

30479

1
2 EJM

DISTRIBUCIÓN DE ESFUERZOS Y ESTABILIDAD MECÁNICA DE
MÁRGENES DE PLATAFORMAS CARBONATADAS

Indice

	<i>página</i>
1.- RESUMEN.....	1
2.- INTRODUCCIÓN.....	3
3.- DESCRIPCIÓN FENOMENOLÓGICA.....	6
4.- MODELO FÍSICO: ECUACIONES DE CAMPO, CONDICIONES INICIALES Y DE FRONTERA.....	12
5.- FORMULACIÓN SUBDIFERENCIAL Y VARIACIONAL DEL MODELO FÍSICO.....	19
5.1 Elementos de análisis convexo.....	19
5.2 Planteamiento del problema de la elastoestática lineal mediante subdiferenciales.....	20
6.- DISCRETIZACIÓN DEL MODELO FÍSICO Y APROXIMACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS.....	27
6.1 Método de elementos finitos.....	27
6.2 Discretización del model físico.....	27
6.3 Aproximación por elementos finitos.....	28
6.4 Algoritmo de resolución del modelo discreto.....	30
7.- RESULTADOS.....	32
7.1 Desplazamientos desde el interior de la plataforma.....	32
7.2 Desplazamientos desde la cuenca.....	40
8.- COMPARACIÓN CON RESULTADOS DE OTROS MODELOS.....	45
9.- CONCLUSIONES.....	47
10.- AGRADECIMIENTOS.....	48
11.- REFERENCIAS.....	49
APENDICE: ARCHIVOS DE MODULEF PARA GENERAR EL MODELO DE ELEMENTOS FINITOS Y OBTENER SU SOLUCIÓN.....	53

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1.- RESUMEN

Se establece un modelo de elementos finitos de la distribución estática de esfuerzos en la zona de transición entre una plataforma carbonatada y la cuenca epicontinental vecina, para determinar las áreas inestables fracturadas.

Para obtener la distribución de esfuerzos se utiliza el modelo físico clásico de los sólidos elásticos lineales de la mecánica del medio continuo

$$\operatorname{div} \mathbf{S}(p) + \mathbf{b}(p) = 0,$$

Ecuación de campo

$$\mathbf{S}[\hat{\nabla} \mathbf{u}(p)] = 2\mu(p)\hat{\nabla} \mathbf{u}(p) + \lambda(p)\{\operatorname{tr} \hat{\nabla} \mathbf{u}(p)\} \mathbf{I}$$

Relación constitutiva de los sólidos isotrópicos elásticos lineales

$$\hat{\nabla} \mathbf{u}(p) = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u}(p) + \nabla \mathbf{u}^T(p)]$$

Tensor de distorsión infinitesimal

donde \mathbf{u} es el campo de desplazamientos, $\mathbf{S}(p) = \mathbf{C}[\hat{\nabla} \mathbf{u}(p)]$ es el tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff, μ y λ son las constantes de Lamé y $\mathbf{b}(p)$ la fuerza gravitacional de cuerpo. Se consideran las siguientes condiciones de frontera:

$$\mathbf{x}(\bullet, 0) = \bar{\mathbf{u}}(\bullet) \quad \text{desplazamientos horizontales prescritos}$$

$$\mathbf{u}(p) = 0 \quad \text{base de la plataforma fija}$$

$$\mathbf{S}(p)\mathbf{n}(p) = \bar{\mathbf{p}}(p) \quad \text{carga litoestática sobre la frontera superior}$$

A partir del problema de valores sobre la frontera anterior se deriva la siguiente formulación variacional (modelo matemático)

Dado $\mathbf{b} \in L^2(B)$ encuentre $\mathbf{u} \in \mathbf{K}$, tal que

$$\int_B \mathbf{C}[\hat{\nabla} \mathbf{u}] \cdot \hat{\nabla}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) dV - \int_{\partial B_s} \bar{\mathbf{p}} \cdot (\gamma \mathbf{v} - \gamma \mathbf{u}) da \geq \int_B \mathbf{b} \cdot (\gamma \mathbf{v} - \gamma \mathbf{u}) dV \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{K}$$

donde \mathbf{K} es el convexo de soluciones cinemáticamente admisibles.

La aproximación por elementos finitos es

Dado $\mathbf{b} \in L^2(\mathbf{b})$, encuentre $\mathbf{u}_h \in \mathbf{K}_h$

$$\int_B \mathbf{C}[\hat{\nabla} \mathbf{u}_h] \cdot \hat{\nabla}(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) dV - \int_{\partial B_s} \bar{\mathbf{p}} \cdot (\gamma \mathbf{v}_h - \gamma \mathbf{u}_h) da \geq \int_B \mathbf{b} \cdot (\gamma \mathbf{v}_h - \gamma \mathbf{u}_h) dV \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h$$

\mathbf{u}_h es la solución de la aproximación por elementos finitos y consta de funciones polinomiales por segmentos definidas en el interior de los elementos finitos.

El problema discreto anterior de dimensión finita se resolvió con el paquete de elementos finitos de propósito general **MODULEF** (Bernardu et al. 1989), analizando dos casos: i) desplazamientos prescritos desde el interior de la plataforma y ii) desplazamientos prescritos desde la cuenca epicontinental vecina.

RESUMEN

Una vez obtenida la distribución de esfuerzos se aplicó el criterio de Mohr-Coulomb para discriminar las áreas inestables. En el criterio de fracturamiento de Mohr-Coulomb se considera que se presenta fracturamiento cuando las componentes tangencial τ y normal σ_n sobre el potencial plano de fracturamiento, relacionadas linealmente, alcanzan el valor de la resistencia de corte del material S_0

$$|\tau| = S_0 + k \bar{\sigma}_n$$

k el coeficiente de fricción interna

$$\theta = \frac{1}{2} \pi \pm \frac{1}{2} \tan^{-1} k$$

orientación de las fracturas respecto del esfuerzo principal máximo.

También se considera la influencia de la presión de fluidos de poro intersticiales.

Los resultados de la experimentación numérica son los siguientes:

1. El esfuerzo principal máximo siempre es compresivo y se distinguen dos zonas: una donde predominan esfuerzos causados por el desplazamiento desde la frontera lateral y otra de esfuerzos gravitacionales.
2. El esfuerzo principal mínimo es distensivo en la base de plataforma para el primer caso y la base de la cuenca para el segundo. En los niveles superficiales el esfuerzo es compresivo. Existe una concentración del esfuerzo en el borde de la plataforma y el pie del talud.
3. Debido a lo anterior, el esfuerzo cortante máximo disminuye en el pie del talud y margen de la plataforma.
4. Para el primer caso el área inestable ocupa todo el interior de la plataforma hasta el borde extendiéndose hacia el interior del talud en los niveles basales. Esta área se puede extender a todo el talud si se utiliza un factor de sobrepresión de poro de $\lambda \approx 2.0$. Para el caso de desplazamientos desde la cuenca la zona inestable solo ocupa $\frac{1}{4}$ partes de la cuenca y existe poco cambio en el área en función de la sobrepresión.
5. Basados en la orientación de las fracturas obtenidas con el criterio de Mohr-Coulomb se puede interpretar un despegue intracarbonatos con geometría *Flat-Ramp-Flat* en la zona de transición entre la plataforma y la cuenca, para el caso de desplazamiento desde el interior de la plataforma. Para el segundo un patrón de fallamiento con trayectoria ascendente hacia el pie del talud. Ambos resultados están de acuerdo con observaciones de fallamiento de los márgenes de las plataformas carbonatadas fósiles de Valles-SanLuis Potosí y El Doctor en el centro-oeste de México.

Hay que observar que los resultados del modelado muestran para ambos casos que el esfuerzo diferencial no se concentra en la región del talud y borde de la plataforma. Incluso se requiere de un factor de sobre presión de poro para extender la zona inestable, ≈ 2 para el primer caso y > 2 para el segundo, hasta el pie de la plataforma. Esto es contrario a las observaciones de campo que sugieren que el esfuerzo diferencial probablemente tiene un máximo en esta zona.

Sin embargo, el campo de desplazamiento y los esfuerzos máximo σ_1 , σ_2 y τ , generados por los desplazamientos desde el interior de la plataforma tienen una mayor extensión que para el segundo caso. Esto sugiere que la geometría de cuña del talud tiene influencia en la transición a esfuerzos gravitacionales. Aunque otra explicación es que se requiere de una mayor energía para desplazar el interior de la plataforma que el interior de la cuenca.

2- INTRODUCCIÓN

El objetivo de este trabajo es establecer un modelo de elementos finitos de la distribución estática de esfuerzos en la zona de transición entre una plataforma carbonatada y la cuenca epicontinental vecina, para determinar las áreas estables e inestables.

Los márgenes de plataformas carbonatadas (Fig. 2.1) están compuestas de rocas poco estratificadas, como arrecifes o brechas sedimentarias producto del detrito del arrecife (Wilson, 1975). El interior de las plataformas tiene aproximadamente el mismo espesor que el borde, pero está compuesta de caliza bien estratificada con intercalaciones de evaporitas (Fig. 2.1). La cuenca vecina también está compuesta de caliza bien estratificada; sin embargo, el espesor de la columna litológica de la cuenca sólo mide aproximadamente la mitad del espesor de la plataforma (Fig. 2.1).

Mecánicamente, la zona de transición entre una plataforma carbonatada y la cuenca vecina se puede dividir en tres zonas (Fig. 2.2): tanto las rocas de la cuenca como las del interior de la plataforma representan un medio laminado; por otro lado, las rocas del borde de la plataforma y del talud son estadísticamente homogéneas por su falta de estratificación.

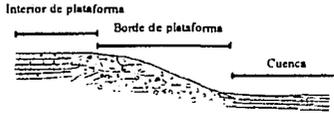


Figura 2.1. Elementos morfológicos y litológicos de una plataforma carbonatada (según Wilson, 1975)

Los límites entre estas tres facies no son verticales (Fig. 2.2), sino inclinados hacia la plataforma, ya que el arrecife crece sobre su propio detrito, es decir, los cinturones de facies migran con el tiempo hacia la cuenca.

Suter (1984, 1987) observó que la deformación en el cinturón de pliegues y cabalgaduras de la Sierra Madre Oriental en el centro-oeste de México se concentra en las márgenes de la plataforma carbonatada de Valles - San Luis Potosí en forma de una serie de cabalgaduras (Fig. 2.3 y 2.4). El interior de la misma plataforma y las cuencas vecinas muestran menos acortamiento y su deformación es por plegamiento (cizallamiento paralelo a la estratificación) más bien que por cabalgamiento (cizallamiento oblicuo a la estratificación) (Fig. 2.5).

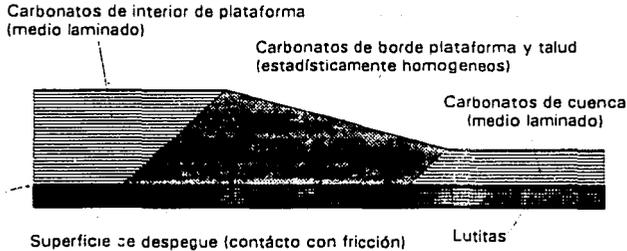


Figura 2.2. Elementos mecánicos de una plataforma carbonatada

INTRODUCCIÓN

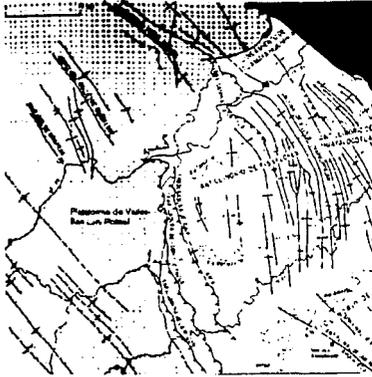


Figura 2.3. Mapa geológico del borde de la plataforma Cretácica de Valles-San Luis Potosí en el centro-oeste de México. La plataforma aparece en gris y la cuenca vecina sin achure. La zona oscura corresponde a la Cuenca terciaria de ante-pais. Las líneas dentadas indican cabalgaduras (según Suter, 1990).

Suter (1984) sugirió que el borde de la plataforma fue una zona de inestabilidad por cizallamiento. La magnitud del esfuerzo diferencial que causó las deformaciones observadas podría haber cambiado con un factor entre 2 y 5 a través de la margen de la plataforma, por varias razones: *i)* la diferencia de área en corte (Fig. 2.2 y 2.5), *ii)* la diferencia de la carga litostática entre plataforma y cuenca y *iii)* la existencia de una componente horizontal del esfuerzo gravitacional por la inclinación del talud de la plataforma. Todo esto podría tener el efecto de alterar la inclinación del talud hasta volverse una cuña de Mohr-Coulomb estable (Fig. 2.6).

Para este propósito se considera el modelo clásico de la elasticidad lineal de la teoría de la *Mecánica del Medio Continuo*, con propiedades materiales de medio dadas y cargas tectónicas y desplazamientos sobre las fronteras (problema de valores sobre la frontera de la elastostática lineal en 2 dimensiones) y se utiliza uno de los criterios más conocidos de inestabilidad por fracturamiento, el criterio de Mohr-Coulomb. Este establece que el fracturamiento por compresión se presenta

cuando las componentes normal y tangencial del esfuerzo, relacionadas linealmente, sobrepasan la resistencia al corte del material.

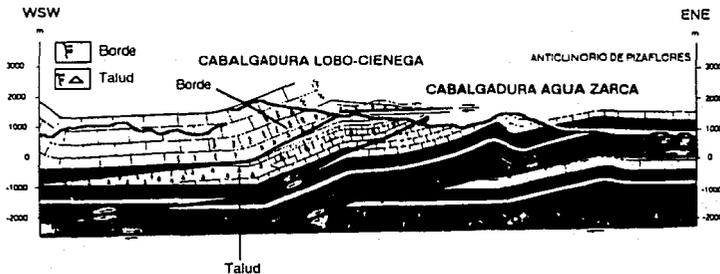


Figura 2.4. Corte estructural a lo largo del borde oriental de la plataforma de Valles-San Luis Potosí en el Estado de Hidalgo, México. Las cabalgaduras Lobo-Ciénega y Agua Zarca cortan y desplazan el borde de la plataforma y la facies de talud (según Suter, 1987)

INTRODUCCIÓN

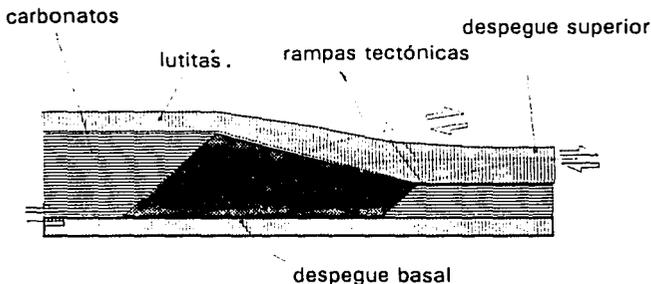


Figura 2.5. Esquema de la deformación observada en el borde oriental de la plataforma carbonatada de Valles-San Luis Potosí. La estructura consiste de una serie de rampas tectónicas en los carbonatos y despegues en las lutas. La concentración de la deformación en el borde de la plataforma y en el talud requiere de un esfuerzo diferencial más grande que en las regiones vecinas de la cuenca e interior de la plataforma.

A partir de este modelo se obtiene la formulación variacional primal del problema (formulación en términos de desplazamientos), mediante subdiferenciales locales, y de esta se obtiene el esquema numérico correspondiente de elementos finitos.

La metodología numérica utilizada en este trabajo contrasta con la metodología de la mayoría de los trabajos de tectonofísica, donde preferentemente se han encontrado soluciones analíticas, como los trabajos de *Hather* (1951) para la distribución de esfuerzos en bloques de geometría rectangular, de *Berger y Johnson* (1980) y *Kilsdonk y Fletcher* (1989) para la deformación sobre rampas de bloques viscosos, donde la geometría de la rampa y el tensor de esfuerzos son aproximados por series de Fourier, o en el trabajo de *Davis et al.* (1983) para determinar las condiciones de estabilidad de cuñas de acreción y cinturones de pliegues y cabalgaduras en márgenes continentales (Fig. 2.6), entre otros.

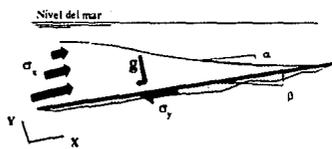


Figura 2.6. Geometría y cargas tectónicas que intervienen en el desarrollo de una cuña de Mohr-Coulomb (según *Davies et al.*, 1983).

Es de resaltar que la mayor parte de la producción petrolera de México proviene de las márgenes de las plataformas carbonatadas del Cretácico (*Santiago et al.*, 1984) en donde los hidrocarburos se encuentran entrampados en estructuras formadas por cabalgaduras en la parte frontal del cinturón cordillerano de pliegues y cabalgaduras. Los campos petroleros producen de porosidad de fracturamiento en intervalos dolomitizados, puesto que la dolomía es más quebradiza que la caliza (*Stearns y Friedman*, 1972). Por lo tanto, es de suma importancia conocer la distribución de las fracturas y su dirección preferencial en el desarrollo de la mayor parte de los campos petroleros de México (*Suter y Vargas*, 1986).

3-DESCRIPCIÓN FENOMENOLÓGICA

Las rocas más someras de la corteza terrestre, de 10 a 15 km de profundidad, se comportan a causa de la baja presión y temperatura como materiales rígidos, deformándose i) de manera elástica, ii) por fracturamiento y iii) por rotación y translación de cuerpo rígido a lo largo de discontinuidades y planos de debilidad preexistentes (Ramsay y Hubert, 1987; Suppe, 1985; Mandl, 1988). Otros mecanismos que se observan en la parte superior de la corteza son: i) disolución por presión, principalmente en calizas en zonas donde existe una concentración de esfuerzos (disolución-difusión-precipitación) (Paterson, 1973; Rutter, 1976) y ii) flujo plástico en ciertas evaporitas (Jordan, 1987; Jordan y Nüesch, 1978). Estos últimos mecanismos son continuos y por lo tanto no sísmicos. Estas deformaciones se presentan en escalas de longitud desde granos minerales (10⁻⁶ m) hasta límites de placas (10⁹ m) con razones de deformación que varían de 10⁻¹³ a 10⁻¹⁵ s⁻¹ (Pfiffner y Ramsay, 1982; Cloetingh et al, 1984).

