UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA

"DECISIONES OPTIMAS DE CONSUMO E INVERSION EN TIEMPO CONTINUO"

TESIS DE POSGRADO

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN INVESTIGACION DE OPERACIONES

PRESENTA:

FERNANDO CRUZ ARANDA

CIUDAD UNIVERSITARIA, D.F. 1993

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA

RECIBI COPIA DE: ( ) TRABAJO ESCRITO

(XXXX) TESIS

DESARROLLADO POR EL ALUMNO: FERNANDO CRUZ ARANDA

PARA PRESENTAR EXAMEN:

( ) DE ESPECIALIZACION

(XX) DE GRADO

EN INGENIERIA: INVESTIGACION DE OPERACIONES

		FIRMA	FECHA
PRESIDENTE:	DR. MIGUEL ANGEL GUTIERREZ ANDRADE	Miguel Angel	17/jun/93
VOCAL:	DR. FRANCISCO VENEGAS MARTINEZ		17/Junio/1993
SECRETARIO:	DR. SERGIO FUENTES MAYA		Jun/1993
SUPLENTE:	M EN I. GILBERTO PEREZ LECHUGA		21/Junio/93
SUPLENTE:	M EN I. IDALIA FLORES DE LA MOTA		21-Junio-93

APROBACION DEL TRABAJO O DE TESIS POR EL DEPARTAMENTO DE SISTEMAS

PROMEDIO EN CREDITOS 12 (DOCE)

MCC'mmn

INDICE

RESUMEN

En este trabajo se estudian diferentes modelos económicos de optimización en tiempo continuo, es decir, modelos de la asignación de recursos escasos a diferentes fines en un cierto intervalo de tiempo.

Los modelos surgen del área económica y financiera. Al principio se plantean modelos deterministas, donde la restricción es usualmente una ecuación diferencial determinista. Después se plantean modelos estocásticos, en este caso la funcional objetivo es una esperanza matemática y está sujeta a una ecuación deferencial estocástica.

Se estudian las técnicas de solución. Primero se presentan las técnicas de solución de problemas deterministas: Cálculo de Variaciones y Control Optimo. Mientras que para problemas estocásticos, se presenta la técnica Control Optimo Estocástico.

Para profundizar más en las técnicas de solución se estudian las ecuaciones de Bellman-Euler-Lagrange, la Condición de Legendre, la Condición de Weierstrass y las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman.

Con las técnicas desarrolladas se resuelve cada uno de los modelos y se da una interpretación a la solución.

Al final se tiene un conjunto de conclusiones, recomendaciones, limitaciones y ventajas de los modelos y las técnicas.

INTRODUCCION

El problema básico en la economía es la asignación de recursos escasos a diferentes fines. Muchos de estos problemas pueden resolverse a través de la optimización matemática.

En el caso estático, todo análisis se efectua para un punto en el tiempo. En el caso dinámico se desea asignar recursos escasos a diferentes fines sobre un intervalo de tiempo. En términos matemáticos el problema consiste en determinar trayectorias de ciertas variables que maximizan o minimizan una funcional expresada en forma de integral.

El objetivo de este trabajo consiste en estudiar problemas de optimización dinámica. En el capítulo II se plantean modelos deterministas. El primer modelo es *el modelo neoclásico de crecimiento económico óptimo*, donde un individuo llamado planificador central desea maximizar el bienestar de todos los agentes económicos, y tiene la facultad de decidir sobre las trayectorias de consumo (variable de control) e inversión de la economía; aquí la fuerza de trabajo crece exponencialmente a una tasa dada.

En el *modelo neoclásico de demanda por inversión* se desarrolla en un enfoque micro y el objetivo es determinar los niveles de producción, trabajo y capital, que maximicen los beneficios netos de la empresa; se presentan dos extensiones: *el modelo dinámico agregado de Tobin, y la inclusión de costos de ajuste rápido del stock de capital.*

Se estudia también el *modelo neoclásico de consumo-inversión*, en el cual una economía doméstica desea determinar las trayectorias de consumo (variable de control) y capital (variable de estado) que maximizan su bienestar. En una extensión de éste se tiene la posibilidad de que el individuo deje una herencia a descendientes.

En muchas economías surge la necesidad de obtener créditos externos para inversión y consumo para un horizonte finito, y se desea saber las proporciones de crédito que se consumen e inverten de tal manera, que se maximice el bienestar. Esta situación se estudia en el *modelo de asignación de créditos externos.* En este problema se requiere alcanzar un cierto nivel de capital final.

Dentro de una economía hay productos que sólo los ofrece una empresa, es decir, existe un monopolio, el cual desea encontrar las trayectorias del precio y del número de unidades producidas que maximizan los beneficios de la empresa para un horizonte finito. A este respecto, se estudia el *modelo de maximización de beneficios del monopolio.*

Un aspecto importante de las economías abiertas es la exportación e importación de bienes. Se estudia un modelo en el que un individuo representativo desea determinar las cantidades de consumo de un bien de exportación y un bien de importación, de tal forma que su función de utilidad sea máxima.

También, bajo el enfoque Bayesiano, se presenta el proceso de aprendizaje de un individuo sobre su función de utilidad. El modelo describe el comportamiento racional de los individuos cuando estos incorporan información adicional en su función de utilidad. Los individuos aprenden de su función de utilidad, a través de la experiencia; en este marco, se desarrolla un *modelo de análisis de cuenta corriente y tipo de cambio real*, en el que se analiza el impacto que sobre la cuenta corriente y el tipo de cambio real tiene una política de estabilización basada en una disminución temporal de la tasa de devaluación. Aquí, el individuo está incierto sobre los valores de los parámetros de su función de utilidad, y minimiza entropía cruzada para incorporar aprendizaje en su función de utilidad.

En el capítulo III se plantean modelos estocásticos. El primer modelo de este capítulo es una extensión del modelo *neoclásico de crecimiento económico optimo* de tal manera que las variaciones del tamaño de la fuerza de trabajo se rigen por una ecuación diferencial estocástica. En el segundo modelo los individuos desean optimizar su cartera de inversión (portafolio) y saber las trayectorias de consumo y riqueza que maximizan su bienestar, se plantea un *modelo de selección óptima de portafolio bajo incertidumbre*; aquí los rendimientos de la cartera de inversión son modelados a través de una ecuación diferencial estocástica.

En el capítulo IV se presentan las técnicas de solución: Cálculo de Variaciones, Control Optimo y Control Optimo Estocástico.

En el capítulo V se profundiza más en las técnicas de solución. Se estudian las ecuaciones de Bellman-Euler-Lagrange, la Condición de Legendre, la Condición de Weierstrass y las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman.

En los capítulos VI y VII se presenta la solución e interpretación de cada uno de los modelos.

En el capítulo VIII se presenta un conjunto de conclusiones.

I. ANTECEDENTES

La economía no es una disciplina claramente definida. Sus fronteras están cambiando constantemente, y su definición está frecuentemente sujeta a controversias. Para nuestro estudio, en la economía se estudia como los agentes económicos, es decir, individuos o grupos de individuos (consumidores, empresarios, gobierno) buscan la maximización de su bienestar a través de la producción, consumo y la distribución de bienes, así como encontrar la mejor alternativa en la distribución de recursos escasos.

La teoría económica trata del estudio de modelos que describen el comportamiento de los agentes económicos, asimismo está interesada en la interacción entre ellos, y se divide en teoría micro y macro. En el enfoque micro se estudia el comportamiento de las unidades económicas individuales, tales como las economías domésticas y las empresas, o la determinación de los precios en mercados aislados, o los efectos del monopolio sobre mercados específicos. La teoría macro estudia el comportamiento de la economía como un todo: de las etapas de expansión y recesión; de la produccion total de bienes y servicios de la economía; y su crecimiento de la tasa de inflación y desempleo; de la balanza de pagos* y de los tipos de cambio. Esta se centra en el estudio de las políticas económicas y de las variables políticas como son: la política fiscal** y la política monetaria*** ; la cantidad de dinero y las tasas de interés; la deuda pública y el presupuesto del gobierno. También constituye un reto el reducir los complicados detalles de la economía a sus elementos fundamentales. Estos elementos radican en las interacciones existentes entre los mercados de bienes, de trabajo y de activos de la economía.

Dos de las grandes enfoques en la economía son el neoclásico y el keynesiano. En los modelos neoclásicos el empleo de todos está garantizado, la política fiscal y monetaria no tienen efecto en la producción ni en el empleo. Mientras que en el keynesiano, el empleo

---

* La "balanza de pagos " es el registro de las transacciones de la economía con el resto del mundo. En ella hay dos cuentas principales: la cuenta corriente y la cuenta de capital. La cuenta corriente registra el comercio de bienes y servicios así como los pagos de transferencia. Los servicios incluyen fletes, pagos por patentes y por intereses. Los pagos de transferencia consisten en remesas, donaciones y subvenciones. Si las exportaciones exceden de las importaciones, más las transferencias netas al extranjero, es decir, si los ingresos derivados del comercio de bienes y servicios y de las transferencias superan los pagos por dichos conceptos, se dice que existe un superávit en cuenta corriente.

La cuenta de capital contabiliza las compras y ventas de activos tales como acciones, bonos, tierra, etc.

Estrechamente relacionadas con la cuenta corriente están algunas subcuentas que mencionamos para completar la descripción. La balanza comercial contabiliza simplemente el comercio de bienes y, si le añadimos el comercio de servicios, obtenemos la balanza de bienes y servicios. Finalmenta añadiendo las transferencias netas obtenemos la balanza en cuenta corriente.

** La política fiscal es la política del gobierno, en relación con los niveles de gasto público, y transferencias, y con la estructura de los impuestos.

*** La política monetaria es la política de los bancos centrales en relación con incrementos o decrementos en la cantidad real de dinero, sobre las tasa de interés y el nivel de ingreso.

de todos no está garantizado automáticamente y la cantidad de empleo y producción, se determina por política monetaria y fiscal.

Entonces, el problema de economizar puede ser abordado a través del problema de optimización matemática, definido como la selección de valores de ciertas variables así como maximizar una función sujeta a restricciones. Las variables del problema económico sintetizan la selección de alguna trayectoria en particular, la función objetivo sintetiza los deseos del agente económico, y las restricciones sintetizan la escasez de recursos. Por lo tanto, matemáticamente, el problema de economizar es el de seleccionar trayectorias del conjunto de oportunidades tal que maximicen la función objetivo. El presentar modelos matemáticos tienen sus ventajas tales como: el lenguaje usado es más conciso y preciso; existe una riqueza extraordinaria de teoremas matemáticos a nuestro servicio; nos forza a establecer explicitamente todas nuestras suposiciones como un prerrequisito al uso de teoremas matemáticos, y nos permite tratar el caso general de n variables.

II. MODELOS DETERMINISTAS

En este capítulo se formulan nueve modelos deterministas de la micro y macroeconomía, donde cada uno cuenta con una pequeña introducción, después se presentan los supuestos, la definición de variables y parámetros, la descripción del modelo y al final el planteamiento del problema a resolver. Las variables y parámetros que no se definen explícitamente en un modelo tienen el mismo significado que en los modelos anteriores.

II.1 MODELO NEOCLASICO DE CRECIMIENTO ECONOMICO OPTIMO

En cualquier economía se toman decisiones entre consumir en el presente y acumular capital para aumentar las posibilidades de consumo en el futuro. En un extremo se tiene el caso de consumir hoy todo cuanto se pueda, que mañana moriremos; y en el otro, se consume tan poco como se pueda para que el capital aumente y con él, el consumo futuro.

En el siguiente modelo se busca determinar las trayectorias de consumo (variable de control) y capital (variable de estado) que maximizan el bienestar de una economía, cuya fuerza de trabajo crece exponencialmente a una tasa dada. Si se toman decisiones entre consumo e inversión de tal forma que el bienestar sea lo máximo posible para todos los individuos, el problema es lo que se conoce como *modelo neoclásico de crecimiento económico óptimo.*

II.1.1 SUPUESTOS SOBRE EL MODELO

El modelo toma en cuenta los siguientes supuestos:

(*i*) la economía es agregada, es decir, se produce y se consume un sólo bien,

(*ii*) la economía es cerrada, o sea que, no es posible exportar ni importar bienes,

(*iii*) la tecnología de producción requiere dos insumos o factores de la producción: capital y trabajo,

(*iv*) la función de producción presenta rendimientos constantes de escala,

(*v*) la oferta de trabajo es perfectamente inelástica, es decir, las individuos están dispuestos a trabajar con cualquier salario,

(*vi*) la fuerza laboral crece en forma exponencial,

(*vii*) el capital se deprecia a una tasa constante,

(*viii*) toda la producción se destina a consumo o inversión,

(*ix*) existe un individuo que es llamado planificador central, el cual desea maximizar el bienestar de todos los agentes, y tiene la facultad de decidir sobre las trayectorias de consumo y de inversión de la economía,

(x) la tasa subjetiva intertemporal de descuento es constante,
(xi) todos los individuos participan con su trabajo en la economía.

II.1.2 DEFINICION DE VARIABLES

A continuación se enlistan las variables que definen el modelo:
(i) $Y(t)$, producción al tiempo t,
(ii) $K(t)$, capital al tiempo t,
(iii) $C(t)$, consumo al tiempo t,
(iv) $I(t)$, inversión al tiempo t,
(v) $L(t)$, trabajo al tiempo t,
(vi) $y(t)$, producción per cápita al tiempo t,
(vii) $k(t)$, capital per cápita al tiempo t,
($viii$) $c(t)$, consumo per cápita al tiempo t,
(ix) $i(t)$, inversión per cápita al tiempo t,

II.1.3 DEFINICION DE PARAMETROS

Los parámetros que se usan en el modelo son:
(i) μ, tasa de depreciación de capital,
(ii) n, tasa de crecimiento de la fuerza laboral,
(iii) ρ, tasa subjetiva intertemporal de descuento,
(iv) r, tasa de interés.

II.1.4 EL MODELO

El modelo neoclásico de crecimiento caracteriza el crecimiento económico en una economía cerrada. Se supone que toda la producción se distribuye entre consumo $C(t)$ e inversión $I(t)$, es decir,

$$Y(t) = C(t) + I(t).$$

La inversión $I(t)$ se usa para remplazar capital depreciado $\mu K(t)$, y para acumular capital $\dot{K}(t) = dK(t)/dt$, es decir

$$I(t) = \dot{K}(t) + \mu K(t).$$

Se supone que la producción se realiza en cada instante t, combinando la fuerza de trabajo $L(t)$ y el capital $K(t)$, disponibles al tiempo t, de forma tal que la producción en ese instante sea máxima. Entonces, la producción $Y(t)$ correspondiente a cualquier combinación de los factores $K(t)$ y $L(t)$ está dada por una función $F(K(t), L(t))$, de tal forma que

$$Y(t) = F(K(t), L(t)).$$

Se supone que la función de producción es invariante en el tiempo (es decir, no hay cambios tecnológicos). Se supone también que F es dos veces diferenciable para todos los insumos y con productos marginales positivos, pero decrecientes (o sea que, por cada unidad de insumo (trabajo, capital) se tiene un incremento en la producción, y conforme se aumentan los insumos la producción siempre se incrementa, pero cada vez menos)

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0,$$

Supóngase que:

$$\lim_{K\to 0} \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = \infty, \quad \text{para } L \text{ fija;} \quad \lim_{K\to\infty} \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = 0, \quad \text{para } L \text{ fija;}$$

$$\lim_{L\to 0} \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = \infty, \quad \text{para K fija;} \quad \lim_{L\to\infty} \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = 0, \quad \text{para } K \text{ fija;}$$

con lo cual los productos marginales en ambos casos empiezan en el infinito y decrecen hasta cero y las isocuantas no se intersectan con los ejes. Además, se supone que la función de producción es homogénea de grado uno (no hay economías de escala); es decir,

$$F(\nu K, \nu L) = \nu F(K, L), \qquad \text{para todo } \nu.$$

En particular, tomando $\nu = 1/L$, se tiene

$$\frac{Y}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = f\left(\frac{K}{L}\right),$$

donde $f(K/L)$ es la función de la producción per cápita.

Las variables y ecuaciones introducidas se pueden reescribir en términos per cápita, de forma tal que las nuevas variables son $k(t) = K(t)/L(t)$, $y(t) = Y(t)/L(t)$, $c(t) = C(t)/L(t)$, $i(t) = I(t)/L(t)$, y la producción per cápita en el tiempo t está dada por

$$y(t) = f(k(t)), \tag{II.1.1}$$

la cual se distribuye entre consumo per cápita e inversión per cápita,

$$y(t) = c(t) + i(t), \tag{II.1.2}$$

donde la inversión per cápita $i(t)$ se distribuye entre depreciación de capital per cápita $k(t)$ por una tasa dada μ, y la razón entre la tasa de cambio de capital y el trabajo $\dot{K}(t)/L(t)$

$$i(t) = \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} + \mu k(t). \tag{II.1.3}$$

La tasa de cambio de capital per cápita es

$$\dot{k}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right) = \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} - \frac{K(t)}{L(t)}\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} - k(t)\frac{\dot{L}(t)}{L(t)}. \qquad (II.1.4)$$

De las ecuaciones (II.1.3) y (II.1.4) se obtiene

$$i(t) = \dot{k}(t) + \left(\mu + \frac{\dot{L}(t)}{L(t)}\right)k(t).$$

Pero como $\dot{L}(t)/L(t)$ es el crecimiento de la fuerza laboral y es igual a n, entonces

$$i(t) = \dot{k}(t) + (\mu + n)k(t) = \dot{k}(t) + \lambda k(t), \qquad (II.1.5)$$

λ se define como la suma de la tasa de depreciación del capital μ y de la tasa de crecimiento de la población n,

$$\lambda = \mu + n,$$

por tanto, es también una constante positiva. De las ecuaciones (II.1.1), (II.1.2) y (II.1.5) se puede formar la *ecuación diferencial fundamental de crecimiento económico neoclásico*,

$$f(k(t)) = c(t) + \lambda k(t) + \dot{k}(t), \qquad (II.1.6)$$

la que indica que la producción per cápita está distribuida entre consumo per cápita $c(t)$, mantenimiento del capital per cápita $\lambda k(t)$ e incremento neto en el nivel de capital per cápita $\dot{k}(t)$.

El estado inicial de capital per cápita está dado por

$$k(t_0) = k_0. \qquad (II.1.7)$$

El objetivo del planificador central es maximizar una función de utilidad, la cual depende del consumo

$$U = U(c(t)).$$

Se supone que la función de utilidad es dos veces diferenciable, con utilidades marginales positivas pero decrecientes para todos los niveles de consumo per cápita (por cada unidad de consumo se tiene una utilidad positiva, y conforme se sigue consumiendo la utilidad, sigue siendo positiva, pero cada vez más pequeña)

$$\frac{dU(c)}{dc} = U'(c) > 0, \quad \frac{d^2U(c)}{dc^2} = U''(c) < 0, \quad \forall\ c, \quad 0 < c < \infty,$$

además la función de utilidad $U(c)$ es estrictamente cóncava y monótona creciente. Se supone también que la función de utilidad satisface las condiciones del límite

$$\lim_{c\to 0} U'(c) = \infty, \quad \lim_{c\to\infty} U'(c) = 0,$$

tal que el producto marginal empieza en el infinito y decrece hasta cero, y tal que las curvas de indiferencia no se intersectan con los ejes.

Dada una tasa subjetiva intertemporal de descuento ρ, y un factor de descuento exponencial, la utilidad del consumo per cápita $c(t)$ en el tiempo t es $e^{-\rho(t-t_0)}U(c(t))$.

Entonces, en el intervalo t_0 hasta t_1, el bienestar está dado por

$$W = \int_{t_0}^{t_1} e^{-\rho(t-t_0)}U(c(t))dt. \qquad (II.1.8)$$

El planificador central trata de maximizar W, buscando la trayectoria óptima de consumo $c(t)$ en el intervalo $t_0 \leq t \leq \infty$, donde sólo los siguientes valores para $c(t)$ son viables:

$$0 \leq c(t) \leq f(k(t)), \quad \forall\, t, \quad t_0 \leq t \leq \infty. \qquad (II.1.9)$$

El problema de *crecimiento económico óptimo neoclásico* para una economía agregada y cerrada con un horizonte de planeación infinito, consiste en encontrar la trayectoria de consumo per cápita $c(t)$, tal que se resuelva:

$$\begin{cases} \text{Maximizar} \displaystyle\int_{t_0}^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)}U(c(t))dt, \\ \quad \text{sujeto a } \dot{k}(t) = f(k(t)) - \lambda k(t) - c(t), \\ \qquad k(t_0) = k_0, \\ \qquad 0 \leq c(t) \leq f(k(t)), \\ \qquad c(t), \quad \text{continua por pedazos.} \end{cases}$$

II.1.5 PLANTEAMIENTOS EQUIVALENTES DEL PROBLEMA

Los siguientes dos planteamientos son equivalentes:

$$\begin{cases} \text{Maximizar} \displaystyle\int_{t_0}^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)}U(c(t))dt, \\ \quad \text{sujeto a } \dot{k}(t) = f(k(t)) - \lambda k(t) - c(t), \\ \qquad k(t_0) = k_0, \\ \qquad 0 \leq c(t) \leq f(k(t)), \\ \qquad c(t), \quad \text{continua por pedazos.} \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\text{Maximizar} \quad \displaystyle\int_{t_0}^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)} U(f(k(t)) - \lambda k(t) - \dot{k}(t))dt, \\
\quad \text{sujeto a} \quad k(t_0) = k_0, \\
\qquad\qquad 0 \le c(t) \le f(k(t)), \\
\qquad\qquad c(t), \quad \text{continua por pedazos.}
\end{cases}
$$

En el siguiente planteamiento se tiene la modificación, de que la economía tiene acceso a un mercado de crédito; es decir, se pueden prestar o pedir prestado bienes a una tasa de interés r.

$$
\begin{cases}
\text{Maximizar} \quad \displaystyle\int_{t_0}^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)} U(c(t))dt, \\
\quad \text{sujeto a} \quad \displaystyle\int_{t_0}^{\infty} e^{-r(t-t_0)}(f(k(t)) - \dot{k}(t) - \lambda k(t))dt = \int_{t_0}^{\infty} e^{-r(t-t_0)} c(t)dt, \\
\qquad\qquad k(t_0) = k_0, \\
\qquad\qquad c(t), \quad \text{continua por pedazos.}
\end{cases}
$$

Para el planteamiento anterior se hace una formulación diferente mediante la condición "No Ponzi Game". Con esta condición se elimina la posibilidad de que el individuo se endeude indefinidamente, pagando intereses con más deuda.

La ecuación diferencial fundamental de crecimiento económico traido a valor presente está dado por

$$
\int_{t_0}^{\infty} e^{-r(t-t_0)}(\dot{k}(t) + \lambda k(t))dt = \int_{t_0}^{\infty} e^{-r(t-t_0)}(f(k(t)) - c(t))dt. \qquad (II.1.10)
$$

Tomando la expresión del lado izquierdo de la ecuación anterior, sumando y restando $\int_{t_0}^{\infty} e^{-r(t-t_0)} rk(t)$, se tiene:

$$
\int_{t_0}^{\infty} e^{-r(t-t_0)}(\dot{k}(t) + \lambda k(t))dt = \int_{t_0}^{\infty} e^{-r(t-t_0)}(\dot{k}(t) - rk(t))dt \\
+ \int_{t_0}^{\infty} e^{-r(t-t_0)}(\lambda k(t) + rk(t))dt,
$$

e integrando $e^{-r(t-t_0)}rk(t)dt$ por partes

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{\infty} e^{-r(t-t_0)}(\dot{k}(t) - rk(t))dt &= \int_{t_0}^{\infty} e^{-r(t-t_0)}\dot{k}(t)dt \\
&\quad + e^{-r(t-t_0)}k(t)\Big|_{t_0}^{\infty} - \int_{t_0}^{\infty} e^{-r(t-t_0)}\dot{k}(t)dt \\
&= \lim_{t\to\infty} k(t)e^{-r(t-t_0)} - k(0),
\end{aligned}
$$

que junto con la condición "No Ponzi Game"

$$
\lim_{t\to\infty} k(t)e^{-r(t-t_0)} = 0,
$$

lleva a

$$
\int_{t_0}^{\infty} e^{-r(t-t_0)}\dot{k}(t)dt = -k(t_0) + \int_{t_0}^{\infty} e^{-r(t-t_0)}rk(t))dt.
$$

Sustituyéndolo en la ecuación (II.1.10) se obtiene la siguiente formulación del problema:

$$
\begin{cases}
\text{Maximizar} \displaystyle\int_{t_0}^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)}U(c(t))dt, \\
\quad \text{sujeto a } k_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{\infty} e^{-r(t-t_0)}(f(k(t)) - \lambda k(t) - rk(t))dt = \int_{t_0}^{\infty} e^{-r(t-t_0)}c(t)dt, \\
\qquad\qquad \displaystyle\lim_{t\to\infty} k(t)e^{-r(t-t_0)} = 0, \\
\qquad\qquad c(t), \quad \text{continua por pedazos.}
\end{cases}
$$

II.2 EL MODELO NEOCLASICO DE LA DEMANDA POR INVERSION

A diferencia del modelo anterior, el siguiente a desarrollar es un modelo microeconómico. En éste se considera una empresa cuya racionalidad es determinar los niveles de producción, trabajo y capital que maximicen los beneficios netos.

II.2.1 SUPUESTOS SOBRE EL MODELO

Los supuestos esenciales del modelo son:

(*i*) un sólo bien,
(*ii*) no existe un mercado de capital,
(*iii*) la función de producción presenta rendimientos constantes de escala,
(*iv*) la tecnología de producción requiere dos insumos o factores de producción: capital y trabajo,
(*v*) en cualquier momento la cantidad de capital es predeterminada,
(*vi*) la empresa puede contratar cualquier cantidad de mano de obra en cada instante t,
(*vii*) el precio del bien y de los insumos están dados, es decir, la empresa es precio aceptante (mercados competitivos).

II.2.2 DEFINICION DE VARIABLES

Las variables a utilizar en el desarrollo del modelo son:

(*i*) $K(t)$, stock de capital al tiempo t,
(*ii*) $L(t)$, número de empleados de la empresa al tiempo t.

II.2.3 EL MODELO

El nivel de producción de la empresa está representada por la siguiente expresión

$$Y(t) = F(K(t), L(t)),$$

donde la función de producción se caracteriza por productos marginales del capital y del trabajo, éstos son positivos pero decrecientes, es decir

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial F}{\partial L} > 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0.$$

Además, la dependencia directa del producto marginal del capital (empleo) respecto del empleo (capital), satisface

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K \partial L} > 0.$$

Se supone que la función de producción es homogénea de grado uno, es decir

$$F(\nu K, \nu L) = \nu F(K, L), \quad \nu > 0.$$

Del teorema de Euler, se tiene

$$Y = \frac{\partial F}{\partial K}(K, L)K + \frac{\partial F}{\partial L}(K, L)L.$$

Además, de la homogeneidad de F, se cumple que

$$\frac{\partial}{\partial K} F(K, N) = \frac{\partial^2 F}{\partial \nu \partial K}(\nu K, \nu L).$$

Considere ahora $\nu = 1/L$, entonces

$$\frac{\partial}{\partial K} F(K, L) = \frac{\partial F}{\partial (K/L)}\left(\frac{K}{L}, 1\right),$$

es decir, el producto marginal de capital depende sólo de la relación capital-trabajo y el producto marginal del trabajo depende sólo de la relación capital-trabajo. Por otro lado, la empresa tiene un costo de oportunidad dado por $r - \pi$, donde r es la tasa de interés (tasa nominal) de algún instrumento financiero de renta fija, el cual no adquirirá por utilizar su capital en la empresa y, π la tasa de inflación. Además, suponemos que el capital se deprecia a una tasa δ. Los ingresos de la empresa son $pF(K(t), L(t))$, el pago de salarios es $w(t)L(t)$ y $(r + \delta - \pi)pK$ es el costo de capital. La empresa desea maximizar el valor presente de los beneficios, por lo cual su problema a resolver es

$$\text{Maximizar} \quad \int_0^\infty e^{-rt}[pF(K(t), L(t)) - w(t)L(t) - (r + \delta - \pi)pK(t)]dt.$$

II.2.4 UNA EXTENSION DEL PROBLEMA ANTERIOR

El siguiente modelo se conoce como *Modelo Dinámico Agregado de Tobin*. El modelo es dinámico y de tipo agregado, en él se estudian las trayectorias temporales de las variables endógenas, asociadas con posibles trayectorias temporales de las variables exógenas, con el propósito de describir el nivel de producción de una empresa y los usos a que esta producción se destina. Por tanto, la empresa desea maximizar su valor presente del flujo de beneficios netos. Se supone la existencia de un mercado perfecto, en el que las empresas intercambian cantidades del stock de capital existente. Los individuos pueden comprar instrumentos financieros del Mercado de Valores (acciones) cuyos intereses pueden ser usados en los flujos de efectivo de la empresa con el fin de determinar el valor de sus acciones.

II.2.5 SUPUESTOS SOBRE LA EXTENSION

Los supuestos (i), (iv), (vii) citados en el modelo anterior son válidos en éste, sólo se agregan los supuestos siguientes:

(i) la empresa puede comprar o vender (o alquilar) cuanto capital desee en cualquier instante,

(ii) existe un mercado perfecto de capitales, es decir la empresa puede prestar y pedir prestado bienes a una tasa de interés r,

(iii) los individuos pueden comprar instrumentos financieros, por ejemplo: bonos y acciones. Estos son considerados sustitutos perfectos, es decir sus rendimientos reales esperados son iguales.

II.2.6 EL MODELO

En el modelo, la empresa tiene la misma función de producción que en el modelo anterior, y su flujo de efectivo neto en caja al instante t, es

$$p(t)F(K(t), L(t)) - w(t)L(t) - J(t)(\dot{K}(t) + \delta K(t)),$$

donde el término $J(t)(\dot{K} + \delta K(t))$ representa el gasto que hace la empresa en bienes de capital. Esta paga $J(t)\delta K(t)$ para mantener intacto su capital y $J(t)\dot{K}$ para agregar a su stock de capital a la tasa $\dot{K}$ por unidad de tiempo. En el tiempo cero, el valor presente de la empresa es

$$V(K, L, \dot{K}, t) = \int_0^{\infty} e^{-rt}[p(t)F(K(t), L(t)) - w(t)L(t) - J(t)(\dot{K}(t) + \delta K(t)]dt. \quad (II.2.1)$$

Supóngase que el precio $J(t)$ y el salario $w(t)$ siguen trayectorias de tipo exponencial, es decir

$$p(t) = pe^{\pi t}; \quad J(t) = Je^{\pi t}; \quad w(t) = we^{\pi t};$$

donde π es la tasa de inflación. La expresión (II.2.1) se convierte en

$$V(K, L, \dot{K}, t) = \int_0^{\infty} e^{-(r-\pi)t}[pF(K(t), L(t)) - wL(t) - (\dot{K}(t) + \delta K(t))J]dt. \quad (II.2.2)$$

Por tanto, la empresa desea determinar las trayectorias trabajo y capital en el tiempo t que maximice su beneficio, por lo que su problema a resolver es:

$$\begin{cases} \text{Maximizar } V(K, L, \dot{K}, t) = \int_0^\infty e^{-(r-\pi)t}[pF(K(t), L(t)) - wL(t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - (\dot{K}(t) + \delta K(t))J]dt, \\ \text{sujeto a } K(0) = K_0, \end{cases}$$

donde K_0 está dado.

II.2.7 UNA EXTENSION DEL PROBLEMA DE TOBIN

Los supuestos anteriores son válidos en este modelo, además se supone que existen costos asociados con el ajuste rápido del stock de capital y que tales costos aumentan rápidamente con la tasa absoluta de inversión; tan rápido, que de hecho la empresa nunca intenta conseguir un salto instantáneo de su cantidad (stock) de capital. La tasa por unidad de tiempo de estos costos (medida en bienes de capital por unidad de tiempo) se describe con la función $C(\dot{K})$ que es diferenciable dos veces y cumple

$$C'(\dot{K}) \left\{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \right\} 0 \quad \text{, cuando } \dot{K} \left\{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \right\} 0, \quad C''(\dot{K}) > 0, \quad C(0) = 0.$$

Los costos de ajustar el stock de capital son no negativos y aumentan a una tasa creciente con el valor absoluto de inversión. El flujo de efectivo descontado de la empresa se define como

$$f(L(t), K(t), \dot{K}(t), t) = e^{-rt}[pF(K(t), L(t)) - wL(t) - J(t)\delta K(t) - J(t)\dot{K}(t) - J(t)C(\dot{K})],$$

donde $J(t)$ es el precio de los bienes de capital en el tiempo t y r es la tasa de interés instantánea, que se supone constante en el intervalo $[0, \infty)$. La empresa desea determinar las trayectorias de la demanda de fuerza de trabajo y capital en el tiempo t que maximicen su bienestar (traído a valor presente), es decir la empresa desea resolver:

$$\begin{cases} \text{Maximizar } \int_0^\infty f(L(t), K(t), \dot{K}(t), t)dt, \\ \text{sujeto a } K(0) = K_0, \end{cases}$$

donde K_0 está dado.

II.3 MODELO NEOCLASICO DE CONSUMO - INVERSION

En este modelo se considera una economía doméstica en la cual un individuo desea determinar las trayectorias de consumo (variable de control) y capital (variable de estado) que maximizan su propio bienestar.

II.3.1 SUPUESTOS SOBRE EL MODELO

El modelo toma en cuenta los siguientes supuestos:

(i) no hay depreciación de capital,

(ii) todo el ingreso es destinado a consumo e inversión,

(iii) la tasa subjetiva intertemporal de descuento es constante,

(iv) el individuo puede prestar o pedir prestado bienes a una tasa de interés dada.

II.3.2 DEFINICION DE VARIABLES

A continuación se hace una lista de las variables que definen el modelo:

(i) $W(t)$, herencia al tiempo t,

(ii) $K(t)$, stock de capital del individuo al tiempo t,

(iii) $C(t)$, consumo del individuo al tiempo t.

II.3.3 EL MODELO

Suponiendo que la función de utilidad cumple con las mismas condiciones formuladas en el primer modelo estudiado, la utilidad descontada, al tiempo 0, de un individuo con vida infinta (o de una familia cuyos padres se preocupan por hijos, nietos y demás descendientes) está dada por

$$V(0) = \int_0^\infty e^{-\rho t} U(C(t))dt.$$

Los ingresos del individuo en el instante t se forman de un salario $v(t)$ dado como una variable exógena e ingresos proveniente de intereses $rK(t)$ sobre sus activos de capital $K(t)$. Los ingresos se distribuyen entre consumo $C(t)$ e inversión $\dot{K}(t)$:

$$rK(t) + v(t) = C(t) + \dot{K}(t). \qquad (II.3.1)$$

El capital inicial está dado por

$$K(0) = K_0.$$

El problema es encontrar una trayectoria de consumo $C(t)$ tal que se resuelva

$$\begin{cases} \text{Maximizar} \displaystyle\int_0^\infty e^{-\rho t} U(C(t))dt, \\ \quad \text{sujeto a } \dot{K}(t) = rK(t) + v(t) - C(t), \\ \qquad K(0) = K_0, \\ \qquad C(t), \quad \text{continua por pedazos.} \end{cases}$$

II.3.4 PLANTEAMIENTOS EQUIVALENTES DEL PROBLEMA

Los siguientes planteamientos son equivalentes:

$$\begin{cases} \text{Maximizar} \displaystyle\int_0^\infty e^{-\rho t} U(C(t))dt, \\ \quad \text{sujeto a } \dot{K}(t) = rK(t) + v(t) - C(t), \\ \qquad K(0) = K_0, \\ \qquad C(t), \quad \text{continua por pedazos.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Maximizar} \displaystyle\int_0^\infty e^{-\rho t} U(rK(t) + v(t) - \dot{K}(t))dt, \\ \quad \text{sujeto a } K(0) = K_0, \\ \qquad C(t), \quad \text{continua por pedazos.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Maximizar} \displaystyle\int_0^\infty e^{-\rho t} U(C(t))dt, \\ \quad \text{sujeto a } \displaystyle\int_0^\infty e^{-rt}(rK(t) + v(t) - \dot{K}(t))dt = \int_0^\infty e^{-rt} C(t)dt, \\ \qquad K(0) = K_0, \\ \qquad C(t), \quad \text{continua por pedazos.} \end{cases}$$

Para el tercer planteamiento se puede hacer una formulación diferente usando la condición "No Ponzi Game" (comparar con sección II.1.5):

$$
\begin{cases}
\text{Maximizar} \displaystyle\int_0^\infty e^{-\rho t}U(C(t))dt, \\
\quad \text{sujeto a } K_0 + \displaystyle\int_0^\infty e^{-rt}v(t)dt = \int_0^\infty e^{-rt}C(t)dt, \\
\qquad \lim_{t\to\infty} K(t)e^{-rt} = 0, \\
\qquad C(t), \quad \text{continua por pedazos.}
\end{cases}
$$

II.3.5 UNA EXTENSION DEL PROBLEMA ANTERIOR

Aquí, un individuo no sólo obtiene utilidad del consumo, sino también por dejar una herencia a sus beneficiarios.

