1]} = I_M$. Pero $\phi^{[m+1]} = \widehat{\phi^{[m]}}\widehat{\phi^{[m-1]}}\cdots\widehat{\phi^{[2]}}\widehat{\phi}\phi$, así ϕ tiene un inverso izquierdo $\psi = \phi_1\widehat{\phi^{[m]}}\cdots\widehat{\phi^{[2]}}\widehat{\phi} : N \longrightarrow M$, con $\psi\phi = I_M$. Como $\psi_X = 1_{k^{m_X}}$ para todo objeto inescindible X de A, también ψ tiene un inverso izquierdo $\psi_1 : M \longrightarrow N$ y $\psi_1\psi = I_N$. De aquí que

$$\psi_1 = \psi_1\psi\phi = \phi$$

es decir ψ también es inverso derecho y consecuentemente ϕ es iso.□

Ahora estamos en posibilidad de dar la demostración de 2.18.

Sea $\phi : M \longrightarrow N$ un morfismo en $R(\mathcal{A})$ tal que ϕ^0 es un isomorfismo en $R(A')$, entonces $\phi_X \in \mathcal{GL}(m_X, k)$ para todo objeto X. Definimos $\phi_0 \in \mathcal{H}(\underline{m})$ tal que $\phi_{0X} = \phi_X^{-1}$ para $X \in inesA$ y $\phi_{0v_i} = \phi_{v_i}, i = 1, \ldots, r$. Tomamos $L = {}^{\phi_0}N$, y entonces $\phi_0\phi : M \longrightarrow L$ es tal que $(\phi_0\phi)_X = \phi_{0X}\phi_X = 1_{k^{m_X}}$ para todo $X \in inesA$. Luego, por 2.21, $\phi_0\phi$ es un isomorfismo en $R(\mathcal{A})$, y existe $\psi : L \longrightarrow M$ tal que $\psi\phi_0\phi = I_M$. Tomando $\psi_1 = \psi\phi_0$ se tiene que ψ_1 es un inverso izquierdo para ϕ. Pero $\psi_1 : N \longrightarrow M$ es tal que para cada objeto inescindible X de A, $\psi_{1X} = \psi_X\phi_{0X} = \psi_X\phi_X^{-1} \in \mathcal{GL}(m_X, k)$, luego ψ_1 tiene un inverso izquierdo $\phi_1, \phi_1\psi_1 = I_N$. Como antes $\phi_1 = \phi_1\psi_1\phi = \phi$, así que ψ_1 también es inverso derecho, y concluimos que ϕ es isomorfismo.□

De 2.18 es inmediato que:

PROPOSICION 2.22 *Si $\mathcal{A} = (A, V)$ es un bocs con group-like w y diferencial δ 0-triangular y 1-triangular izquierda, entonces w es reflector.*□

Terminamos este capítulo con una definición.

DEFINICION 2.23 *Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un bocs. Decimos que una colección*

$$L = (A'; \omega; a_1, \ldots, a_n; v_1, \ldots, v_r)$$

es una **estratificación** *para $\mathcal{A}$, y que $\mathcal{A}$ es* **estratificado** *si:*

(L1) A' es una categoría mínima;

(L2) A es libremente generado sobre A' por los elementos inescindibles $a_1, \ldots, a_n$;

(L3) ω es un reflector para A con relativo a A';

(L4) $\overline{V}$ es A-A bimódulo libremente generado por elementos inescindibles $v_1, \ldots, v_r$; y

(L5) si δ es la diferencial definida por ω, entonces δ es 0-triangular.

3 OPERACIONES SOBRE BOCSES

En este capítulo introducimos las operaciones que permitirán el paso inductivo en la prueba del teorema para bocses mansos y salvajes (ver cap. 4). Todas las operaciones son obtenidas usando bocses inducidos y pushouts. Consideraremos un bocs $\mathcal{A} = (A, V)$ estratificado y estudiaremos algunos funtores $\theta : A \longrightarrow B$ tales que $\mathcal{A}^\theta$ resulta también estratificado, y describimos la estratificación de $\mathcal{A}^\theta$ en términos de la de $\mathcal{A}$. En algunos casos $\theta^* : R(\mathcal{A}^B) \longrightarrow R(\mathcal{A})$ será una equivalencia.

La primera de nuestras operaciones, llamada **regularización**, es una de las originales de Roiter [R], pero el enunciado en términos de bocses inducidos está en [D].

PROPOSICION 3.1 *Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un bocs con estratificación*

$$(A'; \omega; a_1, \ldots, a_n; v_1, \ldots, v_m)$$

y supóngase que $\delta(a_1) = v_1$. Sea B la subcategoría de A generada por A' y $a_2, \ldots, a_n$; y sea $\theta : A \longrightarrow B$ el funtor que actúa como la identidad sobre $A', a_2, \ldots, a_n$, y que envía a_1 a cero. Entonces:

(1) El bocs inducido $\mathcal{A}^B$ tiene una estratificación

$$(A'; \theta_1\omega; a_2, \ldots, a_n; \theta_1(v_2), \ldots, \theta_1(v_m));$$

(2) θ^* es una equivalencia;

(3) Si N es una representación en $R(\mathcal{A}^B)$, $\| N \| \leq \| \theta^*(N) \|$. Si $a_1 \in A(X,Y)$ y $\theta^*(N)(X)$ y $\theta^*(N)(Y)$ son ambos no cero, entonces la desigualdad es estricta.

<u>DEMOSTRACION</u>. Supóngase que $a_1 \in A(X, Y)$. Por 1.16(2), B es libremente generada sobre A' por $a_2, \ldots, a_n$. Sea $\jmath : A' \hookrightarrow B$ la inclusión, como $(\jmath, \theta_1\omega) = (\theta, \theta_1)(\imath, \omega)$ es un morfismo de bocses, entonces $\theta_1\omega : A' \longrightarrow {}^BV^B$ es un group-like. Además, $(\jmath, \theta_1\omega)^* = (\imath, \omega)^*(\theta, \theta_1)^* : R(\mathcal{A}^B) \longrightarrow R(A')$ refleja isos, pues así lo hace $(\imath, \omega)^*$ y, por 2.6(b), también lo hace $(\theta, \theta_1)^*$, por ser fiel y pleno. Así $\theta_1\omega$ es reflector.

Sean U el subbimódulo de $\overline{V}$ generado por v_1, y W el subbimódulo generado por $v_2, \ldots, v_m$. Sea $p : V \rightarrow V/U$ la proyección. Ahora $p\omega_L : A_{A'} \longrightarrow (V/U)_{A'}$ es un morfismo de $A - A'$ bimódulos. Sea C la subcategoría de A generada por A' y a_1, como $\delta(a_1) = v_1$, entonces

$$p\omega_L(a_1) = p(a_1\omega(1_X)) = p(\omega(1_Y)a_1 - v_1) = p\omega(1_Y)a_1 = p\omega_L(1_Y)a_1,$$

lo que muestra que $p\omega_L$ también es un morfismo de A-C bimódulos. Luego, tenemos una sucesión exacta de A-A bimódulos

$$0 \longrightarrow W \longrightarrow V/U \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} A \longrightarrow 0$$

donde $\bar{\varepsilon}$ es el morfismo tal que $\bar{\varepsilon}p = \varepsilon$. Esta sucesión se divide como A-C bimódulos, pues $\bar{\varepsilon}p\omega_L = \varepsilon\omega_L = 1_A$. Por 1.18, tenemos un diagrama de pushout

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\imath"] \arrow[d] & A \arrow[d, "\theta"] \\ A' \arrow[r, "\jmath"'] & B, \end{tikzcd}$$

y por 1.22(2), el núcleo del morfismo ${}^B(V/U)^B \longrightarrow B \bigotimes_A B \longrightarrow B$ es isomorfo a ${}^BW^B \bigoplus {}^BJ'^B$, donde $J' = \ker(A' \bigotimes_C A' \longrightarrow A')$. Pero $J' = 0$, ya que $C \longrightarrow A'$ es un epimorfismo, y así si $f \otimes g \mapsto fg = 0$, entonces $f \otimes g = 1 \otimes fg = 0$. Además ${}^BU^B = 0$, ya que

$$\begin{aligned} 1_Y \otimes v_1 \otimes 1_X &= 1_Y \otimes \delta(a_1) \otimes 1_X \\ &= 1_Y \otimes [\omega(1_Y)a_1 - a_1\omega(1_X)] \otimes 1_X \\ &= 1_Y \otimes \omega(1_Y)a_1 \otimes 1_X - 1_Y \otimes a_1\omega(1_X) \otimes 1_X \\ &= 1_Y \otimes \omega(1_Y) \otimes \theta(a_1)1_X - 1_Y\theta(a_1) \otimes \omega(1_X) \otimes 1_X = 0, \end{aligned}$$

pues $\theta(a_1) = 0$.

Del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} {}^BV^B \arrow[r, "\varepsilon_B"] \arrow[d, "1 \otimes p \otimes 1"'] & B \\ {}^B(V/U)^B \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

tenemos

$$\begin{aligned} \ker \varepsilon_B &= (1 \otimes p \otimes 1)^{-1}[\ker({}^B(V/U)^B \longrightarrow B)] \\ &\simeq {}^BW^B \bigoplus {}^BJ'^B + {}^BU^B = {}^BW^B. \end{aligned}$$

Luego $\ker \epsilon_B$ es libremente generado por $\theta_1(v_2), \ldots, \theta_1(v_m)$. Puesto que la triangularidad, L(5), es clara, hemos demostrado (1).

Sabemos que θ^* es fiel y pleno, y para probar que es denso es suficiente demostrar que toda representación M en $R(\mathcal{A})$ es isomorfa a una representación N con $N(a_1) = 0$. Construimos N y un isomorfismo $M \longrightarrow N$ inductivamente. Para $0 \leq i \leq n$ sean A_i la subcategoría de A generada por A' y $a_1, \ldots, a_i$, y W_i el $A_i - A$ subbimódulo de $\overline{V}$ generado libremente por $v_1, \ldots, v_m$. Para definir N primero tomamos ${}_{A'}N = {}_{A'}M$, así que M y N tienen los mismos elementos, y usaremos 1.14 para definir N sobre $a_1, \ldots, a_n$. Una vez que N ha sido determinado sobre $a_1, \ldots, a_i$ definimos un morfismo de A_i-módulos $\alpha_i : W_i \bigotimes_A M \longrightarrow N$ por

$$\begin{aligned} \alpha_i(v_1 \otimes x) &= -M(a_1)(x), \\ \alpha_i(v_j \otimes x) &= 0, \qquad \text{para} \quad 2 \leq j \leq m, \end{aligned}$$

y para todo x en M, y lo extendemos:

$$\alpha_{iY}(v \otimes_X x) = \alpha_{iY}(\sum_j g_j v_j f_j \otimes_X x) = \sum_j N(g_j)\alpha_{iY_j}(v_j \otimes_{X_j} f_j x),$$

con $g_j \in A_i$ y $f_j \in A$ y $v = \sum g_j v_j f_j$. α_i es un A_i morfismo, pues si $h : Y \longrightarrow Z$ en A_i, entonces conmuta

$$\begin{tikzcd} {[W_i \bigotimes_A M](Y)} \arrow[r, "\alpha_{i_Y}"] \arrow[d, "{[W_i \bigotimes_A M](h)}"'] & N(Y) \arrow[d, "N(h)"] \\ {[W_i \bigotimes_A M](Z)} \arrow[r, "\alpha_{i_Z}"'] & N(Z) \end{tikzcd}$$

ya que:

$$\begin{aligned} N(h)\alpha_{i_Y}(v \otimes_X x) &= N(h)\sum_j N(g_j)\alpha_{i_{Y_j}}(v_j \otimes_{X_j} f_j x) \\ &= \sum_j N(hg_j)\alpha_{i_{Y_j}}(v_j \otimes_{X_j} f_j x) \\ &= \alpha_{i_Z}(\sum_j hg_j v_j \otimes_{X_j} f_j x) \\ &= \alpha_{i_Z}[W_i \bigotimes_A M](h)(\sum_j g_j v_j f_j \otimes_X x). \end{aligned}$$

Ahora extendemos nuestra definición de N al tomar

$$N(a_{i+1})(x) = \alpha_{i_{Y_{i+1}}}(\delta(a_{i+1}) \otimes x) + M(a_{i+1})(x)$$

para todo x en N.

Repitiendo en esta forma, obtenemos un A-módulo N y un morfismo $\alpha : \overline{V} \bigotimes M \longrightarrow N$. N es tal que $N(a_1) = 0$, pues

$$\begin{aligned} N(a_1)(x) &= \alpha_0(\delta(a_1) \otimes x) + M(a_1)(x) \\ &= \alpha_0(v_1 \otimes x) + M(a_1)(x) \\ &= -M(a_1)(x) + M(a_1)(x) = 0. \end{aligned}$$

Usando el isomorfismo ${}_{A'}V \simeq {}_{A'}\overline{V} \bigoplus {}_{A'}A$, dado por ω_R, definimos $\beta : {}_{A'}V \bigotimes M \longrightarrow {}_{A'}N$ por

$$\beta[(v + \omega_R(a)) \otimes x] = \alpha(v \otimes x) - M(a)(x),$$

para $v \in \overline{V}, a \in A$ y $x \in M$. Para ver que β es realmente un morfismo de A-módulos basta mostrar la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{tikzcd} {[V \bigotimes M](X)} \arrow[r, "\beta_X"] \arrow[d, "{[V \bigotimes M](f)}"'] & N(X) \arrow[d, "N(f)"] \\ {[V \bigotimes M](Y)} \arrow[r, "\beta_Y"'] & N(Y) \end{tikzcd}$$

únicamente en los morfismos $a_i : X_i \longrightarrow Y_i, i = 1, \ldots, n$. Primero observemos que

$$a_i\omega_R(a) = -\delta(a_i)a + \omega_R(a_ia),$$

para todo morfismo $a : X \longrightarrow X_i$, así que

$$\begin{aligned} & N(a_i)\beta_{X_i}[(v \otimes \omega_R(a)) \otimes x] = \\ = \; & N(a_i)[\alpha_{X_i}(v \otimes x) - M(a)(x)] \\ = \; & N(a_i)\alpha_{X_i}(v \otimes x) - N(a_i)M(a)(x) \\ = \; & N(a_i)\alpha_{X_i}(v \otimes x) - \alpha_{Y_i}[\delta(a_i) \otimes M(a)(x)] - M(a_i)M(a)(x) \\ = \; & \alpha_{Y_i}(a_iv \otimes x) - \alpha_{Y_i}(\delta(a_i)a \otimes x) - M(a_ia)(x) \\ = \; & \alpha_{Y_i}[(a_iv - \delta(a_i)a) \otimes x] - M(a_ia)(x) \\ = \; & \beta_{Y_i}[(a_iv - \delta(a_i)a + \omega_R(a_ia)) \otimes x] \\ = \; & \beta_{Y_i}[(a_iv + a_i\omega_R(a)) \otimes x] \\ = \; & \beta_{Y_i}(V \bigotimes M)(a_i)[(v + \omega_R(a)) \otimes x]. \end{aligned}$$

Además β es un isomorfismo en $R(\mathcal{A})$, pues $(\imath,\omega)^*(\beta)$ es el isomorfismo $-I_{A'M}$ en $R(A')$. Así hemos probado (2).

Veamos (3). Sea N una representación en $R(\mathcal{A}^B)$, entonces

$$\begin{aligned}\| N \| &= \sum_{i=2}^{n} \dim N(X_i)\dim N(Y_i) + \sum_{\substack{X\in \operatorname{inc} A' \\ A'(X,Y)\neq k}} [\dim N(X)]^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \dim N(X_i)\dim N(Y_i) + \sum [\dim N(X)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \dim(N\theta X_i)\dim N(\theta Y_i) + \sum [\dim N(\theta X)]^2 = \| \theta^* N \| .\end{aligned}$$

Claramente, si $\theta^*(N)(X_1) = N(X_1)$ y $\theta^*(N)(Y_1) = N(Y_1)$ son ambos no cero, la desigualdad es estricta.□

En lo que resta del capítulo estudiaremos bocses inducidos por un funtor θ : $A \longrightarrow B$ que es el pushout de un funtor $\theta' : A' \longrightarrow B'$, con B' mínima. En nuestras consideraciones aunque A estará libremente generada sobre A', no necesariamente A' es mínima, por esto consideraremos la siguiente

DEFINICION 3.2 *Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un bocs. Decimos que una colección*

$$L = (A'; \omega; a_1, \ldots, a_n; v_1, \ldots, v_m)$$

es una **pre-estratificación** *si se satisfacen las condiciones de 2.23, excepto posiblemente (L1).*

Ahora bien, la verificación de que los bocses inducidos son estratificados resultará la parte mas complicada en todas las demostraciones, y para simplificar esta verificación consideraremos en cada caso un bocs inducido por un funtor que sea pushout de alguno de los llamados funtores admisibles, concepto que introducimos enseguida.

DEFINICION 3.3 *Diremos que un funtor $\theta' : A' \longrightarrow B'$ es* **admisible** *si:*

(A1) A' es esquelética, pequeña, tiene sumas directas y tiene la propiedad de Krull-Schmidt, y B' es mínima;

(A2) θ' es **cofinal**: *esto es, cualquier objeto inescindible en B' es isomorfo a un sumando directo de $\theta'(X)$, para X en A';*

(A3) El núcleo J' del morfismo $B' \otimes_{A'} B' \longrightarrow B'$ es un B'-B' bimódulo libre; y

Hay un conjunto ordenado finito Λ, tal que para cada $\lambda \in \Lambda$ existen objetos inescindibles X_λ en A' y Y_λ en B', y morfismos $e_\lambda \in B'(Y_\lambda, \theta'(X_\lambda))$ y $f_\lambda \in B'(\theta'(X_\lambda), Y_\lambda)$ con las propiedades:

(A4) Para toda $\lambda, f_\lambda e_\lambda = 1_{Y_\lambda}$; si $X_\lambda = X_\mu$ para $\lambda \neq \mu$, entonces $f_\mu e_\lambda = 0$;

(A5) Para todo objeto inescindible X en A':

$$1_{\theta'(X)} = \sum_{\lambda \in \Lambda(X)} e_\lambda f_\lambda,$$

donde $\Lambda(X) = \{\lambda \in \Lambda \mid X_\lambda = X\}$ y $\theta'(X) \neq 0$;

(A6) Para toda $b \in B'(Y_\lambda, Y_\mu)$, $\quad bf_\lambda \otimes e_\lambda = f_\mu \otimes e_\mu b$;

(A7) Para $\lambda < \mu$ con $X_\lambda = X_\mu$, $\quad f_\mu \otimes e_\lambda = 0$.

OBSERVACION 3.4 *(1) Las condiciones (A4) y (A5) aseguran que los elementos e_λ y f_λ son monomorfismos y epimorfismos que se escinden y descomponen a $\theta'(X)$, para cada X inescindible en A', en suma de inescindibles. En realidad tenemos un isomorfismo*

$$\theta'(X) \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda(X)} Y_\lambda,$$

dado por el morfismo $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda(X)}$. De hecho, siempre verificamos que un funtor es admisible dando la descomposición de los $\theta'(X)$.

(2). Además todo objeto inescindible en A' aparece como algún X_λ, y puesto que A' y B' son Krull-Schmidt todo objeto inescindible B' aparece como algún Y_λ, y (A2) es verdadero para cualquier objeto de B'.

(3). Puesto que B' es mínima, la propiedad (A6) es equivalente al par

(A6,1) $f_\lambda \otimes e_\lambda$ depende de λ únicamente via Y_λ;

(A6,2) Si $b \in B'(Y_\lambda, Y_\lambda)$ entonces $bf_\lambda \otimes e_\lambda = f_\lambda \otimes e_\lambda b$.

En efecto, si $Y_\lambda = Y_\mu = Y$, entonces por (A6) tenemos

$$f_\lambda \otimes e_\lambda = 1_Y f_\lambda \otimes e_\lambda = f_\mu \otimes e_\mu 1_Y = f_\mu \otimes e_\mu,$$

y la segunda afirmación es (A6) tomando $\mu = \lambda$. Por otro lado, como B' es mínima, si $Y_\lambda \neq Y_\mu$, entonces $Y_\lambda \not\simeq Y_\mu$ y $B'(Y_\lambda, Y_\mu) = 0$. Sea $0 \neq b \in B'(Y_\lambda, Y_\mu)$, así $Y_\lambda = Y_\mu$, y $f_\lambda \otimes e_\lambda = f_\mu \otimes e_\mu$, por lo que

$$bf_\lambda \otimes e_\lambda = b(f_\lambda \otimes e_\lambda) = b(f_\mu \otimes e_\mu) = bf_\mu \otimes e_\mu = f_\mu \otimes e_\mu b.$$

PROPOSICION 3.5 *Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un bocs con pre-estratificación*

$$L = (A'; \omega; a_1, \ldots, a_n; v_1, \ldots, v_m)$$

y sea $\theta' : A' \longrightarrow B'$ un funtor admisible. Sea

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\theta'"'] & A \arrow[d, "\theta"] \\ B' \arrow[r, "j"'] & B \end{tikzcd}$$

el correspondiente pushout, entonces:

(1) Hay un morfismo de B'-coalgebras

$$\sigma : B' \longrightarrow B' \bigotimes_{A'} B'$$

tal que para todo $\lambda, \sigma(1_{Y_\lambda}) = f_\lambda \otimes e_\lambda$;

(2) J' el núcleo del morfismo $B' \bigotimes_{A'} B' \longrightarrow B'$ es un $B'-B'$ bimódulo libremente generado por ciertos elementos $x_1, \ldots, x_r$;

(3) El bocs inducido $\mathcal{A}^B$ tiene estratificación

$$(B';\ \tau\sigma;\ a_{i\mu\lambda};\ v_{j\mu\lambda}, \tau(x_q))$$

donde τ es el morfismo de $B' - B'$ bimódulos

$$B' \bigotimes_{A'} B' \simeq B' \bigotimes_{A'} A' \bigotimes_{A'} B' \xrightarrow{\omega} B \bigotimes_{A'} V \bigotimes_{A'} B \longrightarrow B \bigotimes_{A} V \bigotimes_{A} B = {}^B V^B.$$

Los $a_{i\mu\lambda}$ están definidos para $a_i \in A(X_\lambda, X_\mu)$ por

$$a_{i\mu\lambda} = f_\mu \theta(a_i) e_\lambda \in B(Y_\lambda, Y_\mu)$$

y ordenados por:

$$a_{i\mu\lambda} < a_{i'\mu'\lambda'} \quad si \quad i < i' \quad o \quad (i = i' \quad y \quad \lambda < \lambda') \quad o \quad (i = i',\ \lambda = \lambda' \quad y \quad \mu > \mu').$$

Los $v_{j\mu\lambda}$ están definidos para $v_j \in \overline{V}(X_\lambda, X_\mu)$ por

$$v_{j\mu\lambda} = f_\mu \theta_1(v_j) e_\lambda = f_\mu \otimes v_j \otimes e_\lambda.$$

Además si δ' es la diferencial asociada al group-like $\omega_B = \tau\sigma$ entonces:

$$\delta'(a_{l\mu\lambda}) = f_\mu \otimes \delta(a_l) \otimes e_\lambda + \sum_{\substack{\alpha<\lambda \\ \alpha\in\Lambda(X_\lambda)}} a_{l\mu\alpha}\tau(f_\mu \otimes e_\lambda) - \sum_{\substack{\beta>\mu \\ \beta\in\Lambda(X_\mu)}} \tau(f_\mu \otimes e_\mu)a_{l\beta\lambda}.$$

y

$$\begin{aligned}\delta'(v_{l\mu\lambda}) &= \overline{\mu}_B(f_\mu \otimes \delta(v_l) \otimes e_\lambda) + \sum_{\substack{\alpha\neq\lambda \\ \alpha\in\Lambda(X_\lambda)}} v_{l\mu\alpha} \otimes_{Y_\alpha} (f_\alpha \otimes \omega(1_{X_\lambda})\omega e_\lambda) \\ &\quad + \sum_{\substack{\beta\neq\mu \\ \beta\in\Lambda(X_\mu)}} (f_\mu \otimes \omega(1_{Y_\mu}) \otimes e_\beta) \otimes_{Y_\beta} v_{l\beta\lambda}.\end{aligned}$$

donde

$$\overline{\mu}_B : {}^BV \bigotimes_A V^B \xrightarrow{\cong} {}^BV \bigotimes_A A \bigotimes_A V^B \xrightarrow{1\otimes\theta\otimes 1} {}^BV \bigotimes_B B \bigotimes_B V^B \xrightarrow{\cong} {}^BV^B \bigotimes_B {}^BV^B.$$

<u>DEMOSTRACION</u>. Sea $C = ines(B')$, observemos que $B' \otimes_C B' \simeq B'$, pues para $X, Y \in Ob(B')$, con $X = \bigoplus_{i=1}^l X_i$ descomposición en inescindibles, $X_i \in ObC$, entonces

$$\begin{aligned} B' \bigotimes_C B'(X,Y) &= B'(-,Y) \bigotimes_C B'(X,-) = B'(-,Y) \bigotimes_C B'(\bigoplus_i X_i, -) \\ &= \bigoplus_i B'(-,Y) \bigotimes_C B'(X_i,-) = \bigoplus_i B'(-,Y) \bigotimes_C C(X_i,-) \\ &\simeq \bigoplus_i B'(X_i,Y) = B'(X,Y).\end{aligned}$$

Ya que todo objeto en C es un Y_λ, podemos definir

$$\sigma' : C \longrightarrow {}_CB' \bigotimes_{A'} B'_C,$$

tal que si $c \in C(Y_\lambda, Y_\lambda)$ entonces $\sigma'(c) = f_\lambda \otimes e_\lambda c = cf_\lambda \otimes e_\lambda$, (nótese que si $Y_\lambda \neq Y_\mu$, $C(Y_\lambda, Y_\mu) = 0$, pues B' mínima). σ' resulta un morfismo de C-C bimódulos:

$$\sigma'(hcg) = hcgf_\lambda \otimes e_\lambda = h(cgf_\lambda \otimes e_\lambda) = h(f_\lambda \otimes e_\lambda cg) = h(f_\lambda \otimes e_\lambda c)g = h\sigma'(c)g.$$

También tenemos morfismos de B'-B' bimódulos:

$$
\begin{tikzcd}
B' \arrow[rr, dashed] \arrow[d, "u"', "\simeq"] & & B' \bigotimes_{A'} B' \\
B' \bigotimes_C C \bigotimes_C B' \arrow[rr, "1 \otimes \sigma' \otimes 1"'] & & B' \bigotimes_C B' \bigotimes_{A'} B' \bigotimes_C B' \arrow[u, "v"', "\simeq"]
\end{tikzcd}
$$

y extendemos el morfismo σ' para obtener

$$\sigma = v(1 \otimes \sigma' \otimes 1)u : B' \longrightarrow B' \bigotimes_{A'} B'.$$

Para ver que σ es un morfismo de coálgebras necesitamos verificar la conmutatividad de los diagramas

$$
\begin{tikzcd}
B' \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\varepsilon_0"'] & B' \bigotimes_{A'} B' \arrow[d, "\varepsilon_1"] \\
B' \arrow[r, "="'] & B'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B' \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\mu_0"'] & B' \bigotimes_{A'} B' \arrow[d, "\mu_1"] \\
B' \bigotimes_{B'} B' \arrow[r, "\sigma \otimes \sigma"'] & B' \bigotimes_{A'} B' \bigotimes_{B'} B' \bigotimes_{A'} B'
\end{tikzcd}
$$

donde ε_0 y μ_0 son la counidad y la comultiplicación del bocs principal (B', B'), mientras que ε_1 y μ_1 son la counidad y comultiplicación definidas por $g \otimes_X f \overset{\varepsilon_1}{\mapsto} gf$ y $g \otimes_X f \overset{\mu_1}{\mapsto} g \otimes_X 1_{\theta' X} \otimes_{\theta' X} 1_{\theta' X} \otimes f$, para cada objeto X en A'.

Por 3.4(2), B' está generado como B'-B' bimódulo por los elementos 1_{Y_λ}: si $f \in B'(Y, Y')$ y $Y = \bigoplus Y_\lambda$, con $\imath_\lambda : Y_\lambda \longrightarrow Y$ y $p_\lambda : Y \longrightarrow Y_\lambda$, las inclusiones y proyecciones naturales, entonces $1_Y = \sum_\lambda \imath_\lambda p_\lambda$, así

$$f = f 1_Y = \sum (f \imath_\lambda) 1_{Y_\lambda} (p_\lambda).$$

Consecuentemente bastará verificar las conmutatividades en los elementos 1_{Y_λ}:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1 \sigma(1_{Y_\lambda}) &= \varepsilon_1 v(1 \otimes \sigma' \otimes 1) u(1_{Y_\lambda}) = \varepsilon_1 v(1_{Y_\lambda} \otimes \sigma'(1_{Y_\lambda}) \otimes 1_{Y_\lambda}) \\
&= \varepsilon_1 v(1_{Y_\lambda} \otimes f_\lambda \otimes e_\lambda \otimes 1_{Y_\lambda}) = \varepsilon_1 (f_\lambda \otimes e_\lambda) = f_\lambda e_\lambda = 1_{Y_\lambda}.
\end{aligned}
$$

Y, por A(7),

$$\begin{aligned}
\mu_1\sigma(1_{Y_\lambda}) &= \mu_1(f_\lambda \otimes e_\lambda) = f_\lambda \otimes 1_{\theta' X} \otimes 1_{\theta' X} \otimes e_\lambda \\
&= f_\lambda \otimes \sum_{\nu\in\Lambda(X)} e_\nu f_\nu \otimes 1_{\theta' X} \otimes e_\lambda = \sum_{\nu\in\Lambda(X)} f_\lambda \otimes e_\nu \otimes f_\nu \otimes e_\lambda \\
&= f_\lambda \otimes e_\lambda \otimes f_\lambda \otimes e_\lambda = (\sigma\otimes\sigma)(1_{Y_\lambda} \otimes 1_{Y_\lambda}) = (\sigma\otimes\sigma)\mu_0(1_{Y_\lambda}).
\end{aligned}$$

Esto completa la demostración de (1).

Para mostrar (2), observemos que $B' \bigotimes_{A'} B'$ está generado como B'-B' bimódulo por los elementos $1_{\theta'(X)} \otimes 1_{\theta'(X)}$ con X objeto inescindible de A' y $\theta'(X) \neq 0$, en efecto, si Y es objeto en A', $Y = \bigoplus X_\lambda$, entonces $\theta' Y = \bigoplus \theta' X_\lambda$, con $\theta' \imath_\lambda$ y $\theta' p_\lambda$ las inclusiones y proyecciones en B', respectivamente, cuando $\imath_\lambda$ y p_λ son las inclusiones y proyecciones entre Y y X_λ en A', así que $b' \otimes_Y b = b' \sum \theta' \imath_\lambda \theta' p_\lambda \otimes_Y b = \sum b'\theta' \imath_\lambda \otimes_{X_\lambda} \theta' p_\lambda b$. Consecuentemente $B' \bigotimes_{A'} B'$ está generado por los elementos $f_\mu \otimes e_\lambda$, pues

$$1_{\theta' X} \otimes 1_{\theta' X} = \sum_{\mu\in\Lambda(X)} e_\mu f_\mu \otimes \sum_{\lambda\in\Lambda(X)} e_\lambda f_\lambda = \sum_{\mu,\lambda\in\Lambda(X)} e_\mu (f_\mu \otimes e_\lambda) f_\lambda .$$

Ahora bien, si $x \in J'$, entonces

$$x = \sum_{\mu,\lambda} c_\mu (f_\mu \otimes e_\lambda) b_\lambda = \sum_\lambda c_\lambda (f_\lambda \otimes e_\lambda) b_\lambda + \sum_{\lambda\neq\mu} c_\mu (f_\mu \otimes e_\lambda) b_\lambda ,$$

así $0 = \sum_\lambda c_\lambda b_\lambda$. Supongamos que, para cada λ, $b_\lambda : Y \longrightarrow Y_\lambda$, y que $\bigoplus_\nu Y_\nu = Y$, tomando $\imath_\nu$ y p_ν las inclusiones y proyecciones correspondientes, $1_Y = \sum_\nu \imath_\nu p_\nu$, así que:

$$\begin{aligned}
c_\lambda (f_\lambda \otimes e_\lambda) b_\lambda &= c_\lambda (f_\lambda \otimes e_\lambda) b_\lambda \sum_\nu \imath_\nu p_\nu = \sum_\nu c_\lambda (f_\lambda \otimes e_\lambda b_\lambda \imath_\nu) p_\nu \\
&= \sum_\nu c_\lambda (b_\lambda \imath_\nu f_\nu \otimes e_\nu) p_\nu = c_\lambda b_\lambda \sum_\nu \imath_\nu f_\nu \otimes e_\nu p_\nu ,
\end{aligned}$$

de aquí que

$$\sum_\lambda c_\lambda (f_\lambda \otimes e_\lambda) b_\lambda = \sum_\lambda c_\lambda b_\lambda (\sum_\nu \imath_\nu f_\nu \otimes e_\nu p_\nu) = (\sum_\lambda c_\lambda b_\lambda)(\sum_\nu \imath_\nu f_\nu \otimes e_\nu p_\nu) = 0,$$

y además

$$x = \sum_{\lambda\neq\mu} c_\mu (f_\mu \otimes e_\lambda) b_\lambda ,$$

por lo tanto J' está generado por los elementos $f_\mu \otimes e_\lambda$, $\mu \neq \lambda$, de los que tenemos un conjunto finito, y como J' es libre, J' está libremente generado por un número finito de elementos $x_1, \dots, x_s$.

Para probar (3), observemos que $\tau\sigma$ es un group-like, pues $(\jmath, \tau)(1_{B'}, \sigma) = (\jmath, \tau\sigma)$ es un morfismo de bocses: como ya lo sabemos para $(1_{B'}, \sigma)$, ahora lo demostramos para $(\jmath, \tau) : (B', B' \otimes_{A'} B') \longrightarrow (B, {}^BV^B)$. En efecto:

$$\begin{aligned} \varepsilon_B\tau(g \otimes_X f) &= \varepsilon_B(g \otimes \omega(1_X) \otimes f) = g\theta\varepsilon\omega(1_X)f \\ &= g\theta(1_X)f = gf = \jmath(gf) = \jmath\varepsilon_1(g \otimes_X f), \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} \mu_B\tau(g \otimes_X f) &= \mu_B(g \otimes_X \omega(1_X) \otimes_X f) \\ &= (g \otimes_X \omega(1_X) \otimes_X 1_{\theta'X}) \otimes_{\theta'X} (1_{\theta'X} \otimes_X \omega(1_X) \otimes_X f) \\ &= \pi(\tau \otimes \tau)[(g \otimes_X 1_{\theta'X}) \otimes_{\theta'X} (1_{\theta'X} \otimes_X f)] = \pi(\tau \otimes \tau)\mu_1(g \otimes_X f), \end{aligned}$$

y esto muestra la conmutatividad de los diagramas:

$$\begin{tikzcd} B' \otimes_{A'} B' \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\epsilon_1"'] & {}^BV^B \arrow[d, "\epsilon_B"] \\ B' \arrow[r, "\jmath"'] & B \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} B' \arrow[rr, "\tau"] \arrow[d, "\mu_1"'] & & {}^BV^B \arrow[dr, "\mu_B"] & \\ & & & {}^BV^B \otimes_B {}^BV^B \\ B' \otimes_{A'} B' \otimes_{B'} B' \otimes_{A'} B' \arrow[rr, "\tau \otimes \tau"'] & & {}^BV^B \otimes_{B'} {}^BV^B \arrow[ur, "\pi"'] & \end{tikzcd}$$

Ahora veamos, usando 1.14, que los elementos $a_{i\mu\lambda} = f_\mu\theta(a_i)e_\lambda$ para $a_i \in A(X_\lambda, X_\mu)$, son generadores libres de B sobre B'.

Sea $\phi : B' \longrightarrow C$ un funtor y $c_{i\mu\lambda} \in C(\phi Y_\lambda, \phi Y_\mu)$. Consideremos

$$c'_{i\mu\lambda} = \sum_{\Lambda_{\mu\lambda}} \phi(e_\beta)c_{i\mu\lambda}\phi(f_\alpha) : \phi\theta'X_\lambda \to \phi Y_\lambda \to \phi Y_\mu \to \phi\theta'X_\mu,$$

donde $\Lambda_{\mu\lambda} = \{(\alpha, \beta) \mid X_\alpha = X_\lambda \;\text{ y }\; X_\beta = X_\mu\}$, así que $c'_{i\mu\lambda} \in C(\phi\theta'X_\lambda, \phi\theta'X_\mu)$. Por 1.18, B es generada libremente sobre B' por $\theta(a_1), \dots, \theta(a_n)$, existe entonces un único funtor $\bar\phi : B \longrightarrow C$ tal que $\bar\phi\theta(a_i) = c'_{i\mu\lambda}$ y que extiende a ϕ. Este funtor es tal que

$$\bar\phi(a_{i\mu\lambda}) = \bar\phi(f_\mu\theta(a_i)e_\lambda) = \sum_{\Lambda_{\mu\lambda}} \phi f_\mu \phi e_\beta c_{i\mu\lambda} \phi f_\alpha \phi e_\lambda = c_{i\mu\lambda}.$$

Ahora vemos que $\overline{{}^BV^B}$, el núcleo de ε_B, tiene los generadores libres anunciados. Consideremos la sucesión:

$$0 \longrightarrow \overline{V} \longrightarrow V \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

la cual se divide como una sucesión de $A-A'$ bimódulos, así que, por 1.22, el núcleo de $\varepsilon_B : {}^BV^B \longrightarrow B\bigotimes_A B \longrightarrow B$, es isomorfo a ${}^B\overline{V}^B \bigoplus {}^BJ'^B$. J' está libremente generado por $x_1, \ldots, x_r$, así ${}^BJ'^B$ está libremente generado por $\tau(x_1), \ldots, \tau(x_r)$. Por otro lado, como $\overline{V}$ es libremente generado por $v_1, \ldots, v_m$, entonces se tiene $\overline{V} \simeq \coprod_{v_j} A(X_\mu, -)\bigotimes_k A(-, X_\lambda)$, si $v_j \in V(X_\lambda, X_\mu)$. Así que

$$\begin{aligned}
{}^B\overline{V}^B &\simeq B\bigotimes_A \left[\coprod_{v_j} A(X_\mu, -)\bigotimes_k A(-, X_\lambda)\right]\bigotimes_A B \\
&\simeq \coprod_{v_j} B\bigotimes_A A(X_\mu, -)\bigotimes_k A(-, X_\lambda)\bigotimes_A B \\
&\simeq \coprod_{v_j} B(\theta X_\mu, -)\bigotimes_k B(-, \theta X_\lambda) \\
&= \coprod_{v_j} B(\bigoplus Y_\beta, -)\bigotimes_k B(-, \bigoplus Y_\alpha) \\
&\simeq \coprod_{v_j}\coprod_{\alpha,\beta} B(Y_\beta, -)\bigotimes_k B(-, Y_\alpha),
\end{aligned}$$

y este isomorfismo es tal que

$$v_{j\mu\lambda} \mapsto (\sum_\beta f_\mu e_\beta)\otimes(\sum_\alpha f_\alpha e_\lambda) = 1_{Y_\mu}\otimes 1_{Y_\lambda}.$$

Por lo tanto, el núcleo de ${}^BV^B \longrightarrow B$ está libremente generado por la familia $(v_{j\mu\lambda}, \tau(x_1), \ldots, \tau(x_r))$.

Para probar (L5), la triangularidad del sistema, determinamos $\delta'(a_{i\mu\lambda})$, donde δ' es la diferencial asociado al group-like $\tau\sigma$.

$$\begin{aligned}
\delta'(a_{i\mu\lambda}) &= \delta'(f_\mu\theta(a_i)e_\lambda) = \tau\sigma(1_{Y_\mu})f_\mu\theta(a_i)e_\lambda - f_\mu\theta(a_i)e_\lambda\tau\sigma(1_{Y_\lambda}) \\
&= \tau(f_\mu\otimes e_\mu)f_\mu\theta(a_i)e_\lambda - f_\mu\theta(a_i)e_\lambda\tau(f_\lambda\otimes e_\lambda) \\
&= \sum_{\beta\in\Lambda(X_\mu)} \tau(f_\mu\otimes e_\beta)f_\beta\theta(a_i)e_\lambda - \sum_{\substack{\beta\neq\mu \\ \beta\in\Lambda(X_\mu)}} \tau(f_\mu\otimes e_\beta)f_\beta\theta(a_i)e_\lambda \\
&\quad - f_\mu\theta(a_i)e_\lambda\tau(f_\lambda\otimes e_\lambda).
\end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}
\sum_{\beta} \tau(f_\mu \otimes e_\beta) f_\beta \theta(a_i) e_\lambda &= \sum_{\beta} f_\mu \otimes \omega(1_{X_\mu}) \otimes e_\beta f_\beta \theta(a_i) e_\lambda \\
&= f_\mu \otimes \omega(1_{X_\mu}) \otimes \sum_{\beta} e_\beta f_\beta \theta(a_i) e_\lambda \\
&= f_\mu \otimes \omega(1_{X_\mu}) \otimes \theta(a_i) e_\lambda = f_\mu \otimes \omega(1_{X_\mu}) a_i \otimes e_\lambda \\
&= f_\mu \otimes \delta(a_i) \otimes e_\lambda + f_\mu \otimes a_i \omega(1_{X_\lambda}) \otimes e_\lambda \\
&= f_\mu \otimes \delta(a_i) \otimes e_\lambda + f_\mu \theta(a_i) \sum_{\alpha \in \Lambda(X_\lambda)} e_\alpha f_\alpha \otimes \omega(1_{X_\lambda}) \otimes e_\lambda \\
&= f_\mu \otimes \delta(a_i) \otimes e_\lambda + \sum_{\alpha \in \Lambda(X_\lambda)} f_\mu \theta(a_i) e_\alpha f_\alpha \otimes \omega(1_{X_\lambda}) \otimes e_\lambda \\
&= f_\mu \otimes \delta(a_i) \otimes e_\lambda + \sum_{\alpha \in \Lambda(X_\lambda)} f_\mu \theta(a_i) e_\alpha \tau(f_\alpha \otimes e_\lambda).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\delta'(a_{i\mu\lambda}) &= f_\mu \otimes \delta(a_i) \otimes e_\lambda + \sum_{\alpha \neq \lambda} f_\mu \theta(a_i) e_\alpha \tau(f_\alpha \otimes e_\lambda) - \sum_{\beta \neq \mu} \tau(f_\mu \otimes e_\beta) f_\beta \theta(a_i) e_\lambda \\
&= f_\mu \otimes \delta(a_i) \otimes e_\lambda + \sum_{\alpha < \lambda} f_\mu \theta(a_i) e_\alpha \tau(f_\alpha \otimes e_\lambda) - \sum_{\beta > \mu} \tau(f_\mu \otimes e_\beta) f_\beta \theta(a_i) e_\lambda \\
&= f_\mu \otimes \delta(a_i) \otimes e_\lambda + \sum_{\substack{\alpha < \lambda \\ \alpha \in \Lambda(X_\lambda)}} a_{i\mu\alpha} \tau(f_\alpha \otimes e_\lambda) - \sum_{\substack{\beta > \mu \\ \beta \in \Lambda(X_\mu)}} \tau(f_\mu \otimes e_\beta) a_{i\beta\lambda}.
\end{aligned}$$

Usando el orden sobre Λ se sigue la triangularidad.

Para terminar lo referente a la estratificación debemos ver que $\tau\sigma$ es un reflector. Sabemos que $(\jmath, \tau\sigma) = (\jmath, \tau)(1_{B'}, \sigma)$, así $(\jmath, \tau\sigma)^* = (1_{B'}, \sigma)^*(\jmath, \tau)^*$, y bastará probar que cada uno de estos dos últimos funtores refleja isomorfismos.

Para el caso de $(\jmath, \tau)^*$, consideremos los morfismos inducidos

$$\theta' = (\theta', \theta'_1) : (A', A') \longrightarrow (B', B' \bigotimes_{A'} B'), \quad \text{y} \quad \theta = (\theta, \theta_1) : (A, V) \longrightarrow (A, {}^B V^B),$$

$({}^{B'} A'^{B'} \simeq B' \bigotimes_{A'} B')$, son tales que

$$(\theta, \theta_1)(\imath, \omega) = (\jmath, \tau)(\theta', \theta'_1),$$

ésto es claro en la primera coordenada, y para mostrarlo en la segunda es suficiente verlo en los elementos 1_X:

$$\begin{aligned}
\theta_1 \omega(1_X) &= \theta(1_X) \otimes \omega(1_X) \otimes \theta(1_X) \\
&= \tau(\theta'(1_X) \otimes \theta'(1_X)) = \tau\theta'_1(1_X).
\end{aligned}$$

Se sigue que
$$(\imath,\omega)^*(\theta,\theta_1)^* = (\theta',\theta_1')^*(\jmath,\tau)^*,$$
como $(\imath,\omega)^*$ refleja isos y $(\theta,\theta_1)^*$ es fiel y pleno, entonces $(\jmath,\tau)^*$ refleja isos.

Para el caso de $(1_{B'},\sigma)^* : R(B', B'\bigotimes_{A'} B') \longrightarrow R(B')$, tomemos $f : M \longrightarrow N$ un morfismo en $R(B', B'\bigotimes_{A'} B')$ tal que $(1_{B'},\sigma)^*(f)$ es isomorfismo. Así f es un morfismo de B'-módulos:
$$f : (B' \bigotimes_{A'} B') \bigotimes_{B'} M \longrightarrow N.$$

Para λ y μ con $X_\lambda = X_\mu$, denotamos por $f_{\mu\lambda}$ al morfismo de $M(Y_\lambda)$ en $N(Y_\mu)$ dado por
$$f_{\mu\lambda}(m) = f(f_\mu \otimes e_\lambda \otimes m).$$
Como $(1_{B'},\sigma)^* f$ es un isomorfismo en $R(B')$ y está dado por la composición
$$g : M \simeq B' \bigotimes_{B'} M \xrightarrow{\sigma\otimes 1} (B' \bigotimes_{A'} B') \bigotimes_{B'} M \xrightarrow{f} N$$
entonces
$$g_{Y_\lambda} : M(Y_\lambda) \longrightarrow N(Y_\lambda)$$
es tal que
$$g_{Y_\lambda}(m) = f(f_\lambda \otimes e_\lambda \otimes m) = f_{\lambda\lambda}(m),$$
y $f_{\lambda\lambda}$ es un isomorfismo.

Por otro lado, consideremos el funtor inducido
$$\theta'^* : R(B', B' \bigotimes_{A'} B') \longrightarrow R(A'),$$
entonces $\theta'^*(f)$ está dado por la composición
$$h : M \simeq A' \bigotimes_{A'} M \xrightarrow{\theta_1'\otimes 1} (B' \bigotimes_{A'} B') \bigotimes_{B'} M \xrightarrow{f} N.$$

Si X es un objeto inescindible de A', $M(\theta(X)) \simeq \coprod M(Y_\lambda)$, con proyecciones $M(f_\lambda) : M(\theta(X)) \longrightarrow M(Y_\lambda)$, e inyecciones $M(e_\lambda) : M(Y_\lambda) \longrightarrow M(\theta(X))$; de manera análoga $N(\theta(X)) \simeq \coprod N(Y_\lambda)$, con proyecciones $N(f_\lambda)$ e inyecciones $N(e_\lambda)$. Con respecto a estas descomposiciones, h tiene una forma matricial $(h_{\mu\lambda})$, donde
$$h_{\mu\lambda} = N(f_\mu) h M(e_\lambda) : M(Y_\lambda) \longrightarrow N(Y_\mu),$$

pero

$$\begin{aligned} h_{\mu\lambda}(m) &= N(f_\mu)hM(e_\lambda)(m) = f_\mu h(e_\lambda m) \\ &= f_\mu f(1_{\theta'(X)} \otimes 1_{\theta'(X)} \otimes e_\lambda m) = f(f_\mu \otimes e_\lambda \otimes m), \end{aligned}$$

y como $f_\mu \otimes e_\lambda = 0$ si $\mu > \lambda$, entonces h tiene forma triangular con elementos diagonales $h_{\lambda\lambda} = f_{\lambda\lambda}$ que son isomorfismos, así $h = \theta'^*(f)$ es isomorfismo, puesto que θ'^* es fiel y pleno, se tiene que f es iso.