Cuando el esfuerzo diferencial que actúa en el medio rocoso alcanza cierto valor crítico ("yield stress"), la roca se fractura y la energía elástica almacenada se disipa, principalmente por medio de la emisión de ondas acústicas y localmente, a lo largo de la falla por generación de calor causado por fricción (Barr y Dahlen, 1989). La zona de deformación sísmica de una falla se extiende verticalmente hasta aproximadamente la profundidad de la isoterma de los 250° C, dependiendo, de esta manera, la profundidad de la zona sísmica del gradiente geotérmico regional. Por debajo se encuentra la zona de transición entre deformación rígida y dúctil. Esto corresponde a un cambio del mecanismo dominante de deformación por fracturamiento a deformación por varios mecanismos de flujo (Asby y Verall, 1977; Schmid, 1982; Handy, 1989).

El desarrollo del fracturamiento es un proceso que depende del esfuerzo efectivo aplicado, de las propiedades materiales y la energía disponible (Scholz, 1990). Las fracturas se pueden categorizar, basado en su campo de desplazamiento, en tres modos: uno tensil o Modo I, caracterizado por desplazamientos normales a la fractura, y dos modos cortantes: Modo II o de cortante plano, donde el desplazamiento es paralelo a la dirección de propagación de la fractura, y Modo III o de cortante en antiplano, donde los desplazamientos son paralelos a la arista de propagación de la fractura (Atkinson, 1987) (Fig. 3.1)

El inicio de una fractura tiene su origen en desperfectos materiales. La propagación macroscópica de la superficie de fractura está controlada por heterogeneidades locales que impiden la propagación auto similar. En esta última intervienen los tres tipos de fractura, impidiendo que esta se propague en su propio plano, lo que favorece la distribución de la deformación sobre toda una zona de fractura o falla (Scholz, 1990). Si este proceso se presenta al mismo tiempo en otras partes, puede generarse una fractura de mayor dimensión por la unión de las discontinuidades (Segall y Polard, 1983; Granier, 1985; Segall y Simpson, 1986)

Existen muchos ejemplos de deformaciones tanto naturales como experimentales donde se observa que el fallamiento sigue el criterio de fracturamiento de Coulomb (Anderson, 1942; Somerville, 1978; Nakamura et al, 1984; Paterson, 1978). El criterio de fracturamiento de Coulomb o Teoría de fracturamiento del máximo esfuerzo cortante establece que un material frágil cede cuando el máximo esfuerzo cortante es igual a cierto valor finito denominado la resistencia de corte del material. Si σ es el tensor de esfuerzos en un punto y $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ son los esfuerzos principales, el máximo esfuerzo cortante será $\tau = 1/2 (\sigma_1 - \sigma_3)$ y se presenta en un plano que biseca al ángulo formado por los esfuerzos principales mayor y menor (Fig. 3.2). Esto implica que si C_0 es la resistencia compresiva de un material sometido a compresión pura, el material deberá fracturarse en cualquier plano inclinado a 45° respecto del eje de compresión. Para estados tridimensionales de esfuerzos, el material cederá en cualquiera de

DESCRIPCIÓN FENOMENOLÓGICA

dos planos (o ambos) a 45° respecto del eje del esfuerzo principal máximo y paralelo al eje del esfuerzo principal intermedio. Para estados simétricos respecto a los esfuerzos principales intermedio y mínimo, el material cede formando un cono circular de fracturamiento a 45° respecto de σ_3 . Sin embargo, en experimento el ángulo es $<45^\circ$ para todos los casos (Paterson, 1978).

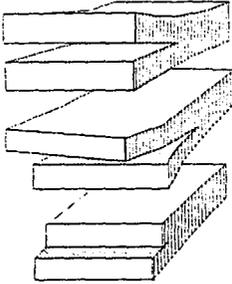


Figura 3.1. Tipos de fracturas: Modo I (arriba), Modo II (en medio) y Modo III (abajo) (según Atkinson, 1987)

Esta teoría fue modificada por Navier de una forma que cualitativamente se ajusta a los hechos experimentales. En lugar de asumir que la fractura se manifiesta en un plano donde llega al límite cortante del medio S_0 , se asume que la resistencia cortante se incrementa proporcionalmente al esfuerzo normal σ_n sobre el potencial plano de fractura (Fig. 3.2). La fractura ocurre cuando

$$\begin{aligned} \tau &= S_0 + k\sigma_n \\ \sigma_n &= \mathbf{\sigma} \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$\|\mathbf{n}\| = \|\mathbf{t}\| = 1$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0$ y k es un factor de proporcionalidad que a su vez suele expresarse en términos de otro parámetro ϕ , $k = \tan \phi$. k es denominado el *coeficiente de fricción interna* y ϕ el *ángulo de fricción interna*. Estas constantes son empíricas y se desconoce si tienen significado físico.

El fracturamiento se presenta con una orientación $\tan(2\theta) = 1/k$ o $\theta = \frac{1}{2}\pi \pm \frac{1}{2}\phi$, donde θ es el ángulo que guarda la fractura con el esfuerzo principal máximo (Fig. 3.2 y 3.3).

Con base en este criterio se puede obtener el siguiente modelo de fracturamiento

$$\sigma_1 (k + [k^2 + 1]^{1/2}) + \sigma_3 ([k^2 + 1]^{1/2} - k) = 2S_0 \quad (3.2)$$

Este modelo, da lugar a criterios de fractura cuando el material está bajo condiciones de compresión o tensión pura. El fracturamiento bajo tensión pura uniaxial ocurre cuando $\sigma_1 = T_0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, por lo que

$$T_0 (k + [k^2 + 1]^{1/2}) = 2S_0 \quad (3.3)$$

El fracturamiento bajo compresión uniaxial corresponde a $\sigma_1 = \sigma_3 = 0$, $\sigma_2 = C_0$

$$C_0 ([k^2 + 1]^{1/2} - k) = 2S_0 \quad (3.4)$$

De acuerdo con estos resultados, la teoría predice que la resistencia compresiva siempre es mayor que la resistencia a la tensión. Las deformaciones experimentales muestran que la resistencia

DESCRIPCIÓN FENOMENOLÓGICA

teórica a tensión está sobrestimada del orden de 5 a 10 veces (Jaeger, 1969. Paterson, 1978). La Tabla 1.1 muestra los valores típicos de resistencia a tensión y compresión de algunos materiales.

Material	Tensión Kg/cm ²	Compresión Kg/cm ²	ϕ compresión
Granito	40	1,400	50°
Gabro		1,800	48°
Marmol	60	1,000	
Caliza	40	350	35°
Arenisca	20	700	45°
Cobre	1,600	300	
Vidrio	600		
Fibra de Cuarzo	10,000		

Tabla 3.1. Resistencia a tensión, compresión y ángulo de fricción interna de algunos materiales naturales y sintéticos (según Jaeger, 1969)

Se encuentra implícito en el criterio de fracturamiento de Mohr-Coulomb que el valor del esfuerzo principal intermedio σ_{22} no afecta la resistencia de fracturamiento (ec. 3.1 y 3.2); sin embargo, las conclusiones de estudios experimentales muestran que σ_{11} así como σ_{33} se ven afectados por el valor de σ_{22} , sin que exista un acuerdo de la manera como dependen de σ_{22} . También se ha encontrado que el ángulo θ del plano de cizalla aumenta conforme σ_{22} se incrementa (Paterson, 1978).

La comparación de los valores teóricos con la baja inclinación de las cabalgaduras, bien documentadas en los cinturones de pliegues y cabalgaduras, muestra una marcada discrepancia en el valor del coeficiente de fricción esperado (0.85 vs 0.36) (Paterson, 1978; Turcotte y Schubert, 1982). Esta deficiencia es atribuida frecuentemente a la presión de poro de fluidos intersticiales dentro de las rocas (Hubbert y Rubey, 1956).

La comparación de los valores teóricos con la baja inclinación de las cabalgaduras, bien documentadas en los cinturones de pliegues y cabalgaduras, muestra una marcada discrepancia en el valor del coeficiente de fricción esperado (0.85 vs 0.36) (Paterson, 1978; Turcotte y Schubert, 1982). Esta deficiencia es atribuida frecuentemente a la presión de poro de fluidos intersticiales dentro de las rocas (Hubbert y Rubey, 1956).

Macroscopicamente, la presión de poro es una variable del esfuerzo que no tiene ninguna influencia sobre las propiedades materiales del medio. Esto sugiere que el criterio de fracturamiento de Mohr-Coulomb para medios porosos sólo depende del *esfuerzo efectivo*, la diferencia entre el esfuerzo normal σ_n al plano de fractura y la presión de poro p .

$$|\tau| = S_0 - k(\sigma_n - p), \quad (3.5)$$

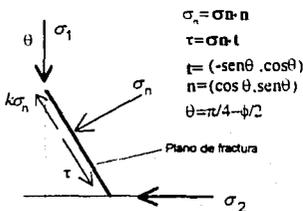


Figura 3.2. Elementos mecánicos de la teoría de fracturamiento de Mohr-Coulomb (tomado de Jaeger, 1969).

Figura 3.3. Diagrama de Mohr correspondiente a todas las condiciones de fracturamiento (Evoluta de Mohr). El efecto que tiene la presión de poro es desplazar el Círculo de Mohr, perdiendo el medio su estabilidad.

DESCRIPCIÓN FENOMENOLÓGICA

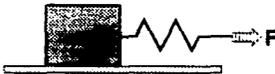
Si los poros se encuentran interconectados, la presión de poro p es la presión hidrostática de la columna de agua, $p = \rho_w gh$. Si existe confinamiento en los fluidos intersticiales, la presión de poro puede aumentar significativamente con respecto a la presión hidrostática, siendo necesario introducir un factor de sobrepresión λ , $p = \lambda \rho_w gh$. Este factor depende de la posición de cada parte de medio y del esfuerzo confinante σ_n , $\lambda = \lambda(x, \sigma_n)$.

En un diagrama de Mohr (σ_n, τ), el criterio de fracturamiento de Mohr-Coulomb corresponde a una aproximación lineal de la *evoluta de Mohr*, la curva generada por los círculos de Mohr correspondientes a todas las condiciones de fracturamiento (Fig. 3.3). En las condiciones de esfuerzo por debajo de la curva el material permanece sin fracturarse, mientras para las condiciones por arriba de la curva, el material es inestable. El efecto que tiene la presión de poro es desplazar el círculo dentro del diagrama, tornando la roca más frágil (Fig. 3.3) (Jaeger, 1969).

Aunque el criterio de fractura de Navier-Coulomb se acerca bastante a la realidad, la teoría no es aplicable cuando el medio ha sido fracturado por campos de esfuerzos preexistentes. Juntas preexistentes se reactivan antes de que se alcance un esfuerzo diferencial lo suficientemente grande para fracturar la roca; es decir, el coeficiente de fricción en las juntas es menor al coeficiente de fricción interna.

Cuando el esfuerzo efectivo ha alcanzado la resistencia de corte de la roca, ocurren drásticas alteraciones locales en el campo de esfuerzos, que son acompañadas por la aparición de una nueva superficie interna de frontera (plano de discontinuidad). La formación de la fractura tiene como efecto la reducción de los esfuerzos en su vecindad, permaneciendo el campo en las porciones distantes, esencialmente sin alterarse y siendo aún capaz el medio de soportar considerables cargas, especialmente cuando existe confinamiento lateral. Bajo esta consideración, se tiene que las condiciones para producir nuevo fracturamiento son cercanas a las condiciones iniciales, aunque no son exactamente las mismas (Hathier, 1951; Paterson, 1978).

Una vez que una fractura se ha propagado y se ha formado un plano de discontinuidad, el movimiento del cuerpo a lo largo de la discontinuidad está controlado por fricción. La fricción es una fuerza de contacto que aparece tangencialmente a la superficie de deslizamiento entre dos cuerpos que se mueven entre sí.



$$\ddot{u}(t) + \lambda \dot{u}(t) = \lambda v t f g / m, \quad \lambda = k / m$$

Figura 3.4 Modelo mecánico del deslizamiento sobre una falla consistente de una masa m sobre una superficie rugosa con coeficiente de fricción f sujeta a un resorte de constante k , que se elonga paulatinamente con una velocidad constante v .

Se ha observado experimentalmente que la fricción es proporcional a la carga normal sobre la superficie de contacto $|\tau| = f \sigma_n$, lo que es conocido como la *ley de Amonton*, donde el factor de proporcionalidad f es el *coeficiente de fricción*, que depende del tipo de material y de la rugosidad de las superficies en contacto (Turcotte y Schubert, 1982). La rugosidad de muchas superficies de fracturas se acerca a distribuciones de fractales (Brown, 1987a, 1987b).

También se observa experimentalmente que pueden existir variaciones en la resistencia friccional durante el deslizamiento. En sistemas consistentes de una masa descansando sobre una superficie rugosa sometida a una fuerza proveniente de un resorte que se elonga gradualmente (Fig. 3.4 y 3.5) se tiene el siguiente comportamiento: la resistencia friccional se incrementa en el tiempo hasta que el bloque empieza a deslizarse, el máximo

DESCRIPCIÓN FENOMENOLÓGICA

coeficiente de fricción durante este periodo se le denomina el *coeficiente de fricción estático* (f_s). Una vez iniciado el movimiento ocurre una inestabilidad mecánica que resulta en desplazamientos rápidos seguidos de periodos cortos de reposo, un comportamiento conocido como "stick-slip" donde el coeficiente de fricción experimenta amplias variaciones. Después de un tiempo, este ambiente intermitente puede ser reemplazado por un régimen de desplazamiento estable donde el bloque se desliza con velocidad constante, nivelándose el comportamiento del coeficiente de fricción a un valor denominado el *coeficiente cinemático o coeficiente residual* (f_r).

Mediciones de los coeficientes estáticos de fricción en diversos tipos de rocas y superficies muestran que a bajas cargas, la resistencia friccional se ajusta a una relación lineal, aunque la dispersión es alta y con grandes variaciones en f_s , entre 0.2 y 2.0, de acuerdo al tipo de roca y superficie. Estas variaciones son originadas primordialmente por la rugosidad de la superficie.

A altas cargas existe, en contraste, pequeña variación en el coeficiente de fricción para una amplia variedad de rocas y rugosidades. Esto se debe a que el efecto de la rugosidad disminuye por efecto de la carga, dado que las asperezas son eliminadas. Byerlee (1978) aproximó la relación entre los esfuerzos normales y cizallante con dos líneas rectas

$$\begin{aligned} \tau &= 50 + 0.6\sigma_n \quad [MPa] \quad \text{para } \sigma_n > 200 MPa \\ \tau &= 0.85\sigma_n \quad [MPa] \quad \text{para } \sigma_n < 200 MPa \end{aligned} \quad (3.6)$$

Esta ley de fricción es, con muy pocas excepciones, independiente de la litología; además se mantiene sobre un amplio rango de durezas, velocidades de deslizamiento y rugosidades y para temperaturas por debajo de los 400° C (Scholz, 1990). Esta relación es conocida como la *ley de Byerlee* (Byerlee, 1978; Suppe, 1985).

Con este análisis es posible determinar las siguientes características, conocido un sistema de esfuerzos (uno de los objetivos de este trabajo): *i*) la orientación de superficies de fracturas y fallas y variaciones en su orientación de acuerdo al sistema de esfuerzos y *ii*) localización de fallas potenciales en el medio, i.e. determinar la distribución de las regiones inestables, susceptibles de afallarse. El fracturamiento se obtiene tomando superficies con una inclinación constante $\pm\theta$ respecto al esfuerzo principal máximo, obteniéndose dos conjuntos de fracturas. La longitud de las fracturas es indeterminada y depende más bien de la energía disponible en el medio.

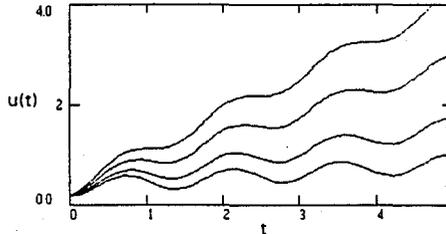


Figura 3.5. Gráfica de la solución de la ecuación diferencial del modelo físico de la figura 3.4, para varias velocidades de elongamiento del resorte.

DESCRIPCIÓN FENOMENOLÓGICA

La orientación de las fallas se obtiene encontrado dos conjuntos de curvas tales que la tangente en todo punto de las curvas corresponda con la orientación de las fracturas. Aunque no existen bases teóricas para discriminar entre un sistema de fallas y el otro, evidencias geológicas de deformaciones finitas muestran que solo un sistema de fallas se desarrolla o que predomina fuertemente, desarrollándose el sistema que coincide con la dirección del transporte global del sistema. El segundo problema concierne con los límites entre las zonas estables e inestables. Este es resuelto considerando que el fallamiento ocurre en las áreas en que el máximo esfuerzo cortante sobrepasa la resistencia de cortante del material, que se incrementa linealmente con la presión confinante efectiva (Criterio de Mohr-Coulomb, ecuaciones 3.4 y 3.5).

En los planteamientos anteriores la distribución y orientación del fallamiento es visto como un proceso que solo depende de la configuración inicial de los esfuerzos. En realidad, este es un proceso dinámico, donde el campo de esfuerzos y el fallamiento tienen una fuerte influencia el uno sobre el otro. Este argumento cobra relevancia en deformaciones finitas, sin embargo, para deformaciones pequeñas, el enfoque estático es una buena aproximación y es el utilizado en este trabajo, con la metodología antes descrita.

4. MODELO FÍSICO: ECUACIONES DE CAMPO, CONDICIONES INICIALES Y DE FRONTERA

Considerando que el fallamiento presenta una simetría lateral en el plano de ruptura con respecto a la dirección de los esfuerzos, y que el medio a simular, borde de plataforma carbonatada, también es simétrico, se establece un modelo bidimensional de esfuerzos planos (*plane stress*), es decir, se presume que sólo los esfuerzos principales máximo y mínimo son variables y que el esfuerzo principal intermedio es paralelo a la dimensión restante.

Los experimentos de termofluencia (*creep*) y deformación bajo presiones confinantes muestran que las rocas se comportan como materiales plasto-elásticos lineales (*Neville y Kirby, 1978*). En este trabajo sólo se considera la parte elástica lineal de la respuesta completa en la relación constitutiva material ya que el objetivo del trabajo se encuentra en el rango de la deformación frágil.