Sea $F(t)$ la probabilidad de morir en el tiempo t, $F'(t)$ la función de densidad asociada y T el tiempo de vida, de tal forma que $F(T) = 1$. La probabilidad de vivir al menos hasta t es $1 - F(t) = \int_t^T F'(s)ds$.

La utilidad de la herencia se expresa por una función $W(t)$. Se supone que esta función cumple con las mismas condiciónes que se formularon para funciones de utilidad en el primer modelo.

El factor $a(t)$ es una función que refleja la importancia relativa para el individuo de dejar una herencia grande durante la mitad de su vida, cuando los hijos son niños, en comparación con años antes de tener hijos y años después de que los hijos sean adultos e independientes.

Si el individuo muere en el tiempo t, entonces la utilidad de su vida va a depender de la utilidad de la trayectoria de su consumo descontado hasta el tiemo t más la utilidad de la herencia $W(t)$ descontado por el factor $a(t)$.

Se desea maximizar el valor esperado de la utilidad total, es decir:

$$
\text{Maximizar} \quad \int_0^T F'(t) \left[\int_0^t e^{-\rho s}U(C(s))ds + a(t)W(K(t)) \right] dt.
$$

Integrando por partes la doble integral que aparece en la expresión anterior, haciendo

$$
\begin{aligned}
dv &= F'(t), \\
v &= F(t), \\
du &= e^{-\rho t}U(C(t)), \\
u &= \int_0^t e^{-\rho s}U(C(s))ds.
\end{aligned}
$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_0^T F'(t)\int_0^t e^{-\rho s}U(C(s))ds\,dt &= \left(F(t)\int_0^t e^{-\rho s}U(C(s))ds\right)\Bigg|_0^T \\ &\quad - \int_0^T F(t)e^{-\rho t}U(C(t))dt \\ &= \int_0^T e^{-\rho s}U(C(s))ds \\ &\quad - \int_0^T F(t)e^{-\rho t}U(C(t))dt \\ &= \int_0^T e^{-\rho t}U(C(t))dt \\ &\quad - \int_0^T F(t)e^{-\rho t}U(C(t))dt,\end{aligned}$$

ya que $\int_0^T e^{-\rho s}U(C(s))ds = \int_0^T e^{-\rho t}U(C(t))dt$. Por tanto, se obtiene la siguiente función objetivo

$$\int_0^T \{e^{-\rho t}U(C(t))[1-F(t)] + a(t)W(K(t))F'(t)\}dt.$$

Está formulación se puede interpretar de la siguiente forma. Si el individuo vive al menos hasta t (con probabilidad $1-F(t)$), entonces se suma la utilidad del consumo. Si el individuo muere en el tiempo t (probabilidad $F'(t)$), entonces se tiene también utilidad de la herencia.

El capital inicial está dado por

$$K(0) = K_0.$$

La restricción de que todo el ingreso está destinado a consumo o inversión es igual a la del problema anterior (ecuación (II.5.1)).

El problema es encontrar una trayectoria de consumo $C(t)$ tal que se solucione:

$$\begin{cases} \text{Maximizar} \quad \displaystyle\int_0^T \{e^{-\rho t}U(C(t))[1-F(t)] + a(t)W(K(t))F'(t)\}dt, \\ \quad \text{sujeto a} \quad \dot{K}(t) = rK(t) + v(t) - C(t), \\ \qquad\qquad\quad K(0) = K_0, \\ \qquad\qquad\quad C(t), \quad \text{continua por pedazos.} \end{cases}$$

II.3.6 PLANTEAMIENTO DE LA EXTENSION DEL PROBLEMA

Los siguientes planteamientos son equivalentes:

$$\begin{cases} \text{Maximizar} \displaystyle\int_0^T \{e^{-\rho t}U(C(t))[1-F(t)] + a(t)W(K(t))F'(t)\}dt, \\ \quad \text{sujeto a} \ \dot{K}(t) = rK(t) + v(t) - C(t), \\ \qquad K(0) = K_0, \\ \qquad C(t), \ \text{continua por pedazos.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Maximizar} \displaystyle\int_0^T \{e^{-\rho t}U(rK(t) + v(t) - \dot{K}(t))[1-F(t)] + a(t)W(K(t))F'(t)\}dt, \\ \quad \text{sujeto a} \ K(0) = K_0, \\ \qquad C(t), \ \text{continua por pedazos.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Maximizar} \displaystyle\int_0^T \{e^{-\rho t}U(C(t))[1-F(t)] + a(t)W(K(t))F'(t)\}dt, \\ \quad \text{sujeto a} \displaystyle\int_0^T F'(t)\int_0^t e^{-rs}(rK(s) + v(s) - \dot{K}(s))dsdt = \\ \qquad\qquad \displaystyle\int_0^T F'(t)\int_0^t e^{-rs}C(s)dsdt, \\ \qquad K(0) = K_0, \\ \qquad C(t), \ \text{continua por pedazos.} \end{cases}$$

Integrando la parte con la doble integral del planteamiento anterior se obtiene la siguiente formulación (comparar con sección II.3.5):

$$\begin{cases} \text{Maximizar} \displaystyle\int_0^T \{e^{-\rho t}U(C(t))[1-F(t)] + a(t)W(K(t))F'(t)\}dt, \\ \quad \text{sujeto a} \displaystyle\int_0^T e^{-rt}(rK(t) + v(t) - \dot{K}(t))[1-F(t)]dt = \int_0^T e^{-rt}C(t)[1-F(t)]dt, \\ \qquad K(0) = K_0, \\ \qquad C(t), \ \text{continua por pedazos.} \end{cases}$$

Para el tercer planteamiento se puede hacer una formulación diferente (comparar con sección II.1.5):

$$
\begin{cases}
\text{Maximizar } \displaystyle\int_0^T \{e^{-\rho t}U(C(t))[1-F(t)] + a(t)W(K(t))F'(t)\}dt, \\
\text{sujeto a} \\
[K_0 - K(T)e^{-rt}][1-F(t)] + \displaystyle\int_0^T e^{-rt}K(t)F'(t)dt + \int_0^T e^{-rt}v(t)[1-F(t)]dt = \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \displaystyle\int_0^T e^{-rt}C(t)[1-F(t)]dt, \\
\qquad\qquad C(t), \quad \text{continua por pedazos.}
\end{cases}
$$

II.4 MODELO DE ASIGNACION OPTIMA DE CREDITOS EXTERNOS PARA INVERSION Y CONSUMO

Un país obtiene ayuda económica para un cierto periodo de tiempo. Se desea determinar la trayectoria de la fracción del crédito que se consume (variable de control) y la trayectoria del capital (variable de estado) que maximizan el bienestar.

II.4.1 SUPUESTOS SOBRE EL MODELO

El modelo toma en cuenta los siguientes supuestos:

(*i*) toda la ayuda económica se destina a consumo o inversión,

(*ii*) la tasa subjetiva intertemporal de descuento es constante,

(*iii*) existe un individuo llamado planificador central, el cual desea maximizar el bienestar de todos los agentes, y tiene la facultad de decidir sobre las trayectorias de consumo y de inversión de la economía.

II.4.2 DEFINICION DE VARIABLES

A continuación se hace una lista de las variables que definen el modelo:

(*i*) $K(t)$, capital al tiempo t,

(*ii*) $u(t)$, parte de la ayuda que se destina a inversión al tiempo t,

(*iii*) $m(t)$, flujo de bienes al tiempo t,

(*iv*) $M^*(t)$, flujo de divisas (dinero externo) al tiempo t,

(*v*) $P^*(t)$, nivel de precio externo al tiempo t.

II.4.3 DEFINICION DE PARAMETROS

Se presenta una lista de los parámetros que se usan en el modelo:

(*i*) T, periodo de ayuda económica,

(*ii*) r, tasa de interés,

(*iii*) ρ, tasa subjetiva intertemporal de descuento.

II.4.4 EL MODELO

Suponiendo que la función de utilidad cumple con las mismas condiciones formuladas en el primer modelo, el planificador trata de maximizar la siguiente función objetivo:

$$\text{Maximizar} \quad \int_0^T e^{-\rho t} U[(1-u(t))m(t)]dt,$$

donde $1-u(t)$ es la parte de la ayuda económica que se destina al consumo al tiempo t y $m(t)$ la cantidad de bienes que llegan al país como préstamo al tiempo t. Si $M^*(t)$ es la cantidad de divisas que se obtiene al tiempo t como crédito y $P^*(t)$ es el nivel de precios externos al tiempo t, se puede determinar el flujo de bienes externos $m(t)$ para este instante de tiempo como

$$m(t) = \frac{M^*(t)}{P^*(t)}.$$

La tasa de cambio de capital $\dot{K}(t)$ en la economía es la parte de la ayuda económica que se destina a la inversión $m(t)u(t)$, es decir:

$$\dot{K}(t) = m(t)u(t), \quad \text{donde} \quad u(t) \in [0,1].$$

El stock de capital inicial está dado por

$$K(0) = K_0.$$

Se desea también alcanzar por lo menos un stock de capital K_T, es decir

$$K(T) \geq K_T, \quad \text{donde} \quad K(0) < K_T < K(0) + \int_0^T m(t)dt.$$

El problema de ***asignación óptima de crédito en una economía para consumo e inversión*** consiste en encontrar la trayectoria de la proporción de crédito que se asigna a la inversión $u(t)$, tal que se resuelve el problema:

$$\begin{cases} \text{Maximizar} \quad \int_0^T e^{-\rho t} U[(1-u(t))m(t)]dt, \\ \text{sujeto a} \quad \dot{K}(t) = m(t)u(t), \\ \qquad K(0) = K_0, \\ \qquad K(T) = K_T, \\ \qquad K(0) < K_T < K(0) + \int_0^T m(t)dt, \\ \qquad u(t) \in [0,1]. \end{cases}$$

II.4.5 PLANTEAMIENTOS EQUIVALENTOS DEL PROBLEMA

Los siguientes planteamientos son equivalentes:

$$\begin{cases} \text{Maximizar} & \displaystyle\int_0^T e^{-\rho t} U[(1-u(t))m(t)]dt, \\ \text{sujeto a} & \dot{K}(t) = m(t)u(t), \\ & K(0) = K_0, \\ & K(T) = K_T, \\ & \displaystyle K(0) < K_T < K(0) + \int_0^T m(t)dt, \\ & u(t) \in [0,1]. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Maximizar} & \displaystyle\int_0^T e^{-\rho t} U[m(t) - \dot{K}(t)]dt, \\ \text{sujeto a} & K(0) = K_0, \\ & K(T) = K_T, \\ & \displaystyle K(0) < K_T < K(0) + \int_0^T m(t)dt, \\ & u(t) \in [0,1]. \end{cases}$$

En el siguiente planteamiento se tiene la modificación de que la economía tiene acceso a un mercado de crédito, es decir, se pueden prestar o pedir prestado bienes a una tasa de interés r.

$$\begin{cases} \text{Maximizar} & \displaystyle\int_0^T e^{-\rho t} U[(1-u(t))m(t)]dt, \\ \text{sujeto a} & \displaystyle\int_0^T e^{-rt} \dot{K}(t)dt = \int_0^T e^{-rt} m(t)u(t)dt, \\ & K(0) = K_0, \\ & K(T) = K_T, \\ & \displaystyle K(0) < K_T < K(0) + \int_0^T m(t)dt, \\ & u(t) \in [0,1]. \end{cases}$$

Para el planteamiento anterior se puede hacer una formulación diferente sumando y restando $\int_0^T rK(t)$ e integrando por partes (comparar con sección II.1.5):

$$
\begin{cases}
\text{Maximizar} \quad \displaystyle\int_0^T e^{-\rho t} U[(1-u(t))m(t)]dt, \\
\text{sujeto a} \quad e^{-rT}K(T) - K(0) = \displaystyle\int_0^T e^{-rt}[m(t)u(t) - rK(t)]dt, \\
\qquad\qquad K(0) = K_0, \\
\qquad\qquad K(T) = K_T, \\
\qquad\qquad K(0) < K_T < K(0) + \displaystyle\int_0^T m(t)dt, \\
\qquad\qquad u(t) \in [0,1].
\end{cases}
$$

II.5 MODELO DE MAXIMIZACION DE BENEFICIOS DE UN MONOPOLIO

En el siguiente modelo se considera una empresa que constituye con su producción un monopolio. El objetivo del monopolista es encontrar las trayectorias del precio del producto (variable de control) y del número de unidades producidas (variable de estado) que maximizan los beneficios.

II.5.1 SUPUESTOS SOBRE EL MODELO

El modelo toma en cuenta los siguientes supuestos:

(*i*) la empresa produce un sólo bien,

(*ii*) la empresa constituye un monopolio con este bien, es decir, no existen otras empresas que ofrecen el mismo bien.

II.5.2 DEFINICION DE VARIABLES

A continuación se hace una lista de las variables que definen el modelo:

(*i*) $x(t)$, producción al tiempo t,

(*ii*) $p(t)$, precio del bien al tiempo t.

II.5.3 DEFINICION DE PARAMETROS

En lo que sigue, se hace una lista de los parámetros que se usan en el modelo:

(*i*) a, b, c, parámetros de la función de demanda,

(*ii*) m, n, k, parámetros de la función de los costos de la producción,

(*iii*) r, tasa de interés.

II.5.4 EL MODELO

La cantidad de bienes $x(t)$ que la empresa puede vender al tiempo t depende del precio $p(t)$ del bien al tiempo t y del cambio del precio del bien $\dot{p}(t)$ al tiempo t

$$x(t) = ap(t) + b\dot{p}(t) + c.$$

Las costos de la producción $z(x)$ están dados por

$$z(x(t)) = m(x(t))^2 + nx(t) + k.$$

El precio inicial está dado por

$$p(0) = p_0.$$

El precio deseado al tiempo T está dado por

$$p(T) = p_1.$$

El objetivo es maximizar los beneficios de la empresa en cada instante de tiempo, es decir

$$\text{Maximizar} \quad \int_0^T e^{-rt}[p(t)x(t) - z(x(t))]dt.$$

El problema de *maximización de beneficios de un monopolio* es encontrar una trayectoria de precios $p(t)$ que se resuelva:

$$\begin{cases} \text{Maximizar} & \displaystyle\int_0^T e^{-rt}[p(t)x(t) - m(x(t))^2 - nx(t) - k]dt, \\ \text{sujeto a} & x(t) = ap(t) + b\dot{p}(t) + c, \\ & p(0) = p_0, \\ & p(T) = p_1. \end{cases}$$

II.5.5 PLANTEAMIENTOS EQUIVALENTES DEL PROBLEMA

Los siguientes planteamientos son equivalentes:

$$\begin{cases} \text{Maximizar} & \displaystyle\int_0^T e^{-rt}[p(t)x(t) - m(x(t))^2 - nx(t) - k]dt, \\ \text{sujeto a} & x(t) = ap(t) + b\dot{p}(t) + c, \\ & p(0) = p_0, \\ & p(T) = p_1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Maximizar} & \displaystyle\int_0^T e^{-rt}[p(t)[ap(t) + b\dot{p}(t)] + c - m[ap(t) + b\dot{p}(t) + c]^2 \\ & \qquad - n[ap(t) + b\dot{p}(t) + c] - k]dt, \\ \text{sujeto a} & p(0) = p_0, \\ & p(T) = p_1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Maximizar} & \displaystyle\int_0^T e^{-rt}[p(t)x(t) - m(x(t))^2 - nx(t) - k]dt, \\ \text{sujeto a} & \displaystyle\int_0^T e^{-rt}x(t)dt = \int_0^T e^{-rt}[ap(t) + b\dot{p}(t) + c]dt, \\ & p(0) = p_0, \\ & p(T) = p_1. \end{cases}$$

II.6 MODELO DE ANALISIS DE DEVALUACION

En este medelo se estudia una economía con un individuo representativo que puede consumir un bien que se exporta y otro que se importa. El objetivo del individuo representativo es determinar las trayectorias de consumo de los dos bienes que maximicen su función de utilidad.

II.6.1 SUPUESTOS SOBRE EL MODELO

Los supuestos considerados en el modelo son:

(*i*) país pequeño,

(*ii*) dos bienes comerciables internacionalmente (exportación, importación),

(*iii*) economía abierta,

(*iv*) el individuo posee moneda nacional y un bono internacional,

(*v*) individuo representativo con vida infinita.

II.6.2 DEFINICION DE VARIABLES

Las variables utilizadas en el modelo son:

(*i*) $x(t)$, cantidad de consumo del bien a exportar al tiempo t,

(*ii*) $m(t)$, cantidad de consumo del bien a importar al tiempo t,

(*iii*) $y(t)$, ingresos al tiempo t,

(*iv*) $p(t)$, es el precio del bien de exportación entre el precio del bien de importación, precios relativos.

II.6.3 DEFINICION DE PARAMETROS

Los parámetros utilizados en el modelo son:

(*i*) ρ, tasa subjetiva intertemporal de descuento,

(*ii*) r, es la tasa de interés mundial.

II.6.4 EL MODELO

La utilidad de un individuo representativo con vida infinita (o de una familia cuyos padres se preocupan por hijos, nietos y demás descendientes), está dado por

$$V(0) = \int_0^\infty e^{-\rho t} U(x(t), m(t))dt,$$

donde ρ es la tasa subjetiva intertemporal de descuento constante (positiva) en el tiempo, por lo que el factor de descuento es $e^{-\rho t}dt$ y $U(\cdot,\cdot)$ (función de utilidad) es una función cóncava con segundas derivadas parciales continuas que satisface

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial U(x(t),m(t))}{\partial x}=\infty,\quad \text{para } m \text{ fija;}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\partial U(x(t),m(t))}{\partial x}=0,\quad \text{para } m \text{ fija;}$$

$$\lim_{m\to 0}\frac{\partial U(x(t),m(t))}{\partial m}=\infty,\quad \text{para } x \text{ fija;}\quad \lim_{m\to\infty}\frac{\partial U(x(t),m(t))}{\partial m}=0,\quad \text{para } x \text{ fija.}$$

El individuo representativo dispone de un flujo de ingresos (exógeno) $y(t)$ del bien perecedero que se exporta y el único activo disponible es un bono internacionalmente comerciable, el cual tiene un valor fijo igual a una unidad del bien importado y autoriza a su propietario recibir r (tasa de interés) unidades del bien importado por unidad de tiempo. La tasa de cambio de la riqueza del individuo está dado por

$$\dot{b}(t)=y(t)/p(t)+rb(t)-x(t)/p(t)-m(t),$$

donde $p(t)$ es el precio de exportaciones entre el precio de importaciones. Considérese que el individuo planea a partir del tiempo $t=0$ hasta infinito. Supóngase que b_0 denota la riqueza inicial (en bonos) de la familia (individuo representativo), la cual está dada. El individuo representativo desea determinar la trayectoria de consumo que maximice su beneficio, por lo cual su problema a resolver es:

$$\begin{cases}\text{Maximizar} & \displaystyle\int_{t_0}^{\infty} e^{-rt}U(x(t),m(t))dt,\\ \text{sujeto a} & \dot{b}(t)=y(t)/p(t)+rb(t)-x(t)/p(t)-m(t),\\ & b(0)=b_0.\end{cases}$$

II.6.5 PLANTEAMIENTOS EQUIVALENTES DEL PROBLEMA

Los siguientes planteamientos son equivalentes:

$$\begin{cases}\text{Maximizar} & \displaystyle\int_{t_0}^{\infty} e^{-rt}U(x(t),m(t))dt,\\ \text{sujeto a} & \dot{b}(t)=y(t)/p(t)+rb(t)-x(t)/p(t)-m(t),\\ & b(0)=b_0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\text{Maximizar} & \displaystyle\int_{t_0}^{\infty} e^{-rt}U(y(t)/p(t)+rb(t)-x(t)/p(t)-\dot{b}(t),m(t))dt,\\ \text{sujeto a} & b(0)=b_0.\end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\text{Maximizar} & \displaystyle\int_0^\infty e^{-rt}U((x(t), m(t)), \\
\text{sujeto a} & \displaystyle\int_0^\infty e^{-rt}\dot{b}(t)dt = \int_0^\infty e^{-rt}[y(t)/p(t) + rb(t) - x(t)/p(t) - m(t)]dt, \\
 & b(0) = b_0.
\end{cases}
$$

Para el planteamiento anterior se puede hacer una formulación diferente usando la condición "No Ponzi Game" (comparar con II.1.5). Es decir,

$$
\begin{cases}
\text{Maximizar} & \displaystyle\int_{t_0}^\infty e^{-rt}U(x(t), m(t))dt, \\
\text{sujeto a} & \displaystyle\int_0^\infty e^{-rt}[(x(t)/p(t) + m(t)]dt = b_0 + \int_0^\infty e^{-rt}[(y(t)/p(t)]dt, \\
 & \displaystyle\lim_{t\to\infty} b(t)e^{-(t-t_0)} = 0.
\end{cases}
$$

donde la primera restricción dice que, el valor presente del flujo de los gastos es igual al valor presente del flujo de los ingresos.

II.7 MODELO DE ANALISIS DE CUENTA CORRIENTE Y TIPO DE CAMBIO REAL

En este modelo, se analiza el impacto que sobre la cuenta corriente y el tipo de cambio real tiene una política de estabilización basada en una disminución temporal de la tasa de devaluación. Se propone un modelo del tipo de Ramsey, en el cual el individuo tiene expectativas racionales. Los supuestos adicionales son al principio muy simples de tal manera que el modelo sea manejable y que al mismo tiempo capte los efectos importantes (cuenta corriente, tipo de cambio real, etc.).

En una segunda etapa, se modifican o se extienden algunos de los supuestos y se ve si las conclusiones antes obtenidas siguen siendo válidas.

II.7.1 SUPUESTOS SOBRE EL MODELO

En un principio vamos a desarrollar un modelo que toma en cuenta los siguientes supuestos:

(*i*) País pequeño,
(*ii*) un bien comerciable (internacionalmente),
(*iii*) perfecta movilidad de capital,
(*iv*) dos activos, moneda nacional y un bono internacional,
(*v*) el individuo tiene acceso a un mercado internacional de crédito,
(*vi*) se cumple la condición de paridad de poder de compra,
(*vii*) cash-in-advance (dinero y consumo son perfectos sustitutos),
(*viii*) pleno empleo
(*ix*) individuo representativo, maximizador de utilidad esperada,
(*x*) vida infinita,
(*xi*) expectativas racionales (previsión perfecta),
(*xii*) el resto del mundo no posee dinero doméstico.

En este modelo se pretende mostrar que una política de estabilización basada en una disminución temporal de la tasa de devaluación genera un déficit temporal sobre la cuenta corriente. En este caso, entre más corto sea el periodo de estabilización, mayor será el déficit en cuenta corriente que experimenta la economía.

II.7.2 DEFINICION DE VARIABLES

A continuación hacemos una lista de las variables que definen el modelo:

(*i*) $c(t)$, consumo al tiempo t,
(*ii*) $m(t)$, activos en moneda nacional, en base a saldos monetarios reales al tiempo t,
(*iii*) $b(t)$, tenencia de bonos internacionales por parte del gobierno al tiempo t,

(*iv*) $F(t)$, bono internacional del individuo al tiempo t,
(*v*) $a(t)$, riqueza financiera del individuo al tiempo t,
(*vi*) $B(t)$, el total de bonos internacionles en la economía al tiempo t.

II.7.3 DEFINICION DE PARAMETROS

A continuación se hace una lista de los parámetros que se usan en el modelo:
(*i*) y, flujo constante de ingresos,
(*ii*) r, tasa de interés,
(*iii*) ρ, tasa subjetiva intertemporal de descuento.

II.7.4 EL MODELO

La utilidad total descontada, al tiempo $t = 0$ (el presente), de un individuo representativo con vida infinita (o de una familia cuyos padres se preocupan por hijos, nietos y demás descendientes) está dada por

$$V(0) = \int_0^\infty u[c(t)]e^{-\rho t}dt, \qquad (II.7.1)$$

donde $c(t)$ es el consumo, ρ es la tasa subjetiva intertemporeal de descuento y $u(\cdot)$ es una función creciente, estrictamente cóncava con segunda derivada continua que satisface

$$\lim_{c\to\infty} u'(c) = 0, \qquad \lim_{c\to 0} u'(c) = \infty.$$

Por tanto, las preferencias, del individuo, por consumo a través del tiempo están representadas por

$$V(s) = \int_s^\infty u[c(t)]e^{-\rho(t-s)}dt.$$

Para ser más específicos vamos a considerar una función de utilidad de la forma

$$u[c(t)]=\begin{cases} \frac{c(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}, & \text{para } \gamma>0,\ \gamma\neq 1, \\ \log c(t), & \text{para } \gamma=1, \end{cases}$$

en donde se ha removido la discontinuidad de la función en $\gamma=1$. Observe que para esta función consumo, la elasticidad de sustitución entre $c(t)$ y $c(s)$ con $s\neq t$, está dada por

$$\sigma[c(t)]=-\frac{u'[c(t)]/u'[c(s)]}{c(s)/c(t)}\frac{d[c(s)/c(t)]}{d\{u'[c(s)]/u'[c(t)]\}}=\frac{1}{\gamma}.$$

También note que cuando $s\rightarrow t$ la elasticidad de sustitución satisface

$$\lim_{s\rightarrow t}\sigma[c(t)]=-u'[c(t)]/\{u''[c(t)]c(t)\}=\sigma=\frac{1}{\gamma},$$

en este caso el grado relativo de aversión al riesgo cumple con

$$-u''[c(t)]\frac{c(t)}{u'[c(t)]}=\gamma.$$

Vamos a suponer también que el individuo representativo tiene previsión perfecta, es decir, para el individuo la tasa de devaluación esperada $\epsilon^e(t)$ coincide con la observada $\epsilon(t)=\epsilon^e(t)$. Si suponemos que hay perfecta movilidad de capital, y que la tasa real de interés del resto del mundo, r, satisface $\rho=r$, tendremos entonces la siguiente condición de arbitraje

$$i(t)=r+\epsilon(t). \qquad (II.7.2)$$

Vamos a suponer que la riqueza financiera del individuo, $a(t)$, a través del tiempo, está determinada por activos en moneda nacional, en base a saldos monetarios reales, $m(t)$, y un bono internacional $F(t)$, de tal manera que

$$a(t)=m(t)+F(t), \qquad (II.7.3)$$

donde $F(0)$ es exógeno.

Sea y el ingreso que se supone constante en todo momento. Suponga que hay un gobierno, con el mismo horizonte de planeación, que cobra impuestos, $g(t)$, del tipo Lump-Sum. La restricción presupuestal del individuo, una vez que ha incorporado sus expectativas y las transferencias del gobierno está dada por

$$a(0)+\frac{y}{r}+\int_0^\infty g(t)e^{-rt}dt=\int_0^\infty[c(t)+i(t)m(t)]e^{-rt}dt. \qquad (II.7.4)$$

Esta condición nos dice que, para el individuo representativo, "***El valor presente del flujo de ingresos futuros debe ser igual el valor presente del gasto planeado***".

En forma alternativa podemos escribir (II.7.4) como

$$\dot{a}(t) = y + g(t) + rF(t) - c(t) - \epsilon(t)m(t), \qquad (II.7.5)$$

junto con la condición de transversalidad

$$\lim_{t \to \infty} a(t)e^{-rt} = 0, \qquad (II.7.6)$$

ya que como puede observarse

$$a(0) - \lim_{t \to \infty} a(t)e^{-rt} = \int_0^\infty [ra(t) - \dot{a}(t)]e^{-rt}dt, \qquad (II.7.7)$$

con lo cual de (II.7.4)

$$ra(t) - \dot{a}(t) + y + g = c(t) + i(t)m(t) \qquad (II.7.8)$$

y usando (II.7.2) y (II.7.3), obtenemos (II.7.5).

Es importante notar que bajo el supuesto de perfecta movilidad de capital, la condición "No Ponzi Game" (II.7.6) está eliminando la posibilidad de que el individuo se endeude indefinidamente pagando intereses con más deuda.

A continuación se introduce la condición cash-in-advance, en esta condición se establece que el consumo planeado tiene que hacerse efectivo, de tal manera que el individuo debe tener al menos $\alpha c(t)$ unidades de saldos monetarios reales, donde $\alpha > 0$, equivalentemente

$$m(t) \geq \alpha c(t). \qquad (II.7.9)$$

El individuo representativo desea determinar la trayectoria de consumo que maximice su utilidad, $V(0)$, dada en (II.7.1), sujeto a las restricciones presupuestal y cash-in-advance, (II.7.4) y (II.7.9), respectivamente.

A continuación vamos a considerar una restricción presupuestal del gobierno de la siguiente forma (para eliminar efectos fiscales de efectos monetarios)

$$g(t) + [\dot{b}(t) - rb(t)] = \dot{m}(t) + \epsilon(t)m(t), \qquad (II.7.10)$$

junto con la condición de transversalidad

$$\lim_{t \to \infty} b(t)e^{-rt} = 0, \qquad (II.7.11)$$

ya que

$$b(0) - \lim_{t \to \infty} b(t)e^{-rt} = \int_0^\infty [rb(t) - \dot{b}(t)]e^{-rt}dt, \qquad (II.7.12)$$

aquí $b(t)$ denota la tenencia de bonos internacionales por parte del gobierno al tiempo t y $\dot{m}(t) + \epsilon(t)m(t)$ representa el ingreso por impuesto inflacionario debido a la creación de dinero. Aquí $b(0)$ es exógeno.

La ecuación (II.7.10) puede reescribirse como

$$\int_0^\infty g(t)e^{-rt}dt = b(0) + \int_0^\infty [\dot{m}(t) + \epsilon(t)m(t)]e^{-rt}dt. \qquad (II.7.13)$$

Si denotamos por $B(t)$ el total de bonos internacionales en la economía tendremos que

$$B(t) = b(t) + F(t). \qquad (II.7.14)$$

De la ecuación de la riqueza financiera del individuo representativo, (II.7.3), tenemos ahora que

$$a(t) = m(t) + B(t) - b(t). \qquad (II.7.15)$$

Utilizando la restricción flujo de la riqueza (II.7.5) obtenemos

$$\dot{m}(t) + \dot{B}(t) - \dot{b}(t) = y + g(t) + r[B(t) - b(t)] - c(t) - \epsilon(t)m(t), \qquad (II.7.16)$$

equivalentemente

$$g(t) + [\dot{b}(t) - rb(t)] - [\dot{m}(t) + \epsilon(t)m(t)] = [\dot{B}(t) - rB(t)] + c(t) - y, \qquad (II.7.17)$$

con lo cual obtenemos que la restriccón presupuestal de la economía en su conjunto puede escribirse como

$$B(0) + \frac{y}{r} = \int_0^\infty c(t)e^{-rt}dt. \qquad (II.7.18)$$

Esta ecuación simplemente nos dice que, para la economía, el valor presente del flujo de ingresos futuros debe ser igual al valor presente del gasto planeado. Observamos también que el dinero doméstico no aparece en la restricción (II.7.18) ya que éste no representa riqueza para el resto del mundo, pues el resto del mundo no posee moneda nacional.

A continuación vamos a estudiar programas de estabilización en los cuales la tasa de devaluación satisface

$$\epsilon(t) = \begin{cases} \epsilon_0, & \text{para } 0 \leq t \leq T, \\ \epsilon_1, & \text{para } t > T, \end{cases} \qquad (II.7.19)$$

donde $\epsilon_0 < \epsilon_1$. Para ser consistentes con $i(t) > 0$, debemos suponer que

$$\epsilon_1 + r > \epsilon_0 + r > 0.$$

Observe que bajo los supuestos de país pequeño y poder de paridad de compra, tomando unidades adecuadas de tal manera que se mantenga $p^* = 1$ a través del tiempo, se tiene que la tasa de devaluación coincide con la tasa de inflación, $\epsilon(t) = \dot{p}/p$.

El problema es encontrar la trayectoria de consumo $c(t)$ considerando que la tasa de devaluación se comporta segun la función (II.7.19) tal que se solucione:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & \int_0^\infty u[c(t)]e^{-rt}\,dt, \\ \text{sujeto a} \quad & \int_0^\infty [y + g(t) - c(t)(1+\alpha i(t))]e^{-rt}dt = -a(0), \\ & a(0) = a_0. \end{aligned}$$

II.7.5 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El problema planteado de maximización de utilidad puede ser resuelto utilizando: (I) Cálculo de variaciones (Ecuaciones de Euler-Lagrange); o bien (II) Control óptimo (Principio del máximo de Pontryagin).

Los siguientes planteamientos son equivalentes:

$$\begin{cases} \text{Maximizar} \quad \displaystyle\int_0^\infty u[c(t)]e^{-rt}dt, \\ \quad \text{sujeto a} \quad \dot{a}(t) = ra(t) + y + g(t) - c(t)(1+\alpha i(t)), \\ \qquad\qquad a(0) = a_0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Maximizar} \quad \displaystyle\int_0^\infty u\left[\frac{y - \dot{a}(t) + ra(t) + g(t)}{(1+\alpha i(t))}\right]e^{-rt}dt, \\ \quad \text{sujeto a} \quad a(0) = a_0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Maximizar} \quad \displaystyle\int_0^\infty u[c(t)]e^{-rt}dt, \\ \quad \text{sujeto a} \quad \displaystyle\int_0^\infty e^{-rt}\dot{a}(t)dt = \int_0^\infty e^{-rt}[ra(t) + y + g(t) - c(t)(1+\alpha i(t))]dt, \\ \qquad\qquad a(0) = a_0. \end{cases}$$

Aplicando la condicion "No Ponzi Game" al planteamiento anterior se obtiene (comparar con II.7.4):

$$\begin{cases} \text{Maximizar} \quad \displaystyle\int_0^\infty u[c(t)]e^{-rt}dt, \\ \quad \text{sujeto a} \quad \displaystyle\int_0^\infty [y + g(t) - c(t)(1+\alpha i(t))]e^{-rt}dt = -a(0), \\ \qquad\qquad \displaystyle\lim_{t\to\infty} a(t)e^{-rt} = 0, \\ \qquad\qquad a(0) = a_0. \end{cases}$$

II.7.6 PRIMERA EXTENSION DEL MODELO

En la primera extensión se incluye bienes no-comerciables, y se pretende ver, si las conclusiones obtenidas siguen siendo válidas.