Finalmente mostramos que la validez de la descripción de δ' para los elementos de $\overline{{}^BV^B}$. Sabemos que

$$\begin{aligned} \delta'(v_{l\mu\lambda}) &= \mu_B(v_{l\mu\lambda}) - v_{l\mu\lambda} \otimes_{Y_\lambda} \omega_B(1_{Y_\lambda}) - \omega(1_{Y_\mu}) \otimes_{Y_\mu} v_{l\mu\lambda} \\ &= \mu_B(v_{l\mu\lambda}) - v_{l\mu\lambda} \otimes_{Y_\lambda} \tau(f_\lambda \otimes e_\lambda) - \tau(f_\mu \otimes e_\mu) \otimes_{Y_\mu} v_{l\mu\lambda} \\ &= \mu_B(v_{l\mu\lambda}) - (f_\mu \otimes v_l \otimes e_\lambda) \otimes_{Y_\lambda} (f_\lambda \otimes \omega(1_{X_\lambda}) \otimes e_\lambda) \\ &\qquad - (f_\mu \otimes \omega(1_{X_\mu}) \otimes e_\mu) \otimes_{Y_\mu} (f_\mu \otimes v_l \otimes e\lambda) \\ &= \mu_B(v_{l\mu\lambda}) - \sum_{\alpha\in\Lambda(X_\lambda)} (f_\mu \otimes v_l \otimes e_\alpha) \otimes_{Y_\alpha} (f_\alpha \otimes \omega(1_{X_\lambda}) \otimes e_\lambda) \\ &\qquad - \sum_{\beta\in\Lambda(X_\mu)} (f_\mu \otimes \omega(1_{X_\mu}) \otimes e_\beta) \otimes_{Y_\beta} (f_\beta \otimes v_l \otimes e\lambda) \\ &\qquad + \sum_{\substack{\alpha\in\Lambda(X_\lambda) \\ \alpha\neq\lambda}} (f_\mu \otimes v_l \otimes e_\alpha) \otimes_{Y_\alpha} (f_\alpha \otimes \omega(1_{X_\lambda}) \otimes e_\lambda) \\ &\qquad + \sum_{\substack{\beta\in\Lambda(X_\mu) \\ \beta\neq\mu}} (f_\mu \otimes \omega(1_{X_\mu}) \otimes e_\beta) \otimes_{Y_\beta} (f_\beta \otimes v_l \otimes e\lambda). \end{aligned}$$

Nótese que:

$$\begin{aligned} &\overline{\mu}_B(f_\mu \otimes \delta(v_l) \otimes e_\lambda) \\ = \;& \overline{\mu}_B(f_\mu \otimes [\mu(v_l) - v_l \otimes \omega(1_{X_\lambda}) - \omega(1_{X_\mu}) \otimes v_l] \otimes e_\lambda) \\ = \;& \overline{\mu}_B(f_\mu \otimes \mu(v_l) \otimes e_\lambda) - \overline{\mu}_B(f_\mu \otimes v_l \otimes \omega(1_{X_\lambda}) \otimes e_\lambda) - \overline{\mu}_B(f_\mu \otimes \omega(1_{X_\mu}) \otimes v_l \otimes e_\lambda) \\ = \;& \mu_B(f_\mu \otimes v_l \otimes e_\lambda) - \overline{\mu}_B(f_\mu \otimes v_l \otimes \omega(1_{X_\lambda}) \otimes e_\lambda) - \overline{\mu}_B(f_\mu \otimes \omega(1_{X_\mu}) \otimes v_l \otimes e_\lambda). \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} &\overline{\mu}_B(f_\mu \otimes v_l \otimes \omega(1_{X_\lambda}) \otimes e_\lambda) \\ = \;& (f_\mu \otimes v_l \otimes 1_{\theta(X_\lambda)}) \otimes_{\theta(X_\lambda)} (1_{\theta(X_\lambda)} \otimes \omega(1_{X_\lambda}) \otimes e_\lambda) \\ = \;& (f_\mu \otimes v_l \otimes 1_{\theta(X_\lambda)}) \otimes_{\theta(X_\lambda)} (\sum_{\alpha\in\Lambda(X_\lambda)} e_\alpha f_\alpha \otimes \omega(1_{X_\lambda}) \otimes e_\lambda) \\ = \;& \sum_{\alpha\in\Lambda(X_\lambda)} (f_\mu \otimes v_l \otimes e_\lambda) \otimes_{Y_\alpha} (f_\alpha \otimes \omega(1_{X_\lambda}) \otimes e_\lambda). \end{aligned}$$

Ademas:

$$\begin{aligned}
& \overline{\mu}_B(f_\mu \otimes \omega(1_{X_\mu}) \otimes v_l \otimes e_\lambda) \\
= \;& (f_\mu \otimes \omega(1_{X_\mu}) \otimes 1_{\theta(X_\mu)}) \otimes_{\theta(X_\mu)} (1_{\theta(X_\mu)} \otimes v_l \otimes e_\lambda) \\
= \;& (f_\mu \otimes \omega(1_{X_\mu}) \otimes 1_{\theta(X_\mu)}) \otimes_{\theta(X_\mu)} (\sum_{\beta \in \Lambda(X_\mu)} e_\beta f_\beta \otimes v_l \otimes e_\lambda) \\
= \;& \sum_{\beta \in \Lambda(X_\mu)} (f_\mu \otimes \omega(1_{X_\mu}) \otimes e_\beta) \otimes_{Y_\beta} (f_\beta \otimes v_l \otimes e_\lambda).
\end{aligned}$$

Es decir:

$$\begin{aligned}
\overline{\mu}_B(f_\mu \otimes \delta(v_l) \otimes e_\lambda) \;=\; & \mu_B(v_{l\mu\lambda}) - \sum_{\alpha \in \Lambda(X_\lambda)} (f_\mu \otimes v_l \otimes e_\alpha) \otimes_{Y_\alpha} (f_\alpha \otimes \omega(1_{X_\lambda}) \otimes e_\lambda) \\
& - \sum_{\beta \in \Lambda(X_\mu)} (f_\mu \otimes \omega(1_{X_\mu}) \otimes e_\beta) \otimes_{Y_\beta} (f_\beta \otimes v_l \otimes e\lambda).
\end{aligned}$$

Y consecuentemente se tiene:

$$\begin{aligned}
\delta'(v_{l\mu\lambda}) \;=\; & \overline{\mu}_B(f_\mu \otimes \delta(v_l) \otimes e_\lambda) + \sum_{\substack{\alpha \neq \lambda \\ \alpha \in \Lambda(X_\lambda)}} (f_\mu \otimes v_l \otimes e_\alpha) \otimes_{Y_\alpha} (f_\alpha \otimes \omega(1_{X_\lambda}) \omega e_\lambda) \\
& + \sum_{\substack{\beta \neq \mu \\ \beta \in \Lambda(X_\mu)}} (f_\mu \otimes \omega(1_{X_\mu}) \otimes e_\beta) \otimes_{Y_\beta} (f_\beta \otimes v_l \otimes e_\lambda). \qquad \square
\end{aligned}$$

Ahora comenzamos a usar la proposición 3.5 para construir "reducciones" para un bocs estratificado, iniciando con la exclusión de ciertos objetos inescindibles de la categoría A.

PROPOSICION 3.6 *Sean $\mathcal{A} = (A, V)$ un bocs con estratificación*

$$(A'; \omega; a_1, \dots, a_n; v_1, \dots, v_m),$$

y C una subcategoría de A. Si B' es la subcategoría plena de A' cuyos objetos no tienen sumandos directos no nulos isomorfos a sumandos directos de un objeto en C. Entonces

(1) Existe un funtor $\theta' : A' \longrightarrow B'$ que actúa como la identidad sobre B' y envía los otros objetos inescindibles de A' en cero;

(2) Si $\theta : A \longrightarrow B$ es el pushout de θ', entonces el bocs inducido $\mathcal{A}^B$ tiene una estratificación

$$(B'; \theta_1\omega; \{\theta(a_i) \mid i \in I_0\}; \{\theta_1(v_j) \mid j \in I_1\}),$$

donde I_0 e I_1 son los subconjuntos de $1 \leq i \leq n$ (respectivamente $1 \leq j \leq m$) tales que si $a_i \in A(X,Y)$ (respectivamente $v_j \in \overline{V}(X,Y)$), entonces X y Y son objetos en B';

(3) θ^* es una equivalencia que preserva normas entre $R(\mathcal{A}^B)$ y la subcategoría plena de $R(\mathcal{A})$ que consiste de las representaciones que son cero sobre C;

(4) Si N es una representación en $R(\mathcal{A}^B)$ con la propiedad de que $(\theta^* N)(X) \neq 0$ para todos los objetos X en A pero no en C, entonces N es **sincera**, *es decir, si $N(Y) = 0$ entonces $Y = 0$.*

DEMOSTRACION. Por 1.24(5), B' es mínima. Todo objeto Z en A' tiene una descomposición de la forma $X \bigoplus Y$ con $X \in Ob B'$ y $Y \in Ob C$, que es única hasta isomorfismo por 1.24(3), y de aquí única pues A' es esquelética. El funtor θ' es justamente la proyección que lleva Z en X.

Para probar (2), por 3.5 únicamente necesitamos probar que θ' es admisible, y que los group-like $\theta_1\omega$ y $\tau\sigma$ coinciden. Claramente se tienen (A1) y (A2). Veamos que (A3) se cumple. θ' es un epimorfismo, pues la inclusión de B' en A' es inversa derecha de θ'. Así que $B' \bigotimes_{A'} B' \longrightarrow B'$ es iso: si $f \in B'(Y,Y')$, entonces $\theta'(Y') = Y'$ y la inversa está dada por $f \mapsto 1_{Y'} \otimes f$. En efecto, si $g \otimes f \in B' \bigotimes_{A'} B'$ con $g : \theta'(X) \longrightarrow Y'$, $f : Y \longrightarrow \theta'(X)$, tenemos

$$g \otimes f \mapsto gf \mapsto 1_{Y'} \otimes gf = g \otimes f;$$

y si $f \in B'(Y,Y')$, tenemos

$$f \mapsto 1_{Y'} \otimes f \mapsto f.$$

Así $J' = 0$. Tomamos Λ como el conjunto formado por los objetos inescindibles de B', $e_\lambda = f_\lambda = 1_\lambda$, y obviamente se siguen (A4)-(A7).

Veamos que $\theta_1\omega = \tau\sigma$. Tomemos $f \in B'(X,Y)$, $X = \bigoplus X_{\lambda_i}$, con proyecciones $p_i : X \to X_{\lambda_i}$, e inclusiones $j_i : X_{\lambda_i} \to X$, entonces

$$\begin{aligned} \tau\sigma(f) &= \tau\sigma(\sum_i f j_i p_i) = \tau(\sum_i f j_i \sigma(1_{\lambda_i}) p_i) = \tau(\sum_i f j_i f_{\lambda_i} \otimes e_{\lambda_i} p_i) \\ &= \sum_i f j_i \otimes \omega(1_{X_{\lambda_i}}) \otimes p_i = \sum_i 1_Y \otimes \omega(f j_i p_i) \otimes 1_X \\ &= 1_Y \otimes \omega(f) \otimes 1_X = \theta_1\omega(f). \end{aligned}$$

θ^* es fiel y pleno, por 2.6(b), así sólo falta ver que es denso. Sea $M \in R(\mathcal{A}^B)$, entonces $\theta^* M \in R(\mathcal{A})$. Como θ extiende a θ', es claro que $\theta^* M = M\theta$ se anula en C. Sea $N \in R(\mathcal{A})$ tal que N se anula en C, definimos $M : B \longrightarrow modk$, por $M(X) = N(X)$ si $X \in Ob B$, entonces $\theta^* M = N$, pues si $X \in Ob B'$, $\theta^* M(X) = M\theta(X) = M(X) = N(X)$, y si $Y \in Ob C$, entonces $\theta^* M(Y) = M\theta(Y) = M(0) =$

$0 = N(Y)$. De aquí si $Z \in ObA$ con $Z = X \bigoplus Y$ con $Z \in ObB'$ y $Y \in ObC$, entonces $\theta^* M(Z) = \theta^* M(X) \bigoplus \theta^* M(Y) = N(X) \bigoplus N(Y) = N(X \bigoplus Y)$.

θ^* preserva normas, pues si $M \in R(\mathcal{A}^B)$ y $X \in Ob(ines A')$, entonces $X \in Ob(ines B')$ o X es sumando directo de $Y \in ObC$, y se tiene

$$\begin{aligned}
\| \theta^* M \| &= \sum_{i=1}^{n} \dim\theta^* M(X_i) \dim\theta^* M(Y_i) + \sum_{\substack{X \in ines A' \\ A'(X,X) \neq k}} [\dim\theta^* M(X)]^2 \\
&= \sum_{i \in I_0} \dim M(X_i) \dim M(Y_i) + \sum_{\substack{X \in ines B' \\ B'(X,X) \neq k}} [\dim M(X)]^2 = \| M \|,
\end{aligned}$$

pues para $i \in I_0$, $\theta^* M(X_i) = M(X_i)$ y para $i \notin I_0$, $\theta^* M(X_i) = 0$ ya que $X_i \notin ObB$.

Finalmente N es sincera, pues si $N(Y) = 0$ con $Y \in ObB'$, entonces $(\theta^* N)(Y) = 0$, así $Y \in Ob(AddC)$, y por lo tanto $Y = 0$. $\square$

La siguiente proposición se refiere a lazos con diferencial cero. Es una mezcla de las proposiciones 3 y 4 de [D], que al combinarlas se evita introducir los "lazos nilpotentes" de Drozd.

PROPOSICION 3.7 *Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un bocs con estratificación*

$$L = (A'; \omega; a_1, \ldots, a_n; v_1, \ldots, v_m).$$

Sea X un objeto inescindible en A y supóngase que $A'(X, X) = k[x, f(x)^{-1}]$. Sean g un polinomio no nulo y r un entero positivo. Entonces existe una categoría B y un funtor $\theta : A \longrightarrow B$ tal que

(1) El bocs inducido $\mathcal{A}^B$ es estratificado;

(2) toda representación en $R(\mathcal{A})$ con norma no mayor que r es isomorfa a $\theta^*(N)$, para alguna N en $R(\mathcal{A}^B)$;

(3) Si N es una representación en $R(\mathcal{A}^B)$, entonces $\| N \| \leq \| \theta^*(N) \|$. Si $\theta^*(N)(g(x))$ no es invertible, entonces la desigualdad es estricta.

<u>DEMOSTRACION</u>. Reemplazando g por el producto de sus factores lineales que no son divisores de f, podemos suponer que g es de la forma

$$g(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \ldots (x - \lambda_t),$$

donde los escalares λ_i no son raíces de f y son distintos. Sea D la categoría mínima con objetos inescindibles $\{Z_{ij} \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq t\}$ e Y, cuyos anillos de endomorfismos son

$$D(Y, Y) = k[y, f(y)^{-1}, g(y)^{-1}] \qquad \text{y} \qquad D(Z_{ij}, Z_{ij}) = k.$$

Sea C la subcategoría plena de A' cuyos objetos no tienen ningún sumando directo isomorfo a X, entonces $B' = C \times D$ es una categoría mínima. Sea $\theta' : A' \longrightarrow B'$ el funtor que actúa como la identidad sobre C y lleva X a:

$$\theta'(X) = Y \bigoplus \left[\bigoplus_{j=1}^{t} \bigoplus_{i=1}^{r} Z_{ij}^{i} \right],$$

donde Z_{ij}^{i} denota la suma directa de i copias de Z_{ij}; lleva x en

$$\theta'(x) = y \oplus \left[\oplus_{j=1}^{t} \oplus_{i=1}^{r} J_i(\lambda_j)\right],$$

donde $J_i(\lambda_j)$ denota la matriz bloque de Jordan $i \times i$ triangular superior con valor propio λ_j en

$$B'(Z_{ij}^{i}, Z_{ij}^{i}) = M_{i\times i}(B'(Z_{ij}, Z_{ij})) = M_{i\times i}(k).$$

El morfismo $\theta'(f(x)) = f(\theta'(x)) = f(y) \oplus [\oplus \oplus f(J_i(\lambda_j))]$ es invertible, pues así lo son $f(y)$ y $f(J_i(\lambda_j))$, ya que esta última es una matriz triangular superior cuya diagonal es $f(\lambda_j) \neq 0$, [Ma], y por tanto θ' está bien definido.

Ahora mostramos que θ' es admisible. Las condiciones (A1) y (A2) son claras. Veamos (A3): Sea Λ el conjunto con elementos Y, $W \in Ob(inesC)$ y las ternas (i, j, k) con $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq t$, y $1 \leq k \leq i$, y sean $X_W = Y_W = W$ para $W \in Ob(inesC)$; $X_Y = X$, $Y_Y = Y$; $X_{(i,j,k)} = X$ y $Y_{(i,j,k)} = Z_{ij}$. Definimos e_λ y f_λ por $e_W = f_W = 1_W$, para $W \in Ob(inesC)$; e_Y y f_Y son los morfismos canónicos que se escinden entre Y y $\theta'(X)$; y $e_{(i,j,k)}$ y $f_{(i,j,k)}$ son los morfismos canónicos que se escinden entre Z_{ij} y la k- ésima copia de Z_{ij} en $\theta'(X)$. Claramente se tienen (A4) y (A5). Además existen las relaciones:

$$f_Y \theta'(x) = y f_Y \qquad \text{y} \qquad \theta'(x) e_Y = e_Y y. \tag{1}$$

$$f_{(i,j,k)}\theta'(x) = \begin{cases} \lambda_j f_{(i,j,k)} + f_{(i,j,k+1)} & \text{si} \quad k < i, \\ \lambda_j f_{(i,j,i)} & \text{si} \quad k = i; \end{cases} \tag{2}$$

$$\theta'(x)e_{(i,j,k)} = \begin{cases} \lambda_j e_{(i,j,1)} & \text{si} \quad k = 1, \\ e_{(i,j,k-1)} + \lambda_j e_{(i,j,k)} & \text{si} \quad k > 1. \end{cases} \tag{3}$$

Esto es pues f_Y y $f_{(i,j,k)}$ son matrices de $1 \times (tr+1)$ bloques, que si los denotamos por $[f_Y]_l$ y $[f_{(i,j,k)}]_l$ se tiene:

$$[f_Y]_l = \begin{cases} 1_Y & \text{si } l = 1 \\ 0 & \text{si } l \neq 1 \end{cases} \qquad [f_{(i,j,k)}]_l = \begin{cases} 0 & \text{si } l \neq (j-1)r + (i+1) \\ [\delta_{km} 1_{Z_{ij}}]_{m=1}^{i} & \text{si } l = (j-1)r + (i+1) \end{cases}$$

donde δ_{km} es la delta de Kronecker. Además e_Y y $e_{(i,j,k)}$ son matrices de $(tr+1)\times 1$ bloques y, usando igual notación, se tiene:

$$[e_Y]_l = \begin{cases} 1_Y & \text{si } l=1, \\ 0 & \text{si } l \neq 1, \end{cases} \qquad [e_{(i,j,k)}]_l = \begin{cases} 0 & \text{si } l \neq (j-1)r+(i+1), \\ [\delta_{mk} 1_{Z_{ij}}]_{m=1}^{i} & \text{si } l = (j-1)r+(i+1). \end{cases}$$

Para obtener la primera fórmula de [1] basta observar que $f_Y\theta'(x)$ y yf_Y son matrices de $1\times(tr+1)$ bloques tales que

$$[f_Y\theta'(x)]_l = \begin{cases} y & \text{si } l=1, \\ 0 & \text{si } l\neq 1, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad [yf_Y]_l = \begin{cases} y & \text{si } l=1 \\ 0 & \text{si } l\neq 1. \end{cases}$$

Análogamente se obtiene la otra igualdad. Para obtener las fórmulas [2], si $k<i$ entonces $f_{(i,j,k)}\theta'(x)$ y $\lambda_j f_{(i,j,k)} + f_{(i,j,k+1)}$ son matrices de $1\times(tr+1)$ bloques tales que:

$$[f_{(i,j,k)}\theta'(x)]_l = \begin{cases} 0 & \text{si } l\neq (j-1)r+(i+1), \\ [\delta_{km}1_{Z_{ij}}]_{m=1}^{i} J_i(\lambda_j) & \text{si } l=(j-1)r+(i+1). \end{cases} \qquad [4]$$

$$[\lambda_j f_{(i,j,k)}+f_{(i,j,k+1)}]_l = \begin{cases} 0 & \text{si } l\neq (j-1)r+(i+1), \\ \lambda_j[\delta_{km}1_{Z_{ij}}]_{m=1}^{i} + [\delta_{k+1,m}1_{Z_{ij}}]_{m=1}^{i} & \text{si } l=(j-1)r+(i+1). \end{cases}$$

Para $l=(j-1)r+(i+1)$ los bloques correspondientes son tales que su m-ésima entrada es 0 si $m\neq k,\ k+1$, λ_j si $m=k$, y 1 si $m=k+1$, y tenemos la igualdad en todos los bloques.

Si $k=i$, el bloque $[f_{(i,j,k)}\theta'(x)]_l$ se describe como en [4], mientras que:

$$[\lambda_j f_{(i,j,i)}]_l = \begin{cases} 0 & \text{si } l\neq (j-1)r+(i+1) \\ \lambda_j[\delta_{im}1_{Z_{ij}}]_{m=1}^{i} & \text{si } l=(j-1)r+(i+1). \end{cases}$$

Para $l=(j-1)r+(i+1)$, los bloques correspondientes son tales que su m-ésima entrada es 0 si $m\neq i$ y λ_j si $m=i$. Similarmente se muestran las igualdades [3].

Las fórmulas [1], [2] y [3] nos permiten mostrar las condiciones (A6) y (A7). Veamos que $f_{(i,j,k)}\otimes e_{(i,j,k)}$ es independiente de k. Observemos que de [2] se sigue:

$$f_{(i,j,k+1)} = f_{(i,j,k)}\theta'(x) - \lambda_j f_{(i,j,k)} = f_{(i,j,k)}\theta'(x-\lambda_j 1_X), \qquad [5]$$

y de [3] se tiene:

$$e_{(i,j,k)} = \theta'(x)e_{(i,j,k+1)} - \lambda_j e_{(i,j,k+1)} = \theta'(x-\lambda_j 1_X)e_{(i,j,k+1)}. \qquad [6]$$

Como $\theta'(x-\lambda_j 1_X)$ pasa através del producto tensorial tenemos que

$$\begin{aligned} f_{(i,j,k'+1)}\otimes e_{(i,j,k)} &= f_{(i,j,k')}\theta'(x-\lambda_j 1_X)\otimes e_{(i,j,k)} \\ &= f_{(i,j,k')}\otimes \theta'(x-\lambda_j 1_X)e_{(i,j,k)} \\ &= f_{(i,j,k')}\otimes e_{(i,j,k-1)}. \end{aligned}$$

En particular
$$f_{(i,j,k+1)} \otimes e_{(i,j,k+1)} = f_{(i,j,k)} \otimes e_{(i,j,k)}.$$
Y se ha mostrado (A6.1). Para probar (A6.2), notemos que es claro para los objetos W en $inesC$, es cierto para los objetos Z_{ij}, pues los endomorfismos de ellos son múltiplos escalares de los identidad. Para el objeto Y lo mostramos usando la relación [1]:

$$yf_Y \otimes e_Y = f_Y\theta'(x) \otimes e_Y = f_Y \otimes \theta'(x)e_Y = f_Y \otimes e_Y y,$$

e inductivamente es cierto para toda potencia de y, y por tanto para todo polinomio en y. Mientras que

$$\begin{aligned} f(y)^{-1}f_Y \otimes e_Y &= f(y)^{-1}f_Y \otimes e_Y f(y)f(y)^{-1} \\ &= f(y)^{-1}[f_Y \otimes e_Y f(y)]f(y)^{-1} \\ &= f(y)^{-1}[f(y)f_Y \otimes e_Y]f(y)^{-1} \\ &= f_Y \otimes e_Y f(y)^{-1}, \end{aligned}$$

y de manera similar para $g(y)^{-1}$.

Las relaciones [1], [2] y [3] también son útiles para mostrar que $f_\mu \otimes e_\lambda = 0$ en todos los casos excepto posiblemente para $f_{(i',j',k')} \otimes e_{(i,j,k)}$ con $k' \leq k$ e $i+k' \leq i'+k$.

En efecto, de [2] y [3] se tiene que:

$$0 = f_{(i,j,i)}\theta'(x-\lambda_j) \qquad \text{y} \qquad 0 = \theta'(x-\lambda_j)e_{(i,j,1)}, \tag{7}$$

y para $l \in \mathbb{N}$, de [5] y [6], inductivamente se deduce que:

$$\begin{aligned} f_{(i,j,k+l)} &= f_{(i,j,k)}\theta'(x-\lambda_j)^l \quad &\text{si} \quad k+l \leq i, \\ e_{(i,j,k-l)} &= \theta'(x-\lambda_j)^l e_{(i,j,k)} \quad &\text{si} \quad k-l \geq 1, \end{aligned} \tag{8}$$

combinando [7] y [8] tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= f_{(i,j,k)}\theta'(x-\lambda_j)^l \quad &\text{para} \quad l > i-k \\ 0 &= \theta'(x-\lambda_j)^l e_{(i,j,k)} \quad &\text{para} \quad l \geq k. \end{aligned} \tag{9}$$

Además, de [1] se tiene inductivamente que

$$(y-\lambda_j)^l f_Y = f_Y\theta'(x-\lambda_j)^l \quad \text{y} \quad e_Y(y-\lambda_j)^l = \theta'(x-\lambda_j)^l e_Y \tag{10}$$

Así tenemos para $l > i-k$:

$$\begin{aligned} f_{(i,j,k)} \otimes e_Y &= f_{(i,j,k)} \otimes e_Y(y-\lambda_j)^l(y-\lambda_j)^{-l} \\ &= f_{(i,j,k)} \otimes \theta'(x-\lambda_j)^l e_Y(y-\lambda_j)^{-l} \\ &= f_{(i,j,k)}\theta'(x-\lambda_j)^l \otimes e_Y(y-\lambda_j)^{-l} = 0, \end{aligned}$$

y para $l \geq k$:

$$\begin{aligned} f_Y \otimes e_{(i,j,k)} &= (y-\lambda_j)^{-l}(y-\lambda_j)^l f_Y \otimes e_{(i,j,k)} \\ &= (y-\lambda_j)^{-l} f_Y \theta'(x-\lambda_j)^l \otimes e_{(i,j,k)} \\ &= (y-\lambda_j)^{-l} f_Y \otimes \theta'(x-\lambda_j)^l e_{(i,j,k)} = 0. \end{aligned}$$

Para $j \neq j'$, $(z-\lambda_j)^l$ y $(z-\lambda_{j'})^l$ son primos relativos, así que

$$1 = h_1(z)(z-\lambda_j)^l + h_2(z)(z-\lambda_{j'})^l,$$

para algunos polinomios $h_1(z)$ y $h_2(z)$, de aquí:

$$\begin{aligned} & f_{(i',j',k')} \otimes e_{(i,j,k)} \\ = \;& f_{(i',j',k')} 1_{\theta'(X)} \otimes e_{(i,j,k)} \\ = \;& f_{(i',j',k')}[h_1(\theta'(x))\theta'(x-\lambda_j)^l + h_2(\theta'(x))\theta'(x-\lambda_{j'})^l] \otimes e_{(i,j,k)} \\ = \;& f_{(i',j',k')} h_1(\theta'(x))\theta'(x-\lambda_j)^l \otimes e_{(i,j,k)} + f_{(i',j',k')} h_2(\theta'(x))\theta'(x-\lambda_{j'})^l \otimes e_{(i,j,k)} \\ = \;& f_{(i',j',k')} h_1(\theta'(x)) \otimes \theta'(x-\lambda_j)^l e_{(i,j,k)} + f_{(i',j',k')}\theta'(x-\lambda_{j'})^l h_2(\theta'(x)) \otimes e_{(i,j,k)}. \end{aligned}$$

Por [9], tomando $l > k$ y $l > i' - k'$, se tiene $f_{(i',j',k')} \otimes e_{(i,j,k)} = 0$.

Para $j = j'$ y $k' > k$, se tiene

$$\begin{aligned} f_{(i',j,k')} \otimes e_{(i,j,k)} &= f_{(i',j,k'-k)}\theta'(x-\lambda_j)^k \otimes e_{(i,j,k)} \\ &= f_{(i',j,k'-k)} \otimes \theta'(x-\lambda_j)^k e_{(i,j,k)} = 0, \end{aligned}$$

y tomando $i + k' > i' + k$, tenemos

$$\begin{aligned} f_{(i',j,k')} \otimes e_{(i,j,k)} &= f_{(i',j,k')} \otimes \theta'(x-\lambda_j)^{i'-k'+1} e_{(i,j,k+i'-k'+1)} \\ &= f_{(i',j,k')}\theta'(x-\lambda_j)^{i'-k'+1} \otimes e_{(i,j,k+i'-k'+1)} = 0. \end{aligned}$$

Para obtener (A7), ordenamos Λ asegurando que:

$$\text{si} \qquad (k < k') \text{ o } (k = k' \text{ e } i' < i) \quad \text{entonces} \qquad (i,j,k) < (i',j,k')$$

Finalmente nótese que, como se vió en la demostración de 3.5, J' está generado como B'-B' bimódulo por $f_\mu \otimes e_\lambda$ con $\lambda \neq \mu$, así que J' es cero excepto para los espacios $J'(Z_{ij}, Z_{pj}) \simeq k^{n(i,p,j)}$, donde $n(i,p,j)$ es entero positivo, como los Z_{ij} tienen anillos de endomorfismos triviales en B', entonces

$$J' \simeq \coprod_{(i,p,j)} \coprod_{l=1}^{n(i,p,j)} B'(Z_{pj}, -) \bigotimes_k B'(-, Z_{ij}),$$

es decir J' es libre. Esto completa la prueba de que θ' es funtor admisible.

Ahora consideremos $\theta : A \longrightarrow B$ el pushout de θ'. El lema 3.5 nos asegura que el bocs inducido $\mathcal{A}^B$ es estratificado, y hemos probado (1).

Veamos (2). Sea M una representación en $R(\mathcal{A})$ tal que $\| M \| \leq r$. Basta mostrar la existencia de una representación N' de B' tal que ${}_{A'}M \cong N'\theta'$, y para tal N' existe $M' \in R(\mathcal{A})$ tal que $M' \cong M$ y ${}_{A'}M' = N'\theta'$,y luego, usando que θ es pushout, existe N en $R(\mathcal{A}^B)$ tal que $\theta^* N = N\theta = M' \cong M$.

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\theta'"'] & A \arrow[d, "\theta"] \arrow[ddr, "M"] & \\
B' \arrow[r, "j"'] \arrow[drr, "N'"'] & B \arrow[dr, dashed, "N"] & \\
 & & modk
\end{tikzcd}$$

Construimos N': Denotemos con J la forma canónica de Jordan para $M(x) : M(X) \longrightarrow M(X)$. Sean $\xi_1, \ldots, \xi_w$ los valores propios de $M(x)$, sea q_l el número de bloques de Jordan con valor propio ξ_l que aparecen en J, y sea

$$J_l = \bigoplus_{p=1}^{q_l} J_{n_{l_p}}(\xi_l), \qquad \text{así} \qquad J = \bigoplus_{l=1}^{w} J_l,$$

Como $\dim M(X) = d \leq r$, tenemos que $q_l \leq r$ y $n_{l_p} \leq r$, para todo l y p. Sean $L(Y) = \{ \ l \mid \xi_l \neq \lambda_j$ para toda $j \ \}$ y $d_Y = \sum\limits_{\substack{l,p \\ l \in L(Y)}} n_{l_p}$. Para cada $j \in \{1, \ldots, t\}$ y cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, sea d_{ij} el número de bloques de Jordan $J_i(\lambda_j)$ que aparecen en J. Sea $\tilde{J}_j = \bigoplus\limits_{i=1}^{r} \tilde{J}_{ij}$, donde $\tilde{J}_{ij} := J_i(\lambda_j)^{d_{ij}}$ denota la suma directa de d_{ij} bloques $J_i(\lambda_j)$, de aquí que $\tilde{J}_j$ es una matriz de $d_j \times d_j$, con $d_j = \sum_i i d_{ij}$. Notemos que si $\xi_l = \lambda_j$, $\tilde{J}_j = J_l$.Tomando $d = d_Y + \sum_j d_j$, J puede describirse por:

$$J = (\bigoplus_{l \in L(Y)} J_l) \bigoplus (\bigoplus_{j=1}^{t} \tilde{J}_j) = (\bigoplus_{l \in L(Y)} J_l) \bigoplus (\bigoplus_{j=1}^{t} \bigoplus_{i=1}^{r} \tilde{J}_{ij}). \qquad [11]$$

Definimos un funtor $N' : B' \longrightarrow \mathrm{mod}k$ de la siguiente manera: como $B' = C \times D$, entonces ${}_C N' = {}_C M$, y para objetos en D, $N'(Y) = k^{d_Y}$ y $N'(Z_{ij}) = k^{d_{ij}}$, y en morfismos $N'(y) = \bigoplus_{l \in L(Y)} J_l$. Para ver que N' está bien definido es necesario que $N'(f(y))$ y $N'(g(y))$ sean invertibles en mod$k$, y para ello es suficiente mostrar que sólo tienen valores propios diferentes de cero. En efecto, $N'(f(y)) = f(N'(y))$ sólo tiene valores propios de la forma $f(\xi_l)$ con $l \in L(Y)$ que no son nulos, pues también lo son de $M(f(x)) = f(M(x))$ que es invertible. Mientras que los valores propios de $N'(g(y)) = g(N'(y))$ son de la forma $g(\xi_l)$ que son no nulos ya que ξ_l no es raíz de g para toda l. Ahora mostramos que ${}_{A'}M \simeq N'\theta'$. Definimos el isomorfismo $\nu : {}_{A'}M \longrightarrow N'\theta'$ tomando $\nu_Z = 1_{M(Z)}$ para todo objeto Z en C. Debemos definir $\nu_X : M(X) \longrightarrow N'\theta'(X)$ de manera que conmute el cuadro frontal del diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & k^d \arrow[dr, dashed] \arrow[dd, "J"] & \\
M(X) \arrow[ur, "\phi"] \arrow[rr, dashed, "\nu_X"] \arrow[dd, "M(x)"'] & & N'\theta'(X) \arrow[dd, "N'\theta'(x)"] \\
 & k^d \arrow[dr, dashed] & \\
M(X) \arrow[ur, "\phi"] \arrow[rr, dashed, "\nu_X"'] & & N'\theta'(X)
\end{tikzcd}$$

donde ϕ es el isomorfismo inducido por una base canónica de Jordan de $M(x)$ y que hace conmutativo el cuadro posterior izquierdo. Bastará ver que la forma canónica de Jordan de $N'\theta'(x)$ es igual a J, y así asegurar la existencia de un isomorfismo $k^d \longrightarrow N'\theta'(X)$ que haga conmutar el cuadro posterior derecho y las bases triangulares del diagrama al tomar ν_X como la composición de tales isomorfismos. Nótese que :

$$N'\theta'(X) = N'(Y) \bigoplus \bigoplus_{j=1}^{t} \bigoplus_{i=1}^{r} N'(Z_{ij}),$$

y

$$N'(\theta'(x)) = N'(y \oplus \oplus_j \oplus_i J_i(\lambda_j)) = N'(y) \oplus \oplus_{j=1}^{t} \oplus_{i=1}^{r} N'(J_i(\lambda_j)). \qquad [12]$$

Comparando [11] con [12] y recordando la definición de $N'(y)$, sólo resta mostrar que para i y j fijas, la forma canónica de Jordan de $N'(J_i(\lambda_j))$ es $\tilde{J}_{ij}$. Como se muestra en [F] necesitamos verificar que para $s = 1, \ldots, i$ se tiene

$$d_{ij} = \text{rango}[(N'(J_i(\lambda_j)) - \lambda_j I)^{s-1}] - \text{rango}[(N'(J_i(\lambda_j)) - \lambda_j I)^s] \qquad [13]$$

Nótese que $N'(J_i(\lambda_j))$ es una matriz triangular superior de $i \times i$ bloques de orden $d_{ij} \times d_{ij}$, en la que todos los bloques de la diagonal son $N'(\lambda_j) = \lambda_j I_{d_{ij}}$, los que están por encima de la diagonal son $N'(1) = I_{d_{ij}}$ y todos los demás son nulos. De aquí que

$$[N'(J_i(\lambda_j)) - \lambda_j I]^s = \begin{bmatrix} 0 & I_{d_{ij}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & I_{d_{ij}} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & I_{d_{ij}} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}^s$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & I_{d_{ij}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & I_{d_{ij}} & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & I_{d_{ij}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix},$$

aquí el primer bloque $I_{d_{ij}}$ está en la columna $s+1$, luego existen $i-s$ bloques $I_{d_{ij}}$, por lo que

$$\text{rango}[(N'(J_i(\lambda_j)) - \lambda_j I)^s] = d_{ij}(i-s),$$

y se sigue la igualdad [13]. Esto concluye la demostración de (2).

Finalmente mostramos (3) revisando la estratificación del bocs inducido dada en 3.5:

$$(B'; \tau\sigma; a_{i\mu\lambda}; v_{j\mu\lambda}, \tau(x_q)).$$

Si N es una representación en $R(\mathcal{A}^B)$, entonces

$$\| N \| = \sum_{l\mu\lambda} \dim N(X_{l\mu\lambda}) \dim N(Y_{l\mu\lambda}) + \sum_{\substack{B'(Z,Z) \neq k \\ Z \, inces}} [\dim N(Z)]^2.$$

Ahora bien, para $a_l \in A(X_\lambda, X_\mu)$, $a_{l\mu\lambda} = f_\mu \theta(a_l) e_\lambda$. Si $a_l \notin A(X, X)$, entonces X_λ, $X_\mu \in ObC$ y $a_{l\mu\lambda} = a_l$, mientras que si $a_l \in A(X, X)$ entonces $a_{l\mu\lambda} \in B(X_{l\mu\lambda}, Y_{l\mu\lambda})$, y $X_{l\mu\lambda}, Y_{l\mu\lambda} \in ObD$:

$$\| N \| = \sum_{a_l \notin A(X,X)} \dim N(X_l) \dim N(Y_l) + \sum_{a_l \in A(X,X)} \sum_{\mu,\lambda} \dim N(X_{l\mu\lambda}) \dim N(Y_{l\mu\lambda}) +$$

$$+ \sum_{\substack{Z \in \text{ines} C \\ C(Z,Z) \neq k}} [\dim N(Z)]^2 + [\dim N(Y)]^2.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\| \theta^* N \| &= \sum_l \dim N\theta(X_l) \dim N\theta(Y_l) + \sum_{\substack{Z \in \text{ines} A' \\ A'(Z,Z) \neq k}} [\dim N\theta(Z)]^2 \\
&= \sum_{a_l \notin A(X,X)} \dim N(X_l) \dim N(Y_l) + \sum_{a_l \in A(X,X)} \dim N\theta(X) \dim N\theta(X) + \\
&\quad + \sum_{\substack{Z \in \text{ines} C \\ C(Z,Z) \neq k}} [\dim N(Z)]^2 + [\dim N\theta(X)]^2,
\end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned}
\sum_{a_l \in A(X,X)} \sum_{\lambda,\mu} \dim N(X_{\lambda\mu\lambda}) \dim N(Y_{l\mu\lambda}) &\leq \sum_{a_l \in A(X,X)} [\dim(N(Y) \oplus \oplus_j \oplus_i N(Z_{ij}^i))]^2 \\
&= \sum_{a_l \in A(X,X)} [\dim N\theta(X)]^2.
\end{aligned}$$

y además

$$\dim N(Y) \leq \dim N\theta(X),$$

y consecuentemente $\| N \| \leq \| \theta^* N \|$. Si además $\theta^*(N)(g(x))$ no es invertible, entonces existen i, j tales que $N(Z_{ij}) \neq 0$, pues de otra manera $\theta^*(N)(g(x)) = N(g(y))$ que es invertible. Luego $\dim N(Y) < \dim N\theta(X)$ y $\| N \| < \| \theta^* N \|$.□

También serán necesarias algunas conclusiones mas técnicas. En la siguiente proposición damos una situación mas sencilla que 3.7, y que se obtiene aplicando primero 3.7 y luego 3.6 para deshacerse de los objetos Z_{ij}.

PROPOSICION 3.8 *Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un bocs con estratificación*

$$L = (A'; \omega; a_1, \ldots, a_n; v_1, \ldots, v_m).$$

Sea X un objeto inescindible de A y supóngase que $A'(X,X) = k[x, f(x)^{-1}]$. Sea g un polinomio no nulo. Entonces existe una categoría B que contiene a A y con los mismos objetos, tal que el funtor inclusión $\theta : A \longrightarrow B$ satisface:

(1) El bocs inducido $\mathcal{A}^B$ tiene una estratificación:

$$(B'; \omega'; a_1, \ldots, a_n; \theta_1(v_1), \ldots, \theta_1(v_m)),$$

tal que $B'(X,X) = k[x, f(x)^{-1}, g(x)^{-1}]$ *y* $B'(Y,Y) = A'(Y,Y)$ *para los otros objetos inescindibles en* A;

(2) Toda representación M *en* $R(\mathcal{A})$ *con* $M(g(x))$ *invertible es isomorfa a* $\theta^*(N)$ *para alguna* N *en* $R(\mathcal{A}^B)$;

(3) θ^* *preserva vectores dimensión y normas;*

(4) Si δ' *es la diferencial dado por* ω', *entonces* $\delta'(a_i) = \theta_1(\delta(a_i))$.

DEMOSTRACION. Sea r un entero positivo y $\phi : A \longrightarrow E$ el funtor determinado por 3.7 con $g(x)$ y r, y tomando la categoría mínima D con objetos X y Z_{ij}. Entonces $\mathcal{A}^\phi$ tiene estratificación $(E'; \tau\sigma; a_{i\mu\lambda}; v_{i\mu\lambda}, \tau(x_q))$, dada en 3.5, y $E' = C \times D$, donde C es la subcategoría plena de A' cuyos objetos no tienen sumandos isomorfos a X.

Sea $\psi : E \longrightarrow B$ el funtor determinado por la exclusión de los objetos inescindibles Z_{ij}, de acuerdo con 3.6. Entonces $(\mathcal{A}^\phi)^\psi$ tiene estratificación

$$(B'; \psi_1\tau\sigma; \{\psi(a_{i\mu\lambda}) \mid i\mu\lambda \in I_0\}; \{\psi_1(v_{j\mu\lambda}),\ \psi_1(\tau(x_q)) \mid j\mu\lambda, q \in I_1\}).$$

Claramente B es una categoría con los mismos objetos que A, así mostraremos que contiene a la categoría A y si $\theta : A \longrightarrow B$ es el funtor inclusión, entonces $\theta = \psi\phi$ y el bocs inducido $\mathcal{A}^B$ tiene la estratificación anunciada. Para ello bastará mostrar que

$$\{a_1, \ldots, a_n\} = \{\psi(a_{i\mu\lambda}) \mid \quad i\mu\lambda \in I_0\},$$

y

$$\{\theta_1(v_1), \ldots, \theta_1(v_m)\} = \{\psi_1(v_{j\mu\lambda}), \psi_1(\tau(x_q)) \mid \quad j\mu\lambda,\ q \in I_1\}.$$

En efecto, recordemos que $A \simeq T^{\otimes}$, donde T es el A'-A' bimódulo generado por $a_1, \ldots, a_n$, así que $E = (E' \bigotimes_{A'} T \bigotimes_{A'} E')^{\otimes}$, y E es libremente generada sobre E' por $1_{\phi'(Y_i)} \otimes a_i \otimes 1_{\phi'(X_i)}$ si $a_i \in A(X_i, Y_i)$ y $\phi : A \longrightarrow E$ es tal que $\phi(a_i) = 1_{\phi'(Y_i)} \otimes a_i \otimes 1_{\phi'(X_i)}$. De aquí que

$$a_{i\mu\lambda} = f_\mu \phi(a_i) e_\lambda = f_\mu (1_{\phi'(Y_i)} \otimes a_i \otimes 1_{\phi'(X_i)}) e_\lambda = f_\mu \otimes a_i \otimes e_\lambda.$$

Además, B' es la subcategoría plena de E' cuyos objetos no tienen sumandos directos isomorfos a Z_{ij} para todas i y j, luego

$$B = [B' \bigotimes_{E'} (E' \bigotimes_{A'} T \bigotimes_{A'} E') \bigotimes_{E'} B']^{\otimes} \simeq [B' \bigotimes_{A'} T \bigotimes_{A'} B']^{\otimes},$$

y B es libremente generada sobre B' por $1_{\psi\phi(Y_i)} \otimes a_i \otimes 1_{\psi\phi(X_i)}$ o $1_{\psi'(Y_\mu)} \otimes f_\mu \otimes a_i \otimes e_\lambda \otimes 1_{\psi'(Y_\lambda)}$, y $\psi : E \longrightarrow B$ es el funtor que extiende a $\psi' : E' \longrightarrow A'$ tal que $\psi(a_{i\mu\lambda}) = \psi(f_\mu \otimes a_i \otimes e_\lambda)$. Pero

$$\psi(f_\mu \otimes a_i \otimes e_\lambda) = \begin{cases} a_i & \text{si } \lambda,\ \mu \in inesC, \\ 0 & \text{si } \lambda, \text{ o } \mu = (i,j,k), \\ 1_X \otimes a_i \otimes 1_X = a_i & \text{si } \lambda,\ \mu = X. \end{cases}$$

pues

$$\psi(f_\mu \otimes a_i \otimes e_\lambda) = 1_X \otimes f_X \otimes a_i \otimes e_X \otimes 1_X = 1_X$$ [redacted]

Por otro lado, como $v_{j\mu\lambda} = f_\mu \phi_1(v_j) e_\lambda$, entonces :

$$\psi_1(v_{j\mu\lambda}) = \psi_1(f_\mu \phi_1(v_j) e_\lambda) = \begin{cases} \psi_1\phi_1(v_j) = \theta_1(v_j) & \text{si } \lambda,\ \mu \in inesC, \\ 0 & \text{si } \lambda \text{ o } \mu = (i,j,k) \\ \theta_1(v_j) & \text{si } \lambda \text{ y } \mu = X. \end{cases}$$

pues

$$\psi_1(f_\mu \phi_1(v_j) e_\lambda) = \psi(f_X)\psi_1\phi_1(v_j)\psi(e_X) = \psi_1\phi_1(v_j) = \theta_1(v_j).$$

Mientras que $\psi_1(\tau(x_q)) = 0$, pues x_q es un generador de $J' = \ker(B' \bigotimes_{A'} B' \longrightarrow B')$ y $x_q \in J'(Z_{ij}, Z_{pj})$ para algunos Z_{ij} y Z_{pj}, así $\tau(x_q) \in {}^E V^E(Z_{ij}, Z_{pj})$. Esto completa la demostración de (1).

Si $M \in R(\mathcal{A})$ con $M(g(x))$ invertible, entonces M se extiende a $B'(X,X)$ para tener una representación de B' y la propiedad de pushout de θ nos dá una representación N en $R(\mathcal{A}^B)$ tal que $M = N\theta = \theta^*(N)$, y hemos probado (2).

Mostramos (3) notando que A' y B' tienen los mismos objetos inescindibles con los mismos anillos de endomorfismos, excepto para X, pero $A'(X,X) \neq k \neq B'(X,X)$, pues se sigue de la proposición 1.18 que A y B están libremente generadas sobre A' y B', respectivamente, con los mismos generadores.

Finalmente, tenemos que $\omega' := \psi_1\tau\sigma$, así que

$$\begin{aligned} \delta'(a_i) &= \omega'(1_{Y_i})a_i - a_i\omega'(1_{X_i}) \\ &= \psi_1\tau\sigma(1_{Y_i})a_i - a_i\psi_1\tau\sigma(1_{X_i}) \\ &= \tau\sigma(1_{Y_i})a_i - a_i\tau\sigma(1_{X_i}) \\ &= (1_{Y_i} \otimes \omega(1_{Y_i}) \otimes 1_{Y_i})a_i - a_i(1_{X_i} \otimes \omega(1_{X_i}) \otimes 1_{X_i}) \\ &= 1_{Y_i} \otimes \omega(1_{Y_i})a_i \otimes 1_{X_i} - 1_{Y_i} \otimes a_i\omega(1_{X_i}) \otimes 1_{X_i} \\ &= 1_{Y_i} \otimes [\omega(1_{Y_i})a_i - a_i\omega(1_{X_i})] \otimes 1_{X_i} \\ &= 1_{Y_i} \otimes \delta(a_i) \otimes 1_{X_i} = \theta_1\delta(a_i). \square \end{aligned}$$

El último tipo de operación sobre bocses es la reducción de una "arista mínima" dada por Roiter en [R].

PROPOSICION 3.9 *Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un bocs con estratificación*

$$(A'; \omega; a_1, \ldots, a_n; v_1, \ldots, v_m).$$

Supóngase que $a_1 \in A(X,Y)$ tiene diferencial cero, $X \neq Y$ y $A'(X,X)$ y $A'(Y,Y)$ son ambos triviales. Entonces existe una categoría B y un funtor $\theta : A \longrightarrow B$ tales que

(1) El bocs inducido $\mathcal{A}^B$ es estratificado;

(2) θ^* es una equivalencia; y

(3) Si N es una representación en $R(\mathcal{A}^B)$, entonces $\| N \| \leq \| \theta^*(N) \|$. Si $\theta^*(N)(X)$ y $\theta^*(N)(Y)$ son ambos no cero, entonces la desigualdad es estricta.