Las relaciones entre desplazamiento, fuerza interior por unidad de volumen y tracciones sobre la frontera están dadas a través de las *leyes de balance de momentum*¹

$$\int_{\partial P} \mathbf{S}(p, t) \mathbf{n}(p, t) da + \int_P \mathbf{b}(p, t) dv = \int_P \rho(p, t) \ddot{\mathbf{u}}(p, t) dv, \quad (4.1)$$

$$\int_P \{ \mathbf{r}(p) + \mathbf{u}(p, t) \} \times \{ \mathbf{S}(p, t) \mathbf{n}(p, t) \} da +$$

$$\int_P \{ \mathbf{r}(p) + \mathbf{u}(p, t) \} \times \{ \mathbf{b}(p, t) \} dv = \int_P \{ \mathbf{r}(p) + \mathbf{u}(p, t) \} \times \rho(p, t) \ddot{\mathbf{u}}(p, t) dv$$

Donde $\mathbf{r}(p)$ es el vector de posición del punto p . El mapeo continuo y diferenciable $\mathbf{S}: B \times (0, t_0) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V})^2$ es el *tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff* que representa el campo de esfuerzos inducidos por el desplazamiento, en general un tensor no simétrico. $\mathbf{S}(p, t) \mathbf{n}(p, t)$ es la *fuerza de superficie por unidad de área* en la configuración de referencia. $\mathbf{b}: B \times (0, t_0) \rightarrow \mathcal{V}$ la *fuerza gravitacional de cuerpo* por unidad de volumen en la configuración de referencia. La función $\rho: B \times (0, t) \rightarrow \mathbb{R}$ es la distribución de densidad de masa y $\mathbf{u}: B \times (0, t) \rightarrow \mathcal{V}$ el *campo de desplazamientos*. Esta relación es válida para toda parte P y tiempo t de la configuración de referencia B del cuerpo, que está embebido en el espacio euclidiano de puntos ξ ($B \subset \xi$).

Si se aplica el teorema de la divergencia y el teorema de localización estas leyes son equivalentes a

$$\operatorname{div} \mathbf{S}(p, t) + \mathbf{b}(p, t) = \rho(p, t) \ddot{\mathbf{u}}(p, t)$$

$$\mathbf{S}(p, t) \mathbf{F}^T(p, t) = \mathbf{F}(p, t) \mathbf{S}^T(p, t) \quad (4.2)$$

donde el operador

¹La mayor parte de la derivación del modelo físico está basada en Gurtin (1981), capítulos V, VII y VIII.

² $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ es el espacio de transformaciones lineales del espacio de vectores \mathcal{V} en el espacio de vectores \mathcal{V} .

MODELO FÍSICO

$$(\operatorname{div} \mathbf{S}(p, t))_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial S_{ij}}{\partial p_j} \quad (4.3)$$

y el mapeo continuo y diferenciable $\mathbf{F}: B \times (0, t_0) \rightarrow \mathcal{L}(V, V)$ es el *gradiente de deformación*.

Mediciones de razones de deformación en fallas geológicas activas muestran que estas son del orden de 10^{-13} - 10^{-15} s^{-1} (Pfiffner y Ramsay, 1982), por lo tanto, el término inercial $\rho(p, t)\ddot{\mathbf{u}}(p, t)$ es despreciable, reduciéndose las ecuaciones de campo (4.2) a:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{S}(p, t) + \mathbf{b}(p, t) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{S}(p, t) \mathbf{F}^T(p, t) &= \mathbf{F}(p, t) \mathbf{S}^T(p, t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

La ecuación constitutiva de los cuerpos elásticos establece que el esfuerzo en cada punto material del cuerpo es una función de los cambios de las distancias locales sin importar la historia de deformación previa del cuerpo

$$\mathbf{S}(p, t) = \bar{\mathbf{S}}(\mathbf{F}(p), p) \quad (4.5)$$

Aprovechando la relación $\mathbf{F}(p) = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}(p)$, la igualdad anterior se puede expresar

$$\mathbf{S}(p) = \bar{\mathbf{S}}(\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}(p), p) \quad (4.6)$$

y dada la diferenciabilidad de $\bar{\mathbf{S}}$, se puede obtener por una expansión de Taylor

$$\mathbf{S}(\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}(p), p) = \bar{\mathbf{S}}(\mathbf{I}) + \mathbf{D}\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{I})[\nabla \mathbf{u}(p)] + o(\nabla \mathbf{u}(p)) \quad (4.7)$$

donde \mathbf{I} es el tensor identidad, $\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{I})$ son los esfuerzos en la configuración de referencia o el *esfuerzo residual*, $\mathbf{D}\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{I}): \mathcal{L}(V, V) \rightarrow \mathcal{L}(V, V)$ es la primera derivada de $\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{I})$, un tensor simétrico de cuarto orden denominado el *tensor de elasticidad*, denotado comúnmente por \mathbf{C} , y $o(\nabla \mathbf{u})$ las derivadas de orden superior. Obsérvese que conforme $\nabla \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}$, $o(\nabla \mathbf{u}) \rightarrow \mathbf{0}$ y el tensor de esfuerzos $\bar{\mathbf{S}}$ se torna una función lineal de $\nabla \mathbf{u}$. Esta es una suposición aceptable para este caso, dada la magnitud de los gradientes de deformación observados (párrafos precedentes). Dado que \mathbf{D} es una transformación lineal de tensores simétricos en ellos mismos, la relación esfuerzo-distorsión, considerando a $\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{I})$ nulo, (4.7) se puede expresar

$$\bar{\mathbf{S}}(p) = \mathbf{C}[\hat{\nabla} \mathbf{u}(p)] \quad (4.8)$$

donde $\hat{\nabla} \mathbf{u}$ es el tensor de distorsión infinitesimal, el campo de distorsión inducido por el campo de desplazamientos. Este corresponde a la parte simétrica de $\nabla \mathbf{u}$

$$\hat{\nabla} \mathbf{u}(p) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}(p) + \nabla \mathbf{u}^T(p)) \quad (4.9)$$

MODELO FÍSICO

Como se mencionó en la introducción los márgenes de una plataforma carbonatada está compuesta por una mezcla heterogénea de rocas calcáreas producto del crecimiento de organismos arrecifales y detrito resultado de erosión, transporte y depósito. A gran escala esto le confiere a la región el comportamiento mecánico de un sólido isotrópico. Las rocas del interior de la plataforma y de la cuenca vecina constan de caliza bien estratificada. La presencia de laminación induce un comportamiento mecánico distinto al del talud: en lugar de ceder frágilmente el material lo hace por deslizamiento capa por capa, formando pliegues angulares, en un tipo de inestabilidad conocido como *kinking*, característico de muchos materiales fibrosos, como la madera y los filosilicatos (*Jaeger*, 1969). Esto se debe a que la resistencia a esfuerzos cortantes es mayor en la dirección normal a la estratificación que paralela a esta, favoreciendo el deslizamiento capa por capa. También implica que existen propiedades materiales en diferentes direcciones, aunque esto también se ve afectado por una serie de factores: *i*) el acople mecánico entre las interfaces, *ii*) la existencia de material entre capa y capa y su espesor, por ejemplo la presencia de lutita entre los estratos podría reducir la fricción hasta 4 veces, *iii*) la presión confinante disminuye este efecto al aumentar el acople, *iv*) la escala de la anisotropía; e.g. a escala mineral, como en los esquistos, la anisotropía tiene un mayor efecto (*Bailey*, 1992; *CRC*, *Practical handbook of physical properties of rocks and minerals*, 1989).

Razones entre el módulo de elasticidad en la dirección paralela a la estratificación y la dirección normal obtenidas de calizas puras arrojan valores entre 1.08 a 1.10, llegando ocasionalmente hasta 1.5. Esto muestra una reducida anisotropía en las constantes elásticas en calizas puras (*Saver*, 1964).

En resumen, la anisotropía no solo consiste en la variación de las constantes elásticas, sino en una competencia entre varios criterios de inestabilidad: fracturamiento en el borde y talud y fracturamiento vs. plegamiento en el interior y cuenca. Considerando esta complejidad, solo se tomará en cuenta el caso isotrópico.

Para materiales homogéneos e isotrópicos, el tensor de elasticidad (4.8) tiene la forma

$$C[\hat{\nabla}u(p)] = 2\mu(p)\hat{\nabla}u(p) + \lambda(p)\{tr\hat{\nabla}u(p)\}I \quad (4.10)$$

El operador lineal $tr: \mathcal{L}^{1,1}V \rightarrow \mathfrak{R}$ se define como la traza y los campos escalares $\mu, \lambda: B \rightarrow \mathfrak{R}$ se denominan los *módulos de Lamé*. Estos escalares pueden expresarse a su vez en términos de los módulos de Young E (elasticidad) y de Poisson ν (contracción) de la siguiente forma

$$\mu = \frac{E}{1 + \nu}, \quad \lambda = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (4.11)$$

La Tabla 4.1 muestra valores de las constantes de elasticidad típicas de algunas rocas.

Como condiciones iniciales se tiene la posición inicial y la velocidad inicial del cuerpo

$$\begin{aligned} x(p, 0) &= x_0(p), \\ \dot{x}(p, 0) &= v_0(p), \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde la función de clase \mathcal{C}^2 , $x: B \times \mathfrak{R} \rightarrow \xi$ se define como el *movimiento*.

MODELO FÍSICO

Roca	Densidad Kg/m ³	Razón de Poisson	Módulo de Young × 10 ⁹ N/m ²	Compresibilidad × 10 ⁹ m ² N ⁻¹
Granito	2670	0.25	85	185
Anortosita	2730	0.31	93	120
Diabasa	2970	0.27	112	120
Gabro	2980	0.31	115	115
Dunita	3300	0.27	150	85
Caliza	2660	0.34	65	150
Marmol	2700	0.34	70	130
Cuarcita	2660	0.25	96	235
Dolomita	2830		90	110

Tabla 1. Propiedades materiales típicas de algunas rocas (según Suppe, 1985).

El borde de la plataforma puede estar sujeto a dos juegos de condiciones de frontera, como se muestra en la Figura 4.1, de acuerdo a la orientación de la plataforma respecto a la empujes tectónicos: *i*) empujes dirigidos del interior de la plataforma hacia la cuenca y *ii*) empujes dirigidos de la cuenca hacia el interior de la plataforma³. Sin embargo, solo es necesario establecer un juego, ya que ambos son similares y sólo hay que cambiar la nomenclatura de las fronteras (Fig. 4.1). Las condiciones de frontera son:

1. Desplazamiento prescrito sobre la frontera lateral del interior de plataforma y cuenca ∂B_j (Fig. 4.1a y 4.1b). Estrictamente, sobre estas fronteras actúan tracciones horizontales (empujes tectónicos) sin que se conozca la magnitud de estos. Por esta razón se ha optado por especificar desplazamientos.

$$x(\bullet, 0) = \bar{u}(\bullet) \quad \text{sobre } \partial B_j \quad (4.15)$$

2. Sobre la frontera basal ∂B_f , se tiene contacto con fricción, que es modelada por la *ley de fricción de Coulomb* (Fig. 4.1)

$$\begin{aligned} n(p) \cdot S(p)n(p) &= \bar{n}(p), \\ t(p) \cdot S(p)n(p) &= \bar{t}(p) \\ &= S(p)n(p) - \bar{n}(p)n(p) \\ &= \begin{cases} \bar{t}(p) = g(p)u_r(p) / |u_r(p)|, & u_r(p) = 0 \\ |\bar{t}(p)| \leq g(p), & u_r(p) = 0 \end{cases} \quad (4.16) \end{aligned}$$

sobre ∂B_f ,

³En México, el primer caso es típico de los márgenes orientales de las plataformas y el segundo para los bordes occidentales, puesto que la dirección general del transporte de material durante la formación del cinturón de pliegues y cabalgaduras de la Sierra Madre Oriental es del Oeste al Este.

MODELO FÍSICO

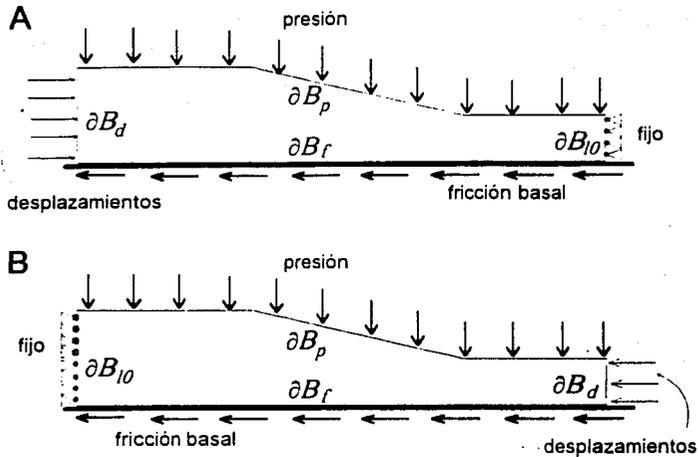


Figura 4.1 Modelo físico bidimensional y condiciones de frontera del borde de una plataforma carbonatada. Dos situaciones se pueden presentar: A) desplazamiento desde el interior de la plataforma y B) desplazamientos presentes desde la cuenca

donde \mathbf{n}, \mathbf{t} , y $\bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{t}}$ son los vectores y tracciones normal y tangencial, respectivamente;

$g = f|\bar{\mathbf{n}}|: \partial B_r \rightarrow \mathfrak{R}^+$ la máxima fuerza tangencial de fricción y el campo escalar $f: \partial B_r \rightarrow \mathfrak{R}^+$ el coeficiente de fricción. Esta relación modela el comportamiento de los esfuerzos tangencial y normal a la superficie de fricción de la siguiente manera: cuando existe desplazamiento tangencial a la superficie de fricción, el esfuerzo tangencial $\mathbf{t}(p) \cdot \mathbf{S}(p)\mathbf{n}(p)$ es opuesto al desplazamiento y toma el valor de la máxima resistencia friccional. Cuando no hay desplazamiento tangencial, el esfuerzo tangencial varía entre los máximos de la resistencia friccional ($-g(p)$ y $g(p)$). El esfuerzo normal $\mathbf{n}(p) \cdot \mathbf{S}(p)\mathbf{n}(p) = \bar{\mathbf{n}}(p)$ permanece constante.

Existen tres inconvenientes al utilizar este modelo de fricción: *i)* la tracción tangencial es desconocida *a priori* (sólo se conocen los valores máximos que ésta puede alcanzar), por lo que es necesario introducirla como incógnita en el modelado, *ii)* se trata de una funcional no diferenciable, lo que obliga a utilizar una formulación dual (ver capítulo siguiente), en términos del campo de esfuerzos en lugar del campo de distorsiones, y *iii)* no refleja enteramente la naturaleza del fenómeno de fricción, una formulación más realista involucra un modelo de deformación cuasi-estático con una componente irreversible de deformación (Alduncin, 1993). Una aproximación a esta relación experimental es considerar que el umbral de resistencia friccional es demasiado grande por lo que no existen

MODELO FÍSICO

desplazamiento tangenciales sobre la superficie de fricción, además, dados los espesores (≈ 1300 m en el interior de la plataforma y ≈ 700 m en la cuenca) y la condición de desplazamientos pequeños, la superficie de contacto no puede experimentar levantamientos (Fig. 4.2).

$$u(p) = 0 \quad \text{sobre } \partial B_f, \quad (4.17)$$

En este trabajo se considera esta aproximación en lugar de las relaciones de ley de fricción de Coulomb.

3. La frontera lateral restante ∂B_{lo} (Fig. 4.1) se considera fija. Esta se encuentra lo suficientemente lejana (10 Km) de la frontera con desplazamientos prescritos ∂B_d y de la zona de Jeformación inducida como para no tener efectos en ∂B_{lo} .

$$S(p) \cdot n(p) = 0 \quad \text{sobre } \partial B_{lo} \quad (4.19)$$

4. Sobre la frontera superior actúa una presión producto de una carga litoestática (Fig. 4.1)

$$S(p)n(p) = \bar{p} \quad \text{sobre } \partial B_p \quad (4.18)$$

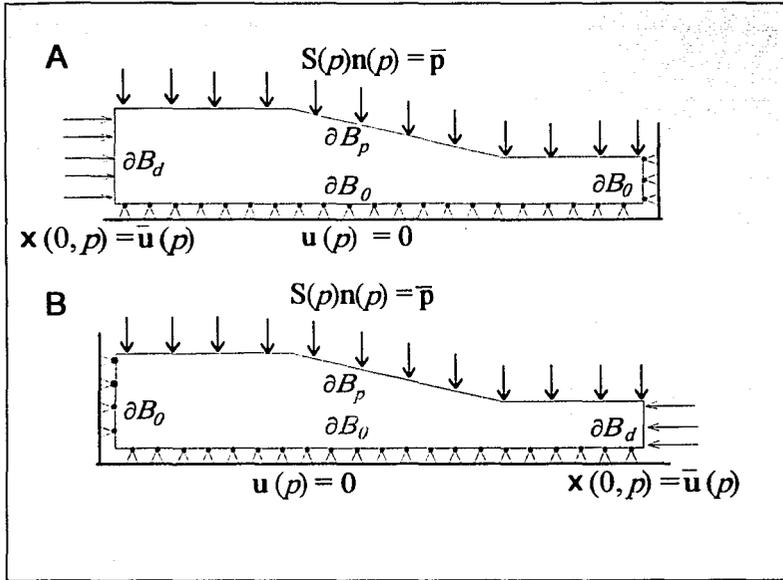


Figura 4.2. Dominio de definición y condiciones sobre la frontera del modelo físico de deformación de una plataforma carbonatada. En esta versión la ley de fricción de Coulomb se ha sustituido por una condición simplificada (ver texto para más detalles).