La forma más simple de introducir bienes no-comerciables es suponer que:

(*i*) El individuo sólo consume bienes no-comerciables, $c_n(t)$,

(*ii*) los bienes no-comerciables, $c_n(t)$, son producidos con bienes comerciables $c_s(t)$, con función de producción $c_n(t) = F[c_s(t)]$, la cual presenta rendimientos marginales decrecientes.

(*iii*) la oferta de trabajo es perfectamente inelástica.

La utilidad total descontada es ahora

$$\int_0^\infty e^{-\rho t} U(F[c_s(t)])dt,$$

y la restricción presupuestal es

$$\dot{a}(t) = ra(t) + y + g(t) - F[c_s(t)](1 + \alpha i(t)).$$

También para ser más específicos vamos a suponer que

$$F[c_s(t)] = \frac{[c_s(t)]^{1-\theta}}{1-\theta}, \quad 0<\theta<1. \tag{II.7.20}$$

Consecuentemente, el precio relativo, $P(t)$, de $c_n(t)$ con respecto a $c_s(t)$, en equilibrio competitivo, se obtiene al resolver el problema

$$\text{Maximizar} \quad \Pi[c_s(t)] = p_n(t)\frac{[c_s(t)]^{1-\theta}}{1-\theta} - p_s(t)c_s(t).$$

De la condición de primer orden del problema de maximización se obtiene que

$$P(t) = \frac{p_n(t)}{p_s(t)} = [c_s(t)]^{\theta}. \tag{II.7.21}$$

En consecuencia el tipo de cambio real está dado por

$$[P(t)]^{-1} = [c_s(t)]^{-\theta}. \tag{II.7.22}$$

Ahora, los balances monetarios reales están dados por

$$m(t) = \frac{M(t)}{p_s(t)}, \tag{II.7.23}$$

donde $M(t)$ es el dinero doméstico. Por tanto la restricción cash-in-advance se escribe ahora como

$$m(t) \geq \alpha P(t)c_s(t). \tag{II.7.24}$$

II.7.7 SEGUNDA EXTENSION DEL MODELO

En la segunda extensión se modifica el modelo por el supuesto que el dinero proporciona utilidad por servicios de liquidez, y dinero y consumo son complementos a la Edgeworth. A continuación se pretende ver, si las conclusiones obtenidas siguen siendo válidas.

La condición cash-in-advance es indudablemente muy restrictiva. Para relajar este supuesto vamos a suponer que la función de utilidad incluye saldos monetarios reales, reflejando con esto que el dinero le proporciona utilidad al individuo por sus servicios de liquidez.

En esta sección consideramos el siguiente supuesto:

(*i*) La función de utilidad satisface $u_{cm} > 0$, es decir, dinero y consumo son complementos a la Edgeworth.

Ahora, la utilidad total descontada al tiempo $t = 0$ está dada por

$$V(0) = \int_0^{\infty} u[c(t), m(t)]e^{-\rho t} dt,$$

en donde $u(\cdot,\cdot)$ es una función creciente en ambos argumentos, estrictamente cóncava con segundas derivadas parciales continuas, y que satisface

$$\lim_{c\to\infty} u_c(c,m) = 0, \quad \text{para } m \text{ fija} \qquad \lim_{m\to 0} u_m(c,m) = \infty, \quad \text{para } c \text{ fija,}$$

$$\lim_{c\to 0} u_c(c,m) = \infty, \quad \text{para } m \text{ fija} \qquad \lim_{m\to\infty} u_m(c,m) = 0. \quad \text{para } c \text{ fija.}$$

En este caso vamos a suponer que la función de utilidad u tiene una forma específica. Sea $0<\alpha<1$,

$$u(c,m)=\begin{cases} \frac{(c^{\alpha} m^{1-\alpha})^{1-R}}{1-R}, & \text{para } R>0,\ R\neq 1, \\ \alpha \log c+(1-\alpha) \log m, & \text{para } R=1. \end{cases}$$

II.8 MODELO DE APRENDIZAJE SOBRE UTILIDAD

En este modelo, bajo el enfóque Bayesiano*, se considera el proceso de aprendizaje de un individuo sobre su función de utilidad. Para esto se usan distribuciones que describen el comportamiento racional de los individuos cuando éstos incorporan información adicional en su función de Utilidad (Individuos optimizadores de medidas de información).

La teoría clásica de utilidad, parte de un postulado de racionalidad del individuo en el que:

(*i*) El individuo tiene información completa sobre los bienes de consumo, activos, actividades, etc., que existen en el mercado, y sobre la satisfacción que obtiene al combinarlos en diferentes proporciones.

(*ii*) Dicha información está contenida en su función de utilidad.

(*iii*) El individuo maximiza su utilidad sometiéndose a la restricción que le imponen su ingreso y los precios del mercado.

A continuación se pretende modelar el proceso de aprendizaje por el que el individuo pasa antes de llegar a los puntos (*i*) y (*ii*), o por lo menos, estar lo más cerca posible de ellos.

Es decir se establece un nuevo postulado de racionalidad para el individuo, comportándose éste como optimizador de medidas de información cuando se trata de incorporar información adicional en su función de utilidad.

Los individuos aprenden de su función de utilidad a través de la experiencia y la determinación de ésta es problema de decisiones bajo incertidumbre, en donde la información *a priori* es demasiado importante para ser ignorada.

II.8.1 SUPUESTOS BASICOS DEL MODELO DE APRENDIZAJE

Los dos supuestos esenciales que manejaremos sobre la función de utilidad son:

(*i*) El individuo conoce la forma funcional de su función de utilidad, pero no está seguro de los valores de los parámetros que en ella aparecen.

(*ii*) El individuo asigna una distribución *a priori* a los parámetros, esta distribución puede incluso ser *no-informativa* (ver Jeffreys (1949)).

A continuación incorporamos en el modelo una serie de supuestos que, fundamentalmente, tienen que ver con el comportamiento de los individuos.

(*iii*) En una primera etapa del proceso, el individuo aprende al consumir las cantidades que maximizan su utilidad esperada *a priori* sujeto a su restricción presupuestal.

---

* A diferencia del enfoque tradicional en donde los parámetros de una distribución se consideran fijos pero desconocidos, en el enfoque Bayesiano se supone una distribución para los valores de los parámetros.

(*iv*) Se supone que la información ganada puede ser representada en términos de valores esperados. Esta información es empleada para obtener una distribución *a posteriori*, *vía* la optimización de alguna medida de información.

(*v*) El proceso anterior puede ser recursivo, en el sentido de que si el individuo sigue inseguro sobre los valores de los parámetros en su función de utilidad, una distribución *a posteriori* se utiliza como una distribución *a priori* y el proceso se inicia de nuevo.

Entre más rápido el individuo pueda determinar los valores "exactos" o al menos "cercanos" a los valores exactos, mayor será la utilidad que el individuo experimente en cada periodo.

El problema se puede comparar con un problema de inversión, en el cual el consumo es considerado inversión en información.

II.8.2 DISTRIBUCIONES DERIVADAS DE MEDIDAS DE INFORMACION

En términos generales, una medida de información es una medida de la cantidad de aprendizaje entre probabilidades *a priori* y probabilidades *a posteriori*. Los siguientes dos principios son fundamentales en el desarrollo de este modelo:

(*i*) El principio de mínima entropía cruzada* establece que cuando hay un estimador *a priori* de una densidad e información adicional en términos de valores esperados, se debería tomar como un estimador *a posteriori* aquella densidad que minimice la entropía cruzada con la *a priori* y que sea compatible con la información adicional.

(*ii*) El principio de máxima entropía establece que entre todas las distribuciones que sean compatibles con información adicional dada en términos de valores esperados, y en ausencia de una densidad *a priori*, se debería tomar como estimador *a posteriori* aquella que maximice la entropía.

II.8.3 DEFINICION DE VARIABLES

A continuación hacemos una lista de las variables que definen el modelo:

(*i*) $C(t)$, consumo al tiempo t.

* La palabra "entropía" es introducida por Clasius (1850) como concepto termodinámico (como una medida de desorden de un sistema físico). La interpretación probabilista del concepto en Mécanica estadística se atribuye a Boltzmann (1877a) y (1877b). Sin embargo la relación explícita entre entropía y probabilidad se debe a Plank (1904). Shannon y Weaver (1948) crean las bases de la teoría de información al reinterpretar el concepto para estudiar problemas de transmisión de datos. Así pues, el nombre de entropía, en nuestro contexto, se debe a razones meramente históricas, y la interpretación como medida de información rompe con el origen de concepto físico. El nombre de entropía cruzada se debe a Good(1960), este concepto ha recibido otros nombres, entre ellos se mencionan: Divergencia directa o función de discriminación de información (Kullback (1959)), peso de la evidencia (Good (1960)), Entropía relativa o número de Kullback-Leibler (Wehrl (1978)).

II.8.4 DEFINICION DE PARAMETROS

A continuación hacemos una lista de los parámetros que se usan en el modelo:

(i) θ, un parámetro de la función de utilidad,

(ii) h, intervalo de tiempo.

II.8.5 APRENDIZAJE CON MINIMA ENTROPIA CRUZADA

Suponga que, en una primera etapa (etapa 0), el individuo decide invertir en consumo para obtener información adicional sobre los parámetros de su función de utilidad

$$U = U(C(t)|\theta),$$

en donde la forma funcional de U es conocida, $C(t)$ es el consumo al tiempo t y θ es un parámetro, cuyos posibles valores pertenecen a un espacio parametral, Θ. Suponga además que el conocimiento inicial del individuo sobre los parámetros de su función de utilidad está representado por una distribución *a priori*, $p = p(\theta)$, $\theta \in \Theta$.

En lo que sigue, vamos a suponer también que el individuo enfrenta una restricción presupuestal,

$$C(t) \in S_0,$$

en donde S_0 es el conjunto de posibilidades de consumo en la etapa 0 (depende de los precios del mercado, ingresos, tasa de interés, etc).

En esta primera etapa, el individuo resuelve el problema

$$\text{Maximizar} \quad E_p[U(C(t)|\theta)] = \int_0^{T_0} e^{-\rho t} \int_\Theta U(C(t)|\theta)p(\theta)d\theta dt, \qquad (II.8.1)$$

$$\text{sujeto a} \qquad C(t) \in S_0,$$

para el intervalo de tiempo h, $T_0 = h$, y aprende algo más sobre θ al consumir las cantidades, $C(t), 0 \leq t \leq T_0$, que maximizan el problema (II.8.1).

Se supone que la información ganada, la cual asociaremos a una distribución ***a posteriori*** $\pi(\theta)$, puede ser representada en términos de valores esperados como

$$\int_\Theta a_k(\theta)\pi(\theta)d\theta = \bar{a}_k, \quad k = 1, 2, ..., m, \qquad (II.8.2)$$

en donde, por supuesto, las funciones a_k, $k = 1, 2, ...m$ y las constantes $\bar{a}_k$, $k = 1, 2, ...m$ son todas conocidas.

En la siguiente etapa, etapa 1, el comportamiento racional que el individuo sigue para determinar una distribución *a posteriori*, π^*, que incorpore la información ganada, (II.8.2), en su conocimiento inicial representado por $p(\theta)$, es el de minimizador de entropía cruzada. Es decir, el individuo resuelve el problema*:

$$\text{Minimizar} \qquad H(\pi,p)=\int_\Theta \pi(\theta)\log\frac{\pi(\theta)}{p(\theta)}d\theta,$$

$$\text{sujeto a} \quad \begin{cases} \displaystyle\int_\Theta \pi(\theta)d\theta = 1, \\ \displaystyle\int_\Theta a_k(\theta)\pi(\theta)d\theta = \bar{a}_k, \quad k=1,2,\dots,m. \end{cases}$$

Una vez resuelto el sistema (Suponemos que se cumplen la condición de segundo orden del problema variacional, a saber, la condición de Legendre (ver Kamien y Schwartz (1981)), el individuo vuelve a resolver, en la etapa 2, un problema de maximización de utilidad esperada

$$\text{Maximizar} \quad E_{\pi^*}[U(C(t)|\theta)] = \int_{T_0}^{T_1} e^{-\rho(t-T_0)}\int_\Theta U(C(t)|\theta)\pi^*(\theta|p,T_0)d\theta dt. \qquad (II.8.3)$$

$$\text{sujeto a} \qquad C(t)\in S_1,$$

donde $T_1 = T_0 + h$.

Suponemos que las decisiones del individuo no afectan a los parámetros que aparezcan en las restricciones impuestas en S_0 o en S_1 (precios de mercado, ingresos, tasa de interés, etc).

El proceso anterior puede ser recursivo, en el sentido de que si el individuo sigue inseguro sobre los valores de los parámetros en su función de utilidad, una distribución a *posteriori* se utiliza como una distribución *a priori* y el proceso se inicia de nuevo. Entre más rápido el individuo determine los valores verdaderos de los parámetros, mayor será la utilidad que experimente en cada periodo.

A manera de resumen, se identifican 3 etapas fundamentales en el modelado del proceso de aprendizaje:

(i) En la etapa 0, el individuo resuelve el problema de maximización de utilidad esperada

$$\text{Maximizar} \quad E_p[U(C(t)|\theta)]=\int_0^{T_0} e^{-\rho t}\int_\Theta U(C(t)|\theta)p(\theta)d\theta dt.$$

$$\text{sujeto a} \qquad C(t)\in S_0.$$

y aprende algo más sobre θ al consumir las cantidades, $C(t), 0\leq t\leq T_0$, que maximizan la utilidad esperada con respecto de p. Lo aprendido puede ser representado por

$$\int_\Theta a_k(\theta)\pi(\theta)d\theta=\bar{a}_k, \quad k=1,2,\dots,m.$$

---

* Es importante mencionar que la entropía cruzada es una función no negativa y estrictamente cóncava con respecto del argumento π.

(*ii*) En la etapa 2, el individuo determina una distribución *a posteriori*, π^*, al resolver el problema de minimización de entropía cruzada

$$\text{Minimizar} \qquad H(\pi,p)=\int_\Theta \pi(\theta)\, log\, \frac{\pi(\theta)}{p(\theta)}\, d\theta,$$

$$\text{sujeto a} \quad \begin{cases} \int_\Theta \pi(\theta) d\theta = 1, \\ \int_\Theta a_k(\theta)\pi(\theta)d\theta = \bar{a}_k, \quad k=1,2,...,m. \end{cases}$$

(*iii*) En la etapa 2, el individuo vuelve a resolver un problema de maximización de utilidad esperada

$$\text{Maximizar} \quad E_{\pi^*}[U(C(t)|\theta)]=\int_{T_0}^{T_1} e^{-\rho(t-T_0)} \int_\Theta U(C(t)|\theta)\pi^*(\theta|p,T_0)d\theta dt,$$

$$\text{sujeto a} \qquad C(t)\in S_1.$$

II.8.6 APRENDIZAJE CON MAXIMA ENTROPIA

Si en la etapa 0, no existe una distribución *a priori*, $p = p(\theta)$, $\theta \in \Theta$, que describa el conocimiento adicional del individuo, entonces el individuo consume cualquier $C(t) \in S_0$ hasta el tiempo T_0 para obtener información adicional sobre θ. Se supone que esta información puede ser expresada en términos de valores esperados, digamos

$$\int_\Theta a_k(\theta)\pi(\theta)d\theta = \bar{a}_k, \quad k = 1,2,...,m, \qquad (II.8.4)$$

En la etapa 1, el comportamiento racional que el individuo sigue para determinar una distribución *a posteriori*, $\pi(\theta)$, que incorpore la información ganada, (II.8.4), es el de maximizador de entropía. Es decir, el individuo resuelve el problema:

$$\text{Maximizar} \qquad H(\pi) = -\int_\Theta \pi(\theta)\log \pi(\theta) d\theta,$$

$$\text{sujeto a} \quad \begin{cases} \int_\Theta \pi(\theta)d\theta = 1, \\ \int_\Theta a_k(\theta)\pi(\theta)d\theta = \bar{a}_k, \quad k = 1,2,...,m. \end{cases}$$

Una vez resuelto el sistema, el individuo resuelve, en la etapa 2, el problema

$$\text{Maximizar} \quad E_{\pi^*}[U(C(t)|\theta)] = \int_{T_0}^{T_1} e^{-\rho(t-T_0)} \int_\Theta U(C(t)|\theta)\pi^*(\theta|p,T_0)d\theta dt, \qquad (II.8.5)$$

$$\text{sujeto a} \qquad C(t) \in S_1,$$

donde $T_1 = T_0 + h$. Al igual que antes, suponemos que las decisiones del individuo no afectan a los parámetros que aparecen en S_0 o en S_1.

En resumen, se identifican 3 etapas fundamentales en el modelado del proceso de aprendizaje con máxima entropía:

(i) En la etapa 0, el individuo consume cualquier $C(t) \in S_0$ para aprender algo más sobre θ, digamos

$$\int_{\Theta} a_k(\theta)\pi(\theta)d\theta = \bar{a}_k, \quad k=1,2,\ldots,m.$$

(ii) En la etapa 1, el individuo determina una distribución *a posteriori*, π^*, al resolver el problema de maximización de entropía

$$\text{Maximizar} \qquad H(\pi) = -\int_{\Theta} \pi(\theta)\, log\, \frac{\pi(\theta)}{p(\theta)}\, d\theta,$$

$$\text{sujeto a} \quad \begin{cases} \int_{\Theta} \pi(\theta)d\theta = 1, \\ \int_{\Theta} a_k(\theta)\pi(\theta)d\theta = \bar{a}_k, \quad k=1,2,\ldots,m. \end{cases}$$

(iii) En la etapa 2, el individuo vuelve a resolver un problema de maximización de utilidad esperada

$$\text{Maximizar} \quad E_{\pi^*}[U(C(t)|\theta)] = \int_{T_0}^{T_1} e^{-\rho(t-T_0)} \int_{\Theta} U(C(t)|\theta)\pi^*(\theta|p,T_0)d\theta dt,$$

$$\text{sujeto a} \qquad C(t) \in S_1.$$

El proceso anterior, como antes, puede ser recursivo.

Es importante guardar en mente el siguiente resultado útil en aplicaciones. Sea π^* la solución de mínima entropía cruzada o de máxima entropía, y suponga que las funciones $a_k(\theta)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, m$, donde $a_0(\theta) \equiv 1$, son continuas y linealmente independientes con

$$\int_{\Theta} a_j(\theta)a_\ell(\theta)\pi^*(\theta)d\theta < \infty, \quad \text{para toda } j, \ell = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

Entonces la solución es única (ver Venegas (1990)).

II.9 MODELO DE CUENTA CORRIENTE Y TIPO DE CAMBIO REAL CONSIDERANDO EFECTOS DE APRENDIZAJE

Como en el modelo II.7 se analiza el impacto que sobre la cuenta corriente y el tipo de cambio real tiene una política de estabilización basada en una disminución temporal de la tasa de devaluación, pero ahora con la modificación que el individuo está incierto sobre los valores de los parámetros de su función de utilidad (comparar con modelo II.8). En cuanto a las funciones de utilidad se trabaja en forma explícita el grado relativo de aversión al riesgo.

II.9.1 SUPUESTOS SOBRE EL MODELO

Todos los supuestos citados en el modelo II.7 son válidos en éste, además se tiene las siguientes:

(i) el individuo conoce la forma funcional de su función de utilidad, pero no está seguro de los valores de los parámetros que en ella aparecen,

(ii) el individuo minimiza entropía cruzada para incorporar aprendizaje sobre su función de utilidad.

II.9.2 DEFINICION DE PARAMETROS

Todos los parámetros citados en el modelo II.7 son válidos en éste además se consideran parámetros nuevos, éstos son:

(i) γ, grado relativo de aversión al riesgo.

II.9.3 EL MODELO

La utilidad esperada descontada, al tiempo $t = 0$ (el presente), de un individuo representativo con vida infinita (o de una familia cuyos padres se preocupan por hijos, nietos y demás descendientes) está dada por

$$V(0) = \int_{\Gamma} \left\{ \int_0^{\infty} u[c(t)|\gamma]e^{-\rho t} dt \right\} dF(\gamma), \qquad (II.9.1)$$

en donde la integral sobre Γ es tomada en el sentido de Stieltjes con el fin de incluir distribuciones continuas, discretas o mezclas. Suponemos que la integral doble satisface las condiciones del Teorema de Fubini para que sea irrelevante el orden de integración.

Aquí, γ es el grado relativo de aversión al riesgo, $c(t)$ es el consumo, ρ es la tasa subjetiva intertemporal de descuento y $u(\cdot|\gamma)$ es una función creciente, estrictamente cóncava con segunda derivada continua que satisface

$$\lim_{c\to\infty} u'(c|\gamma) = 0, \qquad \lim_{c\to 0} u'(c|\gamma) = \infty.$$

Para ser más específicos vamos a considerar una función de utilidad de la forma

$$u[c(t)|\gamma] = \begin{cases} \frac{c(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}, & \text{para un valor de } \gamma \neq 1, \ \gamma > 0 \\ \log c(t), & \text{para } \gamma = 1, \end{cases}$$

en donde el grado relativo de aversión al riesgo, λ, toma dos posibles valores, uno para $\gamma=1$ y otro para un valor positivo de γ distinto de 1.

Observe que para esta función de utilidad, la elasticidad de sustitución entre $c(t)$ y $c(s)$ con $s \neq t$, está dada por

$$\sigma[c(t)|\gamma] = -\frac{u'[c(t)|\gamma]/u'[c(s)|\gamma]}{c(s)/c(t)} \frac{d[c(s)/c(t)]}{d\{u'[c(s)|\gamma]/u'[c(t)\gamma]\}} = \frac{1}{\gamma}.$$

También note que cuando $s \to t$ la elasticidad de sustitución satisface

$$\lim_{s\to t} \sigma[c(t)|\gamma] = -u'[c(t)|\gamma]/\{u''[c(t)|\gamma]c(t)\} = \sigma = \frac{1}{\gamma},$$

y, como se sabe, el grado relativo de aversión al riesgo cumple con

$$\gamma = -u''[c(t)|\gamma] \frac{c(t)}{u'[c(t)]}.$$

Observe que ahora, bajo la forma específica que hemos adoptado para la función de utilidad,

$$V(0) = P\left\{\gamma=1\right\} \int_0^\infty \log c(t) e^{-\rho t} dt + P\left\{\gamma\neq 1\right\} \int_0^\infty \frac{c(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} e^{-\rho t} dt.$$

Las restricciones en este modelo corresponden con las del modelo II.7.

El problema es encontrar la trayectoria de consumo $c(t)$, considerando que la tasa de devaluación se comporta según la función (II.7.19), y considerando un proceso de aprendizaje sobre el parámetro γ de la función de utilidad, tal que se solucione:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & \int_0^\infty \left\{ \int_\Gamma u[c(t)|\gamma] dF(\gamma) \right\} e^{-rt} dt, \\ \text{sujeto a} \quad & \int_0^\infty [y + g(t) - c(t)(1 + \alpha i(t))] e^{-rt} dt = -a(0), \\ & a(0) = a_0. \end{aligned}$$

II.9.4 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El problema planteado de maximización de utilidad puede ser resuelto utilizando: (I) Cálculo de variaciones (Ecuaciones de Euler-Lagrange); o bien (II) Control óptimo (Principio del máximo de Pontryagin).

Los siguientes planteamientos son equivalentes:

$$\begin{cases} \text{Maximizar} & \displaystyle\int_0^\infty \left\{ \int_\Gamma u[c(t)|\gamma] dF(\gamma) \right\} e^{-rt} dt, \\ \text{sujeto a} & \dot{a}(t) = ra(t) + y + g(t) - c(t)(1 + \alpha i(t)), \\ & a(0) = a_0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Maximizar} & \displaystyle\int_0^\infty \left\{ \int_\Gamma u \left[\frac{y - \dot{a}(t) + ra(t) + g(t)}{(1 + \alpha i(t))} \middle| \gamma \right] dF(\gamma) \right\} e^{-rt} dt, \\ \text{sujeto a} & a(0) = a_0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Maximizar} & \displaystyle\int_0^\infty \left\{ \int_\Gamma u[c(t)|\gamma] dF(\gamma) \right\} e^{-rt} dt, \\ \text{sujeto a} & \displaystyle\int_0^\infty e^{-rt} \dot{a}(t) dt = \int_0^\infty e^{-rt} [ra(t) + y + g(t) - c(t)(1 + \alpha i(t))] dt, \\ & a(0) = a_0. \end{cases}$$

Aplicando la condición "No Ponzi Game" al planteamiento anterior se obtiene (comparar con II.7.4):

$$\begin{cases} \text{Maximizar} & \displaystyle\int_0^\infty \left\{ \int_\Gamma u[c(t)|\gamma] dF(\gamma) \right\} e^{-rt} dt, \\ \text{sujeto a} & \displaystyle\int_0^\infty [y + g(t) - c(t)(1 + \alpha i(t))] e^{-rt} dt = -a(0), \\ & \displaystyle\lim_{t \to \infty} a(t) e^{-rt} = 0, \\ & a(0) = a_0. \end{cases}$$

II.9.5 PRIMERA EXTENSION DEL MODELO

En la primera extensión se incluye bienes no-comerciables, y se pretende ver, si las conclusiones obtenidas siguen siendo válidas.

Lo demás corresponde con II.7.6 .

II.9.6 SEGUNDA EXTENSION DEL MODELO

En la segunda extensión se modifica el modelo por el supuesto que el dinero proporciona utilidad por servicios de liquidez, y dinero y consumo son complementos a la Edgeworth. A continuación se pretende ver, si las conclusiones obtenidas siguen siendo válidas.

La condición cash-in-advance es indudablemente muy restrictiva. Para relajar este supuesto vamos a suponer que la función de utilidad incluye saldos monetarios reales, reflejando con esto que el dinero le proporciona utilidad al individuo por sus servicios de liquidez.

En esta sección consideramos el siguiente supuesto:

(*i*) La función de utilidad satisface $u_{cm} > 0$, es decir, consumo y dinero son complementos a la Edgeworth.

Ahora, la utilidad total descontada al tiempo $t = 0$ está dada por

$$V(0) = \int_{0<\alpha<1} \int_{R>0} \left\{ \int_0^{\infty} u[c(t), m(t)|\alpha, R] e^{-\rho t} dt \right\} dF(\alpha) dF(R),$$

en donde α es un parámetro de distribución y R es el grado relativo de aversión al riesgo. Se supone que α y R son variables aleatorias independientes. Aquí, $u(\cdot,\cdot)$ es una función creciente en ambos argumentos, estrictamente cóncava con segundas derivadas parciales continuas, y que satisface

$$\lim_{c\to\infty} u_c(c, m|\alpha, R) = 0, \quad \text{para } m \text{ fija}, \qquad \lim_{m\to 0} u_m(c, m|\alpha, R) = \infty, \quad \text{para } c \text{ fija},$$

$$\lim_{c\to 0} u_c(c, m|\alpha, R) = \infty, \quad \text{para } m \text{ fija}, \qquad \lim_{m\to\infty} u_m(c, m|\alpha, R) = 0. \quad \text{para } c \text{ fija}.$$

Para ser más específicos, vamos a suponer que la función de utilidad u tiene una forma específica. Sea $0<\alpha<1$,

$$u(c,m)=\begin{cases} \frac{(c^{\alpha} m^{1-\alpha})^{1-R}}{1-R}, & \text{para algún valor } R\neq 1, \ R>0, \\ \alpha \log c + (1-\alpha) \log m, & \text{para } R=1. \end{cases}$$

III. MODELOS ESTOCASTICOS

En este capítulo se formulan dos modelos estocásticos, donde cada uno cuenta con una pequeña introducción, después se presentan los supuestos, la definición de variables y parámetros, la descripción del modelo y al final el planteamiento del problema a resolver. Las variables y parámetros que no se definen explicitamente en un modelo tienen el mismo significado que en los modelos anteriores.

III.1 MODELO NEOCLASICO DE CRECIMIENTO ECONOMICO OPTIMO BAJO INCERTIDUMBRE

El modelo neoclásico de crecimiento económico óptimo bajo incertidumbre es una modificación del primer modelo, que toma en cuenta las variaciones del tamaño de la fuerza de trabajo que se rigen por una *ecuación diferencial estocástica* en la que aparece un proceso de Wiener. El objetivo es el mismo del primer modelo, es decir, un planificador central desea determinar las trayectorias de consumo (variable de control) y capital (variable de estado) que maximizan el bienestar de la economía.

III.1.1 SUPUESTO SOBRE EL MODELO

Todos los supuestos citados en el primer modelo son válidos en éste, excepto el supuesto siete que se modifica de la siguiente manera:

(*vii*) las variaciones del tamaño de la población están sujetos a una ecuación diferencial estocástica, en la cual está considerado un proceso de Wiener.

III.1.2 DEFINICION DE PARAMETROS

Varios parámetros en este modelo ya han sido citados en el primero, sólo se citan los nuevos parámetros, éstos son:

(*i*) η, es el promedio en el cambio de la fuerza laboral,
(*ii*) σ^2, es la varianza en el cambio de la fuerza laboral.

III.1.3 EL MODELO

Para plantear el modelo se considera importante poder establecer la ecuación diferencial estocástica de crecimiento de Solow en forma explícita, donde está considerada la ecuación diferencial estocástica de crecimiento de la población.

Derivación de la ecuación estocástica de Solow, en la cual se hace uso del *lema de Itô*.*

Sea $\dot{K}(t) = F(K(t), L(t)) - C(t)$ la ecuación diferencial de acumulación de capital, la cual es equivalente a

$$dK(t) = [F(K(t), L(t)) - C(t)]dt. \qquad (III.1.1)$$

Dividiendo la ecuación anterior por el trabajo $L(t)$, se tiene que $d(K(t)/L(t)) = [F(K(t)/L(t), 1) - C(t)]dt$, ésta última expresión se puede escribir como

$$d\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right) = [f(k(t)) - c(t)]dt, \qquad (III.1.2)$$

donde $k(t) = K(t)/L(t)$.

Supóngase que las variaciones en el tamaño de la fuerza de trabajo está representada por la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dL(t) = \eta L(t)dt + \sigma L(t)dz, \qquad (II.1.3)$$

---

* *lema de Itô*.- Supóngase que una variable x sigue el proceso general de *Itô*, es decir,

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz, \qquad (1)$$

donde a y b son funciones del valor de la variable x y el tiempo t, además este proceso, z, tiene la propiedad $dz = \sqrt{dt}$. Elevando al cuadrado la versión discreta de la ecuación (1), se tiene

$$(\Delta x)^2 = a^2(\Delta t)^2 + 2ab(\Delta t)^{3/2} + b^2\Delta t. \qquad (2)$$

Si $G(x,t)$ se expresa en un desarrollo de Taylor, es decir

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t}(\Delta x)(\Delta t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(\Delta t)^2 + \ldots$$

y se usa la ecuación (2) despreciando los términos $(\Delta t)^2$ y $(\Delta t)^{3/2}$, tomando el límite cuando $\Delta t \to 0$, entonces

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2(dt),$$

sustituyendo la ecuación (1) en la expresión anterior, se tiene

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}b\,dz.$$

donde z es el proceso de Wiener estándar (o movimiento Browniano)** ; η es la media del crecimiento de la población y σ^2 su varianza. Es decir, la población crece exponencialmente a una tasa η con choques independientemente e idénticamente distribuidos alrededor de la curva.

Usemos una expansión de $k(t) = K(t)/L(t)$ como función de $K(t)$ y $L(t)$ a través de un desarrollo en serie de Taylor, entonces la primera diferencial en la serie es

$$d\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right) = \frac{dK(t)}{L(t)} - \frac{K(t)}{(L(t))^2}dL(t), \qquad (III.1.4)$$

y la segunda diferencial es

$$d^2\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right) = \frac{d^2K(t)}{L(t)} - \frac{dK(t)dL(t)}{(L(t))^2} - \frac{K(t)}{(L(t))^2}d^2L(t) - \frac{dL(t)dK(t)}{(L(t))^2} + \frac{2K(t)}{L(t)}\left(\frac{dL(t)}{L(t)}\right)^2, \qquad (III.1.5)$$

se considera que los términos $d^2K(t)$, $d^2L(t)$ y $(dK(t))(dL(t))$ son despreciables, entonces la ecuación (III.1.5) es

$$d^2\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right) = \frac{2K(t)}{L(t)}\left(\frac{dL(t)}{L(t)}\right)^2, \qquad (III.1.6)$$

de las ecuaciones (III.1.4), (III.1.5) y Taylor, se tiene que

$$d\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right) = \frac{dK(t)}{L(t)} - \frac{K(t)}{L(t)}\left(\frac{dL(t)}{L(t)}\right) + \frac{K(t)}{L(t)}\left(\frac{dL(t)}{L(t)}\right)^2. \qquad (III.1.7)$$

Sustituyendo (III.1.2) y (III.1.3) en (III.1.7), se tiene que

$$dk(t) = [f(k(t)) - c(t)]dt - k(t)(\eta dt + \sigma dz) + k(t)(\eta dt + \sigma dz)^2.$$

Considérese $(dz)^2 = dt$, $(dz)(dt) = 0$ y $(dt)^2 = 0$ (reglas de operación del *lema de Itô*), entonces la expresión anterior conduce a la ecuación diferencial estocástica de Solow, *i.e.*,

$$dk(t) = [f(k(t)) - c(t) - (\eta - \sigma^2)k(t)]dt - k(t)\sigma dt^{1/2}. \qquad (III.1.8)$$

Sea $U(c(t))$ la función de utilidad del consumo per cápita al tiempo t, $\rho \geq 0$ la tasa de descuento constante y E_0 el operador de esperanza condicional, entonces el planteamiento

---

** Un proceso estocástico $\{z_t : t \geq 0\}$ en un espacio de probabilidades (Ω, F, P) es un *proceso Wiener estándar* si satisface las siguientes condiciones: (i) Los incrementos son independientes , *i.e.*, si $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k$ entonces las diferencias $\Delta z_j = z(t_j) - z(t_{j-1}), j = 1, 2, \cdots k(t)$, son variables aleatorias independientes. Ademas, Δz_j tiene una distribución normal con media 0 y varianza $t_j - t_{j-1}$. (ii) Para cada $\omega \in \Omega$, la realización $z_t(\omega)$ es continua en t. Además, $z_0(\omega) = 0$ con probabilidad uno, por convención.

del problema es:

$$
\begin{cases}
\text{Maximizar} \;\; E_0 \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\rho t} U(c(t))dt, \\
\qquad \text{sujeto a} \;\; dk(t) = [f(k(t)) - (\eta - \sigma^2)k(t) - c(t)]dt - \sigma k(t) dt^{1/2}, \\
\qquad\qquad\qquad k(t_0) = k_0, \\
\qquad\qquad\qquad 0 \leq c(t) \leq f(k(t)), \\
\qquad\qquad\qquad c(t), \;\; \text{continua por pedazos.}
\end{cases}
$$

III.2 MODELO DE SELECCION OPTIMA DE PORTAFOLIO BAJO INCERTIDUMBRE

En este modelo un individuo enfrenta el problema de optimizar su cartera de inversión (portafolio con un activo de renta variable y un activo de renta fija) y al mismo tiempo encontrar las trayectorias de consumo y distribución de su riqueza que maximizan su propio bienestar. Es un problema bajo incertidumbre ya que los rendimientos de la cartera de inversión son estocásticos.

III.2.1 SUPUESTOS SOBRE EL MODELO

El modelo toma en cuenta los siguientes supuestos:

(i) los ingresos del individuo se forman de los rendimientos de un activo riesgoso y de un activo libre de riesgo,

(ii) los rendimientos del activo riesgoso se rigen por una *ecuación diferencial estocástica* en la que aparece un proceso de Wiener,

(iii) todo la riqueza es destinada a consumo o inversión,

(iv) la tasa subjetiva intertemporal de descuento es constante,

(v) no hay inflación.