DEMOSTRACION. Sea A'' la subcategoría de A generada por A' y a_1. Sea D la categoría trivial con tres objetos inescindibles Z_1, Z_2, y Z_3, y C es la subcategoría plena de A' cuyos objetos no tienen sumandos directos isomorfos a X o Y. Sea $B' = C \times D$, una categoría mínima. Definimos el funtor $\theta' : A'' \longrightarrow B'$ que actúa como la identidad sobre C, $\theta'(X) = Z_1 \bigoplus Z_2$ y $\theta'(Y) = Z_2 \bigoplus Z_3$, y además

$$\theta'(a_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1_{Z_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Probaremos que θ' es admisible. Sea Λ la unión de $Ob(inesC)$ y $\{11,12,22,23\}$. Para $W \in Ob(inesC)$, sea $X_W = Y_W = W$, $e_W = f_W = 1_W$. Definimos $X_{1j} = X$, $X_{2j} = Y$, $Y_{ij} = Z_j$, y sean e_{ij} y f_{ij} los morfismos que se dividen canónicos de las descomposiciones de $\theta'(X)$ y $\theta'(Y)$, así:

$$e_{11} = \begin{bmatrix} 1_{Z_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad e_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1_{Z_2} \end{bmatrix}, \qquad e_{22} = \begin{bmatrix} 1_{Z_2} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad e_{23} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1_{Z_3} \end{bmatrix},$$

$$f_{11} = \begin{bmatrix} 1_{Z_1} & 0 \end{bmatrix}, \quad f_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1_{Z_2} \end{bmatrix}, \quad f_{22} = \begin{bmatrix} 1_{Z_2} & 0 \end{bmatrix}, \quad f_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 1_{Z_3} \end{bmatrix}.$$

Las siguientes relaciones son inmediatas:

$$\theta'(a_1)e_{11} = 0, \qquad \theta'(a_1)e_{12} = e_{22}$$

$$f_{22}\theta'(a_1) = f_{12} \qquad f_{23}\theta'(a_1) = 0$$

Al pasar $\theta'(a_1)$ através del producto tensorial obtenemos:

$$\begin{aligned} f_{12} \otimes e_{12} &= f_{22}\theta'(a_1) \otimes e_{12} = f_{22} \otimes \theta'(a_1)e_{12} = f_{22} \otimes e_{22}, \\ f_{12} \otimes e_{11} &= f_{22}\theta'(a_1) \otimes e_{11} = f_{22} \otimes \theta'(a_1)e_{11} = 0, \\ f_{23} \otimes e_{22} &= f_{23} \otimes \theta'(a_1)e_{12} = f_{23}\theta'(a_1) \otimes e_{12} = 0 \end{aligned} \qquad [14]$$

De aquí se tiene que θ' es admisible: las condiciones (A1) y (A2) son claras. De las definiciones de Λ, e_λ y f_λ son evidentes las condiciones (A4) y (A5). La primera de las ecuaciones [14] establece (A6,1), mientras que (A6,2) (i.e. $bf_\lambda \otimes e_\lambda = f_\lambda \otimes e_\lambda b$ para b en $B'(Y_\lambda, Y_\lambda)$), se tiene para los elementos $W \in Ob(inesC)$ pues pasan através del producto tensorial, y para los objetos Z_{ij} pues tienen anillos de endomorfismos triviales. Las dos últimas ecuaciones de [14] nos dan (A7) tomando $12 > 11$ y $23 > 22$. Finalmente obtenemos (A3), pues en 3.5 se muestra que J' está generado como B'-B' bimódulo por los elementos $f_\mu \otimes e_\lambda$ con $\mu \neq \lambda$ y $X_\lambda = X_\mu$, en este caso por $f_{11} \otimes e_{12}$ y $f_{22} \otimes e_{23}$, luego J' es cero excepto para los espacios $J'(Z_1, Z_2)$ y $J'(Z_2, Z_3)$. Como en 3.7 J' resulta libre porque los Z_i tienen anillos de endomorfismos triviales en B'.

Para aplicar 3.5, es necesario mostrar que tenemos una pre-estratificación

$$(A''; \omega''; a_2, \ldots, a_n; v_1, \ldots, v_m)$$

para $\mathcal{A}$. Por 1.16(2) sabemos que A es libremente generada sobre A'' por los morfismos $a_2, \ldots, a_n$, así se tiene L(2), y obviamente L(4).

Ahora definimos ω''. Como $\delta(a_1) = 0$, el A'-A' morfismo $\omega_R : {}_{A'}A \longrightarrow {}_{A'}V$ con $\omega_R(h) = \omega(1_Z)h$ con $h \in A(Z', Z)$ es realmente un morfismo de A''-A bimódulos, y sea ω'' la restricción a A'', entonces ω'' es un group-like. En efecto, si $\jmath : A'' \longrightarrow A$ es la inclusión, entonces $(\jmath, \omega'') : (A'', A'') \longrightarrow \mathcal{A}$ es morfismo de bocses:

$$\begin{tikzcd}
A'' \arrow[r, "\omega''"] \arrow[d, "1_{A''}"'] & V \arrow[d, "\epsilon"] \\
A'' \arrow[r, "\jmath"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A'' \arrow[r, "\omega''"] \arrow[d, "\mu_{A''}"'] & V \arrow[dr, "\mu"] & \\
 & & V \otimes_A V \\
A'' \otimes_{A''} A'' \arrow[r, "\omega'' \otimes \omega''"'] & V \otimes_{A''} V \arrow[ur, "\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

Para que estos diagramas conmuten, como ω'' es una extensión de ω que es un group-like, basta ver la conmutatividad para a_1:

$$\epsilon\omega''(a_1) = a_1\epsilon\omega''(1_X) = a_1\epsilon\omega(1_X) = a_1,$$

$$\begin{aligned}
\mu\omega''(a_1) &= [\mu\omega''(1_Y)](a_1) = [\mu\omega(1_Y)](a_1) = [\pi(\omega \otimes \omega)\mu_{A'}(1_Y)](a_1) \\
&= [\pi(\omega \otimes \omega)(1_Y \otimes 1_Y)](a_1) = [\pi(\omega(1_Y) \otimes \omega(1_Y))](a_1) \\
&= [\pi(\omega''(1_Y) \otimes \omega''(1_Y))](a_1) = [\pi(\omega'' \otimes \omega'')\mu_{A''}(1_Y)](a_1) \\
&= \pi(\omega'' \otimes \omega'')\mu_{A''}(a_1).
\end{aligned}$$

Pero además ω'' es reflector, es decir $(\jmath, \omega'')^*$ refleja isomorfismos. Considerando $\imath : A' \longrightarrow A$ e $\imath' : A' \longrightarrow A''$, inclusiones, claramente $(\imath', \imath') : (A', A') \longrightarrow (A'', A'')$ es un morfismo de bocses, tal que $(\imath,\omega) = (\jmath,\omega'')(\imath',\imath')$, luego $(\imath,\omega)^* = (\imath',\imath')^*(\jmath,\omega'')^*$. Si ϕ es un morfismo en $\mathcal{A}$ tal que $(\jmath,\omega'')^*\phi$ es isomorfismo, entonces $(\imath',\imath')^*(\jmath,\omega'')^*\phi = (\imath,\omega)^*\phi$ es isomorfismo, como ω es reflector,ϕ es isomorfismo.

También tenemos (L5), pues si para $2 \leq i \leq n$, A_i' es la subcategoría de A generada por A'' y $a_2,\ldots,a_i$, y δ'' es el diferencial asociado a ω'', A_i es como en la definición 2.17, entonces $\delta'' = \delta$, $A_1 = A''$ y $A_i' = A_i$ para $i \geq 2$ y obviamente se cumple (L5).

Tomando $\theta : A \longrightarrow B$ el pushout de θ', por 3.5, $\mathcal{A}^B$ es estratificado y tenemos (1).

Mostramos (2). Por 2.6(b) tenemos que θ^* es fiel y pleno, debemos mostrar que es denso. Sea M una representación de $\mathcal{A}$ y consideremos $M(a_1) : M(X) \longrightarrow M(Y)$. Si $U_1 = \ker M(a_1)$, y $U_2 = \operatorname{Im} M(a_1)$, escribimos $M(X) = U_1 \bigoplus U$ y $M(Y) = U_2 \bigoplus U_3$, donde $U \simeq U_2$ y U_3 es un complemento directo arbitrario de U_2. Con esta descomposición $M(a_1)$ se describe matricialmente por

$$\begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde $t : U \longrightarrow U_2$ es el isomorfismo que se obtiene al restringir $M(a_1)$ a los espacios dados.

Definimos $N' : B' \longrightarrow modk$ tal que ${}_CN' = {}_CM$ y $N'(Z_1) = U_1$, $N'(Z_2) = U_2$, $N'(Z_3) = U_3$. En $R(A'')$ se tiene el isomorfismo $\nu : {}_{A''}M \longrightarrow N'\theta'$ definido por: para $Z \in Ob(inesC)$ o $Z = Y$, se tiene $\nu_Z = 1_{M(Z)} : M(Z) \longrightarrow M(Z) = N'\theta'(Z)$, mientras que $\nu_X : M(X) = U_1 \bigoplus U \longrightarrow N'\theta'(X) = U_1 \bigoplus U_2$ está dado por el isomorfismo

$$\begin{bmatrix} 1_{U_1} & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}.$$

Resulta que ν es un morfismo de A'' módulos, es decir que para $a \in A''(Z,Z')$ se tiene $N'\theta'(a)\nu_Z = \nu_{Z'}M(a)$. En efecto, si $Z = Z' \neq X$, así $Z = Y$ o $Z \in Ob(inesC)$, entonces $\nu_Z = 1_{M(Z)}$ y si $Z = Z' = X$, entonces $a = \lambda 1_X$ con $\lambda \in k$, y en ambos casos se tiene la conmutatividad. Pero si $Z \neq Z'$, entonces basta considerar $a_1 : X \longrightarrow Y$. Nótese $N'\theta'(a_1) : N'\theta'(X) = V_1 \bigoplus U_2 \longrightarrow N'\theta'(Y) = U_2 \bigoplus U_3$ y para esta descomposición la forma matricial de $N'\theta'(a_1)$ es

$$N'\theta'(a_1) = N' \begin{bmatrix} 0 & 1_{Z_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1_{U_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

y de aquí que

$$\begin{aligned}
\nu_Y M(a_1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1_{U_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{U_1} & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} = N'\theta'(a_1)\nu_X.
\end{aligned}$$

Utilizando que $\theta : A \longrightarrow B$ es un pushout, obtenemos una representación $N : B \longrightarrow modk$ tal que $\theta^*(N) = N\theta \simeq M$ en $R(\mathcal{A})$.

Finalmente, si N es una representación en $R(\mathcal{A}^B)$ se tiene

$$\begin{aligned}
\| N \| &= \sum_{i\geq 2} \sum_{\mu,\lambda} \dim N(X_{i\mu\lambda}) \dim N(Y_{i\mu\lambda}) + \sum_{\substack{Z \text{ ines} \\ B'(Z,Z)\neq k}} [\dim N(Z)]^2 \\
&= \sum_{\substack{a_i \in A(X,Y) \\ X_i \neq X, Y_i \neq Y}} \dim N(X_i) \dim N(Y_i) + \\
&\quad + \sum_{\substack{a_i \in A(X,Y_i) \\ Y_i \neq Y}} \sum_{a_{iY_i\lambda} \in \Lambda_{i,X}} \dim N(X_{iY_i\lambda}) \dim N(Y_i) + \\
&\quad + \sum_{\substack{a_i \in A(X_i,Y) \\ X_i \neq X}} \sum_{a_{i\mu X_i} \in \Lambda_{i,Y}} \dim N(X_i) \dim N(Y_{i\mu X_i}) + \\
&\quad + \sum_{\substack{i \neq 1 \\ a_i \in A(X,Y)}} \sum_{a_{i\mu\lambda} \in \Lambda_i} \dim N(X_{i\mu\lambda}) \dim N(Y_{i\mu\lambda}) + \sum_{\substack{Z \text{ ines} \\ B'(Z,Z)\neq k}} [\dim N(Z)]^2,
\end{aligned}$$

donde :

$$\begin{aligned}
\Lambda_{i,X} &= \{ a_{iY_i\lambda} \mid \lambda \in \Lambda \ , \ X_\lambda = X \} = \{ a_{iY_i\lambda} \mid \lambda = 11, 12 \} \\
&= \{ \theta(a_i)e_{11}, \theta(a_i)e_{12} \},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{i,Y} &= \{ a_{i\mu X_i} \mid \mu \in \Lambda, X_\mu = Y \} == \{ \mathfrak{a}_{i\mu X_i} \mid \mu = 22, 23 \} \\
&= \{ f_{22}\theta(a_i), f_{23}\theta(a_i) \},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_i &= \{ a_{i\mu\lambda} \mid \mu, \ \lambda \in \Lambda, \ X_\lambda = X, \ X\mu = Y \} \\
&= \{ a_{i\mu\lambda} \mid \lambda = 11, \ 12, \ \mu = 22, \ 23 \} \\
&= \{ f_{22}\theta(a_i)e_{11}, \ f_{23}\theta(a_i)e_{11}, \ f_{22}\theta(a_i)e_{12}, \ f_{23}\theta(a_i)e_{12} \}.
\end{aligned}$$

Mientras que

$$\begin{aligned}
\| \theta^* N \| &= \sum_{i=1}^{n} \dim N\theta(X_i)\dim N\theta(Y_i) + \sum_{\substack{Z\, \text{tales} \\ A'(Z,Z)\neq k}} [\dim N\theta(Z)]^2 \\
&= \sum_{\substack{a_i\in A(X_i,Y_i) \\ X_i\neq X, Y_i\neq Y}} \dim N(X_i)\dim N(Y_i) + \sum_{\substack{a_i\in A(X,Y_i) \\ Y_i\neq Y}} \dim N\theta(X)\dim N(Y_i) + \\
&\quad + \sum_{\substack{a_i\in A(X_i,Y) \\ X_i\neq X}} \dim N(X_i)\dim N\theta(Y) + \sum_{a_i\in A(X,Y)} \dim N\theta(X)\dim N\theta(Y) + \\
&\quad + \sum_{\substack{Z\, \text{tales} \\ B'(Z,Z)\neq k}} [\dim N(Z)]^2.
\end{aligned}$$

Para i fija, con $a_i \in A(X, Y_i)$, con $Y_i \neq Y$, se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{a_i Y_i \lambda \in \Lambda_{i,X}} \dim N(X_{i\mu\lambda})\dim N(Y_i) &= \dim N(Z_1)\dim N(Y_i) + \dim N(Z_2)\dim N(Y_i) \\
&= [\dim N(Z_1) + \dim N(Z_2)]\dim N(Y_i) \\
&= \dim N(Z_1 \bigoplus Z_2)\dim N(Y_i) \\
&= \dim N\theta(X)\dim N(Y_i),
\end{aligned}$$

para i fija, y en el caso en que $a_i \in A(X_i, Y)$, con $X_i \neq X$, se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{a_{i\mu\lambda}\in \Lambda_{i,Y}} \dim N(X_i)\dim N(Y_{i\mu X_i}) &= \dim N(X_i)\dim N(Z_2) + \dim N(X_i)\dim N(Z_3) \\
&= \dim N(X_i)[\dim N(Z_2) + \dim N(Z_3)] \\
&= \dim N(X_i)\dim N(Z_2 \bigoplus Z_3) \\
&= \dim N(X_i)\dim N\theta(Y),
\end{aligned}$$

para i fija, con $a_i \in A(X, Y)$, se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{a_{i\mu\lambda}\in \Lambda_i} \dim N(X_{i\mu\lambda})\dim N(Y_{i\mu\lambda}) &= \dim N(Z_1)\dim N(Z_2) + \dim N(Z_1)\dim N(Z_3) + \\
&\quad + \dim N(Z_2)\dim N(Z_2) + \dim N(Z_2)\dim N(Z_3) \\
&= \dim N(Z_1 \bigoplus Z_2)\dim N(Z_2 \bigoplus Z_3) \\
&= \dim N\theta(X)\dim N\theta(Y),
\end{aligned}$$

y por lo tanto que

$$\sum_{\substack{a_i \in A(X,Y) \\ i \neq 1}} \sum_{a_{i\mu\lambda} \in A_i} \dim N(X_{i\mu\lambda}) \dim N(Y_{i\mu\lambda}) \leq \sum_{a_i \in A(X,Y)} \dim N\theta(X) \dim N\theta(Y),$$

y consecuentemente $\| N \| \leq \| \theta^{\bullet} N \|$. Si $N\theta(X)$ y $N\theta(Y) \neq 0$, nótese que la suma de la derecha posee un sumando no nulo mas que la suma de la izquierda, el que corresponde a $i = 1$, y así la desigualdad es estricta.□

4 BOCSES MANSOS Y SALVAJES

En este capítulo introducimos las definiciones de bocses salvajes, críticos y mínimos. Los bocses salvajes quedarán definidos en términos de una categoría de módulos sobre el álgebra de polinomios en dos variables no conmutativas, x e y, denotada por $k\langle x,y\rangle$. La afirmación más importante nos mostrará algunas características de los bocses no salvajes, su demostración se basa en que estos bocses no poseen las configuraciones de los bocses críticos, pues como mostraremos al final de este capítulo, estos últimos resultan salvajes. Antes de empezar, observemos que si A y B son categorías y $F : A \longrightarrow B$ es un funtor, entonces $(F, F) : (A, A) \longrightarrow (B, B)$ es un morfismo entre los bocses principales, y para un bocs $\mathcal{A}$ con counidad ε, también se tiene que $(1_A, \epsilon) : \mathcal{A} \longrightarrow (A, A)$ es un morfismo de bocses.

DEFINICION 4.1 *Sea Σ la categoría de $k\langle x,y\rangle$−módulos libres finitamente generados. Decimos que un bocs $\mathcal{A} = (A, V)$ es* salvaje *si existe un funtor $F : A \longrightarrow \Sigma$ tal que el funtor inducido $(F, F\varepsilon)^* : R(\Sigma) \longrightarrow R(\mathcal{A})$ preserva clases de isomorfía e inescindibilidad.*

En esta definición hay una pequeña modificación a la de Drozd, pues él no pide que $(F, F\varepsilon)^*$ preserve inescindibles. Se ha incluido esta condición para simplificar algunos argumentos. Las siguientes dos definiciones tienen que ver con bocses estratificados.

DEFINICION 4.2 *Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un bocs con estratificación*

$$L = (A'; \omega; a_1, \ldots, a_n; v_1, \ldots, v_m)$$

y supóngase que $a_1 \in A(X, Y)$. Decimos que $\mathcal{A}$ es un bocs crítico *en los siguientes dos casos:*

(1) $\delta(a_1) = 0$ y $A'(X, X)$ o $A'(Y, Y)$ es no trivial;

(2) $A'(X, X)$ y $A'(Y, Y)$ son ambos no triviales y $\delta(a_1) = rv_1$, para algún r no invertible en $R = A'(Y, Y) \bigotimes_k A'(X, X)^{op}$.

PROPOSICION 4.3 *Si el bocs $\mathcal{A}$ es crítico entonces $\mathcal{A}$ es salvaje.*

La demostración de este resultado la dejamos para mas adelante.

En el próximo teorema estamos interesados en cierto tipo de bocses estratificados con $A' = A$, que definimos enseguida.

DEFINICION 4.4 *Decimos que un bocs* $\mathcal{A} = (A, V)$ *es un bocs* **mínimo** *si* A *es una categoría mínima,* $\overline{V}$ *es un* A-A *bimódulo proyectivo finitamente generado, y existe un morfismo de* $A-$*coalgebras* $\omega : A \longrightarrow V$, *tal que el funtor* $(1_A, \omega)^* : R(\mathcal{A}) \longrightarrow R(A)$ *es una* **equivalencia de representación**, *es decir, es pleno, denso y refleja isomorfismos.*

Observemos que la existencia del morfismo de A-coálgebras $\omega : A \longrightarrow V$, asegura que $(1_A, \omega)^*$ es denso y pleno. En efecto, como $\varepsilon\omega = 1_A$, entonces $(1_A, \omega) : (A, A) \longrightarrow \mathcal{A}$ y $(1_A, \varepsilon) : \mathcal{A} \longrightarrow (A, A)$ son morfismos de bosces tales que $(1_A, 1_A) = (1_A, \varepsilon)(1_A, \omega)$ y de aquí que $1_{R(A)} = (1_A, 1_A)^* = (1_A, \omega)^*(1_A, \varepsilon)^*$, y consecuentemente $(1_A, \omega)^*$ es pleno y denso.

TEOREMA 4.5 *Si* $\mathcal{A} = (A, V)$ *es un bocs estratificado no salvaje y* $d > 0$, *entonces existen categorías* $B_1, \ldots, B_n$ *y funtores* $\theta_i : A \longrightarrow B_i$ *tales que:*

(1) Los bocses $\mathcal{B}_i = \mathcal{A}^{B_i}$ *son mínimos; y*

(2) toda representación de $\mathcal{A}$ *con dimensión no mayor que* d *es isomorfa a* $\theta_i^*(N)$ *para algún* i *y alguna representación* N *de* $\mathcal{B}_i$.

<u>DEMOSTRACION</u>. Primero nótese que todos los bocses que se construyen son inducidos de $\mathcal{A}$, luego el funtor inducido entre las categorías de representaciones es fiel y pleno (2.6(b)), por lo que ninguno de ellos puede ser salvaje. Es claro que al cambiar d podemos reemplazar (2) por:

(2′) Toda representación de $\mathcal{A}$ con norma no mayor que d es isomorfa a $\theta_i^*(N)$ para algún i y alguna representación N de $\mathcal{B}_i$.

Probamos el teorema usando inducción sobre d, pero antes de empezar veamos que podemos debilitar la afirmación sobre d al reemplazar (2′) por:

(2″) Toda representación sincera (ver 3.6) de $\mathcal{A}$ con norma no mayor que d es isomorfa a $\theta_i^*(N)$ para alguna i y alguna representación N de $\mathcal{B}_i$.

Veamos que la afirmación debilitada (2″) implica el enunciado general (2'). Considérese la colección finita $C_1, \ldots, C_j$ de todas las subcategorías plenas de A que son cerradas bajo sumas directas y sumandos directos. Aplicamos 3.6 a $\mathcal{A}$ con cada una de esas C_i para obtener categorías D_i y funtores $\alpha_i : A \longrightarrow D_i$ tal que los bocses inducidos $\mathcal{D}_i$ son estratificados y toda representación M de $\mathcal{A}$ es isomorfa a $\alpha_i^*(M')$ para alguna i y alguna M' en $R(\mathcal{D}_i)$ con la misma norma y tal que M' es sincera. Ahora, usando (2"), tenemos una categoría B_j y un funtor $\beta_j : D_i \longrightarrow B_j$ tal que $M' \cong \beta_j^*(N)$ para alguna representación N del bocs mínimo $\mathcal{D}_i^{B_j}$. Tomado $\theta_j = \beta_j\alpha_i$, se tiene que $M \cong \alpha_i^*(M') \cong \alpha_i^*\beta_j^*(N) = \theta^*(N)$ y además $\mathcal{A}^{\theta_l} = (\mathcal{A}^{\alpha_i})^{\beta_j}$ [illegible] y así tenemos el enunciado general (2').

Iniciamos la inducción con $d = 0$. Si M es una representación sincera con norma cero, entonces claramente A es trivial, y así $\mathcal{A}$ es un bocs mínimo.

Para el paso inductivo examinamos la estratificación

$$(A'; \omega; a_1, \dots, a_n; v_1, \dots, v_m)$$

para $\mathcal{A}$. Supóngase primero que

$$\delta(a_1) = 0 \qquad \text{y} \qquad a_1 \in A(X, X) \quad \text{para algún} \quad X. \tag{1}$$

Por 4.3 y 4.2, $A'(X, X)$ es trivial, así que A'', la subcategoría de A generada por A' y a_1, es mínima. Por consiguiente, podemos reemplazar la estratificación de A con la nueva estratificación $(A''; \omega''; a_2, \dots, a_n; v_1, \dots, v_m)$ donde ω'' es la restricción de ω_L a A'', que es un morfismo de A''-A'' bimódulos pues $\delta(a_1) = 0$. Repitiendo este procedimiento de ser necesario, podemos suponer que a_1 no satisface [1]. Si no restan generadores libres de A, entonces $\mathcal{A}$ ya es mínimo. De otra manera, existen las siguientes posibilidades para a_1.

<u>CASO (1)</u>: Si $\delta(a_1) = 0$ y $a_1 \in A(X, Y)$ con $X \neq Y$, entonces $A'(X, X)$ y $A'(Y, Y)$ deben ser triviales por 4.2, y es posible aplicar 3.9, así existe una categoría B y un funtor $\theta : A \longrightarrow B$ que satisfacen la conclusiones de 3.9. Como θ^* es equivalencia, para toda representación M de $\mathcal{A}$ existe una representación M' en $R(\mathcal{A}^B)$ tal que $M \cong \theta^*(M')$. Si además M es sincera, entonces $0 \neq M(X) \cong \theta^*(M')(X)$ y $0 \neq M(Y) \cong \theta^*(M')(Y)$, así que por 3.9(3), se tiene que $\| M' \| < \| \theta^*(M') \| = \| M \| = d$, y por la hipótesis de inducción, existe una categoría B_i y un funtor $\alpha_i : B \longrightarrow B_i$ tal que $B_i = (\mathcal{A}^\theta)^{\alpha_i}$ es mínimo y M' es isomorfa $\alpha_i^*(N)$ para alguna representación N de B_i. Tomando $\theta_i = \alpha_i\theta$, se tiene $M \cong \theta^*(M') \cong \theta^*\alpha_i^*(N) = \theta_i^*(N)$, y además $\mathcal{A}^{\theta_i} \simeq (\mathcal{A}^\theta)^{\alpha_i}$.

De otra manera $\delta(a_1) \neq 0$. Sea $a_1 \in A(X, Y)$ (posiblemente $X = Y$). Sea $R = A'(Y, Y) \bigotimes_k A'(X, X)^{op}$, así que $V(X, Y)$ es un R-módulo. Supóngase que los v_i que están en $V(X, Y)$ son $v_1, \dots, v_j$. Así $\delta(a_1)$ está en el R-submódulo de $V(X, Y)$ generado por $v_1, \dots, v_j$, pues δ es 0-triangular. Sea $\delta(a_1) = \sum_{i=1}^{j} r_i v_i$ con $r_i \in R$. Como $\delta(a_1) \neq 0$, al excluir los otros términos, podemos suponer que cada r_i no es cero. Ahora continuamos con los casos.

<u>CASO (2)</u>. Algún r_i es invertible en R.

En particular esto pasa si $A'(X,Y)$ y $A'(Y,Y)$ son triviales ambos. Si r_i es invertible en R, entonces en la estratificación podemos hacer el cambio de base sustituyendo v_i por

$$v_i' = r_1 v_1 + \cdots + r_j v_j,$$

y después de intercambiar v_1 y v_i'. Ahora podemos aplicar 3.1, y tenemos un funtor $\theta : A \longrightarrow B$, tal que, como en 3.1(2) θ^* es una equivalencia, para toda representación M de $\mathcal{A}$, existe $M' \in R(\mathcal{A}^\theta)$ con $M \cong \theta^*(M')$. Si además M es sincera, entonces $0 \neq M(X) \cong \theta^*(M')(X)$ y $0 \neq M(Y) \cong \theta^*(M')(Y)$, y por 3.1(3) se tiene $\| M' \| < \| \theta^*(M') \| = \| M \| = d$. Usando la hipótesis de inducción, como en el caso (1), tenemos una categoría B_i y un funtor $\theta_i : A \longrightarrow B_i$ tal que $M \cong \theta_i^*(N)$ para alguna representación N del bocs mínimo $\mathcal{A}^{\theta_i}$.

<u>CASO (3)</u>. $A'(Y,Y)$ es trivial.

Por el caso (2) podemos suponer que $A'(X,X)$ no es trivial. Sea $A'(X,X) = k[x, f(x)^{-1}]$, así $R = k[x, f(x)^{-1}]$. Con un cambio apropiado en la base de $\overline{V}$ de la forma

$$v_i' = f(x)^{-p} v_i,$$

podemos suponer que los r_i son polinomios en x. Sea $\alpha : A \longrightarrow C$ el funtor construído en 3.7, usando el polinomio $r_1(x)$ y tomando r suficientemente grande, por ejemplo $r = d$. Para cada representación sincera M de $\mathcal{A}$ de norma no mayor que d y con $M(r_1(x))$ no invertible, por 3.7(2) y 3.7(3), es isomorfa a $\alpha^*(M')$ con M' una representación de $\mathcal{A}^C$ y tal que $\| M' \| < \| \alpha^*(M') \leq d$. Así por hipótesis de inducción, como en el caso (1), tenemos una categoría B_i y un funtor $\theta_i : A \longrightarrow B_i$ tal que $M \cong \theta_i^*(N)$ para alguna representación N del bocs mínimo $\mathcal{A}^{\theta_i}$.

Por otro lado, tomando $\beta : A \longrightarrow D$ el funtor de 3.8 las representaciones sinceras M de $\mathcal{A}$ de norma mayor que d y con $M(r_1(x))$ invertible son isomorfas a $\beta^*(N)$ con N una representación sincera de $\mathcal{A}^D$ de norma no mayor que d. Ahora $\mathcal{A}^D$ tiene una estratificación de la forma

$$(D'; \omega'; \beta(a_1), \ldots, \beta(a_n); \beta_1(v_1), \ldots, \beta_1(v_m))$$

y $\beta(a_1)$ tiene diferencial $\beta_1(\delta(a_1))$, es decir

$$\sum_{i=1}^{j} \beta(r_i)\beta_1(v_i).$$

Como $\beta(r_1)$ es invertible por construcción, por 3.8(1), podemos proceder como en el caso (2).

<u>CASO (4)</u>. $A'(X,X)$ es trivial. Es dual del caso (3).

CASO (5). $A'(X,X)$ y $A'(Y,Y)$ son ambos no triviales.

Sean $A'(X,X) = k[x, f(x)^{-1}]$ y $A'(Y,Y) = k[y, g(y)^{-1}]$, así que $R = k[x, y, f(x)^{-1}, g(y)^{-1}]$. Con un cambio apropiado en la base de $\overline{V}$ de la forma

$$v_i' = f(x)^{-p} g(y)^{-p} v_i,$$

podemos suponer que los r_i son polinomios en x y y. Sea $h(x,y)$ el máximo común divisor de los $r_i(x,y)$, y sea $q_i(x,y) = r_i(x,y)/h(x,y)$. Puesto que los $q_i(x,y)$ son coprimos en $k(x)[y]$ existen polinomios $s_i(x,y)$ y un polinomio no cero $c(x) \in k[x]$ tales que

$$c(x) = \sum_{i=1}^{j} s_i(x,y) q_i(x,y). \qquad [2]$$

Como en el caso (3) para las representaciones M en $R(\mathcal{A})$ con $M(c(x))$ no invertible se procede al aplicar 3.7.

Por otro lado, sea $\beta : A \longrightarrow D$ el funtor construído en 3.8 usando el polinomio $c(x)$ y $r = d$. Las representaciones sinceras M de $\mathcal{A}$ con norma no mayor que d y $M(c(x))$ invertible son isomorfas a $\beta_1^*(N)$ con N una representación sincera de $\mathcal{A}^D$ de norma no mayor que d. Ahora $\mathcal{A}^D$ tiene estratificación de la forma

$$(D'; \omega'; \beta(a_1), \ldots, \beta(a_n); \beta_1(v_1), \ldots, \beta_1(v_m))$$

y $\beta(a_1)$ tiene diferencial $\theta_1(\delta(a_1))$, es decir

$$\delta(\beta(a_1)) = \sum_{i=1}^{j} \beta(r_i)\beta_1(v_i) = \sum_{i=1}^{j} r_i w_i,$$

donde hemos identificado los r_i con sus imágenes bajo β, y escrito w_i por $\beta_1(v_i)$. La fórmula [2] dá

$$1 = \sum_{i=1}^{j} (s_i(x,y) c(x)^{-1}) q_i(x,y).$$

Los términos en esta fórmula están todos en el anillo $S = k[x, y, c(x)^{-1}]$ que es un anillo de Hermite [L], luego existe una matriz invertible Q en $M_{j \times j}[S]$ con primer renglón $(q_i(x,y))$. Así podemos hacer un cambio de base en la estratificación para $\mathcal{A}^D$ de la forma

$$(w_1', \ldots, w_j')^t = Q(w_1, \ldots, w_j)^t.$$

De aquí que

$$\delta(\beta(a_1)) = \sum_{i=1}^{j} r_i w_i = \sum_{i=1}^{j} h(x,y) q_i(x,y) w_i = h(x,y) w_1'.$$

Por 4.2 h debe ser invertible, y otro cambio de base dá $\delta(\beta(a_1)) = w_1''$. Como en el caso (2), ahora podemos usar 3.1.□

Ahora probaremos la proposición 4.3. Observemos antes que si Σ es la categoría de $k(u,v)$-módulos libres finitamente generados, podemos asumir que Σ es esquelética, y entonces tiene objetos $S^n, n = 0,1,2,\ldots$, $S = k(u,v)$ y $\Sigma(S^n, S^m)$ se identifica con $M_{m\times n}[k(u,v)]$.

Debemos construir un funtor $F : A \longrightarrow \Sigma$ tal que el funtor inducido $(F, F\varepsilon)^* : R(\Sigma) \longrightarrow R(\mathcal{A})$ preserve clases de isomorfismo e inescindibles. Daremos el funtor F especificando las imágenes de ciertos objetos y morfismos importantes. En cada caso supondremos que F es cero en todos los otros objetos inescindibles y generadores libres de A sobre A'. La existencia de funtores apropiados estará garantizada por 1.24(4) y 1.14. Separamos la demostración en dos lemas.

LEMA 4.6 *Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un bocs con estratificación*

$$L = (A'; \omega; a_1, \ldots, a_n; v_1, \ldots, v_m)$$

y supóngase que $a_1 \in A(X,Y)$. Si $\delta(a_1) = 0$ y $A'(X,X)$ o $A'(Y,Y)$ es no trivial entonces $\mathcal{A}$ es salvaje.

DEMOSTRACION.
CASO (1). Supongamos que $X = Y$ y $A'(X,X) = k[x, f(x)^{-1}]$. Definimos

$$F : A \longrightarrow \Sigma$$

por:

$$F(X) = S^3, \qquad F(x) = \begin{bmatrix} p & 1 & 0 \\ 0 & p & 1 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}, \quad \text{y} \qquad F(a_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ u & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \end{bmatrix}$$

donde p no es raíz de $f(x)$. De aquí que $F(f(x)) = f(F(x))$ es invertible y F está bien definido.

Sea M una representación en $R(\Sigma)$, entonces $M' = (F, F\varepsilon)^*M$ es un A-módulo tal que

$$M'(X) = M(S)^3,\ M'(x) = \begin{bmatrix} p & 1 & 0 \\ 0 & p & 1 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix},\ \text{y}\ M'(a_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ M(u) & 0 & 0 \\ 0 & M(v) & 0 \end{bmatrix}.$$

Sea $\phi : M' \to N'$ un morfismo en $R(\mathcal{A})$, $\phi : V \bigotimes_A M' \longrightarrow N'$, si $\phi = (\phi^0, \phi^1)$ y dado que $\delta(a_1) = 0$, tenemos que

$$N'(x)\phi^0_X = \phi^0_X M'(x) \qquad y \qquad N'(a_1)\phi^0_X = \phi^0_X M'(a_1).$$

Luego ϕ^0_X conmuta con un "bloque de Jordan triangular superior" y, como se hace en [M], debe ser de la forma

$$\phi^0_X = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix},$$

y de la segunda ecuación se tiene

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ N(u) & 0 & 0 \\ 0 & N(v) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ M(u) & 0 & 0 \\ 0 & M(v) & 0 \end{bmatrix}$$

concluimos que

$$N(u)\alpha = \alpha M(u) \qquad y \qquad N(v)\alpha = \alpha M(v). \qquad [3]$$

Veamos que $(F, F\varepsilon)^* : R(\Sigma) \longrightarrow R(\mathcal{A})$ preserva isoclases e inescindibles.

Sean M y N en $R(\Sigma)$ tales que $M' \simeq N'$, sea $\phi : M' \to N'$ un isomorfismo, entonces $\phi^0 = (\imath, \omega)^*\phi$ es un isomorfismo, y así lo es ϕ^0_X; siendo ϕ^0_X triangular superior, se tiene que $\alpha : M(S) \longrightarrow N(S)$ es un isomorfismo que, como muestran las ecuaciones [3], se extiende a un isomorfismo $\alpha : M \longrightarrow N$ en $R(\Sigma)$.

Supongamos que $M' = (F, F\varepsilon)^* M \cong N \bigoplus L$, con $N \neq 0$ y $L \neq 0$ en $R(\mathcal{A})$. Como $R(\mathcal{A})$ es una k-categoría, en particular es preaditiva, entonces la suma directa está dada por un biproducto, por consiguiente existen morfismos $i : N \longrightarrow M'$ y $p : M' \longrightarrow N$ en $R(\mathcal{A})$ tales que $pi = I_N$, y $(\phi^0, \phi^1) = \phi = ip : M' \longrightarrow M'$ es un endomorfismos idempotente no tivial (i.e. no iso y no nulo). Como ω refleja isos, entonces $\phi^0 = (\imath, \omega)^*(\phi)$ es un idempotente no iso, y en particular ϕ^0_X es un idempotente no iso, y lo mismo es cierto para α. Si $\alpha = 0$ entonces ϕ^0_X es nilpotente, y consecuentemente es cero, puesto que $M'(Z) = 0$ si $Z \neq X$ y $Z \in ines(A)$, se tiene que $\phi^0 = 0$. Sin embargo, nótese que

$$I_N = pi = (pi)^2 = p(ip)i = p\phi i,$$

luego

$$1_{(\imath,\omega)^*(N)} = (\imath, \omega)^*(I_N) = (\imath, \omega)^*(p)(\imath, \omega)^*(\phi)(\imath, \omega)^*(i) = (\imath, \omega)^*(p)\phi^0(\imath, \omega)^*(i) = 0.$$

Así $(\imath,\omega)^*(N) = 0$, pero $(\imath,\omega)^*$ es un funtor que en objetos es la identidad, luego $N = 0$. Esto contradice nuestra suposición sobre N, y consecuentemente $\alpha \neq 0$. Se sigue que $\alpha : M(S) \longrightarrow M(S)$ es idempotente no trivial que se extiende a un endomorfismo idempotente no trivial $\alpha : M \longrightarrow M$ en $R(\Sigma)$ y M se escinde.

CASO (2). Supongamos que $X \neq Y$. Si $A'(X,X) = k[x, f(x)^{-1}]$ y $A'(Y,Y)$ es trivial, entonces definimos

$$F : A \longrightarrow \Sigma$$

por

$$F(X) = S^5 \qquad \text{y} \qquad F(Y) = S^3,$$

y

$$F(x) = \begin{bmatrix} p & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad F(a_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & u & 1 \\ 0 & 1 & 0 & v & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

donde p no es raíz de f. Como antes F está bien definido.

Sea M una representación en $R(\Sigma)$, entonces $M' = (F, F\varepsilon)^* M$ es un A-módulo tal que

$$M'(X) = MF(X) = M(S)^5 \qquad \text{y} \qquad M'(Y) = MF(Y) = M(S)^3,$$

y

$$M'(x) = \begin{bmatrix} p & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad M'(a_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & M(u) & 1 \\ 0 & 1 & 0 & M(v) & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sea $\phi : M' \longrightarrow N'$ un morfismo en $R(\mathcal{A})$, $\phi : V \bigotimes_A M' \longrightarrow N'$, si $\phi = (\phi^0, \phi^1)$, y dado que $\delta(a_1) = 0$, tenemos que

$$N'(x)\phi^0_X = \phi^0_X M'(x) \quad \text{y} \quad N'(a_1)\phi^0_X = \phi^0_Y M'(a_1). \tag{4}$$

Como ϕ^0_X conmuta con un bloque de Jordan triangular superior, es de la forma

$$\phi^0_X = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 0 & \alpha & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, si escribimos

$$M'(a_1) = \left[\begin{array}{cc} I_3 & \mathfrak{A} \end{array}\right] \qquad \text{y} \qquad N'(a_1) = \left[\begin{array}{cc} I_3 & \mathfrak{B} \end{array}\right],$$

donde

$$\mathfrak{A} = \left[\begin{array}{cc} M(u) & 1 \\ M(v) & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right], \quad \text{y} \quad \mathfrak{B} = \left[\begin{array}{cc} N(u) & 1 \\ N(v) & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right],$$

y

$$\phi_X^0 = \left[\begin{array}{cc} [\phi_X^0]_{11} & [\phi_X^0]_{12} \\ 0 & [\phi_X^0]_{22} \end{array}\right],$$

donde $[\phi_X^0]_{11}$ es "3×3" y $[\phi_X^0]_{22}$ es "2×2", entonces, la segunda ecuación de [4] da que

$$\left[\begin{array}{cc} I_3 & \mathfrak{B} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} [\phi_X^0]_{11} & [\phi_X^0]_{12} \\ 0 & [\phi_X^0]_{22} \end{array}\right] = \phi_Y^0 \left[\begin{array}{cc} I_3 & \mathfrak{A} \end{array}\right],$$

por lo que

$$\phi_Y^0 = [\phi_X^0]_{11} = \left[\begin{array}{ccc} \alpha & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{array}\right]$$

y

$$[\phi_X^0]_{12} + \mathfrak{B}[\phi_X^0]_{22} = \phi_Y^0 \mathfrak{A},$$

de donde

$$\begin{aligned}
\alpha_3 + N(u)\alpha &= \alpha M(u) + \alpha_1 M(v) + \alpha_2 \\
\alpha_2 + N(v)\alpha &= \alpha M(v) + \alpha_1 \\
\alpha_1 + \alpha &= \alpha \\
\alpha_4 + N(u)\alpha_1 + \alpha &= \alpha + \alpha_1 + \alpha_2 \\
\alpha_3 + N(v)\alpha_1 + \alpha &= \alpha + \alpha_1 \\
\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha &= \alpha.
\end{aligned}$$

Las cuatro últimas ecuaciones muestran que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0,$$

mientras que las dos primeras muestran que

$$\alpha M(u) = N(u)\alpha \qquad \text{y} \qquad \alpha M(v) = N(v)\alpha. \qquad [3]$$

Así $\alpha : M(S) \longrightarrow N(S)$ se extiende a un morfismo $\alpha : M \longrightarrow N$ de Σ-módulos. De ésto y de la forma triangular de ϕ_X^0 y ϕ_Y^0 se siguen las propiedades del funtor $(F, F\varepsilon)^*$ como en el caso (1).

CASO (3). Supóngase que $X \neq Y$, $A'(X,X)$ es trivial y $A'(Y,Y) = k[y, g(y)^{-1}]$, entonces definimos

$$F : A \longrightarrow \Sigma$$

por $F(X) = S^3$ y $F(Y) = S^5$, $F(y)$ y $F(a_1)$ como las transpuestas de las matrices del caso (2), pidiendo que p no sea raíz de g, y se siguen las propiedades para el funtor $(F, F\varepsilon)^*$ y que $\mathcal{A}$ es salvaje.

CASO (4). Si $X \neq Y$, $A'(X,X) = k[x, f(x)^{-1}]$ y $A'(Y,Y) = k[y, g(y)^{-1}]$. Definimos

$$F : A \longrightarrow \Sigma$$

tomando $F(X), F(Y), F(x)$ y $F(a_1)$ como en el caso (2), y $F(y) = qI_3$, con q no raíz de $g(y)$. Trabajando como en el caso (2) se obtienen nuevamente las propiedades para $(F, F\varepsilon)^*$.□

LEMA 4.7 *Sea $\mathcal{A} = (A, V)$ un bocs con estratificación*

$$L = (A'; \omega; a_1, \ldots, a_n; v_1, \ldots, v_m)$$

y supóngase que $a_1 \in A(X,Y)$. Si $A'(X,X)$ y $A'(Y,Y)$ no son triviales y $\delta(a_1) = rv_1$, para algún r no invertible en $R = A'(Y,Y) \bigotimes_k A'(X,X)^{op}$, entonces $\mathcal{A}$ es salvaje.

DEMOSTRACION.
CASO (1). Supongamos que $X \neq Y$. Tomando $A'(X,X) = k[x, f(x)^{-1}]$ y $A'(Y,Y) = k[y, g(y)^{-1}]$, así $R = k[x, y, f(x)^{-1}, g(y)^{-1}]$. Haciendo un cambio de base de la forma

$$v_1' = f(x)^{-m} g(y)^{-n} v_1$$

en la estratificación, podemos asumir que r es un polinomio $r(x,y) \in k[x,y]$.

Para un ideal I de $k[x,y]$ y $Z \subseteq k^2$, denotamos:

$$Z(I) = \{(a,b) \in k^2 \mid s(a,b) = 0 \quad \text{para todo} \quad s(x,y) \in I\};$$

$$I(Z) = \{s(x,y) \in k[x,y] \mid s(a,b) = 0 \quad \text{para todo} \quad (a,b) \in Z\}.$$

Resulta que $I(Z)$ es un ideal en $k[x,y]$.

Si para cada $p, q \in k$, con $r(p,q) = 0$, se tiene que $f(p) = 0$ o $g(q) = 0$, entonces $Z(\langle r(x,y)\rangle) \subseteq Z(\langle f(x)g(y)\rangle)$, donde $\langle r(x,y)\rangle$ es el ideal de $k[x,y]$ generado por $r(x,y)$. Por ésto y el Teorema de los Ceros de Hilbert, se tiene que:

$$\sqrt{\langle f(x)g(y)\rangle} = I(Z(\langle f(x)g(y)\rangle)) \subseteq I(Z(\langle r(x,y)\rangle)) = \sqrt{\langle r(x,y)\rangle},$$

por lo que $f(x)g(y) \in \sqrt{\langle r(x,y)\rangle}$, y existen $m \in \mathbb{N}$ y $s(x,y) \in k[x,y]$ tales que

$$f^m(x)g^m(y) = s(x,y)r(x,y).$$

Así $r(x,y)$ es invertible en R. Como éste no es el caso para nuestro polinomio $r(x,y)$, se sigue que existen $p, q \in k$ tales que

$$r(p,q) = 0, \qquad f(p) \neq 0 \quad \text{y} \qquad g(q) \neq 0.$$

Ahora escribimos $r(x,y)$ en la forma

$$r(x,y) = \sum_{i+j\geq 1} \lambda_{ij}(x-p)^i(y-q)^j, \qquad \lambda_{ij} \in k.$$

Sea j_0 el menor j con $\lambda_{0j} \neq 0$ e i_0 el menor i con $\lambda_{i0} \neq 0$ ($i_0, j_0 \geq 1$ y posiblemente $i_0, j_0 = \infty$). Consideramos el caso $j_0 \leq i_0$. El otro caso se obtiene intercambiando X y Y y reemplazando $F(a_1)$ por su transpuesta.

Definimos $F : A \longrightarrow \Sigma$ por

$$F(X) = S^{25}, \qquad F(Y) = S^{18},$$

$$F(x) = \mathfrak{A} = \begin{bmatrix} J_1(p) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_3(p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_5(p) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_7(p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_9(p) \end{bmatrix},$$

$$F(a_1) = \mathfrak{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{B}_3 & \mathfrak{B}_5 & \mathfrak{B}_7 & \mathfrak{B}_9 \end{bmatrix},$$

$$F(y) = \mathfrak{C} = \begin{bmatrix} qI_2 & I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & qI_2 & I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & qI_2 & I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & qI_2 & I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & qI_2 & I_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & qI_2 & I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & qI_2 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & qI_2 & I_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & qI_2 \end{bmatrix}$$

donde $J_n(p)$ denota un bloque de Jordan $n \times n$ triangular superior con valor propio p, I_n es la matriz identidad de $n \times n$, y

$$\mathfrak{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{B}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathfrak{B}_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{B}_9 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observemos que F está bien definido, pues $F(f(x)) = f(F(x))$, y $F(g(y)) = g(F(y))$ son matrices triangulares superiores tales que en sus diagonales tienen a $f(p) \neq 0$ y $g(q) \neq 0$, respectivamente.