En resumen, hay que encontrar el campo de desplazamientos solución del problema de valores sobre la frontera (Fig. 4.2):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{S}(p) + \mathbf{b}(p) &= \mathbf{0}, & \text{sobre } B \\ \bar{\mathbf{S}}[\hat{\nabla} \mathbf{u}(p)] &= \mathbf{C}[\hat{\nabla} \mathbf{u}(p)], \\ \hat{\nabla} \mathbf{u}(p) &= \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u}(p) + \nabla \mathbf{u}^T(p)] \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\bullet, 0) &= \bar{\mathbf{u}}(\bullet) & \text{sobre } \partial B_d \\ \mathbf{u}(p) &= \mathbf{0} & \text{sobre } \partial B_0 = \partial B_r \cup \partial B_{l_0} \\ \mathbf{S}(p)\mathbf{n}(p) &= \bar{\mathbf{p}}(p) & \text{sobre } \partial B_p \end{aligned} \quad (4.20)$$

con la relación constitutiva de los sólidos isotrópicos

$$\mathbf{C}[\hat{\nabla} \mathbf{u}(p)] = 2\mu(p)\hat{\nabla} \mathbf{u}(p) + \lambda(p)\{\operatorname{tr} \hat{\nabla} \mathbf{u}(p)\} \mathbf{I}$$

5.- FORMULACIÓN SUBDIFERENCIAL Y VARIACIONAL DEL MODELO FÍSICO

Para obtener el modelo de elementos finitos y eventualmente la solución numérica del modelo elastocuasiestático presentado en el capítulo anterior es necesario primero derivar la formulación variacional del problema. Las formulaciones variacionales son caracterizaciones equivalentes de las ecuaciones del modelo, en forma de un funcional que evalúa el trabajo realizado por el sistema. Estas se obtienen sistemáticamente a través del siguiente método: *i)* las condiciones en el interior y de frontera se expresan en términos de ecuaciones subdiferenciales locales, *ii)* suma e integración directa de las ecuaciones y *iii)* aplicación de la fórmula de Green (Alduncin, 1986a, 1986b, 1989). Las ecuaciones subdiferenciales son ecuaciones que modelan localmente las relaciones gobernantes en el interior y las condiciones de frontera del modelo.

5.1 Elementos de análisis convexo

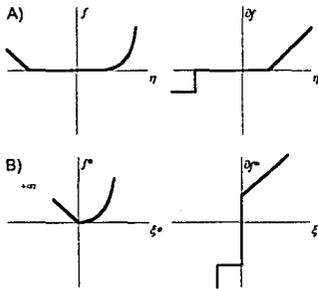


Figura 5.1. A) Gráfica de un subdiferencial (izquierda) y su subpotencial (derecha). Gráficas duales de (A) (según Alduncin, 1986a).

Una función convexa¹ real definida sobre los reales $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} \cup \{+\infty\}$ no necesariamente continua ni diferenciable, cuyo dominio efectivo es el conjunto

$$\mathcal{D}(f) \equiv \{\xi \in \mathfrak{R}: f(\xi) < +\infty\} \quad (5.1)$$

no vacío y cerrado,

se dice ser subdiferenciable en un punto $\eta \in \mathfrak{R}$, si existe un real η^* tal que

$$f(\xi) \geq f(\eta) + \eta^*(\xi - \eta), \quad \forall \xi \in \mathfrak{R}$$

Esto es, f es subdiferenciable en η , si existe una función

$$\xi \mapsto f(\eta) + \eta^*(\xi - \eta)$$

con pendiente η^* que pasa por $f(\eta)$ cuya gráfica se encuentra por debajo de la gráfica de f (Fig. 5.1). El conjunto de tales reales η^* (posiblemente vacío), denominados *subgradiantes* de f en η , define el *subdiferencial* de f en η y se le denota $\partial f(\eta)$. De esta manera, $\partial f: \mathfrak{R} \rightarrow 2^{\mathfrak{R}}$, es tal que:

$$\partial f(\eta) = \{\eta^* \in \mathfrak{R}: f(\xi) \geq f(\eta) + \eta^*(\xi - \eta), \quad \forall \xi \in \mathfrak{R}\}. \quad (5.2)$$

¹Una función real f definida sobre un espacio lineal X se dice que es *convexa* si cumple que: $f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$ para todo $x, y \in X$ y $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$ tales que $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ y $\alpha + \beta = 1$

FORMULACIÓN VARIACIONAL DEL MODELO FÍSICO

Aquí, 2^* denota el conjunto potencia de \mathfrak{R} , la familia de todos los subconjuntos de \mathfrak{R} , incluyendo el conjunto vacío. Obsérvese que si f no es subdiferenciable, entonces $\partial f(\eta) = \emptyset$; esto ocurre si, y sólo si $\eta \notin \mathcal{D}(f)$. De esta manera, (5.1) se puede reescribir:

$$\partial f(\eta) = \{ \eta^* \in \mathfrak{R}: f(\xi) \geq f(\eta) + \eta^*(\xi - \eta), \forall \xi \in \mathcal{D}(f) \}. \quad (5.3)$$

Observe también que f es diferenciable en η si, y sólo si, $\partial f(\eta)$ tiene un único subgradiente en η : $\partial f(\eta) = \{ f'(\eta) \}$. La función primitiva de $\partial f, f$, es denominada el subpotencial de ∂f (Fig. 5.1).

El subdiferencial dual de $\partial f: \mathfrak{R} \rightarrow 2^*$ es la gráfica inversa de la correspondiente ecuación subdiferencial, que se denota por $\partial f^*: \mathfrak{R} \rightarrow 2^*$ y está dado por

$$\eta \in \mathcal{D}(f): \eta^* \in \partial f(\eta) \Leftrightarrow \eta^* \in \mathcal{D}(f^*): \eta \in \partial f^*(\eta^*), \quad (5.4)$$

donde

$$f^*: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} \cup \{+\infty\}, f^*(\xi^*) = \sup \{ \xi \xi^* - f(\xi); \xi \in \mathfrak{R} \}, \quad (5.5)$$

es la función dual (conjugada) de f , convexa y con dominio efectivo $\mathcal{D}(f^*)$ no vacío y cerrado (Fig. 5.1b). Aquí, *sup* indica el valor supremo del conjunto². Esto es, la gráfica inversa del subdiferencial de $f(\partial f)$ es la gráfica del subdiferencial de $f^*(\partial f^*)$. De aquí que una ecuación subdiferencial primal está caracterizada por su ecuación subdiferencial dual y viceversa. De acuerdo con la definición (5.3), las ecuaciones (5.4) y (5.5) se pueden caracterizar por

$$\eta \in \mathcal{D}(f): f(\xi) - f(\eta) \geq \eta^*(\xi - \eta), \forall \xi \in \mathcal{D}(f), \quad (5.6)$$

y

$$\eta^* \in \mathcal{D}(f^*): f^*(\xi^*) - f^*(\eta^*) \geq \eta^*(\xi^* - \eta^*), \forall \xi^* \in \mathcal{D}(f^*),$$

5.2 Planteamiento del problema de la elastoestática lineal mediante subdiferenciales.

Ecuaciones subdiferenciales.

El sistema de ecuaciones (4.19) y (4.20) constituye el modelo clásico de la elastoestática lineal. A partir de éste se presenta un modelo en términos de ecuaciones subdiferenciales locales, el modelo físico subdiferencial. El primer paso consiste en representar las condiciones en el interior del cuerpo y sobre su frontera por medio de subdiferenciales de funcionales convexas

Ecuación de Equilibrio:

$$\mathbf{u}(p) \in \mathcal{D}(\phi(p; \bullet)): \operatorname{div} \mathbf{S}(p) + \mathbf{b}(p) \in \partial \phi(p, \mathbf{u}(p)), \quad p \in B. \quad (5.7)$$

Ecuación de frontera:

$$\boldsymbol{\gamma} \mathbf{u}(p) \in \mathcal{D}(\psi(p; \bullet)): -\mathbf{S}(p) \mathbf{n}(p) \in \partial \psi(p, \boldsymbol{\gamma} \mathbf{u}(p)) \quad p \in \partial B. \quad (5.8)$$

² Así, el máximo y el supremo del conjunto $A = \{x \in \mathfrak{R}: 0 \leq x \leq 1\}$ es el número 1, sin embargo el conjunto $A = \{x \in \mathfrak{R}: 0 < x < 1\}$ no tiene máximo, pero su supremo es el número 1.

FORMULACIÓN VARIACIONAL DEL MODELO FÍSICO

Donde $\partial\phi: B \times U \rightarrow U$ y $\partial\varphi: B \times U \rightarrow U$ son los subdiferenciales que modelan las relaciones entre desplazamiento y fuerza de interior de control y restricciones de frontera, respectivamente, y γ el operador de frontera de Dirichlet.

Dado que no existen restricciones internas en el desplazamiento, la ecuación de equilibrio subdiferencial (5.7) se especializa en la forma

Ecuación de Equilibrio:

$$\mathbf{u}(p) \in \mathcal{D}(\phi(p; \bullet)) = \mathcal{U}: \operatorname{div} \mathbf{S}(p) + \mathbf{b}(p) \in \partial\phi(p; \mathbf{u}(p)) = \{\mathbf{0}\}, \quad p \in B. \quad (5.9)$$

que corresponde a la ecuación clásica (4.20).

Por otro lado, la ecuación de frontera subdiferencial (5.8) para las condiciones (4.20) toma las formas:

Condiciones de desplazamiento prescrito:

$$\mathbf{u}(p) \in \mathcal{D}(\varphi_d(p; \bullet)) = \{\bar{\mathbf{u}}(p)\}: -\mathbf{S}(p)\mathbf{n}(p) \in \partial\varphi_d(p; \gamma\mathbf{u}(p)) = \mathcal{V}, \quad p \in \partial B_d \quad (5.10)$$

Condición de desplazamientos nulos:

$$\mathbf{u}(p) \in \mathcal{D}(\varphi_0(p; \bullet)) = \{\mathbf{0}\}: -\mathbf{S}(p)\mathbf{n}(p) \in \partial\varphi_0(p; \gamma\mathbf{u}(p)) = \mathcal{V}, \quad p \in \partial B_0 \quad (5.11)$$

Condición de tracción:

$$\mathbf{u}(p) \in \mathcal{D}(\varphi_t(p; \bullet)) = \mathcal{V}: -\mathbf{S}(p)\mathbf{n}(p) \in \partial\varphi_t(p; \mathbf{u}(p)) = \{-\bar{\mathbf{p}}(p)\}, \quad p \in \partial B_t \quad (5.12)$$

El modelo matemático (5.9)-(5.12) corresponde a la *formulación variacional primal local* del problema. Las respectivas gráficas de los subdiferenciales y subpotenciales se observan en la Figura 5.2.

De la definición de subdiferencial (5.3) y de su caracterización (5.6) el modelo se puede expresar equivalentemente en términos de sus correspondientes desigualdades variacionales (identificadas directamente de la Fig. 5.2).

Ecuación de equilibrio:

$\mathbf{u} \in \mathcal{D}(\phi(\bullet))$:

$$\phi(\mathbf{v}) - \phi(\mathbf{u}) \geq \left[\operatorname{div} \mathbf{C}[\hat{\nabla}\mathbf{u}] + \mathbf{b} \right] \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{D}(\phi(\bullet)),$$

$\mathbf{u} \in \mathcal{U}$:

$$0 \geq \left[\operatorname{div} \mathbf{C}[\hat{\nabla}\mathbf{u}] + \mathbf{b} \right] \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}, \quad (5.13)$$

FORMULACIÓN VARIACIONAL DEL MODELO FÍSICO

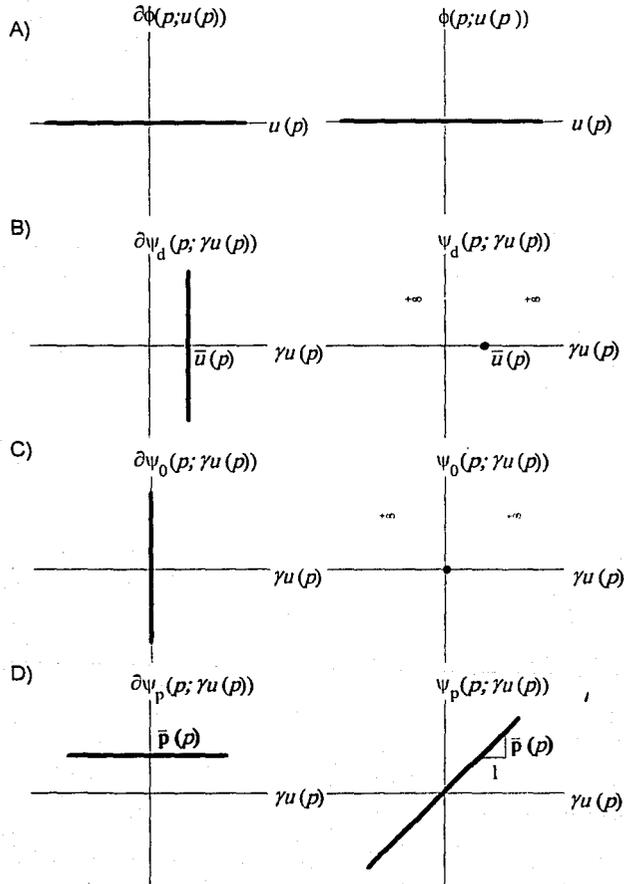


Figura 5.2 Subdiferenciales y subpotenciales (función primitiva) que modelan la condición de equilibrio en el interior (A) y las condiciones de frontera de desplazamiento prescrito (B), frontera fija (C) y tracción prescrita (D) (según Alduncin, 1989a).

FORMULACIÓN VARIACIONAL DEL MODELO FÍSICO

Condiciones de frontera:

$\gamma u \in \mathcal{D}(\varphi_a(\bullet))$:

$$\varphi_a(\gamma v) - \varphi_a(\gamma u) \geq \left\{ C[\hat{\nabla} u] n \right\} \cdot (\gamma v - \gamma u) \quad \forall \gamma v \in \mathcal{D}(\varphi_a(\bullet)), \quad (5.14)$$

$\gamma u = \bar{u}$:

$$0 \geq \left\{ C[\hat{\nabla} u] n \right\} \cdot (\gamma v - \gamma u) \quad \forall \gamma v = \bar{u}, \quad (5.15)$$

$\gamma u = 0$:

$$0 \geq \left\{ C[\hat{\nabla} u] n \right\} \cdot (\gamma v - \gamma u) \quad \forall \gamma v = 0, \quad (5.16)$$

$\gamma u \in \mathcal{U}$:

$$-\bar{p} \cdot \gamma v + \bar{p} \cdot \gamma u \geq \left\{ C[\hat{\nabla} u] n \right\} \cdot (\gamma v - \gamma u) \quad \gamma v \in \mathcal{U}, \quad (5.17)$$

en donde, como simplificación, la dependencia de p se ha omitido; además se ha sustituido la relación constitutiva $S = C[\hat{\nabla} u]$.

Formulación variacional primal.

Sumando las inecuaciones (5.13)-(5.17) e integrando sobre la frontera y el interior, se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} u \in \mathbf{K} \\ - \int_{\Gamma_B} \bar{p} \cdot (\gamma v - \gamma u) da \geq \int_{\Gamma_B} -C[\hat{\nabla} u] n \cdot (\gamma v - \gamma u) da - \int_B \text{div } C[\hat{\nabla} u] n \cdot (v - u) dv \\ + \int_B b \cdot (v - u) dv \quad \forall v \in \mathbf{K}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

donde \mathbf{K} es la familia primal de campos de desplazamiento admisibles:

$$\mathbf{K} = \mathcal{D}(\Phi) \cap \mathcal{D}(\Psi \circ \gamma),$$

$$\Phi(v) = \int_B \phi(p, v) dv, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Phi),$$

$$\Psi(v) = \int_{\Gamma_B} \psi(p, v) dv,$$

que son usualmente caracterizados por

FORMULACIÓN VARIACIONAL DEL MODELO FÍSICO

$$\mathcal{D}(\Phi) = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1 : \phi(\bullet; \mathbf{v}(\bullet)) \in L^1(B) \},$$

$$\mathcal{D}(\Psi \circ \gamma) = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(B) : \psi(\bullet; \gamma \mathbf{v}(\bullet)) \in L^1(B) \}^3$$

³ Antes de definir los espacios $\mathbf{H}^1(\Omega)$ y $L^1(\Omega)$, es necesario recordar algunos conceptos de algebra lineal. Si \mathbf{V} es un espacio lineal, entonces se dice que ℓ es una *forma lineal* sobre \mathbf{V} , si ℓ es una transformación de \mathbf{V} en \mathfrak{R} ($\ell: \mathbf{V} \rightarrow \mathfrak{R}$) y ℓ es lineal si para todo $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ y α, θ escalares se tiene

$$\ell(\beta \mathbf{v} + \theta \mathbf{w}) = \beta \ell(\mathbf{v}) + \theta \ell(\mathbf{w}).$$

Se dice que $a(\bullet, \bullet)$ es una forma bilineal sobre $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ si $a: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathfrak{R}$, y es lineal en cada argumento y si para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ y todo β, θ escalares se tiene

$$a(\mathbf{u}, \beta \mathbf{v} + \theta \mathbf{w}) = \beta a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \theta a(\mathbf{u}, \mathbf{w}),$$

$$a(\beta \mathbf{u}, \theta \mathbf{v} + \mathbf{w}) = \beta a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \theta a(\mathbf{v}, \mathbf{w}),$$

Una forma bilineal $a(\bullet, \bullet)$ sobre $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ se dice *simétrica* si $a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = a(\mathbf{w}, \mathbf{u}), \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$. Una forma bilineal simétrica se dice que es un *producto escalar* en \mathbf{V} si $a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0 \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$.

La norma $\|\bullet\|_a$, asociada al producto escalar $a(\bullet, \bullet)$ es definida como $\|\mathbf{v}\|_a = (a(\mathbf{v}, \mathbf{v}))^{1/2}, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$.

Si \mathbf{V} es un espacio lineal con producto escalar y la correspondiente norma $\|\bullet\|$ entonces se dice que \mathbf{V} es un *espacio de Hilbert* si \mathbf{V} es completo, es decir toda *sucesión de Cauchy* es convergente con respecto a la norma $\|\bullet\|$. Una sucesión $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$ de elementos \mathbf{v}_i del espacio \mathbf{V} con norma $\|\bullet\|$, se dice que es una sucesión de Cauchy si para todo $\xi > 0$ existe un número natural N tal que $\|\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i\| < \xi$ si $i, j > N$.