III.2.2 DEFINICION DE VARIABLES

A continuación se hace una lista de las variables que definen el modelo:

(i) $w(t)$, proporción de la riqueza invertido en el activo riesgoso al tiempo t,

(ii) $W(t)$, riqueza total del individuo al tiempo t,

(iii) $C(t)$, consumo al tiempo t.

III.2.3 DEFINICION DE PARAMETROS

A continuación se presenta una lista de los parámetros que se usan en el modelo:

(i) T, tiempo en que muere el individuo,

(ii) ρ, tasa subjetiva intertemporal de descuento,

(iii) r, tasa de interés que paga el activo libre de riesgo,

(iv) α, media del crecimiento del valor del activo riesgoso,

(v) σ, desviación estándar del crecimiento del valor del activo riesgoso.

III.2.4 EL MODELO

Se supone que las variaciones en el valor del activo riesgoso están representadas por la siguiente ecuación diferencial estocástica. Si $R(t)$ es la proporción de la riqueza que se inverte en el activo riesgoso al tiempo t, α la media del crecimiento del valor del activo riesgoso y σ su desviación estandar, entonces

$$dR(t) = \alpha R(t)dt + \sigma R(t)dz, \tag{III.2.1}$$

donde z es un proceso de Wiener[1] estándar (o movimiento Browniano). Note también que $R(t)$ está dado por

$$R(t) = w(t)W(t),$$

donde $w(t)$ es la proporción de la riqueza invertida en el activo riesgoso al tiempo t y $W(t)$ es la riqueza total al tiempo t. Entonces, se tiene

$$dR(t) = \alpha w(t)W(t)dt + \sigma w(t)W(t)dz. \tag{III.2.2}$$

El cambio marginal en la riqueza está dada por la siguiente ecuación diferencial

$$dW(t) = dR(t) + (1 - w(t))W(t)rdt - C(t)dt, \tag{III.2.3}$$

donde $dR(t)$ es el cambio en el valor del activo riesgoso, $(1 - w(t))W(t)rdt$ el cambio en el valor del activo seguro y $C(t)$ el consumo por unidad de tiempo al tiempo t. Sustituyendo la ecuaciones (III.2.2) en la ecuación (III.2.3) se tiene:

$$\begin{aligned} dW(t) &= \alpha w(t)W(t)dt + \sigma w(t)W(t)dz + (1 - w(t))W(t)rdt - C(t)dt \\ &= [w(t)(\alpha - r) + r]W(t) - C(t)dt + w(t)W(t)\sigma dz. \end{aligned}$$

Aplicando la convención $dz = (dt)^{1/2}$ se obiene la *ecuación diferencial estocástica de presupuesto*:

$$dW(t) = [w(t)(\alpha - r) + r]W(t) - C(t)dt + w(t)W(t)\sigma(dt)^{1/2}. \tag{III.2.4}$$

La riqueza inicial está dada por

$$W(0) = W_0 > 0. \tag{III.2.5}$$

Se tiene la siguiente función objetivo

$$\text{Maximizar} \;\; E_0\left\{\int_0^T e^{-\rho t}U(C(t))dt + B(W(T),T)\right\}, \tag{III.2.6}$$

[1] comparar con modelo III.1

donde $U(C(t))$ es la función de utilidad del consumo y $B(W(T),T)$ es la función de utilidad por dejar una herencia. Se necesitan aquí, de nuevo, las mismas condiciones que se formularon para funciones de utilidad en el primer modelo. T es el tiempo en que muere el individuo y E_0 el operador de la esperanza condicional dadas las condiciones iniciales.

El problema es encontrar una trayectoria de consumo $C(t)$ y una trayectoria de la proporción de la riqueza que se asigna al activo riesgoso $w(t)$ tal que se resuelva:

$$\begin{cases} \text{Maximizar} \quad E_0\left\{ \int_0^T e^{-\rho t} U(C(t))dt + B[W(T),T] \right\}, \\ \text{sujeto a} \quad dW = [w(t)(\alpha - r) + r]W(t) - C(t)dt + w(t)W(t)\sigma(dt)^{1/2}, \\ \qquad\qquad W(0) = W_0 > 0, \\ \qquad\qquad W(t) > 0, \\ \qquad\qquad C(t) \geq 0. \end{cases}$$

IV TECNICAS DE SOLUCION

A continuación se presentan las técnicas de solución para los problemas de optimización planteados en el capítulo anterior. Las técnicas comprenden: Cálculo de Variaciones, Control Optimo y Control Optimo Estocástico. Todos los problemas deterministas, planteados, pueden ser resueltos vía cálculo de variaciones o control óptimo. El interés no es presentar toda la teoría que respalda los métodos, ya que ésta es ampliamente conocida, sino mostrar la aplicación de las técnicas a problemas en la microeconomía y macroeconomía.

IV.1 CALCULO DE VARIACIONES

Existe una gran variedad de problemas que surgen en la *teoría de optimización* en espacios de funciones, éstos tienen un carácter sustancialmente no lineal, y se pueden afrontar por métodos variacionales, los cuales constituyen una de las ramas principales del análisis funcional no lineal. Dichos métodos nos conducirán a la solución de los problemas planteados.

Entre los problemas de optimización en espacios de funciones se tratarán funcionales de un tipo muy especial, es decir, funcionales representadas por integrales.

Para ser más explicitos, iniciaremos con una definición.

Definición.- Sea $(V, ||\cdot||)$ un espacio lineal normado, B_ε una bola abierta de radio ε en V, $J : B_\varepsilon \subset V \to \mathbf{R}$ una funcional y $L(V, \mathbf{R})$ el espacio de funcionales que van de V a $\mathbf{R}$. Se dice que la funcional J es diferenciable en el punto $f \in B_\varepsilon$, si existe una funcional lineal acotada $dJ(f) \in L(V, \mathbf{R}) = V^*$, tal que para $(f+h) \in B_\varepsilon$, $J(f+h) - J(f) = dJ(f)(h) + o(||h||)$, donde $o(||h||)$ significa que $|o(||h||)|/||h|| = |J(f+h) - J(f) - dJ(f)(h)|/||h|| \to 0$ cuando $||h|| \to 0$, $o(||h||)$ es frecuentemente llamado un infenitésimo de orden superior al primero respecto a $||h||$. $dJ(f)(h)$ es llamada la diferencial de Fréchet de la funcional J en el punto $f \in B_\varepsilon$. Obviamente este concepto es local. Por lo que es conveniente definir a una funcional J como diferenciable en un conjunto $B_\varepsilon \subset V$, si es diferenciable para cada $f \in B_\varepsilon$, esto es, para cada $f \in B_\varepsilon$ existe $dJ(f) \in L(V, \mathrm{R}) = V^*$, tal que cumple con la propiedad antes mencionada.

IV.1.1 TIPO 1

El primer tipo de problemas es como se presenta a continuación.

Teorema: Considérese una funcional de la forma

$$J = J(f) = \int_a^b F(t, f(t), f'(t))dt,$$

sujeto a las siguientes restricciones o condiciones de frontera

$$f(a) = A,$$

$$f(b) = B,$$

donde $F \in C^2$, es decir, una función con primera y segunda derivadas parciales continuas con respecto a todos sus argumentos. Supóngase que $V = C^1[a,b]$ con norma $\|f\| = \max_{t\in[a,b]} |f(t)| + \max_{t\in[a,b]} |f'(t)|$. Entonces una condición necesaria para que la funcional $J(f)$ tenga un extremo en una función dada $f(t)$, es que satisfaga la ecuación de Euler, es decir*

$$\frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f'}\right) = 0.$$

Demostración: Demos a la función f un incremento h, de tal manera que $(f+h) \in B_\varepsilon$, y $f+h$ siga satisfaciendo las condiciones de frontera, para la cual $h(a) = h(b) = 0$, esto es $h \in C_o[a,b]$, espacio de funciones continuas que se anulan en a y b, en la terminología de los métodos variacionales tal función h es llamada una función admisible, entonces calculando la diferencia $J(f+h) - J(f)$ se tiene que

$$J(f+h) - J(f) = \int_a^b (F(t, f+h, f'+h') - F(t,f,f'))dt,$$

se sigue del Teorema de Taylor que

$$\begin{aligned} J(f+h) - J(f) = &\int_a^b \left(\frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f} h(t) + \frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f'} h'(t)\right) dt \\ &+ \tfrac{1}{2} \int_a^b \left(\frac{\partial^2 F(t, f+\theta h, f'+\theta h')}{\partial f^2} h^2(t)\right. \\ &+ 2\frac{\partial^2 F(t, f+\theta h, f'+\theta h')}{\partial f \partial f'} h(t)h'(t) \\ &+ \left.\frac{\partial^2 F(t, f+\theta h, f'+\theta h')}{\partial f'^2} (h'(t))^2\right) dt, \end{aligned}$$

donde $\theta \in [0,1]$. Además se sabe que existen M_1, M_2 y M_3 tales que $\left|\frac{\partial^2 F(t,f,f')}{\partial f^2}\right| \leq M_1$, $\left|\frac{\partial^2 F(t,f,f')}{\partial f \partial f'}\right| \leq M_2$ y $\left|\frac{\partial^2 F(t,f,f')}{\partial f'^2}\right| \leq M_3$ para todo (t,f,f'), pues F tiene segundas derivadas continuas con respecto a todos sus argumentos. Se define $M = \max\{M_i\}$,

---

* Para simplificar la notación se usará f, f', h, h', g, g' recordando que estan en función del tiempo t.

si $||h|| = \max|h(t)| + \max|h'(t)|$ se obtiene lo siguiente para la segunda integral de la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\int_a^b (\ldots)dt &\leq \tfrac{1}{2}\int_a^b (Mh^2 + 2Mhh' + Mh'^2)dt \\
&\leq \tfrac{1}{2}M\int_a^b (h^2 + 2hh' + h'^2)dt \\
&\leq \tfrac{1}{2}M\int_a^b \Big[\max_{t\in[a,b]}|h(t)|^2 \\
&\qquad + 2\left(\max_{t\in[a,b]}|h(t)| \max_{t\in[a,b]}|h'(t)|\right) \\
&\qquad + \max_{t\in[a,b]}|h'(t)|^2\Big]dt \\
&\leq \tfrac{1}{2}M(b-a)\Big[\max_{t\in[a,b]}|h(t)| + \max_{t\in[a,b]}|h'(t)|\Big]^2 \\
&\leq \tfrac{1}{2}M(b-a)||h||^2.
\end{aligned}$$

Dividiendo el resultado entre $||h||$ y tomando el límite ($||h|| \to 0$) se tiene:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}\int_a^b(\ldots)dt}{||h||} \leq \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}M(b-a)||h||^2}{||h||} = \lim_{h\to 0}\frac{o(||h||)}{||h||} = 0,$$

así en valor absoluto la segunda integral es igual a cero en el límite. Entonces

$$dJ(f)(h) = \int_a^b \left(\frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f}h(t) + \frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f'}h'(t)\right)dt,$$

una condición necesaria para que la funcional J tenga un extremo en el punto f es que $dJ(f)(h) = 0$ para toda h admisible en $C_o[a,b] \cap C^1[a,b]$, entonces

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f}h(t) + \frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f'}h'(t)\right)dt = 0,$$

para toda h admisible, pero integrando por partes el segundo sumando del integrando, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f'}h'(t)dt &= \frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f'}h(t)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f'}\right)h(t)dt \\
&= -\int_a^b \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f'}\right)h(t)dt,
\end{aligned}$$

así

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f'}\right)\right]h(t)dt = 0,$$

para toda h admisible. Por tanto

$$\frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f'}\right) = 0.$$

La ecuación de Euler proporciona una condición necesaria para un extremo y, en muchos casos, ésta es suficiente para dar una solución completa del problema variacional. La ecuación de Euler es en general una ecuación diferencial de segundo orden. Pero puede ser que para una curva dada, la función tenga un extremo y dicha curva no sea dos veces diferenciable, y sin embargo, satisface la ecuación de Euler.

IV.1.2 TIPO 2

El tipo dos se presenta a continuación.

Teorema: Considérese una funcional de la forma

$$J = J(f) = \int_a^b F(t,f,g,f',g')dt,$$

sujeto a las siguientes restricciones o condiciones de frontera

$$f(a) = A,$$

$$f(b) = B,$$

donde $F \in C^2[a,b]$, es decir, una función con primera y segunda derivadas parciales continuas con respecto a todos sus argumentos; $||(f,g)|| = \max_{t\in[a,b]} |f(t)| + \max_{t\in[a,b]} |f'(t)| + \max_{t\in[a,b]} |g(t)| + \max_{t\in[a,b]} |g'(t)|$; $(f,g) \in B_\varepsilon \subset (C_1[a,b])$, $(f',g') \in B_\varepsilon \subset (C_1[a,b])$, (f,g) satisface las condiciones de frontera.

Entonces, una condición necesaria para que la funcional J tenga un extremo en un vector dado (f,g), es que este vector satisfaga las ecuaciónes de Euler, es decir

$$\frac{\partial F(t,f,g,f',g')}{\partial f} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F(t,f,g,f',g')}{\partial f'}\right) = 0,$$

y

$$\frac{\partial F(t,f,g,f',g')}{\partial g} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F(t,f,g,f',g')}{\partial g'}\right) = 0.$$

Demostración: Demos al vector (f,g) un incremento (h_1,h_2), $||(h_1,h_2)|| < \varepsilon$, de tal manera que se sigan satisfaciendo las condiciones de frontera, entonces $(h_1,h_2) \in (C_o[a,b])^2 \cap$

$(C_1[a,b])^2$, entonces calculando la diferencia $J(f+h_1,g+h_2)-J(f,g)$ y usando el teorema de Taylor se tiene que

$$J(f+h_1,g+h_2)-J(f,g)=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial f}h_1-\frac{\partial F}{\partial f'}h_1'\right)dt+\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial g}h_2-\frac{\partial F}{\partial g'}h_2'\right)dt+o(\|(h_1,h_2)\|.$$

Por tanto

$$dF(f,g)(h_1,h_2)=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial f}h_1-\frac{\partial F}{\partial f'}h_1'\right)dt+\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial g}h_2-\frac{\partial F}{\partial g'}h_2'\right)dt.$$

La condición necesaria $dJ(f,g)(h_1,h_2)=0,\ \ (h_1,h_2)\in(C_o[a,b])^2\cap(C^1[a,b])^2$ implica que

$$\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial f}h_1-\frac{\partial F}{\partial f'}h_1'\right)dt+\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial g}h_2-\frac{\partial F}{\partial g'}h_2'\right)dt=0,$$

puesto que todos los incrementos $h_{1,2}(t)$ son independientes, entonces de acuerdo con el problema tipo uno, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones de Euler

$$\frac{\partial F(t,f,g,f',g')}{\partial f}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F(t,f,g,f',g')}{\partial f'}\right)=0,$$

$$\frac{\partial F(t,f,g,f',g')}{\partial g}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F(t,f,g,f',g')}{\partial g'}\right)=0.$$

Observese que las expresiones anteriores forman un sistema de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden, y que su solución general contiene dos constantes arbitrarias, las cuales son determinadas de las condiciones de frontera.

IV.1.3 TIPO 3

El tipo tres es para un problema Isoperimétrico.

Teorema: Considérense dos funcionales, es decir

$$J=J(f)=\int_a^b F(t,f,f')dt,$$

sujeto a las siguientes restricciones o condiciones de frontera

$$f(a)=A,$$

$$f(b)=B,$$

$$K=K(f)=\int_a^b G(t,f,f')dt=Q,$$

donde $K, F \epsilon C^2$, $t \in [a, b]$, es decir, una función con primera y segunda derivadas parciales continuas con respecto a todos sus argumentos; f una función para la cual la funcional J tiene un extremo (óptimo) y es tal que $||f|| = \max_{t\in[a,b]} |f(t)| + \max_{t\in[a,b]} |f'(t)|$; f satisface las condiciones de frontera. Se desea encontrar una función f para la cual la funcional J tenga un extremo (óptimo).

Si $f = f(t)$ es extremo de J pero no de K, entonces existe una constante p tal que f es extremo de la funcional $J + pK$, y por tanto f satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f'} + p\left(\frac{\partial G(t,f,f')}{\partial f} - \frac{d}{dt}\frac{\partial G(t,f,f')}{\partial f'}\right) = 0.$$

Demostración: Transformando el planteamiento del teorema anterior en uno de Control Optimo* se tiene:

$$J = \int_a^b F(f, u)dt,$$

sujeto a

$$\begin{aligned} f' &= u, \\ g' &= G(f, u), \\ f(a) &= A, \\ f(b) &= B, \\ g(a) &= 0, \\ g(b) &= Q. \end{aligned}$$

Se desea encontrar una función f para la cual la funcional J tenga un extremo (óptimo). Primero se formula el Hamiltoniano

$$H(\lambda, f, u) = \lambda_0 F(f, u) + \lambda_1 G(f, u) + \lambda_2 u.$$

Las ecuaciones adjuntas son

$$\begin{aligned} -\dot{\lambda}_1 &= \lambda_0 F_f + \lambda_1 G_f, \\ -\dot{\lambda}_2 &= 0. \end{aligned}$$

La condición para el máximo es

$$0 = \lambda_0 F_u + \lambda_1 G_u + \lambda_2.$$

Derivando la ecuación anterior con respecto al tiempo t y dado que $\dot{\lambda}_2 = 0$ se tiene

$$0 = \lambda_0 \frac{d}{dt} F_u + \lambda_1 \frac{d}{dt} G_u + G_u \dot{\lambda}_1.$$

---

* ver subcapítulo III.2

Para $\dot{\lambda}_1 = 0$ se obtiene junto con la ecuación adjunta

$$F_f - \frac{d}{dt}F_{f'} + \lambda\left(G_f - \frac{d}{dt}G_{f'}\right) = 0.$$

y sí $\dot{\lambda}_1 \neq 0$, entonces

$$\frac{1}{G'_f}\left(\frac{d}{dt}F'_f + \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\frac{d}{dt}G'_f\right) = F_f + \frac{\lambda_1}{\lambda_0}G_f.$$

IV.2 CONTROL OPTIMO

En Cálculo de Variaciones se busca minimizar o maximizar un índice de ejecución de un sistema determinado por un conjunto de ecuaciones diferenciales.

Se pueden formular los problemas de Cálculo de Variaciones en forma de problemas de Control Optimo con la modificación de que las variables de control están restringidas por un conjunto cerrado. Con la excepción de que la forma de las ecuaciones diferenciales de un problema de Control Optimo es un poco menos general que la de un problema de Cálculo de Variaciones, se puede decir que los problemas que se resuelven con Cálculo de Variaciones son casos especiales de problemas de Control Optimo. El método Cálculo de Variaciones tiene la desventaja de que no se pueden resolver problemas donde aparecen restricciones en forma de desigualdad.

IV.2.1 TIPO 1

El primer tipo de problemas que se van a considerar son problemas con condición inicial, pero sin condición terminal.

Estos problemas se formulan de la siguiente forma:

Se tiene un sistema, definido en un intervalo de tiempo $0 \leq t \leq T$,

$$\dot{f}(t) = G(f(t), u(t)), \qquad (IV.2.1a)$$

una condición inicial (fijo)

$$f(0) = f_0, \qquad (IV.2.1b)$$

un conjunto de controles permitidos

$$u(t) \in U, \qquad (IV.2.1c)$$

y una función objetivo,

$$J = \psi(f(T)) + \int_0^T F(f(t), u(t))dt, \qquad (IV.2.1d)$$

que se requiere maximizar. Aquí $u(t)$ es la variable de control, $f(t)$ la variable de estado y $\psi(f(T))$ la contribución a la función objetivo de la variable de estado al tiempo T. Se supone que la función $G(f(t), u(t))$ es una función bien comportada tal que el sistema tiene solución única.

LA FUNCION OBJETIVO MODIFICADA Y EL HAMILTONIANO

Las condiciones de maximización se obtienen considerando los efectos de cambios pequeños cerca del óptimo. Se empieza con la suposición de que la función de control $u(t)$ es óptima, después se hace un cambio pequeño en $u(t)$ y se determina el cambio inducido en la función objetivo J. Este cambio debe ser negativo si $u(t)$ es óptima.

Como un cambio en $u(t)$ también provoca un cambio en $f(t)$, es difícil determinar directamente la influencia neta en el valor de la función objetivo. Por eso se aplica un método indirecto. Se agrega a J términos que suman cero.

En particular se forma la función objetivo modificada*

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= J - \int_0^T \lambda[\dot{f} - G(f,u)]dt \\ &= \psi(f(T)) + \int_0^T F(f,u)dt - \int_0^T \lambda[\dot{f} - G(f,u)]dt. \qquad (IV.2.4)\end{aligned}$$

El término entre paréntesis es cero para cualquier trayectoria. Entonces el coeficiente λ es arbitrario y por lo tanto para cualquier λ el valor de $\mathbf{J}$ es el mismo que el valor de J. Resulta que se puede considerar el problema de maximizar $\mathbf{J}$ antes de maximizar J. La flexibilidad en la elección de λ se puede usar para hacer el problema tan simple como posible.

Por conveniencia se define el Hamiltoniano

$$H(\lambda, f, u) = \lambda G(f,u) + F(f,u). \qquad (IV.2.5)$$

En términos del Hamiltoniano, la función objetivo modificada toma la forma:

$$\mathbf{J} = \psi(f(T)) + \int_0^T \{H(\lambda, f, u) - \lambda\dot{f}\}dt. \qquad (IV.2.6)$$

Entonces el Hamiltoniano es fundamental para la consideración de este objetivo modificado. Se supone ahora que se especifica una función de control u, satisfaciendo la restricción $u \in U$. Este determina una trayectoria de estado f. Ahora se considera un cambio pequeño en la función de control a una nueva función $v \in U$. Este cambio es pequeño en el sentido que la integral del valor absoluto de la diferencia es pequeño, es decir,

$$\int_0^T |u - v|dt < \varepsilon, \qquad (IV.2.7)$$

donde ε es pequeño.

Este control nuevo implica una nueva trayectoria de estado la que se escribe como $f + \varphi$. El cambio φ es pequeño para toda t, porque la variable de estado depende en la integral de la función de control.

* Para simplificar la notación se usará λ, f, u recordando que estan en función del tiempo t.

Si se define $\triangle \mathrm{J}$ como el cambio correspondiente en el objetivo modificado se obtiene:

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{J} =& \mathrm{J}(f+\varphi, v) - \mathrm{J}(f, u)\\ =& \psi(f(T)+\varphi) - \psi(f(T)) + \int_0^T \{H(\lambda, f+\varphi, v) - H(\lambda, f, u)\}dt - \int_0^T \lambda\dot{\varphi}dt.\end{aligned} \tag{IV.2.8}$$

Integrando por partes se tiene

$$\int_0^T \lambda\dot{\varphi} = \lambda(T)\varphi(T) - \lambda(0)\varphi(0) - \int_0^T \dot{\lambda}\varphi dt. \tag{IV.2.9}$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{J} =& \psi(f(T)+\varphi(T)) - \psi(f(T)) - \lambda(T)\varphi(T) + \lambda(0)\varphi(0)\\ &+ \int_0^T \{H(\lambda, f+\varphi, v) - H(\lambda, f, u) + \dot{\lambda}\varphi\}dt.\end{aligned} \tag{IV.2.10}$$

Ahora se aproxima ésta ecuación a primer orden (es decir, al orden ε usando expresiones diferenciales para diferencias pequeñas. Utilizando la versión multidimensional del Teorema de Taylor se obtiene,

$$\begin{aligned}&\int_0^T [H(\lambda, f+\varphi, v) - H(\lambda, f, u)]dt\\ &= \int_0^T [H(\lambda, f+\varphi, v) - H(\lambda, f, v) + H(\lambda, f, v)\\ &\qquad - H(\lambda, f, u)]dt\\ &\simeq \int_0^T [H_f(\lambda, f, v)\varphi + H(\lambda, f, v) - H(\lambda, f, u)]dt\\ &= \int_0^T [H_f(\lambda, f, u)\varphi + \{H_f(\lambda, f, v) - H_f(\lambda, f, u)\}\varphi\\ &\qquad + H(\lambda, f, v) - H(\lambda, f, u)]dt\\ &\simeq \int_0^T [H_f(\lambda, f, u)\varphi + H(\lambda, f, v) - H(\lambda, f, u)]dt,\end{aligned} \tag{IV.2.11}$$

donde en cada etapa $\simeq$ significa "igual que dentro del orden de ε." (La última línea se obtiene considerando que ambos φ y el integral de $H_f(\lambda, f, v) - H_f(\lambda, f, u)$ son de orden ε, entonces el producto es de orden ε^2.)

Sustituyendo (IV.2.11) en (IV.2.10) y usando una aproximación diferencial a los primeros dos términos en (IV.2.10) da,

$$\begin{aligned}\Delta \mathrm{J} =&[\psi_f(f(T)) - \lambda(T)]\varphi(T) + \lambda(0)\varphi(0)\\&+ \int_0^T [H_f(\lambda, f, u) + \dot{\lambda}]\varphi dt\\&+ \int_0^T [H(\lambda, f, v) - H(\lambda, f, u)]dt + p(\varepsilon),\end{aligned} \qquad (IV.2.12)$$

donde $p(\varepsilon)$ denota términos que son de orden menor que ε. Esto es la expresión general para el cambio en J que resulta de un cambio arbitrario en u. A continuación se simplifica esta expresión por la selección propia de la función λ.

LA ECUACION ADJUNTA

Note que $\varphi(0) = 0$, ya que un cambio en la función de control no produce un cambio en el estado inicial. Entonces el segundo término del lado derecho de (IV.2.12) es siempre cero.

Se debe seleccionar λ de tal forma que todos los otros términos desaparezcan, menos la última integral. Esto se logra escogiendo λ como la solución de la ecuación diferencial adjunta,

$$-\dot{\lambda} = H_f(\lambda, f, u), \qquad (IV.2.13)$$

o, más explicitamente, con condición adjunta final,

$$\lambda(T) = \psi_f(f(T)). \qquad (IV.2.14)$$

Se va a ver que está involucrado aquí. Debe recordarse que el valor de $G_f(f, u)$ varía en el tiempo; pero para un u y f específico es conocida. También el valor de $F(f, u)$ es conocido y varía en el tiempo. Por tanto (IV.2.11) es una ecuación diferencial lineal cuyo valor cambia en el tiempo y depende del valor de λ lo cual es desconocido. Asociado con este sistema se tiene una condición final $\lambda(T)$. Entonces se puede considerar resolver la ecuación adjunta regresando en el tiempo de T a 0. Esto determina una solución única λ. Con esta λ se obtiene la siguiente ecuación de la expresión (IV.2.12)

$$\Delta \mathrm{J} = \int_0^T [H(\lambda, f, v) - H(\lambda, f, u)]dt + p(\varepsilon). \qquad (IV.2.15a)$$

Como λ, f y u son conocidas e independientes de v, esta ecuación nos permite calcular fácilmente la consecuencia aproximada de un cambio a una nueva función de control v.

Se puede usar esta ecuación para deducir la condición de optimalidad. Si la función inicial de control u es óptimo se concluye que para cualquier t,

$$H(\lambda(t), f(t), v) \leq H(\lambda(t), f(t), u(t)), \qquad (IV.2.15b)$$

para todo $v \in U$. [Aquí t es fijo, u(t) es el valor del control óptimo al tiempo t, mientras que v es arbitrario en U; v no es una función del tiempo.]

Esto implica que en el máximo

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0. \qquad (IV.2.16)$$

Para verificar la desigualdad (IV.2.15b), se supone que para algúna t existió un $v \in U$ con

$$H(\lambda(t), f(t), v) > H(\lambda(t), f(t), u(t)). \qquad (IV.2.17)$$

Ahora, pudiéramos cambiar la función $u(t)$ tal que la ecuación (IV.2.15a) es positivo para un intervalo pequeño (de tamaño ε) que contiene esta t, la integral sería positiva (y de orden ε). Asi ΔJ sería positiva, contradiciendo el hecho de que la función $u(t)$ produce el J máximo.

Este resultado significa que en cada instante de tiempo t el valor particular de $u(t)$ en un control óptimo tiene la propiedad de maximizar el Hamiltoniano. Este resultado es el *principio máximo de Pontryagin* para este problema.

EL PRINCIPIO DEL MAXIMO

Ahora se hace un resumen del conjunto de las condiciones necesarias de optimalidad las cuales son dadas por una función adjunta $\lambda(t)$. En el problema original se buscan las funciones $f(t)$ y $u(t)$ que satisfacen la ecuación del sistema (IV.2.1a), la condición inicial (IV.2.1b), la restricción (IV.2.1c) y que maximizan la función objetivo (IV.2.1d).

Teorema: Sean $u(t) \in U$ y $f(t)$ las trayectorias óptimas de control y estado respectivamente para el problema de Control Óptimo (IV.2.1). Entonces existe una trayectoria adjunta $\lambda(t)$ tal que $u(t)$, $f(t)$ y $\lambda(t)$ juntos satisfacen:

(i) $\dot{f}(t) = G(f(t), u(t))$ (ecuación del sistema) (IV.2.18a)

(ii) $f(0) = f_0$ (condición inicial) (IV.2.18b)

(iii) $-\dot{\lambda}(t) = \lambda(t)G_f(f(t), u(t)) + F_f(f(t), u(t))$ (ecuación adjunta) (IV.2.18c)

(iv) $\lambda(T) = \psi_f(f(T))$ (condición adjunta final) (IV.2.18d)

(v) Para toda t, $0 \leq t \leq T$, y toda $v \in U$

$\dfrac{\partial H}{\partial u} = 0$ (condición para el máximo) (IV.2.18e)

donde H es el Hamiltoniano

$$H(\lambda(t), f(t), u(t)) = \lambda(t)G(f(t), u(t)) + F(f(t), u(t)).$$

IV.2.2 TIPO 2

El tipo de problema de Control Optimo que resolvimos en la sección anterior se refiere a problemas sin restricción del valor terminal de la variable de estado. Existen muchos problemas en los cuales el valor terminal está restringido en alguna forma. Entonces se modifica el problema (IV.2.1) por la restricción terminal

$$f(T) = f_T. \qquad (IV.2.19)$$

Para deducir las condiciones necesarias en términos de una función adjunta $\lambda(t)$ en éste problema se siguen los mismos pasos que en la sección IV.2.1. Lo que cambia es que la ecuación (IV.2.14) desaparece en este caso y se tiene una constante λ_0 que toma en cuenta la posibilidad de degeneración. Puede ocurrir que no exista ninguna función de control que satisface la restricción terminal, en este caso no hay solución. En el caso de una sóla trayectoria que satisface la restricción terminal la solución no está afectada por la función objetivo. Un problema bien formulado no va a tener estas anomalías, entonces $\lambda_0 > 0$. En la práctica siempre se intenta aplicar el principio del máximo con $\lambda_0 = 1$.

Teorema: Sean $u(t) \in U$ y $f(t)$ las trayectorias óptimas de control y estado respectivamente para el problema de Control Óptimo que está formado por las ecuaciones (IV.2.1) y (IV.2.19). Entonces existe una trayectoria adjunta $\lambda(t)$ y una constante $\lambda_0 \geq 0$ [con $(\lambda_0, \lambda(t)) \not\equiv 0$] tal que $u(t)$, $f(t)$ y $\lambda(t)$ juntos satisfacen:

(i) $\dot{f}(t) = G(f(t), u(t))$ (ecuación del sistema) (IV.2.20a)

(ii) $f(0) = f_0$ (condición inicial) (IV.2.20b)

(iii) $f(T) = f_T$ (condición terminal)* (IV.2.20c)

(iv) $-\dot{\lambda}(t) = \lambda(t)G_f(f(t), u(t)) + \lambda_0 F_f(f(t), u(t))$ (ecuación adjunta) (IV.2.20d)

(v) Para toda t, $0 \leq t \leq T$, y toda $v \in U$

$\dfrac{\partial H}{\partial u} = 0$ (condición para el máximo) (IV.2.20e)

donde H es el Hamiltoniano

$$H(\lambda(t), f(t), u(t)) = \lambda(t)G(f(t), u(t)) + \lambda_0 F(f(t), u(t)).$$

* Si la restricción terminal tiene la forma $f(T) \geq f_T$, entonces las condiciones para un máximo se modifican por la ecuación $\lambda(T) \geq 0$ $(=0$ si $f^*(T) > f_T)$.

IV.3 CONTROL OPTIMO ESTOCASTICO

Los problemas de control óptimo estocástico son generalmente estudiados por métodos de programación dinámica.

Para ser más explícito se enunciará el siguiente teorema suponiendo un *control fijo.*

Teorema.-Sea $J(f)$ y su primera, segunda y tercera derivada acotada uniformemente y sea $f(t)$ dado por la siguiente ecuación

$$f(t) = f(0) + \int_0^t G(f(t))dt + \int_0^t \sigma(f(t))dz(t),$$

donde $G(f)$ y $\sigma(f)$ satisfacen la condición Lipschitz *. Se define el operador

$$\mathcal{L} = G(f)\frac{\partial}{\partial f} + \frac{1}{2}\sigma^2(f)\frac{\partial^2}{\partial f^2}.$$

Entonces

$$E_{f_0}J(f(t)) - J(f_0) = E_{f_0}\int_0^t \mathcal{L}J(f(t))dt,$$

donde $f(0) = f_0$ y E_{f_0} el operador esperanza con condición inicial f_0, y $\mathcal{L}$ es conocido como el generador diferencial del proceso $f(t)$.

Demostración: Supóngase que la función de estado *f(t)* sigue el proceso general de *Itô*, es decir,

$$f(t) = f(0) + \int_0^t G(f(t))dt + \int_0^t \sigma(f(t))dz(t),$$

o en forma diferencial

$$df(t) = G(f(t))dt + \sigma(f(t))dz,$$

discretizando, se tiene

$$\Delta f(t) = G(f(t))\Delta t + \sigma(f(t))\Delta z. \qquad (IV.3.1)$$

Para simplificar notación sólo se escribirá f, recordando que es función del tiempo. Sea $\Delta z = \xi\sqrt{\Delta t}$, donde $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$, entonces,

$$E[\Delta z] = E[\xi\sqrt{\Delta t}] = \sqrt{\Delta t}E[\xi] = 0,$$

y

$$Var[\Delta z] = Var[\xi\sqrt{\Delta t}] = E[(\xi\sqrt{\Delta t})^2] - (E[\xi\sqrt{\Delta t}])^2 = \Delta t.$$

---

* ver Kushner, pag. 287

Se tiene $\xi^2 \sim \mathcal{X}_1^2$, por tanto,

$$E[(\Delta z)^2] = \Delta t E[\xi^2] = \Delta t,$$

y

$$Var[(\Delta z)^2] = Var[\xi^2 \Delta t] = (\Delta t)^2 Var[\xi^2] = 2(\Delta t)^2.$$

Entonces para valores pequeños de Δt, se tiene $\Delta z = \sqrt{\Delta t}$ sin pérdida de generalidad.