Si M es un representación en $R(\Sigma)$ entonces $M' = (F, F\varepsilon)^{\cdot}M$ es un A-módulo tal que

$$M'(X) = MF(X) = M(S)^{25}, \qquad M'(Y) = MF(Y) = M(S)^{18},$$

y $M'(x), M'(a_1)$ y $M'(y)$ están dados, respectivamente, por las matrices

$$M(\mathfrak{A}) = \begin{bmatrix} MJ_1(p) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & MJ_3(p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & MJ_5(p) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & MJ_7(p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & MJ_9(p) \end{bmatrix},$$

$$M(\mathfrak{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M(\mathfrak{B}_1) & M(\mathfrak{B}_3) & M(\mathfrak{B}_5) & M(\mathfrak{B}_7) & M(\mathfrak{B}_9) \end{bmatrix},$$

y $M(\mathfrak{C})$ que se describe igual que $\mathfrak{C}$, además $M(J_n(p))$ también es un bloque de Jordan "$n \times n$" triangular superior con valor propio p, y

$$M(\mathfrak{B}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad M(\mathfrak{B}_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M(\mathfrak{B}_5) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M(\mathfrak{B}_7) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M(u) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$M(\mathfrak{B}_9) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M(v) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sea $\phi = (\phi^0, \phi^1) : M' \longrightarrow N'$ un morfismo en $R(\mathcal{A})$, así $\phi : V \bigotimes_A M' \longrightarrow N'$, y entonces por 2.12 y la ecuación [10] del capítulo 2, tenemos las siguientes relaciones

$$\phi^0_X M'(x) = N'(x)\phi^0_X, \qquad \phi^0_Y M'(y) = N'(y)\phi^0_Y \tag{5}$$

$$\phi^0_Y M'(a_1) - N'(a_1)\phi^0_X = \phi^1_{\delta(a_1)} \tag{6}$$

donde

$$\phi^0_X : \;\; M'(X) = M(S)^{25} \longrightarrow N'(X) = N(S)^{25},$$

$$\phi^0_Y : \;\; M'(Y) = M(S)^{18} \longrightarrow N'(Y) = N(S)^{18},$$

$$\phi^1_{\delta(a_1)} = \sum_{i+j\geq 1} \lambda_{ij} N'(y-q)^j \phi^1_{v_1} M'(x-p)^i, \tag{6'}$$

$$\phi^1_{v_1} : M'(X)^{25} = M(S)^{25} \longrightarrow N'(Y) = N(S)^{18}.$$

El extenso análisis que hacemos enseguida de las relaciones [5] y [6], muestra que si $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{Q}$ son las matrices que representan a los morfismos ϕ^0_X y ϕ^0_Y, respectivamente, entonces: $\mathfrak{Q}$ es una matriz triangular superior, existe una matriz invertible $\mathfrak{D}$, tal que $\mathfrak{D}^{-1}\mathfrak{P}\mathfrak{D}$ también es triangular superior, todos los términos de las diagonales principales de $\mathfrak{Q}$ y $\mathfrak{D}^{-1}\mathfrak{P}\mathfrak{D}$ son iguales, digamos a $\alpha : M(S) \longrightarrow N(S)$, y además

$$N(u)\alpha = \alpha M(u), \qquad N(v)\alpha = \alpha M(v), \tag{3}$$

así que α es realmente un morfismo de Σ-módulos $\alpha : M \longrightarrow N$. De ésto se siguen las propiedades anunciadas para el funtor F, procediendo como en el caso (2) de 4.6. Por lo tanto basta mostrar las afirmaciones hechas sobre $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{Q}$.

Notemos que las relaciones [5] y [6] adquieren la siguiente forma matricial:

$$\mathfrak{P}M(\mathfrak{A}) = N(\mathfrak{A})\mathfrak{P}, \qquad \mathfrak{Q}M(\mathfrak{C}) = N(\mathfrak{C})\mathfrak{Q}, \tag{7}$$

$$\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P} = \phi^1_{\delta(a_1)}. \tag{8}$$

Consideramos las siguientes particiones en bloques para $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{Q}$:

$$\begin{array}{llllll} \mathfrak{P} = & [\mathfrak{P}_{lm}] & \text{en} & 5\times 5 & \text{bloques} & ,\mathfrak{P}_{lm} \;\text{de}\; (2l-1)\times(2m-1); \\ \mathfrak{Q} = & [\mathfrak{Q}_{lm}] & \text{en} & 9\times 9 & \text{bloques} & ,\mathfrak{Q}_{lm} \;\text{de}\; 2\times 2. \end{array}$$

La primera ecuación de [7], y dada la partición en bloques, muestra que

$$[\mathfrak{P}M(\mathfrak{A})]_{lm} = [N(\mathfrak{A})\mathfrak{P}]_{lm},$$

$$\sum_s \mathfrak{P}_{ls}[M(\mathfrak{A})]_{sm} = \sum_s [N(\mathfrak{A})]_{ls}\mathfrak{P}_{sm}$$

$$\mathfrak{P}_{lm}M(J_{2m-1}(p)) = \mathfrak{P}_{lm}[M(\mathfrak{A})]_{mm} = [N(\mathfrak{A})]_{ll}\mathfrak{P}_{lm} = N(J_{2l-1}(p))\mathfrak{P}_{lm}.$$

Así que $\mathfrak{P}_{lm}$ es una matriz que conmuta con bloques de Jordan del mismo valor propio, como se hace en [Ma], podemos concluir que $\mathfrak{P}$ es de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix}\alpha^{1}_{11}\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} & & \alpha^{1}_{12}\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} & & & & \alpha^{1}_{13}\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} & & & & & & \alpha^{1}_{14}\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} & & & & & & & & \alpha^{1}_{15}\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}\alpha^{1}_{21}\\ \\ \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}\alpha^{1}_{22} & \alpha^{2}_{22} & \alpha^{3}_{22}\\ & \alpha^{1}_{22} & \alpha^{2}_{22}\\ & & \alpha^{1}_{22}\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} & & \alpha^{1}_{23} & \alpha^{2}_{23} & \alpha^{3}_{23}\\ & & & \alpha^{1}_{23} & \alpha^{2}_{23}\\ & & & & \alpha^{1}_{23}\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} & & & & \alpha^{1}_{24} & \alpha^{2}_{24} & \alpha^{3}_{24}\\ & & & & & \alpha^{1}_{24} & \alpha^{2}_{24}\\ & & & & & & \alpha^{1}_{24}\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} & & & & & & \alpha^{1}_{25} & \alpha^{2}_{25} & \alpha^{3}_{25}\\ & & & & & & & \alpha^{1}_{25} & \alpha^{2}_{25}\\ & & & & & & & & \alpha^{1}_{25}\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}\alpha^{1}_{31}\\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}\alpha^{1}_{32} & \alpha^{2}_{32} & \alpha^{3}_{32}\\ & \alpha^{1}_{32} & \alpha^{2}_{32}\\ & & \alpha^{1}_{32}\\ & & \\ & & \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}\alpha^{1}_{33} & \alpha^{2}_{33} & \alpha^{3}_{33} & \alpha^{4}_{33} & \alpha^{5}_{33}\\ & \alpha^{1}_{33} & \alpha^{2}_{33} & \alpha^{3}_{33} & \alpha^{4}_{33}\\ & & \alpha^{1}_{33} & \alpha^{2}_{33} & \alpha^{3}_{33}\\ & & & \alpha^{1}_{33} & \alpha^{2}_{33}\\ & & & & \alpha^{1}_{33}\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} & & \alpha^{1}_{34} & \alpha^{2}_{34} & \alpha^{3}_{34} & \alpha^{4}_{34} & \alpha^{5}_{34}\\ & & & \alpha^{1}_{34} & \alpha^{2}_{34} & \alpha^{3}_{34} & \alpha^{4}_{34}\\ & & & & \alpha^{1}_{34} & \alpha^{2}_{34} & \alpha^{3}_{34}\\ & & & & & \alpha^{1}_{34} & \alpha^{2}_{34}\\ & & & & & & \alpha^{1}_{34}\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} & & & & \alpha^{1}_{35} & \alpha^{2}_{35} & \alpha^{3}_{35} & \alpha^{4}_{35} & \alpha^{5}_{35}\\ & & & & & \alpha^{1}_{35} & \alpha^{2}_{35} & \alpha^{3}_{35} & \alpha^{4}_{35}\\ & & & & & & \alpha^{1}_{35} & \alpha^{2}_{35} & \alpha^{3}_{35}\\ & & & & & & & \alpha^{1}_{35} & \alpha^{2}_{35}\\ & & & & & & & & \alpha^{1}_{35}\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}\alpha^{1}_{41}\\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}\alpha^{1}_{42} & \alpha^{2}_{42} & \alpha^{3}_{42}\\ & \alpha^{1}_{42} & \alpha^{2}_{42}\\ & & \alpha^{1}_{42}\\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}\alpha^{1}_{43} & \alpha^{2}_{43} & \alpha^{3}_{43} & \alpha^{4}_{43} & \alpha^{5}_{43}\\ & \alpha^{1}_{43} & \alpha^{2}_{43} & \alpha^{3}_{43} & \alpha^{4}_{43}\\ & & \alpha^{1}_{43} & \alpha^{2}_{43} & \alpha^{3}_{43}\\ & & & \alpha^{1}_{43} & \alpha^{2}_{43}\\ & & & & \alpha^{1}_{43}\\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}\alpha^{1}_{44} & \alpha^{2}_{44} & \alpha^{3}_{44} & \alpha^{4}_{44} & \alpha^{5}_{44} & \alpha^{6}_{44} & \alpha^{7}_{44}\\ & \alpha^{1}_{44} & \alpha^{2}_{44} & \alpha^{3}_{44} & \alpha^{4}_{44} & \alpha^{5}_{44} & \alpha^{6}_{44}\\ & & \alpha^{1}_{44} & \alpha^{2}_{44} & \alpha^{3}_{44} & \alpha^{4}_{44} & \alpha^{5}_{44}\\ & & & \alpha^{1}_{44} & \alpha^{2}_{44} & \alpha^{3}_{44} & \alpha^{4}_{44}\\ & & & & \alpha^{1}_{44} & \alpha^{2}_{44} & \alpha^{3}_{44}\\ & & & & & \alpha^{1}_{44} & \alpha^{2}_{44}\\ & & & & & & \alpha^{1}_{44}\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} & & \alpha^{1}_{45} & \alpha^{2}_{45} & \alpha^{3}_{45} & \alpha^{4}_{45} & \alpha^{5}_{45} & \alpha^{6}_{45} & \alpha^{7}_{45}\\ & & & \alpha^{1}_{45} & \alpha^{2}_{45} & \alpha^{3}_{45} & \alpha^{4}_{45} & \alpha^{5}_{45} & \alpha^{6}_{45}\\ & & & & \alpha^{1}_{45} & \alpha^{2}_{45} & \alpha^{3}_{45} & \alpha^{4}_{45} & \alpha^{5}_{45}\\ & & & & & \alpha^{1}_{45} & \alpha^{2}_{45} & \alpha^{3}_{45} & \alpha^{4}_{45}\\ & & & & & & \alpha^{1}_{45} & \alpha^{2}_{45} & \alpha^{3}_{45}\\ & & & & & & & \alpha^{1}_{45} & \alpha^{2}_{45}\\ & & & & & & & & \alpha^{1}_{45}\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}\alpha^{1}_{51}\\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}\alpha^{1}_{52} & \alpha^{2}_{52} & \alpha^{3}_{52}\\ & \alpha^{1}_{52} & \alpha^{2}_{52}\\ & & \alpha^{1}_{52}\\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}\alpha^{1}_{53} & \alpha^{2}_{53} & \alpha^{3}_{53} & \alpha^{4}_{53} & \alpha^{5}_{53}\\ & \alpha^{1}_{53} & \alpha^{2}_{53} & \alpha^{3}_{53} & \alpha^{4}_{53}\\ & & \alpha^{1}_{53} & \alpha^{2}_{53} & \alpha^{3}_{53}\\ & & & \alpha^{1}_{53} & \alpha^{2}_{53}\\ & & & & \alpha^{1}_{53}\\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}\alpha^{1}_{54} & \alpha^{2}_{54} & \alpha^{3}_{54} & \alpha^{4}_{54} & \alpha^{5}_{54} & \alpha^{6}_{54} & \alpha^{7}_{54}\\ & \alpha^{1}_{54} & \alpha^{2}_{54} & \alpha^{3}_{54} & \alpha^{4}_{54} & \alpha^{5}_{54} & \alpha^{6}_{54}\\ & & \alpha^{1}_{54} & \alpha^{2}_{54} & \alpha^{3}_{54} & \alpha^{4}_{54} & \alpha^{5}_{54}\\ & & & \alpha^{1}_{54} & \alpha^{2}_{54} & \alpha^{3}_{54} & \alpha^{4}_{54}\\ & & & & \alpha^{1}_{54} & \alpha^{2}_{54} & \alpha^{3}_{54}\\ & & & & & \alpha^{1}_{54} & \alpha^{2}_{54}\\ & & & & & & \alpha^{1}_{54}\\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}\alpha^{1}_{55} & \alpha^{2}_{55} & \alpha^{3}_{55} & \alpha^{4}_{55} & \alpha^{5}_{55} & \alpha^{6}_{55} & \alpha^{7}_{55} & \alpha^{8}_{55} & \alpha^{9}_{55}\\ & \alpha^{1}_{55} & \alpha^{2}_{55} & \alpha^{3}_{55} & \alpha^{4}_{55} & \alpha^{5}_{55} & \alpha^{6}_{55} & \alpha^{7}_{55} & \alpha^{8}_{55}\\ & & \alpha^{1}_{55} & \alpha^{2}_{55} & \alpha^{3}_{55} & \alpha^{4}_{55} & \alpha^{5}_{55} & \alpha^{6}_{55} & \alpha^{7}_{55}\\ & & & \alpha^{1}_{55} & \alpha^{2}_{55} & \alpha^{3}_{55} & \alpha^{4}_{55} & \alpha^{5}_{55} & \alpha^{6}_{55}\\ & & & & \alpha^{1}_{55} & \alpha^{2}_{55} & \alpha^{3}_{55} & \alpha^{4}_{55} & \alpha^{5}_{55}\\ & & & & & \alpha^{1}_{55} & \alpha^{2}_{55} & \alpha^{3}_{55} & \alpha^{4}_{55}\\ & & & & & & \alpha^{1}_{55} & \alpha^{2}_{55} & \alpha^{3}_{55}\\ & & & & & & & \alpha^{1}_{55} & \alpha^{2}_{55}\\ & & & & & & & & \alpha^{1}_{55}\end{bmatrix}
\end{bmatrix}$$

Evidentemente omitimos escribir las componentes nulas.

Para obtener la forma triangular superior basta conjugar la matriz $\mathfrak{P}$ con la matriz $\mathfrak{D}$ dada enseguida.

$$
\begin{bmatrix}
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 10000 \\
00000 & 00000 & 00100 & 00000 & 00000 \\
00000 & 00000 & 00000 & 01000 & 00000 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 01000 \\
00000 & 01000 & 00000 & 00000 & 00000 \\[1ex]
00000 & 00001 & 00000 & 00000 & 00000 \\
00000 & 00000 & 00010 & 00000 & 00000 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00100 & 00000 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00100 \\
00100 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 \\[1ex]
00001 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 \\
00000 & 00100 & 00000 & 00000 & 00000 \\
00000 & 00000 & 10000 & 00000 & 00000 \\
00000 & 00000 & 00001 & 00000 & 00000 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00010 & 00000 \\[1ex]
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00010 \\
10000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 \\
01000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 \\
00010 & 00000 & 00000 & 00000 & 00000 \\
00000 & 10000 & 00000 & 00000 & 00000 \\[1ex]
00000 & 00010 & 00000 & 00000 & 00000 \\
00000 & 00000 & 01000 & 00000 & 00000 \\
00000 & 00000 & 00000 & 10000 & 00000 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00001 & 00000 \\
00000 & 00000 & 00000 & 00000 & 00001
\end{bmatrix}
$$

Esta matriz es tal que $\mathfrak{D}^{-1} = \mathfrak{D}'$, la matriz transpuesta de $\mathfrak{D}$. En la siguiente página mostramos la forma triangular superior que corresponde a $\mathfrak{D}^{-1}\mathfrak{P}\mathfrak{D}$.

$$
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix}\alpha_{55}^{1}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\alpha_{55}^{2}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\alpha_{54}^{1} & \alpha_{55}^{3}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\alpha_{54}^{2} & \alpha_{55}^{4}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\alpha_{53}^{1} & \alpha_{54}^{3} & \alpha_{54}^{5}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\alpha_{53}^{2} & \alpha_{54}^{4} & \alpha_{55}^{6}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\alpha_{52}^{1} & \alpha_{53}^{3} & \alpha_{54}^{5} & \alpha_{55}^{7}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\alpha_{52}^{2} & \alpha_{53}^{4} & \alpha_{54}^{6} & \alpha_{55}^{8}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\alpha_{51}^{1} & \alpha_{52}^{3} & \alpha_{53}^{5} & \alpha_{54}^{7} & \alpha_{55}^{9}\end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix}\alpha_{55}^{1}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & \alpha_{55}^{2}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\alpha_{54}^{1} & \alpha_{55}^{3}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & \alpha_{54}^{2} & \alpha_{55}^{4}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\alpha_{53}^{1} & \alpha_{54}^{3} & \alpha_{55}^{5}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & \alpha_{53}^{2} & \alpha_{54}^{4} & \alpha_{55}^{6}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\alpha_{52}^{1} & \alpha_{53}^{3} & \alpha_{54}^{5} & \alpha_{55}^{7}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & \alpha_{52}^{2} & \alpha_{53}^{4} & \alpha_{54}^{6} & \alpha_{55}^{8}\end{bmatrix} \\
 & & \begin{bmatrix}\alpha_{44}^{1} & \alpha_{45}^{1} \\ & \alpha_{55}^{1}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\alpha_{44}^{2} & \alpha_{45}^{2} \\ & \alpha_{55}^{2}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\alpha_{43}^{1} & \alpha_{44}^{3} & \alpha_{45}^{3} \\ & \alpha_{54}^{1} & \alpha_{55}^{3}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\alpha_{43}^{2} & \alpha_{44}^{4} & \alpha_{45}^{4} \\ & \alpha_{54}^{2} & \alpha_{55}^{4}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\alpha_{42}^{1} & \alpha_{43}^{3} & \alpha_{44}^{5} & \alpha_{45}^{5} \\ & \alpha_{53}^{1} & \alpha_{54}^{3} & \alpha_{55}^{5}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\alpha_{42}^{2} & \alpha_{43}^{4} & \alpha_{44}^{6} & \alpha_{45}^{6} \\ & \alpha_{53}^{2} & \alpha_{54}^{4} & \alpha_{55}^{6}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\alpha_{41}^{1} & \alpha_{42}^{3} & \alpha_{43}^{5} & \alpha_{44}^{7} & \alpha_{45}^{7} \\ & \alpha_{52}^{1} & \alpha_{53}^{3} & \alpha_{54}^{5} & \alpha_{55}^{7}\end{bmatrix} \\
 & & & \begin{bmatrix}\alpha_{44}^{1} & \alpha_{45}^{1} \\ & \alpha_{55}^{1}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & \alpha_{44}^{2} & \alpha_{45}^{2} \\ & & \alpha_{55}^{2}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\alpha_{43}^{1} & \alpha_{44}^{3} & \alpha_{45}^{3} \\ & \alpha_{54}^{1} & \alpha_{55}^{3}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & \alpha_{43}^{2} & \alpha_{44}^{4} & \alpha_{45}^{4} \\ & & \alpha_{54}^{2} & \alpha_{55}^{4}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\alpha_{42}^{1} & \alpha_{43}^{3} & \alpha_{44}^{5} & \alpha_{45}^{5} \\ & \alpha_{53}^{1} & \alpha_{54}^{3} & \alpha_{55}^{5}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & \alpha_{42}^{2} & \alpha_{43}^{4} & \alpha_{44}^{6} & \alpha_{45}^{6} \\ & & \alpha_{53}^{2} & \alpha_{54}^{4} & \alpha_{55}^{6}\end{bmatrix} \\
 & & & & \begin{bmatrix}\alpha_{33}^{1} & \alpha_{34}^{1} & \alpha_{35}^{1} \\ & \alpha_{44}^{1} & \alpha_{45}^{1} \\ & & \alpha_{55}^{1}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\alpha_{33}^{2} & \alpha_{34}^{2} & \alpha_{35}^{2} \\ & \alpha_{44}^{2} & \alpha_{45}^{2} \\ & & \alpha_{55}^{2}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\alpha_{32}^{1} & \alpha_{33}^{3} & \alpha_{34}^{3} & \alpha_{35}^{3} \\ & \alpha_{43}^{1} & \alpha_{44}^{3} & \alpha_{45}^{3} \\ & & \alpha_{54}^{1} & \alpha_{55}^{3}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\alpha_{32}^{2} & \alpha_{33}^{4} & \alpha_{34}^{4} & \alpha_{35}^{4} \\ & \alpha_{43}^{2} & \alpha_{44}^{4} & \alpha_{45}^{4} \\ & & \alpha_{54}^{2} & \alpha_{55}^{4}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\alpha_{31}^{1} & \alpha_{32}^{3} & \alpha_{33}^{5} & \alpha_{34}^{5} & \alpha_{35}^{5} \\ & \alpha_{42}^{1} & \alpha_{43}^{3} & \alpha_{44}^{5} & \alpha_{45}^{5} \\ & & \alpha_{53}^{1} & \alpha_{54}^{3} & \alpha_{55}^{5}\end{bmatrix} \\
 & & & & & \begin{bmatrix}\alpha_{33}^{1} & \alpha_{34}^{1} & \alpha_{35}^{1} \\ & \alpha_{44}^{1} & \alpha_{45}^{1} \\ & & \alpha_{55}^{1}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & \alpha_{33}^{2} & \alpha_{34}^{2} & \alpha_{35}^{2} \\ & & \alpha_{44}^{2} & \alpha_{45}^{2} \\ & & & \alpha_{55}^{2}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\alpha_{32}^{1} & \alpha_{33}^{3} & \alpha_{34}^{3} & \alpha_{35}^{3} \\ & \alpha_{43}^{1} & \alpha_{44}^{3} & \alpha_{45}^{3} \\ & & \alpha_{54}^{1} & \alpha_{55}^{3}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & \alpha_{32}^{2} & \alpha_{33}^{4} & \alpha_{34}^{4} & \alpha_{35}^{4} \\ & & \alpha_{43}^{2} & \alpha_{44}^{4} & \alpha_{45}^{4} \\ & & & \alpha_{54}^{2} & \alpha_{55}^{4}\end{bmatrix} \\
 & & & & & & \begin{bmatrix}\alpha_{22}^{1} & \alpha_{23}^{1} & \alpha_{24}^{1} & \alpha_{25}^{1} \\ & \alpha_{33}^{1} & \alpha_{34}^{1} & \alpha_{35}^{1} \\ & & \alpha_{44}^{1} & \alpha_{45}^{1} \\ & & & \alpha_{55}^{1}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\alpha_{22}^{2} & \alpha_{23}^{2} & \alpha_{24}^{2} & \alpha_{25}^{2} \\ & \alpha_{33}^{2} & \alpha_{34}^{2} & \alpha_{35}^{2} \\ & & \alpha_{44}^{2} & \alpha_{45}^{2} \\ & & & \alpha_{55}^{2}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\alpha_{21}^{1} & \alpha_{22}^{3} & \alpha_{23}^{3} & \alpha_{24}^{3} & \alpha_{25}^{3} \\ & \alpha_{32}^{1} & \alpha_{33}^{3} & \alpha_{34}^{3} & \alpha_{35}^{3} \\ & & \alpha_{43}^{1} & \alpha_{44}^{3} & \alpha_{45}^{3} \\ & & & \alpha_{54}^{1} & \alpha_{55}^{3}\end{bmatrix} \\
 & & & & & & & \begin{bmatrix}\alpha_{22}^{1} & \alpha_{23}^{1} & \alpha_{24}^{1} & \alpha_{25}^{1} \\ & \alpha_{33}^{1} & \alpha_{34}^{1} & \alpha_{35}^{1} \\ & & \alpha_{44}^{1} & \alpha_{45}^{1} \\ & & & \alpha_{55}^{1}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & \alpha_{22}^{2} & \alpha_{23}^{2} & \alpha_{24}^{2} & \alpha_{25}^{2} \\ & & \alpha_{33}^{2} & \alpha_{34}^{2} & \alpha_{35}^{2} \\ & & & \alpha_{44}^{2} & \alpha_{45}^{2} \\ & & & & \alpha_{55}^{2}\end{bmatrix} \\
 & & & & & & & & \begin{bmatrix}\alpha_{11}^{1} & \alpha_{12}^{1} & \alpha_{13}^{1} & \alpha_{14}^{1} & \alpha_{15}^{1} \\ & \alpha_{22}^{1} & \alpha_{23}^{1} & \alpha_{24}^{1} & \alpha_{25}^{1} \\ & & \alpha_{33}^{1} & \alpha_{34}^{1} & \alpha_{35}^{1} \\ & & & \alpha_{44}^{1} & \alpha_{45}^{1} \\ & & & & \alpha_{55}^{1}\end{bmatrix}
\end{bmatrix}
$$

La segunda ecuación de [7] muestra que $\mathfrak{Q}$ conmuta con un bloque de Jordan en bloques y nuevamente, como se hace en [M], se tiene que $\mathfrak{Q}$ es de la forma

$$\mathfrak{Q}_{lm} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad l > m, \\ \mathfrak{Q}_{m-l+1} & \text{si} \quad l \leq m. \end{cases}$$

es decir

$$\mathfrak{Q} = \begin{bmatrix} \mathfrak{Q}_1 & \mathfrak{Q}_2 & \mathfrak{Q}_3 & \mathfrak{Q}_4 & \mathfrak{Q}_5 & \mathfrak{Q}_6 & \mathfrak{Q}_7 & \mathfrak{Q}_8 & \mathfrak{Q}_9 \\ & \mathfrak{Q}_1 & \mathfrak{Q}_2 & \mathfrak{Q}_3 & \mathfrak{Q}_4 & \mathfrak{Q}_5 & \mathfrak{Q}_6 & \mathfrak{Q}_7 & \mathfrak{Q}_8 \\ & & \mathfrak{Q}_1 & \mathfrak{Q}_2 & \mathfrak{Q}_3 & \mathfrak{Q}_4 & \mathfrak{Q}_5 & \mathfrak{Q}_6 & \mathfrak{Q}_7 \\ & & & \mathfrak{Q}_1 & \mathfrak{Q}_2 & \mathfrak{Q}_3 & \mathfrak{Q}_4 & \mathfrak{Q}_5 & \mathfrak{Q}_6 \\ & & & & \mathfrak{Q}_1 & \mathfrak{Q}_2 & \mathfrak{Q}_3 & \mathfrak{Q}_4 & \mathfrak{Q}_5 \\ & & & & & \mathfrak{Q}_1 & \mathfrak{Q}_2 & \mathfrak{Q}_3 & \mathfrak{Q}_4 \\ & & & & & & \mathfrak{Q}_1 & \mathfrak{Q}_2 & \mathfrak{Q}_3 \\ & & & & & & & \mathfrak{Q}_1 & \mathfrak{Q}_2 \\ & & & & & & & & \mathfrak{Q}_1 \end{bmatrix}$$

donde

$$\mathfrak{Q}_i = \begin{bmatrix} \beta_i^{11} & \beta_i^{12} \\ \beta_i^{21} & \beta_i^{22} \end{bmatrix}$$

Tenemos las afirmaciones hechas sobre $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{Q}$ si mostramos que

$$\beta_1^{21} = 0 \qquad \text{y} \qquad \beta_1^{11} = \beta_1^{22} = \alpha_{11}^1 = \alpha_{22}^1 = \alpha_{33}^1 = \alpha_{44}^1 = \alpha_{55}^1. \qquad [9]$$

Para ello utilizamos las ecuaciones [8] y [6'].

Ahora obtenemos una descripción en bloques de $\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}$, partiendo de las descripciones de $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{Q}$ y considerando la siguiente descripción de $M(\mathfrak{B})$:

$$M(\mathfrak{B}) = [[M(\mathfrak{B})]_{lm}] \text{ en } 9 \times 5 \text{ bloques de } 2 \times (2m-1) \text{ cada uno,}$$

y tal que

$$[M(\mathfrak{B})]_{lm} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad l \neq 9, \\ M(\mathfrak{B}_{2m-1}) & \text{si} \quad l = 9. \end{cases}$$

Desde luego se tiene una descripción análoga para $N(\mathfrak{B})$. Para $\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}$ podemos considerar una partición de 9×5 bloques de $2 \times (2m-1)$, $m = 1, 2, \ldots, 5$, que al relacionarlas con las de $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $M(\mathfrak{B})$ y $N(\mathfrak{B})$ para $l = 1, 2, \ldots, 9$ y $m =$

$1,2,\ldots,5$, se tiene que

$$\begin{aligned}
[\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B})-N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{lm} &= [\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B})]_{lm}-[N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{lm} = \\
&= \sum_{s=1}^{9}\mathfrak{Q}_{ls}[M(\mathfrak{B})]_{sm}-\sum_{s=1}^{5}[N(\mathfrak{B})]_{ls}\mathfrak{P}_{sm} \qquad [10] \\
&= \mathfrak{Q}_{l9}[M(\mathfrak{B})]_{9m}-\sum_{s=1}^{5}[N(\mathfrak{B})]_{ls}\mathfrak{P}_{sm}.
\end{aligned}$$

En particular, para $l=9$, tenemos que

$$\begin{aligned}
[\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B})-N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{9m} &= \mathfrak{Q}_{99}[M(\mathfrak{B})]_{9m}-\sum_{s=1}^{5}[N(\mathfrak{B})]_{9s}\mathfrak{P}_{sm} \\
&= \mathfrak{Q}_1[M(\mathfrak{B}_{2m-1})]-\sum_{s=1}^{5}[N(\mathfrak{B}_{2s-1})]\mathfrak{P}_{sm}
\end{aligned}$$

Tomando $m=1,2,3,4,5$, tenemos:

$$[\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B})-N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{91}=\mathfrak{Q}_1M(\mathfrak{B}_1)-\sum_{s=1}^{5}N(\mathfrak{B}_{2s-1})\mathfrak{P}_{s1}=\begin{bmatrix}\beta_1^{11}-\alpha_{11}^1\\ \beta_1^{21}\end{bmatrix};$$

$$[\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B})-N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{92}=\mathfrak{Q}_1M(\mathfrak{B}_3)-\sum_{s=1}^{5}N(\mathfrak{B}_{2s-1})\mathfrak{P}_{s2}=$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \beta_1^{12} & \beta_1^{22}-\alpha_{22}^1\\ -\alpha_{12}^1-\alpha_{32}^1 & -\alpha_{22}^2-\alpha_{32}^1\end{bmatrix}^t;$$

$$[\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B})-N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{93}=\mathfrak{Q}_1M(\mathfrak{B}_5)-\sum_{s=1}^{5}N(\mathfrak{B}_{2s-1})\mathfrak{P}_{s3}=$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ \beta_1^{11}-\beta_1^{21}-\alpha_{33}^1 & \beta_1^{22}-\alpha_{33}^1\\ -\alpha_{33}^2-\alpha_{43}^1 & -\alpha_{23}^1-\alpha_{33}^1-N(u)\alpha_{43}^1\\ -\alpha_{13}^1-\alpha_{33}^3-\alpha_{43}^2-\alpha_{53}^1 & -\alpha_{23}^2-\alpha_{33}^3-N(u)\alpha_{43}^2-N(v)\alpha_{53}^1\end{bmatrix}^t;$$

$$[\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B})-N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{94}=\mathfrak{Q}_1M(\mathfrak{B}_7)-\sum_{s=1}^{5}N(\mathfrak{B}_{2s-1})\mathfrak{P}_{s4}=$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \beta_1^{11}-\beta_1^{12}M(u)-\alpha_{44}^1 & \beta_1^{22}M(u)-N(u)\alpha_{44}^1 \\ -\alpha_{34}^1-\alpha_{44}^2-\alpha_{54}^1 & -\alpha_{34}^1-N(u)\alpha_{44}^2-N(v)\alpha_{54}^1 \\ -\alpha_{34}^1-\alpha_{44}^3-\alpha_{54}^2 & -\alpha_{24}^1-\alpha_{34}^2-N(u)\alpha_{44}^3-N(v)\alpha_{54}^2 \\ -\alpha_{14}^1-\alpha_{34}^3-\alpha_{44}^4-\alpha_{54}^3 & -\alpha_{24}^2-\alpha_{34}^3-N(u)\alpha_{44}^4-N(v)\alpha_{54}^3 \end{bmatrix}^t;$$

$$[\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B})-N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{95}=\mathfrak{Q}_1M(\mathfrak{B}_9)-\sum_{s=1}^{5}N(\mathfrak{B}_{2s-1})\mathfrak{P}_{s5}=$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \beta_1^{11}-\beta_1^{12}M(v)-\alpha_{55}^1 & \beta_1^{22}M(v)-N(v)\alpha_{55}^1 \\ -\alpha_{45}^1-\alpha_{55}^2 & -N(u)\alpha_{45}^1-N(v)\alpha_{55}^2 \\ -\alpha_{35}^1-\alpha_{45}^2-\alpha_{55}^3 & -\alpha_{35}^1-N(u)\alpha_{45}^2-N(v)\alpha_{55}^3 \\ -\alpha_{35}^2-\alpha_{45}^3-\alpha_{55}^4 & -\alpha_{25}^1-\alpha_{35}^2-N(u)\alpha_{45}^3-N(v)\alpha_{55}^4 \\ -\alpha_{35}^3-\alpha_{45}^4-\alpha_{55}^5 & -\alpha_{15}^1-\alpha_{25}^2-\alpha_{35}^3-N(u)\alpha_{45}^4-N(v)\alpha_{55}^5 \end{bmatrix}^t;$$

Mostramos [9] y [3], si vemos que

$$[[\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B})-N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{9m}]_{tm}=0 \qquad [11]$$

para $m=1,2,3,4,5$ y $t=1,2$, donde $[[\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B})-N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{9m}]_{tm}$ denota la entrada tm del bloque $[\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B})-N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{9m}$, pues así tendríamos que:

$$\begin{aligned} \beta_1^{11}-\alpha_{11}^1 &= 0 & \beta_1^{21} &= 0 \\ \beta_1^{12} &= 0 & \beta_1^{22}-\alpha_{22}^1 &= 0 \\ \beta_1^{11}-\beta_1^{21}-\alpha_{33}^1 &= 0 & \beta_1^{22}-\alpha_{33}^1 &= 0 \\ \beta_1^{11}-\beta_1^{12}M(u)-\alpha_{44}^1 &= 0 & \beta_1^{22}M(u)-N(u)\alpha_{44}^1 &= 0 \\ \beta_1^{11}-\beta_1^{12}M(v)-\alpha_{55}^1 &= 0 & \beta_1^{22}M(v)-N(v)\alpha_{55}^1 &= 0 \end{aligned}$$

de donde se deducen [9] y [3].

Para mostrar [11] usamos la ecuación [8], y damos una descripción matricial de [6']. Sea E una matriz que representa a $\phi^1_{v_1}$, entonces E es de 18×25, y podemos partirla en bloques:

$$E = [E_{lm}] \quad \text{en} \quad 9 \times 5 \quad \text{bloques}, \quad E_{lm} \quad \text{de} \quad 2 \times (2m-1).$$

Además, denotamos:

$$E_{lm} = [\gamma^{ts}_{lm}] \qquad \text{para} \quad t = 1,2, \quad \text{y} \quad 1 \leq s \leq 2m-1.$$

Por otro lado, tenemos que:

$$M'(x-p) = MF(x-p) = M(\mathfrak{A} - pI),$$

que es una matriz de 25×25, que en bloques queda descrita por:

$$M(\mathfrak{A} - pI) = [[M(\mathfrak{A} - pI)]_{lm}] \qquad \text{con} \quad l, m = 1,2,3,4,5,$$

y tal que $[M(\mathfrak{A} - pI)]_{lm}$ es de $(2l-1) \times (2m-1)$ y

$$[M(\mathfrak{A} - pI)]_{lm} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad l \neq m, \\ J_{2l-1}(0) & \text{si} \quad l = m. \end{cases}$$

Y como,

$$N'(y-q) = NF(y-q) = N(\mathfrak{C} - qI),$$

es una matriz de 18×18, que podemos describir:

$$N(\mathfrak{C} - qI) = [[N(\mathfrak{C} - qI)]_{lm}] \qquad \text{con} \quad 9 \times 9 \text{ bloques de } 2 \times 2 \text{ cada uno},$$

tal que

$$[N(\mathfrak{C} - qI)]_{lm} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m - l \neq 1, \\ I_2 & \text{si} \quad m - l = 1. \end{cases}$$

Como $M(\mathfrak{A} - pI)$ es diagonal, tenemos para todo i que $M(\mathfrak{A} - pI)^i = [[M(\mathfrak{A} - p)^i]_{lm}]$ es de 5×5 bloques de $(2l-1) \times (2m-1)$ entradas y tal que

$$[M(\mathfrak{A} - pI)^i]_{lm} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad l \neq m, \\ J_{2m-1}(0)^i & \text{si} \quad l = m. \end{cases}$$

Nótese que $J_n(0)$ y $N(\mathfrak{C} - qI)$ son nilpotentes con índice de nilpotencia n y 9, respectivamente; es más, es posible describir las entradas de $J_n(0)^i$ mediante:

$$[J_n(0)^i]_{lm} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m - l \neq i, \\ 1 & \text{si} \quad m - l = i. \end{cases}$$

Lo mismo hacemos para $N(\mathfrak{C} - qI)^j$, pues:

$$[N(\mathfrak{C} - qI)^j]_{lm} = \begin{cases} 0_2 & \text{si} \quad m - l \neq j, \\ I_2 & \text{si} \quad m - l = j. \end{cases}$$

Ahora, el morfismo $\phi^1_{\delta(a_1)}$ queda representado matricialmente por:

$$[\phi^1_{\delta(a_1)}] = \sum_{i+j\geq 1} \lambda_{ij} N(\mathfrak{C} - qI)^j E M(\mathfrak{A} - pI)^i,$$

así que $[\phi^1_{\delta(a_1)}]$ es una matriz de 18×25 entradas, que partimos en 9×5 bloques $[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{lm}$ de $2 \times (2m-1)$, y que podemos determinar por:

$$\begin{aligned} [\phi^1_{\delta(a_1)}]_{lm} &= [\sum_{i+j\geq 1} \lambda_{ij} N(\mathfrak{C} - qI)^j E M(\mathfrak{A} - pI)^i]_{lm} \\ &= \sum_{i+j\geq 1} \lambda_{ij} [N(\mathfrak{C} - qI)^j E M(\mathfrak{A} - pI)^i]_{lm} \\ &= \sum_{i+j\geq 1} \lambda_{ij} \sum_{s=1}^{5} [N(\mathfrak{C} - qI)^j E]_{ls} [M(\mathfrak{A} - pI)^i]_{sm} \\ &= \sum_{i+j\geq 1} \lambda_{ij} [N(\mathfrak{C} - qI)^j E]_{lm} [M(\mathfrak{A} - pI)^i]_{mm} \\ &= \sum_{i+j\geq 1} \lambda_{ij} \sum_{s=1}^{9} [N(\mathfrak{C} - qI)^j]_{ls} E_{sm} [M(\mathfrak{A} - pI)^i]_{mm} \\ &= \sum_{i+j\geq 1} \lambda_{ij} E_{l+j,m} J_{2m-1}(0)^i. \end{aligned}$$

Y usando la nilpotencia tenemos que $i \leq 2m-1$, y puesto que $l + j \leq 9$, entonces $j \leq 9 - l$.

Considerando la descripción de $J_n(0)^i$, tenemos que la entrada $[[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{lm}]_{ts}$ de la matriz $[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{lm}$ está dada por:

$$\begin{aligned} [[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{lm}]_{ts} &= [\sum_{i+j\geq 1} \lambda_{ij} E_{l+jm} J_{2m-1}(0)^i]_{ts} \\ &= \sum_{i+j\geq 1} \lambda_{ij} [E_{l+jm} J_{2m-i}(0)^i]_{ts} = \sum_{i+j\geq 1} \lambda_{ij} \sum_{u=1}^{2m-1} \gamma^{tu}_{l+jm} [J_{2m-1}(0)^i]_{us} \\ &= \begin{cases} \sum_{i+j\geq 1} \lambda_{ij} \gamma^{ts-i}_{l+jm} & \text{para} \quad j \leq 9 - l, \text{ e } i \leq s - 1, \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases} \end{aligned} \qquad [12]$$

Mostramos [11], viendo que:

$$[[\phi^{1}_{\delta(a_1)}]_{9m}]_{tm} = 0 \qquad [13]$$

para $m = 1,2,3,4,5$ y $t = 1,2$, y por [12], es decir que:

$$\begin{aligned}
[[\phi^{1}_{\delta(a_1)}]_{91}]_{t1} &= 0 = 0\\
[[\phi^{1}_{\delta(a_1)}]_{92}]_{t2} &= \lambda_{10}\gamma^{t1}_{92} = 0\\
[[\phi^{1}_{\delta(a_1)}]_{93}]_{t3} &= \lambda_{20}\gamma^{t1}_{93} + \lambda_{10}\gamma^{t2}_{93} = 0\\
[[\phi^{1}_{\delta(a_1)}]_{94}]_{t4} &= \lambda_{30}\gamma^{t1}_{94} + \lambda_{20}\gamma^{t2}_{94} + \lambda_{10}\gamma^{t3}_{94} = 0\\
[[\phi^{1}_{\delta(a_1)}]_{95}]_{t5} &= \lambda_{40}\gamma^{t1}_{95} + \lambda_{30}\gamma^{t2}_{95} + \lambda_{20}\gamma^{t3}_{95} + \lambda_{10}\gamma^{t4}_{95} = 0
\end{aligned}$$

Para probar [13] necesitaremos de las siguientes matrices que se obtienen de [10], tomando $l \neq 9$:

$$[\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{lm} = \mathfrak{Q}_{l9}[M(\mathfrak{B})]_{9m} = \mathfrak{Q}_{10-l}M(\mathfrak{B}_{2m-1}).$$

De aquí que:

$$\begin{aligned}
[\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{l1} &= \mathfrak{Q}_{10-l}M(\mathfrak{B}_1) = \begin{bmatrix} \beta^{11}_{10-l} \\ \beta^{21}_{10-l} \end{bmatrix};\\
[\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{l2} &= \mathfrak{Q}_{10-l}M(\mathfrak{B}_3) = \begin{bmatrix} 0 & \beta^{12}_{10-l} & 0 \\ 0 & \beta^{22}_{10-l} & 0 \end{bmatrix};\\
[\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{l3} &= \mathfrak{Q}_{10-l}M(\mathfrak{B}_5) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta^{11}_{10-l} + \beta^{12}_{10-l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{21}_{10-l} + \beta^{22}_{10-l} & 0 & 0 \end{bmatrix}\\
[\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{l4} &= \mathfrak{Q}_{10-l}M(\mathfrak{B}_7) = \qquad [14]\\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta^{11}_{10-l} + \beta^{12}_{10-l}M(u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^{21}_{10-l} + \beta^{22}_{10-l}M(u) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\\
[\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{l5} &= \mathfrak{Q}_{10-l}M(\mathfrak{B}_9) =\\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \beta^{11}_{10-l} + \beta^{12}_{10-l}M(v) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta^{21}_{10-l} + \beta^{22}_{10-l}M(v) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Recordando que j_0 es el menor j con $\lambda_{0j} \neq 0$ e i_0 es el menor i con $\lambda_{i0} \neq 0$, y que estamos en el situación $j_0 \leq i_0$, pasamos a mostrar [13].

CASO A. $j_0 \geq 5$, entonces $i_0 \geq 5$, y consecuentemente $\lambda_{10} = \lambda_{20} = \lambda_{30} = \lambda_{40} = 0$ y se tiene [13].

CASO B. $j_0 = 4$, entonces $\lambda_{01} = \lambda_{02} = \lambda_{03} = 0$, $\lambda_{04} \neq 0$. Como $i_0 \geq 4$, $\lambda_{10} = \lambda_{20} = \lambda_{30} = 0$, y se tiene [13] para $m = 1,2,3,4$. Mientras que para $m = 5$:

$$[[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{95}]_{t5} = \lambda_{40}\gamma^{t1}_{95}$$

Pero de las matrices [14] sabemos que:

$$\begin{aligned} 0 &= [[\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{55}]_{t1} = [[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{55}]_{t1} = \sum_{j=1}^{4} \lambda_{0j}\gamma^{t1}_{5+j,5} = \\ &= \lambda_{01}\gamma^{t1}_{65} + \lambda_{02}\gamma^{t1}_{75} + \lambda_{03}\gamma^{t1}_{85} + \lambda_{04}\gamma^{t1}_{95} = \lambda_{04}\gamma^{t1}_{95}. \end{aligned}$$

Como $\lambda_{04} \neq 0$, entonces $\gamma^{t1}_{59} = 0$, y se tiene [13].

CASO C. $j_0 = 3$, entonces $\lambda_{01} = \lambda_{02} = 0$ y $\lambda_{03} \neq 0$ y dado que $i_0 \geq 3$ se tiene $\lambda_{10} = \lambda_{20} = 0$. Se satisface [13] para $m = 1,2,3$. Mientras que para $m = 4,5$:

$$\begin{aligned} [[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{94}]_{t4} &= \lambda_{30}\gamma^{t1}_{94} \\ [[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{95}]_{t5} &= \lambda_{40}\gamma^{t1}_{95} + \lambda_{30}\gamma^{t2}_{95}. \end{aligned}$$

Usando las matrices [14], sabemos que

$$\begin{aligned} 0 &= [[\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{64}]_{t1} = [[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{64}]_{t1} = \sum_{j=1}^{3} \lambda_{0j}\gamma^{t1}_{6+j,4} = \\ &= \lambda_{01}\gamma^{t1}_{74} + \lambda_{02}\gamma^{t1}_{84} + \lambda_{03}\gamma^{t1}_{94} = \lambda_{03}\gamma^{t1}_{94}, \end{aligned}$$

Como $\lambda_{03} \neq 0$, entonces $\gamma^{t1}_{94} = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= [[\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{65}]_{t1} = [[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{65}]_{t1} = \sum_{j=1}^{3} \lambda_{0j}\gamma^{t1}_{6+j,5} = \\ &= \lambda_{01}\gamma^{t1}_{75} + \lambda_{02}\gamma^{t1}_{85} + \lambda_{03}\gamma^{t1}_{95} = \lambda_{03}\gamma^{t1}_{95}, \end{aligned}$$

Así que $\gamma^{t1}_{95} = 0$.

$$
\begin{aligned}
0 &= [[\square M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{55}]_{t1} = [[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{55}]_{t1} = \sum_{j=1}^{4} \lambda_{0j}\gamma^{t1}_{5+j,5} = \\
&= \lambda_{01}\gamma^{t1}_{65} + \lambda_{02}\gamma^{t1}_{75} + \lambda_{03}\gamma^{t1}_{85} + \lambda_{04}\gamma^{t1}_{95} = \lambda_{03}\gamma^{t1}_{85},
\end{aligned}
$$

y una vez mas $\gamma^{t1}_{85} = 0$.

$$
\begin{aligned}
0 &= [[\square M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{45}]_{t1} = [[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{45}]_{t1} = \sum_{j=1}^{5} \lambda_{0j}\gamma^{t1}_{4+j,5} = \\
&= \lambda_{01}\gamma^{t1}_{55} + \lambda_{02}\gamma^{t1}_{65} + \lambda_{03}\gamma^{t1}_{75} + \lambda_{04}\gamma^{t1}_{85} + \lambda_{05}\gamma^{t1}_{95} = \lambda_{03}\gamma^{t1}_{75},
\end{aligned}
$$

luego $\gamma^{t1}_{75} = 0$.

$$
\begin{aligned}
0 &= [[\square M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{65}]_{t2} = [[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{65}]_{t2} = \sum_{j=1}^{3} \lambda_{0j}\gamma^{t2}_{6+j,5} + \sum_{j=0}^{3} \lambda_{1j}\gamma^{t1}_{6+j,5} = \\
&= \lambda_{01}\gamma^{t2}_{75} + \lambda_{02}\gamma^{t2}_{85} + \lambda_{03}\gamma^{t2}_{95} + \lambda_{10}\gamma^{t1}_{65} + \lambda_{11}\gamma^{t1}_{75} + \lambda_{12}\gamma^{t1}_{85} + \lambda_{13}\gamma^{t1}_{95} = \lambda_{03}\gamma^{t2}_{95},
\end{aligned}
$$

por lo que $\gamma^{t2}_{95} = 0$. Del hecho de que $\gamma^{t1}_{94} = \gamma^{t1}_{95} = \gamma^{t2}_{95} = 0$ se sigue [13].