Algunos espacios naturales de Hilbert a formulaciones variacionales son los siguientes: El espacio de funciones cuadráticamente integrables sobre una región Ω ,

$$L^2(\Omega) = \left\{ \mathbf{v}: \mathbf{v} \text{ está definida en } \Omega \text{ y } \int_{\Omega} \mathbf{v}^2 d\Omega < \infty \right\}$$

es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \mathbf{v} \mathbf{w} d\Omega$$

y la correspondiente norma (la norma L^2)

$$\|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \mathbf{v}^2 d\Omega \right)^{1/2} = (\mathbf{v}, \mathbf{v})^{1/2}$$

Así, el espacio $L^2(\Omega)$ consiste de funciones continuas por segmentos, posiblemente no acotadas, tales que

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}^2 d\Omega$$

es finita.

El espacio $\mathbf{H}^1(\Omega) = \{ \mathbf{v}: \mathbf{v} \text{ y } \mathbf{v}' \text{ pertenecen a } L^2(\Omega) \}$ equipado con el producto escalar

FORMULACIÓN VARIACIONAL DEL MODELO FÍSICO

Aplicando la siguiente fórmula de Green

$$\int_B \operatorname{div} \mathbf{C}[\hat{\nabla} \mathbf{u}] \cdot \mathbf{v} dv = - \int_B \mathbf{C}[\hat{\nabla} \mathbf{u}] \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v} dv + \int_{\partial B} \mathbf{C}[\hat{\nabla} \mathbf{u}] \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\gamma} v da$$

y sustituyendo en la expresión (5.18) se establece el principio variacional primal

Dado $\mathbf{b} \in L^2(\mathbf{b})$, encuentre $\mathbf{u} \in \mathbf{K}$, tal que

$$\int_B \mathbf{C}[\hat{\nabla} \mathbf{u}] \cdot \hat{\nabla}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) dv - \int_{\partial B_p} \bar{\mathbf{p}} \cdot (\boldsymbol{\gamma} v - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{u}) da \geq \int_B \mathbf{b}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) dv, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{K}. \quad (5.19)$$

$$\mathbf{K} = \{ \mathbf{v}: \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(B), \boldsymbol{\gamma} v = \bar{\mathbf{u}} \text{ sobre } \partial B_d, \boldsymbol{\gamma} v = \mathbf{0} \text{ sobre } \partial B_0 \},$$

La expresión (5.19) es la *formulación variacional primal global* del problema 4.19-4.20 (Alduncin, 1986a, 1989).

Observación 1. El principio variacional (5.19) se define como el *principio del trabajo virtual* y es equivalente al *principio de la mínima energía potencial*.

Encuentre $\mathbf{u} \in \mathbf{K}$: $J(\mathbf{u}) \leq J(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in \mathbf{K}$.

$$J(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_B \mathbf{C}[\hat{\nabla} \mathbf{v}] \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v} dv - \int_{\partial B_p} \bar{\mathbf{p}} \cdot (\boldsymbol{\gamma} v) da - \int_B \mathbf{b} \cdot (\mathbf{v}) dv, \quad (5.20)$$

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{K},$$

en donde la funcional $J: \mathbf{K} \rightarrow \mathcal{R}$, es la energía potencial del sistema y la cantidad $\frac{1}{2} \int_B \mathbf{C}[\hat{\nabla} \mathbf{v}] \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v} dv$ es la *energía de deformación elástica* del cuerpo. Este principio establece que la diferencia entre la energía de deformación y el trabajo realizado por la fuerza de cuerpo y las tracciones de frontera, adquiere un valor mínimo para la solución del problema, respecto de cualquier otro estado cinemáticamente admisible.

Para demostrar esta equivalencia, considérese a

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w})_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} (\mathbf{v} \mathbf{w} + \mathbf{v}' \mathbf{w}') d\Omega$$

y la norma correspondiente

$$\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} [\mathbf{v}^2 + \mathbf{v}'^2] d\Omega \right)^{1/2}$$

De esta manera el espacio $\mathbf{H}^1(\Omega)$ consiste de las funciones \mathbf{v} definidas en Ω tales que junto con su primera derivada \mathbf{v}' son cuadráticamente integrables (pertenecen a L^2).

FORMULACIÓN VARIACIONAL DEL MODELO FÍSICO

$$J(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - \int_B \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dv + \Phi(\mathbf{v}) + \Psi(\gamma \mathbf{v}),$$

donde $a: \mathbf{H}^1(B) \times \mathbf{H}^1(B) \rightarrow \mathbb{R}$, es la forma bilineal de la energía de deformación elástica. Obsérvese que la funcional

$$Q(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - \int_B \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dv$$

$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(B)$ es una funcional cuadrática y por lo tanto, diferenciable en todo $\mathbf{H}^1(B)$. En efecto $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(B)$,

$$\langle \nabla Q(\mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle \equiv \left. \frac{dQ(\mathbf{u} + \theta \mathbf{v})}{d\theta} \right|_{\theta=0} = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \int_B \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dv$$

∇Q es el gradiente de Q y, consecuentemente, su subdiferencial univaluado, esto es

$$Q(\mathbf{v}) - Q(\mathbf{u}) \geq \langle \nabla Q(\mathbf{u}), \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(B).$$

De lo anterior, claramente toda solución de (5.19) es de (5.20).

Inversamente, si $\mathbf{u} \in \mathbf{K}$ es una solución de (5.20), $\forall \theta \in (0, 1)$, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &\leq J(\mathbf{u} + \theta(\mathbf{u}, \mathbf{v})) - J(\mathbf{u}) \\ 0 &\leq Q(\mathbf{u} + \theta(\mathbf{u}, \mathbf{v})) - Q(\mathbf{u}) + \theta[\Phi(\mathbf{v}) + \Phi(\mathbf{u}) - \Psi(\gamma \mathbf{v}) - \Psi(\gamma \mathbf{u})] \end{aligned}$$

en donde es usado la convexidad de las funcionales Φ y $\Psi \circ \gamma$. De aquí, dividiendo entre θ y pasando al límite cuando $\theta \rightarrow 0$, se concluye que la inecuación variacional (5.19) es satisfecha.

6.- DISCRETIZACIÓN DEL MODELO FÍSICO Y APROXIMACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS

6.1-Método de Elementos Finitos.

Como se ha visto, una ecuación diferencial y sus condiciones sobre la frontera se puede expresar equivalentemente por un problema de minimización

$$\text{Encuentre } \mathbf{u} \in \mathbf{K}: J(\mathbf{u}) \leq J(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in \mathbf{K}$$

donde \mathbf{K} es el conjunto de campos de desplazamientos cinemáticamente admisibles y $J: \mathbf{K} \rightarrow \mathcal{R}$ es una funcional que representa la energía potencial del sistema. El conjunto \mathbf{K} es de dimensión infinita, sus elementos \mathbf{v} son una cantidad que varía continuamente en la región de definición del problema y es compatible con las condiciones de frontera y en general no se conoce la solución exacta del problema.

El método de elementos finitos es una técnica para la solución numérica de ecuaciones diferenciales que consiste en obtener a partir del problema continuo un *problema discreto* con solución. El proceso de discretización utilizando elementos finitos consiste en reemplazar \mathbf{K} por un subconjunto \mathbf{K}_h de dimensión finita. Esto conduce a un problema de minimización de dimensión finita

$$\text{Encuentre } \mathbf{u}_h \in \mathbf{K}_h: J(\mathbf{u}_h) \leq J(\mathbf{v}_h), \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h$$

que, como se verá más adelante, origina un sistema de ecuaciones lineales o no lineales, cuya solución aproximada \mathbf{u}_h puede ser encontrada por métodos numéricos. Una característica especial del método de elementos finitos es que los elementos de \mathbf{K}_h constan de funciones polinomiales por segmentos definidas en el interior de los elementos finitos.

6.2- Discretización del Modelo Físico.

Se procederá ahora a establecer la discretización del problema de minimización (5.19). Para esto considérese a $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{H}^1(\Omega)$, $h>0$, una familia de subespacios de dimensión finita m_h , tal que la dimensión del espacio $m_h \rightarrow \infty$, conforme $h \rightarrow 0$. También sean $\mathbf{K}_h \subset \mathbf{V}_h$ una familia de subconjuntos convexos que aproximan los subconjuntos convexos cerrados del campo primal admisible \mathbf{K} . Entonces, la aproximación interna¹ o familia de problemas discretos de la solución del problema de minimización de Euler (5.19) es

$$\text{Dado } \mathbf{b} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \text{ encuentre } \mathbf{u}_h \in \mathbf{K}_h, \text{ tal que}$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{C}[\hat{\nabla} \mathbf{u}_h] \cdot \hat{\nabla}(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) dV - \int_{\partial \Omega} \bar{\mathbf{p}} \cdot (\gamma \mathbf{v}_h - \gamma \mathbf{u}_h) da \geq \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot (\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) dV \quad (6.1)$$

¹Cuando una aproximación $\{\mathbf{V}_h, \mathbf{K}_h\}_{h>0}$ de $\{\mathbf{H}^1(\Omega), \mathbf{K}\}$ cumple con la inclusión $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{H}^1(\Omega)$, $\forall h > 0$, se dice que $\{\mathbf{V}_h, \mathbf{K}_h\}_{h>0}$ es una aproximación interna (Temam, 1970; Glowinski et al, 1976).

APROXIMACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS

Estableciendo ahora el espacio de dimensión finita \mathbf{V}_h en términos de un conjunto de funciones base $\{\varphi_i\}_{i=1}^{m_h}$

$$\mathbf{V}_h = \text{generado}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{m_h}\} \subset \mathbf{H}^1(\Omega) \quad (6.2)$$

\mathbf{u}_h y \mathbf{v}_h se pueden expresar como las combinaciones lineales $\mathbf{u}_h = \sum_{i=1}^{m_h} \alpha_i \varphi_i$, $\mathbf{v}_h = \sum_{j=1}^{m_h} \beta_j \varphi_j$, donde $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m_h})$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{m_h})$, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathcal{R}^{m_h}$ son los vectores coordenados relativos a la base (6.1). De lo anterior, se deriva la siguiente versión del problema discreto

$$\begin{aligned} &\text{Encuentre } \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{K}^{m_h} \\ &\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}) - \mathbf{p} \cdot (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}) \geq \mathbf{b} \cdot (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}), \quad \forall \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{K}^{m_h} \end{aligned} \quad (6.3)$$

donde la matriz \mathbf{A} y los vectores \mathbf{p} y \mathbf{b} están dados por $A_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{C}[\hat{\nabla} \varphi_i] \cdot \hat{\nabla} \varphi_j dv$, $p_j = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{p}} \cdot \gamma \varphi_j da$ y

$b_j = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \varphi_j dv$, $i, j = 1, 2, \dots, m_h$, respectivamente. \mathbf{K}^{m_h} es la versión \mathcal{R}^{m_h} de \mathbf{K}_h . La matriz \mathbf{A} generalmente se le denomina la matriz de rigideces y la suma de los vectores \mathbf{b} y \mathbf{p} el vector carga.

6.3- Aproximación por Elementos Finitos.

Introduciendo una partición del dominio Ω (Fig. 6.1) en elementos geométricos sencillos o elementos finitos² E_k , tales que

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^N E_k, \quad E_k \cap E_l = \emptyset, \quad k \neq l$$

donde E_k indica el interior de los elementos E_k . Definiendo ahora la familia aproximante del campo primal de la siguiente manera:

$$\mathbf{V}_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in \mathcal{C}^0(\Omega) : \mathbf{v}_h|_{E_j} \in P_{2n}(E_j), j = 1, 2, \dots, N \right\},$$

²El dominio es subdividido en poligonos o poliedros regulares, usualmente triángulos y rectángulos o tetraedros y hexaedros, con grados de libertad en los vértices (los parámetros nodales que gobiernan la formulación del problema e.g. presión, velocidad, desplazamiento, etc.) y eventualmente grados de libertad en puntos sobre lados o aristas y puntos internos. El espacio de elementos finitos más sencillo consiste de elementos triangulares con grados de libertad en los vértices y son los más usados en la práctica para resolver problemas de mecánica del medio continuo.

APROXIMACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS

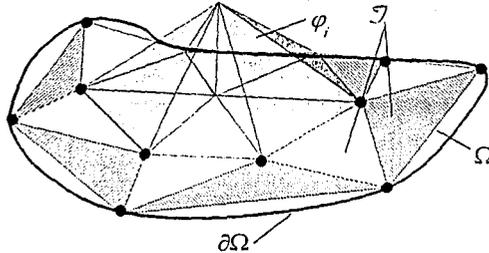


Figura 6.1. Discretización de una región Ω mediante elementos finitos geométricos triangulares rectos (triangulación \mathcal{T}). La selección de este tipo de elementos finitos puede ocasionar que la geometría aproximada de la frontera $\partial\Omega$ resulte poligonal en lugar de curva. φ_i es la interpretación geométrica del tipo más sencillo de las funciones base.

Esto significa que las funciones base que componen a V_h son globalmente continuas, constituidas por segmentos polinomiales definidos en el interior de los elementos finitos³. Las funciones base están definidas de la siguiente manera sobre los puntos nodales a_i ,

$$\varphi_i(a_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, m_h$$

Con esto se concluye la discretización del modelo físico.

Considérese ahora el problema de calcular la integral de una función G sobre un dominio real Ω con una partición de elementos finitos. Obsérvese primero que los elementos finitos de la partición E_α pueden ser generados por un elemento finito de referencia \hat{E} a través de una serie de funciones de deformación $F_\alpha: \hat{E} \rightarrow E_\alpha: \hat{p} \rightarrow x = F_\alpha(\hat{p}) \in E_\alpha$, $\alpha=1, 2, \dots, N$ (Fig. 6.2). Entonces la integral de G sobre el dominio Ω se puede expresar en forma equivalente (Alduncin y Carrera, 1987):

$$\int_{\Omega} G d\Omega = \sum_{\alpha=1}^N \int_{E_\alpha} G dE = \sum_{\alpha=1}^N \int_{\hat{E}} G_\alpha \det \nabla F_\alpha d\hat{E},$$

donde $G_\alpha = G(F_\alpha(\hat{p}))$ es la descripción material (de referencia) del campo espacial G (en la configuración deformada) y $\det \nabla F_\alpha$ es el determinante del gradiente F_α , la medida del cambio de escala.

³En términos generales, la selección del espacio de elementos finitos y el grado n de los polinomios depende de las propiedades de regularidad de la solución, de la precisión buscada y de los recursos de cómputo disponibles para calcular la solución.

De manera análoga, se tiene la siguiente expresión para calcular la integral de una función B definida sobre una parte $\partial\Omega_k$ de la frontera de Ω (Alduncin y Carrera, 1987)

$$\int_{\partial\Omega_k} B \mathbf{m} \, d\Omega = \sum_{\alpha=1}^N \int_{\partial E_\alpha \cap \partial\Omega_k} B_m \det \nabla F_\alpha^{-T} \mathbf{n} \, d\hat{E}$$

donde \mathbf{m} y \mathbf{n} son los campos vectoriales unitarios normales a $\partial\Omega_k$ y $\partial\hat{E}$, respectivamente.

Otro resultado de la teoría de la deformación es el siguiente: la descripción material del gradiente de un campo escalar espacial χ , definido sobre E_α , esta dado por $(\nabla\chi)_m = (\nabla F_\alpha^{-1})^T \nabla\chi_m$, donde $F_\alpha^{-1}: E_\alpha \rightarrow \hat{E}$ es la función inversa de la función de deformación F_α .

Aplicando los resultados anteriores a los términos de la expresión (6.3), se obtiene

$$A_{ij} = \sum_{\alpha=1}^N \int_{\hat{E}} \mathbf{c} \left[\nabla(F_\alpha^i)^{-T} \hat{\nabla}\varphi_m \right] \cdot \nabla(F_\alpha^j)^{-T} \hat{\nabla}\varphi_m \det \nabla F_\alpha \, d\hat{E} \quad (6.4)$$

$$b_j = \sum_{\alpha=1}^N \int_{\hat{E}} \mathbf{b}_m \cdot \varphi_m \det \nabla F_\alpha^j \, d\hat{E} \quad (6.5)$$

$$p_j = \sum_{\alpha=1}^N \int_{\partial E_\alpha \cap \Omega_p} \bar{\mathbf{p}} \cdot \gamma \varphi_m \det \nabla F_\alpha^j \nabla(F_\alpha^j)^{-T} \mathbf{n} \, da \quad (6.6)$$

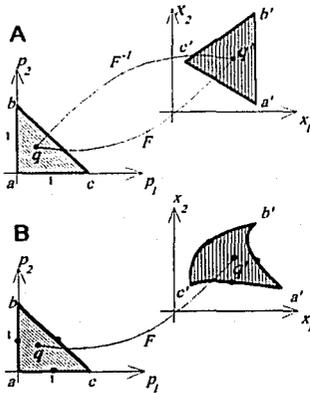


Figura 6.2. (A) Mapeo de un elemento finito de referencia en los elementos de una malla de elementos finitos a través de una función de deformación F . (B) Se puede realizar mapeo en elementos curvos si se introducen nodos extras (según Johnson, 1990).

De esta manera sólo es necesario conocer las funciones de deformación F_α^j , su gradiente ∇F_α^j , y una función de interpolación global φ_m en el elemento finito de referencia. Esta técnica es muy importante desde el punto de vista práctico, ya que el cómputo directo de la matriz de rigideces puede consumir un tiempo considerable.

6.3- Algoritmo de resolución del modelo discreto.

El método para la resolución numérica de sistemas de ecuaciones de la aproximación por elemento finito depende de la linealidad del problema. En problemas lineales (como es este) la aproximación por elementos finitos origina un sistema de ecuaciones lineales de la forma $\mathbf{A}\xi = \eta$, \mathbf{A} simétrica y positiva definida. Este sistema puede ser resuelto por *métodos directos*, o métodos basados en eliminación gaussiana, y *algoritmos de minimización*, o métodos iterativos.

APROXIMACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS

como el método del gradiente y gradiente conjugado (Press et. al, 1986).

La no linealidad de un problema se caracteriza por la presencia de un subdiferencial multivaluado o no lineal (Alduncin, 1991). En problemas no lineales el método de elementos finitos conduce a encontrar la solución de un sistema de ecuaciones no lineales o la solución de sistemas de ecuaciones acopladas. Estos son resueltos por algoritmos iterativos.