Elevando al cuadrado la ecuación (IV.3.1), se tiene

$$(\Delta f)^2 = G^2(f)(\Delta t)^2 + 2G\sigma(\Delta t)^{3/2} + \sigma^2(f)\Delta t. \qquad (IV.3.2)$$

Si $J(f(t))$ se expresa en un desarrollo de Taylor, es decir

$$\Delta J = \frac{\partial J}{\partial f}\Delta f + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial f^2}(\Delta f)^2 + \ldots$$

y se usa la ecuación (IV.3.2) despreciando los términos $(\Delta t)^2$ y $(\Delta t)^{3/2}$, entonces

$$\Delta J = \frac{\partial J}{\partial f}\Delta f + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial f^2}\sigma^2(f)(\Delta t),$$

sustituyendo la ecuación (IV.3.1) en la expresión anterior y tomando el $\lim\limits_{\Delta \to 0}$, se tiene

$$dJ = \left(G(f)\frac{\partial J}{\partial f} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial f^2}\sigma^2(f)\right)dt + \frac{\partial J}{\partial f}\sigma(f)dz.$$

Si se define el operador como

$$\mathcal{L} = G(f)\frac{\partial}{\partial f} + \frac{1}{2}\sigma^2(f)\frac{\partial^2}{\partial f^2},$$

entonces

$$dJ = \mathcal{L}(f)dt + \frac{\partial J}{\partial f}\sigma(f)dz.$$

Integrando para $s\epsilon[t_0, t]$, se tiene

$$J(f(t)) - J(f(t_0)) = \int_{t_0}^{t} \mathcal{L}J(f(s))ds + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial J(f(s))}{\partial f}\sigma(f)dz,$$

calculando el valor esperado dado un f_0,

$$E_{f_0}[J(f(t))] - E_{f_0}[J(f(t_0))] = E_{f_0}\left[\int_{t_0}^{t} \mathcal{L}J(f(s))ds + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial J(f(s))}{\partial f}\sigma(f)dz\right].$$

pero el valor esperado de la última integral de la expresión anterior es cero (porque $E_{f_0}[dz] = 0$), por tanto

$$E_{f_0} J(f(t)) - J(f(t_0)) = E_{f_0} \int_{t_0}^{t} \mathcal{L}J(f(s))ds.$$

LA ECUACION DE LA UTILIDAD

Para obtener la ecuación de la utilidad se supone un *control fijo*. Considérese una funcional de la forma

$$J(f) = E_f \int_0^\infty e^{-\rho t} F(f(t))dt.$$

Se tiene que

$$\begin{aligned}
J(f) &= E_f \int_0^\Delta e^{-\rho t} F(f(t))dt + E_f \int_\Delta^\infty e^{-\rho t} F(f(t))dt \\
&= E_f \int_0^\Delta e^{-\rho t} F(f(t))dt + E_f \left(E_f \left[\int_\Delta^\infty e^{-\rho t} F(f(t))dt \middle| f_\Delta \right] \right) \\
&= E_f \int_0^\Delta e^{-\rho t} F(f(t))dt + E_f e^{-\rho\Delta} \left(E_f \left[\int_\Delta^\infty e^{-\rho(t-\Delta)} F(f(t))dt \middle| f_\Delta \right] \right) \\
&= E_f \int_0^\Delta e^{-\rho t} F(f(t))dt + E_f e^{-\rho\Delta} \left(E_{f_\Delta} \int_\Delta^\infty e^{-\rho t} F(f(t))dt \right) \\
&= E_f \int_0^\Delta e^{-\rho t} F(f(t))dt + E_f e^{-\rho\Delta} J(f_\Delta).
\end{aligned}$$

Entonces,

$$E_f e^{-\rho\Delta} J(f_\Delta) - J(f) + E_f \int_0^\Delta e^{-\rho t} F(f(t))dt = 0.$$

Dividiendo entre Δ se tiene

$$\frac{E_f e^{-\rho\Delta} J(f_\Delta) - J(f)}{\Delta} + \frac{E_f}{\Delta} \int_0^\infty e^{-\rho t} F(f(t))dt = 0.$$

Sumando y restando el término $\frac{E_f J(f_\Delta)}{\Delta}$, entonces

$$\frac{E_f J(f_\Delta) - J(f)}{\Delta} + E_f \frac{(e^{-\rho\Delta} - 1)}{\Delta} J(f_\Delta) + \frac{E_f}{\Delta} \int_0^\Delta e^{-\rho t} F(f(t))dt = 0.$$

Tomando el límite a la expresión anterior se obtiene la ecuación de la utilidad:

$$\mathcal{L}J(f) - \rho J(f) + F(f) = 0. \qquad (IV.3.3)$$

CONDICION DE PRIMER ORDEN

Ahora se desarolla la condición de primer orden incluyendo la variable de control u(t). Sea

$$J^u(f) = E_f^u \int_0^\infty e^{-\rho t} F(f(t), u(t))dt,$$
$$J(f) = \sup_u J^u(f).$$

La funcional $J(f)$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} J(f) &= \max E_f^u \left[\int_0^\Delta e^{-\rho t} F(f(t), u(t))dt + \int_\Delta^\infty e^{-\rho t} F(f(t), u(t))dt \right] \\ &= \max E_f^u \left[\int_0^\Delta e^{-\rho t} F(f(t), u(t))dt + e^{-\rho\Delta} E_{f_\Delta} \int_0^\infty e^{-\rho t} F(f(t), u(t))dt \right] \\ &= \max E_f^u \left[\int_0^\Delta e^{-\rho t} F(f(t), u(t))dt + e^{-\rho\Delta} J(f_\Delta) \right]. \end{aligned}$$

la cual conduce a la siguiente condición necesaria para el máximo

$$\sup_u [\mathcal{L}^u J(f) - \rho J(f) + F(f, u)] = 0, \qquad (IV.3.4)$$

donde

$$\mathcal{L}^u = G(f, u)\frac{\delta}{\delta f} + \frac{1}{2}\sigma^2(f, u)\frac{\delta^2}{\delta f^2}. \qquad (IV.3.5)$$

IV. PROGRAMACION DINAMICA EN TIEMPO CONTINUO

Para profundizar en las técnicas de solución se presentan las ecuaciones de Bellman-Euler-Lagrange, la condición de Legendre, la condición de Weierstrass y la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman. Los primeros tres tipos de problemas son equivalentes a los formulados en el subcapítulo III.1 y el último es equivalente al tipo 1 en el subcapítulo III.2.

IV.1 TIPO 1

IV.1.1 ECUACION DE BELLMAN-EULER-LAGRANGE

Teorema: Considérese una funcional de la forma

$$J = J(f) = \int_a^b F(t, f(t), f'(t))dt,$$

sujeto a las siguientes restricciones o condiciones de frontera

$$f(a) = A,$$

$$f(b) = B,$$

donde $F \in C^2$, es decir, una función con primera y segunda derivadas parciales continuas con respecto a todos sus argumentos. Supóngase que $f' = f'(t, f)$, y sea

$$S(t, f(t)) = \min_{f'|_{[t,b]}} \left\{ \int_t^b F(s, f(s), f'(s))ds \right\},$$

$S \in C^2$. Entonces una condición necesaria para que la funcional $J(f)$ tenga un extremo en una función dada $f(t)$, es que satisfaga la ecuación de Bellman-Euler-Lagrange, es decir*

$$0 = \min_{f'} \{F + S_t + S_f f'\}.$$

Demostración: Supóngase que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño

$$\int_t^{t+\varepsilon} F(s, f(s), f'(s))ds = F(t, f, f')\varepsilon + o(\varepsilon)$$

* Para simplificar la notación se usará f, f', h, h', g, g' recordando que están en función del tiempo t.

y que $S(t+\varepsilon, f(t+\varepsilon)) = S(t, f(t)) + S_t\varepsilon + S_f f'\varepsilon + o(\varepsilon)$.
Entonces

$$\begin{aligned} S(t, f(t)) &= \min_{f'|_{[t,t+\epsilon]}} \left\{ \int_t^{t+\varepsilon} F(s, f(s), f'(s))ds + S(t+\varepsilon, f(t+\varepsilon)) \right\} \\ S &= \min_{f'|_{[t,t+\epsilon]}} \left\{ F\varepsilon + S + S_t\varepsilon + S_f f'\varepsilon + o(\varepsilon) \right\} \\ 0 &= \min_{f'|_{[t,t+\epsilon]}} \left\{ F + S_t + S_f f' + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \right\}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$0 = \min_{f'} \left\{ F + S_t + S_f f' \right\}.$$

Teorema: Bajo la hipótesis del teorema anterior se tiene que la ecuación de Bellman-Euler-Lagrange implica la ecuación de Euler-Lagrange, es decir

$$\frac{\partial F(t, f, f')}{\partial f} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F(t, f, f')}{\partial f'} \right) = 0.$$

Demostración: Si f' es mínimo, entonces

$$\begin{cases} F + S_t + S_f f' = 0 \\ F_{f'} + S_f = 0. \end{cases}$$

Sea $S = S(t, f)$, con diferencial $dS = S_t dt + S_f df$, la expresión anterior se puede escribir como $\frac{d}{dt}S = S_t + S_f f'$, entonces, sustituyendo esta ecuación en la primera ecuación del sistema anterior y después derivando la primera ecuación respecto de f y la segunda respecto de t, se tiene

$$\begin{cases} F_f + \frac{d}{dt} S_f = 0 \\ \frac{d}{dt} F_{f'} + \frac{d}{dt} S_f = 0, \end{cases}$$

restando las dos expresiones anteriores, se tiene

$$F_f - \frac{d}{dt} F_{f'} = 0.$$

IV.1.2 CONDICION DE LEGENDRE

Teorema: Considérese una funcional de la forma

$$J = J(f) = \int_a^b F(t, f(t), f'(t))dt,$$

sujeto a las siguientes restricciones o condiciones de frontera

$$f(a) = A,$$

$$f(b) = B,$$

donde $F \in C^2$. Supóngase que $f' = f'(t, f)$, y sea

$$S(t, f(t)) = \min_{f'|_{[t,b]}} \left\{ \int_t^b F(s, f(s), f'(s))ds \right\},$$

$S \in C^2$. Si f' es solución, entonces*

$$\frac{\partial F(t, f, f')}{\partial f' \partial f'} \geq 0.$$

IV.1.3 CONDICION DE WEIERSTRASS

Teorema: Considérese una funcional de la forma

$$J = J(f) = \int_a^b F(t, f(t), f'(t))dt,$$

sujeto a las siguientes restricciones o condiciones de frontera

$$f(a) = A,$$

$$f(b) = B,$$

donde $F \in C^2$. Supóngase que $f' = f'(t, f)$, y sea

$$S(t, f(t)) = \min_{f'|_{[t,b]}} \left\{ \int_t^b F(s, f(s), f'(s))ds \right\},$$

* La demostración de la condición de Legendre se puede ver en el Gelfand, pag. 101

$S \in C^2$. Si f' es solución, entonces

$$F(t,f,f'+h') - F(t,f,f') + \frac{\partial S(t,f)}{\partial f} h' \geq 0.$$

Demostración: Si f' es solución, entonces

$$0 = \min_{f'} \{F + S_t + S_f f'\},$$

implica

$$F(t,f,f') + \frac{\partial S(t,f)}{\partial t} + \frac{\partial S(t,f)}{\partial f} f' \leq F(t,f,f'+h') + \frac{\partial S(t,f)}{\partial t} + \frac{\partial S(t,f)}{\partial f}(f'+h').$$

IV.2 TIPO 2

Teorema: Considérese una funcional de la forma

$$J = J(f) = \int_a^b F(t,f,g,f',g')dt,$$

sujeto a las siguientes restricciones o condiciones de frontera

$$f(a) = A,$$

$$f(b) = B,$$

donde $F \in C^2[a,b]$, es decir, una función con primera y segunda derivadas parciales continuas con respecto a todos sus argumentos. Supóngase $f' = f'(t,f)$, $g' = g'(t,g)$, y sea

$$S(t,f(t),g(t)) = \min_{(f',g')|_{[t,b]}} \left\{ \int_t^b F(s,f,g,f',g')ds \right\}.$$

Supóngase que $S \in C^2$. Entonces si (f',g') es solución, entonces

$$0 = \min_{(f',g')} \{F + S_x + S_f f' + S_g g'\},$$

esta última expresión es la ecuación de Bellman-Euler-Lagrange.

Teorema: Bajo las hipótesis del teorema anterior se tiene que las ecuaciones de Bellman-Euler-Lagrange implican las Ecuaciones de Euler-Lagrange, es decir

$$\frac{\partial F(t,f,g,f',g')}{\partial f} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F(t,f,g,f',g')}{\partial f'}\right) = 0,$$

y

$$\frac{\partial F(t,f,g,f',g')}{\partial g} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F(t,f,g,f',g')}{\partial g'}\right) = 0.$$

Demostración: Si (f',g') es solución, entonces de

$$0 = \min_{(f',g')} \{F + S_t + S_f f' + S_g g'\},$$

se cumple lo siguiente

$$\begin{cases} F + S_t + S_f f' + S_g g' = 0 \\ F_{f'} + S_f = 0 \\ F_{g'} + S_g = 0, \end{cases}$$

diferenciando la primera ecuación respecto de f y g, se obtiene

$$\begin{cases} F_f + S_{ft} + S_{ff} f' + S_{fg} g' = 0 \\ F_g + S_{gt} + S_{gf} f' + S_{gg} g' = 0 \\ F_{f'} + S_f = 0 \\ F_{g'} + S_g = 0. \end{cases}$$

Sea $S = S(t,f,g)$ con diferencial $dS = S_t dt + S_f df + S_g dg$, la expresión anterior se puede escribir como $\frac{d}{dt}S = S_t + S_f f' + S_g g'$, entonces, sustituyendo esta ecuación en la primera ecuación y después derivandola respecto de f y de g, se tiene

$$\begin{cases} F_f + \dfrac{d}{dt}S_f = 0 \\ F_g + \dfrac{d}{dt}S_g = 0 \\ F_{f'} + S_f = 0 \\ F_{g'} + S_g = 0. \end{cases}$$

Sustituyendo las dos últimas ecuaciones en las restantes del sistema anterior conduce a

$$F_f - \frac{d}{dt}F_{f'} = 0, \quad F_g - \frac{d}{dt}F_{g'} = 0,$$

lo que prueba el teorma anterior.

IV.3 TIPO 3

Teorema:(PROBLEMA ISOPERIMETRICO) Considérese una funcional de la forma

$$J = J(f) = \int_a^b F(t, f(t), f'(t))dt,$$

sujeto a las siguientes restricciones o condiciones de frontera

$$\int_a^b G(t, f, f')dt = Q,$$

$$f(a) = A,$$

$$f(b) = B,$$

donde $F \in C^2[a, b]$, es decir, una función con primera y segunda derivadas parciales continuas con respecto a todos sus argumentos. Suponga que $f' = f'(x, f)$ y sean

$$g(t) = \int_t^b G(s, f, f')ds,$$

y

$$S(t, f, g) = \min_{f'|_{[t,b]}} \left\{ \int_t^b F(s, f, f')ds \middle| \int_t^b G(s, f, f')ds = g(t) \right\}.$$

Entonces una condición necesaria para que la funcional $J(f)$ tenga un extremo en una función dada $f(t)$, es que satisfaga la ecuación de Bellman-Euler-Lagrange, es decir

$$0 = \min_{f'}\{F + S_t + S_f f' - S_g G\}.$$

Demostración: Para $\varepsilon > 0$ y suficientemente pequeño

$$S(t, f, g) = \min_{f'|_{[t,t+\varepsilon]}} \left\{ \int_t^{t+\varepsilon} F(s, f, f')ds + S(t+\varepsilon, f(t+\varepsilon), g(t+\varepsilon)) \right| \\ \left. \int_t^{t+\varepsilon} G(s, f, f')ds = g(t) - g(t+\varepsilon) \right\}$$

$$= \min_{f'|_{[t,t+\varepsilon]}} \left\{ \varepsilon F + S + S_t\varepsilon + S_f f'\varepsilon + S_g g'\varepsilon + o(\varepsilon) \middle| \varepsilon G + o(\varepsilon) = g(t+\varepsilon) - g(t) \right\}.$$

Tomando el límite, $\varepsilon \to 0$, se tiene

$$0 = \min_{f'}\{F + S_t + S_f f' + S_g g' \mid -G = g'\}.$$

Teorema: Bajo las hipótesis del teorema anterior las ecuaciones de Bellman-Euler-Lagrange implican las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$0 = \frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f'} + p\left(\frac{\partial G(t,f,f')}{\partial f} - \frac{d}{dt}\frac{\partial G(t,f,f')}{\partial f'}\right).$$

Demostración: Si f' es solución, entonces de la ecuación

$$0 = \min_{f'}\{F + S_t + S_f f' - S_g G\},$$

se tiene que

$$\begin{cases} F + S_t + S_f f' + S_g G = 0 \\ F_{f'} + S_f - S_g G_{f'} = 0, \end{cases}$$

derivando la primera ecuación respecto de f y la segunda respecto de t se obtiene

$$\begin{cases} F_f + S_{ft} + S_{ff} f' - (S_g G)_f = 0 \\ \dfrac{d}{dt}F_{f'} + \dfrac{d}{dt}S_f - \dfrac{d}{dt}(S_g G_{f'}) = 0. \end{cases} \qquad (IV.4.1)$$

Sea $S_f = S_f(t,f,g)$ con diferencial $dS_f = S_{ft}dt + S_{ff}df + S_{fg}dg$, la expresión anterior se puede escribir como

$$\frac{d}{dt}S = S_{tf} + S_{ff}f' + S_{gf}g'. \qquad (IV.4.2)$$

De la ecuación

$$F + S_t + S_f f' - S_g G = 0,$$

se sigue que

$$S_{gt} + S_{gf}f' - S_{gg}G = 0 = \frac{d}{dt}S_g,$$

entonces

$$S_g = \text{cte} = -p, \qquad (IV.4.3)$$

y como $S_g = $ cte, entonces

$$S_{gf} = 0. \qquad (IV.4.4)$$

Sustituyendo las ecuaciónes (IV.4.4) y (IV.4.2) en la segunda ecuación del sistema (IV.4.1) se tiene

$$\begin{cases} F_f + S_{ft} + S_{ff} f' - (S_g G)_f = 0 \\ \dfrac{d}{dt}F_{f'} + S_{tf} + S_{ff}f' - \dfrac{d}{dt}(S_g G_{f'}) = 0, \end{cases}$$

lo que implica

$$(F - S_g G)_f - \frac{d}{dt}(F - S_g G)_{f'} = 0,$$

y aplicando la ecuación (IV.4.3) se tiene

$$F_f - \frac{d}{dt}F_{f'} + p\left(G_f - \frac{d}{dt}G_{f'}\right) = 0,$$

lo que prueba el teorema.

IV.4 TIPO 4

Teorema: Considérese una funcional de la forma

$$J = J(f) = \int_a^b \int_c^d F(x, y, f, f_x, f_y) dx dy,$$

sujeto a las siguientes restricciones o condiciones de frontera

$$f|_{\partial([a,b]x[c,d])} = w|_{\partial([a,b]x[c,d])},$$

donde $F \in C^2$ y w fija. Suponga que $\nabla f = \nabla f(x, y, f)$ y sea

$$S(x, y, f(x, y)) = \min_{\nabla f|_{[x,b]x[y,d]}} \left\{ \int_x^b \int_y^d F(s, t, f, f_s, f_t) ds dt \right\},$$

supóngase que $S \epsilon C^2$. Entonces

$$0 = \min_{\nabla f} \left\{ F + S_x + S_y + S_f f_x + S_f f_y \right\}.$$

Teorema: Bajo las hipótesis del teorema anterior se tiene que las ecuaciones de Bellman-Euler-Lagrange implican las Ecuaciones de Euler-Lagrange, es decir, si ∇f es solución

$$0 = \min_{\nabla f} \left\{ F + S_x + S_y + S_f f_x + S_f f_y \right\},$$

ésto implica que

$$\frac{\partial F(x, y, f, f_x, f_y)}{\partial f} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F(x, y, f, f_x, f_y)}{\partial f_x}\right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial F(x, y, f, f_x, f_y)}{\partial f_y}\right) = 0.$$

Demostración: Si el ∇f es mínimo, entonces

$$\begin{cases} F + S_x + S_y + S_f f_x + S_f f_y = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad F_{f_x} + S_f = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad F_{f_y} + S_f = 0. \end{cases}$$

Sea $S_f = S_f(x, y, f)$, la diferencial es $dS_f = S_{fx} dx + S_{fy} dy + S_{ff} df$, entonces

$$\frac{dS_f}{dx} = S_{fy}\frac{dy}{dx} + S_{fx} + S_{ff}\frac{df}{dx},$$

$$\frac{S_f}{dy} = S_{fx}\frac{dx}{dy} + S_{fy} + S_{ff}\frac{df}{dy},$$

pero $dy/dx = 0$ y $dx/dy = 0$, entonces

$$\begin{cases} F_f + S_{f_x} + S_{f_y} + S_{ff} f_x + S_{ff} f_y = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} F_{f_x} + S_{xf} + S_{ff} f_x = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial y} F_{f_y} + S_{yf} + S_{ff} f_y = 0, \end{cases}$$

sustituyendo las últimas dos ecuaciones en la primera, se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dy}\frac{\partial F}{\partial f} = 0,$$

lo que prueba el teorema.

IV.5 TIPO 5

Teorema: Considérese una funcional de la forma

$$J = J(f) = \int_a^b F(t, f(t), f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t))dt,$$

sujeto a las siguientes restricciones o condiciones de frontera

$$f^{(k)}(a) = A_k,$$

$$f^{(k)}(b) = B_k,$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad ,$$

donde $F \in C^2[a, b]$, es decir, una función con primera y segunda derivadas parciales continuas con respecto a todos sus argumentos.

Suponga que $f^{(n)} = f^{(n)}(t, f, f', \dots, f^{(n-1)})$ y sea

$$S(t, f, f', \dots, f^{(n-1)}) = \min_{f^{(n)}|_{[t,b]}} \left\{ \int_t^b F(s, f', f'', \dots, f^{(n)})ds \right\},$$

supóngase además que $S \in C^2$. Entonces una condición necesaria para que la funcional $J(f)$ tenga un extremo en una función dada $f(t)$, es que satisfaga la ecuación de Bellman-Euler-Lagrange, es decir

$$0 = \min_{f^{(n)}}\{F + S_t + S_f f' + S_{f'} f'' + \cdots + S_{f^{(n-1)}} f^{(n)}\}.$$

Teorema: Bajo las hipótesis del teorema anterior las ecuaciones de Bellman-Euler-Lagrange implican las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$0 = F_f - \frac{d}{dt}F_{f'} + \frac{d^2}{dt^2}F_{f''} - \frac{d^3}{dt^3}F_{f'''} + \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}F_{f^{(n)}}.$$

IV.6 TIPO 6

Teorema: (CONTROL OPTIMO DETERMINISTA) Considérese una funcional de la forma

$$J = \int_a^b F(f,u)dt,$$

sujeto a las siguientes restricciones o condiciones de frontera

$$R_{[a,b]} \begin{cases} \dot{f} = G(f,u), & a \leq t \leq b \\ f(a) = A \\ u \in U_{[a,b]} \end{cases}$$

donde $F, G \in C^2[a,b]$, es decir, una función con primera y segunda derivadas parciales continuas con respecto a todos sus argumentos. Sea

$$S(t,f) = \max_{u \in U_{[t,b]}} \left\{ \int_t^b F(f,u)dt : \text{ s.a. } R_{[t,b]} \right\},$$

y suponga que $S \in C^2$. Entonces una condición necesaria para que la funcional $J(f)$ tenga un extremo en una función dada $f(t)$, es que satisfaga la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman, es decir

$$0 = \max_{u \in U}\{F + S_f G\} + S_t.$$

Teorema: Bajo las hipótesis del teorema anterior la ecuacion de Hamilton-Jacobi-Bellman implica el principio del máximo de Pontryagin

$$-\dot{\lambda}(t) = \lambda(t)G_f + F_f.$$

Demostración: Si (f,u) es solución, entonces de Hamilton-Jacobi-Bellman

$$S_{ft} + F_f + S_{ff}G + S_f G_f = 0,$$

ó

$$\frac{d}{dt}S_f + F_f + S_f G_f = 0,$$

y que

$$S_f = \lambda(t).$$

IV. SOLUCIONES E INTERPRETACION DE PROBLEMAS DETERMINISTAS

A continuación se resuelve cada uno de los nueve modelos formulados en el capítulo II aplicando las técnicas del capítulo IV. Los resultados que se obtiene en cada modelo son interpretados.

IV.1 SOLUCION DEL MODELO NEOCLASICO DE CRECIMIENTO ECONOMICO OPTIMO

Para la solución de este problema se aplica la técnica de Control Optimo citada en el capítulo cuatro.

VI.1.1 PLANTEAMIENTO

El planteamiento del problema es el siguiente:

$$
\begin{cases}
\text{Maximizar} \displaystyle\int_{t_0}^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)}U(c(t))dt, \\
\quad \text{sujeto a} \;\; \dot{k}(t) = f(k(t)) - \lambda k(t) - c(t), \\
\qquad\qquad k(t_0) = k_0, \\
\qquad\qquad 0 \leq c(t) \leq f(k(t)), \\
\qquad\qquad c(t), \quad \text{continua por pedazos.}
\end{cases}
$$

VI.1.2 ESTABILIDAD DE PUNTOS EN EQUILIBRIO

En la Fig.1a se muestra la función de producción per cápita y el rayo λk. Restando el rayo de la curva se obtiene $c + \dot{k}$, indicado en el inciso (b).

Definición: El *nivel de la regla de oro de capital per cápita*, $\hat{k}$, es el punto de equilibrio que maximiza el nivel de consumo per cápita en el tiempo, es decir

$$f'(k) = \lambda = \mu + n \quad \text{donde} \quad k = \hat{k},$$

y

$$\hat{c} = f(\hat{k}) - \lambda\hat{k}.$$

En la Fig.2 se ilustra la estabilidad de puntos de consumo en la curva $f(k) - \lambda k$; por tanto, implica un equilibrio. En el caso (a), el consumo per cápita es cero. Al punto $\tilde{k}$, la derivada $\dot{k}$ es cero; entonces, $\tilde{k}$ es un punto de equilibrio estable. El caso (b), demuestra el nivel de la regla de oro del capital $\hat{k}$, pero es un punto de equilibrio no estable.

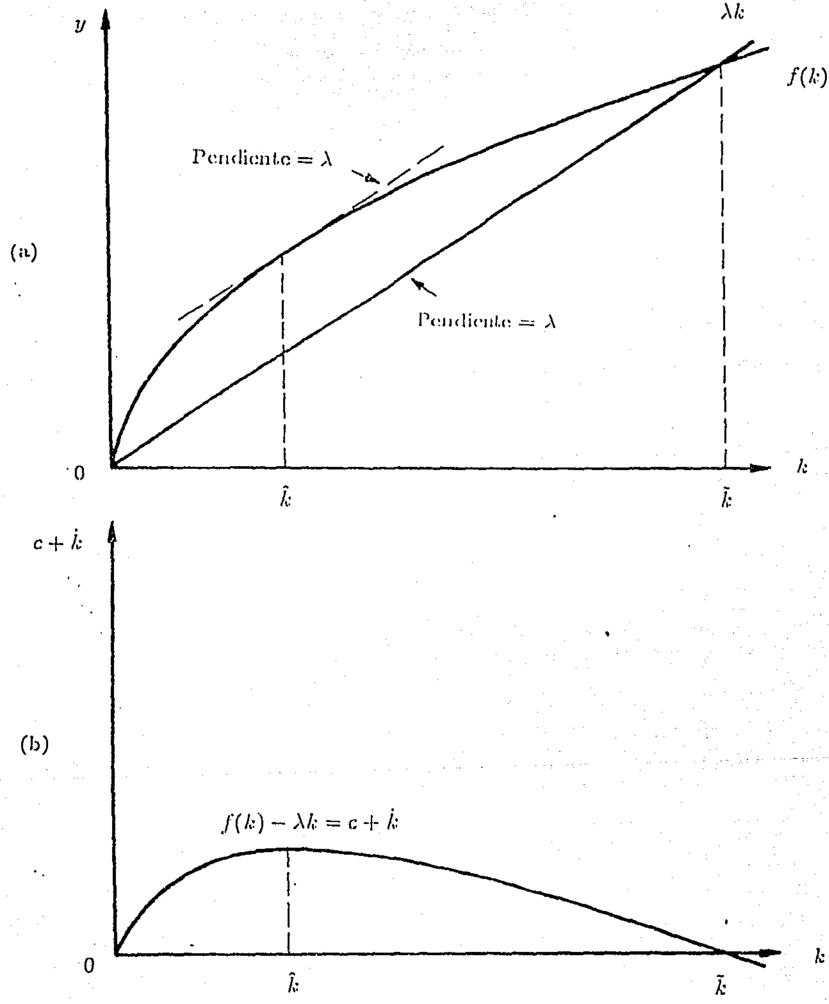

Fig.1
La ecuación diferencial fundamental
de crecimiento económico neoclásico

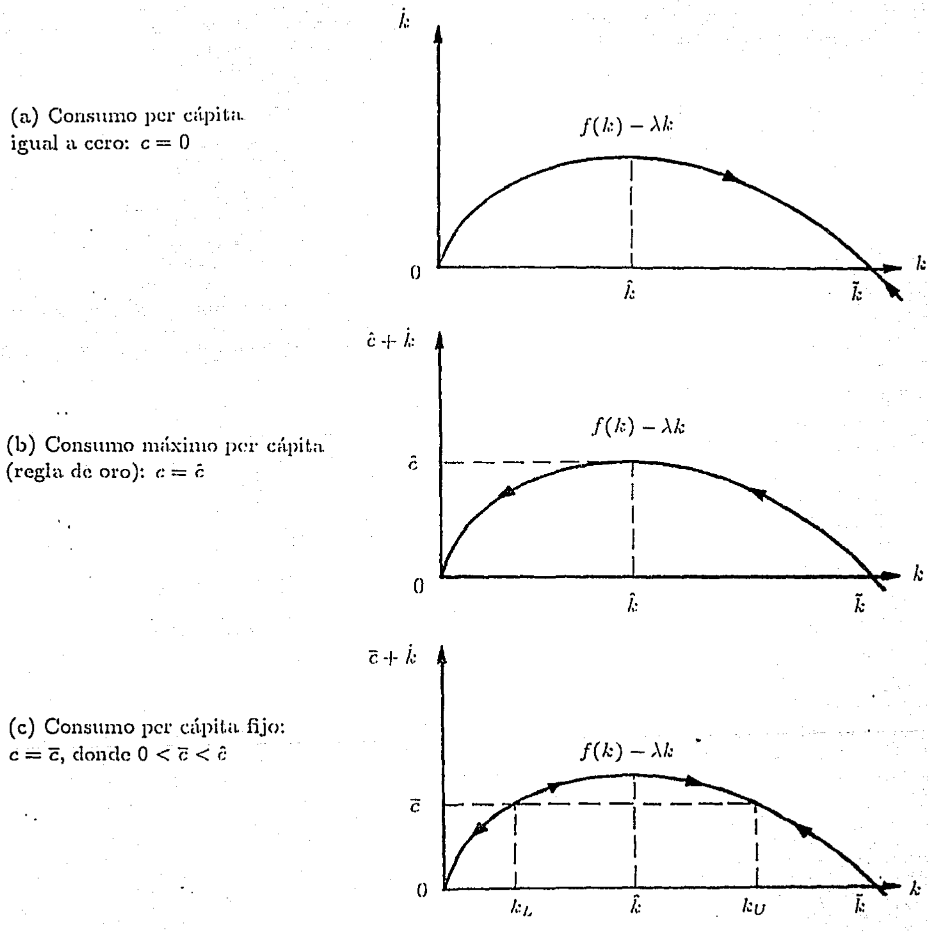

Fig.2
Propiedades de estabilidad de la ecuación diferencial fundamental de crecimiento económico neoclásico

Finalmente en el caso (c), el consumo per cápita es fijo a un nivel $\bar{c}$ positivo, pero menor que el nivel máximo de consumo, $0 < \bar{c} < \hat{c}$. En este caso, se obtienen dos puntos de capital per cápita, a un nivel más abajo, k_L, y a un nivel más arriba, k_U. Los dos puntos de equilibrio son diferentes en cuanto a estabilidad; el punto más abajo no es estable, y el punto más arriba es estable. Este argumento indica que se necesita un gran empujón para alcanzar el nivel de capital per cápita crítico, tras el cual la economía por sus propios esfuerzos tiende hacia niveles de capital y producción per cápita más y más altos.

VI.1.3 SOLUCION

La variable de estado es el capital per cápita, $k(t)$; la variable de control es el consumo per cápita, $c(t)$; la integral del bienestar es la funcional objetivo; la ecuación fundamental diferencial de crecimiento óptimo es la ecuación del sistema; y el stock de capital per cápita al tiempo t_0 es la condición inicial.

El conjunto de controles existe para todas las funciones continuas por pedazos del consumo per cápita, donde los valores del consumo per cápita no pueden ser menores de cero, ni en una economía cerrada, mayor que la producción per cápita.

La solución de este problema es una trayectoria óptima del consumo per cápita $c^*(t)$, y una trayectoria óptima del capital per cápita $k^*(t)$, donde las trayectorias son definidas para toda $t \geq t_0$.

La solución depende de la función de utilidad, de la función de producción, de la tasa subjetiva intertemporal de descuento, de la tasa de depreciación, de la tasa del crecimiento de la fuerza de trabajo y del stock inicial de capital per cápita.

Como este problema se resuelve con control óptimo, primero se formula el Hamiltoniano, es decir:

$$H = e^{-\rho(t-t_0)}U(c(t)) + q(t)[f(k(t) - \lambda k(t) - c(t)], \tag{VI.1.1}$$

donde $q(t)$ es el precio sombra del capital adicional per cápita, que se mide en términos de utilidad.

Según la condición para el máximo, el control óptimo (consumo óptimo per cápita) máximiza el Hamiltoniano. La condición de primer orden (comparar con sección IV.2.1), $\partial H/\partial c = 0$, implica

$$q(t) = e^{-\rho(t-t_0)}U'(c(t)), \tag{VI.1.2}$$

es decir, que en el máximo, el precio sombra de capital adicional per cápita es igual a la utilidad marginal del consumo per cápita. Se satisface la condición de segundo orden por la concavidad estricta de la función de utilidad.

La condición adjunta (comparar con sección IV.2.1) tiene la siguiente forma

$$\frac{d}{dt}q(t) = -\frac{\partial H}{\partial k}, \tag{VI.1.3}$$

que implica

$$\dot{q}(t) = -(f'(k(t)) - \lambda)q(t). \tag{VI.1.4}$$

Escribiendo esta ecuación de la siguiente forma

$$f'(k(t)) + \frac{\dot{q}(t)}{q(t)} - \mu - n = 0, \tag{VI.1.5}$$

ésta indica que el beneficio neto de tener una unidad de capital per cápita para un intervalo de tiempo es cero, donde el beneficio neto es el producto marginal más las ganancias de capital $\dot{q}(t)/q(t)$ menos las pérdidas debido a una depreciación μ, un crecimiento de la población n, e intereses ρ.