<u>CASO D.</u> $j_0 = 2$, entonces $\lambda_{01} = 0$ y $\lambda_{02} \neq 0$, $\lambda_{10} = 0$ pues $i_0 \geq 2$. Luego se cumple [13] para $m = 1, 2$, mientras que

$$
\begin{aligned}
[[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{93}]_{t3} &= \lambda_{20}\gamma^{t1}_{93}, \\
[[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{94}]_{t4} &= \lambda_{30}\gamma^{t1}_{94} + \lambda_{20}\gamma^{t2}_{94}, \\
[[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{95}]_{t5} &= \lambda_{40}\gamma^{t1}_{95} + \lambda_{30}\gamma^{t2}_{95} + \lambda_{20}\gamma^{t3}_{95}.
\end{aligned}
$$

Utilizando las matrices [14], se observa que:

$$
\begin{aligned}
0 &= [[\square M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{73}]_{t1} = [[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{73}]_{t1} = \sum_{j=1}^{2} \lambda_{0j}\gamma^{t1}_{7+j,3} = \\
&= \lambda_{01}\gamma^{t1}_{83} + \lambda_{02}\gamma^{t1}_{93} = \lambda_{02}\gamma^{t1}_{93}.
\end{aligned}
$$

Como $\lambda_{02} \neq 0$, se tiene que $\gamma^{t1}_{93} = 0$.

$$
\begin{aligned}
0 &= [[\square M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{74}]_{t1} = [[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{74}]_{t1} = \sum_{j=1}^{2} \lambda_{0j}\gamma^{t1}_{7+j,4} = \\
&= \lambda_{01}\gamma^{t1}_{84} + \lambda_{02}\gamma^{t1}_{94} = \lambda_{02}\gamma^{t1}_{94}.
\end{aligned}
$$

Luego $\gamma_{94}^{t1} = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= [[\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{64}]_{t1} = [[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{64}]_{t1} = \sum_{j=1}^{3} \lambda_{0j}\gamma^{t1}_{6+j,4} = \\ &= \lambda_{01}\gamma^{t1}_{74} + \lambda_{02}\gamma^{t1}_{84} + \lambda_{03}\gamma^{t1}_{94} = \lambda_{02}\gamma^{t1}_{84}. \end{aligned}$$

Se sigue que $\gamma_{84}^{t1} = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= [[\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{74}]_{t2} = [[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{74}]_{t2} = \sum_{j=1}^{2} \lambda_{0j}\gamma^{t2}_{7+j,4} + \sum_{j=0}^{2} \lambda_{1j}\gamma^{t1}_{7+j,4} = \\ &= \lambda_{01}\gamma^{t2}_{84} + \lambda_{02}\gamma^{t2}_{94} + \lambda_{10}\gamma^{t1}_{74} + \lambda_{11}\gamma^{t1}_{84} + \lambda_{12}\gamma^{t1}_{94} = \lambda_{02}\gamma^{t2}_{94}. \end{aligned}$$

Consecuentemente, $\gamma_{94}^{t2} = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= [[\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{75}]_{t1} = [[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{75}]_{t1} = \sum_{j=1}^{2} \lambda_{0j}\gamma^{t1}_{7+j,5} = \\ &= \lambda_{01}\gamma^{t1}_{85} + \lambda_{02}\gamma^{t1}_{95} = \lambda_{02}\gamma^{t1}_{95}. \end{aligned}$$

Así que $\gamma_{95}^{t1} = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= [[\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{65}]_{t1} = [[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{65}]_{t1} = \sum_{j=1}^{3} \lambda_{0j}\gamma^{t1}_{6+j,5} = \\ &= \lambda_{01}\gamma^{t1}_{75} + \lambda_{02}\gamma^{t1}_{85} + \lambda_{03}\gamma^{t1}_{95} = \lambda_{02}\gamma^{t1}_{85}. \end{aligned}$$

Lo que implica $\gamma_{85}^{t1} = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= [[\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{55}]_{t1} = [[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{55}]_{t1} = \sum_{j=1}^{4} \lambda_{0j}\gamma^{t1}_{5+j,5} = \\ &= \lambda_{01}\gamma^{t1}_{65} + \lambda_{02}\gamma^{t1}_{75} + \lambda_{03}\gamma^{t1}_{85} + \lambda_{04}\gamma^{t1}_{95} = \lambda_{02}\gamma^{t1}_{75}. \end{aligned}$$

De donde $\gamma_{75}^{t1} = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= [[\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{75}]_{t2} = [[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{75}]_{t2} = \sum_{j=1}^{2} \lambda_{0j}\gamma^{t2}_{7+j,5} + \sum_{j=0}^{2} \lambda_{1j}\gamma^{t1}_{7+j,5} = \\ &= \lambda_{01}\gamma^{t2}_{85} + \lambda_{02}\gamma^{t2}_{95} + \lambda_{10}\gamma^{t1}_{75} + \lambda_{11}\gamma^{t1}_{85} + \lambda_{12}\gamma^{t1}_{95} = \lambda_{02}\gamma^{t2}_{95}. \end{aligned}$$

Por lo que concluimos que $\gamma_{95}^{t2} = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= [[\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{65}]_{t2} = [[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{65}]_{t2} = \sum_{j=1}^{3} \lambda_{0j}\gamma^{t2}_{6+j,5} + \sum_{j=0}^{3} \lambda_{1j}\gamma^{t1}_{6+j,5} = \\ &= \lambda_{01}\gamma^{t2}_{75} + \lambda_{02}\gamma^{t2}_{85} + \lambda_{03}\gamma^{t2}_{95} + \lambda_{10}\gamma^{t1}_{65} + \lambda_{11}\gamma^{t1}_{75} + \lambda_{12}\gamma^{t1}_{85} + \lambda_{13}\gamma^{t1}_{95} = \lambda_{02}\gamma^{t2}_{85}. \end{aligned}$$

Y se tiene que $\gamma_{85}^{t2} = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= [[\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{75}]_{t3} = [[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{75}]_{t3} \\ &= \sum_{j=1}^{2} \lambda_{0j}\gamma^{t3}_{7+j,5} + \sum_{j=0}^{2} \lambda_{1j}\gamma^{t2}_{7+j,5} + \sum_{j=0}^{2} \lambda_{2j}\gamma^{t1}_{7+j,5} = \\ &= \lambda_{01}\gamma^{t3}_{85} + \lambda_{02}\gamma^{t3}_{95} + \lambda_{10}\gamma^{t2}_{75} + \lambda_{11}\gamma^{t2}_{85} + \lambda_{12}\gamma^{t2}_{95} + \lambda_{20}\gamma^{t1}_{75} + \lambda_{21}\gamma^{t1}_{85} + \lambda_{22}\gamma^{t1}_{95} = \\ &= \lambda_{02}\gamma^{t3}_{95}. \end{aligned}$$

Concluimos que $\gamma_{95}^{t3} = 0$.

El hecho de que $\gamma_{93}^{t1} = \gamma_{94}^{t1} = \gamma_{94}^{t2} = \gamma_{95}^{t1} = \gamma_{95}^{t2} = \gamma_{95}^{t3} = 0$, nos permite afirmar [13].

<u>CASO E.</u> $j_0 = 1$. Sólo sabemos que $\lambda_{01} \neq 0$, y únicamente tenemos [13] para $m = 1$. Por las matrices [14], se tiene que:

$$\begin{aligned} 0 &= [[\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{82}]_{t1} = [[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{82}]_{t1} = \sum_{j=1}^{1} \lambda_{0j}\gamma^{t1}_{8+j,2} = \\ &= \lambda_{01}\gamma^{t1}_{92}. \end{aligned}$$

Como $\lambda_{01} \neq 0$, se tiene que $\gamma_{92}^{t1} = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= [[\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{83}]_{t1} = [[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{83}]_{t1} = \sum_{j=1}^{1} \lambda_{0j}\gamma^{t1}_{8+j,3} = \\ &= \lambda_{01}\gamma^{t1}_{93}. \end{aligned}$$

Luego $\gamma_{93}^{t1} = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= [[\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{73}]_{t1} = [[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{73}]_{t1} = \sum_{j=1}^{2} \lambda_{0j}\gamma^{t1}_{7+j,3} = \\ &= \lambda_{01}\gamma^{t1}_{83} + \lambda_{02}\gamma^{t1}_{93} = \lambda_{01}\gamma^{t1}_{83}. \end{aligned}$$

Se sigue que $\gamma_{83}^{t1} = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= [[\mathfrak{D}M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{83}]_{t2} = [[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{83}]_{t2} = \sum_{j=1}^{1} \lambda_{0j}\gamma_{8+j,3}^{t2} + \sum_{j=0}^{1} \lambda_{1j}\gamma_{8+j,3}^{t1} = \\ &= \lambda_{01}\gamma_{93}^{t2} + \lambda_{10}\gamma_{83}^{t1} + \lambda_{11}\gamma_{93}^{t1} = \lambda_{01}\gamma_{93}^{t2}, \end{aligned}$$

Consecuentemente, $\gamma_{93}^{t2} = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= [[\mathfrak{D}M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{84}]_{t1} = [[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{84}]_{t1} = \sum_{j=1}^{1} \lambda_{0j}\gamma_{8+j,5}^{t1} = \\ &= \lambda_{01}\gamma_{94}^{t1}. \end{aligned}$$

Así que $\gamma_{94}^{t1} = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= [[\mathfrak{D}M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{74}]_{t1} = [[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{74}]_{t1} = \sum_{j=1}^{2} \lambda_{0j}\gamma_{7+j,4}^{t1} = \\ &= \lambda_{01}\gamma_{84}^{t1} + \lambda_{02}\gamma_{94}^{t1} = \lambda_{01}\gamma_{84}^{t1} \end{aligned}$$

Lo que implica $\gamma_{84}^{t1} = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= [[\mathfrak{D}M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{64}]_{t1} = [[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{64}]_{t1} = \sum_{j=1}^{3} \lambda_{0j}\gamma_{6+j,4}^{t1} = \\ &= \lambda_{01}\gamma_{74}^{t1} + \lambda_{02}\gamma_{84}^{t1} + \lambda_{03}\gamma_{94}^{t1} = \lambda_{01}\gamma_{74}^{t1}. \end{aligned}$$

De donde $\gamma_{74}^{t1} = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= [[\mathfrak{D}M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{84}]_{t2} = [[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{84}]_{t2} - \sum_{j=1}^{1} \lambda_{0j}\gamma_{8+j,4}^{t2} + \sum_{j=0}^{1} \lambda_{1j}\gamma_{8+j,4}^{t1} = \\ &= \lambda_{01}\gamma_{94}^{t2} + \lambda_{10}\gamma_{84}^{t1} + \lambda_{11}\gamma_{94}^{t1} = \lambda_{01}\gamma_{94}^{t2}. \end{aligned}$$

Por lo que concluimos que $\gamma_{94}^{t2} = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= [[\mathfrak{D}M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{74}]_{t2} = [[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{74}]_{t2} = \sum_{j=1}^{2} \lambda_{0j}\gamma_{7+j,4}^{t2} + \sum_{j=0}^{2} \lambda_{1j}\gamma_{7+j,4}^{t1} = \\ &= \lambda_{01}\gamma_{84}^{t2} + \lambda_{02}\gamma_{94}^{t2} + \lambda_{10}\gamma_{74}^{t1} + \lambda_{11}\gamma_{84}^{t1} + \lambda_{12}\gamma_{94}^{t1} = \lambda_{01}\gamma_{84}^{t2}. \end{aligned}$$

Y se tiene que $\gamma^{t2}_{84} = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= [[\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{84}]_{t3} = [[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{84}]_{t3} \\ &= \sum_{j=1}^{1} \lambda_{0j}\gamma^{t3}_{8+j,4} + \sum_{j=0}^{1} \lambda_{1j}\gamma^{t2}_{8+j,4} + \sum_{j=0}^{1} \lambda_{2j}\gamma^{t1}_{8+j,4} = \\ &= \lambda_{01}\gamma^{t3}_{94} + \lambda_{10}\gamma^{t2}_{84} + \lambda_{11}\gamma^{t2}_{94} + \lambda_{20}\gamma^{t1}_{84} + \lambda_{21}\gamma^{t1}_{94} = \lambda_{01}\gamma^{t3}_{94}. \end{aligned}$$

Concluimos que $\gamma^{t3}_{94} = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= [[\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{85}]_{t1} = [[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{85}]_{t1} = \sum_{j=1}^{1} \lambda_{0j}\gamma^{t1}_{8+j,5} = \\ &= \lambda_{01}\gamma^{t1}_{95}. \end{aligned}$$

Como $\lambda_{01} \neq 0$, se tiene que $\gamma^{t1}_{95} = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= [[\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{75}]_{t1} = [[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{75}]_{t1} = \sum_{j=1}^{2} \lambda_{0j}\gamma^{t1}_{7+j,5} = \\ &= \lambda_{01}\gamma^{t1}_{85} + \lambda_{02}\gamma^{t1}_{95} = \lambda_{01}\gamma^{t1}_{85}. \end{aligned}$$

Luego $\gamma^{t1}_{85} = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= [[\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{65}]_{t1} = [[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{65}]_{t1} = \sum_{j=1}^{3} \lambda_{0j}\gamma^{t1}_{6+j,5} = \\ &= \lambda_{01}\gamma^{t1}_{75} + \lambda_{02}\gamma^{t1}_{85} + \lambda_{03}\gamma^{t1}_{95} = \lambda_{01}\gamma^{t1}_{75}. \end{aligned}$$

Se sigue que $\gamma^{t1}_{75} = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= [[\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{55}]_{t1} = [[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{55}]_{t1} = \sum_{j=1}^{4} \lambda_{0j}\gamma^{t1}_{5+j,5} \\ &= \lambda_{01}\gamma^{t1}_{65} + \lambda_{02}\gamma^{t1}_{75} + \lambda_{03}\gamma^{t1}_{85} + \lambda_{04}\gamma^{t1}_{95} = \lambda_{01}\gamma^{t1}_{65}, \end{aligned}$$

Consecuentemente, $\gamma^{t1}_{65} = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= [[\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{85}]_{t2} = [[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{85}]_{t2} = \sum_{j=1}^{1} \lambda_{0j}\gamma^{t2}_{8+j,5} + \sum_{j=0}^{1} \lambda_{1j}\gamma^{t1}_{8+j,5} = \\ &= \lambda_{01}\gamma^{t2}_{95} + \lambda_{10}\gamma^{t1}_{85} + \lambda_{11}\gamma^{t1}_{95} = \lambda_{01}\gamma^{t2}_{95}. \end{aligned}$$

Así que $\gamma_{95}^{t2} = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= [[\mho M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{75}]_{t2} = [[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{75}]_{t2} = \sum_{j=1}^{2} \lambda_{0j}\gamma_{7+j,5}^{t1} + \sum_{j=0}^{2} \lambda_{1j}\gamma_{7+j,5}^{t1} = \\ &= \lambda_{01}\gamma_{85}^{t2} + \lambda_{02}\gamma_{95}^{t2} + \lambda_{10}\gamma_{75}^{t1} + \lambda_{11}\gamma_{85}^{t1} + \lambda_{12}\gamma_{95}^{t1} = \lambda_{01}\gamma_{85}^{t2}. \end{aligned}$$

Lo que implica $\gamma_{85}^{t2} = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= [[\mho M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{65}]_{t2} = [[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{65}]_{t2} = \sum_{j=1}^{3} \lambda_{0j}\gamma_{6+j,5}^{t2} + \sum_{j=0}^{3} \lambda_{1j}\gamma_{6+j,5}^{t1} = \\ &= \lambda_{01}\gamma_{75}^{t2} + \lambda_{02}\gamma_{85}^{t2} + \lambda_{03}\gamma_{95}^{t2} + \lambda_{10}\gamma_{65}^{t1} + \lambda_{11}\gamma_{75}^{t1} + \lambda_{12}\gamma_{85}^{t1} + \lambda_{13}\gamma_{95}^{t1} = \lambda_{01}\gamma_{75}^{t2}. \end{aligned}$$

De donde $\gamma_{75}^{t2} = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= [[\mho M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{85}]_{t3} = [[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{85}]_{t3} \\ &= \sum_{j=1}^{1} \lambda_{0j}\gamma_{8+j,5}^{t3} + \sum_{j=0}^{1} \lambda_{1j}\gamma_{8+j,5}^{t2} + \sum_{j=0}^{1} \lambda_{2j}\gamma_{8+j,5}^{t1} = \\ &= \lambda_{01}\gamma_{95}^{t3} + \lambda_{10}\gamma_{85}^{t2} + \lambda_{11}\gamma_{95}^{t2} + \lambda_{20}\gamma_{85}^{t1} + \lambda_{21}\gamma_{95}^{t1} = \lambda_{01}\gamma_{95}^{t3}. \end{aligned}$$

Por lo que concluimos que $\gamma_{95}^{t3} = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= [[\mho M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{75}]_{t3} = [[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{75}]_{t3} \\ &= \sum_{j=1}^{2} \lambda_{0j}\gamma_{7+j,5}^{t3} + \sum_{j=0}^{2} \lambda_{1j}\gamma_{7+j,5}^{t2} + \sum_{j=0}^{2} \lambda_{2j}\gamma_{7+j,5}^{t1} = \\ &= \lambda_{01}\gamma_{85}^{t3} + \lambda_{02}\gamma_{95}^{t3} + \lambda_{10}\gamma_{75}^{t2} + \lambda_{11}\gamma_{85}^{t2} + \lambda_{12}\gamma_{95}^{t2} + \lambda_{20}\gamma_{75}^{t1} + \lambda_{21}\gamma_{85}^{t1} + \lambda_{22}\gamma_{95}^{t1} \\ &= \lambda_{01}\gamma_{85}^{t3}. \end{aligned}$$

Y se tiene que $\gamma_{85}^{t3} = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= [[\mho M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P}]_{85}]_{t4} = [[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{85}]_{t4} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_{i0}\gamma_{85}^{t4-i} + \sum_{i=0}^{3} \lambda_{i1}\gamma_{95}^{t4-i} \\ &= \lambda_{10}\gamma_{85}^{t3} + \lambda_{20}\gamma_{85}^{t2} + \lambda_{30}\gamma_{85}^{t1} + \lambda_{01}\gamma_{95}^{t4} + \lambda_{11}\gamma_{95}^{t3} + \lambda_{21}\gamma_{95}^{t2} + \lambda_{31}\gamma_{95}^{t1} = \lambda_{01}\gamma_{95}^{t4}. \end{aligned}$$

Concluimos que $\gamma_{95}^{t4} = 0$.

El hecho de que $\gamma_{92}^{t1} = \gamma_{93}^{t1} = \gamma_{93}^{t2} = \gamma_{94}^{t1} = \gamma_{94}^{t2} = \gamma_{94}^{t3} = \gamma_{95}^{t1} = \gamma_{95}^{t2} = \gamma_{95}^{t3} = \gamma_{95}^{t4} = 0$, nos permite afirmar [13].

Esto concluye la prueba del caso (1).

CASO (2). Supongamos que $X = Y$, y sea $A'(X,X) = k[x, f(x)^{-1}]$. Así $R = k[x, y, f(x)^{-1}, f(y)^{-1}]$. Haciendo un cambio de base de la forma

$$v_1' = f(x)^{-m} f(y)^{-n} v_1$$

en la estratificación, podemos suponer que r es un polinomio $r(x,y)$.

CASO (2a). Supóngase que existen escalares $p, q \in k$ tales que

$$f(p) \neq 0, \quad f(q) \neq 0, \quad r(p,q) = 0 \quad \text{y} \quad p \neq q.$$

Escribimos $r(x,y)$ en la forma

$$r(x,y) = \sum_{i+j\geq 1} \lambda_{ij}(x-p)^i(y-q)^j, \qquad \lambda_{ij} \in k.$$

Sea j_0 el menor j con $\lambda_{0j} \neq 0$, e i_0 el menor i con $\lambda_{i0} \neq 0$ (posiblemente $i_0, j_0 = \infty$). Consideraremos el caso en que $j_0 \leq i_0$. El otro caso se obtiene reemplazando $F(a_1)$ por su transpuesta.

Definimos $F : A \longrightarrow \Sigma$ de la siguiente manera:

$$F(X) = S^{43}$$

$$F(x) = \begin{bmatrix} \mathfrak{A} & 0 \\ 0 & \mathfrak{C} \end{bmatrix}, \qquad F(a_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathfrak{B} & 0 \end{bmatrix},$$

donde $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ son como en el caso (1). Como

$$F(f(x)) = f(F(x)) = \begin{bmatrix} f(\mathfrak{A}) & 0 \\ 0 & f(\mathfrak{C}) \end{bmatrix},$$

y como en el caso (1), $f(\mathfrak{A})$ y $f(\mathfrak{C})$ son invertibles, luego así lo es $F(f(x))$, y por tanto F está bien definido.

Sea M una representación en $R(\Sigma)$, entonces $M' = (F, F\varepsilon)^* M$ es un A-módulo tal que

$$M'(X) = MF(X) = M(S)^{43},$$

$$M'(X) = \begin{bmatrix} M(\mathfrak{A}) & 0 \\ 0 & M(\mathfrak{C}) \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad M'(a_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M(\mathfrak{B}) & 0 \end{bmatrix},$$

con $M(\mathfrak{A})$, $M(\mathfrak{B})$ y $M(\mathfrak{C})$ como en el caso (1).

Si $\phi = (\phi^0, \phi') : M' \longrightarrow N'$ es un morfismo en $R(\mathcal{A})$, entonces

$$N'(x)\phi_X^0 = \phi_X^0 M'(x) \qquad [15]$$

y

$$\phi_X^0 M'(a_1) - N'(a_1)\phi_X^0 = \phi^1_{\delta(a_1)} \qquad [16]$$

donde

$$\phi_X^0 : M'(X) = M(S)^{43} \longrightarrow N'(X) = N(S)^{43},$$

$$\phi^1_{\delta(a_1)} = \sum_{i+j\geq 1} \lambda_{ij} N'(x-q)^j \phi^1_{v_1} M'(x-p)^i,$$

y

$$\phi^1_{v_1} : M'(X) = M(S)^{43} \longrightarrow N'(X) = N(S)^{43}.$$

El análisis que hacemos enseguida de la relaciones [15] y [16] muestra que si $\mathfrak{U}$ es la matriz que representa al morfismo ϕ_X^0, entonces existe una matriz invertible $\mathfrak{D}_1$ tal que $\mathfrak{D}_1^{-1}\mathfrak{U}\mathfrak{D}_1$ es triangular superior y las diagonales principales de $\mathfrak{D}_1^{-1}\mathfrak{U}\mathfrak{D}_1$ y $\mathfrak{U}$ tienen los mismos elementos, todos ellos iguales entre sí digamos a $\alpha : M(S) \longrightarrow N(S)$, y además:

$$N(u)\alpha = \alpha M(u), \qquad N(v)\alpha = \alpha M(v),$$

así α es realmente un morfismo de Σ-módulos, $\alpha : M \longrightarrow N$. Argumentando como en el caso (1) de 4.6, tenemos que el funtor F tiene las propiedades deseadas. Veamos que $\mathfrak{U}$ tiene las propiedades anunciadas.

Consideremos una partición en bloques

$$\mathfrak{U} = \begin{bmatrix} \mathfrak{P} & W \\ T & \mathfrak{Q} \end{bmatrix},$$

con $\mathfrak{P}$ de 25×25 y $\mathfrak{Q}$ de 18×18, entonces por [15] tenemos que

$$\begin{bmatrix} N(\mathfrak{A}) & 0 \\ 0 & N(\mathfrak{C}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{P} & W \\ T & \mathfrak{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathfrak{P} & W \\ T & \mathfrak{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(\mathfrak{A}) & 0 \\ 0 & M(\mathfrak{C}) \end{bmatrix},$$

es decir

$$N(\mathfrak{A})\mathfrak{P} = \mathfrak{P}M(\mathfrak{A}) \qquad N(\mathfrak{C})\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}M(\mathfrak{C}), \qquad [17]$$

$$N(\mathfrak{A})W = WM(\mathfrak{C}) \qquad N(\mathfrak{C})T = TM(\mathfrak{A}). \qquad [18]$$

Mostraremos que W y T son matrices nulas. Consideremos particiones:

$$W = [W_{lm}] \text{ en } 5 \times 9 \text{ bloques } W_{lm} \text{ de } (2l-1) \times 2,$$

$$T = [T_{lm}] \text{ en } 9 \times 5 \text{ bloques } T_{lm} \text{ de } 2 \times (2m-1).$$

Veamos que $W = 0$. Por la primera ecuación de [18] tenemos

$$\begin{aligned} [N(\mathfrak{A})W]_{lm} &= [WM(\mathfrak{C})]_{lm} \\ \sum_{s=1}^{5}[N(\mathfrak{A})]_{ls}W_{sm} &= \sum_{s=1}^{9} W_{ls}[M(\mathfrak{C})]_{sm} \end{aligned}$$

Usando las descripciones de $N(\mathfrak{A})$ y $M(\mathfrak{C})$ dadas en el caso (1), se sigue que

$$[N(\mathfrak{A})]_{ll}W_{lm} = \begin{cases} W_{lm}[M(\mathfrak{C})]_{mm} + W_{l,m-1}[M(\mathfrak{C})]_{m-1,m} & \text{si } m \neq 1, \\ W_{l1}[M(\mathfrak{C})]_{11} & \text{si } m = 1; \end{cases}$$

es decir

$$\begin{aligned} N(J_{2l-1}(p))W_{lm} &= W_{l,m-1}I_2 + W_{lm}qI_2 \qquad \text{si } m \neq 1 \\ N(J_{2l-1}(p))W_{l1} &= W_{l1}qI_2 \qquad \text{si } m = 1 \end{aligned}$$

o bien que:

$$[N(J_{2l-1}(p)) - qI_{2l-1}]W_{lm} = W_{l,m-1} \qquad \text{para } m \neq 1, \tag{19}$$

$$[N(J_{2l-1}(p)) - qI_{2l-1}]W_{l1} = 0. \tag{20}$$

Afirmamos que

$$[N(J_{2l-1}(p)) - qI_{2l-1}]^t W_{lm} = \begin{cases} W_{l,m-t} & \text{si } t \leq m-1 \\ 0 & \text{si } t > m-1 \end{cases} \tag{21}$$

Para probarlo usamos inducción sobre t.

Sea $t = 1$. Para $m = 1$. entonces $1 > m - 1$, y nuestra afirmación es la ecuación [20], y para $m > 1$, entonces $1 \leq m - 1$, y nuestra afirmación es [19].

Para probarlo para $t + 1$, observemos que

$$[N(J_{2l-1}(p)) - qI_{2l-1}]^{t+1}W_{lm} = [N(J_{2l-1}(p)) - qI_{2l-1}][N(J_{2l-1}(p) - qI_{2l-1}]^t W_{lm}.$$

En el caso en que $t + 1 \leq m - 1$, entonces $t < m - 1$ y $1 \leq m - 1 - t$, usando la hipótesis de inducción

$$[N(J_{2l-1}(p)) - qI_{2l-1}]^{t+1}W_{lm} = [N(J_{2l-1}(p)) - qI_{2l-1}]W_{l,m-t} = W_{l,m-t-1}.$$

En el caso en que $t+1 > m-1$, consideremos que $t+1 = m$, de aquí $t = m-1$, o sea $1 = m - t$ y

$$[N(J_{2l-1}(p)) - qI_{2l-1}]^{t+1}W_{lm} = [N(J_{2l-1}(p)) - qI_{2l-1}]W_{l1} = 0,$$

por [20]. Pero si $t+1 > m$, entonces $t > m-1$ y de aquí que

$$[N(J_{2l-1}(p)) - qI_{2l-1}]^{t+1}W_{lm} = [N(J_{2l-1}(p)) - qI_{2l-1}]0 = 0.$$

Y hemos probado [21]. Así para cada m, tomamos $t > m-1$ y tenemos

$$[N(J_{2l-1}(p)) - qI_{2l-1}]^{t}W_{lm} = 0.$$

Como $p \neq q$ entonces $N(J_{2l-1}(p)) - qI_{2l-1}$ es invertible, pues es una matriz triangular superior con toda la diagonal principal no nula, luego también es invertible cualquier potencia, y consecuentemente $W_{lm} = 0$, para todo valor de m y l. Luego $W = 0$.

Ahora mostramos que $T = 0$. Por la segunda ecuación de [18], tenemos:

$$[N(\mathfrak{C})T]_{lm} = [TM(\mathfrak{A})]_{lm}$$

$$\sum_{s=1}^{9}[N(\mathfrak{C})]_{ls}T_{sm} = \sum_{s=1}^{5} T_{ls}[M(\mathfrak{A})]_{sm}.$$

Usando las descripciones de $N(\mathfrak{C})$ y $M(\mathfrak{A})$ dadas en el caso (1), se sigue que

$$T_{lm}[M(\mathfrak{A})]_{mm} \begin{cases} [N(\mathfrak{C})]_{ll}T_{lm} + [N(\mathfrak{C})]_{l,l+1}T_{l+1,m} & \text{si } l \neq 9, \\ [N(\mathfrak{C})]_{99}T_{9m} & \text{si } l = 9. \end{cases}$$

Es decir:

$$\begin{aligned} T_{lm}M(J_{2m-1}(p)) &= qI_2T_{lm} + I_2T_{l+1,m} && \text{si } l \neq 9 \\ T_{9m}M(J_{2m-1}(p)) &= qT_{9m} && \text{si } l = 9, \end{aligned}$$

o bien que

$$T_{lm}[M(J_{2m-1}(p)) - qI_{2m-1}] = T_{l+1,m} \qquad \text{para } l \neq 9 \tag{22}$$

$$T_{9m}[M(J_{2m-1}(p)) - qI_{2m-1}] = 0 \tag{23}$$

Afirmamos que

$$T_{lm}[M(J_{2m-1}(p)) - qI_{2m-1}]^t = \begin{cases} T_{l+t,m} & \text{si } t \leq 9 - l, \\ 0 & \text{si } t > 9 - l \end{cases} \tag{24}$$

Para probarlo usamos inducción sobre t.

Sea $t = 1$. Para $l < 9$, tenemos $1 \leq 9 - l$ y nuestra afirmación es [22], y para $l = 9$, tenemos $1 > 0 = 9 - 9$ y nuestra afirmación es [23]. Para probar el caso $t + 1$, observemos que

$$T_{lm}[M(J_{2m-1}(p)) - qI_{2m-1}]^{t+1} = T_{lm}[M(J_{2m-1}(p)) - qI_{2m-1}]^{t}[M(J_{2m-1}(p)) - qI_{2m-1}]$$

En el caso en que $t + 1 \leq 9 - l$, entonces $t < 9 - l$ y $1 \leq 9 - l - t$, usando la hipótesis de inducción:

$$T_{lm}[M(J_{2m-1}(p)) - qI_{2m-1}]^{t+1} = T_{l+j,m}[M(J_{2m-1}(p)) - qI_{2m-1}] = T_{l+t+1,m}.$$

En el caso en que $t + 1 > 9 - l$, primero consideremos que $t + 1 = 9 - l + 1$, así $t = 9 - l$ o sea $9 = t + l$ y

$$T_{lm}[M(J_{2m-1}(p)) - qI_{2m-1}]^{t+1} = t_{9m}[M(J_{2m-1}(p)) - qI_{2m-1}] = 0$$

por la ecuación [23]. Pero si $t + 1 > 9 - l + 1$, entonces $t > 9 - l$ y de aquí que

$$T_{lm}[M(J_{2m-1}(p)) - qI_{2m-1}]^{t+1} = 0[M(J_{2m-1}(p) - qI_{2m-1}] = 0.$$

Y hemos probado [24]. Luego para cada l tomamos $t > 9 - l$ y tenemos

$$T_{lm}[M(J_{2m-1}(p)) - qI_{2m-1}]^{t} = 0$$

nuevamente, $[M(J_{2m-1}(p)) - qI_{2m-1}]^{t}$ es invertible y esto implica que $T_{lm} = 0$ para todo l y m. Luego $T = 0$.

Así se tiene que

$$\mathfrak{U} = \begin{bmatrix} \mathfrak{P} & 0 \\ 0 & \mathfrak{Q} \end{bmatrix}$$

con las matrices $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{Q}$ que satisfacen [17], y como en el caso (1), $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{Q}$ son como las matrices ya descritas anteriormente.

Para analizar [16], describimos a $\phi^1_{v_1}$ como una matriz partida en bloques:

$$\begin{bmatrix} S & T \\ E & W \end{bmatrix}$$

donde S es 25×25 y W es 18×18 (luego E es 18×25). Observemos que

$$M'(x - p) = M'(x) - pM'(I) = \begin{bmatrix} M(\mathfrak{A} - pI) & 0 \\ 0 & M(\mathfrak{C} - pI) \end{bmatrix},$$

y

$$N'(x-q) = N'(x) - qN'(I) = \begin{bmatrix} N(\mathfrak{A}-qI) & 0 \\ 0 & N(\mathfrak{C}-qI) \end{bmatrix}.$$

Luego $\phi^1_{\delta(a_1)}$ obtiene la siguiente forma matricial

$$\begin{aligned}
&\phi^1_{\delta(a_1)} \\
&= \sum_{i+j\geq 1} \lambda_{ij} \begin{bmatrix} N(\mathfrak{A}-qI) & 0 \\ 0 & N(\mathfrak{C}-qI) \end{bmatrix}^j \begin{bmatrix} S & T \\ E & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(\mathfrak{A}-pI) & 0 \\ 0 & M(\mathfrak{C}-pI) \end{bmatrix}^i \\
&= \sum_{i+j\geq 1} \lambda_{ij} \begin{bmatrix} N(\mathfrak{A}-qI)^j SM(\mathfrak{A}-pI)^i & N(\mathfrak{A}-qI)^j TM(\mathfrak{C}-pI)^i \\ N(\mathfrak{C}-qI)^j EM(\mathfrak{A}-pI)^i & N(\mathfrak{C}-qI)^j WM(\mathfrak{C}-pI)^i \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Mientras que $\phi^0_X M'(a_1) - N'(a_1)\phi^0_X$ tiene la siguiente forma matricial:

$$\begin{aligned}
\phi^0_X M'(a_1) - N'(a_1)\phi^0_X &= \begin{bmatrix} \mathfrak{P} & 0 \\ 0 & \mathfrak{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M(\mathfrak{B}) & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ N(\mathfrak{B}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{P} & 0 \\ 0 & \mathfrak{Q} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathfrak{Q}M(\mathfrak{B}) & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ N(\mathfrak{B})\mathfrak{P} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathfrak{Q}M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P} & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

De esto se sigue que:

$$\mathfrak{Q}M(\mathfrak{B}) - N(\mathfrak{B})\mathfrak{P} = \sum_{i+j\geq 1} \lambda_{ij} N(\mathfrak{C}-qI)^j EM(\mathfrak{A}-pI)^i.$$

Hemos deducido que las matrices $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ y E satisfacen las ecuaciones [7] y [8] del caso (1), lo que muestra las propiedades anunciadas sobre $\mathfrak{U}$, y observamos que basta tomar

$$\mathfrak{D}_1 = \begin{bmatrix} \mathfrak{D} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

donde $\mathfrak{D}$ es la matriz del caso (1).

CASO (2b). Ahora supongamos que no existen escalares p, $q \in k$ como en el caso (2a), es decir, para p, $q \in k$ tales que $f(p) \neq 0$, $f(q) \neq 0$ y $r(p,q) = 0$, entonces $p = q$. Luego el polinomio $r(x,y)$ es tal que $Z(\langle r(x,y)\rangle) \subseteq Z(\langle x-y, f(x)f(y)\rangle)$, y consecuentemente por le Teorema de los ceros de Hilbert se sigue que:

$$\sqrt{\langle x-y, f(x)f(y)\rangle} = I(Z(\langle x-y, f(x)f(y)\rangle)) \subseteq I(Z(\langle r(x,y)\rangle)) = \sqrt{\langle r(x,y)\rangle},$$

es decir que $x - y \in \sqrt{\langle r(x,y)\rangle}$, por lo que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(x-y)^m = s(x,y)r(x,y)$. Pero $k[x,y]$ es de factorización única y $x-y$ es irreducible, entonces $r(x,y) = \lambda(x-y)^n$, con $\lambda \in k$. Otra sustitución para v_1 nos permite suponer que

$$r(x,y) = (x-y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} x^i y^{n-i}, \qquad n \geq 1.$$

definimos $F : A \longrightarrow \Sigma$ por

$$F(X) = S^4,$$

$$F(x) = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1 & p \end{bmatrix}, \qquad F(a_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & u \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde p no es raíz de $f(x)$. Así F está bien definido.

Sea M una representación en $R(\Sigma)$, entonces $M' = (F, F\varepsilon)^* M$ es un A-módulo tal que

$$M'(X) = MF(X) = M(S)^4,$$

$$M'(x) = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1 & p \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad M'(a_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & M(u) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M(v) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para $\phi = (\phi^0, \phi^1) : M' \longrightarrow N'$ un morfismo en $R(\mathcal{A})$ se tienen las siguientes relaciones

$$N'(x)\phi^0_X = \phi^0_X M'(x) \qquad [25]$$

y

$$\phi^0_X M'(a_1) - N'(a_1)\phi^0_X = \phi^1_{\delta(a_1)} \qquad [26]$$

donde

$$\phi^0_X : M'(X) = M(S)^4 \longrightarrow N'(X) = N(S)^4,$$

$$\phi^1_{\delta(a_1)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} N'(x)^{n-i} \phi^1_{v_1} M'(x)^i,$$

y

$$\phi^1_{v_1} : M'(X) = M(S)^4 \longrightarrow N'(X) = N(S)^4.$$

Mostraremos que si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son matrices que representan a los morfismos ϕ^0_X y $\phi^1_{v_1}$, respectivamente, entonces existe una matriz $\mathfrak{D}$ invertible, tal que $\mathfrak{D}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{D}$ es triangular inferior con los mismos elementos en la diagonal principal que $\mathfrak{A}$ y que todos los términos de esta diagonal son iguales, digamos a $\alpha : M(S) \longrightarrow N(S)$ y además tal que

$$N(u)\alpha = \alpha M(u), \qquad N(v)\alpha = \alpha M(v),$$

Así $\alpha : M \longrightarrow N$ es un morfismo de Σ-módulos, y argumentando como en el caso (1) de 4.6 se sigue que F tiene las propiedades esperadas.

Supóngase que

$$\mathfrak{A} = [\alpha_{lm}]_{1\leq l,m\leq 4} \quad \text{y} \quad \mathfrak{B} = [\beta_{lm}]_{1\leq l,m\leq 4},$$

donde $\alpha_{lm}, \beta_{lm} : M(S) \longrightarrow N(S)$. La forma matricial de [25]:

$$N'(x)\mathfrak{A} = \mathfrak{A}M'(x)$$

muestra que

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_6 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_5 & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Obtenemos la forma triangular inferior conjugando por la matriz

$$\mathfrak{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

En efecto, como $\mathfrak{D}^{-1} = \mathfrak{D}^t$ se tiene

$$\mathfrak{D}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{D} = \begin{bmatrix} \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ \alpha_6 & 0 & \alpha_1 & 0 \\ \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_5 & \alpha_2 \end{bmatrix}.$$

El primer miembro de la ecuación [26] tiene la siguiente descripción matricial

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{A}M'(a_1) - N'(a_1)\mathfrak{A} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_6 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_5 & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & M(u) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M(v) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \\
&\qquad\qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N(u) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N(v) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_6 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_5 & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha_6 & 0 & 0 & \alpha_1 M(u) \\ \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 0 & \alpha_2 M(v) \\ \alpha_4 & 0 & 0 & \alpha_5 M(u) + \alpha_3 M(v) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N(u)\alpha_5 & N(u)\alpha_4 & N(u)\alpha_3 & N(u)\alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_6 & 0 & 0 \\ N(v)\alpha_5 & N(v)\alpha_4 & N(v)\alpha_3 & N(v)\alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha_6 - N(u)\alpha_5 & -N(u)\alpha_4 & -N(u)\alpha_3 & \alpha_1 M(u) - N(u)\alpha_2 \\ \alpha_2 - \alpha_1 & -\alpha_6 & 0 & 0 \\ \alpha_3 - N(v)\alpha_5 & -N(v)\alpha_4 & -N(v)\alpha_3 & \alpha_2 M(v) - N(v)\alpha_2 \\ \alpha_4 & 0 & 0 & \alpha_5 M(u) - \alpha_3 M(v) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Nuestro resultado se sigue si logramos mostrar que

$$\begin{aligned}
\alpha_1 M(u) - N(u)\alpha_2 &= [\mathfrak{A}M'(a_1) - N'(a_1)\mathfrak{A}]_{14} = 0 \\
\alpha_2 - \alpha_1 &= [\mathfrak{A}M'(a_1) - N'(a_1)\mathfrak{A}]_{21} = 0 \\
\alpha_2 M(v) - N(v)\alpha_2 &= [\mathfrak{A}M'(a_1) - N'(a_1)\mathfrak{A}]_{34} = 0
\end{aligned}$$

Para ello veamos la descripción matricial para $\phi^1_{\delta(a_1)}$. Empecemos observando que si $J_n(p)$ es un bloque de Jordan triangular inferior de $n \times n$ con valor propio p, entonces, para $i \in \mathbb{N}$

$$[J_n(p)^i]_{lm} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad l < m \\ \begin{pmatrix} i \\ l-m \end{pmatrix} p^{i-(l-m)} & \text{si} \quad l \geq m \text{ y } \quad 0 \leq l-m \leq i \\ 0 & \text{si} \quad l \geq m \text{ y } \quad l-m > i \end{cases}$$

La entrada lm de $\phi^1_{\delta(a_1)}$ queda descrita por

$$[\phi^1_{\delta(a_1)}]_{lm} = [\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} N'(x)^{n-i} \mathfrak{B} M'(x)^i]_{lm}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}[N'(x)^{n-i}\mathfrak{B}M'(x)^{i}]_{lm}\\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}\sum_{s=1}^{4}[N'(x)^{n-i}]_{ls}[\mathfrak{B}M'(x)^{i}]_{sm}\\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}\sum_{s=1}^{4}\sum_{t=1}^{4}[N'(x)^{n-i}]_{ls}\beta_{st}[M'(x)^{i}]_{tm}\\
&= \sum_{s=1}^{l}\sum_{t=m}^{4}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}[N'(x)^{n-i}]_{ls}\beta_{st}[M'(x)^{i}]_{tm}\right]
\end{aligned}
$$

pues $N'(x)^{n-i}$ y $M'(x)^{i}$ son triangulares inferiores. De manera particular observemos que

$$
\begin{aligned}
0 &= [\mathfrak{A}M'(a_1)-N'(a_1)\mathfrak{A}]_{23}=[\phi^{1}_{\delta(a_1)}]_{23}\\
&= \sum_{s=1}^{2}\sum_{t=3}^{4}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}[N'(x)^{n-i}]_{2s}\beta_{st}[M'(x)^{i}]_{t3}\right]\\
&= \sum_{t=3}^{4}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}[N'(x)^{n-i}]_{22}\beta_{2t}[M'(x)^{i}]_{t3}\right]\\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}[N'(x)^{n-i}]_{22}\beta_{23}[M'(x)^{i}]_{33}+\\
&\qquad\qquad +\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}[N'(x)^{n-i}]_{22}\beta_{24}[M'(x)^{i}]_{43}\\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}p^{n-i}1_{N(S)}\beta_{23}p^{i}1_{M(S)}+\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}p^{n-i}1_{N(S)}\beta_{24}ip^{i-1}1_{M(S)}\\
&= \left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}p^{n-i}p^{i}\right]\beta_{23}+\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}p^{n-i}ip^{i-1}\right]\beta_{24}\\
&= r(p,p)\beta_{23}+\frac{\partial r}{\partial x}(p,p)\beta_{24}=\frac{\partial r}{\partial x}(p,p)\beta_{24}.
\end{aligned}
$$

Las igualdades se obtienen observando que $[N'(x)^{n-i}]_{21}=0$ y además que $M'(x)=J_1(p)\oplus J_3(p)$. Así tenemos que

$$\frac{\partial r}{\partial x}(p,p)\beta_{24}=0$$

Para $l = 1$ y $m = 4$

$$
\begin{aligned}
[\mathfrak{A}M'(a_1) - N'(a_1)\mathfrak{A}]_{14} &= [\phi^1_{\delta(a_1)}]_{14} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i}[N'(x)^{n-i}]_{11}\beta_{14}[M'(x)^i]_{44} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i}p^{n-i}1_{N(S)}\beta_{14}p^i1_{M(S)} \\
&= \left[\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i}p^{n-i}p^i\right] \beta_{14} = r(p,p)\beta_{14} = 0.
\end{aligned}
$$

Para $l = 3$ y $m = 4$, usando que $[N'(x)^{n-i}]_{31} = 0$, tenemos

$$
\begin{aligned}
&[\mathfrak{A}M'(a_1) - N'(a_1)\mathfrak{A}]_{34} = [\phi^1_{\delta(a_1)}]_{34} \\
&= \sum_{s=1}^{3} \left[\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i}[N'(x)^{n-i}]_{3s}\beta_{s4}[M'(x)^i]_{44}\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i}[N'(x)^{n-i}]_{32}\beta_{24}[M'(x)^i]_{44} + \\
&\qquad \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i}[N'(x)^{n-i}]_{33}\beta_{34}[M'(x)^i]_{44} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i}(n-i)p^{n-i-1}1_{N(S)}\beta_{24}p^i1_{M(S)} + \\
&\qquad \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i}p^{n-i}1_{N(S)}\beta_{34}p^i1_{M(S)} \\
&= \left[\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i}p^{n-i}p^i\right] \beta_{24} + \left[\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i}p^{n-i}p^i\right] \beta_{34} \\
&= \frac{\partial r}{\partial y}(p,p)\beta_{24} + r(p,p)\beta_{34} = \frac{\partial r}{\partial y}(p,p)\beta_{24} \\
&= -\frac{\partial r}{\partial x}(p,p)\beta_{24} = 0.
\end{aligned}
$$

Para $l = 2$ y $m = 1$ usando que $[N'(x)^{n-i}]_{t1} = [M'(x)^i]_{t1} = 0$, para $t = 2,3,4$, tenenmos que:

$$
[\mathfrak{A}M'(a_1) - N'(a_1)\mathfrak{A}]_{21} = [\phi^1_{\delta(a_1)}]_{21}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{s=1}^{2}\sum_{t=1}^{4}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}[N'(x)^{n-i}]_{2s}\beta_{st}[M'(x)^{i}]_{t1}\right]\\
&= \sum_{t=1}^{4}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}[N'(x)^{n-i}]_{22}\beta_{2t}[M'(x)^{i}]_{t1}\right]\\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}[N'(x)^{n-i}]_{22}\beta_{21}[M'(x)^{i}]_{11}\\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}p^{n-i}1_{N(S)}\beta_{21}p^{i}1_{M(S)}\\
&= \left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}p^{n-i}p^{i}\right]\beta_{21} = r(p,p)\beta_{21} = 0.
\end{aligned}
$$

Esto concluye el caso (2b).□

5 APLICACIONES A ALGEBRAS

En este capítulo establecemos las relaciones entre bocses y álgebras. Concretamente, para una k-álgebra de dimensión finita Λ le haremos corresponder un bocs estratificado $\mathcal{A}$. La categoría $R(\mathcal{A})$ de representaciones de $\mathcal{A}$ no es equivalente a modΛ, sino a una categoría conocida que se construye de las Λ-módulos proyectivos y que ahora recordamos. $P_1(\Lambda)$ denota la categoría cuyos objetos son las ternas (P, Q, α) con P y Q Λ-módulos izquierdos proyectivos de dimensión finita y $\alpha : P \longrightarrow radQ$ un homomorfismo; y los morfismos de (P, Q, α) en (P', Q', α') son los pares (ϕ, ψ) donde $\phi : P \longrightarrow P'$ y $\psi : Q \longrightarrow Q'$ tales que $\alpha'\phi = \psi\alpha$. La composición de dos morfismos $(\phi, \psi) : (P, Q, \alpha) \longrightarrow (P', Q', \alpha')$, $(\phi', \psi') : (P', Q', \alpha') \longrightarrow (P'', Q'', \alpha'')$ queda definida por medio de $(\phi', \psi')(\phi, \psi) = (\phi'\phi, \psi'\psi)$; los morfismos identidad son $1_{(P,Q,\alpha)} = (1_P, 1_Q)$. Claramente $P_1(\Lambda)$ es una categoría.

El objeto de este capítulo es mostrar la siguiente proposición en la que se construye un bocs estratificado correspondiente a Λ. Con excepción de los detalles esta construcción está dada en [D].

PROPOSICION 5.1 *Sea Λ una k-álgebra de dimensión finita. Entonces existe un bocs estratificado $\mathcal{A} = (A, V)$, una equivalencia de categorías $\mathcal{Z} : R(\mathcal{A}) \longrightarrow P_1(\Lambda)$ y un Λ-A bimódulo T finitamente generado tal que si M es una representación de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{Z}(M) = (P, Q, \alpha)$ entonces $coker(\alpha) \simeq T \bigotimes_A M$.*

Daremos la demostración de esta proposición en varios pasos. Primero construimos un bocs sobre una k-álgebra, es decir una categoría con un solo objeto, y luego lo convertimos en un bocs sobre una categoría con sumas directas. Podemos suponer que Λ es básica, así que $\Lambda = J \bigoplus S$, donde $J = $ radΛ y S es una subálgebra semisimple de Λ, con $S \simeq k \times k \times \ldots \times k$ pues k es algebraicamente cerrado.

Antes de empezar hacemos algunos comentarios acerca de módulos sobre S.