Típicamente un programa de elementos finitos consta de 3 partes: i) pre-procesador, ii) procesador y iii) post-procesador. El pre-procesador realiza las siguientes tareas: a) entrada de datos \mathbf{b} , \mathbf{p} , \mathbf{C} , Ω , etc. b) construcción de la malla de elementos finitos y c) computación de los elementos de la matriz de rigideces y el vector carga. El procesador consta de un conjunto de algoritmos para la resolución del sistema de ecuaciones en simple o doble precisión: *Cholesky*, *Crout*, *Gauss*, etc. En el post-procesado se despliegan gráficamente los resultados y se realiza el cálculo numérico de otros campos vectoriales y escalares. La codificación de éste tipo de programas es una tarea que consume mucho tiempo y se puede ahorrar mucho trabajo utilizando software ya existente, con la ventaja de que la fuente está depurada y optimizada.

Para la resolución de los problemas formulados en ésta tesis se utilizó el paquete de elementos finitos de propósito general **MODULEF**, desarrollado en el INRIA (*Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique*) en Francia. **MODULEF** es una biblioteca extensiva de subrutinas y funciones de elementos finitos, en lenguaje FORTRAN 77, que pueden utilizarse, ensambladas y compiladas en módulos con orientación específica (conversacionales) o ligarse a programas desarrollados independientemente. El código de las bibliotecas tienen una estructura modular, clara documentación y acceso a los códigos fuentes.

La plataforma de computo en la que está instalado **MODULEF** es una estación de trabajo SUN-IPC con 16 MB de RAM y sistema operativo *UNIX*, además **MODULEF** requiere de un ambiente gráfico para el despliegue de resultados como *Open Windows* o *Sun View*.

7. RESULTADOS DE LA EXPERIMENTACIÓN NUMÉRICA

7.1.- Desplazamientos desde el interior de la plataforma

Datos del Modelo.

Las Figuras 7.1 a 7.3 y las tablas 7.1-7.3 muestran la geometría de la frontera del modelo de elementos finitos, las condiciones sobre esta y los parámetros materiales utilizados en el modelo. Sobre la frontera superior se prescribe una presión litostática constante, equivalente al sepultamiento de la plataforma carbonatada bajo 500 m roca con una densidad de 3000 kg/m³.

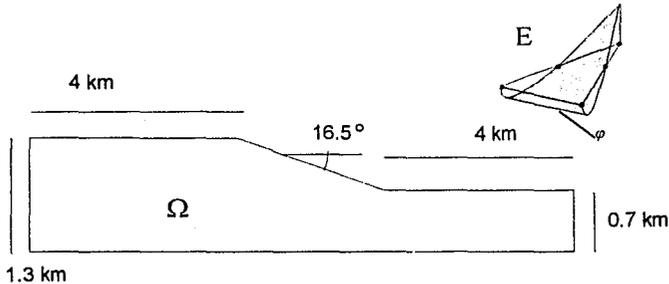


Figura 7.1. Región de definición del modelo de elementos finitos. Las dimensiones están basadas en los datos de la plataforma carbonatada Faja de Oro en la región de Poza Rica Veracruz, México, tomados de Enos (1977)

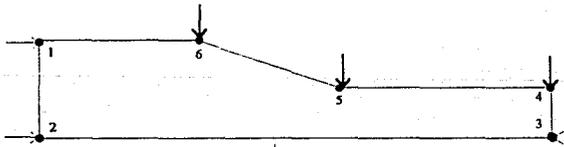


Figura 7.2. Puntos que definen la frontera de la región de definición del modelo. Las condiciones de frontera a que cada nodo punto esta sujeto están dadas en la tabla 7.1. La presión sobre la frontera superior equivale a la carga de una columna de roca de 500 m

RESULTADOS DE LA EXPERIMENTACIÓN NUMÉRICA

Punto	Coordenadas		Condiciones de frontera			
	x m	y m	Desplazamientos m		Tracciones N/m ²	
			x	y	x	y
1	0.0	1300.0	50.0	0.0		
2	0.0	0.0	50.0	0.0		
3	10000.0	0.0	0.0	0.0		
4	10000.0	700.0			0.0	-1.5×10 ⁷
5	6000.0	700.0			0.0	-1.5×10 ⁷
6	4000.0	1300.0			0.0	-1.5×10 ⁷

Tabla 7.1. Datos de los puntos frontera (Fig. 7.1) y condiciones de frontera que actúan sobre estos, utilizados para construir el modelo de elementos finitos.

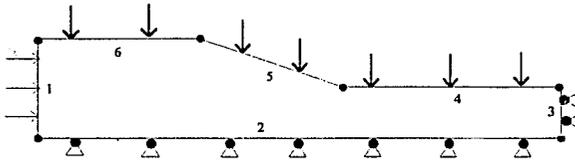


Figura 7.3. Líneas que forman la frontera geométrica del modelo de elementos finitos. Las condiciones sobre estas se encuentran especificadas en la Tabla 7.11

Número	Puntos que une	Condiciones de frontera			
		Desplazamientos m		Tracciones N/m ²	
		x	y	x	y
1	1-2	50.0	0.0		
2	2-3	0.0	0.0		
3	3-4	0.0	0.0		
4	4-5			0.0	-1.5×10 ⁷
5	5-6			0.0	-1.5×10 ⁷
6	6-1			0.0	-1.5×10 ⁷

Tabla 7.11. Condiciones sobre las líneas frontera (Fig. 7.2) del modelo elementos finitos.

RESULTADOS DE LA EXPERIMENTACIÓN NUMÉRICA

Constantes materiales			
E	65×10^9	N/m ²	Módulo de elasticidad
ν	0.35		Relación de Poisson
ρ	2660.0	kg/m ³	Densidad de las calizas
g	9.81	m/s ²	Aceleración gravitacional
S_0	3.54×10^7	N/m ²	Resistencia al corte bajo presión atmosférica
k	0.75		Fricción interna

Tabla 7.III. Resumen de las propiedades materiales de las calizas, utilizadas en el modelo de elementos finitos. Ver capítulos precedentes (tomados de *Suppe*, 1985 y *Jaeger*, 1969)

La discretización por elementos finitos consta de 1214 triángulos rectos lagrangianos, con una dimensión máxima promedio de 200 m. Sobre los vértices de los triángulos están definidos 2 grados de libertad (desplazamientos en cada dirección cartesiana). Sobre los puntos intermedios de cada lado se ha introducido un nodo extra sobre los cuales a su vez se han definido 2 grados de libertad. Esto permite definir funciones bases cuadráticas por segmentos sobre el soporte de las funciones bases (Fig. 7.1).

Campo de desplazamiento.

Las componentes horizontal y vertical del campo de desplazamiento (Fig. 7.4) se muestran en la Figura 7.4 y 7.5. En estas gráficas están contorneadas las isopletas (isolinéas) de cada una de las componentes del desplazamiento. La gama de colores varía del rojo (máximo) al azul (mínimo).

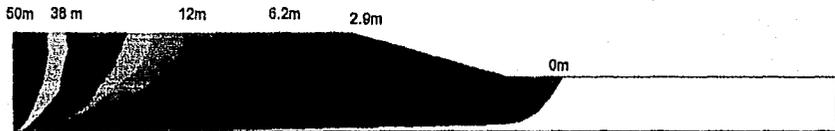
La componente en x del campo de desplazamiento tiene un máximo en el interior de la plataforma por efecto de la condición de frontera impuesta. El campo desplazamientos es amortiguado elásticamente por el medio, sin embargo, debido a que la base esta fija, aparece un gradiente positivo en la dirección vertical, induciéndose un cortante o cizalla simple (Fig. 7.4). Los desplazamientos se atenúan en una zona que comprende del interior de la plataforma al pie del talud, aproximadamente. Fuera de esta zona no existen desplazamientos con componente horizontal. Esto ultimo indica que la cuenca, para este modelo, solo esta sujeta a compresión vertical producto de la carga litoestática, por lo que los esfuerzos compresivos horizontales, causados por los desplazamientos sobre el interior de la plataforma, no afectan a la cuenca.

La componente en y del campo de desplazamientos (Fig. 7.5) muestra una mayor variación en su distribución que la componente horizontal. El campo tiene un máximo cercano a la frontera lateral del interior de plataforma (en rojo, a unos 800 m), originando un levantamiento de ≈ 12 m por ≈ 1.5 Km sobre la frontera superior del interior de plataforma (Fig. 7.5). En una posición similar pero sobre la base de la plataforma se presenta un mínimo de ≈ -1.5 m. A partir de mínimo, una serie de mínimos relativos con valores entre -1.5 y -0.74 m, se alinean en dirección hacia el talud de la plataforma (Fig. 7.5). La isopleta () corre del borde de plataforma hacia el interior y hacia la base de la plataforma con una inclinación similar a la que tendría el limite superior del cinturón de facies arrecifal.

Dado que la cuenca solo soporta compresión vertical, las isopletas son horizontales con valores negativos, indicando que la cuenca está sujeta a compactación.

La gráfica 7.6 muestra el comportamiento $\hat{\nabla}u_{yy}$ (ϵ_{yy} en algunas notaciones). Esta gráfica resalta las porciones de la plataforma que tienen una mayor variación de desplazamiento en la dirección y

Componente horizontal del campo de desplazamientos



Componente vertical del campo de desplazamientos

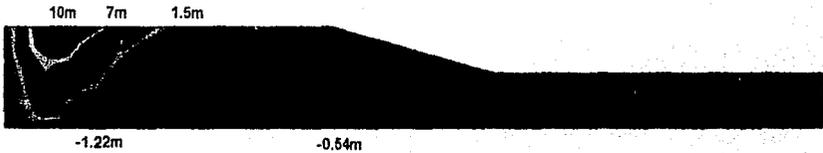


Figura 7.4. (Arriba) Componente horizontal del campo de desplazamientos resultado del modelo de elementos finitos. La gama de colores varía del rojo (máximo) al azul (mínimo).

Figura 7.5. (Abajo) Componente vertical del campo de desplazamientos resultado del modelo de elementos finitos. La gama de colores varía del rojo (máximo) al azul (mínimo).

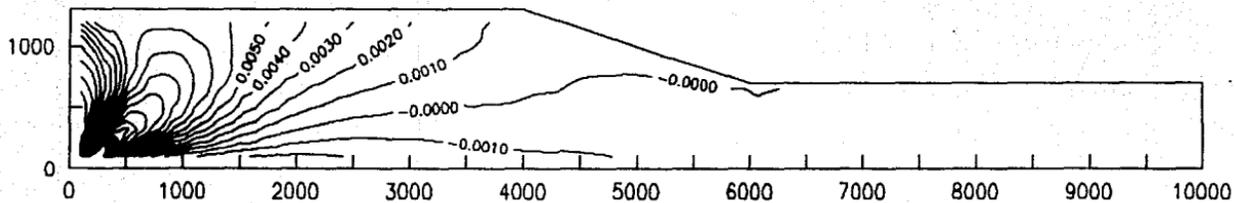


FIGURA 7.6.

Componente vertical del gradiente de desplazamientos. La zona por debajo de la isopleta 0.0 está en contracción y la superior bajo extensión.

RESULTADOS DE LA EXPERIMENTACIÓN NUMÉRICA

La región basal del interior de la plataforma tiene un máximo y un mínimo muy cercanos entre sí y se distinguen dos zonas: una porción con valores positivos que se extiende hacia la frontera lateral y frontera superior del interior de la plataforma y una zona con valores negativos que se extiende de la base del interior de la plataforma hacia el talud y cuenca. Las áreas con valores positivos corresponden a zonas en extensión y las valores negativos corresponden a zonas bajo contracción. El mínimo en $\hat{V}u_{1,2}$ es correlacionable con el mínimo en desplazamientos verticales, mientras que el máximo indica que la base en el interior de la plataforma experimenta una mayor extensión que la porción superior (máximo en desplazamientos).

Campo de Esfuerzos.

Debido a que la formulación variacional del modelo esta en función del campo de desplazamientos, el campo de esfuerzos y las gráficas aquí discutidas (7.7-7.11) se han obtenido por procesamiento numerico aplicando las relaciones de esfuerzo-distorsión de la elasticidad.

Las Figuras 7.7 y 7.8 muestran la orientación de los esfuerzos principales máximo y mínimo σ_1 y σ_2 . En el interior de la plataforma el esfuerzo principal máximo σ_1 es horizontal en los niveles superiores y tiende a rotarse a hacia la base de la plataforma y la frontera del interior de plataforma (Fig. 7.7 y 7.8). En el talud de la plataforma el esfuerzo máximo se orienta paralelo a la inclinación del talud, adquiriendo una mayor inclinación hacia la base de la plataforma (Fig. 7.7 y 7.8). En la cuenca, el esfuerzo principal máximo, en la parte superior cercana al pie del talud, se reorienta subhorizontal, pero aumenta su inclinación hacia la base. Hacia la parte distal de la cuenca el esfuerzo principal máximo es vertical o cercano a la vertical (Fig. 7.8).

La orientación del esfuerzo principal mínimo σ_2 muestra poca variación en el interior de la plataforma y talud (Fig. 7.7-7.8): tiene una inclinación alta en la base y se torna subvertical hacia la frontera superior. En la parte distal de la cuenca el esfuerzo principal mínimo cambia de esta tendencia a una orientación subhorizontal.

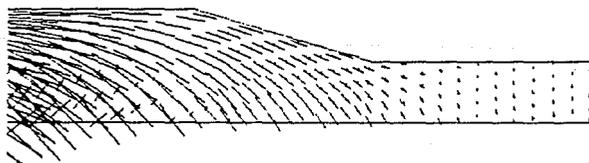


Figura 7.7. Orientación de los esfuerzos principales máximo y mínimo para el modelo de elementos finitos de una plataforma carbonatada. Desplazamiento prescritos desde el interior de plataforma

Esfuerzo principal máximo

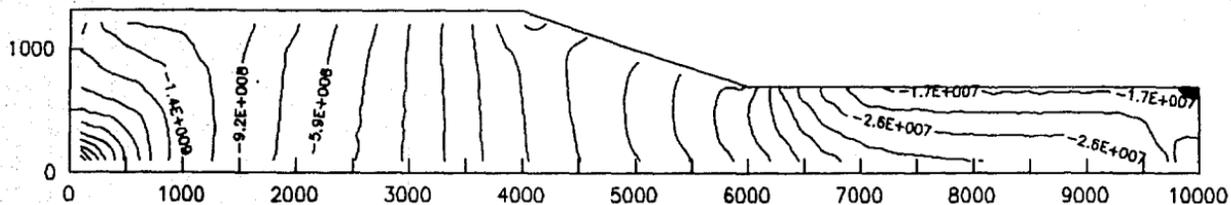


Figura 7.9.

Distribución del esfuerzo principal máximo. Los valores entre las isopletas cambian con un factor de 1.25, evitando de esta manera que la gráfica se sature.

Esfuerzo principal mínimo

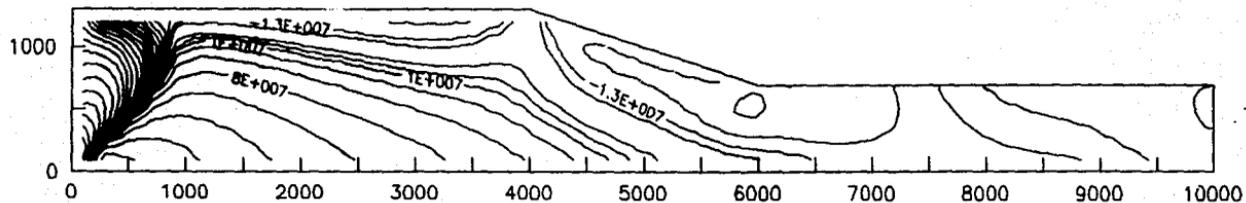


Figura 7.10.

Distribución del esfuerzo principal mínimo. Los valores cambian de isopleta a isopleta con un factor de 1.5. La base del interior de la plataforma y el talud están en distensión y los niveles superficiales del interior de la plataforma y la cuenca bajo compresión. Obsérvese el alto en el margen y pié del talud.

Esfuerzo cortante maximo

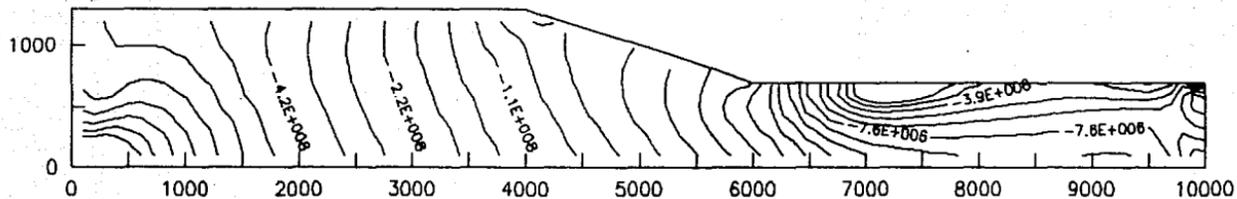


Figura 7.11.

Distribución del esfuerzo cortante máximo. Los valores varían de contorno a contorno con un factor de 1.5. Obsérvese que esta gráfica y la del esfuerzo principal máximo tienen gran similitud.

Zonas inestables

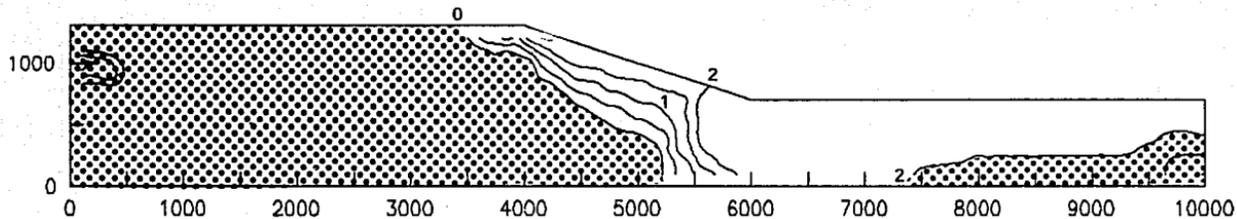


Figura 7.13.

Aumento de las áreas inestables de acuerdo al criterio de Mohr-Coulomb en función del factor de sobrepresión.