Como a lo largo de la trayectoria óptima, $q(t) = e^{-\rho(t-t_0)}U'(c(t))$, diferenciamos con respecto del tiempo y se obtiene

$$\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \frac{U''(c(t))}{U'(c(t))}\dot{c}(t) - \rho = -\sigma(c(t))\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} - \rho, \tag{VI.1.6}$$

donde $\sigma(c(t)) = -c(t)\frac{U''(c(t))}{U'(c(t))}$ es la elasticidad de la utilidad marginal. Así se puede escribir (VI.1.5) como la ecuación diferencial de la variable de control

$$\dot{c}(t) = \frac{1}{\sigma(c(t))}[f'(k(t)) - (\lambda + \rho)]c(t). \tag{VI.1.7}$$

Por el principio del máximo, las trayectorias $c^*(t)$ y $k^*(t)$ son óptimos si satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{c}(t) = \dfrac{1}{\sigma(c(t))}[f'(k(t)) - (\lambda + \rho)]c(t), \\ \dot{k}(t) = f(k(t)) - \lambda k(t) - c(t). \end{cases} \tag{VI.1.8}$$

Para obtener el camino óptimo se ignora temporalmente la condición de un stock inicial de capital dado. Entonces, una solución posible de (VI.1.8) es que ambos, el cosumo per cápita y el capital per cápita no cambian en el tiempo (estado de equilibrio),

$$\dot{c}(t) = 0, \qquad \dot{k}(t) = 0. \tag{VI.1.9}$$

Para que el consumo per cápita sea constante es necesario, según (VI.1.8), que $k(t) = k^*$, es decir

$$f'(k^*) = \lambda + \rho; \tag{VI.1.10}$$

y entonces

$$c^* = f(k^*) - \lambda k^*. \tag{VI.1.11}$$

Por las suposiciones en la función de producción k^* y c^* existen, son únicos, y satisfacen

$$0 < c^* < f(k^*), \tag{VI.1.12}$$

así se cumple la condición de los controles permitidos. El equilibrio en $k(t) = k^*$ y $c(t) = c^*$ satisface las condiciones necesarias con la excepción de la condición inicial. El equilibrio en k^*, c^* se llama trayectoria de crecimiento balanceado, ya que a lo largo de esta trayectoria el capital y consumo per cápita son constantes; por lo tanto el consumo total $C = c(t)L$, capital total $K = k(t)L$ y producción total $Y = Lf(k(t))$ crecen con la misma tasa, la cual es la tasa de crecimiento de la fueza laboral. Dado λ, la ecuación (VI.1.10) define k^* como función de ρ tal que

$$\lim_{\rho \to 0} k^* = \hat{k},$$

donde $\hat{k}$ es el nivel de oro de capital per cápita. El camino balanceado de crecimiento económico se llama entonces "camino de crecimiento de acuerdo con la regla de oro modificado," porque modifica la regla de oro para permitir tasas de descuento diferentes de cero.

Ahora se considera la trayectoria óptima de crecimiento incluyendo la condición inicial de capital per cápita (II.1.7). La interacción de las dos ecuaciones diferenciales (VI.1.8) se indica en forma geométrica en la Fig.3. El diagrama del inciso (a) muestra la función de producción per cápita $f(k(t))$ y una raya que pasa por el origen con la pendiente λ, intersectando con $f(k(t))$ a $\tilde{k}$. Se muestran dos puntos: $\hat{k}$, donde la pendiente de la función de producción es igual a λ, y k^*, con pendiente igual a $\lambda + \rho$. En el diagrama del inciso (b) se tiene como ejes, capital per cápita, $k(t)$, y consumo per cápita, $c(t)$.

De la ecuación diferencial de capital per cápita, k, y consumo per cápita

$$\dot{c}(t) \left\{ \begin{array}{c} = \\ > \\ < \end{array} \right\} 0 \quad \text{si} \quad f'(k(t)) \left\{ \begin{array}{c} = \\ > \\ < \end{array} \right\} \lambda + \rho, \tag{VI.1.13}$$

tal que se puede ver en el diagrama inciso (a) de la Fig.2

$$\dot{c}(t) \left\{ \begin{array}{c} = \\ > \\ < \end{array} \right\} 0 \quad \text{si} \quad k(t) \left\{ \begin{array}{c} = \\ < \\ > \end{array} \right\} k^*. \tag{VI.1.14}$$

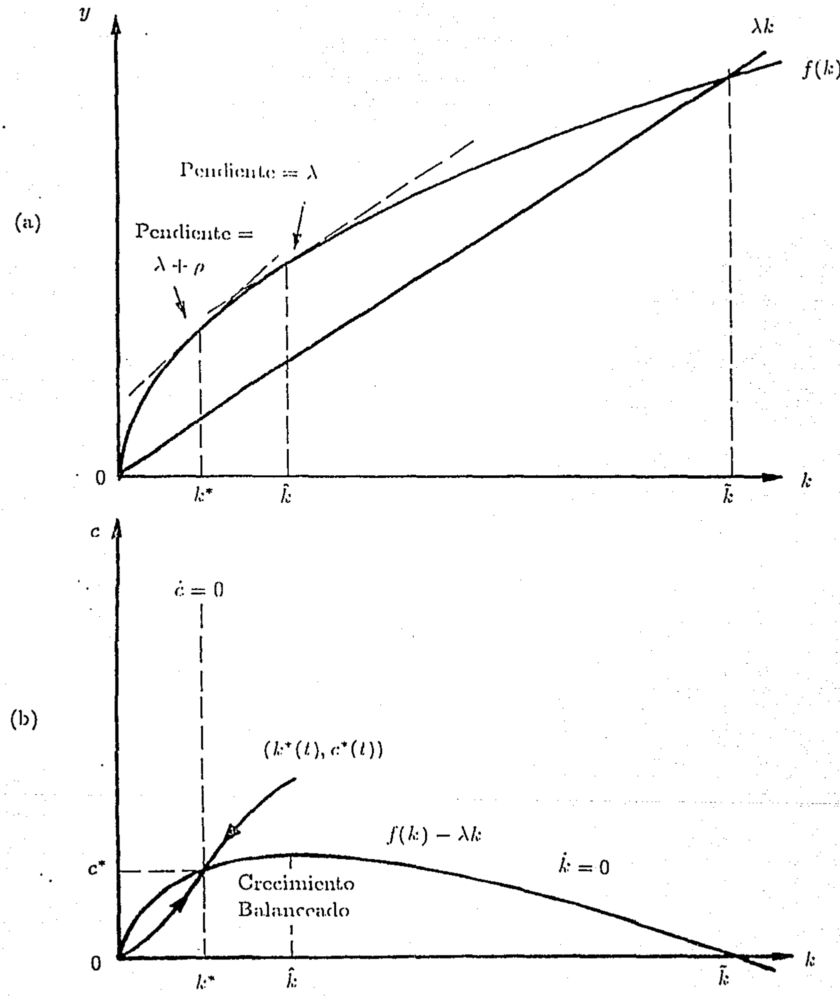

Fig.3
Trayectorias de crecimiento
económico óptimo

De la ecuación diferencial del capital per cápita

$$\dot{k}(t)\left\{\begin{matrix} = \\ > \\ < \end{matrix}\right\}0 \quad \text{si} \quad c(t)\left\{\begin{matrix} = \\ < \\ > \end{matrix}\right\}f(k(t))-\lambda k(t). \tag{$VI.1.15$}$$

Como el eje vertical en el diagrama inciso (b) es $c(t)$, la curva $f(k(t))-\lambda k(t)$ representa los puntos para los cuales $\dot{k}(t)=0$. Puntos abajo de la curva implican $\dot{k}(t)>0$, y puntos arriba de la curva implican $\dot{k}(t)<0$.

Las dos curvas $\dot{c}(t)=0$ y $\dot{k}(t)=0$ dividen el diagrama inciso (b) en cuatro regiones. Por ejemplo, a la derecha superior ambos $c(t)$ y $k(t)$ decrecen, mientras que a la izquierda inferior ambos $c(t)$ y $k(t)$ crecen. Las dos curvas intersectan en (k^*,c^*) que se llama el camino de crecimiento balanceado. En este punto la pendiente de la curva $f(k(t))-\lambda k(t)$ es ρ (tasa de descuento).

La estabilidad local de soluciones de las ecuaciones diferenciales (VI.1.8) se puede determinar de las raíces características de la matriz de coeficientes obtenido por una expansión lineal de estas ecuaciones en el punto en questión.

Extendiendo sobre el punto de equilibrio (k^*,c^*)

$$\begin{aligned} \dot{c} &\cong \frac{c^* f'(k^*)}{\sigma(c^*)}(k-k^*), \\ \dot{k} &\cong -(c-c^*)+\rho(k-k^*), \end{aligned} \tag{$VI.1.16$}$$

entonces las raíces características son las de la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{c^* f'(k^*)}{\sigma(c^*)} \\ -1 & \rho \end{pmatrix} \tag{$VI.1.17$}$$

es decir

$$\frac{1}{2}\left[\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \frac{4c^* f''(k^*)}{\sigma(c^*)}}\right]. \tag{$VI.1.18$}$$

Como las raíces son reales y de signo opuesto, por tanto el punto de equilibrio del crecimiento balanceado (k^*,c^*) es un punto silla, donde la rama estable se indica en la Fig.1 por $k^*(t), c^*(t)$. Esta rama estable consiste de todos los puntos que alcanzan eventualmente el equilibrio de crecimiento balanceado. El camino de crecimiento económico óptimo tiene que ser en esta rama, donde a partir de cualquier nivel de capital per cápita k_0 el único nivel óptimo de consumo inicial per cápita es el punto en la rama estable asociado con k_0. Este punto existe para cualquier k_0 positivo y es único. El camino de crecimiento óptimo es por tanto un segmento único de la rama estable. Cualquier camino diferente no satisfacería las condiciones necesarias de un óptimo. Como el camino de crecimiento balanceado es un segmento de la rama estable, entonces si $k_0=k^*$ ambos c y k son constantes en el tiempo a sus niveles de crecimiento balanceado. La rama estable es monótona creciente, entonces si

$k_0 < k^*$ ambos $c^*(t)$ y $k^*(t)$ crecen en el tiempo subiendo la rama estable hacia el equilibrio de crecimiento balanceado, mientras que si $k_0 > k^*$ entonces ambos $c^*(t)$ y $k^*(t)$ decrecen en el tiempo bajando la rama estable hacia el equilibrio de crecimiento balanceado. En todos los casos

$$\lim_{t\to\infty} c^*(t) = c^*, \quad \lim_{t\to\infty} k^*(t) = k^*, \tag{VI.1.19}$$

tal que la trayectoria de crecimiento óptimo con valor terminal infinito es de tal forma que se acerca asintóticamente hacia el equilibrio de crecimiento balanceado.

VI.2 SOLUCION DEL MODELO NEOCLASICO DE LA DEMANDA POR INVERSION

Este modelo y sus extensiones serán resueltos por medio de la técnica llamada Cálculo de Variaciones citada en el capítulo cuatro.

VI.2.1 PLANTEAMIENTO

El planteamiento del problema es el siguiente:

$$\text{Maximizar} \quad \int_0^\infty e^{-rt}[p(t)F(K(t),L(t)) - w(t)L(t) - (r+\delta-\pi)p(t)K(t)]dt.$$

VI.2.2 SOLUCION

Sea f el integrando de la expresión anterior. Usando la ecuación de Euler, es decir

$$\frac{\partial f(t,L,K,\dot{K})}{\partial L} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f(t,L,K,\dot{K})}{\partial \dot{L}}\right) = 0; \quad t\epsilon[0,\infty]$$

y

$$\frac{\partial f(t,L,K,\dot{K})}{\partial K} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f(t,L,K,\dot{K})}{\partial \dot{K}}\right) = 0; \quad t\epsilon[0,\infty],$$

en este caso $\frac{\partial f(t,L,K,\dot{K})}{\partial \dot{L}} = 0, \quad \frac{\partial f(t,L,K,\dot{K})}{\partial \dot{K}} = 0$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(t,L,K,\dot{K})}{\partial L} &= \frac{\partial}{\partial L}\Big[e^{-rt}[pF(K,L) - wL - (r+\delta-\pi)pK]\Big]\\ &= e^{-rt}\left[p\frac{\partial F(K,L)}{\partial L} - w\right],\end{aligned} \tag{VI.2.1}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(t,L,K,\dot{K})}{\partial K} &= \frac{\partial}{\partial K}\Big[e^{-rt}[pF(K,L) - wL - (r+\delta-\pi)pK]\Big]\\ &= e^{-rt}\left[p\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} - (r+\delta-\pi)p\right],\end{aligned} \tag{VI.2.2}$$

sustituyendo (VI.2.1) y (VI.2.2) en la ecuación de Euler, se tiene

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}=\frac{w}{p}, \qquad (VI.2.3)$$

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}=(r+\delta-\pi). \qquad (VI.2.4).$$

La ecuación (VI.2.3) es el producto marginal del trabajo igual al salario real. La ecuación (VI.2.4) implica que $r+\delta-\pi$ debe ser considerado como el costo real del capital.

VI.2.3 PLANTEAMIENTO DE LA PRIMERA EXTENSION

El planteamiento del problema es el siguiente:

$$\begin{cases} \text{Maximizar} \;\; V(L,K,\dot{K},t)=\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-(r-\pi)t}[pF(K(t),L(t))-wL(t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -J(\dot{K}(t)+\delta K(t))]dt, \\ \quad \text{sujeto a} \;\; K(0)=K_0, \end{cases}$$

VI.2.4 SOLUCION

Sea f el integrando de la expresión anterior. Usando la ecuación de Euler, es decir

$$\frac{\partial f(t,L,K,\dot{K})}{\partial L}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f(t,L,K,\dot{K})}{\partial \dot{L}}\right)=0, \quad t\epsilon[0,\infty];$$

$$\frac{\partial f(t,L,K,\dot{K})}{\partial K}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f(t,L,K,\dot{K})}{\partial \dot{K}}\right)=0, \quad t\epsilon[0,\infty].$$

En este caso $\frac{\partial f(t,L,K,\dot{K})}{\partial \dot{L}}=0$, entonces

$$\frac{\partial f(t,L,K,\dot{K})}{\partial L}=\frac{\partial}{\partial L}\left[e^{-(r-\pi)t}[pF(K,L)-wL-J\delta K-J\dot{K}]\right]$$

$$=e^{-(r-\pi)t}\left[p\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}-w\right], \qquad (VI.2.5)$$

$$\frac{\partial f(t,L,K,\dot{K})}{\partial K}=\frac{\partial}{\partial K}\left[e^{-(r-\pi)t}[pF(K,L)-wL-J\delta K-J\dot{K}-]\right]$$

$$=e^{-(r-\pi)t}\left[p\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}-J\delta\right],$$

$$\frac{\partial f(t,L,K,\dot{K})}{\partial \dot{K}}=e^{-(r-\pi)t}[-J],$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f(t,L,K,\dot{K})}{\partial \dot{K}}\right) = [J]e^{-(r-\pi)t}(r-\pi). \qquad (VI.2.6)$$

sustituyendo (VI.2.5) y (VI.2.6) en la ecuación de Euler, se obtiene

$$e^{-(r-\pi)t}\left[p\frac{\partial F}{\partial L} - w\right] = 0,$$

$$e^{-(r-\pi)t}\left[p\frac{\partial F}{\partial K} - J\delta\right] - Je^{-(r-\pi)t}(r-\pi) = 0,$$

simplificando, se tiene

$$p\frac{\partial F}{\partial L} - w = 0,$$

$$p\frac{\partial F}{\partial K} - J(\delta + (r-\pi)) = 0.$$

Si $J = P$, las dos ecuaciones anteriores se pueden escribir como

$$\frac{\partial F(t)}{\partial L(t)} = \frac{w}{p}, \qquad (VI.2.7)$$

$$\frac{\partial F(t)}{\partial K(t)} = (\delta + (r-\pi)). \qquad (VI.2.8)$$

La ecuación (VI.2.7) es el producto marginal del trabajo igual al salario real, manteniéndose constante todo el tiempo. La ecuación (VI.2.8) implica que $r + \delta - \pi$ debe ser considerado como el costo real del capital.

VI.2.5 PLANTEAMIENTO DE LA SEGUNDA EXTENSION

El planteamiento del problema es el siguiente:
Sea

$$f(L(t), K(t), \dot{K}(t), t) = e^{-rt}[p(t)F(K(t), L(t)) - w(t)L(t) - J(t)\delta K(t) - J(t)\dot{K}(t) - J(t)C(\dot{K})],$$

el problema es:

$$\begin{cases} \text{Maximizar} & \displaystyle\int_0^\infty f(L(t), K(t), \dot{K}(t), t)dt, \\ \text{sujeto a} & K(0) = K_0. \end{cases}$$

VI.2.6 SOLUCION

Sea f el integrando de la expresión anterior. Usando la ecuación de Euler, es decir

$$\frac{\partial f(t,L,K,\dot{K})}{\partial L} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f(t,L,K,\dot{K})}{\partial \dot{L}}\right) = 0, \quad t\epsilon[0,\infty];$$

$$\frac{\partial f(t,L,K,\dot{K})}{\partial K} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f(t,L,K,\dot{K})}{\partial \dot{K}}\right) = 0, \quad t\epsilon[0,\infty].$$

En este caso $\frac{\partial f(t,L,K,\dot{K})}{\partial \dot{L}} = 0$, entonces

$$\frac{\partial f(t,L,K,\dot{K})}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}\Big[e^{-rt}\big[p(t)F(K,L) - w(t)L - J(t)\delta K - J(t)\dot{K} - J(t)C(\dot{K})\big]\Big]$$

$$= e^{-rt}\big[p(t)\frac{\partial F(K,L)}{\partial L} - w(t)\big], \qquad (VI.2.9)$$

$$\frac{\partial f(t,L,K,\dot{K})}{\partial K} = \frac{\partial}{\partial K}\Big[e^{-rt}\big[p(t)F(K,L) - w(t)L - J(t)\delta K - J(t)\dot{K} - J(t)C(\dot{K})\big]\Big]$$
$$= e^{-rt}\big[p(t)\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} - J(t)\delta\big],$$
$$\frac{\partial f(t,L,K,\dot{K})}{\partial \dot{K}} = e^{-rt}\big[-J(t) - J(t)C'(\dot{K})\big] = -e^{-rt}\big[J(t) + J(t)C'(\dot{K})\big],$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f(t,L,K,\dot{K})}{\partial \dot{K}}\right) = -e^{-rt}\big[\dot{J}(t) + J(t)C''(\dot{K})\ddot{K} + C'(\dot{K})\dot{J}(t)\big] + \big[J(t) + J(t)C'(\dot{K})\big]e^{-rt}r. \qquad (VI.2.10)$$

Sustituyendo (VI.2.9) y (VI.2.10) en la ecuación de Euler, se obtiene

$$p(t)\frac{\partial F}{\partial L} - w(t) = 0,$$

$$p(t)\frac{\partial F}{\partial K} - J(t)\delta + \dot{J}(t) + J(t)C''(\dot{K})\ddot{K} + C'(\dot{K})\dot{J}(t) - rJ(t) - rJ(t)C'(\dot{K}) = 0.$$

las dos ecuaciones anteriores se pueden escribir como

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \frac{w(t)}{p(t)}, \qquad (VI.2.11)$$

$$p(t)\frac{\partial F}{\partial K} - J(t)\delta - rJ(t) + \dot{J}(t) - (rJ(t) - \dot{J}(t))C'(\dot{K}) + J(t)C''(\dot{K})\ddot{K} = 0. \qquad (VI.2.12)$$

La ecuación (VI.2.11) es el producto marginal del trabajo igual al salario real en cada instante. La ecuación (VI.2.12) es una ecuación diferencial que determina la tasa de crecimiento del stock de capital en cada instante t. Para simplificar el problema supóngase que la empresa espera que los precios $J(t)$, $p(t)$, y $w(t)$ crezcan a través del tiempo a una tasa constante π.

Esto significa que $\frac{\dot{J}(t)}{J(t)} = \frac{\dot{p}(t)}{p(t)} = \frac{\dot{w}(t)}{w(t)} = \pi$ para toda t, es decir, los salarios y precios relativos se mantienen constantes.

Supóngase que $r - \pi > 0$, y que la función del cambio de costos es cuadrática, es decir

$$C(\dot{K}) = \frac{1}{2}\gamma\dot{K}^2, \qquad \gamma > 0, \tag{VI.2.13}$$

la primera y segunda derivada de la ecuación (VI.2.13) se sustituye en la ecuación (VI.2.12), y se obtiene

$$p(t)\frac{\partial F}{\partial K} - J(t)\delta - rJ(t) + \dot{J}(t) - (rJ(t) - \dot{J}(t))\gamma(\dot{K}) + J(t)\gamma\ddot{K} = 0.$$

Dividiendo por $J(t)$, se obtiene

$$\frac{1}{J(t)}p(t)\frac{\partial F}{\partial K} - \delta - r + \frac{\dot{J}(t)}{J(t)} - (r - \frac{\dot{J}(t)}{J(t)})\gamma\dot{K} + \gamma\ddot{K} = 0,$$

entonces

$$\ddot{K} = \left[- \frac{1}{J(t)}p(t)\frac{\partial F}{\partial K} + \delta + r - \pi + (r - \pi)\gamma\dot{K}\right]\frac{1}{\gamma},$$

por tanto

$$\ddot{K} = \frac{1}{\gamma}\left[r + \delta - \pi - \frac{p(t)}{J(t)}\frac{\partial F}{\partial K}\right] + (r - \pi)\dot{K}, \tag{VI.2.14}$$

recordemos que los precios relativos son constantes en el tiempo, entonces la ecuación (VI.2.14) es una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes en $\dot{K}$, es decir

$$\frac{d\dot{K}}{dt} = A + B\dot{K} \quad \text{donde} \quad A = \frac{1}{\gamma}\left[r + \delta - \pi - \frac{p(t)}{J(t)}\frac{\partial F}{\partial K}\right], \quad B = (r - \pi) > 0.$$

La solución de la ecuación diferencial en $\dot{K}$ es

$$\dot{K} = ce^{Bt} - \frac{A}{B}, \tag{VI.2.15}$$

donde c es una constante que sepuede determinar si existen condiciones iniciales, si $c \neq 0$ entonces $\dot{K}$ sigue una trayectoria exponencial en la cual (después de un tiempo) el valor absoluto de la inversión crece a una tasa exponencial.

La solución de la ecuación diferencial de primer orden (VI.2.15) es

$$K(t) = \frac{c}{B}e^{Bt} - \frac{A}{B}t + C_1,$$

donde C_1 es una constante a determinar de las condiciones iniciales, en este caso $K(0) = K_0$. Sustituyendo en la expresión anterior para $t = 0$ se tiene

$$K(0) = \frac{c}{B}e^{B(0)} - \frac{A}{B}(0) + C_1,$$

entonces, $C_1 = K(0) - \frac{c}{B}$. Por tanto

$$K(t) = \frac{c}{B}e^{Bt} - \frac{A}{B}t + K(0) - \frac{c}{B}.$$

VI.3 SOLUCION DEL MODELO NEOCLASICO DE CONSUMO-INVERSION

Para la solución de los siguientes problemas se aplica la técnica de Cálculo de Variaciones citada en el capítulo cuatro.

VI.3.1 PLANTEAMIENTO

El planteamiento del problema es el siguiente:

$$\begin{cases} \text{Maximizar} \quad \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\rho t} U(rK(t) + v(t) - \dot{K}(t))dt, \\ \quad \text{sujeto a} \quad K(0) = K_0, \\ \qquad\qquad C(t), \quad \text{continua por pedazos.} \end{cases}$$

VI.3.2 SOLUCION

Dado

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} F(t, K(t), \dot{K}(t))dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\rho t} U(rK(t) + v(t) - \dot{K}(t))dt, \end{aligned} \qquad (VI.3.1)$$

se calcula

$$F_K = e^{-\rho t} U'(C(t))r,$$

y

$$F_{K'} = -e^{-\rho t} U'(C(t)).$$

Entonces la ecuación de Euler es

$$\frac{d}{dt}[-e^{-\rho t} U'(C(t))] = e^{-\rho t} U'(C(t))r. \qquad (VI.3.2)$$

Para facilitar la interpretación se integra la ecuación (VI.3.2) sobre un pequeño intervalo de tiempo

$$e^{-\rho t} U'(C(t)) = \int_t^{t+\Delta} e^{-\rho s} U'(C(s))r ds + e^{-\rho(t+\Delta)} U'(C(t+\Delta)). \qquad (VI.3.3)$$

En el óptimo el individuo no puede incrementar su utilidad cambiando el consumo de un peso marginal a otro tiempo. La utilidad marginal del consumo al tiempo t (lado izquierdo de la ecuación (VI.3.3)) tiene que ser igual que la utilidad marginal descontado obtenido por posponer este consumo al tiempo $t+\Delta$ (lado derecho de la ecuación (VI.3.3)). Note también que en el caso de que se aplaza el consumo, se obtiene ganancias de un peso a una tasa r las cuáles se pueden consumir. Como un peso marginal consumido al tiempo s contribuye utilidad marginal de $U'(C(s))$, una fracción r de este peso contribuye la utilidad $rU'(C(s))$. Por tanto el primer término a la derecha de la ecuación (VI.3.3) es la utilidad marginal descontada que se obtiene durante el período de aplazamiento. Al final del período de aplazamiento se consume el peso y se tiene la utilidad marginal $U'(C(t+\Delta))$. El segundo término a la derecha de la ecuación (VI.3.3) es la utilidad marginal descontada. Ejecutando las diferenciaciones indicadas en la ecuación (VI.3.2) se obtiene

$$-\frac{U''C'}{U'}=r-\rho. \tag{VI.3.4}$$

El cambio porcentual de la utilidad marginal es igual a la tasa de interés menos la tasa subjetiva intertemporal de descuento. Como $-U''/U'>0$ por hipótesis, la solución óptima está caracterizada por $dC/dt>0$ si y sólo si $r>\rho$. La trayectoria de consumo óptima crece si la tasa de interés r es más grande que la tasa subjetiva intertemporal de descuento ρ. (Un individuo paciente consume poco ahora para que el capital crezca y para que el consumo sea mayor en el futuro.)

Si se especifica la forma funcional de U se puede decir más. Sea $U(C(t))=\ln C(t)$, $v(t)=0$ para $0\le t\le\infty$. En este caso la ecuación (VI.3.4) se transforma en

$$C'/C=r-\rho. \tag{VI.3.5}$$

Integrando y sustituyendo en la ecuación (II.3.1) se obtiene*

$$K'(t)-rK(t)=-C(t)=-C(0)e^{-(r-\rho)t}. \tag{VI.3.6}$$

Integrando la ecuación anterior **,

$$K(t)=e^{rt}\left(c-C(0)[1-e^{-\rho t}]\right),$$

aplicando la condición de frontera $K(0)=K_0$, se tiene

$$K(t)=e^{rt}\left(K_0+C(0)(1-e^{-\rho t})\right). \tag{VI.3.7}$$

Entonces se obtiene la siguiente función para el consumo

$$C(t)=\rho e^{(r-\rho)t}C(0). \tag{VI.3.8}$$

* La solución de la ecuación diferencial $y'=-ay$ es $y=ce^{-at}$

** La solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}+a(x)y=f(x)$ es $y=e^{-\int a(x)dx}\left(c+\int e^{\int a(x)dx}f(x)dx\right)$.

VI.3.3 PLANTEAMIENTO DE LA EXTENSION DEL PROBLEMA

El planteamiento del problema es el siguiente:

$$\begin{cases} \text{Maximizar} \displaystyle\int_0^T \{e^{-\rho t}U(rK(t) + v(t) - \dot{K}(t))[1 - F(t)] + a(t)W(K(t))F'(t)\}dt, \\ \quad \text{sujeto a } K(0) = K_0, \\ \qquad\qquad C(t), \quad \text{continua por pedazos.} \end{cases}$$

VI.3.4 SOLUCION

Dado

$$\begin{aligned} J &= \int_0^T G(t, K(t), \dot{K}(t))dt \\ &= \int_0^T \{e^{-\rho t}U(rK(t) + v(t) - \dot{K}(t))[1 - F(t)] + a(t)W(K(t))F'(t)\}dt, \quad (VI.3.9) \end{aligned}$$

se calcula

$$G_K = e^{-\rho t}U'(C(t))r(1 - F(t) + a(t)W'(K(t))F'(t), \qquad (VI.3.10)$$

y

$$G'_K = -e^{-\rho t)}U'(C(t))(1 - F(t)). \qquad (VI.3.11)$$

Se obtiene la siguiente ecuacion de Euler

$$C'(t) = -\frac{(r - \rho)U'(C(t))}{U''(C(t))} + m(t)\left(\frac{U'(C(t)) - e^{\rho t}a(t)W'(K(t))}{U''(C(t))}\right), \qquad (VI.3.12)$$

donde

$$m(t) \equiv \frac{F'(t)}{[1 - F(t)]}, \qquad (VI.3.13)$$

es la densidad condicional de la probabilidad de morir al tiempo t dado la sobrevivencia hasta esta fecha.

En el caso de que la herencia no produzca utilidad, es decir $a(t) = 0$, la ecuación (VI.3.12) se transforma a

$$C'(t) = -(r - \rho - m(t))\frac{U'(C(t))}{U''(C(t))}, \qquad (VI.3.14)$$

de aquí se puede ver que el efecto de inseguridad sobre el tiempo de la vida es igual que un incremento en la tasa subjetiva intertemporal de descuento ρ. Más específicamente, la inseguridad del tiempo de la vida incrementa la tasa intertemporal de descuento de ρ a $\rho + F'(t)/[1 - F(t)] = r + m$. Este efecto se tiene también en el caso $a(t) > 0$. Como T es fijo y $K(t)$ arbitrario, la condición relevante de transversalidad es

$$F_{K'}|_T = -e^{-rT}U'(C(T))[1 - F(T)] = 0. \qquad (VI.3.15)$$

Pero como $1 - F(T) = 0$ por hipótesis, la ecuación (VI.3.15) no proporciona información nueva.

VI.4 SOLUCION DEL MODELO DE ASIGNACION OPTIMA DE CREDITOS EXTERNOS PARA INVERSION Y CONSUMO

Para la solución de este problema se aplica la técnica de Control Optimo citada en el capítulo cuatro.

VI.4.1 PLANTEAMIENTO

El planteamiento del problema es el siguiente:

$$\begin{cases} \text{Maximizar} \displaystyle\int_0^T e^{-\rho t} U[(1-u(t))m(t)]dt, \\ \text{sujeto a} \quad \dot{K}(t) = m(t)u(t), \\ \qquad K(0) = K_0, \\ \qquad K(T) = K_T, \\ \qquad K(0) < K_T < K(0) + \displaystyle\int_0^T m(t)dt, \\ \qquad u(t) \in [0,1]. \end{cases}$$

VI.4.2 SOLUCION

Primero se formula el Hamiltoniano

$$H = q_0 e^{-\rho t} U[(1-u(t))m(t)] + q(t)u(t)m(t). \tag{VI.4.1}$$

La condición de primer orden $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$, implica que en el máximo

$$q(t) = \frac{q_0 e^{-\rho t} U'[(1-u(t))m(t)]}{m(t)}. \tag{VI.4.2}$$

Además, se satisface la condición de segundo orden porque $H_{uu} = q_0 e^{-\rho t} U''[(1-u(t))m(t)] \leq 0$ (como $U'' \leq 0$), entonces el Hamiltoniano es cóncavo en u. La condición adjunta es

$$\dot{q}(t) = -\frac{\partial H}{\partial K} = 0, \tag{VI.4.3}$$

y la condición de frontera

$$q(T) \geq 0 \quad (= 0 \text{ si } K^*(T) > K_T). \tag{VI.4.4}$$

Diferenciando (VI.4.2) con respecto al tiempo se tiene

$$\dot{q}(t) = \frac{q_0 e^{-\rho t}\left[m(t)\{-rU' - (\dot{m}(t) - \dot{u}(t)m(t) - \dot{m}(t)u(t))U''\} - \dot{m}(t)U'\right]}{(m(t))^2}. \qquad (VI.4.5)$$

Sustituyendo la ecuación (VI.4.3) en (VI.4.5) se tiene

$$\dot{u}(t) = [(1 - u(t))\dot{m}(t)]U'' - \left[r + \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}\right]U'. \qquad (VI.4.6)$$

Por el principio del máximo las trayectorias u^* y x^* son óptimos si satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = [(1 - u(t))\dot{m}(t)]U'' - \left[r + \dfrac{\dot{m}(t)}{m(t)}\right]U', \\ \dot{K}(t) = m(t)u(t). \end{cases} \qquad (VI.4.7)$$

A continuación se hacen los siguientes supuestos:

$$\begin{aligned} m(t) &= 1, \\ \dot{m}(t) &= 0, \\ \rho &= 0, \end{aligned} \qquad (VI.4.8)$$

VI.4.3 PLANTEAMIENTO BAJO LOS SUPUESTOS (VI.4.8)

El planteamiento del problema es el siguiente:

$$\begin{cases} \text{Maximizar } \displaystyle\int_0^T U(1 - u(t))dt, \\ \text{sujeto a } \dot{K}(t) = u(t), \\ \qquad K(0) = K_0, \\ \qquad K(T) = K_T, \\ \qquad K(0) < K_T < K(0) + T, \\ \qquad u(t) \in [0, 1]. \end{cases}$$

VI.4.4 SOLUCION

Se supone que $(K^*(t), u^*(t))$ resuelven el problema planteado. Según el teorema del máximo de Pontryagin existe una constante q_0 y una función continua $q(t)$, tal que

$$(q_0, q(t)) \neq (0, 0), \quad \text{para todo } \; t \in [0, T], \qquad (VI.4.9)$$

y $q_0 = 0$ ó $q_0 = 1$. Además, $u^*(t)$ es el valor de $u \in [0,1]$ que maximiza el Hamiltoniano

$$H = q_0 U(1 - u(t)) + q(t)u(t). \qquad (VI.4.10a)$$

Por las condiciones (VI.4.3) y (VI.4.4) y la continuidad de $q(t)$,

$$q(t) = c \geq 0 \quad \text{para alguna constante } c. \qquad (VI.410b)$$

La condición para el máximo es

$$H_u = -q_0 U'(1 - u(t)) + c, \qquad (VI.4.11)$$

y como $H_{uu} = q_0 U''(1-u) \leq 0$ el Hamiltoniano es cóncavo en u. Existen tres casos que se tiene que considerar, cada uno dibujado en la Fig.4. Si $u^*(t) = 0$ entonces por la ecuación (VI.4.10a), H_u no puede ser > 0 para $u = 0$, por tanto $-q_0 U'(1) + c \leq 0$. Si $u^*(t) \in (0,1)$, entonces $H_u = 0$ y por tanto $q_0 U'(1 - u^*(t)) = c$. Al final, si $u^*(t) = 1$, entonces H_u es ≥ 0 para $u = 1$, por tanto $-q_0 U'(0) + c \geq 0$. Resumiendo

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & \Rightarrow c \leq q_0 U'(1), \\ \in (0,1) & \Rightarrow q_0 U'(1 - u^*(t)) = c, \\ 1 & \Rightarrow q_0 U'(0) \leq c. \end{cases} \qquad (VI.4.12)$$

Se afirma que $q_0 = 1$. Supóngase que por el contrario, $q_0 = 0$. Entonces usando (VI.4.9) y (VI.4.10b) se puede ver que $H_u = c > 0$, así se maximiza el Hamiltoniano para $u = 1$ para todo t. Entonces por las tres primeras restricciones del planteamiento se obtiene $K(t) = t + K_0$, por tanto de la penúltima restricción del planteamiento $K(T) = T + K(0) > K_T$. Pero de acuerdo a la ecuación (VI.4.10b) esto implicaría que $K(T) = c = 0$, contradiciendo la ecuación (VI.4.9) para $t = T$.