Sea $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ un conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonales de S. Si M es un S-S bimódulo y $\{m_i \mid i\}$ es una k-base para M, entonces $\{e_q m_i e_p \mid i, p, q\}$ es un conjunto de k-generadores de M. Luego supondremos que toda k-base $\{m_i \mid i\}$ es tal que $m_i \in e_{q_i} M e_{p_i}$ para algunos q_i y p_i. La siguiente proposición muestra algunas propiedades para S-S bimódulos.

PROPOSICION 5.2 *Sean M y N un par de S-S bimódulos, $\{ m_i \mid i = 1, \ldots, t \}$, $\{ n_j \mid j = 1, \ldots, u \}$, subconjuntos de M y N, respectivamente. Se tiene que:*

(1) Si $\{m_i\}$ es una k-base para M, $t = u$ y $n_i \in e_{q_i} N e_{p_i}$, entonces existe un morfismo único $f : M \longrightarrow N$ de S-S bimódulos tal que $f(m_i) = n_i$ para todo i; y

(2) Si $\{m_i\}$ y $\{n_j\}$ son k-bases para M y N, $\{m_i \otimes_S n_j \mid e_{p_i} = e_{q_j}\}$ es una k-base para $M \bigotimes_S N$.

<u>DEMOSTRACION</u>. En (1) es claro que f es la tranformación lineal determinada por la k-base $\{m_i\}$ tal que $f(m_i) = n_i$.

Para probar (2), nótese que si e es un idempotente en S, entonces $Me \bigotimes_S eN \cong Me \bigotimes_k eN$ como k-espacios vectoriales. Ahora como $M = \bigoplus_i Me_i$ y $N = \bigoplus_j e_j N$, se tiene que:

$$M \bigotimes_S N = \bigoplus_{i,j} Me_i \bigotimes_S e_j N = \bigoplus_i Me_i \bigotimes_S e_i N \cong \bigoplus_i Me_i \bigotimes_k e_i N.$$

Luego $\{m_i \otimes_S n_j \mid e_{p_i} = e_{q_j}\}$ es una k-base para $M \bigotimes_S N$. □

Para un S-módulo derecho M, con M^* denotamos el espacio de morfismos de S-módulos derechos de M en S, $M^* = Hom_S(M, S)$. Recordamos que M^* tiene estructura de S-módulo izquierdo definida por $(sf)(m) = sf(m)$; y además si M es un R-módulo izquierdo, entences M^* también tiene estructura R-módulo derecho definida por $(fr)(m) = f(rm)$.

OBSERVACION. Para M y N S-módulos derechos, si N es submódulo de M entones podemos considerar que $N^* \subseteq M^*$.

En efecto, podemos elegir k-base para N y M tales que $\{n_i\} \subseteq \{m_i\}$, y $m_i \in Me_{p_i}$. Para $f \in N^*$ se extiende linealmente a $f : M \longrightarrow S$ tomando $f(m_l) = 0$ con $m_l \in \{m_i\} - \{n_j\}$, y así $f \in M^*$.

Una situación especialmente interesante se tiene para los S-módulos J y Λ. Dado que J es un Λ-Λ bimódulo, para $f \in J^*$ y $y \in J$, podemos definir:

$$f \bullet y : \Lambda \longrightarrow S,$$

tal que para $\lambda \in \Lambda$ se tiene $(f \bullet y)(\lambda) = f(y\lambda)$. Nótese que $f \bullet y \in \Lambda^*$, pues para $s \in S$:

$$(f \bullet y)(\lambda s) = f(y(\lambda s)) = f(y\lambda)s) = f(y\lambda)s = (f \bullet y)(\lambda)s.$$

Esta multiplicación tiene un comportamiento asociativo con respecto a las multiplicaciones que hacen de J^* y Λ^* Λ-módulos derechos, como vemos enseguida.

OBSERVACION. Para $f \in J^*$, $y \in J$, y $\lambda \in \Lambda$ se tiene la siguiente propiedad:

$$(f\lambda) \bullet y = f \bullet (\lambda y) \quad \text{y} \quad (f \bullet y)\lambda = f \bullet (y\lambda).$$

En efecto, tomando $\gamma \in \Lambda$, entonces:

$$[(f\lambda) \bullet y](\gamma) = (f\lambda)(y\gamma) = f[\lambda(y\gamma)] = f[(\lambda y)\gamma] = [f \bullet (\lambda y)](\gamma),$$

y

$$[(f \bullet y)\lambda](\gamma) = (f \bullet y)(\lambda\gamma) = f[y(\lambda\gamma)] = f[(y\lambda)\gamma] = [f \bullet (y\lambda)](\gamma).$$

Ahora construimos bases especiales para J, J^*, Λ y Λ^*. Como J es nilpotente, tomamos n tal que $J^n = 0$ y $J^{n-1} \neq 0$, entonces

$$0 = J^n \subseteq J^{n-1} \subseteq \ldots \subseteq J^2 \subseteq J$$

Construimos una base $\{y_i\}$ para J inductivamente, extendiendo una base de J^{l+1} de elementos que se encuentran en $e_q J^{l+1} e_p$ a una base de J^l agregando elementos que también se encuentran en $e_q J^l e_p$ para algunos p y q. Como $\{e_p\}$ es una k-base para S y $\Lambda = J \bigoplus S$, entonces $\{x_j\} = \{y_i\} \cup \{e_p\}$ es una k-base para Λ.

Definimos

$$y_i^* : J \longrightarrow S \quad \text{y} \quad e_p^* : \Lambda \longrightarrow S$$

de la siguiente manera

$$y_i^*(y_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ e_{p_i} & \text{si } i = j, \end{cases} \qquad e_p^*(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_j \neq e_p \\ e_p & \text{si } x_j = e_p, \end{cases}$$

y por 5.2, $y_1^* \in J^* \subset \Lambda^*$ y $e_p^* \in \Lambda^*$

Para un S-módulo derecho M, una **base dual** es un par $(\{m_i\}_i, \{f_i\}_i)$ tal que $\{m_i\}_i \subset M$, $\{f_i\}_i \subset M^*$ y para toda $m \in M$, $m = \sum_i m_i f_i(m)$. También se define para $m \in M$, $\widehat{m} : M^* \longrightarrow S$ tal que $\widehat{m}(f) = f(m)$, que resulta un morfismo de S-módulos izquierdos, y así $\widehat{m} \in M^{**}$. Una proposición sin demostración.

PROPOSICION 5.3 *Para las bases $\{y_i\}$, $\{x_j\}$ de J y Λ, respectivamente, se tiene:*

1) $y_i^* \in e_{p_i} J^* e_{q_i}$, $\quad x_j^* \in e_{p_j} \Lambda^* e_{q_j}$;

2) $y_i^* \bullet y_i = e_{p_i}^*$;

3) $(\{x_i\}, \{x_i^*\})$ es una base dual para Λ;
4) $(\{y_i\}, \{y_i^*\})$ es una base dual para J;
5) $(\{x_i^*\}, \{\widehat{x}_i\})$ es una base dual para Λ^*; y
6) $(\{y_i^*\}, \{\widehat{y}_i\})$ es una base dual para J^*. □

Ahora empezamos con la construcción de la coálgebra.

PROPOSICION 5.4 *Existe un morfismo de S-Λ bimódulos*

$$m : \Lambda^* \longrightarrow \Lambda^* \bigotimes_S \Lambda^*$$

definido de la siguiente manera: para $f \in \Lambda^*$

$$m(f) = \sum_j f x_j \otimes x_j^* = \sum_i \sum_j f(x_j x_i) x_i^* \otimes x_j^* \qquad [1]$$

DEMOSTRACION. Si $\eta : \Lambda \bigotimes_S \Lambda \longrightarrow \Lambda$ es la multiplicación, se trata de un morfismo de Λ-Λ bimódulos que induce el siguiente morfismo de S-Λ bimódulos:

$$\eta^* : \Lambda^* \longrightarrow (\Lambda \otimes_S \Lambda)^* = Hom_S(\Lambda \otimes_S \Lambda, S).$$

Por otra parte, tenemos el isomorfismo de S-Λ bimódulos

$$\phi : Hom_S(\Lambda \otimes_S \Lambda, S) \xrightarrow{\sim} Hom_S(\Lambda, Hom_S(\Lambda, S))$$

dado para $f : \Lambda \bigotimes_S \Lambda \longrightarrow S$ por:

$$[\phi(f)(x)](y) = f(x \otimes y),$$

y cuya inversa está dada por: si $g : \Lambda \longrightarrow \Lambda^*$:

$$[\phi^{-1}(g)](x \otimes y) = [g(x)](y).$$

La base dual $(\{x_j\}, \{x_j^*\})$ para Λ nos permite construir un isomorfismo de S-Λ bimódulos

$$\theta : Hom_S(\Lambda, Hom_S(\Lambda, S)) \longrightarrow Hom_S(\Lambda, S) \bigotimes_S Hom_S(\Lambda, S) = \Lambda^* \bigotimes_S \Lambda^*,$$

tal que si $g : \Lambda \longrightarrow Hom_S(\Lambda, S) = \Lambda^*$ entonces

$$\theta(g) = \sum_j g(x_j) \otimes x_j^*;$$

su inversa

$$\theta^{-1} : \Lambda^* \bigotimes_S \Lambda^* \longrightarrow Hom_S(\Lambda, \Lambda^*)$$

está dada por:

$$\theta^{-1}(f \otimes h) : x \longmapsto fh(x)$$

Así tenemos un morfismo de S-Λ bimódulos

$$m : \Lambda^* \longrightarrow \Lambda^* \bigotimes_S \Lambda^*$$

definido por $m = \theta\phi\eta^*$. Ahora si $f \in \Lambda^*$ entonces

$$m(f) = \theta\phi\eta^*(f) = \theta\phi(f\eta) = \sum_j [\phi(f\eta)](x_j) \otimes x_j^*.$$

Nótese que para $y \in \Lambda$, tenemos

$$[\phi(f\eta)(x_j)](y) = f\eta(x_j \otimes y) = f(x_j y) = [fx_j](y).$$

Como $fx_j \in \Lambda^*$, usando la base dual de Λ^*, tenemos

$$fx_j = \sum_i \widehat{x_i}(fx_j)x_i^* = \sum_i [fx_j](x_i)x_i^* = \sum_i f(x_j x_i)x_i^*.$$

De aquí que

$$m(f) = \sum_j fx_j \otimes x_j^* = \sum_j \sum_i f(x_j x_i)x_i^* \otimes x_j^*. \qquad \square$$

PROPOSICION 5.5 *Λ^* tiene estructura de S-coálgebra con los morfismos de S-S bimódulos*

$$m : \Lambda^* \longrightarrow \Lambda^* \bigotimes_S \Lambda^*,$$

y

$$e : \Lambda^* \longrightarrow S$$

tal que $e(f) = f(1)$.

DEMOSTRACION. Necesitamos mostrar la conmutatividad de los siguientes diagramas

$$
\begin{tikzcd}
 & \Lambda^* \arrow[dl, dash, "\simeq"'] \arrow[dr, dash, "\simeq"] \arrow[dd, "m"] & \\
S \bigotimes_S \Lambda^* & & \Lambda^* \bigotimes_S S \\
 & \Lambda^* \bigotimes_S \Lambda^* \arrow[ul, "e \otimes 1"] \arrow[ur, "1 \otimes e"'] &
\end{tikzcd}
\qquad [2]
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & \Lambda^* \bigotimes_S (\Lambda^* \bigotimes_S \Lambda^*) \arrow[dd, "\simeq"] \\
\Lambda^* \arrow[r, "m"] & \Lambda^* \bigotimes_S \Lambda^* \arrow[ur, "1 \otimes m"] \arrow[dr, "m \otimes 1"'] & \\
 & & (\Lambda^* \bigotimes_S \Lambda^*) \bigotimes_S \Lambda^*
\end{tikzcd}
\qquad [3]
$$

Veamos la conmutatividad de [2]. Sea $f \in \Lambda^*$:

$$
\begin{aligned}
(e \otimes 1)m(f) &= (e \otimes 1)[\sum_j f x_j \otimes x_j^*] = \sum_j [f x_j](1) \otimes x_j^* \\
&= \sum_j f(x_j) \otimes x_j^* = \sum_j 1 \otimes f(x_j) x_j^* \\
&= 1 \otimes \sum_j f(x_j) x_j^* = 1 \otimes \sum_j \widehat{x}_j(f) x_j^* \\
&= 1 \otimes f,
\end{aligned}
$$

mientras que

$$
\begin{aligned}
(1 \otimes e)m(f) &= (1 \otimes e)[\sum_j f x_j \otimes x_j^*] = \sum_i f x_j \otimes x_j^*(1) \\
&= \sum_j [f x_j] x_j^*(1) \otimes 1 = \sum_j f[x_j x_j^*(1)] \otimes 1 \\
&= f[\sum_j x_j x_j^*(1)] \otimes 1 = f \otimes 1
\end{aligned}
$$

Para mostrar la conmutatividad de [3], tenemos

$$
\begin{aligned}
(1 \otimes m)m(f) &= \sum_j f x_j \otimes m(x_j^*) = \sum_j f x_j \otimes \sum_i x_j^* x_i \otimes x_i^* \\
&= \sum_j \sum_i f x_j \otimes (x_j^* x_i \otimes x_i^*)
\end{aligned}
$$

usando el isomorfismo de asociatividad y que m es morfismo de Λ-módulos derechos, se tiene que.

$$\begin{aligned}
\sum_j \sum_i (fx_j \otimes x_j^* x_i) \otimes x_i^* &= \sum_i [\sum_j fx_j \otimes x_j^* x_i] \otimes x_i^* \\
&= \sum_i [\sum_j fx_j \otimes x_j^*] x_i \otimes x_i^* = \sum_i m(f) x_i \otimes x_i^* \\
&= \sum_i m(fx_i) \otimes x_i^* = (m \otimes 1)(\sum_i fx_i \otimes x_i^*) \\
&= (m \otimes 1) m(f). \qquad \square
\end{aligned}$$

Consideremos la k-álgebra

$$A' = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}$$

Tomando módulos sobre S podemos describir matricialmente módulos sobre A', y se puede probar que

$$\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix} \bigotimes_{A'} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \\ N_3 & N_4 \end{bmatrix}$$

es isomorfo a

$$\begin{bmatrix} M_1 \bigotimes_S N_1 \bigoplus M_2 \bigotimes_S N_3 & M_1 \bigotimes_S N_2 \bigoplus M_2 \bigotimes_S N_4 \\ M_3 \bigotimes_S N_1 \bigoplus M_4 \bigotimes_S N_3 & M_3 \bigotimes_S N_2 \bigoplus M_4 \bigotimes_S N_4 \end{bmatrix}.$$

Este isomorfismo se obtiene multiplicando matricialmente.

Para el A'-A' bimódulo

$$\begin{bmatrix} \Lambda^* & 0 \\ 0 & \Lambda^* \end{bmatrix}$$

podemos definir los morfismos de A'-A' bimódulos

$$\overline{e} : \begin{bmatrix} \Lambda^* & 0 \\ 0 & \Lambda^* \end{bmatrix} \longrightarrow A',$$

y

$$\overline{m} : \begin{bmatrix} \Lambda^* & 0 \\ 0 & \Lambda^* \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \Lambda^* \otimes_S \Lambda^* & 0 \\ 0 & \Lambda^* \otimes_S \Lambda^* \end{bmatrix},$$

tomando

$$\overline{m} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \overline{e} = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix}$$

Estos morfismos determinan una estructura de A'-coálgebra, que se prueba fácilmente dada la conmutatividad en cada coordenada, como se sigue de los diagramas [2] y [3].

Ahora consideramos la k-álgebra

$$A = \begin{bmatrix} S & 0 \\ J^* & S \end{bmatrix}$$

donde el producto se obtiene usando la estructura de S-S bimódulo de J^*. Claramente A' es una subálgebra de A.

Tomando el bocs sobre A':

$$\left(A', \begin{bmatrix} \Lambda^* & 0 \\ 0 & \Lambda^* \end{bmatrix}\right),$$

el morfismo inclusión $\imath : A' \longrightarrow A$ induce un A-bocs (A, W) en donde el A-A bimódulo inducido W se describe por:

$$\begin{aligned} W &= A \bigotimes_{A'} \begin{bmatrix} \Lambda^* & 0 \\ 0 & \Lambda^* \end{bmatrix} \bigotimes_{A'} A = \begin{bmatrix} S & 0 \\ J^* & S \end{bmatrix} \bigotimes_{A'} \begin{bmatrix} \Lambda^* & 0 \\ 0 & \Lambda^* \end{bmatrix} \bigotimes_{A'} \begin{bmatrix} S & 0 \\ J^* & S \end{bmatrix} \\ &\simeq \begin{bmatrix} S \bigotimes_S \Lambda^* \bigotimes_S S & 0 \\ J^* \bigotimes_S \Lambda^* \bigotimes_S S \bigoplus S \bigotimes_S \Lambda^* \bigotimes_S J^* & S \bigotimes_S \Lambda^* \bigotimes_S S \end{bmatrix} \\ &\simeq \begin{bmatrix} \Lambda^* & 0 \\ J^* \bigotimes_S \Lambda^* \bigoplus \Lambda^* \bigotimes_S J^* & \Lambda^* \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

tomando $M_1 = J^* \bigotimes_S \Lambda^*$ y $M_2 = \Lambda^* \bigotimes_S J^*$ se tiene

$$W \simeq \begin{bmatrix} \Lambda^* & 0 \\ M_1 \bigoplus M_2 & \Lambda^* \end{bmatrix}.$$

La estructura de W como A-A bimódulo queda descrita de la siguiente manera: para s_1, $s_2 \in S$, f_1, f_2, g_1, $g_2 \in \Lambda^*$, y h, h_1, $h_2 \in J^*$ se tiene:

$$\begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ h & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ (h_1 \otimes g_1, g_2 \otimes h_2) & f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 f_1 & 0 \\ (h \otimes f_1 + s_2 h_1 \otimes g_1, s_2 g_2 \otimes h_2) & s_2 f_2 \end{bmatrix},$$

y

$$\begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ (h_1 \otimes g_1, g_2 \otimes h_2) & f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ h & s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 s_1 & 0 \\ (h_1 \otimes g_1 s_1, g_2 \otimes h_2 s_1 + f_2 \otimes h) & f_2 s_2 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, la estructura de A-coálgebra de W en el bocs inducido queda descrita de la siguiente manera.

La counidad

$$\overline{e}_A : \begin{bmatrix} \Lambda^* & 0 \\ M_1 \bigoplus M_2 & \Lambda^* \end{bmatrix} \longrightarrow A = \begin{bmatrix} S & 0 \\ J^* & S \end{bmatrix},$$

definida por la composición:

$$\begin{array}{cl} & \begin{bmatrix} S & 0 \\ J^* & S \end{bmatrix} \bigotimes_{A'} \begin{bmatrix} \Lambda^* & 0 \\ 0 & \Lambda^* \end{bmatrix} \bigotimes_{A'} \begin{bmatrix} S & 0 \\ J^* & S \end{bmatrix} \\ \xrightarrow{1\otimes\overline{e}\otimes 1} & \begin{bmatrix} S & 0 \\ J^* & S \end{bmatrix} \bigotimes_{A'} \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \bigotimes_{A'} \begin{bmatrix} S & 0 \\ J^* & S \end{bmatrix} \\ \cong & \begin{bmatrix} S & 0 \\ J^* & S \end{bmatrix} \bigotimes_{A'} \begin{bmatrix} S & 0 \\ J^* & S \end{bmatrix} \\ \longrightarrow & \begin{bmatrix} S & 0 \\ J^* & S \end{bmatrix}, \end{array}$$

tal que, para f_1, f_2, g_1 y $g_2 \in \Lambda^*$ y h_1, $h_2 \in J^*$:

$$\begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ (h_1 \otimes g_1, g_2 \otimes h_2) & f_2 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} f_1(1) & 0 \\ h_1 g_1(1) + g_2(1) h_2 & f_2(1) \end{bmatrix}.$$

Mientras que la comultiplicación

$$\overline{m}_A : \begin{bmatrix} \Lambda^* & 0 \\ M_1 \bigoplus M_2 & \Lambda^* \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \Lambda^* & 0 \\ M_1 \bigoplus M_2 & \Lambda^* \end{bmatrix} \bigotimes_A \begin{bmatrix} \Lambda^* & 0 \\ M_1 \bigoplus M_2 & \Lambda^* \end{bmatrix}$$

definida por la composición:

$$\begin{array}{rcl} W & = & \begin{bmatrix} \Lambda^* & 0 \\ M_1 \bigoplus M_2 & \Lambda^* \end{bmatrix} \cong {}^A\begin{bmatrix} \Lambda^* & 0 \\ 0 & \Lambda^* \end{bmatrix}^A \\ & \xrightarrow{1\otimes\overline{m}\otimes 1} & {}^A\begin{bmatrix} \Lambda^* & 0 \\ 0 & \Lambda^* \end{bmatrix} \bigotimes_{A'} \begin{bmatrix} \Lambda^* & 0 \\ 0 & \Lambda^* \end{bmatrix}^A \\ & \xrightarrow{\cong} & {}^A\begin{bmatrix} \Lambda^* & 0 \\ 0 & \Lambda^* \end{bmatrix} \bigotimes_{A'} A' \bigotimes_{A'} \begin{bmatrix} \Lambda^* & 0 \\ 0 & \Lambda^* \end{bmatrix}^A \\ & \xrightarrow{1\otimes\imath\otimes 1} & {}^A\begin{bmatrix} \Lambda^* & 0 \\ 0 & \Lambda^* \end{bmatrix} \bigotimes_{A'} A \bigotimes_{A'} \begin{bmatrix} \Lambda^* & 0 \\ 0 & \Lambda^* \end{bmatrix}^A \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&\xrightarrow{\cong} \quad {}^{A}\begin{bmatrix} \Lambda^{*} & 0 \\ 0 & \Lambda^{*} \end{bmatrix}^{A} \bigotimes_{A} {}^{A}\begin{bmatrix} \Lambda^{*} & 0 \\ & \Lambda^{*} \end{bmatrix}^{A} \\
&\xrightarrow{\cong} \quad \begin{bmatrix} \Lambda^{*} & 0 \\ M_1 \bigoplus M_2 & \Lambda^{*} \end{bmatrix} \bigotimes_{A} \begin{bmatrix} \Lambda^{*} & 0 \\ M_1 \bigoplus M_2 & \Lambda^{*} \end{bmatrix} \\
&= \quad W \bigotimes_{A} W,
\end{aligned}
$$

tal que

$$
\begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ (h_1 \otimes g_1, g_2 \otimes h_2) & f_2 \end{bmatrix}
$$

es enviado a

$$
\sum_i \left(\begin{bmatrix} f_1 x_i & 0 \\ 0 & f_2 x_i \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_i^{*} & 0 \\ 0 & x_i^{*} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (h_1 \otimes g_1 x_i, 0) & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_i^{*} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \right.
$$

$$
\left. + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g_2 x_i \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (0, x_i^{*} \otimes h_2) & 0 \end{bmatrix} \right).
$$

De la misma manera que en 5.4 podemos construir morfismos de S-Λ bimódulos:

$$
m_1 : J^{*} \longrightarrow M_1 = J^{*} \bigotimes_{S} \Lambda^{*},
$$

y

$$
m_2 : J^{*} \longrightarrow M_2 = \Lambda^{*} \bigotimes_{S} J^{*},
$$

tales que para $f \in J^{*}$, tenemos:

$$
m_1(f) = \sum_j f x_j \otimes x_j^{*} = \sum_j \sum_i f(x_j y_i) y_i^{*} \otimes x_j^{*},
$$

y

$$
m_2(f) = \sum_i f \bullet y_i \otimes y_i^{*} = \sum_i \sum_j f(y_i x_j) x_j^{*} \otimes y_i^{*}.
$$

Observemos que

$$
J^{*} \simeq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ J^{*} & 0 \end{bmatrix}
$$

es un A-A bimódulo por medio de la multiplicación en A:

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ g & s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f s_1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{y} \qquad \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ g & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s_2 f \end{bmatrix},
$$

y definimos un morfismo de A-A bimódulos $h : J^* \longrightarrow W$, tal que

$$h(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (m_1(f), -m_2(f)) & 0 \end{bmatrix}.$$

PROPOSICION 5.6 *$Im(h)$ es un coideal en W.*

<u>DEMOSTRACION.</u> Debemos mostrar que

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(h) &\subseteq \ker \overline{e}_A, \qquad \text{y} \\ \overline{m}_A(\mathrm{Im} h) &\subseteq W \bigotimes \mathrm{Im} h \bigoplus \mathrm{Im} h \bigotimes W. \end{aligned}$$

En efecto, si $f \in J^*$ entonces

$$\begin{aligned} \overline{e}_A(h(f)) &= \overline{e}_A \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (m_1(f), -m_2(f)) & 0 \end{bmatrix} \\ &= \overline{e}_A \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (\sum_j f x_j \otimes x_j^*, -\sum_i f \bullet y_i \otimes y_i^*) & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sum_j f x_j x_j^*(1) - \sum_i (f \bullet y_i)(1) y_i^* & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pero se tiene

$$\begin{aligned} \sum_j f x_j x_j^*(1) &= f[\sum_j x_j x_j^*(1)] = f1 = f \\ \sum_i (f \bullet y_i)(1) y_i^* &= \sum_i f(y_i) y_i^* = \sum_i \widehat{y}_i(f) y_i^* = f \end{aligned}$$

Así que $\overline{e}_A(h(f)) = 0$.

Para mostrar la otra contención, primero veamos que

$$\begin{aligned} &\overline{m}_A \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (m_1(f), 0) & 0 \end{bmatrix} \\ = \;& \sum_j \sum_i \overline{m}_A \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (f(x_j y_i) y_i^* \otimes x_j^*, 0) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_j \sum_i \sum_t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (f(x_j y_i) y_i^* \otimes x_j^* x_t, 0) & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_t^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \sum_t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (\sum_i \sum_j f(x_j y_i) y_i^* \otimes x_j^* x_t, 0) & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_t^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \sum_t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (m_1(f x_t), 0) & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_t^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \sum_t \left(h(f x_t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (0, m_2(f x_t)) & 0 \end{bmatrix}\right) \otimes \begin{bmatrix} x_t^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \sum_t h(f x_t) \otimes \begin{bmatrix} x_t^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \sum_t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (0, m_2(f) x_t) & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_t^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Pero

$$
\begin{aligned}
&\sum_t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (0, m_2(f) x_t) & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_t^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \sum_t \sum_i \sum_j \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (0, f(y_i x_j) x_j^* \otimes y_i^* x_t) & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_t^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \sum_t \sum_i \sum_j \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f(y_i x_j) x_j^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_i^* x_t & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_t^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \sum_t \sum_i \sum_j \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f(y_i x_j) x_j^* \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_i^* x_t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \sum_i \sum_j \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f(y_i x_j) x_j^* \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (\sum_t y_i^* x_t \otimes x_t^*, 0) & 0 \end{bmatrix} \\
&= \sum_i \sum_j \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f(y_i x_j) x_j^* \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (m_1(y_i^*), 0) & 0 \end{bmatrix} \\
&= \sum_i \sum_j \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f(y_i x_j) x_j^* \end{bmatrix} \otimes \left(h(y_i^*) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (0, m_2(y_i^*)) & 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= \sum_{i,j} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f(y_i x_j) x_j^* \end{bmatrix} \otimes h(y_i^*) + \sum_{i,j} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f(y_i x_j) x_j^* \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (0, m_2(y_i^*)) & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Así que

$$\begin{aligned}
\overline{m}_A\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (m_1(f),0) & 0 \end{bmatrix}\right) &= \sum_t h(fx_t)\otimes \begin{bmatrix} x_t^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \\
&+\sum_i\sum_j \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f(y_ix_j)x_j^* \end{bmatrix}\otimes h(y_i^*) + \\
&+\sum_i\sum_j \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f(y_ix_j)x_j^* \end{bmatrix}\otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (0,m_2(y_i^*)) & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Ahora bien

$$\begin{aligned}
&\sum_i\sum_j \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f(y_ix_j)x_j^* \end{bmatrix}\otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (0,m_2(y_i^*)) & 0 \end{bmatrix} \\
&= \sum_i\sum_j \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f(y_ix_j)x_j^* \end{bmatrix}\otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (0,\sum_{t,u} y_i^*(y_ux_t)x_t^*\otimes y_u^*) & 0 \end{bmatrix} \\
&= \sum_i\sum_j\sum_t\sum_u \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f(y_ix_j)x_j^* \end{bmatrix}\otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (0,y_i^*(y_ux_t)x_t^*\otimes y_u^*) & 0 \end{bmatrix} \\
&= \sum_i\sum_j\sum_t\sum_u \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f(y_ix_j)x_j^*y_i^*(y_ux_t) \end{bmatrix}\otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (0,x_t^*\otimes y_u^*) & 0 \end{bmatrix} \\
&= \sum_t\sum_u \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sum_i\sum_j f(y_ix_j)x_j^*y_i^*(y_ux_t) \end{bmatrix}\otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (0,x_t^*\otimes y_u^*) & 0 \end{bmatrix} \\
&= \sum_t\sum_u \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f\bullet(y_ux_t) \end{bmatrix}\otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (0,x_t^*\otimes y_u^*) & 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

pues para $x\in\Lambda$ se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_i\sum_j[f(y_ix_j)x_j^*y_i^*(y_ux_t)](x) &= \sum_i\sum_j f(y_ix_j)x_j^*[y_i^*(y_ux_t)x] \\
&= \sum_i\sum_j f(y_ix_jx_j^*[y_i^*(y_ux_t)x]) \\
&= \sum_i f(y_i\sum_j x_jx_j^*[y_i^*(y_ux_t)x]) \\
&= \sum_i f(y_iy_i^*(y_ux_t)x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= f([\sum_i y_i y_i^*(y_u x_t)]x) \\ &= f(y_u x_t x) = [f \bullet (y_u x_t)](x). \end{aligned}$$

De aquí que:

$$\begin{aligned} \overline{m}_A(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ m_1(f) & 0 \end{bmatrix}) &= \sum_t h(fx_t) \otimes \begin{bmatrix} x_t^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \\ &+ \sum_i \sum_j \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f(y_i x_j) x_j^* \end{bmatrix} \otimes h(y_i^*) + \\ &+ \sum_t \sum_u \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f \bullet (y_u x_t) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (0, x_t^* \otimes y_u^*) & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos:

$$\begin{aligned} \overline{m}_A \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (0, m_2(f)) & 0 \end{bmatrix} &= \sum_u \sum_j \overline{m}_A \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (0, f(y_u x_j) x_j^* \otimes y_u^*) & 0 \end{bmatrix} \\ &= \sum_u \sum_j \sum_t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f(y_u x_j) x_j^* x_t \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (0, x_t^* \otimes y_u^*) & 0 \end{bmatrix} \\ &= \sum_u \sum_t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sum_j f(y_u x_j) x_j^* x_t \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (0, x_t^* \otimes y_u^*) & 0 \end{bmatrix} \\ &= \sum_u \sum_t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f \bullet (y_u x_t) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (0, x_t^* \otimes y_u^*) & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Finalmente. se sigue:

$$\begin{aligned} \overline{m}_A(h(f)) &= \overline{m}_A \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (m_1(f), 0) & 0 \end{bmatrix} - \overline{m}_A \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (0, m_2(f)) & 0 \end{bmatrix} \\ &= \sum_t h(fx_t) \otimes \begin{bmatrix} x_t^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \sum_i \sum_j \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f(y_i x_j) x_j^* \end{bmatrix} \otimes h(y_i^*) \\ &\in Imh \bigotimes W + W \bigotimes Imh. \end{aligned}$$ □

Sean $\pi : W \longrightarrow V = W/Imh$ la proyección natural, los morfismos inducidos

$$\varepsilon : V \longrightarrow A \qquad \text{y} \qquad \mu : V \longrightarrow V \bigotimes_A V$$

que hacen conmutar los diagramas siguientes

$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\overline{e}_A"] \arrow[d, "\pi"'] & A \\
V \arrow[ur, "\varepsilon"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\overline{m}_A"] \arrow[d, "\pi"'] & W \otimes_A W \arrow[d, "\pi \otimes \pi"] \\
V \arrow[r, "\mu"'] & V \otimes_A V
\end{tikzcd}
$$

El par $\mathcal{A} = (A, V)$ resulta un bocs con los morfismos ε y μ como muestran los siguientes diagramas conmutativos.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & W \arrow[dll, "\simeq"'] \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dd, "\overline{m}_A"] \arrow[drr, "\simeq"] & & \\
 & W \otimes_A A \arrow[dl, "\pi \otimes 1"'] & V \arrow[dll, "\simeq"'] \arrow[drr, "\simeq"] \arrow[dd, "\mu"] & & & A \otimes_A W \arrow[dl, "1 \otimes \pi"] \\
V \otimes_A A & & & W \otimes_A W \arrow[ull, "1 \otimes \overline{e}_A"'] \arrow[urr, "\overline{e}_A \otimes 1"] \arrow[dl, "\pi \otimes \pi"] & A \otimes_A V & \\
 & & V \otimes_A V \arrow[ull, "1 \otimes \epsilon"] \arrow[urr, "\epsilon \otimes 1"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & W \otimes_A (W \otimes_A W) \arrow[dd, "\simeq"] \arrow[dr, "\pi \otimes (\pi \otimes \pi)"] & \\
W \arrow[rr, "\overline{m}_A"] \arrow[dr, "\pi"'] & & W \otimes_A W \arrow[urr, "1 \otimes \overline{m}_A"] \arrow[drr, "\overline{m}_A \otimes 1"] \arrow[dr, "\pi \otimes \pi"'] & & & V \otimes_A (V \otimes_A V) \arrow[dd, "\simeq"] \\
 & V \arrow[rr, "\mu"'] & & V \otimes_A V \arrow[urr, "1 \otimes \mu"] \arrow[drr, "\mu \otimes 1"'] & (W \otimes_A W) \otimes_A W \arrow[dr, "(\pi \otimes \pi) \otimes \pi"] & \\
 & & & & & (V \otimes_A V) \otimes_A V.
\end{tikzcd}
$$

PROPOSICION 5.7 *$R(\mathcal{A})$ y $P_1(\Lambda)$ son categorías equivalentes.*

DEMOSTRACION. Construimos una equivalencia

$$\mathcal{Z} : R(\mathcal{A}) \longrightarrow P_1(\Lambda)$$

de la siguiente forma:

1.EN OBJETOS. Una representación de $\mathcal{A} = (A, V)$ está dada por un A-módulo izquierdo de dimensión finita M. Definimos los S-módulos izquierdos:

$$M_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} m \mid \quad m \in M \right\} \qquad \text{y} \qquad M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} m \mid \quad m \in M \right\},$$

y los relacionamos por el S-morfismo:

$$\begin{aligned} \widehat{\iota}_M \quad : \quad J^* \bigotimes_S M_1 &\longrightarrow M_2 \\ f \otimes m &\longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f & 0 \end{bmatrix} m. \end{aligned}$$

Como J es S-proyectivo, entonces tenemos los isomorfismos

$$J^{**} \simeq J \qquad \text{y} \qquad Hom_S(J^*, M_2) \simeq J^{**} \bigotimes_S M_2.$$

el primero dado por evaluación, es decir

$$y \mapsto \widehat{y} : J^* \longrightarrow S \quad \text{ tal que } \quad \widehat{y}(f) = f(y),$$

y el segundo se define para $\gamma \in J^{**}$ y $x \in M_2$ por

$$\gamma \otimes x \longmapsto g : J^* \longrightarrow M_2 \quad \text{ tal que } \quad g(f) = [\gamma(f)](x).$$

También tenemos los isomorfismos

$$\begin{aligned} Hom_S(J^* \otimes_S M_1, M_2) &\simeq Hom_S(M_1, Hom_S(J^*, M_2)) \\ &\simeq Hom_S(M_1, J^{**} \otimes_S M_2) \\ &\simeq Hom_S(M_1, J \otimes_S M_2) \\ &\simeq Hom_S(M_1, Hom_\Lambda(\Lambda, J \otimes_S M_2)) \\ &\simeq Hom_\Lambda(\Lambda \otimes_S M_1, J \otimes_S M_2) \\ &\simeq Hom_\Lambda(\Lambda \otimes_S M_1, rad(\Lambda \otimes_S M_2)). \end{aligned} \qquad [4]$$

Siguiendo esta cadena de isomorfismos, al morfismo $\widehat{t}_M$ le corresponde un Λ-morfismo

$$t_M : \Lambda \bigotimes_S M_1 \longrightarrow rad(\Lambda \bigotimes_S M_2)$$

tal que

$$t_M(\lambda \otimes m) = \sum_i \lambda y_i \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_i^* & 0 \end{bmatrix} m = \sum_i \lambda y_i \otimes \widehat{t}_M(y_i^* \otimes m)$$

Además, M_j es S-proyectivo y Λ es Λ-proyectivo, así que $\Lambda \bigotimes_S M_j$ es Λ-proyectivo, $j = 1, 2$, y podemos definir

$$\mathcal{Z}(M) = (\Lambda \bigotimes_S M_1, \Lambda \bigotimes_S M_2, t_M) \in P_1(\Lambda).$$

2. <u>EN MORFISMOS.</u> Un morfismos $\psi : M \longrightarrow N$ en $R(A, W)$ está dado por un A-morfismo de módulos izquierdos $\psi : W \bigotimes_A M \longrightarrow N$ y por restricción determina un par de S-morfismos

$$\widehat{\psi}_j : (W \bigotimes_A M)_j \longrightarrow N_j, \qquad j = 1, 2.$$

Mostraremos que $\widehat{\psi}_j$, $j = 1, 2$, determinan un par de Λ-morfismos

$$\psi_j : \Lambda \bigotimes_S M_j \longrightarrow \Lambda \bigotimes_S N_j, \qquad j = 1, 2,$$

tal que

$$\psi_1(\lambda \otimes m) = \sum_i \lambda x_i \otimes \psi(\begin{bmatrix} x_i^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes m),$$

y

$$\psi_2(\lambda \otimes m) = \sum_i \lambda x_i \otimes \psi(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_i^* \end{bmatrix} \otimes m).$$

Antes notemos la existencia de los S-morfismos

$$\begin{aligned} \sigma_1 \ : \ \Lambda^* \bigotimes_S M_1 &\xrightarrow{\cong} (W \bigotimes_A M)_1 \\ f \otimes m &\longmapsto \begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes m, \\ \sigma_2 \ : \ \Lambda^* \bigotimes_S M_2 &\longrightarrow (W \bigotimes_A M)_2 \\ g \otimes m &\longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix} \otimes m. \end{aligned}$$

σ_1 es un isomorfismo, y de aquí tenemos los morfismos

$$\begin{aligned}
Hom_S((W \otimes_A M)_j, N_j) &\rightarrow Hom_S(\Lambda^* \otimes_S M_j, N_j) \\
&\simeq Hom_S(M_j, Hom_S(\Lambda^*, N_j)) \\
&\simeq Hom_S(M_j, \Lambda^{**} \otimes_S N_j) \\
&\simeq Hom_S(M_j, \Lambda \otimes_S N_j) \\
&\simeq Hom_S(M_j, Hom_\Lambda(\Lambda, \Lambda \otimes_S N_j)) \\
&\simeq Hom_\Lambda(\Lambda \otimes_S M_j, \Lambda \otimes_S N_j).
\end{aligned} \tag{5}$$

Para $j = 1$ el primer morfismo también es un iso. Siguiendo las cadenas de morfismos ψ_1 y ψ_2 son los correspondientes a $\widehat{\psi}_1$ y $\widehat{\psi}_2$.

Probaremos que ψ induce un morfismo en $R(\mathcal{A})$ si y solo si (ψ_1, ψ_2) es un morfismo en $P_1(\Lambda)$.

En otras palabras, considerando los diagramas

$$\begin{tikzcd}
W \otimes_A M \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi \otimes 1_M"'] & N \\
V \otimes_A M \arrow[ur, dashed, "\phi"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Lambda \otimes_S M_1 \arrow[r, "\iota_M"] \arrow[d, "\psi_1"'] & \Lambda \otimes_S M_2 \arrow[d, "\psi_2"] \\
\Lambda \otimes_S N_1 \arrow[r, "\iota_N"'] & \Lambda \otimes_S N_2
\end{tikzcd}$$

deseamos probar que el cuadro es conmutativo si y sólo si existe ϕ que hace conmutar el triángulo, es decir que $\mathrm{Im} h \otimes M \subseteq \ker \psi$ o que $\psi(h \otimes 1_M) = 0$.

Nótese que para $f \in J^*$:

$$\psi(h \otimes 1)(f \otimes m) = \psi(h(f) \otimes m)$$

$$= \psi\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (m_1(f), -m_2(f)) & 0 \end{bmatrix} \otimes m\right)$$

$$= \psi\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (m_1(f), 0) & 0 \end{bmatrix} \otimes m - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (0, m_2(f)) & 0 \end{bmatrix} \otimes m\right)$$

$$= \sum_i \sum_j \psi\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (f(x_j y_i) y_i^* \otimes x_j^*, 0) & 0 \end{bmatrix} \otimes m - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (0, f(y_i x_j) x_j^* \otimes y_i^*) & 0 \end{bmatrix} \otimes m\right).$$

Mientras que

$$\begin{aligned}
t_N\psi_1(\lambda\otimes m) &= t_N\left(\sum_j \lambda x_j\otimes\psi\left(\begin{bmatrix} x_j^* & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\otimes m\right)\right)\\
&= \sum_j\sum_i \lambda x_j y_i\otimes\begin{bmatrix} 0 & 0\\ y_i^* & 0\end{bmatrix}\psi\left(\begin{bmatrix} x_j^* & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\otimes m\right)\\
&= \sum_j\sum_i \lambda x_j y_i\otimes\psi\left(\begin{bmatrix} 0 & 0\\ y_i^* & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_j^* & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\otimes m\right)\\
&= \sum_j\sum_i \lambda x_j y_i\otimes\psi\left(\begin{bmatrix} 0 & 0\\ (y_i^*\otimes x_j^*,0) & 0\end{bmatrix}\otimes m\right).
\end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned}
\psi_2 t_M(\lambda\otimes m) &= \psi_2\left(\sum_i \lambda y_i\otimes\begin{bmatrix} 0 & 0\\ y_i^* & 0\end{bmatrix} m\right)\\
&= \sum_i\sum_j \lambda y_i x_j\otimes\psi\left(\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & x_j^*\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix} 0 & 0\\ y_i^* & 0\end{bmatrix} m\right)\\
&= \sum_i\sum_j \lambda y_i x_j\otimes\psi\left(\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & x_j^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0\\ y_i^* & 0\end{bmatrix}\otimes m\right)\\
&= \sum_i\sum_j \lambda y_i x_j\otimes\psi\left(\begin{bmatrix} 0 & 0\\ (0,x_j^*\otimes y_i^*) & 0\end{bmatrix}\otimes m\right).
\end{aligned}$$

De aquí tenemos que $(t_N\psi_1-\psi_2 t_M)(\lambda\otimes m)\in J\bigotimes N_2$, y tomando $\lambda=1$ aplicamos $f\otimes 1: J\bigotimes_S N_2\longrightarrow S\bigotimes_S N_2$, tenemos

$$\begin{aligned}
&(f\otimes 1)(t_N\psi_1-\psi_2 t_M)(1\otimes m)\\
=\ & (f\otimes 1)\left(\sum_j\sum_i x_j y_i\otimes\psi\left(\begin{bmatrix} 0 & 0\\ (y_i^*\otimes x_j^*,0) & 0\end{bmatrix}\otimes m\right)\right.\\
&\qquad\left.-\sum_i\sum_j y_i x_j\otimes\psi\left(\begin{bmatrix} 0 & 0\\ (0,x_j^*\otimes y_i^*) & 0\end{bmatrix}\otimes m\right)\right)\\
=\ & \sum_j\sum_i f(x_j y_i)\otimes\psi\left(\begin{bmatrix} 0 & 0\\ (y_i^*\otimes x_j^*,0) & 0\end{bmatrix}\otimes m\right)\\
&\qquad-\sum_i\sum_j f(y_i x_j)\otimes\psi\left(\begin{bmatrix} 0 & 0\\ (0,x_j^*\otimes y_i^*) & 0\end{bmatrix}\otimes m\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_j \sum_i 1 \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f(x_j y_i) \end{bmatrix} \psi\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (y_i^* \otimes x_j^*, 0) & 0 \end{bmatrix} \otimes m \right) \\
&\qquad\qquad -1 \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f(y_i x_j) \end{bmatrix} \psi\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (0, x_j^* \otimes y_i^*) & 0 \end{bmatrix} \otimes m \right) \\
&= 1 \otimes \sum_i \sum_j \psi\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (f(x_j y_i) y_i^* \otimes x_j^*, 0) & 0 \end{bmatrix} \otimes m \right) \\
&\qquad\qquad -\psi\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (0, f(y_i x_j) x_j^* \otimes y_i^*) & 0 \end{bmatrix} \otimes m \right) \\
&= 1 \otimes \psi(h \otimes 1)(f \otimes m).
\end{aligned}
$$

Así que

$$
(f \otimes 1)(t_N \psi_1 - \psi_2 t_M)(1 \otimes m) = 1 \otimes [\psi(h \otimes 1)(f \otimes m)]. \qquad [6]
$$

Ahora podemos mostrar nuestra afirmación. Supongamos que ψ induce un morfismo ϕ en $R(\mathcal{A})$ que hace conmutar el triángulo, entonces $\psi(h \otimes 1) = 0$, de [6] se tiene

$$
(f \otimes 1)(t_N \psi_1 - \psi_2 t_M)(1 \otimes m) = 0
$$

para toda $f \in J^*$. Si $(t_N \psi_1 - \psi_2 t_M)(1 \otimes m) = \sum_i \alpha_i \otimes n_i$, y usando la base dual $(\{y_i\}, \{y_i^*\})$ para J, $\alpha_i = \sum_j c_{ij} y_j$ y aplicando $y_i^* \otimes 1$, se tiene

$$
0 = (y_i^* \otimes 1)(\sum_i \alpha_i \otimes n_i) = \sum_{i,j} c_{ij} y_i^*(y_j) \otimes n_i = \sum_i c_{il} e_{p_l} \otimes n_i,
$$

es decir para toda j, $\sum_i c_{ij} e_{p_j} \otimes n_i = 0$, por lo que multiplicando por y_j a la izquierda y sumando sobre j:

$$
0 = \sum_{i,j} c_{ij} y_j \otimes n_i = \sum_i \alpha_i \otimes n_i = (t_N \psi_1 - \psi_2 t_m)(1 \otimes m).
$$

Como $t_N \psi_1 - \psi_2 t_M$ es un morfismo de Λ-módulos izquierdos tenemos $t_N \psi_1 - \psi_2 t_M = 0$, y consecuentemente (ψ_1, ψ_2) es un morfismo en $P_1(\Lambda)$.

Recíprocamente, suponiendo que (ψ_1, ψ_2) es un morfismo en $P_1(\Lambda)$, de [6] se sigue que

$$
0 = 1 \otimes [\psi(h \otimes 1)(f \otimes m)] \in S \bigotimes_S N_2 \simeq N_2
$$

luego $\psi(h \otimes 1)(f \otimes m) = 0$, así que $\psi(h \otimes 1) = 0$ y ψ induce el morfismo deseado en $R(\mathcal{A})$.

De aquí que para $\psi : M \longrightarrow N$ en $R(\mathcal{A})$, escribimos $\overline{\psi} = \psi(\pi \otimes 1_M)$ en $R(A, W)$ y definimos

$$
Z(\psi) = (\psi_1, \psi_2),
$$

donde $\psi_i = \overline{\psi}_i$, $i = 1, 2$.

Ahora mostramos que $\mathcal{Z}$ es funtor.