RESULTADOS DE LA EXPERIMENTACIÓN NUMÉRICA

Fracturamiento y presión de poro.

La Figura 7.12 muestra las regiones inestables, porciones donde se presenta

$$\begin{aligned} \tau &= \sigma_n \cdot t \\ |\tau| &\geq S_0 + k(\sigma_n - \lambda p) & \sigma_n &= \sigma_n \cdot n \\ p &= \lambda \rho_w g h \end{aligned}$$

y por tanto susceptibles de estar fracturadas de acuerdo al criterio de Mohr-Coulomb. La figura muestra las regiones inestables para 3 casos: *i*) sin presión de fluidos de poro ($\lambda=0.0$), *ii*) presión de poro hidrostática ($\lambda=1.0$) y *iii*) presión de poro considerando un factor constante de sobrecarga $\lambda=2.0$. El segundo caso corresponde a una situación de poros interconectados y el tercero a un sistema cerrado donde la presión de poro se incrementa uniformemente e independiente del campo de esfuerzos. Aplicando el criterio de Mohr-Coulomb sin presión de poro ($\lambda=0$), solo se fractura el interior de la plataforma y parte del cinturón de facies arrecifales (Fig. 7.12). En los niveles someros solo el interior de la plataforma se encontraría fracturado mientras que hacia la base la zona inestable se extiende hacia la zona del talud, tomando la frontera de la zona una inclinación subparalela al talud. Para $\lambda=1.0$, la zona inestable aumenta aproximadamente 20%. En los niveles someros llega hasta el borde del talud. La región fracturada exhibe la misma tendencia, se inclina paralelo al talud con un pequeño escalón en la base.

Aplicando un factor de sobrecarga $\lambda=2.0$ a la presión de poro ($p=\lambda\rho_wgh$), la zona inestable aumenta hasta alcanzar el pie del talud, pero ahora se extiende hacia la base con una inclinación contraria al talud (Fig. 7.12).

La Figura 7.13 muestra el incremento de las zonas inestables en función de λ , independiente del campo de esfuerzos, apreciándose el control de τ sobre el incremento del área (compárese con la Figura 7.13).



Criterios de fracturamiento de Mohr-Coulomb:

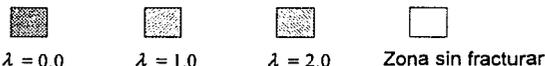


Figura 7.12. Áreas inestables del modelo de la plataforma carbonatada para varios factores de sobrecarga. $\lambda=0$ no existe presión de poro, $\lambda=1$ corresponde a presión de poro hidrostática y $\lambda=2$ sobrecarga uniforme de dos veces la presión hidrostática.

RESULTADOS DE LA EXPERIMENTACIÓN NUMÉRICA

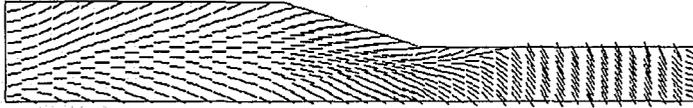


Figura 7.14. Orientación de los planos de fracturas de acuerdo al criterio de Mohr-Coulomb sin discriminar las zonas inestables

La Figura 7.14, muestra la orientación de las fracturas potenciales con desplazamiento relativo lateral-derecho dentro de la plataforma, sin discriminar las áreas inestables. En esta figura se ha omitido el sistema conjugado de fracturas, con sentido de desplazamiento lateral-izquierdo, ya que tienen una inclinación subvertical. Las fracturas del interior de la plataforma, en niveles intermedios y someros, tienen orientaciones entre 20 y 25° (Fig. 7.14 y 7.15) que se suavizan hacia el talud y pie del talud (10 - 5°). Hacia la base del interior de la plataforma y talud se puede identificar un grupo de fracturas con orientación y desplazamiento hacia la base. El límite entre estos dos sistemas de fracturas corre del pie del talud al interior de la cuenca, hacia la zona de máxima concentración de esfuerzos. En el interior de la cuenca, el ángulo de las fracturas tiene un comportamiento sobre todo subvertical, pasando de 0 a 16° y luego a -55° hacia la parte distal de la cuenca (fallas normales).

Los sistemas de fallas potenciales a desarrollarse dentro del medio, se muestran en la Figura 7.15. Existen dos sistemas: un cinturón de fallas con vergencia hacia la base de plataforma y otro con vergencia contraria, hacia los niveles superficiales de la plataforma. Estos sistemas de fallas se desprenden y ramifican de lo que podría ser un despegue paralelo a la estratificación, dentro de los carbonatos. En este último, dos subsistemas de fallas se pueden identificar: un sistema de fallas curvas con ángulos terminales altos (25 - 32°), localizados en el interior de la plataforma, y otro subsistema con ángulos terminales bajos (0 - 16°) en el talud de la plataforma (Fig. 7.15).

Tracciones basales.

En la Figura 7.16 está graficado el comportamiento de la magnitud de las tracciones basales normal y tangencial y la máxima tracción tangencial esperada de la relación de Coulomb. En general en

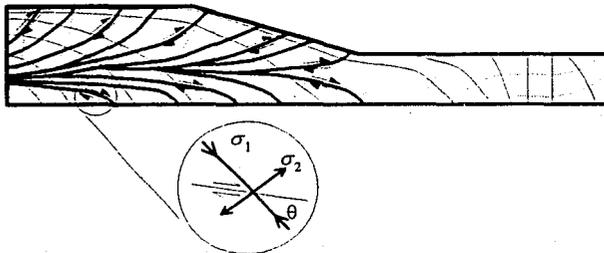


Figura 7.15. Geometría de los potenciales planos de fallas dentro de la plataforma carbonatada. Sólo se muestra el sistema de fallas con mayor probabilidad de desarrollarse. En el círculo se muestra el criterio para discriminar el sentido del desplazamiento a lo largo de las fallas.

Angulo de las fracturas respecto a la horizontal

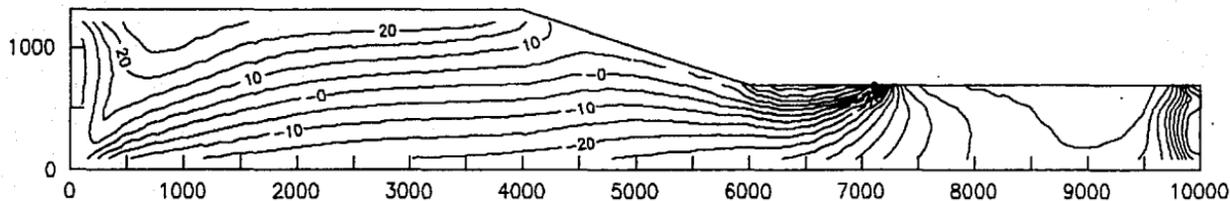


Figura 7.15.

Contorneo del ángulo de fracturamiento, sin discriminar las áreas inestables. La isopleta 0 define un despegue dentro de los carbonatos con geometría de "ramp-flat-ramp".

RESULTADOS DE LA EXPERIMENTACIÓN NUMÉRICA

los primeros 4700 m la magnitud del esfuerzo tangencial rebasa a la resistencia friccional de Coulomb y la magnitud de las tracciones normales, lo que sugiere que la base es mecánicamente inestable dentro de éste intervalo. Después de esta distancia, la tracción normal es mayor que la tracción tangencial y tiene valores similares a los de la resistencia friccional de Coulomb. La presencia de los picos en las fuerzas normal y tangencial, se debe al hecho de que parte del sistema esta en tensión, y que los picos corresponden al mínimo en el esfuerzo principal mínimo (Fig. 7.16)

Comparación de los resultados del modelado con observaciones

Un resultado que se puede interpretar, de la distribución de esfuerzos y la orientación de las potenciales fracturas del primer caso, es la formación de una falla en la zona de transición entre cuenca y plataforma de geometría "Flat-Ramp-Flat". Es decir, se puede formar un despegue subhorizontal dentro de los carbonatos a pesar de que se trata de un medio homogéneo. Esto parece estar apoyado por la geometría de la cabalgadura El Doctor (Fig. 7.18) que forma en el afloramiento transversal del Río Moctezuma una rampa de 24° sobre una distancia de 2.4 Km y se vuelve horizontal al nivel del río sobre varios kilómetros (Palacios, 1980). Se desconoce el nivel estratigráfico que corta el segmento horizontal, sin embargo, corre dentro de los carbonatos de la plataforma.

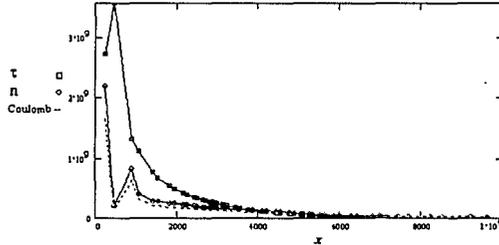


Figura 7.16. Comportamiento de las tracciones normales, tangencial y máxima de fricción de Coulomb esperada.

Banco carbonatado El Doctor

Cabalgadura El Doctor

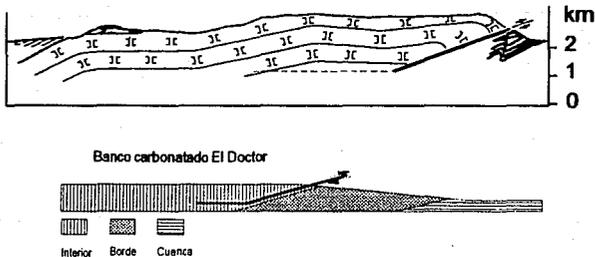


Figura 7.17. Sección estructural del borde occidental del banco El Doctor. La geometría del frente de la falla (ramp) está bien documentado (línea sólida) pero se desconoce el nivel estratigráfico en el que corre el segmento horizontal de la falla (flat) (según Suter, 1987, modificado, basado en datos de Placios-Nieto (1982)

7.2.- Desplazamientos desde la cuenca

Datos del Modelo.

La geometría de la región, el tipo de triangulación, las funciones bases, el número de elementos finitos y parámetros materiales son los mismos que para el caso anterior. Las nuevas condiciones de frontera se muestran en las tablas 7.IV y 7.V.

Punto	Coordenadas		Condiciones de frontera			
	x	y	Desplazamientos		Tracciones	
	m	m	m	m	N/m ²	N/m ²
	x	y	x	y	x	y
1	0.0	1300.0			0.0	-1.5×10 ⁷
2	0.0	0.0	00.0	0.0		
3	10000.0	0.0	-50.0	0.0		
4	10000.0	700.0	-50.0	0.0		
5	6000.0	700.0			0.0	-1.5×10 ⁷
6	4000.0	1300.0			0.0	-1.5×10 ⁷

Tabla 7.IV. Datos de los puntos frontera utilizados para construir el modelo de elementos finitos, y condiciones de frontera para el caso de desplazamientos prescritos desde la cuenca. Ver Fig. 7.1 y 7.2 para detalles de la geometría de la frontera

Línea	Puntos que une	Condiciones de frontera			
		Desplazamientos		Tracciones	
		m	m	N/m ²	N/m ²
		x	y	x	y
1	1-2	0.0	0.0		
2	2-3	0.0	0.0		
3	3-4	-50.0	0.0		
4	4-5			0.0	-1.5×10 ⁷
5	5-6			0.0	-1.5×10 ⁷
6	6-1			0.0	-1.5×10 ⁷

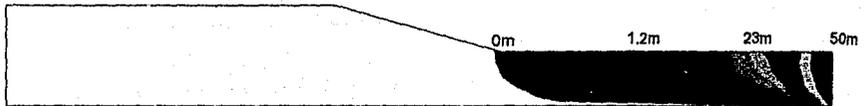
Tabla 7.V. Condiciones sobre las líneas frontera del modelo de elementos finitos para el caso de desplazamientos prescritos desde la frontera lateral de la cuenca Ver Fig. 7.1 y 7.3 para detalles de la geometría de la frontera.

La única diferencia con respecto al modelo anterior es que ahora los desplazamientos son prescritos desde la frontera lateral de la cuenca (Tabla 7.IV y 7.V)

Campo de desplazamiento.

La Figura 7.18 y la Figura 7.19 muestran la componente vertical y horizontal del campo de desplazamientos, respectivamente. Estas son obtenidas directamente del modelo de elementos finitos. La gama de colores varía del rojo (máximo) al azul oscuro (mínimo). El campo de desplazamientos es similar al caso anterior. La componente horizontal tiene un máximo sobre la frontera de la cuenca y se

Componente horizontal del campo de desplazamientos



Componente vertical del campo de desplazamientos

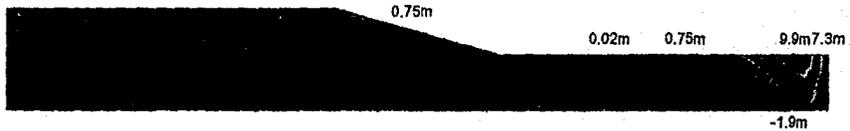


Figura 7.18. (Arriba) Componente horizontal del campo de desplazamientos resultado del modelo de elementos finitos para el caso de desplazamientos prescritos desde la cuenca. La gama de colores varía del rojo (máximo) al azul (mínimo).

Figura 7.19. (Abajo) Componente vertical del campo de desplazamientos resultado del modelo de elementos finitos para el caso de desplazamientos prescritos desde la cuenca. La gama de colores varía del rojo (máximo) al azul (mínimo).

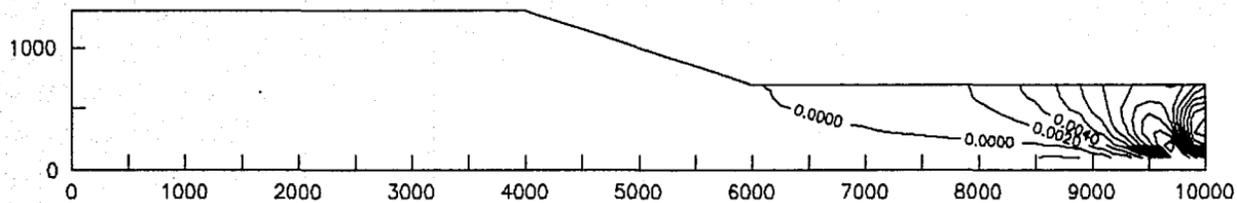


Figura 7.20.

Componente vertical del gradiente de desplazamiento. La isopleta 0 corre del pié del talud a la base del interior de la cuenca. La zona por debajo está en contracción y la superior bajo extensión.

RESULTADOS DE LA EXPERIMENTACIÓN NUMÉRICA

amortigua elásticamente hacia el pie del talud, donde finalmente el desplazamiento es nulo. Al igual que el caso anterior aparece un gradiente vertical que induce un efecto de cortante o cizalla simple (Fig. 7.18).

La componente y , también muestra un comportamiento similar al del caso anterior (Fig. 7.19). Esto indica que el efecto de la geometría de la plataforma es mínimo sobre el campo de desplazamientos.

La zona sujeta a compactación vertical abarca el interior de la plataforma y el talud donde las isopletas de la componente y son horizontales (Fig. 7.19), reduciéndose, respecto del caso anterior, la zona de influencia de la distorsión generados por los desplazamientos desde la cuenca. En el caso anterior, la zona de influencia se extiende en todo el interior de la plataforma hasta el pie del talud, mientras que en la cuenca predominan desplazamientos en sentido vertical (Fig. 7.4 y 7.5).

La gráfica del gradiente vertical del campo de desplazamientos $\hat{V}u_{22}$ (Fig. 7.20) muestra que solo una porción triangular (frontera lateral y niveles superficiales) de la cuenca está bajo extensión. El resto de la plataforma se encuentra bajo contracción.

Campo de Esfuerzos.

Las Figuras 7.21 y 7.22 muestran la orientación y trayectoria de los esfuerzos principales máximo y mínimo. En el interior de la cuenca el esfuerzo principal máximo es horizontal en los niveles superiores y tiende a rotarse hacia la base de la cuenca. En el pie del talud de la plataforma, el esfuerzo máximo se orienta subparalelo al talud, volviéndose vertical hacia el margen de la plataforma y permanece con esta orientación en todo el interior de la plataforma (Fig. 7.22).

La orientación del esfuerzo principal mínimo σ_2 en el interior de la cuenca muestra poca variación: tiene una inclinación alta en la base y se torna subvertical hacia la frontera superior. En el talud de la plataforma, el esfuerzo principal mínimo cambia de esta tendencia a una orientación subhorizontal (Fig. 7.21 y 7.22).

Las gráficas de los esfuerzos principales máximo, mínimo y cortante máximo se muestran en las Figuras 7.23 a la 7.25. El comportamiento del esfuerzo principal máximo es similar al caso anterior: se concentra en la base del interior de la cuenca (Fig. 7.23) y disminuye horizontalmente hacia el pie del talud e interior de la plataforma. Las isopletas muestran poco cambio en la dirección horizontal en todo el interior de la cuenca. En la región del talud y el interior de la plataforma el esfuerzo principal máximo se incrementa hacia la base (donde predominan los esfuerzos generados por el

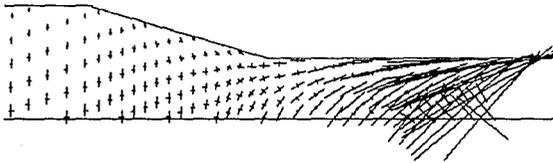


Figura 7.21. Orientación y magnitud de los esfuerzos principales máximo y mínimo. Se distinguen dos zonas con trayectoria diferentes: una en el interior de la cuenca y otra en el interior de la plataforma y parte del talud.

Esfuerzo principal máximo

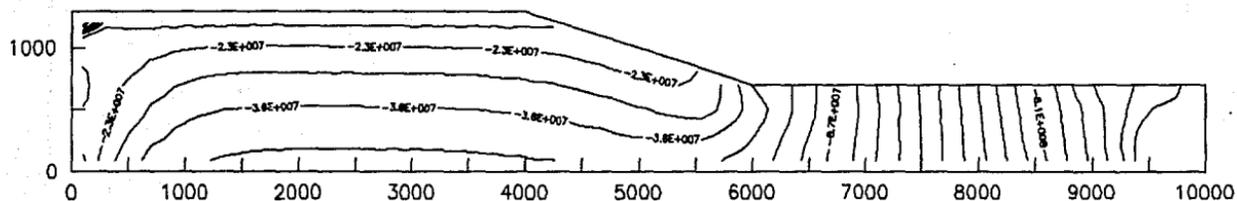


Figura 7.23.