Ya que $q_0 = 1$, $H = U(1-u) + cu$ es estrictamente cóncava y tiene un punto máximo único $\bar{u}$ que es independiente de t. Aquí $u^*(t) = \bar{u}$ para algún $\bar{u} \in [0,1]$. $\bar{u} = 0$ es imposible debido a las primeras tres restricciones del planteamiento ya que $K(t) \equiv K_0$, y por tanto $K(T) = K_0 \geq K_T$, contradiciendo la penúltima restricción del planteamiento. Como $\bar{u} > 0$, por la ecuación (VI.4.12) no es posible que $q(t) = c = 0$. Por tanto se obtiene de la ecuación (VI.4.10b),

$$K^*(T) = K_T. \qquad (VI.4.13)$$

Se puede concluir que no consumir nada de la ayuda económica no es óptimo. De hecho, si $\bar{u} = 0$, entonces de las primeras restricciones del planteamiento, $K^*(t) = t + K_0$ y por tanto $K^*(T) = T + K_0$ se puede ver que ésto es inconsistente con la penúltima restriccion del planteamiento y con la ecuación (VI.4.13) Por tanto $\bar{u} \in (0,1)$ y por las tres primeras restricciones del planteamiento, $x^*(t) = x_0 + \bar{u}t$, entonces $x^*(T) = x_0 + \bar{u}T$. Usando la ecuación (VI.4.13) se puede ver que,

$$u^*(t) = \bar{u} = \frac{x_T - x_0}{T}, \qquad (VI.4.14)$$

y

$$x^*(t) = x_0 + \frac{x_T - x_0}{T} t. \qquad (VI.4.15)$$

(a) $u = 0$ maximiza H

(b) $u = a$ maximiza H

(c) $u = 1$ maximiza H

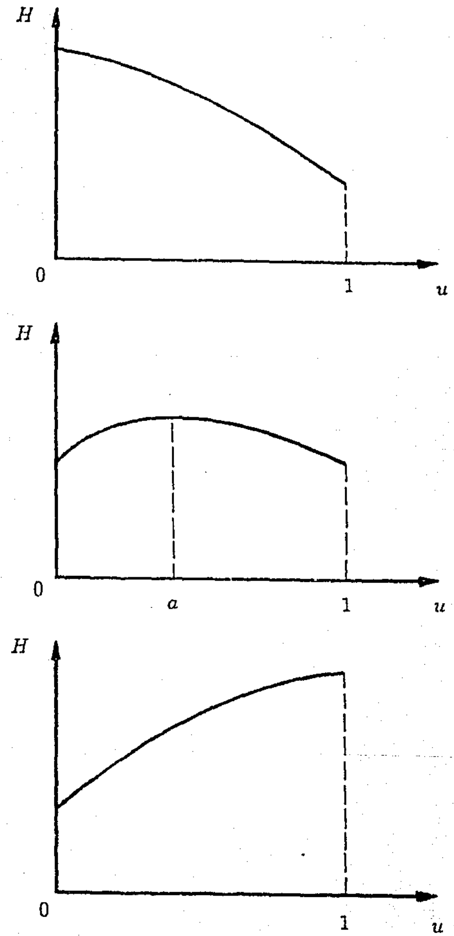

Fig.4

VI.5 SOLUCION DEL MODELO MAXIMIZACION DE BENEFICIOS DE UN MONOPOLIO

Este modelo será resuelto por medio de la técnica llamada Cálculo de Variaciones citada en el capítulo cuatro.

VI.5.1 PLANTEAMIENTO

El planteamiento del problema es el siguiente:

$$\begin{cases} \text{Maximizar} & \displaystyle\int_0^T e^{-rt}[p(t)[ap(t)+b\dot{p}(t)+c]-m[ap(t)+b\dot{p}(t)+c]^2 \\ & \quad -n[ap(t)+b\dot{p}(t)+c]-k]dt, \\ \text{sujeto a} & p(0)=p_0, \\ & p(T)=p_1. \end{cases}$$

VI.5.2 SOLUCION

Dado

$$\begin{aligned} J(p)=\int_0^T F(t,p,\dot{p})dt &= \int_0^T e^{-rt}[p(t)[ap(t)+b\dot{p}(t)+c]-m[ap(t)+b\dot{p}(t)+c]^2 \\ &\quad -n[ap(t)+b\dot{p}(t)+c]-k]dt \\ &= \int_0^T e^{-rt}[a(p(t))^2+bp(t)\dot{p}(t)+cp(t)-ma^2(p(t))^2-mabp(t)\dot{p}(t) \\ &\quad -macp(t)-mabp(t)\dot{p}(t)-mb^2(\dot{p}(t))^2-mbc\dot{p}(t)-macp(t) \\ &\quad -mbc\dot{p}(t)-mc^2-nap(t)-nb\dot{p}(t)-nc-k]dt \\ &= \int_0^T e^{-rt}[a(1-ma)(p(t))^2+(c-2mac-na)p(t)+ \\ &\quad (b-2mab)p(t)\dot{p}(t)-(2mbc+nb)\dot{p}(t)-mb^2(\dot{p}(t))^2-mc^2 \\ &\quad -nc-k]dt. \end{aligned}$$

La ecuación de Euler es,

$$\frac{\partial F(t,p,\dot{p})}{\partial p}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F(t,p,\dot{p})}{\partial \dot{p}}\right)=0,$$

entonces

$$\frac{\partial F(t,p,\dot{p})}{\partial p} = e^{-rt}\Big[2a(1-ma)p(t) + (c-2mac-na) + (b-2mab)\dot{p}(t)\Big], \qquad (VI.5.1)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(t,p,\dot{p})}{\partial \dot{p}} &= e^{-rt}\Big[(b-2mab)p(t) - 2mbc - nb - 2mb^2\dot{p}(t)\Big],\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F(t,p,\dot{p})}{\partial \dot{p}}\right) &= \frac{d}{dt}\Big[e^{-rt}[(b-2mab)p(t) - 2mbc - nb - 2mb^2\dot{p}(t)]\Big]\\
&= e^{-rt}[(b-2mab)\dot{p}(t) - 2mb^2\ddot{p}(t)] + [(b-2mab)p(t) - 2mbc\\
&\quad - nb - 2mb^2\dot{p}(t)]e^{-rt}(-r)\\
&= e^{-rt}\Big[[(b-2mab)\dot{p}(t) - 2mb^2\ddot{p}(t)] - r[(b-2mab)p(t) - 2mbc - nb\\
&\quad -2mb^2\dot{p}(t)]\Big]. \qquad (VI.5.2)
\end{aligned}$$

sustituyendo (VI.5.1) y (VI.5.2) en la ecuación de Euler, se tiene

$$\begin{aligned}
e^{-rt}\Big[2a(1-ma)p(t) + (c-2mac-na) + (b-2mab)\dot{p}(t)\Big] &= e^{-rt}\Big[[(b-2mab)\dot{p}(t)\\
&\quad - 2mb^2\ddot{p}(t)] - r[(b-2mab)p(t) - 2mbc - nb - 2mb^2\dot{p}(t)]\Big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2a(1-ma)p(t) + (c-2mac-na) + 2mb^2\ddot{p}(t) - bp(t)r + 2mabp(t)r&\\
+ 2rmbc + rnb + 2rmb^2\dot{p}(t) &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{p}(t)[2mb^2] + \dot{p}(t)[2mb^2]r + p(t)[2a(1-ma) - br + 2mabr] &= -2rmbc - rnb\\
&\quad + 2mac + na - c.
\end{aligned}$$

Por tanto, se obtiene la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{p}(t) + \dot{p}(t)r + p(t)\left[\frac{2a(1-ma) + r(2mab-b)}{2mb^2}\right] = \left[\frac{2m(ac-bcr) + n(a-br) - c}{2mb^2}\right], \qquad (VI.5.3)$$

y su solución general es de la forma

$$p(t) = p_c(t) + p_p(t),$$

donde $p_p(t)$ es una solución particular y $p_c(t)$ su solución complementaria. La solución $p_c(t)$ se obtiene al considerar la ecuación diferencial homogénea, para este caso las raíces de la ecuación característica son:

$$\lambda = \frac{-r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{2a(1-ma) + r(2mab-b)}{(2mb^2)}},$$

por lo que

$$p_c(t) = C_1 e^{\left(-\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{2a(1-ma)+r(2mab-b)}{(2mb^2)}}\right)t} + C_2 e^{\left(-\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{2a(1-ma)+r(2mab-b)}{(2mb^2)}}\right)t},$$

y la solución particular es

$$p_p(t) = \frac{2m(ac - bcr) + n(a - br) - c}{2a(1-ma) + r(2mab-b)}.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial de segundo orden (VI.5.3) es

$$\begin{aligned} p(t) = {} & C_1 e^{\left(-\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{2a(1-ma)+r(2mab-b)}{(2mb^2)}}\right)t} \\ & + C_2 e^{\left(-\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{2a(1-ma)+r(2mab-b)}{(2mb^2)}}\right)t} \\ & + \frac{2m(ac - bcr) + n(a - br) - c}{2a(1-ma) + r(2mab-b)}. \end{aligned}$$

VI.6 SOLUCION DEL MODELO DE ANALISIS DE DEVALUACION

Para la solución de este problema se aplica la técnica de Cálculo de Variaciones citada en el capítulo cuatro.

VI.6.1 PLANTEAMIENTO

El planteamiento del problema es el siguiente:

$$\begin{cases} \text{Maximizar} \displaystyle\int_{t_0}^{\infty} e^{-rt} U(x(t), m(t))dt, \\ \text{sujeto a} \displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-rt}[(x(t)/p(t) + m(t)]dt = b_0 + \int_{0}^{\infty} e^{-rt}[(y(t)/p(t)]dt, \\ b(0) = b_0. \end{cases}$$

VI.6.2 SOLUCION

Las condiciones necesarias de un máximo se obtienen diferenciando el Lagrangeano

$$L = u(x(t), m(t))e^{-\rho t} - \lambda \left(\left[\frac{x(t)}{p(t)} + m(t) \right] e^{-rt} - \frac{y(t)}{p(t)} e^{-rt} \right), \qquad (VI.6.1)$$

con respecto a $x(t)$ y $m(t)$ (para todo t). Estas condiciones son:

$$U_x(x(t), m(t))e^{-\rho t} = \frac{\lambda}{p(t)} e^{-rt}, \qquad (VI.6.2)$$

$$U_m(x(t), m(t))e^{-\rho t} = \lambda e^{-rt}. \qquad (VI.6.3)$$

Junto con la primera restricción del planteamiento se puede usar las ecuaciones (VI.6.2) y (VI.6.3) para derivar las trayectorias óptimas del bien importado, $m(t)$, del bien exportado, $x(t)$, y el precio sombra de la riqueza al tiempo 0, λ. Para este propósito se supone que ρ, la tasa subjetiva intertemporal de descuento, es igual a r, la tasa de interés del mercado de capital internacional. Además, se supone que la función de utilidad está adentro de las funciones de utilidad con aversión relativa al riesgo constante,

$$U(x, m) = \frac{(x^{\alpha} m^{1-\alpha})^{1-R}}{1-R}, \qquad (VI.6.4)$$

donde $R > 0$ y $1 > \alpha > 0$. El coeficiente de aversión al riesgo R determina la curvatura de la función de utilidad.

Si $R = 1$, entonces $U(x, m) = \alpha \ln(x) + (1-\alpha)\ln(m)$.

El precio sombra óptimo y la trayectoria óptima de consumo se calcula como sigue. Como $\rho = r$ (por suposición), las ecuaciones (VI.6.2) - (VI.6.4) implican que

$$\frac{\tilde{x}(t)}{\tilde{m}(t)} = \frac{\alpha p(t)}{(1-\alpha)}. \qquad (VI.6.5)$$

De las ecuaciones (VI.6.3) a (VI.6.5) se concluye que

$$\tilde{m}(t) = \left(\frac{1-\alpha}{\tilde{\lambda}}\right)^{1/R} \left(\frac{\alpha p(t)}{1-\alpha}\right)^{\alpha(1-R)/R}. \qquad (VI.6.6)$$

Ahora se suma $\tilde{m}(t)$ a ambos lados de la ecuación (VI.6.5) y se obtiene

$$\left(\frac{\tilde{x}(t)}{p(t)}\right) + \tilde{m}(t) = \frac{\tilde{m}(t)}{(1-\alpha)}. \qquad (VI.6.7)$$

De la primera restricción del planteamiento y las ecuaciónes (VI.6.7) y (VI.6.6) se obtiene el valor sombra óptimo

$$\tilde{\lambda} = \frac{(1-\alpha)^{1-R}\left[\int_0^\infty \left(\frac{\alpha p(t)}{1-\alpha}\right)^{\alpha(1-R)/R} e^{-rt}dt\right]^R}{\left[b_0 + \int_0^\infty \left(\frac{y(t)}{p(t)}\right)e^{-rt}dt\right]^R}. \qquad (VI.6.8)$$

De las ecuaciones (VI.6.6) y (VI.6.8) se obiene la trayectoria óptima de $\tilde{m}(t)$

$$\tilde{m}(t) = \frac{(1-\alpha)\left[b_0 + \int_0^\infty \left(\frac{y(t)}{p(t)}\right)e^{-rt}dt\right]}{\left[\int_0^\infty \left(\frac{\alpha p(t)}{1-\alpha}\right)^{\alpha(1-R)/R} e^{-rt}dt\right]} \left(\frac{\alpha p(t)}{1-\alpha}\right)^{\alpha(1-R)/R} \qquad (VI.6.9)$$

y sustituyendo la expresión anterior en la ecuación (VI.6.5) se tiene

$$\tilde{x}(t) = \frac{(1-\alpha)\left[b_0 + \int_0^\infty \left(\frac{y(t)}{p(t)}\right)e^{-rt}dt\right]}{\left[\int_0^\infty \left(\frac{\alpha p(t)}{1-\alpha}\right)^{\alpha(1-R)/R} e^{-rt}dt\right]} \left(\frac{\alpha p(t)}{1-\alpha}\right)^{(\alpha(1-R)/R)+1} \qquad (VI.6.10)$$

El precio sombra es por la ecuación (VI.6.8) una función de las trayectorias esperadas del ingreso $y(t)$ y del precio de exportaciones entre el precio de importaciones $p(t)$; por lo tanto, lo mismo es cierto para el consumo. Cualquier cambio no anticipado en estas trayectorias va a causar un nuevo nivel de $\tilde{\lambda}$. Un cambio no anticipado en las posibilidades de consumo (primera restricción del planteamiento) implica que las economías domésticas tienen que revisar el nivel deseado de consumo para este instante y las trayectorias planeadas de consumo para el futuro.

VI.7 SOLUCION DEL MODELO DE CUENTA CORRIENTE Y TIPO DE CAMBIO REAL

Los primeros dos planteamientos se resuelven por medio de la técnica Cálculo de Variaciones y el tercer planteamiento por medio de Control Optimo.

VI.7.1 PLANTEAMIENTO

El planteamiento del problema es el siguiente:

$$\begin{cases} \text{Maximizar} & \displaystyle\int_0^\infty u[c(t)]e^{-rt}dt, \\ \text{sujeto a} & \displaystyle\int_0^\infty [y + g(t) - c(t)(1 + \alpha i(t))]e^{-rt}dt = -a(0), \\ & a(0) = a_0 \end{cases}$$

VI.7.2 SOLUCION

El Lagrangeano del correspondiente problema variacional está dado por

$$L[c(t), \lambda] = \{u[(c(t)] + \lambda\{y + g(t) - c(t)(1 + \alpha i(t))\}\}e^{-rt}, \qquad (VI.7.1)$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción (II.7.4). Estamos también suponiendo que la restricción (II.7.9) es activa, equivalentemente estamos suponiendo que $i(t) > 0$ para toda t.

Ahora bien la condición de primer orden (condición necesaria de óptimo, ecuación de Euler-Lagrange) del problema de maximización resulta ser

$$\lambda[1 + \alpha i(t)] = c(t)^{-\gamma}, \quad \text{para todo} \ \ \gamma > 0. \qquad (VII.7.2)$$

Esta condición nos dice que "*La utilidad marginal del consumo es igual a su precio multiplicado por el precio sombra de la riqueza* ", Se entiende que el precio de $c(t)$ es igual a su costo de producción (=1) más el costo de oportunidad de mantener un nivel de saldos monetarios reales $m(t)$.

Note que el precio sombra de la riqueza satisface

$$0 > \frac{\partial \lambda}{\partial c} = -\frac{\gamma c(t)^{-(\gamma+1)}}{[1 + \alpha i(t)]}, \quad \text{para toda} \ \ \gamma > 0.$$

Usando la ecuación (II.7.2), se tiene que en el intervalo $[0,T]$

$$c(t) = \{\lambda[1+\alpha(\epsilon_0+r)]\}^{-\frac{1}{\gamma}}, \quad \text{para toda } \gamma > 0, \tag{VI.7.3}$$

con lo cual $c(t)$ permanece constante en dicho intervalo, digamos, $c(t) = c_0$. De la misma forma, si en (VI.7.3) sustituimos ϵ_0 por ϵ_1, obtendremos que también $c(t)$ permanece constante en el intervalo (T,∞), digamos, $c(t) = c_1$. En consecuencia, de la ecuación (VI.7.2) se tiene que

$$AA: \quad c_0\{\lambda[1+\alpha(\epsilon_0+r)]\}^{\frac{1}{\gamma}} = c_1\{\lambda[1+\alpha(\epsilon_1+r)]\}^{\frac{1}{\gamma}}. \tag{VI.7.4}$$

Esta ecuación nos dice que " *La utilidad marginal del último peso gastado en c_0 es la misma que si se hubiera gastado en c_1* ". También observe que la tasa marginal de sustitución entre c_0 y c_1 permanece constante.

Ahora bien, de la restricción para la economía, (II.7.18), se tiene que

$$B(0) + \frac{y}{r} = \int_0^T c_0 e^{-rt}dt + \int_T^\infty c_1 e^{-rt}dt, \tag{VI.7.5}$$

con lo cual

$$BB: \quad c_1 = [y(t) + rB(0) - c_0]e^{rT} + c_0. \tag{VI.7.6}$$

En la Fig. 5 graficamos la restricción presupuestal de la economía representándola por BB. Note que

$$\left.\frac{dc_1}{dc_0}\right|_{BB} = 1 - e^{rT} < 0.$$

La condición (VI.7.4) representada por AA aparece también en la gráfica 5. Es importante notar que lo a lo largo de AA, $c_0 > c_1$, ya que $\epsilon_0 < \epsilon_1$. Note también que

$$\left.\frac{dc_1}{dc_0}\right|_{AA} = \left\{\frac{1+\alpha(\epsilon_0+r)}{1+\alpha(\epsilon_1+r)}\right\}^{\frac{1}{\gamma}} > 0.$$

La intersección de BB con la recta a 45 grados nos proporciona el producto nacional bruto, PNB_0, al tiempo $t=0$. Dicha intersección se alcanza en

$$c_0 = y + rB(0) = GNP_0.$$

Observe que si la tasa de devaluación fuera, para siempre, constante, es decir, si $T = 0$, entonces

$$c_0 = c_1 = y + rB(0).$$

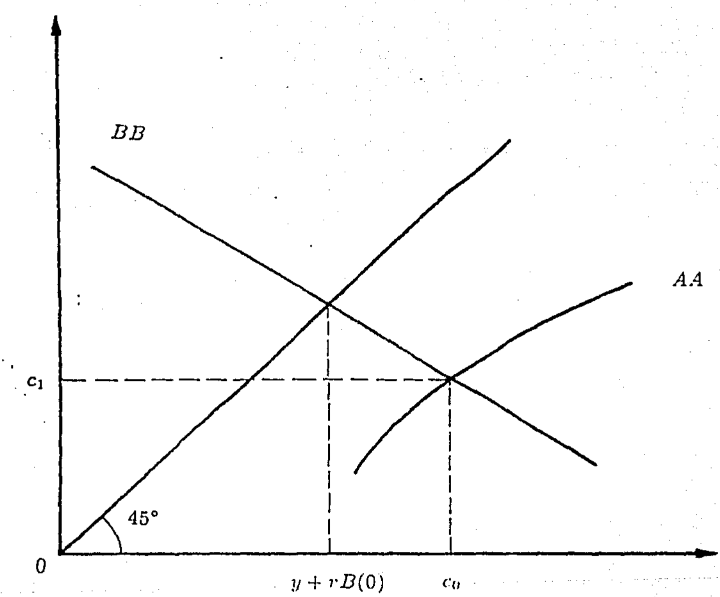

Fig.5

Por lo tanto un cambio de una vez por todas en la tasa de devaluación no presenta efectos reales.

Si se espera que la política monetaria fuera temporal, es decir, si $0 < T < \infty$, entonces

$$0 > c_1 - c_0 = [y - c_0 + rB(0)]e^{rT}$$

con lo cual se genera un déficit en cuenta corriente en el periodo de transición $[0, T]$. Después de T la cuenta corriente se va a balancear, el nivel de consumo disminuye, y este nivel es menor que en el caso en que se espera que la política monetaria fuera permanente (i.e., cuando ϵ es constante en $[0, \infty)$).

VI.7.3 PLANTEAMIENTO DE LA PRIMERA EXTENSION

El planteamiento del problema es el siguiente:

$$\begin{cases} \text{Maximizar} & \displaystyle\int_0^\infty u[F(c_s(t))]e^{-rt}dt, \\ \text{sujeto a} & \displaystyle\int_0^\infty [y + g(t) - F(c_s(t))(1 + \alpha i(t))]e^{-rt}dt = -a(0), \\ & a(0) = a_0 \end{cases}$$

VI.7.4 SOLUCION

Manteniendo todos los demás supuestos de la sección anterior, la condición de primer orden del problema de maximización de utilidad (ecuación de Euler-Lagrange), está ahora dada por

$$\lambda\{1 + \alpha i(t)[c_s(t)]^{-\theta}\} = [c_s(t)]^{\theta\gamma - \theta - \gamma}(1 - \theta)^\gamma. \qquad (VI.7.7)$$

Observe que cuando $\theta = 0$, obtenemos (VI.7.2).

Si volvemos a tomar una política de la forma

$$\epsilon(t) = \begin{cases} \epsilon_0, & \text{para } 0 \le t \le T, \\ \epsilon_1, & \text{para } t > T, \end{cases} \qquad (VI.7.8)$$

con $\epsilon_0 < \epsilon_1$, tendremos de nuevo que

$$c_s(t) = \begin{cases} c_{s0}, & \text{para } t \in [0, T], \\ c_{s1}, & \text{para } t \in (T, \infty). \end{cases} \qquad (VI.7.9)$$

Utilizando (VI.7.7), obtenemos que

$$AA: \quad c_{s0}\{\lambda[1 + \alpha(\epsilon_0 + r)c_{s0}^{-\theta}]\}^{\frac{1}{\psi}} = c_{s1}\{\lambda[1 + \alpha(\epsilon_1 + r)c_{s1}^{-\theta}]\}^{\frac{1}{\psi}}, \qquad (VI.7.10)$$

donde $\phi = -[\theta\gamma - \theta - \gamma]$. Procediendo como antes, también se obtiene que

$$BB: \quad c_{s1} = [y(t) + rB(0) - c_{s0}]e^{rT} + c_{s0}. \qquad (VI.7.11)$$

Ahora podemos llevar a cabo un análisis similar, empleando la misma Fig. 5. Por lo tanto al disminuir T tenemos que en el nuevo equilibrio c_{s0} y c_{s1} serán mayores. En consecuencia, los precios relativos $P(t) = [c_s(t)]^{\theta}$ aumentan en $[0,T]$, y por lo tanto el tipo de cambio real se está apreciando en $[0,T]$. Entre más pequeño es T mayor es la apreciación del tipo de cambio real.

Podemos decir algo más, después de T el tipo de cambio real se va a depreciar por abajo del nivel que si $\epsilon(t)$ hubiera permanecido constante en $[0,\infty)$.

VI.7.5 PLANTEAMIENTO DE LA SEGUNDA EXTENSION

El planteamiento del problema es el siguiente:

$$\begin{cases} \text{Maximizar} \quad \displaystyle\int_0^{\infty} u[c(t), m(t)]e^{-rt}dt, \\ \text{sujeto a} \quad \dot{a}(t) = ra(t) + y + g(t) - c(t)(1 + \alpha i(t)), \\ \qquad\qquad a(0) = a_0 \end{cases}$$

VI.7.6 SOLUCION

El Hamiltoniano está dado por

$$\begin{aligned} H[c(t), m(t), \lambda(t)] &= u[(c(t), m(t)]e^{-rt} + \lambda(t)\{ra(t) + y + g(t) - c(t)(1 + \alpha i(t))\} \\ &= u[(c(t), m(t)]e^{-rt} + \lambda(t)\{ra(t) + y + g(t) - c(t) - m(t)i(t)\}. \end{aligned} \qquad (VI.7.12)$$

Las condiciones de primer orden están dadas por

$$H_c = 0, \quad H_m = 0, \quad \dot{\lambda}(t) = -H_a, \quad H_{\lambda} = \dot{a}(t),$$

de donde se tiene que $\lambda(t) = \lambda(0)e^{-rt}$. También obtenemos que para toda $R > 1$

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha(c^{\alpha}m^{1-\alpha})^{1-R}}{c} = \lambda(0), \\ \dfrac{(1-\alpha)(c^{\alpha}m^{1-\alpha})^{1-R}}{m} = \lambda(0)i, \end{cases} \qquad (VI.7.13)$$

de donde

$$m = \frac{(1-\alpha)c}{\alpha i}. \qquad (VI.7.14)$$

Si sustituimos (VI.7.14) en la primera ecuación de (VI.7.13), encontramos que para toda $R > 0$

$$c = \left\{ \frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha i} \right)^{(1-\alpha)(1-R)} \right\}^{\frac{1}{R}}.$$

Si de nuevo volvemos a tomar una política de la forma

$$\epsilon(t) = \begin{cases} \epsilon_0, & \text{para } 0 \le t \le T, \\ \epsilon_1, & \text{para } t > T, \end{cases} \qquad (VI.7.15)$$

con ϵ_0, ϵ_1, obtenemos

$$AA: \quad \frac{c_0}{\left\{ \frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha(r+\epsilon_0)} \right)^{(1-\alpha)(1-R)} \right\}^{\frac{1}{R}}} = \frac{c_1}{\left\{ \frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha(r+\epsilon_1)} \right)^{(1-\alpha)(1-R)} \right\}^{\frac{1}{R}}},$$

inmediatamente se obtiene que $c_0 > c_1$ y tenemos la misma situación de la Fig. 5.

También se podría proceder considerando en forma más general la función de utilidad, $u = u(c, m)$, escribiendo

$$\frac{u_m[c(t), m(t)]}{u_c[c(t), m(t)]} = i(t), \qquad (VI.7.16)$$

lo cual significa que "*La tasa marginal de sustitución entre saldos monetarios reales y consumos es igual al costo de oportunidad de mantener dichos saldos.*"

Definiendo ahora

$$\Psi[c(t), m(t), i(t)] = u_m[c(t), m(t)] - i(t)u_c[c(t), m(t)] = 0. \qquad (VI.7.17)$$

entonces

$$\Psi_m = u_{mm} - iu_{mc} < 0,$$

con lo cual estamos en posición de aplicar el Teorema de la función implícita a Ψ. Por lo tanto existe, al menos localmente, una función L, tal que

$$m(t) = L[c(t), i(t)].$$

Esta función satisface

$$L_c = \frac{\partial m}{\partial c} = -\frac{\Psi_c}{\Psi_m} > 0$$

y

$$L_i = \frac{\partial m}{\partial i} = -\frac{\Psi_i}{\Psi_m} < 0,$$

ya que

$$\Psi_m = u_{mm} - iu_{cm} < 0, \quad \Psi_c = u_{mc} - iu_{cc} > 0, \quad \Psi_i = -u_c < 0.$$

Por lo tanto, podemos escribir una de las condiciones de primer orden como

$$u_c[c(t), L[c(t), i(t)]] = \lambda, \qquad (VI.7.18)$$

y como $i(t) = r(t) + \epsilon(t)$, entonces podemos reescribir (VI.7.18) de la siguiente forma

$$AA: \quad f[c(t), \epsilon(t)] = u_c[c(t), L[c(t), r + \epsilon(t)]] = \lambda. \qquad (VI.7.19)$$

Si de nuevo volvemos a tomar una política de la forma (VI.7.15), vamos a obtener que

$$c(t) = \begin{cases} c_0, & \text{para } t \in [0, T], \\ c_1, & \text{para } t \in (T, \infty). \end{cases} \qquad (VI.7.20)$$

Note ahora que a partir de (VI.7.19)

$$0 > f_c[c(t), \epsilon(t)] = u_{cc}[c(t), L[c(t), r + \epsilon(t)]] = \frac{\partial \lambda}{\partial c}.$$

De nuevo esta condición nos habilita para usar el Teorema de la función implícita, con lo cual

$$\frac{\partial c}{\partial \epsilon} = -\frac{f_\epsilon}{f_c} = -u_{cm}.$$

Por lo tanto, tenemos una curva como la de AA y como

$$BB: \quad c_1 = [y(t) + rB(0) - c_0]e^{rT} + c_0,$$

sigue siendo válida, todas las conclusiones anteriores se matienen.

VI.8 SOLUCION DEL MODELO DE APRENDIZAJE SOBRE UTILIDAD

Para la solución de los siguientes problemas se aplica la técnica de Control Óptimo citada en el capítulo cuatro.

VI.8.1 PLANTEAMIENTO DE APRENDIZAJE CON MINIMA ENTROPIA CRUZADA:

El planteamiento del problema es el siguiente:

$$\text{Minimizar} \qquad H(\pi, p) = \int_\Theta \pi(\theta) \log \frac{\pi(\theta)}{p(\theta)} d\theta,$$

$$\text{sujeto a} \quad \begin{cases} \displaystyle\int_\Theta \pi(\theta) d\theta = 1, \\ \displaystyle\int_\Theta a_k(\theta)\pi(\theta) d\theta = \bar{a}_k, \quad k = 1, 2, ..., m. \end{cases}$$

VI.8.2 SOLUCION

La condición de primer orden (condición necesaria de óptimo, ecuación de Euler-Lagrange) del problema planteado está dada por

$$\begin{cases} \pi^*(\theta|q_0(p)) = p(\theta) \exp\left\{ -\lambda_0 - \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k(\theta) \right\}, \\ 1 - \displaystyle\int_\Theta \pi^*(\theta) d\theta = 0, \\ \displaystyle\int_\Theta (\bar{a}_k - a_k(\theta))\pi^*(\theta) d\theta = 0, \quad k = 1, 2, ..., m, \end{cases} \qquad (VI.8.1)$$

donde $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m$, son los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones.

Sustituyendo π^* en las condiciones de primer orden restantes en (VI.8.1), encontramos que

$$\begin{cases} 0 = \lambda_0 - \log\left\{ \displaystyle\int_\Theta p(\theta) \prod_{k=1}^{m} e^{-\lambda_k a_k(\theta)} d\theta \right\}, \\ 0 = \displaystyle\int_\Theta [a_k(\theta) - \bar{a}_k] p(\theta) \prod_{k=1}^{m} e^{-\lambda_k a_k(\theta)} d\theta, \; k = 1, 2, ..., m, \end{cases} \qquad (VI.8.2)$$

el cual es un sistema no lineal homogéneo en las variables $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m$.

Cuando la integral que define a λ_0 puede resolverse, entonces los demás multiplicadores pueden encontrarse a partir de las siguientes relaciones (ver Venegas (1990a))

$$\frac{\partial \lambda_0}{\partial \lambda_k} = -\bar{a}_k, \qquad k = 1, 2, ..., m. \tag{VI.8.3}$$

VI.8.3 PLANTEAMIENTO DE APRENDIZAJE CON MAXIMA ENTROPIA

El planteamiento del problema es el siguiente:

$$\text{Maximizar} \qquad H(\pi) = -\int_\Theta \pi(\theta) \log \pi(\theta) d\theta,$$

$$\text{sujeto a} \quad \begin{cases} \int_\Theta \pi(\theta) d\theta = 1, \\ \int_\Theta a_k(\theta)\pi(\theta) d\theta = \bar{a}_k, \quad k = 1, 2, ..., m. \end{cases}$$

VI.8.4 SOLUCION

La condición de primer orden del problema planteado está dada por

$$\begin{cases} \pi^*(\theta|q_0) = \exp\left\{ \lambda_0 + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k(\theta) \right\}, \\ 1 - \int_\Theta \pi^*(\theta) d\theta = 0, \\ \int_\Theta [\bar{a}_k - a_k(\theta)]\pi^*(\theta) d\theta = 0, \quad k = 1, 2, ..., m, \end{cases} \tag{VI.8.4}$$

donde $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m$, son los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones.

Sustituyendo π^* en las condiciones de primer orden restantes en (V.8.4), encontramos que

$$\begin{cases} 0 = \lambda_0 + \log\left\{ \int_\Theta \prod_{k=1}^{m} e^{\lambda_k a_k(\theta)} d\theta \right\}, \\ 0 = \int_\Theta [a_k(\theta) - \bar{a}_k] p(\theta) \prod_{k=1}^{s} e^{\lambda_k a_k(\theta)} d\theta, \ k = 1, 2, ..., m, \end{cases} \tag{VI.8.5}$$

el cual es un sistema no lineal homogéneo en las variables $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m$.

De nuevo, cuando la integral que define a λ_0 puede resolverse, entonces los demás multiplicadores pueden encontrarse a partir de las relaciones

$$\frac{\partial \lambda_0}{\partial \lambda_k} = -\bar{a}_k, \qquad k = 1, 2, ..., m. \tag{VI.8.6}$$

VI.9 SOLUCION DEL MODELO DE CUENTA CORRIENTE Y TIPO DE CAMBIO REAL CONSIDERANDO EFECTOS DE APRENDIZAJE

Los primeros dos planteamientos en este modelo se resuelve por medio de la técnica llamada Cálculo de Variaciones y el tercer planteamiento por medio de Control Óptimo.

VI.9.1 PLANTEAMIENTO

El planteamiento del problema es el siguiente:

$$\begin{cases} \text{Maximizar} & \displaystyle\int_0^\infty \left\{ \int_\Gamma u[c(t)|\gamma] dF(\gamma) \right\} e^{-rt} dt, \\ \text{sujeto a} & \displaystyle\int_0^\infty [y + g(t) - c(t)(1 + \alpha i(t))] e^{-rt} dt = -a(0), \\ & a(0) = a_0. \end{cases}$$

VI.9.2 SOLUCION

El individuo representativo desea determinar la trayectoria de consumo que maximice su utilidad esperada, $V(0)$, dada en (II.9.1), sujeto a las restricciones presupuestal y cash-in-advance, (II.7.4) y (II.7.9), respectivamente. En cuyo caso el Lagrangiano del correspondiente problema variacional está dado por

$$L[c(t), \lambda] = \left[\mathrm{P}\{\gamma = 1\} \log c(t) + \mathrm{P}\{\gamma \neq 1\} \frac{c(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \lambda\{y + g(t) - c(t)(1 + \alpha i(t))\} \right] e^{-rt}, \qquad (VI.9.1)$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción (II.7.4). Estamos también suponiendo que la restricción (II.7.9) es activa, equivalentemente suponemos que $i(t) > 0$ para toda t.

Ahora bien la condición de primer orden (condición necesaria de óptimo, ecuación de Euler-Lagrange) del problema de maximización resulta ser

$$\lambda[1 + \alpha i(t)] = \mathrm{P}\{\gamma = 1\} c(t)^{-1} + \mathrm{P}\{\gamma \neq 1\} c(t)^{-\gamma}. \qquad (VI.9.2)$$

Esta condición nos dice que "*La utilidad marginal esperada del consumo es igual a su precio multiplicado por el precio sombra de la riqueza* ", Se entiende que el precio de $c(t)$ es igual a su costo de producción (=1) más el costo de oportunidad de mantener un nivel de saldos monetarios reales $m(t)$.

Vamos a denotar esta utilidad marginal esperada, en forma breve como

$$Eu_t = c(t)^{-1}\Big[\mathrm{P}\{\gamma = 1\} + \mathrm{P}\{\gamma \neq 1\}c(t)^{1-\gamma}\Big].$$

Usando la ecuación (VI.9.2), se tiene que en el intervalo $[0, T]$,

$$Eu_t = \lambda[1 + \alpha(\epsilon_0 + r)], \qquad (VI.9.3)$$

con lo cual Eu_t permanece constante en dicho intervalo, digamos, $Eu_t = Eu_0$. De la misma forma, si en (VI.9.3) sustituimos ϵ_0 por ϵ_1, obtendremos que también $c(t)$ permanece constante en el intervalo (T, ∞), digamos, $Eu_t = Eu_1$. En consecuencia, de la ecuación (VI.9.1) se tiene que

$$AA: \quad \frac{Eu_0}{[1 + \alpha(\epsilon_0 + r)]} = \frac{Eu_1}{[1 + \alpha(\epsilon_1 + r)]}. \qquad (VI.9.4)$$

Esta ecuación nos dice que " *La utilidad marginal esperada del último peso gastado en c_0 es la misma que si se hubiera gastado en c_1* ".