$\underline{- \mathcal{Z}(I_M) = 1_{\mathcal{Z}(M)}}$, es decir $(I_M)_i = 1_{\Lambda \bigotimes_S M_i}$, $i = 1, 2$. En efecto:

$$\begin{aligned}
(I_M)_1(\lambda \otimes m) &= \sum_j \lambda x_j \otimes \overline{I}_M \left(\begin{bmatrix} x_j^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes m \right) \\
&= \sum_j \lambda x_j \otimes \overline{\epsilon}_A \left(\begin{bmatrix} x_j^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) (m) = \sum_j \lambda x_j \otimes \begin{bmatrix} \epsilon(x_j^*) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} m \\
&= \sum_j \lambda x_j x_j^*(1) \otimes m = (\lambda \sum_j x_j x_j^*(1)) \otimes m = \lambda \otimes m.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(I_M)_2(\lambda \otimes m) &= \sum_j \lambda x_j \otimes \overline{I}_M \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_j^* \end{bmatrix} \otimes m \right) \\
&= \sum_j \lambda x_j \otimes \overline{\epsilon}_A \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_j^* \end{bmatrix} \right) (m) = \sum_j \lambda x_j \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \epsilon(x_j^*) \end{bmatrix} m \\
&= \sum_j \lambda x_j x_j^*(1) \otimes m = (\lambda \sum_j x_j x_j^*(1)) \otimes m = \lambda \otimes m.
\end{aligned}$$

$\underline{- \mathcal{Z}(\psi\phi) = \mathcal{Z}(\psi)\mathcal{Z}(\phi)}$, es decir $(\psi\phi)_i = \psi_i\phi_i$, para $i = 1, 2$. Supongamos que en $R(\mathcal{A})$ tenemos

$$\phi : V \bigotimes_A M \longrightarrow N \qquad \text{y} \qquad \psi : V \bigotimes_A N \longrightarrow L$$

entonces

$$\psi\phi : V \bigotimes_A M \xrightarrow{\mu \otimes 1_M} (V \bigotimes_A V) \bigotimes_A M \simeq V \bigotimes_A (V \bigotimes_A M) \xrightarrow{1_V \otimes \phi} V \bigotimes_A N \xrightarrow{\psi} L.$$

Observemos primero que

$$\begin{aligned}
\overline{\psi\phi} \left(\begin{bmatrix} x_j^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes m \right) &= (\psi\phi)(x \otimes 1) \left(\begin{bmatrix} x_j^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes m \right) = \psi\phi \left(\overline{\begin{bmatrix} x_j^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \otimes m \right) \\
&= \sum_i \psi \left(\overline{\begin{bmatrix} x_j^* x_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \otimes \phi \left(\overline{\begin{bmatrix} x_i^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \otimes m \right) \right) \\
&= \sum_i \overline{\psi} \left(\begin{bmatrix} x_j^* x_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \overline{\phi} \left(\begin{bmatrix} x_i^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes m \right) \right),
\end{aligned}$$

mientras que

$$
\begin{aligned}
\overline{\psi\phi}\left(\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & x_j^* \end{array}\right] \otimes m\right) &= (\psi\phi)(\pi \otimes 1)\left(\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & x_j^* \end{array}\right] \otimes m\right) = \psi\phi\left(\overline{\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & x_j^* \end{array}\right]} \otimes m\right) \\
&= \sum_i \psi\left(\overline{\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & x_j^* x_i \end{array}\right]} \otimes \phi\left(\overline{\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & x_i^* \end{array}\right]} \otimes m\right)\right) \\
&= \sum_i \overline{\psi}\left(\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & x_j^* x_i \end{array}\right] \otimes \overline{\phi}\left(\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & x_i^* \end{array}\right] \otimes m\right)\right).
\end{aligned}
$$

Donde la barra denota la clase en V de un elemento de W. De aquí se tiene:

$$
\begin{aligned}
&(\psi\phi)_1(\lambda \otimes m) \\
&= \sum_j \lambda x_j \otimes (\overline{\psi\phi})\left(\left[\begin{array}{cc} x_j^* & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \otimes m\right) \\
&= \sum_j \sum_i \lambda x_j \otimes \overline{\psi}\left(\left[\begin{array}{cc} x_j^* x_i & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \otimes \overline{\phi}\left(\left[\begin{array}{cc} x_i^* & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \otimes m\right)\right) \\
&= \sum_j \sum_i \sum_l x_l x_l^*(\lambda x_j) \otimes \overline{\psi}\left(\left[\begin{array}{cc} x_j^* x_i & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \otimes \overline{\phi}\left(\left[\begin{array}{cc} x_i^* & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \otimes m\right)\right) \\
&= \sum_l \sum_j \sum_i x_l \otimes \left[\begin{array}{cc} x_l^*(\lambda x_j) & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \overline{\psi}\left(\left[\begin{array}{cc} x_j^* x_i & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \otimes \overline{\phi}\left(\left[\begin{array}{cc} x_i^* & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \otimes m\right)\right) \\
&= \sum_l x_l \otimes \sum_j \sum_i \overline{\psi}\left(\left[\begin{array}{cc} x_l^*(\lambda x_j) & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} x_j^* x_i & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \otimes \overline{\phi}\left(\left[\begin{array}{cc} x_i^* & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \otimes m\right)\right) \\
&= \sum_l x_l \otimes \sum_j \sum_i \overline{\psi}\left(\left[\begin{array}{cc} x_l^*(\lambda x_j) x_j^* x_i & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \otimes \overline{\phi}\left(\left[\begin{array}{cc} x_i^* & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \otimes m\right)\right) \\
&= \sum_l x_l \otimes \overline{\psi}\left(\sum_i\left(\left[\begin{array}{cc} \sum_j x_l^*(\lambda x_j) x_j^* x_i & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \otimes \overline{\phi}\left(\left[\begin{array}{cc} x_i^* & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \otimes m\right)\right)\right).
\end{aligned}
$$

Por otro lado, se tiene

$$
\begin{aligned}
&(\psi_1\phi_1)(\lambda \otimes m) = \overline{\psi}_1(\overline{\phi}_1(\lambda \otimes m)) \\
&= \overline{\psi}_1\left(\sum_i \lambda x_i \otimes \overline{\phi}\left(\left[\begin{array}{cc} x_i^* & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \otimes m\right)\right) = \sum_i \overline{\psi}_1\left(\lambda x_i \otimes \overline{\phi}\left(\left[\begin{array}{cc} x_i^* & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \otimes m\right)\right) \\
&= \sum_i \sum_j \lambda x_i x_j \otimes \overline{\psi}\left(\left[\begin{array}{cc} x_j^* & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \otimes \overline{\phi}\left(\left[\begin{array}{cc} x_i^* & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \otimes m\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_i \sum_j \sum_l x_l x_l^*(\lambda x_i x_j) \otimes \overline{\psi}\left(\begin{bmatrix} x_j^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \overline{\phi}\left(\begin{bmatrix} x_i^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes m\right)\right) \\
&= \sum_l \sum_i \sum_j x_l \otimes \overline{\psi}\left(\begin{bmatrix} x_l^*(\lambda x_i x_j) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_j^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \overline{\phi}\left(\begin{bmatrix} x_i^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes m\right)\right) \\
&= \sum_l x_l \otimes \overline{\psi}\left(\sum_i \sum_j \begin{bmatrix} x_l^*(\lambda x_i x_j)x_j^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \overline{\phi}\left(\begin{bmatrix} x_i^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes m\right)\right) \\
&= \sum_l x_l \otimes \overline{\psi}\left(\sum_i \left(\begin{bmatrix} \sum_j x_l^*(\lambda x_i x_j)x_j^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \overline{\phi}\left(\begin{bmatrix} x_i^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes m\right)\right)\right).
\end{aligned}
$$

Por consiguiente basta probar que para i y l fijas se tiene:

$$\sum_j x_l^*(\lambda x_j)x_j^* x_i = \sum_j x_l^*(\lambda x_i x_j)x_j^* \in \Lambda^*$$

En efecto, si $x \in \Lambda$, entonces

$$
\begin{aligned}
\sum_j x_l^*(\lambda x_j)x_j^* x_i(x) &= \sum_j x_l^*(\lambda x_j)x_j^*(x_i x) \\
&= \sum_j x_l^*(\lambda x_j x_j^*(x_i x)) \\
&= x_l^*(\lambda \sum_j x_j x_j^*(x_i x)) = x_l^*(\lambda x_i x),
\end{aligned}
$$

y en el otro lado:

$$
\begin{aligned}
\sum_j x_l^*(\lambda x_i x_j)x_j^*(x) &= \sum_j x_l^*(\lambda x_i x_j x_j^*(x)) \\
&= x_l^*(\lambda x_i \sum_j x_j x_j^*(x)) = x_l^*(\lambda x_i x).
\end{aligned}
$$

Y esto muestra que $(\psi\phi)_1 = \psi_1\phi_1$.

Para mostrar el caso $i = 2$, de la misma forma se prueba que

$$(\psi\phi)_2(\lambda \otimes m) = \sum_j \lambda x_j \otimes (\overline{\psi\phi})\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_j^* \end{bmatrix} \otimes m\right)$$

$$= \sum_l x_l \otimes \overline{\psi}\left(\sum_i \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sum_j x_l^*(\lambda x_j)x_j^* x_i \end{bmatrix} \otimes \overline{\phi}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_i^* \end{bmatrix} \otimes m\right)\right)\right).$$

Mientras que

$$(\psi_2\phi_2)(\lambda\otimes m)=\overline{\psi}_2(\overline{\phi}_2(\lambda\otimes m))=\overline{\psi}_2\left(\sum_i \lambda x_i\otimes\overline{\varphi}\left(\left[\begin{array}{cc}0 & 0\\ 0 & x_i^*\end{array}\right]\otimes m\right)\right)$$

$$=\sum_l x_l\otimes\overline{\psi}\left(\sum_i\left(\left[\begin{array}{cc}0 & 0\\ 0 & \sum_j x_l^*(\lambda x_i x_j)x_j^*\end{array}\right]\otimes\overline{\phi}\left(\left[\begin{array}{cc}0 & 0\\ 0 & x_i^*\end{array}\right]\otimes m\right)\right)\right).$$

Y como en el caso $i=1$ se concluye que $(\psi\phi)_2=\psi_2\phi_2$.

Ahora necesitamos mostrar que Z es un equivalencia.
<u>- Z es aditivo</u>, es decir para $\phi,\psi: V\bigotimes_A M\longrightarrow N$ en $R(\mathcal{A})$, se tiene

$$Z(\phi+\psi)=((\phi+\psi)_1,(\phi+\psi)_2)=(\phi_1+\psi_1,\phi_2+\psi_2)=Z(\phi)+Z(\psi).$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
&(\phi+\psi)_1(\lambda\otimes m)\\
=&\ \sum_j \lambda x_j\otimes(\overline{\phi+\psi})\left(\left[\begin{array}{cc}x_j^* & 0\\ 0 & 0\end{array}\right]\otimes m\right)\\
=&\ \sum_j \lambda x_j\otimes(\phi+\psi)\left(\overline{\left[\begin{array}{cc}x_j^* & 0\\ 0 & 0\end{array}\right]\otimes m}\right)\\
=&\ \sum_j \lambda x_j\otimes\left(\phi\left(\overline{\left[\begin{array}{cc}x_j^* & 0\\ 0 & 0\end{array}\right]}\otimes m\right)+\psi\left(\overline{\left[\begin{array}{cc}x_j^* & 0\\ 0 & 0\end{array}\right]}\otimes m\right)\right)\\
=&\ \sum_j \lambda x_j\otimes\phi\left(\overline{\left[\begin{array}{cc}x_j^* & 0\\ 0 & 0\end{array}\right]}\otimes m\right)+\sum_j \lambda x_j\otimes\psi\left(\overline{\left[\begin{array}{cc}x_j^* & 0\\ 0 & 0\end{array}\right]}\otimes m\right)\\
=&\ \phi_1(\lambda\otimes m)+\psi_1(\lambda\otimes m);
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
&(\phi+\psi)_2(\lambda\otimes m)\\
=&\ \sum_j \lambda x_j\otimes(\overline{\phi+\psi})\left(\left[\begin{array}{cc}0 & 0\\ 0 & x_j^*\end{array}\right]\otimes m\right)\\
=&\ \sum_j \lambda x_j\otimes(\phi+\psi)\left(\overline{\left[\begin{array}{cc}0 & 0\\ 0 & x_j^*\end{array}\right]\otimes m}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_j \lambda x_j \otimes \left(\phi\left(\overline{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_j^* \end{bmatrix} \otimes m}\right) + \psi\left(\overline{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_j^* \end{bmatrix} \otimes m}\right)\right) \\
&= \sum_j \lambda x_j \otimes \phi\left(\overline{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_j^* \end{bmatrix} \otimes m}\right) + \sum_j \lambda x_j \otimes \psi\left(\overline{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_j^* \end{bmatrix} \otimes m}\right) \\
&= \phi_2(\lambda \otimes m) + \psi_2(\lambda \otimes m).
\end{aligned}
$$

- $\mathcal{Z}$ es fiel. Sean $\phi : V \bigotimes_A M \longrightarrow N$ tal que $\mathcal{Z}(\phi) = (\phi_1, \phi_2) = 0$, entonces $\phi_1 = 0$ y $\phi_2 = 0$. Siguiendo los isomorfismos [5], tenemos que:

$$0 = \widehat{\phi}_1 : (W \bigotimes_A M)_1 \longrightarrow N_1 \qquad \text{y} \qquad 0 = \widetilde{\phi}_2 : \Lambda^* \bigotimes_S M_2 \longrightarrow N_2.$$

[5] muestra que $\widetilde{\phi}_2 = \widehat{\phi}_2 \sigma_2$. De aquí que para $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \Lambda^*$ y $h_1, h_2 \in J^*$:

$$
\begin{aligned}
&\overline{\phi}\left(\begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ (h_1 \otimes g_1, g_2 \otimes h_2) & f_2 \end{bmatrix} \otimes m\right) \\
&= \overline{\phi}\left(\begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes m\right) + \overline{\phi}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} \otimes m\right) + \overline{\phi}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ h_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes m\right) + \\
&\qquad \overline{\phi}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ h_2 & 0 \end{bmatrix} \otimes m\right) \\
&= \overline{\phi}\left(\begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes m\right) + \overline{\phi}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} \otimes m\right) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ h_1 & 0 \end{bmatrix} \overline{\phi}\left(\begin{bmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes m\right) + \\
&\qquad \overline{\phi}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g_2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ h_2 & 0 \end{bmatrix} m\right) \\
&= \widehat{\phi}_1\left(\begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes m\right) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ h_1 & 0 \end{bmatrix} \widehat{\phi}_1\left(\begin{bmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes m\right) + \\
&\qquad \widehat{\phi}_2\sigma_2\left(f_2 \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} m\right) + \widehat{\phi}_2\sigma_2\left(g_2 \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ h_2 & 0 \end{bmatrix} m\right) \\
&= 0 + 0 + 0 + 0 = 0.
\end{aligned}
$$

Así que $0 = \overline{\phi} = \phi(\pi \otimes 1)$ pero $\pi \otimes 1$ es epi, entonces $\phi = 0$.

- $\mathcal{Z}$ es pleno. Sea

$$(\eta_1, \eta_2) : \mathcal{Z}(M) \longrightarrow \mathcal{Z}(N)$$

un morfismo en $P_1(\Lambda)$. Así $\eta_i : \Lambda \bigotimes_S M_i \longrightarrow \Lambda \bigotimes_S N_i$. Siguiendo los isomorfismos [5], tenemos los correspondientes morfismos:

$$\widetilde{\psi}_1 : (W \bigotimes_A M)_1 \longrightarrow N_1 \qquad \text{y} \qquad \widetilde{\psi}_2 : \Lambda^* \bigotimes_S M_2 \longrightarrow N_2.$$

Queremos construir un morfismo $\phi : V \bigotimes_A M \longrightarrow N$ en $R(\mathcal{A})$ tal que $\mathcal{Z}(\phi) = (\eta_1, \eta_2)$.

Para $m \in M$, existe un morfismo

$$\psi_m : \begin{bmatrix} S & 0 \\ J^* & S \end{bmatrix} \bigotimes_{A'} \begin{bmatrix} \Lambda^* & 0 \\ 0 & \Lambda^* \end{bmatrix} \longrightarrow N$$

tal que

$$\psi_m(\begin{bmatrix} s & 0 \\ h_1 & t \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix}) =$$
$$\widetilde{\psi}_1(\begin{bmatrix} sf_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes m) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ h_1 & 0 \end{bmatrix} \widetilde{\psi}_1(\begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes m) + \widetilde{\psi}_2(tf_2 \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} m).$$

Como

$$\begin{bmatrix} S & 0 \\ J^* & S \end{bmatrix} \bigotimes_{A'} \begin{bmatrix} \Lambda^* & 0 \\ 0 & \Lambda^* \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} \Lambda^* & 0 \\ J^* \bigotimes_S \Lambda^* & \Lambda^* \end{bmatrix}$$

tenemos

$$\psi'_m : \begin{bmatrix} \Lambda^* & 0 \\ J^* \bigotimes_S \Lambda^* & \Lambda^* \end{bmatrix} \longrightarrow N,$$

tal que

$$\psi'_m(\begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ h_1 \otimes g_1 & f_2 \end{bmatrix}) = \widetilde{\psi}_1(\begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes m) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ h_1 & 0 \end{bmatrix} \widetilde{\psi}_1(\begin{bmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes m) +$$
$$+ \widetilde{\psi}_2(f_2 \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} m).$$

También tenemos el morfismo

$$\psi' : \begin{bmatrix} \Lambda^* & 0 \\ J^* \bigotimes \Lambda^* & \Lambda^* \end{bmatrix} \bigotimes_{A'} M \longrightarrow N$$

tal que

$$\psi'(\begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ \sum_i h_i \otimes g_i & f_2 \end{bmatrix} \otimes m) = \psi'_m(\begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ \sum_i h_i \otimes g_i & f_2 \end{bmatrix}).$$

Pero $M \simeq A \bigotimes_A M$ como A-módulo izquierdo, y en particular como A'-módulos izquierdo, por lo que tenemos un morfismo

$$\psi : W \bigotimes_A M \longrightarrow N$$

dado por la composición

$$\begin{aligned} W \bigotimes_A M &\simeq (A \bigotimes_{A'} \begin{bmatrix} \Lambda^* & 0 \\ 0 & \Lambda^* \end{bmatrix} \bigotimes_{A'} A) \bigotimes_A M \\ &\simeq (A \bigotimes_{A'} \begin{bmatrix} \Lambda^* & 0 \\ 0 & \Lambda^* \end{bmatrix}) \bigotimes_{A'} (A \bigotimes_A M) \\ &\simeq \begin{bmatrix} \Lambda^* & 0 \\ J^* \bigotimes \Lambda^* & \Lambda^* \end{bmatrix} \bigotimes_{A'} M \xrightarrow{\psi'} N. \end{aligned}$$

De aquí tenemos que

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}_1(\begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes m) &= \psi(\begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes m) = \psi'(\begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes m) \\ &= \psi'_m(\begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) = \widetilde{\psi}_1(\begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes m), \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}_2\sigma_2(g \otimes m) &= \widehat{\psi}_2(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix} \otimes m) = \psi(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix} \otimes m) \\ &= \psi'(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix} \otimes m) = \psi'_m(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix}) \\ &= \widetilde{\psi}_2(g \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} m) = \widetilde{\psi}_2(g \otimes m). \end{aligned}$$

Esto muestra que $\widehat{\psi}_1 = \widetilde{\psi}_1$ y $\widehat{\psi}_2\sigma_2 = \widetilde{\psi}_2$, y los isomorfismos [5] nos dicen que $\psi_1 = \eta_1$ y $\psi_2 = \eta_2$. Como (η_1, η_2) es un morfismo en $P_1(\Lambda)$, entonces $\psi(h \otimes 1_M) = 0$ y existe $\phi : V \bigotimes_A M \longrightarrow N$ en $R(\mathcal{A})$ tal que $\psi = \phi(\pi \otimes 1_M) = \overline{\phi}$ y así $\mathcal{Z}(\phi) = (\eta_1, \eta_2)$.

- <u>$\mathcal{Z}$ es denso</u>. Sea (P, Q, α) un objeto en $P_1(\Lambda)$. Mostraremos que existe $M \in R(\mathcal{A})$ tal que $\mathcal{Z}(M) = (P, Q, \alpha)$. Primeramente probaremos que el funtor

$$\Lambda \bigotimes_S - : modS \longrightarrow mod\Lambda$$

es denso sobre la subcategoría de Λ-módulos proyectivos. Como $\Lambda \bigotimes -$ es aditivo, bastará ver que es denso sobre la subcategoría de Λ-módulos proyectivos inescindibles. Así que si P es un objeto en esta última subcategoría, entonces $P \simeq \Lambda e$ para algún idempotente primitivo e de Λ, que como también lo es de S, entonces

$$\Lambda e \simeq (\Lambda \bigotimes_S S)e \simeq \Lambda \bigotimes_S Se.$$

De ésto, para P y Q tomamos N_1 y N_2 en mod$S$ tal que

$$P \simeq \Lambda \bigotimes_S N_1 \qquad \text{y} \qquad Q \simeq \Lambda \bigotimes_S N_2,$$

y claramente

$$(P, Q, \alpha) \simeq (\Lambda \bigotimes_S N_1, \Lambda \bigotimes_S N_2; \tau),$$

donde τ es la composición $\Lambda \otimes_S N_1 \simeq P \xrightarrow{\alpha} Q \simeq \Lambda \otimes_S N_2$.

Usando los isomorfismo [4] tomamos el morfismo $\widehat{\tau}_N \in Hom_S(J^* \otimes N_1, N_2)$ correspondiente a τ. Tomamos el grupo abeliano

$$M = N_1 \bigoplus N_2$$

y le damos estructura de A-módulo descrita por

$$\begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ j & s_2 \end{bmatrix} (n_1, n_2) = (s_1 n_1, s_2 n_2 + \widehat{\tau}_N(j \otimes n_1))$$

Nótese que

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M = N_1 \bigoplus 0 \simeq N_1,$$
$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} M = 0 \bigoplus N_2 \simeq N_2.$$

Estos isomorfismos muestran que

$$Z(M) = (\Lambda \bigotimes_S M_1, \Lambda \bigotimes_S M_2, t_M) \simeq (\Lambda \bigotimes_S N_1, \Lambda \bigotimes_S N_2, \tau)$$

pues el diagrama

$$\begin{tikzcd} \Lambda \otimes_S M_1 \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "t_M"'] & \Lambda \otimes_S N_1 \arrow[d, "\tau"] \\ \Lambda \otimes_S M_2 \arrow[r, "\simeq"'] & \Lambda \otimes_S N_2 \end{tikzcd}$$

conmuta, ya que

$$\begin{aligned} t_M(\lambda \otimes (n_1,0)) &= \sum_i \lambda y_i \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_i^* & 0 \end{bmatrix} (n_1,0) \\ &= \sum_i \lambda y_i \otimes (0, \widehat{t}_N(y_i^* \otimes n_1)) \mapsto \sum_i \lambda y_i \otimes \widehat{t}_N(y_i^* \otimes n_1), \end{aligned}$$

mientras que

$$\tau(\lambda \otimes n_1) = \sum_i \lambda y_i \otimes \widehat{t}_N(y_i^* \otimes n_1)$$

Así hemos probado que $\mathcal{Z}$ es una equivalencia.□

PROPOSICION 5.8 *Existe un Λ-A bimódulo T finitamente generado tal que si M es una representación de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{Z}(M) = (P, Q, \alpha)$ entonces*

$$coker(\alpha) \simeq T \bigotimes_A M.$$

<u>DEMOSTRACION</u>. Consideremos el morfismo de Λ-A bimódulos

$$t_A : \Lambda \bigotimes_S A_1 \longrightarrow \Lambda \bigotimes_S A_2$$

tal que

$$t_A\left(\lambda \otimes \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \sum_i \lambda y_i \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_i^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \sum_i \lambda y_i \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_i^* s & 0 \end{bmatrix}$$

Notemos primero que en $\Lambda \bigotimes_S A_1$ se tiene

$$\lambda \otimes \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \lambda s \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

y de aquí al aplicar t_A

$$\sum_i \lambda y_i \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_i^* s & 0 \end{bmatrix} = \sum_i \lambda s y_i \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_i^* & 0 \end{bmatrix}.$$

Tomando el Λ-A bimódulo $T = \text{coker}(t_A)$, deseamos probar que si M es un A-módulo y $\mathcal{Z}(M) = (\Lambda \bigotimes_S M_1, \Lambda \bigotimes_S M_2, t_M)$, entonces

$$\text{coker}(t_M) \simeq \text{coker}(t_A) \bigotimes_A M.$$

Observemos que $A_2 \bigotimes_A M \simeq M_2$ como A-módulo y, en particular lo es como S módulo, un isomorfismo está dado por

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f & t \end{bmatrix} \otimes m \longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f & t \end{bmatrix} m.$$

Así tenemos el isomorfismo

$$\psi : (\Lambda \bigotimes_S A_2) \bigotimes_A M \simeq \Lambda \bigotimes_S (A_2 \bigotimes_A M) \simeq \Lambda \bigotimes_S M_2$$

$$(\lambda \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f & t \end{bmatrix}) \otimes m \longmapsto \lambda \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f & t \end{bmatrix} m$$

Sean $\pi : \Lambda \bigotimes_S A_2 \longrightarrow T$ y $\eta : \Lambda \bigotimes_S M_2 \longrightarrow$coker$(t_M)$ las proyecciones canónicas, y consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda \bigotimes_S A_1) \bigotimes_A M \arrow[r, "t_A \otimes 1_M"] & (\Lambda \bigotimes_S A_2) \bigotimes_A M \arrow[r, "\pi \otimes 1_M"] \arrow[d, "\psi"'] & T \bigotimes_A M \arrow[ddl, dashed, "\rho"] \\
& \Lambda \bigotimes_S M_2 \arrow[d, "\eta"'] & \\
& \operatorname{coker}(t_M) = (\Lambda \bigotimes_S M_2)/\operatorname{Im}(t_M) &
\end{tikzcd}$$

Nótese que

$$\begin{aligned}
\eta\psi(t_A \otimes 1_M)(\lambda \otimes \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes m \right) &= \eta\psi \left(\sum_i \lambda s y_i \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_i^* & 0 \end{bmatrix} \otimes m \right) \\
&= \eta \left(\sum_i \lambda s y_i \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_i^* & 0 \end{bmatrix} m \right) \\
&= \eta t_M(\lambda s \otimes m) = 0.
\end{aligned}$$

Como además coker$(t_A \otimes_A 1_M)$ =coker$(t_A) \otimes_A 1_M = T \bigotimes_A M$, la propiedad universal del coker muestra que existe un morfismo $\rho : T \bigotimes_A M \longrightarrow$coker$(t_M)$ tal que

$\rho(\pi\otimes 1_M)=\eta\psi$. Veamos que ρ es un isomorfismo. Evidentemnte es epi, pues así lo son η y ψ. Por otro lado supóngase que $\psi(x)\in \mathrm{Im}(t_M)$, entonces

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= t_M(\sum_j \lambda_j\otimes m_j)=\sum_j\sum_i \lambda_j y_i\otimes \begin{bmatrix} 0 & 0\\ y_i^* & 0\end{bmatrix} m_j\\
&= \sum_j \psi\left(\sum_i \lambda_j y_i\otimes \begin{bmatrix} 0 & 0\\ y_i^* & 0\end{bmatrix}\otimes m_j\right)\\
&= \sum_j \psi(t_A\left(\lambda_j\otimes \begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)\otimes m_j)\\
&= \sum_j \psi(t_A\otimes 1_M)(\lambda_j\otimes \begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\otimes m_j)\\
&= \psi(t_A\otimes 1_M)(\sum_j\left(\lambda_j\otimes \begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)\otimes m_j),
\end{aligned}$$

como ψ es mono, entonces

$$x=(t_A\otimes 1_M)(\sum_j\left(\lambda_j\otimes \begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)\otimes m_j).$$

De aquí que

$$(\pi\otimes 1_M)(x)=(\pi\otimes 1_M)(t_A\otimes 1_M)(\sum_j\left(\lambda_j\otimes \begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)\otimes m_j)=0,$$

es decir $x\in\ker(\pi\otimes 1_M)$. Luego $\ker(\eta\psi)\subseteq\ker(\pi\otimes 1_M)$, por lo que existe γ:$\mathrm{cokert}_M\longrightarrow T\bigotimes_A M$ tal que $\pi\otimes 1_M=\gamma\eta\psi$. Como $\eta\psi=\rho(\pi\otimes 1_M)$, entonces $\pi\otimes 1_M=\gamma\rho(\pi\otimes 1_M)$ y dado que $\pi\otimes 1_M$ es epi, entonces $\gamma\rho=1_{T\otimes M}$, y consecuentemente ρ es mono. □

Ahora veamos el bocs $\mathcal{A}=(A,V)$ en términos de categorías. Consideramos A' y A como categorías con un solo objeto X y cuyas álgebras de endomorfismos están dadas por

$$Hom_{A'}(X,X)=A' \qquad \text{y} \qquad Hom_A(X,X)=A.$$

Introducimos la notación

$$\overline{e}_i=\begin{bmatrix} e_i & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \underline{e}_i=\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & e_i\end{bmatrix}$$

para cada idempotente $e_i \in S$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Nótese que

$$\overline{e}_i \overline{e}_j = \delta_{ij} \overline{e}_i, \qquad \underline{e}_i \underline{e}_j = \delta_{ij} \underline{e}_i, \qquad \overline{e}_i \underline{e}_j = 0 = \underline{e}_j \overline{e}_i,$$

para todo $i, j = 1, 2, \ldots, r$ y donde δ_{ij} es la Delta de Kronecker. También escibiremos:

$$\overline{y_i^*} = \begin{bmatrix} y_i^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{y_i^*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_i^* \end{bmatrix},$$

Utilizaremos también la siguiente notación: para $s \in S$, e_i, $i = 1, \ldots, r$, entonces con $\lambda_{s,i} \in k$ denotamos el escalar tal que:

$$se_i = e_i s = \lambda_{s,i} e_i.$$

Nótese que se satisfacen las siguientes relaciones: para $s, t \in S$, $\gamma \in k$ y $g \in J^*$ se tiene:

$$\lambda_{(st),i} = \lambda_{s,i} \lambda_{t,i}, \qquad\qquad \lambda_{(\gamma s),i} = \gamma \lambda_{s,i},$$

$$\lambda_{(s+t),i} = \lambda_{s,i} + \lambda_{t,i}, \qquad\qquad \lambda_{g(sy_i),p_i} = \lambda_{s,q_i} \lambda_{g(y_i),p_i}.$$

PROPOSICION 5.9 *El bocs $\mathcal{A} = (A, V)$ satisface las siguientes condiciones:*

(1). Sea $\nu : S \longrightarrow \Lambda^*$ el morfismo de S-S bimódulos tal que $\nu(1) : \Lambda \longrightarrow S$ es la proyección. Entonces

$$\omega : A' \longrightarrow V, \qquad \omega = \begin{bmatrix} \nu & 0 \\ 0 & \nu \end{bmatrix},$$

es group-like de A relativo a A'.

(2).

$$\overline{V} \simeq A \bigotimes_{A'} \begin{bmatrix} J^* & 0 \\ 0 & J^* \end{bmatrix} \bigotimes_{A'} A.$$

(3). Si δ es la diferencial asociada a ω, entonces:

$$\begin{aligned} \delta\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_l^* & 0 \end{bmatrix}\right) \;=\; & \sum_{i,j} \lambda_{y_l^*(y_j y_i),p_i} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_i^* & 0 \end{bmatrix} \otimes_X \begin{bmatrix} y_j^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X 1 \right) \\ & - \lambda_{y_l^*(y_i y_j),p_j} \left(1 \otimes_X \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_j^* \end{bmatrix} \otimes_X \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_i^* & 0 \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

$$\delta(\overline{y_l^*}) = \sum_{i \neq l} \sum_j \left(\begin{bmatrix} y_l^*(y_i y_j) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X \begin{bmatrix} y_j^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X 1 \right) \otimes_X \left(1 \otimes_X \begin{bmatrix} y_i^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X 1 \right).$$

$$\delta(\underline{y_l^*}) = \sum_{i \neq l} \sum_j \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_l^*(y_i y_j) \end{bmatrix} \otimes_X \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_j^* \end{bmatrix} \otimes_X 1 \right) \otimes_X \left(1 \otimes_X \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_i^* \end{bmatrix} \otimes_X 1 \right).$$

DEMOSTRACION. "(1)" Es claro que ω resulta un morfismo de A'-A' bimódulos, y queremos que $(\imath, \omega) : (A', A') \longrightarrow \mathcal{A}$ sea un morfismo de bocses, es decir que

$$\epsilon\omega = \imath \qquad \text{y} \qquad \mu\omega = \pi(\omega \otimes \omega)\mu_{A'}.$$

Para éllo, basta mostrarlo en

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Empecemos observando que

$$\nu(1) = \sum_i \nu(1)(x_j)x_j^* = \sum_p e_p e_p^* = \sum_p e_p^*;$$

además que

$$\nu(1)x_j = \begin{cases} 0 & \text{si } x_j = e_p \\ e_p^* & \text{si } x_j = e_p. \end{cases}$$

Así

$$\begin{aligned} \epsilon\omega \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \epsilon \begin{bmatrix} \nu(1) & 0 \\ 0 & \nu(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon\nu(1) & 0 \\ 0 & \epsilon\nu(1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \nu(1)(1) & 0 \\ 0 & \nu(1)(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Mientras que

$$\begin{aligned} \mu\omega \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \mu \begin{bmatrix} \nu(1) & 0 \\ 0 & \nu(1) \end{bmatrix} = \overline{m}_A \begin{bmatrix} \nu(1) & 0 \\ 0 & \nu(1) \end{bmatrix} \\ &= \sum_j \begin{bmatrix} \nu(1)x_j & 0 \\ 0 & \nu(1)x_j \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_j^* & 0 \\ 0 & x_j^* \end{bmatrix} \\ &= \sum_p \begin{bmatrix} e_p^* & 0 \\ 0 & e_p^* \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} e_p^* & 0 \\ 0 & e_p^* \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} (\omega \otimes \omega)\mu_{A'} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= (\omega \otimes \omega)\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \nu(1) & 0 \\ 0 & \nu(1) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \nu(1) & 0 \\ 0 & \nu(1) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{p,q} \begin{bmatrix} e_p^* & 0 \\ 0 & e_p^* \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} e_q^* & 0 \\ 0 & e_q^* \end{bmatrix} \\ &= \sum_p \begin{bmatrix} e_p^* & 0 \\ 0 & e_p^* \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} e_p^* & 0 \\ 0 & e_p^* \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Así ω es un group-like.

"(2)" Recordando el diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[rr, "\overline{\varepsilon}_A"] \arrow[d, "\pi"'] & & A \\
V = W/\mathrm{Im}h \arrow[urr, "\varepsilon"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Tenemos que $\overline{V} = \ker \varepsilon = \pi(\ker \overline{\varepsilon}_A)$. Afirmamos que

$$\overline{W} = \ker \overline{\varepsilon}_A = \mathrm{Im}(h) \bigoplus \begin{bmatrix} J^* & 0 \\ J^* \bigotimes J^* \bigoplus J^* \bigotimes J^* & J^* \end{bmatrix}.$$

También se tiene que con f_i, g_l, $g_k \in \Lambda^*$, h_l, $h_k' \in J^*$:

$$\overline{\varepsilon}_A \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ (\sum_l h_l \otimes g_l, \sum_k g_k' \otimes h_k') & f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(1) & 0 \\ \sum_l h_l g_l(1) + \sum_k g_k'(1) h_k' & f_2(1) \end{bmatrix}.$$

Como $\Lambda = J \bigoplus S$, entonces

$$J^* = \{\, f \in \Lambda^* \mid f(s) = 0 \ \text{ para toda } s \in S \,\} \subset \Lambda^*.$$

De ésto es clara la contención:

$$\mathrm{Im}(h) + \begin{bmatrix} J^* & 0 \\ J^* \bigotimes J^* \bigoplus J^* \bigotimes J^* & J^* \end{bmatrix} \subset \ker \overline{\varepsilon}_A.$$

Ahora bien, sea

$$\begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ (\sum_l h_l \otimes g_l, \sum_k g_k' \otimes h_k') & f_2 \end{bmatrix} \in \ker \overline{\varepsilon}_A$$

entonces

$$\begin{bmatrix} f_1(1) & 0 \\ \sum_l h_l g_l(1) + \sum_k g_k'(1) h_k' & f_2(1) \end{bmatrix} = 0$$

Por lo que $f_1(1) = f_2(1) = 0$ y $\sum_l h_l g_l(1) + \sum_k g'_k(1)h'_k = 0$, en J^*. Se sigue que $f_i \in J^*$, pues para $s \in S$, $f_i(s) = f_i(1)s = 0$, para $i = 1, 2$.

Enseguida debemos dar $f \in J^*$ tal que

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ (\sum_l h_l \otimes g_l, \sum_k g'_k \otimes h'_k) & f_2 \end{bmatrix} &= h(f) + \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ z & f_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (m_1(f), -m_2(f)) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ z & f_2 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

con $z \in J^* \bigotimes J^* \bigoplus J^* \bigotimes J^*$, o equivalentemente que

$$\sum_l h_l \otimes g_l - m_1(f) \in J^* \bigotimes J^* \qquad \text{y} \qquad \sum_k g'_k \otimes h'_k + m_2(f) \in J^* \bigotimes J^*.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_l h_l \otimes g_l &= \sum_l h_l \otimes \sum_j g_l(x_j)x_j^* = \sum_l \sum_j h_l g_l(x_j) \otimes x_j^* \\
&= \sum_l \sum_j \sum_i [h_l g_l(x_j)](y_i) y_i^* \otimes x_j^* \\
&= \sum_j \sum_i \left[\sum_l h_l(g_l(x_j)y_i) \right] y_i^* \otimes x_j^*.
\end{aligned}$$

Mientras que

$$\begin{aligned}
\sum_k g'_k \otimes h'_k &= \sum_k g'_k \otimes \sum_i h'_k(y_i)y_i^* = \sum_k \sum_i g'_k h'_k(y_i) \otimes y_i^* \\
&= \sum_k \sum_i \sum_j [g'_k h'_k(y_i)](x_j) x_j^* \otimes y_i^* \\
&= \sum_i \sum_j \left[\sum_k g'(h'_k(y_i)x_j) \right] x_j^* \otimes y_i^*.
\end{aligned}$$

Además $\sum_l h_l g_l(1) + \sum_k g'_k(1)h'_k = 0$, y definimos

$$f = \sum_l h_l g_l(1) = -\sum_k g'_k(1)h'_k \in J^*,$$

y entonces

$$m_1(f) = \sum_j \sum_i f(x_j y_i) y_i^* \otimes x_j^* = \sum_j \sum_i \sum_l h_l(g_l(1) x_j y_i) y_i^* \otimes x_j^*,$$

y

$$\begin{aligned}
m_2(f) &= \sum_i \sum_j f(y_i x_j) x_j^* \otimes y_i^* = \sum_j \sum_i \sum_l h_l(g_l(1) y_i x_j) x_j^* \otimes y_i^* \\
&= -\sum_j \sum_i \sum_k g_k'(1) h_k'(y_i x_j) x_j^* \otimes y_i^* \\
&= -\sum_j \sum_i \sum_k g_k'(h_k'(y_i x_j)) x_j^* \otimes y_i^*.
\end{aligned}$$

De aquí que

$$\begin{aligned}
&\sum_l h_l \otimes g_l - m_1(f) \\
&= \sum_j \sum_i \sum_l h_l(g_l(x_j) y_i) y_i^* \otimes x_j^* - \sum_j \sum_i \sum_l h_l(g_l(1) x_j y_i) y_i^* \otimes x_j^* \\
&= \sum_j \sum_i \sum_l \left[h_l(g_l(x_j) y_i) - h_l(g_l(1) x_j y_i)\right] y_i^* \otimes x_j^* \\
&= \sum_{\substack{j \\ x_j \neq e_p}} \sum_i \sum_l \left[h_l(g_l(x_j) y_i) - h_l(g_l(1) x_j y_i)\right] y_i^* \otimes x_j^* \\
&= \sum_j \sum_i \sum_l \left[h_l(g_l(y_j) y_i) - h_l(g_l(1) y_j y_i)\right] y_i^* \otimes y_j^* \in J^* \bigotimes J^*.
\end{aligned}$$

Mientras que

$$\begin{aligned}
&\sum_k g_k' \otimes h_k' + m_2(f) \\
&= \sum_i \sum_j \sum_k g_k'(h_k'(y_i) x_j) x_j^* \otimes y_i^* - \sum_i \sum_j \sum_k g_k'(h_k'(y_i x_j)) x_j^* \otimes y_i^* \\
&= \sum_i \sum_j \sum_k \left[g_k'(h_k'(y_i) x_j) - g_k'(h_k'(y_i x_j))\right] x_j^* \otimes y_i^* \\
&= \sum_i \sum_{\substack{j \\ x_j \neq e_p}} \sum_k \left[g_k'(h_k'(y_i) x_j) - g_k'(h_k'(y_i x_j))\right] x_j^* \otimes y_i^* \\
&= \sum_i \sum_j \sum_k \left[g_k'(h_k'(y_i) y_j) - g_k'(h_k'(y_i y_j))\right] y_j^* \otimes y_i^* \in J^* \bigotimes J^*.
\end{aligned}$$

Resta mostrar que

$$\operatorname{Im}(h)\bigcap\begin{bmatrix} J^* & 0 \\ J^*\bigotimes J^*\bigoplus J^*\bigotimes J^* & J^* \end{bmatrix}=0.$$

Supongamos que para alguna $f \in J^*$ se tiene

$$h(f)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (m_1(f),-m_2(f)) & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ z & f_2 \end{bmatrix},$$

con $f_1,\ f_2 \in J^*$ y $z \in J^*\bigotimes J^*\bigoplus J^*\bigotimes J^*$. Por lo tanto $f_1 = f_2 = 0$ y $z=(m_1(f),-m_2(f))$. Bastará mostrar que $f=0$. Observemos que

$$\begin{aligned}
z=(m_1(f),-m_2(f)) &= \Big(\sum_i\sum_j f(x_jy_i)y_i^*\otimes x_j^*,-\sum_i\sum_j f(y_ix_j)x_j^*\otimes y_i^*\Big)\\
&= \sum_i\sum_{j,x_j\neq e_p}\big(f(x_jy_i)y_i^*\otimes x_j^*,-f(y_ix_j)x_j^*\otimes y_i^*\big)+\\
&\qquad +\sum_i\sum_{j,x_j=e_p}\big(f(x_jy_i)y_i^*\otimes x_j^*,-f(y_ix_j)x_j^*\otimes y_i^*\big)\\
&= \sum_i\sum_j\big(f(y_jy_i)y_i^*\otimes y_j^*,-f(y_iy_j)y_j^*\otimes y_i^*\big)+\\
&\qquad +\sum_i\sum_p\big(f(e_py_i)y_i^*\otimes e_p^*,-f(y_ie_p)e_p^*\otimes y_i^*\big)
\end{aligned}$$

Como $y_i^*,\ y_j^* \in J^*$, entonces

$$\sum_i\sum_p\big(f(e_py_i)y_i^*\otimes e_p^*,-f(y_ie_p)e_p^*\otimes y_i^*\big)\in J^*\bigotimes J^*\bigoplus J^*\bigotimes J^*.$$

pero $e_p^* \notin J^*$, consecuentemente

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_i\sum_p(f(e_py_i)y_i^*\otimes e_p^*,-f(y_ie_p)e_p^*\otimes y_i^*)\\
&= \sum_i(f(e_{q_i}y_i)y_i^*\otimes e_{q_i}^*,-f(y_ie_{p_i})e_{p_i}^*\otimes y_i^*)\\
&= \sum_i(f(y_i)y_i^*\otimes e_{q_i}^*,-f(y_i)e_{p_i}^*\otimes y_i^*).
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_i f(y_i)y_i^*\otimes e_{q_i}^*\in J^*\bigotimes_S\Lambda^*,\\
0 &= \sum_i f(y_i)e_{p_i}^*\otimes y_i^*\in \Lambda^*\bigotimes_S J^*.
\end{aligned}$$

Pero para cada i se tiene:

$$f(y_i) = f(y_i e_{p_i}) = f(y_i)e_{p_i} \in Se_{p_i} = ke_{p_i},$$

así $f(y_i) = \lambda_i e_{p_i}$ con $\lambda_i \in k$, por lo que

$$\sum_i \lambda_i y_i^* \otimes e_{q_i}^* = 0$$

Como $\{ y_i^* \otimes e_{q_i}^* \mid i \}$ es una base para $J^* \bigotimes_S S^*$, por 5.2(2), tenemos que $\lambda_i = 0$, es decir $f(y_i) = 0$ para toda i, y por lo tanto $f = 0$. Esto prueba nuestra afirmación.

De aquí vemos que

$$\overline{V} \simeq \begin{bmatrix} J^* & 0 \\ J^* \bigotimes J^* \bigoplus J^* \bigoplus J^* & J^* \end{bmatrix} = A \bigotimes_{A'} \begin{bmatrix} J^* & 0 \\ 0 & J^* \end{bmatrix} \bigotimes_{A'} A.$$

"(3)". Si δ es la diferencial de ω, entonces observemos que

$$\begin{aligned}
\delta\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_l^* & 0 \end{bmatrix}\right) &= \omega(1_X)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_l^* & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_l^* & 0 \end{bmatrix}\omega(1_X) \\
&= \begin{bmatrix} \nu(1) & 0 \\ 0 & \nu(1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_l^* & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_l^* & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \nu(1) & 0 \\ 0 & \nu(1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (0, \nu(1) \otimes y_l^*) & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (y_l^* \otimes \nu(1), 0) & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (0, \sum_j e_j^* \otimes y_l^*) & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (y_l^* \otimes \sum_j e_j^*, 0) & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (0, e_{p_l}^* \otimes y_l^*) & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (y_l^* \otimes e_{q_l}^*, 0) & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
m_1(y_l^*) &= \sum_i \sum_j y_l^*(x_j y_i) y_i^* \otimes x_j^* \\
&= \sum_i \sum_j y_l^*(y_j y_i) y_i^* \otimes y_j^* + \sum_i \sum_q y_l^*(e_q y_i) y_i^* \otimes e_q^* \\
&= \sum_i \sum_j y_l^*(y_j y_i) y_i^* \otimes y_j^* + \sum_i y_l^*(y_i) y_i^* \otimes e_{q_i}^* \\
&= \sum_i \sum_j y_l^*(y_j y_i) y_i^* \otimes y_j^* + y_l^* \otimes e_{q_l}^*.
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
m_2(y_l^*) &= \sum_i \sum_j y_l^*(y_i x_j) x_j^* \otimes y_i^* \\
&= \sum_i \sum_j y_l^*(y_i y_j) y_j^* \otimes y_i^* + \sum_i \sum_p y_l^*(y_i e_p) e_p^* \otimes y_i^* \\
&= \sum_i \sum_j y_l^*(y_i y_j) y_j^* \otimes y_i^* + \sum_i y_l^*(y_i) e_{p_i}^* \otimes y_i^* \\
&= \sum_i \sum_j y_l^*(y_i y_j) y_j^* \otimes y_i^* + e_{p_l}^* \otimes y_l^*.
\end{aligned}$$

De aquí :

$$y_l^* \otimes e_{q_l}^* = m_1(y_l^*) - \sum_i \sum_j y_l^*(y_j y_i) y_i^* \otimes y_j^*$$

y

$$e_{p_l}^* \otimes y_l^* = m_2(y_l^*) - \sum_i \sum_j y_l^*(y_i y_j) y_j^* \otimes y_i^*$$

es decir

$$\begin{aligned}
(0, e_{p_l} \otimes y_l^*) - (y_l^* \otimes e_{q_l}^*, 0) &= (0, -\sum_i \sum_j y_l^*(y_i y_j) y_j^* \otimes y_i^*) \\
&\quad + (\sum_i \sum_j y_l^*(y_j y_i) y_i^* \otimes y_j^*, 0) \\
&\quad - (m_1(y_l^*), -m_2(y_l^*)).
\end{aligned}$$

Y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\delta(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_l^* & 0 \end{bmatrix}) &= \sum_i \sum_j \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (y_l^*(y_j y_i) y_i^* \otimes y_j^*, 0) & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (0, y_l^*(y_i y_j) y_j^* \otimes y_i^*) & 0 \end{bmatrix} \\
&= \sum_{i,j} \lambda_{y_l^*(y_j y_i), p_i} (\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_i^* & 0 \end{bmatrix} \otimes_X \begin{bmatrix} y_j^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X 1) \\
&\quad - \lambda_{y_l^*(y_i y_j), p_j} (1 \otimes_X \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_j^* \end{bmatrix} \otimes_X \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_i^* & 0 \end{bmatrix}).
\end{aligned}$$

Ahora veamos las fórmulas propuestas para la diferencial en los elementos $\overline{y_l^*}$ y $\underline{y_l^*}$. Recordemos que

$$\delta : \overline{V} \longrightarrow \overline{V} \bigotimes_A \overline{V},$$

es tal que para $v \in V(X,X)$

$$\delta(v) = \mu(v) - v \otimes \omega(1_X) - \omega(1_X) \otimes v.$$

Así

$$\begin{aligned}
\delta(\overline{y_l^*}) &= \mu(\overline{y_l^*}) - \overline{y_l^*} \otimes \omega(1_X) - \omega(1_X) \otimes \overline{y_l^*} \\
&= \sum_i \begin{bmatrix} y_l^* x_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_i^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_l^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \nu(1) & 0 \\ 0 & \nu(1) \end{bmatrix} - \\
&\qquad \begin{bmatrix} \nu(1) & 0 \\ 0 & \nu(1) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} y_l^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \sum_i \begin{bmatrix} y_l^* x_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_i^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \sum_i \begin{bmatrix} y_l^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} e_i^* & 0 \\ 0 & e_i^* \end{bmatrix} - \\
&\qquad \sum_i \begin{bmatrix} e_i^* & 0 \\ 0 & e_i^* \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} y_l^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \sum_i \begin{bmatrix} y_l^* y_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} y_i^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \sum_j \begin{bmatrix} y_l^* e_j & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} e_j^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \\
&\qquad \begin{bmatrix} y_l^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} e_{q_l}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_{p_l}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} y_l^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \sum_i \begin{bmatrix} y_l^* y_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} y_i^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_{p_l}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} y_l^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \sum_{i \neq l} \begin{bmatrix} y_l^* y_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} y_i^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(por 5.3(2))} \\
&= \sum_{i \neq l} \begin{bmatrix} \sum_j (y_l^* y_i)(y_j) y_j^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} y_i^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \sum_{i \neq l} \sum_j \begin{bmatrix} y_l^* (y_i y_j) y_j^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} y_i^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \sum_{i \neq l} \sum_j (\begin{bmatrix} y_l^* (y_i y_j) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X \begin{bmatrix} y_j^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X 1) \otimes_X (1 \otimes_X \begin{bmatrix} y_i^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X 1).
\end{aligned}$$

Análogamente podemos mostrar que se vale la fórmula dada para $\delta(\underline{y_l^*})$. Esto termina la prueba de 5.9.□

Queremos tener un bocs sobre una categoría aditiva. Para éllo consideremos en $\text{mod}A'$, la categoria de A'-módulos derechos, a la subcategoría plena C cuyos objetos son $\{ X_1, \ldots, X_r, Y_1, \ldots, Y_r \}$, donde

$$X_i = \begin{bmatrix} e_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A' = \overline{e}_i A' \qquad \text{y} \qquad Y_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_i \end{bmatrix} A' = \underline{e}_i A',$$

para $i = 1, 2, \ldots, r$. Nótese que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_C(X_i, X_j) &= \mathrm{Hom}_{A'}(\overline{e}_i A', \overline{e}_j A') = \overline{e}_j A' \overline{e}_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ \begin{bmatrix} ke_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{si } i = j. \end{cases} \\
Hom_C(Y_i, Y_j) &= \mathrm{Hom}_{A'}(\underline{e}_i A', \underline{e}_j A') = \underline{e}_j A' \underline{e}_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & ke_i \end{bmatrix} & \text{si } i = j. \end{cases} \\
Hom_C(X_i, Y_j) &= \mathrm{Hom}_{A'}(\overline{e}_i A', \underline{e}_j A') = \overline{e}_j A' \underline{e}_i = 0 \\
Hom_C(Y_j, X_i) &= \mathrm{Hom}_{A'}(\underline{e}_i A', \overline{e}_j A') = \underline{e}_j A' \overline{e}_i = 0.
\end{aligned}$$

Por 1.24(1), tomamos B' la categoría mínima, de hecho trivial, tal que ines$B' = C$.