Ahora bien, de la restricción para la economía, (II.7.18), se tiene que

$$B(0) + \frac{y}{r} = \int_0^T c_0 e^{-rt} dt + \int_T^\infty c_1 e^{-rt} dt,$$

con lo cual

$$BB: \quad c_1 = [y(t) + rB(0) - c_0]e^{rT} + c_0. \qquad (VI.9.5)$$

En la Fig. 5*, tomada de Calvo (1986), graficamos la restricción presupuestal de la economía representándola por BB. Note que

$$\left.\frac{dc_1}{dc_0}\right|_{BB} = 1 - e^{rT} < 0.$$

Para que el individuo pueda determinar un equilibrio entre AA y BB, se requiere que AA tenga una forma funcional $c_1 = f(c_0)$. Para ésto, es necesario que el individuo recurra al proceso de aprendizaje.

El individuo después de consumir las cantidades que maximizan su utilidad esperada descontada, puede aprender que:

(i) $\mathrm{P}\{\gamma \neq 1\} = 0$, ó
(ii) $\mathrm{P}\{\gamma = 1\} = 0$, ó
(iii) seguir indeciso.

---

* La figura se encuentra en la sección VI.7

Las correspondientes soluciones de mínima entropía cruzada son:

(i) $\mathrm{P}\{\gamma \neq 1\} = 0$, $\mathrm{P}\{\gamma = 1\} = 1$

(ii) $\mathrm{P}\{\gamma \neq 1\} = 1$, $\mathrm{P}\{\gamma = 1\} = 0$

(iii) $\mathrm{P}\{\gamma \neq 1\} = s$, $\mathrm{P}\{\gamma = 1\} = 1 - s$, donde s y $1 - s$ son los nuevos pesos subjetivos que el individuo asigna en base a la experiencia ganada.

En el último caso, el individuo tendrá que iterar de nuevo dentro del proceso de aprendizaje.

En los dos primeros casos la condición de primer orden es

$$\lambda[1 + \alpha i(t)] = c(t)^{-\gamma}, \quad \text{para cualquiera que sea el valor aprendido de } \gamma.$$

El precio sombra de la riqueza ahora satisface que

$$0 > \frac{\partial \lambda}{\partial c} = \frac{-\gamma c(t)^{-(\gamma+1)}}{(1 + \alpha i(t))}, \quad \text{para cualquiera que sea el valor aprendido de } \gamma.$$

Note que ahora la ecuación (VI.9.4) toma la forma

$$AA: \quad c_0\{\lambda[1 + \alpha(\epsilon_0 + r)]\}^{\frac{1}{\gamma}} = c_1\{\lambda[1 + \alpha(\epsilon_1 + r)]\}^{\frac{1}{\gamma}}. \qquad (VI.9.6)$$

Por lo tanto la tasa marginal de sustitución entre c_0 y c_1 permanece constante.

La condición (VI.9.6) representada por AA aparece también en la Fig. 5. Es importante notar que a lo largo de AA, $c_0 > c_1$, ya que $\epsilon_0 < \epsilon_1$. Note también que

$$\left.\frac{dc_1}{dc_0}\right|_{AA} = \left\{\frac{1 + \alpha(\epsilon_0 + r)}{1 + \alpha(\epsilon_1 + r)}\right\}^{\frac{1}{\gamma}} > 0.$$

La intersección de BB con la recta a 45 grados nos proporciona el producto nacional bruto, PNB_0, al tiempo $t = 0$. Dicha intersección se alcanza en

$$c_0 = y + rB(0) = PNB_0.$$

Observe que si la tasa de devaluación fuera, para siempre, constante, es decir, si $T = 0$, entonces

$$c_0 = c_1 = y + rB(0).$$

Por lo tanto un cambio de una vez por todas en la tasa de devaluación no presenta efectos reales.

Si se espera que la política monetaria fuera temporal, es decir, si $0 < T < \infty$, entonces

$$0 > c_1 - c_0 = [y - c_0 + rB(0)]e^{rT}$$

con lo cual se genera un déficit en cuenta corriente en el período de transición $[0, T]$. Después de T la cuenta corriente se va a balancear, el nivel de consumo disminuye, y este nivel es menor que en el caso en que se espera que la política monetaria fuera permanente (i.e., cuando ϵ es constante en $[0,\infty)$).

VI.9.3 PLANTEAMIENTO DE LA PRIMERA EXTENSION

El planteamiento del problema es el siguiente:

$$\begin{cases} \text{Maximizar} & \displaystyle\int_0^\infty \left\{ \int_\Gamma u[F(c_s(t))|\gamma] dF(\gamma) \right\} e^{-rt} dt, \\ \text{sujeto a} & \displaystyle\int_0^\infty [y + g(t) - c_s(t)(1 + \alpha i(t))] e^{-rt} dt = -a(0), \\ & a(0) = a_0. \end{cases}$$

VI.9.4 SOLUCION

Manteniendo todos los demás supuestos de la sección anterior, la condición de primer orden del problema de maximización de utilidad, está ahora dada por

$$\lambda\{1 + \alpha i(t)[c_s(t)]^{-\theta}\} = [c_s(t)]^{\theta\gamma-\theta-\gamma}(1-\theta)^\gamma, \qquad (VI.9.7)$$

para cualquiera que sea el valor aprendido de γ.

Si volvemos a tomar una política de la forma

$$\epsilon(t) = \begin{cases} \epsilon_0, & \text{para } 0 \leq t \leq T, \\ \epsilon_1, & \text{para } t > T, \end{cases} \qquad (VI.9.8)$$

con $\epsilon_0 < \epsilon_1$, tendremos de nuevo que

$$c_s(t) = \begin{cases} c_{s0}, & \text{para } t \in [0,T], \\ c_{s1}, & \text{para } t \in (T,\infty). \end{cases} \qquad (VI.9.9)$$

Utilizando (VI.9.7), obtenemos que

$$AA: \quad c_{s0}\{\lambda[1 + \alpha(\epsilon_0 + r)c_{s0}^{-\theta}]\}^{\frac{1}{\phi}} = c_{s1}\{\lambda[1 + \alpha(\epsilon_1 + r)c_{s1}^{-\theta}]\}^{\frac{1}{\phi}}, \qquad (VI.9.10)$$

donde $\phi = -[\theta\gamma - \theta - \gamma]$. Procediendo como antes, también se obtiene que

$$BB: \quad c_{s1} = [y(t) + rB(0) - c_{s0}]e^{rT} + c_{s0}. \qquad (VI.9.11)$$

Ahora podemos llevar a cabo un análisis similar, empleando la misma Fig. 5. Por lo tanto al disminuir T tenemos que en el nuevo equilibrio c_{s0} y c_{s1} serán mayores. En consecuencia, los precios relativos $P(t) = [c_s(t)]^\theta$ aumentan en $[0,T]$, y por lo tanto el tipo de cambio real se está apreciando en $[0,T]$. Entre más pequeño es T mayor es la apreciación del tipo de cambio real.

Podemos decir algo más, después de T el tipo de cambio real se va a depreciar por abajo del nivel que si $\epsilon(t)$ hubiera permanecido constante en $[0,\infty)$.

VI.9.5 PLANTEAMIENTO DE LA SEGUNDA EXTENSION

Sea

$$K[c,m] = \int_{0<\alpha<1}\int_{R>0} u[c(t),m(t)|\alpha,R]dF(\alpha)dF(R).$$

El planteamiento del problema es el siguiente:

$$\begin{cases} \text{Maximizar} \quad \displaystyle\int_{0<\alpha<1}\int_{R>0}\left\{\int_0^\infty u[c(t),m(t)|\alpha,R]e^{-rt}dt\right\}dF(\alpha)dF(R), \\ \text{sujeto a} \quad \displaystyle\int_0^\infty [y+g(t)-c(t)(1+\alpha i(t))]e^{-rt}dt = -a(0), \\ \qquad\qquad a(0) = a_0. \end{cases}$$

VI.9.6 SOLUCION

El Hamiltoniano está dado por

$$\begin{aligned} H[c,m,\lambda] &= \int_{0<\alpha<1}\int_{R>0} u[c(t),m(t)|\alpha,R]dF(\alpha)dF(R) + \lambda(t)\{y+g(t)-c(t)(1+\alpha i(t))\} \\ &= \int_{0<\alpha<1}\int_{R>0} u[c(t),m(t)|\alpha,R]dF(\alpha)dF(R) + \lambda(t)\{y+g(t)-c(t)-m(t)i(t))\}. \end{aligned} \tag{VI.9.12}$$

Las condiciones de primer orden están dadas por

$$H_c = 0, \quad H_m = 0, \quad \dot\lambda(t) - r\lambda(t) = -H_a,$$

Debido al supuesto de independencia estocástica entre R y α, tenemos que la entropía cruzada satisface

$$H(\pi\Pi, p\mathrm{P}) = \int_{0<\alpha<1}\int_{R>0} \log\frac{\pi(\alpha)\Pi\{R=r\}}{p(\alpha)\mathrm{P}\{R=r\}}dF(\alpha)dF(R) = H(\pi,p) + H(\Pi,\mathrm{P}),$$

con lo cual el individuo puede aprender primero sobre el valor de R en la misma forma que en la sección anterior. Después, el individuo puede determinar el valor de α, a través de los modelos de aprendizaje estudiados en las subsecciones anteriores, actuando como minimizador de entropía cruzada sujeto a que la información adicional que éste obtenga en términos de valores esperados.

Procediendo como en la sección anterior, encontramos que las condiciones de primer orden satisfacen, para cualquiera que sea el valor aprendido de R

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha(c^{\alpha}m^{1-\alpha})^{1-R}}{c} = \lambda, \\ \dfrac{(1-\alpha)(c^{\alpha}m^{1-\alpha})^{1-R}}{m} = \lambda i, \end{cases} \tag{VI.9.13}$$

de donde

$$m = \frac{(1-\alpha)c}{\alpha i}. \tag{VI.9.14}$$

Si sustituimos (VI.9.14) en la primera ecuación de (VI.9.13), encontramos que para cualquiera que sea el valor aprendido de R

$$c = \left\{ \frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha i} \right)^{(1-\alpha)(1-R)} \right\}^{\frac{1}{R}}.$$

Si de nuevo volvemos a tomar una política de la forma

$$\epsilon(t) = \begin{cases} \epsilon_0, & \text{para } 0 \leq t \leq T, \\ \epsilon_1, & \text{para } t > T, \end{cases} \tag{VI.9.15}$$

con ϵ_0, ϵ_1, obtenemos

$$AA: \quad \frac{c_0}{\left\{ \frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha(r+\epsilon_0)} \right)^{(1-\alpha)(1-R)} \right\}^{\frac{1}{R}}} = \frac{c_1}{\left\{ \frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha(r+\epsilon_1)} \right)^{(1-\alpha)(1-R)} \right\}^{\frac{1}{R}}},$$

inmediatamente se obtiene que $c_0 > c_1$ y tenemos la misma situación de la Fig. 5.

También se podría proceder considerando en forma más general la función de utilidad, $u = u(c, m)$, escribiendo

$$\frac{u_m[c(t), m(t)]}{u_c[c(t), m(t)]} = i(t), \tag{VI.9.16}$$

lo cual significa que "*La tasa marginal de sustitución entre saldos monetarios reales y consumos es igual al costo de oportunidad de mantener dichos saldos.*"

Definiendo ahora

$$\Psi[c(t), m(t), i(t)] = u_m[c(t), m(t)] - i(t)u_c[c(t), m(t)] = 0. \tag{VI.9.17}$$

Entonces

$$\Psi_m = u_{mm} - iu_{mc} < 0,$$

con lo cual estamos en posición de aplicar el Teorema de la función implícita a Ψ. Por lo tanto existe, al menos localmente, una función L, tal que

$$m(t) = L[c(t), i(t)].$$

Esta función satisface

$$L_c = \frac{\partial m}{\partial c} = -\frac{\Psi_c}{\Psi_m} > 0$$

y

$$L_i = \frac{\partial m}{\partial i} = -\frac{\Psi_i}{\Psi_m} < 0,$$

ya que*

$$\Psi_m = u_{mm} - iu_{cm} < 0, \quad \Psi_c = u_{mc} - iu_{cc} > 0, \quad \Psi_i = -u_c < 0.$$

Por lo tanto, podemos escribir una de las condiciones de primer orden como

$$u_c[c(t), L[c(t), i(t)]] = \lambda, \qquad (VI.9.18)$$

y como $i(t) = r(t) + \epsilon(t)$, entonces podemos reescribir (VI.9.18) de la siguiente forma

$$AA: \quad f[c(t), \epsilon(t)] = u_c[c(t), L[c(t), r + \epsilon(t)]] = \lambda. \qquad (VI.9.19)$$

Si de nuevo volvemos a tomar una política de la forma (VI.9.15), vamos a obtener que

$$c(t) = \begin{cases} c_0, & \text{para } t \in [0, T], \\ c_1, & \text{para } t \in (T, \infty). \end{cases} \qquad (VI.9.20)$$

Note ahora que a partir de (VI.9.19)

$$0 > f_c[c(t), \epsilon(t)] = u_{cc}[c(t), L[c(t), r + \epsilon(t)]] = \frac{\partial \lambda}{\partial c}.$$

De nuevo esta condición nos habilita para usar el Teorema de la función implícita, con lo cual

$$\frac{\partial c}{\partial \epsilon} = -\frac{f_\epsilon}{f_c} = -u_{cm}.$$

Por lo tanto, tenemos una curva como la de AA y como

$$BB: \quad c_1 = [y(t) + rB(0) - c_0]e^{rT} + c_0,$$

sigue siendo válida, todas las conclusiones anteriores se matienen.

---

* Note que $U_{cm}>0$ también implica que $\Psi_m<0$, $\Psi_c>0$.

VII. SOLUCIONES E INTERPRETACION DE PROBLEMAS ESTOCASTICOS

A continuación se resuelve los dos modelos formulados en el capítulo III aplicando las técnicas del capítulo IV. Los resultados que se obtiene en cada modelo son interpretados.

VII.1 SOLUCION DEL MODELO NEOCLASICO DE CRECIMIENTO OPTIMO BAJO INCERTIDUMBRE

Para resolver este problema se usará la técnica llamada Control Óptimo Estocástico.

VII.1.1 PLANTEAMIENTO

El planteamiento del problema es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
\text{Maximizar} \quad & E_0 \int_0^\infty e^{-\rho t} U(c(t))dt, \\
\text{sujeto a} \quad & dk(t) = [f(k(t)) - (\eta - \sigma^2)k(t) - c(t)]dt - \sigma k(t)dt^{1/2}, \\
& k(t_0) = k_0, \\
& 0 \leq c(t) \leq f(k(t)), \\
& c(t), \quad \text{continuo por pedazos.}
\end{aligned}
$$

VII.1.2 SOLUCION

A continuación se elaborarán las condiciones de optimalidad aplicando la técnica de Control Óptimo Estocástico.

Primero se consideran las dos ecuaciones siguientes. Ambas se obtienen de la ecuación (II.2.8).

El proceso $k(t) - k(t_0)$ tiene la media

$$E_k k(t) - k(t_0) = E_k[\Delta k] = [f(k) - (\eta - \sigma^2)k]\Delta t + o(\Delta t), \qquad (VII.1.1)$$

y la varianza

$$E_k[k(t) - k(t_0)]^2 = E_k[\Delta k^*] = \sigma^2 k^2 \Delta t + o(\Delta t). \qquad (VII.1.2)$$

Se usará el Principio de Optimalidad, éste establece que

$$J(k) = \max_{\substack{c_t \\ 0\leq t\leq \Delta t}} E_k\left\{ \int_0^{\Delta t} e^{-\rho t}U(c(t))dt + \max_{\substack{c_t \\ \Delta t\leq t\leq \infty}} E_{k+\Delta k}\int_{\Delta t}^{\infty} e^{-\rho t}U(c(t))dt\right\}, \qquad (VII.1.3)$$

donde E_k indica que el estado inicial es k. Una condición necesaria es la ecuación de Bellman, la cual será derivada a continuación.

La primera integral de la ecuación (VII.1.3) se puede calcular si se usa el Teorema del Valor Medio para integrales, esto es

$$\int_0^{\Delta t} e^{-\rho t}U(c_t)dt = e^{-\rho\theta\Delta t}U(c_{\theta\Delta t})\Delta t,$$

donde $\theta = \theta(w), w\epsilon\Omega$ y $0 \leq \theta \leq 1$.

En la segunda integral de la ecuación (VII.1.3), usemos un cambio de variable, *i.e.* $s = t - \Delta t$, entonces

$$\begin{aligned}\max_{\substack{c_t \\ \Delta t\leq t\leq\infty}} E_{k+\Delta k}\int_{\Delta t}^{\infty} e^{-\rho t}U(c(t))dt &= \max_{\substack{c_{s+\Delta t} \\ 0\leq s\leq\infty}} E_{k+\Delta k}\int_0^{\infty} e^{-\rho(s+\Delta t)}U(c_{s+\Delta t})ds \\ &= e^{-\rho\Delta t}\max_{\substack{c_s \\ 0\leq s\leq\infty}} E_{k+\Delta k}\int_0^{\infty} e^{-\rho s}U(c_{s+\Delta t})ds \\ &= e^{-\rho\Delta t}J(k+\Delta k),\end{aligned}$$

renombremos $c_{s+\Delta t}$ como c_s, entonces se puede escribir la ecuación (VII.1.3) como

$$0 = \max_c E_k\left\{e^{-\rho\theta\Delta t}U(c_{\theta\Delta t})\Delta t + e^{-\rho\Delta t}J(k+\Delta k) - J(k)\right\}, \qquad (VII.1.4)$$

para Δt lo suficientemente pequeño $e^{-\rho\Delta t} = 1 - \rho\Delta t$

Para el segundo término de la ecuación (VII.1.4), se tiene

$$\begin{aligned}e^{-\rho\Delta t}J(k+\Delta k) - J(k) &= (1-\rho\Delta t)J(k+\Delta k) - J(k) \\ &= J(k+\Delta k) - J(k) - \rho\Delta tJ(k+\Delta k).\end{aligned}$$

y junto con la ecuación (VII.1.4) se obtiene

$$0 = \max_c E_k\left\{e^{-\rho\theta\Delta t}U(c_{\theta\Delta t})\Delta t + J(k+\Delta k) - J(k) - \rho\Delta tJ(k+\Delta k)\right\}, \qquad (VII.1.5)$$

Por el *lema de Itô*, se tiene

$$J(k+\Delta k) - J(k) = \Delta J(k) = J'(k)\Delta k + \frac{1}{2}J''(k)(\Delta k)^2,$$

tómese la esperanza condicional, es decir

$$\begin{aligned} E_k[J(k+\Delta k)-J(k)] &= E_k[\Delta J(k)] \\ &= E_k\left[J'(k)\Delta k + \frac{1}{2}J''(k)(\Delta k)^2\right] \\ &= E_k\left[J'(k)\Delta k\right] + E_k\left[\frac{1}{2}J''(k)(\Delta k)^2\right]. \end{aligned} \qquad (VII.1.6)$$

Dado que $J(k) = E_k J(k)$ y sustituyendo las ecuaciones (VII.1.1) y (VII.1.2) en la ecuación (VII.1.6) se obtiene

$$E_k[J(k+\Delta k)-J(k)] = \left\{J'(k)[f(k)-(\eta-\sigma^2)-c] + \frac{1}{2}\sigma^2 k^2 J''(k)\right\}\Delta t. \qquad (VII.1.7)$$

Sustituyendo la ecuación (VII.1.7) en (VII.1.5), dividiendo por Δt y tomando límite $\Delta t \to 0$, se tiene que

$$0 = \max_c \left\{[f(k)-(\eta-\sigma^2)k-c]J'(k) + \frac{1}{2}\sigma^2 k^2 J''(k) - \rho J(k) + U(c)\right\}, \qquad (VII.1.8)$$

debido a que $k+\Delta k \to k$, $\theta\Delta t \to 0$ y $c_{\theta\Delta} \to c$.

Si se define

$$\phi(c,k,t) \equiv [f(k)-(\eta-\sigma^2)k-c]J'(k) + \frac{1}{2}\sigma^2 k^2 J''(k) - \rho J(k) + U(c),$$

entonces se puede escribir la ecuación (VII.1.8) en una forma más compacta

$$\max_c \ \phi(c,k,t) = 0. \qquad (VII.1.9)$$

La condición de primer orden para un máximo es

$$\phi_c(c^*,k,t) = 0 = J'(k) + U'(c), \qquad (VII.1.10)$$

y junto con la condición

$$\phi_{cc} = U''(c) < 0,$$

se satisface las condiciones suficientes para un máximo.

Se puede reescribir las condiciones de optimalidad como un conjunto de dos ecuaciones que se debe de resolver para $c^*(t)$ y $J(k)$:

$$\begin{cases} \phi(c^*,k,t) = 0, & (VII.1.9) \\ \phi_c(c^*,k,t) = 0. & (VII.1.10) \end{cases}$$

VII.2 SOLUCION DEL MODELO DE SELECCION OPTIMA DE PORTAFOLIO BAJO INCERTIDUMBRE

Para la solución de este problema se aplica la técnica de Control Óptimo Estocástico citada en el capítulo cuatro.

VII.2.1 PLANTEAMIENTO

El planteamiento del problema es el siguiente:

$$\begin{cases} \text{Maximizar} \quad E_0 \left\{ \int_0^T e^{-\rho t} U(C(t))dt + B[W(T), T] \right\}, \\ \quad \text{sujeto a} \quad dW = [w(t)(\alpha - r) + r]W(t) - C(t)dt + w(t)W(t)\sigma(dt)^{1/2}, \\ \qquad W(0) = W_0 > 0, \\ \qquad W(t) > 0, \\ \qquad C(t) \geq 0. \end{cases}$$

VII.2.2 SOLUCION

A continuación se elaborarán las condiciones de optimalidad aplicando la técnica de Control Optimo Estocástico.

Primero se considerán dos ecuaciones relacionadas con la riqueza. Ambas se obtienen de la ecuación (III.2.4), donde una caracteriza la tendencia y otra la varianza.

El valor esperado del cambio en la riqueza en un intervalo de tiempo $h = t - t_0$ es

$$E(t_0)\{W(t) - W(t_0)\} = \{[w(t_0)(\alpha - r) + r]W(t_0) - C(t_0)\}h + o(h), \qquad (VII.2.1)$$

y la varianza del cambio en la riqueza es

$$E(t_0)\{[W(t) - W(t_0)]^2\} = w^2(t_0)W^2(t_0)\sigma^2 h + o(h). \qquad (VII.2.2)$$

Para derivar las condiciones de optimalidad se reformula la función objetivo para emplear programación dinámica y aplicar el principio de optimalidad de Bellman. Para ésto, se define

$$I[W(t), t] \equiv \max_{\{C(s), w(s)\}} E(t) \left\{ \int_t^T e^{-\rho s} U[C(s)]ds + B[W(T), T] \right\} \qquad (VII.2.3),$$

donde (VII.2.3) está sujeta a las mismas restricciones que las del planteamiento. Por tanto,

$$I[W(T),T] = B[W(T),T]. \tag{VII.2.3a}$$

En general, de la definición (VII.2.3) se obtiene

$$I[W(t_0),t_0] = \max_{\{C(s),w(s)\}} E(t_0)\left\{\int_{t_0}^{t} e^{-\rho s}U[C(s)]ds + I[W(t),t]\right\}. \tag{VII.2.4}$$

Sea $t \equiv t_0 + h$ y las terceras derivadas parciales de $I[W(t_0),t_0]$ son acotadas, entonces por el teorema de Taylor y el teorema del valor medio para integrales, se puede reescribir (VII.2.4) de la siguiente forma

$$\begin{aligned} I[W(t_0),t_0] = \max_{\{C,w\}} E(t_0)\Bigg\{ & e^{-\rho\bar{t}}U[C(\bar{t})]h + I[W(t_0),t_0] + \frac{\partial I[W(t_0),t_0]}{\partial t}h \\ & + \frac{\partial I[W(t_0),t_0]}{\partial W}[W(t) - W(t_0)] \\ & + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 I[W(t_0),t_0]}{\partial W^2}[W(t) - W(t_0)]^2 + o(h)\Bigg\}, \end{aligned} \tag{VII.2.5}$$

donde $\bar{t} \in [t_0, t]$.

En (VII.2.5) se toma el operador $E(t_0)$ para cada término y dado que $I[W(t_0),t_0] = E(t_0)\{I[W(t_0),t_0]\}$ se resta $I[W(t_0),t_0]$ de ambos lados. Se sustituye $E(t_0)\{W(t)-W(t_0)\}$ y $E(t_0)\{[W(t)-W(t_0)]^2\}$ por las ecuaciones (VII.2.1) y (VII.2.2), y después se dividen las ecuaciones entre h. Se toma el límite de la ecuación obtenida, cuando $h \to 0$, y (VII.2.5) se convierte en una versión en tiempo continuo de la ecuación fundamental de optimalidad de Bellman-Dreyfus

$$\begin{aligned} 0 = \max_{\{C(t),w(t)\}} \Bigg\{ & e^{-\rho t}U[C(t)] + \frac{\partial I_t}{\partial t} + \frac{\partial I_t}{\partial W}\{[w(t)(\alpha - r) + r]W(t) - C(t)\} \\ & + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 I_t}{\partial W^2}\sigma^2 w^2(t)W^2(t)\Bigg\}, \end{aligned} \tag{VII.2.5a}$$

donde I_t es $I[W(t),t]$ y el índice t_0 se descarta para hacer ver que (VII.2.5a) es válido para cualquier $t \in [0,T]$.

Si se define*

$$\begin{aligned} \phi(w,C,W,t) \equiv e^{-\rho t}U[C(t)] + \frac{\partial I_t}{\partial t} + \frac{\partial I_t}{\partial W}\{[w(t)(\alpha - r) + r]W(t) \\ - C(t)\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 I_t}{\partial W^2}\sigma^2 w^2(t)W^2(t), \end{aligned}$$

* $\phi(w,C,W,t)$ es la forma corta de $\phi(w,C,\delta I_t/\delta t,\delta I_t/\delta W,\delta^2 I_t/\delta W^2,I_t,W,t)$.

entonces se puede escribir (VII.2.5a) en una forma más compacta

$$\max_{(C,w)} \phi(w, C, W, t) = 0. \qquad (VII.2.5b)$$

Las condiciones de primer orden de un máximo (w^*, C^*) son

$$\phi_C(w^*, C^*, W, t) = 0 = e^{(-\rho t)}U'(C^*) - \frac{\partial I_t}{\partial W}, \qquad (VII.2.6)$$

y

$$\phi_w(w^*, C^*, W, t) = 0 = (\alpha - r)W\frac{\partial I_t}{\partial W} + \frac{\partial^2 I_t}{\partial W^2}\sigma^2 w^* W^2. \qquad (VII.2.7)$$

Un conjunto de condiciones suficientes para un máximo es

$$\phi_{ww} < 0, \quad \phi_{CC} < 0, \quad \det\begin{bmatrix} \phi_{ww} & \phi_{wC} \\ \phi_{Cw} & \phi_{CC} \end{bmatrix} > 0,$$

$\phi_{wC} = \phi_{Cw} = 0$, y si $I[W(t), t]$ es estrictamente cóncava en W, entonces

$$\phi_{CC} = e^{-\rho t}U''(C) < 0, \qquad (VII.2.8)$$

y

$$\phi_{ww} = W^2\sigma^2\frac{\partial^2 I_t}{\partial W^2} < 0, \qquad (VII.2.9)$$

por la concavidad estricta de U e I_t respectivamente, y las condiciones suficientes serían satisfechas*. Se puede reescribir las condiciones de optimalidad como un conjunto de tres ecuaciones que se deben resolver para $w^*(t)$, $C^*(t)$, y $I[W(t), t]$:

$$\begin{cases} \phi(w^*, C^*, W, t) = 0, & (VII.2.5b) \\ \phi_C(w^*, C^*, W, t) = 0, & (VII.2.6) \\ \phi_w(w^*, C^*, W, t) = 0, & (VII.2.7) \\ \text{sujeto a la condición de frontera} & \\ I[W(T), T] = B[W(T), T] \text{ y la solución} & \\ \text{debe satisfacer (III.2.6).} & \end{cases}$$

* Sustituyendo los resultados de (VII.2.6) en (VII.2.7) al punto (C^*, w^*) se tiene la condición $w^*(\alpha - r) > 0$ si, y sólo si $\delta^2 I_t / \delta W^2 < 0$. Aquí, solo consideramos soluciones óptimas interiores. Se puede formular el problema en una forma más general reemplazando las igualdades de (VII.2.6) y (VII.2.7) por desigualdades y utilizando Kuhn-Tucker.

VIII. DISCUSION Y CONCLUSIONES

En este trabajo se han estudiado varios problemas de optimización en tiempo continuo. En todos se manifiesta el deseo de los individuos de maximizar su bienestar o el bienestar de sus dependientes.

Las técnicas de Cálculo de Variaciones, Control Optimo y Control Optimo Estocástico, se han aplicado en la solución de los modelos planteados.

El poder resolver un problema con diferentes técnicas de solución ha sido una característica importante del trabajo; otro aspecto importante es que se ha profundizado en las técnicas de solución incluyendo un capítulo sobre las ecuaciones de Bellman-Euler-Lagrange, la Condición de Legendre, la Condición de Weierstrass y las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman.

A continuación se enuncian las conclusiones respecto a cada uno de los modelos:

En el modelo neoclásico de crecimiento económico óptimo se concluye que para un determinado capital inicial existe una trayectoria óptima de crecimiento de consumo e inversión hacia un equilibrio. Una vez que se alcanza este punto, la economía se desarrolla a la tasa de crecimiento de la población.

Del modelo neoclásico de demanda por inversión se concluye que para los primeros dos planteamientos, las trayectorias óptimas de demanda de trabajo e inversión son alcanzadas cuando existe la igualdad entre el salario real y el producto marginal del trabajo, y cuando se tiene la igualdad entre el costo real del capital y el producto marginal del capital.

Del modelo neoclásico de consumo-inversión se concluye que si el individo representativo obtiene también utilidad por dejar una herencia, entonces el efecto de inseguridad sobre el tiempo de la vida es igual a un incremento en la tasa subjetiva intertemporal de descuento.

De los modelos de asignación óptima de créditos externos para inversión y consumo se concluye de la solución obtenida bajo las supuestos (VI.4.8), que no resulta óptimo no consumir de la ayuda económica.

Del modelo de maximización de beneficios de un monopolio se obtiene como resultado una trayectoria óptima para el precio del bien y para la producción.

Del modelo de análisis de devaluación se deducen las trayectorias óptimas del bien de importación y del bien de exportación.

La teoría desarrollada en el modelo de análisis de cuenta corriente y tipo de cambio real, ha sido conjugada con en el modelo de aprendizaje sobre utilidad.

Finalmente, en el caso de crecimiento económico óptimo bajo incertidumbre, y en el de selección óptima de portafolio bajo incertidumbre, el modelado con ecuaciones diferenciales estocásticas ha jugado un papel esencial en el análisis.

REFERENCIAS

TEXTOS

Athans, M. and Falb, P. L. (1966), Optimal Control, New York, McGraw-Hill, Inc.

Blanchard, O. J. and Fisher, S. (1989), Lectures on Macroeconomics, London, MIT press.

Chiang, C. A. (1984), Fundamental Methods of Mathematical Economics, McGraw-Hill, Inc.

Dornbusch, R. y Fischer, S. (1981), Macroeconomía, McGraw-Hill, S.A. de C.V.

Dowling, E. T. (1992), Theory and Problems of Introduction to Mathematical Economics, New York, McGraw-Hill, Inc.

Fleming, H. W. and Rishel, R. W. (1975), Deterministic and Stochastic Optimal Control, New York, Springer-Verlang New York Inc.

Gelfand, I. M. and Fomin, S. V. (1963), Calculus of Variations, Englewood Cliffs, Engelwood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall.

Hull, J. (1988), Options, Futures and other derivative Securities, London, Prentice-Hall International, Inc.

Ingersoll, Jr. E. J. (1987), Theory of Financial Decision Making, Maryland, Rowman & Littlefield Publishers.

Intriligator, D. M. (1971), Mathematical Optimization end Economic Theory, Series in Mathematical Economics, London, Prentice-Hall.

Kamien, I. M. and Schwartz, L. N. (1981), Dynamics Optimization, The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management, New York, North-Holland.

Kushner, H. (1971), Introduction to Stocastic Control, New-York, Holt, Rinehart and Winston, Inc.

Luenberger, D. G. (1979), Introduction to Dynamic Systems, Theory, Models, and Applications, New York, John Wiley & Sons, Inc.

Merton, C. R. (1990), Continuous-Time Finance, Oxford, Basil Blackwell Inc.

Sargent, J. T. (1987), Macroeconomic Theory, New York, Academic Press, Inc.

Seierstad, A. and Sydsaeter, K. (1987), Optimal Control Theory with Economic Applications, Advanced Textbooks in Economics, North-Holland, North-Holland.

Silberberg, E. (1990), The Structure of Economics, New-York, McGraw-Hill, Inc.

Tintner, G. and Sengupta, J. K. (1972), Stocastic Economics, Now York, Academic Press.

ARTICULOS

Arthur, W. B. (1981), *The Economics of Risks to life*, The Amerian Economic Review, *71*, pp. 54-64.

Arthur, W. B. (1976), *Optimal Time Paths with Age-Dependence, A theory of Population Policy*, Review of Economic Studies, pp. 111-123.

Calvo, G. A. (1981), *Devaluation: Levels versus rates*, J. Internat. Econ., *11*, pp. 165-170.

Calvo, A. G. (1986), *Temporary Stabilization Predetermined Exchages Rates*, Journal of Political Economy *94*, pp. 1319-1329.

Calvo, G. A. (1992), *Stagflationary Effects on Stabilization Programs in Reforming Socialist Countries: Enterprice-Side and Households-Side Factors*, The World Bank, pp.71-90.

Chang, F. R. (1988), *The inverse optimal problem, A dynamic programming approach*, Econometrica, *56*, pp. 147-172.

Dorfman, R. (1969), *An Economic Interpretation of Optimal Control Theory*, Journal of The American Economic Review, pp. 817-831.

Obstfeld, M. (1983),*Intertemporal Price Speculation and the Optimal Current-Account Deficit*, Journal of International Money and Finance, *2*, pp. 135-145.

Venegas, F. (1990a), *On Regularity and Optimality Conditions for Maximun Entropy Priors*, Revista Brasileira de Probabilidade e Estatística, *REBRAPE*, *4*, pp. 105-136.

Venegas, F. (1990b), *Información Suplementaria a priori, Aspectos Computacionales y Clasificación*, Inter-American Statistical Institute, *IASI*, *42*, No. 139, pp. 64-80.

Venegas, F. and de Alba, E. (1992a), *Aprendizaje sobre utilidad a través de la optimización de medidas de información*, Recent Advaces in Bayesian Statistics and Econometrics, Caracas, Venezuela.

Venegas, F. (1992), *Entropy Maximization and Cross-Entropy Minimization on Quantiles, A Matrix Approach*, Agrociencia, Serie Matematicas Aplicadas, Estadistica y Computación, *2*, 3, pp. 71-76.