Consideremos el funtor

$$\theta' : A' \longrightarrow B'$$

tal que

$$\theta' X = \bigoplus_i X_i \bigoplus \bigoplus_j Y_j = A'.$$

También tenemos el funtor

$$F : B' \longrightarrow \mathrm{mod} A,$$

donde mod$A$ es la categoría de A-módulos derechos, tal que

$$\overline{e}_i A' \mapsto \overline{e}_i A \qquad \text{y} \qquad \underline{e}_i A' \mapsto \underline{e}_i A,$$

para $i = i, \ldots, r$. Este funtor nos determina un B'-bimódulo $U = {}_F\mathrm{mod} A_F$, y es tal que:

$$\begin{aligned}
U(X_i, X_j) &= \mathrm{Hom}_A(\overline{e}_i A, \overline{e}_j A) = \overline{e}_j A \overline{e}_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ \begin{bmatrix} ke_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{si } i = j. \end{cases} \\
U(Y_i, Y_j) &= \mathrm{Hom}_A(\underline{e}_i A, \underline{e}_j A) = \underline{e}_j A \underline{e}_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & ke_i \end{bmatrix} & \text{si } i = j. \end{cases} \\
U(X_i, Y_j) &= \mathrm{Hom}_A(\overline{e}_i A, \underline{e}_j A) = \overline{e}_j A \underline{e}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e_j J^* e_i & 0 \end{bmatrix} \\
U(Y_j, X_i) &= \mathrm{Hom}_A(\underline{e}_i A, \overline{e}_j A) = \underline{e}_j A \overline{e}_i = 0
\end{aligned}$$

Nótese que B' es un B'-subbimódulo de U, entonces con T denotamos el B'-bimódulo determinado como $T = U/B'$. Así se tiene que:

$$T(X_i, X_j) = 0, \qquad T(Y_i, Y_j) = 0.$$

$$T(X_i, Y_j) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e_j J^* e_i & 0 \end{bmatrix}, \qquad T(Y_i, X_j) = 0.$$

En T consideramos la identificación

$$y_i^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_i^* & 0 \end{bmatrix}.$$

PROPOSICION 5.10 *(1). T es un B'-bimódulo libre generado por los elementos $\{ y_i^* \mid i = 1, \ldots, r \}$;*
(2). $T^{\otimes 2} = 0$.

DEMOSTRACION. "(1)". supongamos que $n(i,j) = \dim e_j J^* e_i$. Como los objetos X_i y Y_i tienen anillos de endomorfismos triviales en B', se tiene que

$$T \cong \bigoplus_{(i,j)} \bigoplus_{l=1}^{n(i,j)} B'(Y_j, -) \bigotimes_k B'(-, X_i).$$

Y este isomorfismo puede construirse de tal forma que

$$y_i^* \mapsto 1_{Y_{p_i}} \otimes 1_{X_{q_i}},$$

dado que $y_i^* \in e_{p_i} J^* e_{q_i}$ forman un k-base.

"(2)". Nótese que si $Z_1 = (\bigoplus_j X_j^{p_j}) \bigoplus (\bigoplus_j Y_j^{q_j})$, y $Z_2 = (\bigoplus_i X_i^{m_i}) \bigoplus (\bigoplus_i Y_i^{n_i})$, entonces

$$\begin{aligned}
(T \bigotimes_{B'} T)(Z_1, Z_2) &= T(-, Z_2) \bigotimes_{B'} T(Z_1, -) \\
&= \bigoplus_{i,j} [T(-, X_i) \bigotimes_{B'} T(X_j, -)^{m_i p_j} \bigoplus T(-, X_i) \bigotimes_{B'} T(Y_j, -)^{m_i q_j} \\
&\qquad \bigoplus T(-, Y_i) \bigotimes_{B'} T(X_j, -)^{n_i p_j} \bigoplus T(-, Y_i) \bigotimes_{B'} T(Y_j, -)^{q_j n_i}] \\
&= \bigoplus_{i,j} T(-, Y_i) \bigotimes_{B'} T(X_j, -)^{n_i p_j}.
\end{aligned}$$

Por lo que basta probar que para i y j fijas se tiene;

$$T(-,Y_i)\bigotimes_{B'}T(X_j,-)=0.$$

En efecto, los generadores de ese bimódulo son de la forma $v\otimes_{X_l}u$ o $v\otimes_{Y_l}u$, pero en el primer caso $u\in T(X_j,X_l)=0$, y en el segundo $v\in T(Y_l,Y_i)=0$. $\square$

Ahora bien, la categoría tensorial $B=T^{\otimes}$, por 1.1.5, resulta ser una categoría libremente generada sobre B' por los morfismos $y_i^*\in B(X_{q_i},Y_{p_i})$, y como B'-bimódulo se tiene:

$$B=B'\bigoplus T.$$

Luego se sigue

$$\begin{aligned}
B(X_i,X_j) &= B'(X_i,X_j)\bigoplus T(X_i,X_j)=B'(X_i,X_j),\\
B(Y_i,Y_j) &= B'(Y_i,Y_j)\bigoplus T(Y_i,Y_j)=B'(Y_i,Y_j),\\
B(X_i,Y_j) &= B'(X_i,Y_j)\bigoplus T(X_i,Y_j)=T(X_i,Y_j)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ e_jJ^*e_i & 0\end{bmatrix},\\
B(Y_i,X_j) &= B'(Y_i,X_j)\bigoplus T(Y_i,X_j)=0.
\end{aligned}$$

Mientras que:

$$\begin{aligned}
B(A',X_j) &= B(X_j,X_j)=A'\overline{e}_j,\\
B(A',Y_j) &= [\bigoplus_r B(X_r,Y_j)\bigoplus B(Y_j,Y_j)=(\bigoplus_r\begin{bmatrix}0 & 0\\ e_jJ^*e_r & 0\end{bmatrix})\bigoplus\underline{e}_jA'=\underline{e}_jA,\\
B(X_i,A') &= B(X_i,X_i)\bigoplus[\bigoplus_r B(X_i,Y_r)]=A'\overline{e}_i\bigoplus(\bigoplus_r\begin{bmatrix}0 & 0\\ e_rJ^*e_i & 0\end{bmatrix})=A\overline{e}_i,\\
B(Y_i,A') &= B(Y_i,Y_j)=A'\underline{e}_i.
\end{aligned}$$

En B', tenemos $\theta'(X)=[\bigoplus_i X_i]\bigoplus[\bigoplus_i Y_i]$, y denotamos

$$f_Z:\theta'(X)\longrightarrow Z \qquad \text{y} \qquad e_Z:Z\longrightarrow\theta'(X)$$

las inclusiones y proyecciones canónicas. Nótese que:

$$\theta'(\overline{e}_i)=e_{X_i}f_{X_i} \quad \text{y} \quad \theta'(\underline{e}_i)=e_{Y_i}f_{Y_i}$$

y

$$\theta'(1_X)=\sum_{Z\in\mathrm{ines}B'}e_Zf_Z.$$

PROPOSICION 5.11 *Existe un funtor*

$$\theta : A \longrightarrow B$$

tal que:

(1). θ extiende a θ' y

$$\theta(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_i^* & 0 \end{bmatrix}) = e_{Y_{p_i}} y_i^* f x_{q_i}.$$

(2). El cuadro conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\imath"] \arrow[d, "\theta'"'] & A \arrow[d, "\theta"] \\ B' \arrow[r, "\jmath"'] & B \end{tikzcd}$$

es un diagrama de pushout.

<u>DEMOSTRACION</u>. "(1)": En el único objeto X de A, definimos $\theta(X) = \theta'(X) = A'$. En morfismos, se tiene

$$\theta \begin{bmatrix} s & 0 \\ f & t \end{bmatrix} = \theta' \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} + \sum_j \lambda_{f(y_j),p_j} e_{Y_{p_j}} y_j^* f x_{q_j}.$$

Resulta que θ está bien definido, pues sobre

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ J^* & 0 \end{bmatrix},$$

θ es la transformación lineal que manda la k-base $\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_i^* & 0 \end{bmatrix} \mid i \}$ en el conjunto $\{ e_{Y_{p_i}} y_i^* f x_{q_i} \mid i \}$.

Para ver que θ es funtor, basta verificar que respeta la composición. Nótese que

$$\begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ f_1 & t_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_2 & 0 \\ f_2 & t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 s_2 & 0 \\ f_1 s_2 + t_1 f_2 & t_1 t_2 \end{bmatrix},$$

y supongamos que

$$s_1 = \sum_l \lambda_{s_1,l} e_l, \qquad s_2 = \sum_l \lambda_{s_2,l} e_l$$

y

$$t_1 = \sum_l \lambda_{t_1,l} e_l \qquad t_2 = \sum_l \lambda_{t_2,l} e_l$$

con $\lambda_{s_1,l}$, $\lambda_{s_2,l}$, $\lambda_{t_1,l}$ y $\lambda_{t_2,l} \in k$. Luego

$$\begin{aligned}
\theta\left(\begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ f_1 & t_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_2 & 0 \\ f_2 & t_2 \end{bmatrix}\right) &= \theta\left(\begin{bmatrix} s_1 s_2 & 0 \\ f_1 s_2 + t_1 f_2 & t_1 t_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \theta'\begin{bmatrix} s_1 s_2 & 0 \\ 0 & t_1 t_2 \end{bmatrix} + \sum_j \lambda_{(f_1 s_2 + t_1 f_2)(y_j),p_j} e_{Y_{p_j}} y_j^* f_{X_{q_j}} \\
&= \theta'\begin{bmatrix} s_1 s_2 & 0 \\ 0 & t_1 t_2 \end{bmatrix} + \sum_j \lambda_{[f_1(s_2 y_j) + t_1 f_2(y_j)],p_j} e_{Y_{p_j}} y_j^* f_{X_{q_j}} \\
&= \theta'\begin{bmatrix} s_1 s_2 & 0 \\ 0 & t_1 t_2 \end{bmatrix} + \sum_j [\lambda_{f_1(s_2 y_j),p_j} + \lambda_{t_1 f_2(y_j),p_j}] e_{Y_{p_j}} y_j^* f_{X_{q_j}} \\
&= \theta'\begin{bmatrix} s_1 s_2 & 0 \\ 0 & t_1 t_2 \end{bmatrix} + \sum_j (\lambda_{s_2,q_j} \lambda_{f_1(y_j),p_j} + \lambda_{t_1,p_j} \lambda_{f_2(y_j),p_j}) e_{Y_{p_j}} y_j^* f_{X_{q_j}}
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
&\theta\left(\begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ f_1 & t_1 \end{bmatrix}\right)\theta\left(\begin{bmatrix} s_2 & 0 \\ f_2 & t_2 \end{bmatrix}\right) \\
= \ &(\theta'\begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & t_1 \end{bmatrix} + \sum_i \lambda_{f_1(y_i),p_i} e_{Y_{p_i}} y_i^* f_{X_{q_i}})(\theta'\begin{bmatrix} s_2 & 0 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix} + \sum_j \lambda_{f_2(y_j),p_j} e_{Y_{p_j}} y_j^* f_{X_{q_j}}) \\
= \ &\theta'\begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & t_1 \end{bmatrix}\theta'\begin{bmatrix} s_2 & 0 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix} + \sum_i \lambda_{f_1(y_i),p_i} e_{Y_{p_i}} y_i^* f_{X_{q_i}} \theta'\begin{bmatrix} s_2 & 0 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix} + \\
&\quad + \sum_j \theta'\begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & t_1 \end{bmatrix} \lambda_{f_2(y_j),p_j} e_{Y_{p_j}} y_j^* f_{X_{q_j}} \\
&\quad + \sum_{i,j} \lambda_{f_1(y_i),p_i} \lambda_{f_2(y_j),p_j} e_{Y_{p_i}} y_i^* f_{X_{q_i}} e_{Y_{p_j}} y_j^* f_{X_{q_j}} \\
= \ &\theta'\begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & t_1 \end{bmatrix}\theta'\begin{bmatrix} s_2 & 0 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix} + \sum_i \lambda_{f_1(y_i),p_i} e_{Y_{p_i}} y_i^* f_{X_{q_i}} \theta'\begin{bmatrix} s_2 & 0 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix} + \\
&\quad + \sum_j \theta'\begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & t_1 \end{bmatrix} \lambda_{f_2(y_j),p_j} e_{Y_{p_j}} y_j^* f_{X_{q_j}}.
\end{aligned}$$

Ahora bien, para i fijo tenemos

$$\lambda_{f_1(y_i),p_i} e_{Y_{p_i}} y_i^* f_{X_{q_i}} \theta'\begin{bmatrix} s_2 & 0 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix} \ = \ \lambda_{f_1(y_i),p_i} e_{Y_{p_i}} y_i^* f_{X_{q_i}} \theta'(\overline{e}_{q_i}) \theta'\begin{bmatrix} s_2 & 0 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda_{f_1(y_i),p_i} e_{Y_{p_i}} y_i^* f X_{q_i} \theta' \begin{bmatrix} s_2 e_{q_i} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \lambda_{f_1(y_i),p_i} e_{Y_{p_i}} y_i^* f X_{q_i} \lambda_{s_2,q_i} \theta' \begin{bmatrix} e_{q_i} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \lambda_{s_2,q_i} \lambda_{f_1(y_i),p_i} e_{Y_{p_i}} y_i^* f X_{q_i}.
\end{aligned}
$$

Mientra que para j fijo se tiene

$$
\begin{aligned}
\lambda_{f_2(y_j),p_j} \theta' \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & t_1 \end{bmatrix} e_{Y_{p_j}} y_j^* f X_{q_j} &= \lambda_{f_2(y_j),p_j} \theta' \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & t_1 \end{bmatrix} \theta'(\underline{e}_{p_j}) e_{Y_{p_j}} y_j^* f X_{q_j} \\
&= \lambda_{f_2(y_j),p_j} \theta' \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t_1 e_{p_j} \end{bmatrix} e_{Y_{p_j}} y_j^* f X_{q_j} \\
&= \lambda_{f_2(y_j),p_j} \lambda_{t_1,p_j} \theta' \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_{p_j} \end{bmatrix} e_{Y_{p_j}} y_j^* f X_{q_j} \\
&= \lambda_{f_2(y_j),p_j} \lambda_{t_1,p_j} e_{Y_{p_j}} y_j^* f X_{q_j}
\end{aligned}
$$

Es decir

$$
\begin{aligned}
&\theta(\begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ f_1 & t_1 \end{bmatrix}) \theta(\begin{bmatrix} s_2 & 0 \\ f_2 & t_2 \end{bmatrix}) \\
&= \theta' \begin{bmatrix} s_1 s_2 & 0 \\ 0 & t_1 t_2 \end{bmatrix} + \sum_j \lambda_{s_2,q_j} \lambda_{f_1(y_j),p_j} e_{Y_{p_j}} y_j^* f X_{q_j} + \sum_j \lambda_{t_1,p_j} \lambda_{f_2(y_j),p_j} e_{Y_{p_j}} y_j^* f X_{q_j} \\
&= \theta' \begin{bmatrix} s_1 s_2 & 0 \\ 0 & t_1 t_2 \end{bmatrix} + \sum_j [\lambda_{s_2,q_j} \lambda_{f_1(y_j),p_j} + \lambda_{t_1,p_j} \lambda_{f_2(y_j),p_j}] e_{Y_{p_j}} y_j^* f X_{q_j} \\
&= \theta \left(\begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ f_1 & t_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_2 & 0 \\ f_2 & t_2 \end{bmatrix} \right).
\end{aligned}
$$

Así que θ es un funtor.

"(2)". Que el diagrama dado es un pushout se sigue de la demostración de 1.18 pues los funtores desde A están determinados por sus imágenes sobre los morfismos

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_i^* & 0 \end{bmatrix},
$$

y dado que B es libremente generada sobre B' por los morfismos y_i^*. □

En seguida deseamos mostrar que el bocs que estamos buscando es precisamente el bocs inducido $\mathcal{A}^B = (B, {}^B V^B)$. Para ello es necesario que las categorías $R(\mathcal{A}^B)$ y $P_1(\Lambda)$ sean equivalentes, pero por 5.7 basta mostrar que $R(\mathcal{A}^B)$ y $R(\mathcal{A})$ los son.

PROPOSICION 5.12 *$R(\mathcal{A}^B)$ y $R(\mathcal{A})$ son categorías equivalentes*

DEMOSTRACION. Notemos que el funtor $\theta : A \longrightarrow B$ induce el funtor

$$\theta^* : R(\mathcal{A}^B) \longrightarrow R(\mathcal{A}),$$

que por 2.6, es fiel y pleno. Bastará mostrar que θ^* es denso.

Sea $M : A \longrightarrow modk$ una representación de $\mathcal{A}$. Definimos

$$N' : B' \longrightarrow modk$$

tomando

$$N'(X_i) = \overline{e}_i M := M(\overline{e}_i)(M(X)) \qquad \text{y} \qquad N'(Y_i) = \underline{e}_i M := M(\underline{e}_i)(M(X)),$$

como B' es mínima, por 1.24(3), N' se extiende a B'. Nótese que

$$\begin{aligned} N'(\theta X) &= N'(\bigoplus_i X_i \bigoplus \bigoplus_i Y_i) \\ &= \bigoplus_i N'(X_i) \bigoplus \bigoplus_i N'(Y_i) \\ &= \bigoplus_i M(\overline{e}_i)(M(X)) \bigoplus \bigoplus_i M(\underline{e}_i)(M(X)) \\ &= M(\sum_i \overline{e}_i + \sum_i \underline{e}_i)(M(X)) = M(X). \end{aligned}$$

Nótese además que para $a \in A' = B'(\theta(X), \theta(X))$, se tiene:

$$N'(a) = M(a) : N'(\theta(X)) \longrightarrow N'(\theta(X)).$$

Sabemos que B es libremente generada sobre B' por $y_1^*, \ldots, y_n^*$, luego existe un único funtor

$$N : B \longrightarrow modk$$

tal que extiende a N' y que

$$N(y_i^*) = N'(f_{Y_{p_i}}) M(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_i^* & 0 \end{bmatrix}) N'(e_{X_{q_i}}).$$

Consecuentemente

$$N(\theta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_i^* & 0 \end{bmatrix}) \;=\; N(e_{Y_{p_i}} y_i^* f_{X_{q_i}}) = N(e_{Y_{p_i}}) N(y_i^*) N(f_{X_{q_i}})$$

$$
\begin{aligned}
&= N'(e_{Y_{p_i}})N'(f_{Y_{p_i}})M(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_i^* & 0 \end{bmatrix})N'(e_{X_{q_i}})N'(f_{X_{q_i}}) \\
&= N'(e_{Y_{p_i}}f_{Y_{p_i}})M(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_i^* & 0 \end{bmatrix})N'(e_{X_{q_i}}f_{X'_{q_i}}) \\
&= N'(\underline{e}_{p_i})M(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_i^* & 0 \end{bmatrix})N'(\overline{e}_{q_i}) \\
&= M(\underline{e}_{p_i})M(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_i^* & 0 \end{bmatrix})M(\overline{e}_{q_i}) \\
&= M(\underline{e}_{p_i}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_i^* & 0 \end{bmatrix}\overline{e}_{q_i}) = M(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_i^* & 0 \end{bmatrix}).
\end{aligned}
$$

Como los $\mathcal{A}$-módulos quedan determinados por sus imágenes en

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_i^* & 0 \end{bmatrix},$$

ésto muestra que N es una representación de $\mathcal{A}^B$ tal que $\theta^*(N) = N\theta = M$.□

Ahora sólo falta mostar que $\mathcal{A}^B$ es un bocs estratificado. Para ello usamos algunas propiedades del funtor θ' que se muestran en la siguiente proposición.

PROPOSICION 5.13 *θ' satisface las condiciones de admisibilidad (3.3) excepto (A1).*

DEMOSTRACION. "(A2)". θ' es cofinal, es decir cualquier objeto inescindible en B' es isomorfo a un sumando directo de $\theta'(X)$, para el único objeto X de A'.

Tomando el conjunto $\Gamma = inesB' = \{ X_i, Y_i \}$ definimos

$$X_{Y_i} = X_{X_i} = X \quad \text{y} \quad Y_{X_i} = X_i, \quad Y_{Y_i} = Y_i,$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, r$. Además para $Z \in inesB'$, tenemos

$$e_Z : Z \longrightarrow \theta'(X), \qquad f_Z : \theta'(X) \longrightarrow Z$$

las inclusiones y proyecciones naturales, morfismos en B' tales que para Z, Z_1, $Z_2 \in inesB'$:

"(A4)". $f_Z e_Z = 1_Z$, $f_{Z_1} e_{Z_2} = 0$ para $Z_1 \neq Z_2$;

"(A5)". $1_{\theta'(X)} = \sum_{Z \in inesB'} e_Z f_Z$;

"(A6)". Para $b \in B'(Z_1, Z_2)$, $bf_{Z_1} \otimes e_{Z_1} = f_{Z_2} \otimes e_{Z_2} b$. En efecto, si $Z_1 \neq Z_2$, entonces $B'(Z_1, Z_2) = 0$, luego $b = 0$ y claramente $bf_{Z_1} \otimes e_{Z_1} = 0 = f_{Z_2} \otimes e_{Z_2} b$.

Si $Z_1 = Z_2$, entonces $B'(Z_1, Z_2) \simeq k$ y para $b \in k$ y como $f_{Z_1} \otimes e_{Z_1} = f_{Z_2} \otimes e_{Z_2}$, entonces

$$\begin{aligned} bf_{Z_1} \otimes e_{Z_1} &= f_{Z_1} b \otimes e_{Z_1} = f_{Z_1} \otimes be_{Z_1} \\ &= f_{Z_1} \otimes e_{Z_1} b = f_{Z_2} \otimes e_{Z_2} b. \end{aligned}$$

"(A7)". Sin importar el orden en $inesB'$, se tiene que $f_{Z_1} \otimes e_{Z_2} = 0$ para $Z_1 \neq Z_2$.
Primero observemos que $f_{X_i} \overline{e}_i = f_{X_i}$, y $\overline{e}_i e_{X_i} = e_{X_i}$, $f_{Y_i} \underline{e}_i = f_{Y_i}$, $\underline{e}_i e_{Y_i} = e_{Y_i}$. Así tenemos:

$$\begin{aligned} f_{X_i} \otimes e_{X_j} &= f_{X_i} \overline{e}_i \otimes e_{X_j} = f_{X_i} \otimes \overline{e}_i e_{X_j} = 0 \\ f_{X_i} \otimes e_{Y_j} &= f_{X_i} \overline{e}_i \otimes e_{Y_j} = f_{X_i} \otimes \overline{e}_i e_{Y_j} = 0 \\ f_{Y_i} \otimes e_{X_j} &= f_{Y_i} \underline{e}_i \otimes e_{X_j} = f_{Y_i} \otimes \underline{e}_i e_{X_j} = 0 \\ f_{Y_i} \otimes e_{Y_j} &= f_{Y_i} \underline{e}_i \otimes e_{Y_j} = f_{Y_i} \otimes \underline{e}_i e_{Y_j} = 0. \end{aligned}$$

"(A3)". $J' = ker(B' \bigotimes_{A'} B' \longrightarrow B')$ es B'-B' bimódulo libre. De hecho mostraremos que $J' = 0$. Observemos que $B' \bigotimes_{A'} B'$ está generado por el elemento $1_{\theta'(X)} \otimes 1_{\theta'(X)}$. Además

$$\begin{aligned} 1_{\theta'(X)} \otimes 1_{\theta'(X)} &= \sum_{Z \in inesB'} e_z f_Z \otimes \sum_{Y \in inesB'} e_Y f_Y \\ &= \sum_Z \sum_Y e_Z f_Z \otimes e_Y f_Y \\ &= \sum_Z e_Z f_Z \otimes e_Z f_Z, \end{aligned}$$

por lo que $B' \bigotimes_{A'} B'$ está generado por los elementos $f_Z \otimes e_Z$, con $Z \in inesB'$. De aquí que para $x \in J'(Y, Y')$:

$$x = \sum_Z c_Z f_Z \otimes e_Z b_Z$$

y por consiguiente $\sum_Z c_Z b_Z = 0$. Si para cada Z, $b_Z : Y \longrightarrow Z$, y suponiendo que $Y = \bigoplus_{\nu \in inesB'} Y_\nu$, tomamos $\imath_\nu$, p_ν las correspondientes inclusiones y proyecciones, así $1_Y = \sum_\nu \imath_\nu p_\nu$, de aquí que

$$c_Z(f_Z \otimes e_Z) b_Z = c_Z(f_Z \otimes e_Z) b_Z \sum_\nu \imath_\nu p_\nu$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\nu} c_Z(f_Z \otimes e_Z b_Z \imath_\nu) p_\nu \\
&= \sum_{\nu} c_Z(b_Z \imath_\nu f_\nu \otimes e_\nu) p_\nu \\
&= c_Z b_Z \sum_{\nu} \imath_\nu f_\nu \otimes e_\nu p_\nu .
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\begin{aligned}
x &= \sum_{Z} c_Z f_Z \otimes e_Z b_z = \sum_{Z} (c_Z b_Z \sum_{\nu} \imath_\nu f_\nu \otimes e_\nu p_\nu) \\
&= (\sum_{Z} c_Z b_Z) \sum_{\nu} \imath_\nu f_\nu \otimes e_\nu p_\nu = 0.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $J' = 0$.□

La estratificación de $\mathcal{A}^B$ la construimos en los siguientes lemas. Empecemos por el group-like.

LEMA 5.14 *$\mathcal{A}^B = (B, {}^B V^B)$ tiene un group like*

$$\omega_B : B' \longrightarrow {}^B V^B$$

tal que para $g \in B'(Z, Z')$, $Z = \bigoplus_l Z_l$, con $Z_l \in \{ X_i, Y_i \}$, y $\varrho_l : Z_l \longrightarrow Z$ y $\vartheta_l : Z \longrightarrow Z_l$ son la inclusiones y proyecciones canónicas, respectivamente, entonces

$$\omega_B(g) = \sum_{l} g \varrho_l f_{Z_l} \otimes_X \omega(1_X) \otimes_X e_{Z_l} \vartheta_l .$$

DEMOSTRACION. Como en la demostración de 3.5 se puede construir el morfismo de B'-bimódulos:

$$\sigma : B' \longrightarrow B' \bigotimes_{A'} B',$$

tal que $\sigma(1_Z) = f_Z \otimes e_Z$, para todo objeto inescindible Z de B'. También se tiene el morfismo de B'-bimódulos:

$$\tau : B' \bigotimes_{A'} B' \longrightarrow {}^B V^B,$$

tal que $\tau(g \otimes_X h) = g \otimes_X \omega(1_X) \otimes h$. Evidentemente se tiene $\omega_B = \tau\sigma$. □

LEMA 5.15 *La counidad inducida $\varepsilon_B : {}^BV^B \longrightarrow B$ determinada en generadores por $\varepsilon_B(h \otimes v \otimes g) = h\theta(\varepsilon(v))g$, es tal que*

$$ker(\varepsilon_B) = \overline{{}^BV^B} \cong B \bigotimes_{A'} \begin{bmatrix} J^* & 0 \\ 0 & J^* \end{bmatrix} \bigotimes_{A'} B,$$

es un B-bimódulo libre generado por

$$f_{X_{p_i}} \otimes_X \begin{bmatrix} y_i^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X e_{X_{q_i}} \quad y \quad f_{X_{Y_i}} \otimes_X \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_i^* \end{bmatrix} \otimes_X e_{Y_{q_i}}$$

para $i = i, \ldots, r$.

<u>DEMOSTRACION</u>. Como en la demostración de 3.5 se tiene que

$$\overline{{}^BV^B} \cong {}^B\overline{V}^B \bigoplus {}^BJ'^B = {}^B\overline{V}^B,$$

pues $J' = 0$, como se vió en 5.13. Pero por 5.9(2) nótese que:

$$\begin{aligned} {}^B\overline{V}^B &= B \bigotimes_A A \bigotimes_{A'} \begin{bmatrix} J^* & 0 \\ 0 & J^* \end{bmatrix} \bigotimes_{A'} A \bigotimes_A B \\ &\cong B \bigotimes_{A'} \begin{bmatrix} J^* & 0 \\ 0 & J^* \end{bmatrix} \bigotimes_{A'} B \\ &\cong (B \bigotimes_{A'} \begin{bmatrix} J^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bigotimes_{A'} B) \bigoplus (B \bigotimes_{A'} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J^* \end{bmatrix} \bigotimes_{A'} B). \end{aligned}$$

Es suficiente ver que estos dos últimos sumandos directos son B-bimódulos libres generados por

$$\{ f_{X_{p_i}} \otimes_X \begin{bmatrix} y_i^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X e_{X_{q_i}} \mid i = 1, \ldots, r \}$$

y

$$\{ f_{X_{Y_i}} \otimes_X \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_i^* \end{bmatrix} \otimes_X e_{Y_{q_i}} \mid i = 1, \ldots, r \},$$

respectivamente. Hacemos la demostración para el primero de los bimódulos y análogamente se tiene para el otro.

Sea W un B-bimódulo y $w_i \in W(X_{q_i}, X_{p_i})$, para toda i. Deseamos mostrar la existencia de un morfismo único de B-bimódulos

$$\phi : B \bigotimes_{A'} \begin{bmatrix} J^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bigotimes_{A'} B \longrightarrow W$$

tal que

$$\phi(fx_{p_i} \otimes_X \begin{bmatrix} y_i^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X ex_{q_i}) = w_i.$$

Por la propiedad universal del producto tensorial podemos asegurar la existencia de un morfismo de B-A' bimódulos

$$\eta : B \bigotimes_{A'} \begin{bmatrix} J^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow W$$

definido por

$$\eta(b \otimes_X \begin{bmatrix} g & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) = \sum_i \lambda_{g(y_i),p_i} bex_{p_i} w_i fx_{q_i}.$$

De la misma forma se tiene, existe un morfismo de B-bimódulos

$$\phi : B \bigotimes_{A'} \begin{bmatrix} J^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bigotimes_{A'} B \longrightarrow W$$

tal que

$$\begin{aligned} \phi(b_2 \otimes_X \begin{bmatrix} g & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X b_1) &= \eta(b_2 \otimes_X \begin{bmatrix} g & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix})b_1 \\ &= \sum_i \lambda_{g(y_i),p_i} b_2 ex_{p_i} w_i fx_{q_i} b_1. \end{aligned}$$

Nótese que

$$\begin{aligned} \phi(fx_{p_i} \otimes_X \begin{bmatrix} y_i^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X ex_{q_i}) &= \eta(fx_{p_i} \otimes_X \begin{bmatrix} y_i^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix})ex_{q_i} \\ &= \sum_j \lambda_{y_i^*(y_j),p_j} fx_{p_i} ex_{p_j} w_j fx_{q_j} ex_{q_i} \\ &= w_i. \end{aligned}$$

La unicidad se sigue del hecho de que

$$b_2 \otimes_X \begin{bmatrix} g & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X b_1 = \sum_i \lambda_{g(y_i),p_i} b_2 ex_{p_i} (fx_{p_i} \otimes_X \begin{bmatrix} y_i^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X ex_{q_i}) fx_{q_i} b_1. \square$$

LEMA 5.16 *ω_B es 0-triangular.*

DEMOSTRACION. Sabemos que B es una categoría libremente generada sobre B' por los morfismos y_i^*, $i = 1, \ldots, r$. Además

$$\theta(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_i^* & 0 \end{bmatrix}) = e_{Y_{p_i}} y_i^* f_{X_{q_i}},$$

y por lo tanto

$$y_i^* = f_{Y_{p_i}} \theta(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_i^* & 0 \end{bmatrix}) e_{X_{q_i}}.$$

Luego como se vé en 3.5 tenemos

$$\begin{aligned} \delta_B(y_i^*) &= \delta_B(f_{Y_{p_i}} \theta(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_i^* & 0 \end{bmatrix}) e_{X_{q_i}}) \\ &= f_{Y_{p_i}} \otimes \delta(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_i^* & 0 \end{bmatrix}) \otimes e_{X_{q_i}}) + \sum_{\substack{Z < X_{q_i} \\ Z \in \Gamma}} f_{Y_{p_i}} \theta(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_i^* & 0 \end{bmatrix}) e_Z \tau(f_Z \otimes e_{X_{q_i}}) \\ &\quad - \sum_{\substack{Z > Y_{p_i} \\ Z \in \Gamma}} \tau(f_{Y_{p_i}} \otimes e_Z) f_Z \theta(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_i^* & 0 \end{bmatrix}) e_{X_{q_i}}. \end{aligned}$$

Pero por 5.15, se tiene que $f_{Z_1} \otimes e_{Z_2} = 0$ para $Z_1 \neq Z_2$, Z_1, $Z_2 \in \Gamma$, y por 5.9(3), se sigue:

$$\begin{aligned} \delta_B(y_i^*) &= f_{Y_{p_i}} \otimes \delta(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_i^* & 0 \end{bmatrix}) \otimes e_{X_{q_i}} \\ &= f_{Y_{p_i}} \otimes_X [\sum_{i,j} \lambda_{y_i^*(y_j y_i), p_i}(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_i^* & 0 \end{bmatrix} \otimes_X \begin{bmatrix} y_j^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X 1) \\ &\quad - \lambda_{y_i^*(y_i y_j), p_j}(1 \otimes_X \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_j^* \end{bmatrix} \otimes_X \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_i^* & 0 \end{bmatrix})] \otimes_X e_{X_{q_i}} \\ &= \sum_{i,j} \lambda_{y_i^*(y_j y_i), p_i} f_{Y_{p_i}} \otimes_X \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_i^* & 0 \end{bmatrix} \otimes_X \begin{bmatrix} y_j^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X 1 \otimes_X e_{X_{q_i}} \\ &\quad - \sum_{i,j} \lambda_{y_i^*(y_i y_j), p_j} f_{Y_{p_i}} \otimes_X 1 \otimes_X \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_j^* \end{bmatrix} \otimes_X \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_i^* & 0 \end{bmatrix} \otimes_X e_{X_{q_i}}. \end{aligned}$$

Usando el isomorfismo $B \bigotimes_A A \cong B$, se tiene:

$$\delta_B(y_i^*) = \sum_{i,j} \lambda_{y_i^*(y_j y_i), p_i}(f_{Y_{p_i}} \theta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_i^* & 0 \end{bmatrix}) \otimes_X \begin{bmatrix} y_j^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X e_{X_{q_i}}$$

$$-\sum_{i,j}\lambda_{y_i^*(y_iy_j),p_j}f_{Y_{p_l}}\otimes_X\begin{bmatrix}0&0\\0&y_j^*\end{bmatrix}\otimes_X(\theta\begin{bmatrix}0&0\\y_i^*&0\end{bmatrix}e_{X_{q_l}})$$

$$=\sum_{i,j}\lambda_{y_i^*(y_jy_i),p_i}f_{Y_{p_l}}e_{Y_{p_i}}y_i^*f_{X_{q_i}}\otimes_X\begin{bmatrix}y_j^*&0\\0&0\end{bmatrix}\otimes_X e_{X_{q_l}}$$

$$-\sum_{i,j}\lambda_{y_i^*(y_iy_j),p_j}f_{Y_{p_l}}\otimes_X\begin{bmatrix}0&0\\0&y_j^*\end{bmatrix}\otimes_X e_{Y_{p_i}}y_i^*f_{X_{q_i}}e_{X_{q_l}}$$

$$=\sum_{i,j}\lambda_{y_i^*(y_jy_i),p_i}f_{Y_{p_l}}e_{Y_{p_i}}y_i^*(f_{X_{q_i}}\otimes_X\begin{bmatrix}y_j^*&0\\0&0\end{bmatrix}\otimes_X e_{X_{q_l}})$$

$$-\sum_{i,j}\lambda_{y_i^*(y_iy_j),p_j}(f_{Y_{p_l}}\otimes_X\begin{bmatrix}0&0\\0&y_j^*\end{bmatrix}\otimes_X e_{Y_{p_i}})y_i^*f_{X_{q_i}}e_{X_{q_l}}).$$

Ahora ordenamos la base $\{\ y_i^*\ \}$ de la siguiente manera:

Si $y^*, z^*\in\{\ y_i^*\ \}$ y $y\in J^j-J^{j+1}$, $z\in J^i-J^{i+1}$, entonces cuando $j<i$, tomamos $y^*<z^*$.

De aquí si $y_j\in J^{n_j}-J^{n_j+1}$ con $n_j\geq 1$, $y_i\in J^{n_i}-J^{n_i+1}$ con $n_i\geq 1$, entonces $y_jy_i\in J^{n_j+n_i}$ y $y_jy_i=\sum_l\alpha_{ijl}y_l$, con $y_l\in J^{n_j+n_i}$, $\alpha_{ijl}\in k$, como además

$$\sum_u\lambda_{y_l^*(y_jy_i),u}e_u=y_j^*(y_jy_i)=\sum_t\alpha_{ijt}y_l^*(y_t)=\alpha_{ijl}e_{p_l}.$$

Pero si $\alpha_{ijl}=\lambda_{y_l^*(y_jy_i),p_l}\neq 0$ entonces $y_l\in J^{n_j+n_i}$, y consecuentemente $y_j^*<y_l^*$ y $y_i^*<y_l^*$.

Esto muestra que δ_B es 0-triangular.□

Para terminar de construir la estratificación necesitamos mostrar que ω_B es un reflector.

LEMA 5.17 *ω_B es reflector.*

<u>DEMOSTRACION</u>. Por 2.22 sólo resta mostra que δ_B es una diferencial 1-triangular izquierda. Valuemos pues esta diferencial en los generadores libres del B-bimódulo $\overline{{}_BV_B}$:

$$f_{X_{p_i}}\otimes_X\begin{bmatrix}y_i^*&0\\0&0\end{bmatrix}\otimes_X e_{X_{q_i}}\quad\text{y}\quad f_{X_{Y_i}}\otimes_X\begin{bmatrix}0&0\\0&y_i^*\end{bmatrix}\otimes_X e_{Y_{q_i}}$$

con $i=1,\dots,r$. Por 3.5 se tiene que:

$$\delta_B(f_{X_{p_l}}\otimes_X\begin{bmatrix}y_i^*&0\\0&0\end{bmatrix}\otimes_X e_{X_{q_i}})$$

$$
\begin{aligned}
&= \overline{\mu}_B(f_{X_{p_l}} \otimes_X \delta(\begin{bmatrix} y_l^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) \otimes_X e_{X_{q_l}}) \\
&\qquad + \sum_{\substack{Z \neq X_{q_l} \\ Z \in ines B'}} (f_{X_{p_l}} \otimes_X \begin{bmatrix} y_l^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X e_Z) \otimes_Z (f_Z \otimes_X \omega(1_X) \otimes_X e_{X_{q_l}}) \\
&\qquad + \sum_{\substack{Z \neq X_{p_l} \\ Z \in ines B'}} (f_{X_{p_l}} \otimes_X \omega(1_X) \otimes_X e_Z) \otimes_Z (f_Z \otimes_X \begin{bmatrix} y_l^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X e_{X_{q_l}})
\end{aligned}
$$

Pero si $Z = X_i \neq X_{q_l}$, se tiene:

$$
\begin{aligned}
&(f_{X_{p_l}} \otimes_X \begin{bmatrix} y_l^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X e_{X_i}) \otimes_{X_i} (f_{X_i} \otimes_X \omega(1_X) \otimes_X e_{X_{q_l}}) \\
&= f_{X_{p_l}} \otimes_X \begin{bmatrix} y_l^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X e_{X_i} f_{X_i}) \otimes_{\theta(X)} (1_{\theta(X)} \otimes_X \omega(1_X) \otimes_X e_{X_{q_l}}) \\
&= f_{X_{p_l}} \otimes_X \begin{bmatrix} y_l^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X \theta(\overline{e}_i)) \otimes_{\theta(X)} (1_{\theta(X)} \otimes_X \omega(1_X) \otimes_X e_{X_{q_l}}) \\
&= f_{X_{p_l}} \otimes_X \begin{bmatrix} y_l^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \overline{e}_i \otimes_X 1_{\theta(X)}) \otimes_{\theta(X)} (1_{\theta(X)} \otimes_X \omega(1_X) \otimes_X e_{X_{q_l}}) = 0,
\end{aligned}
$$

pues $e_{q_l} \neq e_i$. De la misma manera se muestra que si $Z = Y_i \neq X_{q_l}$, entonces

$$
f_{X_{p_l}} \otimes_X \begin{bmatrix} y_l^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X e_{Y_i}) \otimes_{Y_i} (f_{Y_i} \otimes_X \omega(1_X) \otimes_X e_{X_{q_l}}) = 0,
$$

y análogamente para $Z \neq X_{p_l}$ se muestra que:

$$
(f_{X_{p_l}} \otimes_X \omega(1_X) \otimes_X e_Z) \otimes_Z (f_Z \otimes_X \begin{bmatrix} y_l^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X e_{X_{q_l}}) = 0.
$$

Por ésto y usando 5.9(3), se sigue que

$$
\begin{aligned}
&\delta_B(f_{X_{p_l}} \otimes_X \begin{bmatrix} y_l^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X e_{X_{q_l}}) \\
&= \overline{\mu}_B(f_{X_{p_l}} \otimes_X \delta(\begin{bmatrix} y_l^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) \otimes_X e_{X_{q_l}}) \\
&= \overline{\mu}_B(f_{X_{p_l}} \otimes_X [\sum_{i \neq l} \sum_j (\begin{bmatrix} y_i^*(y_i y_j) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X \begin{bmatrix} y_j^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X 1) \\
&\qquad \otimes_X (1 \otimes_X \begin{bmatrix} y_i^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X 1)] \otimes_X e_{X_{q_l}})
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{i\neq l}\sum_j (f_{X_{p_l}} \otimes_X \begin{bmatrix} y_l^*(y_iy_j) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X \begin{bmatrix} y_j^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X 1 \otimes_X 1_{\theta(X)})$$

$$\otimes_X (1_{\theta(X)} \otimes_X 1 \otimes_X \begin{bmatrix} y_j^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X 1 \otimes_X e_{X_{q_l}}),$$

Usando el isomorfismo $B \bigotimes_A A \cong B$, se tiene:

$$\delta_B(f_{X_{p_l}} \otimes_X \begin{bmatrix} y_l^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X e_{X_{q_l}})$$

$$= \sum_{i\neq l}\sum_j (f_{X_{p_l}}\theta(\begin{bmatrix} y_l^*(y_iy_j) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) \otimes_X \begin{bmatrix} y_j^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X 1_{\theta(X)})$$

$$\otimes_{\theta(X)} (1_{\theta(X)} \otimes_X \begin{bmatrix} y_i^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X e_{X_{q_l}})$$

$$= \sum_{i\neq l}\sum_j \lambda_{y_l^*(y_iy_j),p_j} (f_{X_{p_l}}\theta(\overline{e_j}) \otimes_X \begin{bmatrix} y_j^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X \theta(\overline{e}_{q_j}))$$

$$\otimes_{\theta(X)} (\theta(\overline{e}_{p_i}) \otimes_X \begin{bmatrix} y_i^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X e_{X_{q_l}})$$

$$= \sum_{i\neq l}\sum_j \lambda_{y_l^*(y_iy_j),p_j} f_{X_{p_l}} e_{X_{p_j}} (f_{X_{p_j}} \otimes_X \begin{bmatrix} y_j^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X e_{X_{q_j}}) f_{X_{q_j}}$$

$$\otimes_{\theta(X)} (\theta(\overline{e}_{p_i}) \otimes_X \begin{bmatrix} y_i^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X e_{X_{q_l}}).$$

Ahora ordenamos los generadores de $\overline{{}^BV^B}$ de la misma manera en que ordenamos los generadores de B, es decir que si $\lambda_{y_l^*(y_iy_j),p_l} \neq 0$, entonces:

$$f_{X_{p_j}} \otimes_X \begin{bmatrix} y_j^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X e_{X_{q_j}} < f_{X_{p_l}} \otimes_X \begin{bmatrix} y_l^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes_X e_{X_{q_l}}.$$

Una fórmula análoga se tiene para

$$\delta_B(f_{X_{Y_l}} \otimes_X \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_l^* \end{bmatrix} \otimes_X e_{Y_{q_l}}),$$

y ésto muestra que δ_B es 1-triangular izquierda.□

Terminamos este capítulo resumiendo en la siguiente proposición el resultado de nuestros lemas anteriores.

PROPOSICION 5.18 *El bocs inducido $\mathcal{A}^B = (B, {}^BV^B)$ tiene una estratificación dada por:*

$$(B'; \omega_B; \{y_i^* \mid i\}; \{f_{X_{p_i}} \otimes \overline{y_i^*} \otimes e_{X_{q_i}} \mid i\}, \{f_{Y_{p_i}} \otimes \underline{y_i^*} \otimes e_{Y_{q_i}}\}).$$

$\square$

BIBLIOGRAFIA

[A] M. Auslander. Representation Theory of Artin Algebras I. Comm. in Algebra 1 (1974), 177-268.

[A-F] F. W. Anderson, K. R. Fuller. Rings and Categories of Modules. Springer. 1973.

[CB] W. W. Crawley-Boevey. On Tame Algebras and Bocses. Proc. London Math. Soc. (3)56 (1988) 451-483.

[D] Y. A. Drozd. Tame and Wild Problems. Amer. Math. Soc. Transl. (2) Vol. 128. 1986. 31-55.

[F] S. H. Friedberg, A. J. Insel, L. E. Spence. Algebra Lineal. Publicaciones Cultural, México. 1982.

[L] T. Y. Lam. Serre's Conjeture. Lecture Notes in Mathematics 635. Springer. Berlin. 1978.

[M] A. I. Maltsev. Fundamentos de Algebra Lineal. Mir. Moscu. 1972.

[Mc] S. MacLane. Categories for the Working Mathematician. Springer. New York. 1971.

[R] A. V. Roiter. Matrix Problems and Representation of BOCS'S. Representation Theory I, Lectures Notes in Mathematics 831. Springer. Berlin. 1980.

[R-K_1] A. V. Roiter, M. M. Kleiner. Representations of Differential Graded Categories. Matrix Problems. Math. Institute of the Academy of Sciencies, USSR. 1977. 5-71.

[R-K_2] A. V. Roiter, M. M. Kleiner. Representations of Differential Graded Categories. Lectures Notes in Mathematics 488, 1975, 316-339.

[S] L. Salmerón C. Métodos Categóricos en Problemas Matriciales. Tesis de Maestría. UNAM. 1980.