Distribución de los valores del esfuerzo principal máximo para el caso de desplazamientos prescritos desde la frontera lateral de la cuenca. Los valores de contorno a contorno varían con un factor de 1,5.

Esfuerzo principal mínimo

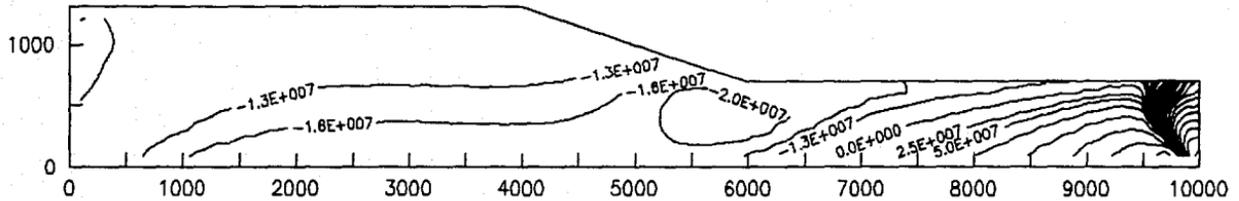


Figura 7.24.

Distribución de los valores del esfuerzo principal mínimo. Los valores varían de contorno a contorno con un factor de 1.5. La distribución es similar a la de la Figura 7.10. Obsérvese también el alto en los valores en el pie del talud.

Esfuerzo cortante máximo

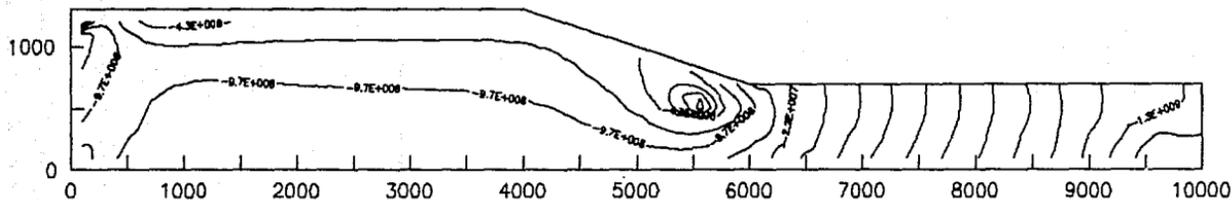


Figura 7.25.

Distribución del máximo esfuerzo cortante. Los valores varían de contorno a contorno con un factor de 1.5. La influencia de los esfuerzos principales en este campo es variable. La zona del pié del talud tiene mayor influencia del esfuerzo principal mínimo (Fig. 7.23.), mientras que en el resto, el esfuerzo principal máximo tiene una mayor influencia (Fig. 7.22.).

RESULTADOS DE LA EXPERIMENTACIÓN NUMÉRICA



Figura 7.22. Trayectoria de los esfuerzos principales máximo σ_1 (línea continua) y mínimo σ_2 (línea punteada) obtenidas de la gráfica de la orientación de los esfuerzos principales (Fig. 7.8 y 7.9). La parte distal del interior de la plataforma tiene el mismo comportamiento que el borde. Esto se debe a que en el interior de la plataforma los esfuerzos en el medio son producto del propio peso del material.

propio peso del material (ρ, gh). De esta manera los esfuerzos generados por el desplazamiento sobre la cuenca solo tienen influencia local (predominan en la cuenca únicamente).

En la gráfica del valor del esfuerzo principal mínimo (Fig. 7.24), de nuevo se distingue una zona sujeta a tensión ($\sigma_2 > 0$) y otra zona de compresión ($\sigma_2 < 0$). También se aprecia que existen un alto en valores negativos (compresión) en el pie del talud, que se extiende hacia la base e interior de la cuenca.

En la región de la cuenca, el máximo esfuerzo cortante (Fig. 7.25) muestra un comportamiento similar al de la gráfica del esfuerzo principal máximo (Fig. 7.11) debido a la gran discrepancia entre σ_1 y σ_2 en esta zona. En el pie del talud τ presenta un mínimo, esto se debe al máximo relativo que σ_2 alcanza en esta parte. En el interior de la plataforma el máximo esfuerzo cortante se incrementa hacia la base, dado que está sujeta a compresión.

Fracturamiento y presión de poro.

Las áreas inestables obtenidas con el criterio de Mohr-Coulomb para valores de λ entre 0 y 2 sólo ocupan $\frac{1}{6}$ del área de la cuenca (Fig. 7.26). El aumento en el área entre $\lambda=0$ y $\lambda=2$ es de sólo de una sexta parte, aproximadamente, y cambia de una inclinación contraria al talud a una inclinación subvertical.

Esto, aunado a la discusión del campo de desplazamientos y comportamiento de los esfuerzos (secciones precedentes), indica que los esfuerzos generados por los desplazamientos desde la cuenca decaen con un mayor gradiente que en el caso anterior.

El patrón de fracturamiento se muestra en la Figura 7.27 y nuevamente no se han discriminado las áreas inestables. En el interior de la plataforma se tiene un fracturamiento con un alto ángulo. Los dos sistemas de fracturas son igualmente favorables de desarrollarse y producir fallamiento normal. En la zona del talud predominan fracturas con esta misma tendencia. Hacia el pie del talud la orientación de las fracturas se rota, quedando en los niveles superficiales un sistema subparalelo al talud, mientras que hacia la base se tiene un sistema con orientación contraria al talud (Fig. 7.28). El sistema conjugado de fracturas para ambos casos yace subvertical. En la figura 7.28 solo se muestra las fracturas con la orientación más favorable para desarrollarse (Fig. 7.27); las fracturas conjugadas tienen un ángulo demasiado alto o contrario al desplazamiento.

Zonas inestables

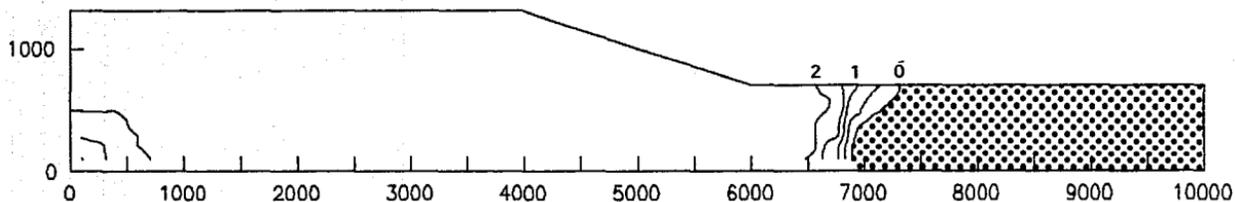


Figura 7.26.

Aumento de las áreas inestables de acuerdo al criterio de Mohr-Coulomb en función del factor de sobrepresión para el caso de desplazamientos prescritos desde la cuenca.

RESULTADOS DE LA EXPERIMENTACIÓN NUMÉRICA

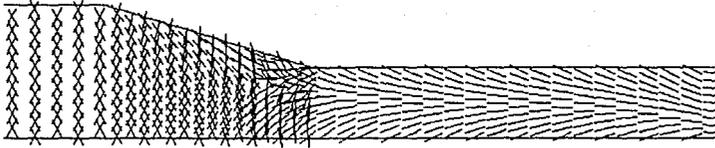


Figura 7.27. Patrón de fracturamiento obtenido de aplicar el criterio de Mohr-Coulomb, para el caso de desplazamientos prescritos desde la frontera lateral de la cuenca.

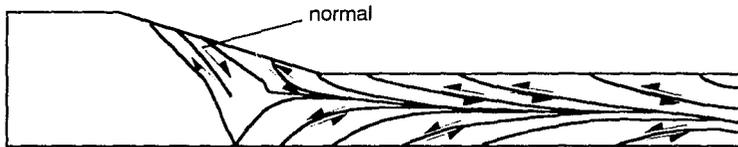


Figura 7.28. Geometría de los potenciales planos de fallas dentro de la plataforma carbonatada. En la gráfica no se han discriminado las áreas inestables.

De acuerdo a lo anterior, en la cuenca se desarrollarían dos sistemas de fallas: un cinturón de fallas con vergencia hacia la base de plataforma y otro con vergencia hacia los niveles superficiales de la cuenca. Un despegue corre, comunicando ambos sistemas, de la base de la parte distal de la cuenca hacia el pie del talud. En esta parte el fallamiento puede aprovechar el sistema de fracturas con orientación paralela al talud y afallar parte de este. Sin embargo, solo es factible que la parte más baja del talud tenga fallamiento inverso y que en el resto del talud se presente fallamiento normal. Hay que notar que en el análisis precedente no se han discriminado las áreas inestables y que ésta solo ocupa parte de la cuenca.

Tracciones basales.

En la Figura 7.29 está graficado el comportamiento de la magnitud de las tracciones basales normal y tangencial y la máxima tracción esperada de la relación de Coulomb. Entre los 0 m y 3500 m (referidos al extremo derecho) la magnitud del esfuerzo tangencial rebasa a la resistencia friccional de Coulomb y la magnitud de las tracciones normales. Fuera de este intervalo, la tracción normal es mayor que la tracción tangencial y tiene valores similares a los de la resistencia friccional de Coulomb.

Comparación de los resultados del modelado con observaciones

De igual manera que en el modelo anterior, observaciones en el margen occidental de la plataforma de Valles-San Luis Potosí apoyan los resultados obtenidos del segundo modelo. La margen occidental de esta plataforma está cortada por la Falla El Volantín y la Falla de Jiliapan (Suter, 1987) (Fig. 7.30). La Falla El Volantín sigue el margen de la Plataforma de Valles-San Luis Potosí y se extiende dentro de la Cuenca de Zimapán con un ángulo de 23° y es paralela a la inclinación del talud de la plataforma (Fig. 7.30). El alto ángulo de la falla y el margen se puede explicar por la rotación y transporte sobre la Falla Jiliapan (Suter, 1987).

RESULTADOS DE LA EXPERIMENTACIÓN NUMÉRICA

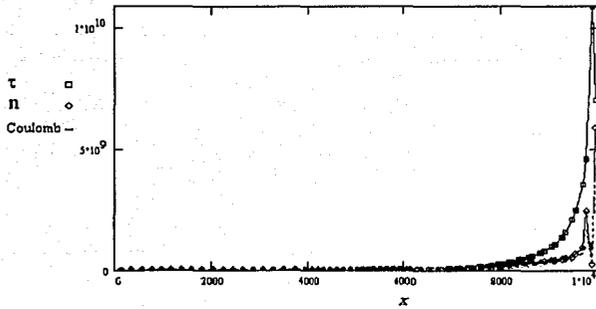


Figura 7.29. Comportamiento de la tracciones normal, tangencial y máxima de fricción de Coulomb modelada.

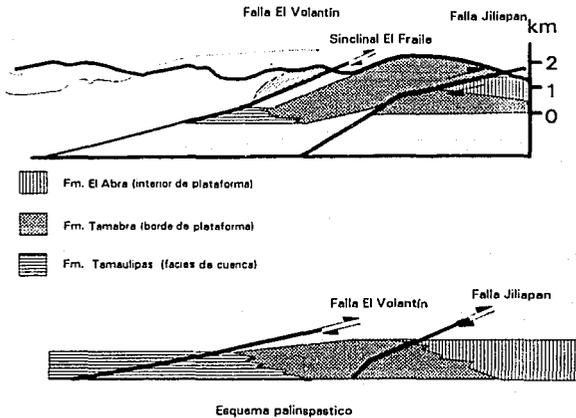


Figura 7.30. Sección estructural del borde occidental de la plataforma carbonatada de Valles-San Luis Potosí (según Suter, 1987)

8.- COMPARACIÓN CON RESULTADOS DE OTROS MODELOS

Parte de los resultados obtenidos de la experimentación numérica son similares a los de otros trabajos en los que se han aplicado otras metodologías, relaciones constitutivas y condiciones de frontera. Por ejemplo, en el trabajo de Hafner (1951), se obtiene la distribución, las trayectorias y zonas inestables mediante las funciones del esfuerzo de Airy para un bloque rectangular dadas las tracciones sobre las fronteras (Fig. 8.1); el trabajo de Müller y Hsü (1980), para un bloque rectangular elastoplástico donde se utilizan elementos finitos; Mandl y Shipman (1981), para un bloque rectangular plástico con tracciones tangenciales sobre la base y frontera superior (Fig. 8.2); Goff y Wiltshcko (1992) de metodología similar al de Hafner (1951) pero con condiciones de frontera más específicas para un bloque rectangular con presión variable sobre la frontera superior (Fig. 8.3), etc.

La trayectoria del esfuerzo principal máximo en los trabajos anteriores y este, es horizontal o ligeramente inclinada y se curva hacia la base del bloque. Esto hace, dependiendo de la inclinación de la trayectoria, que se presenten dos juegos de fracturas, una con trayectoria ascendente y otra descendente (Fig. 8.1 y 8.2).

Estos autores no discuten la distribución de los esfuerzos principales o los campos de desplazamiento, sin embargo, Müller y Hsü (1980) confirman que en los niveles basales alguno de los esfuerzos principales pueden ser tensiones.

Una diferencia con los resultados de Hafner (1951) (Fig. 8.1) es que el área inestable se extiende hacia la base del bloque. Esto se debe a la condición de frontera de base fija. Esto tiene el efecto de concentrar las tracciones basales y que el medio en esta región esté en tensión respecto a σ_2 .

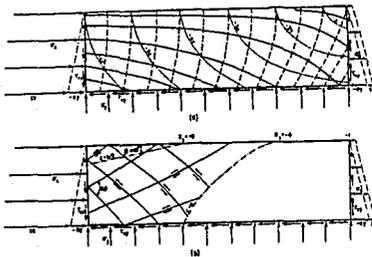


Figura 8.1 Trayectoria del esfuerzo, planos potenciales de falla y áreas inestables obtenidas por Hafner (1951) para un bloque rectangular. La distribución de los esfuerzos es obtenida a través de las funciones del esfuerzo de Airy y las condiciones de frontera son tracciones prescritas.

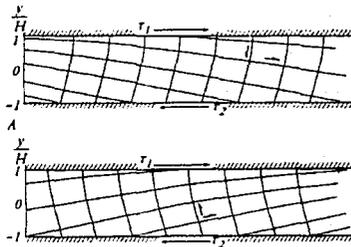


Figura 8.2. Trayectoria de los planos potenciales de falla obtenidas para un bloque plástico sujeto a tracciones tangenciales (según Mandl, 1988).

COMPARACIÓN CON OTROS RESULTADOS

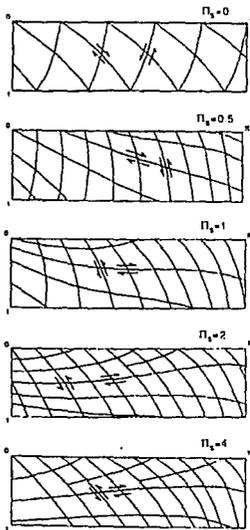


Figura 8.3. Planos de falla potenciales para un bloque rectangular con tracciones prescritas sobre las fronteras. Cada diagrama corresponde a condiciones específicas de tracciones variables sobre la frontera superior (según Goff y Wilchsko, 1992)

Hay que observar que los resultados del modelado muestran para ambos casos que el esfuerzo diferencial no se concentra en la región del talud y borde de plataforma. Incluso se requiere de un factor de sobre presión para extender la zona inestable, ≈ 2 para el primer caso y > 2 para el segundo, hasta el pic de la plataforma. Esto es contrario a las observaciones de campo que sugieren que el esfuerzo diferencial probablemente tiene un máximo en esta zona.

Sin embargo, el campo de desplazamiento, σ_1 , σ_2 y τ , generados por los desplazamientos desde el interior de la plataforma tienen una mayor extensión que para el segundo caso. Esto sugiere que la geometría de cuña del talud tiene influencia en la transición a esfuerzos gravitacionales. Aunque otra explicación a este fenómeno es que se requiere de una mayor energía para desplazar el interior de la plataforma que el interior de la cuenca.

9.- CONCLUSIONES

Se analizó la distribución de esfuerzos, el patrón de fracturamiento, la geometría de las fallas potenciales y la distribución de áreas inestables en la zona de transición de una plataforma carbonatada y una cuenca epicontinental vecina. Se utilizó un modelo elástico lineal isotrópico y el criterio de fracturamiento de Mohr-Coulomb con propiedades típicas de las calizas. Se definieron las siguientes condiciones de frontera: *i)* base de la plataforma carbonatada, base de cuenca y frontera lateral (fija), *ii)* presión prescrita en la frontera superior, correspondiente a 500 m de presión litoestática y *iii)* desplazamiento prescritos desde una de las fronteras laterales. El modelo se resolvió numéricamente por elementos finitos. Dos casos se analizaron: desplazamientos desde la frontera lateral del interior de la plataforma y desplazamientos desde la frontera lateral del interior de la cuenca.

Los resultados de la experimentación numérica son los siguientes:

1. El esfuerzo principal máximo siempre es compresivo y se distinguen dos zonas: una originada por el desplazamiento desde la frontera lateral y otra de esfuerzos gravitacionales.
2. El esfuerzo principal mínimo es distensivo en la base de plataforma para el primer caso y la base de la cuenca para el segundo. Los niveles superficiales el esfuerzo es compresivo. Existe una concentración del esfuerzo en el borde de la plataforma y el pie del talud.
3. Debido a lo anterior, el esfuerzo cortante máximo disminuye en el pie del talud y margen de la plataforma.
4. Para el primer caso el área inestable ocupa todo el interior de la plataforma hasta el borde extendiéndose hacia el interior del talud en las niveles basales. Esta área se puede extender a todo el talud si se utiliza un factor de sobrepresión de poro de $\lambda \approx 2.0$. Para el caso de desplazamientos desde la cuenca la zona inestable solo ocupa $\frac{1}{4}$ partes de la cuenca y existe poco cambio en el área en función de la sobrepresión.
5. Basados en la orientación de las fracturas obtenidas con el criterio de Mohr-Coulomb se puede interpretar un despegue intracarbonatos con geometría *Flat-Ramp-Flat* en la zona de transición entre la plataforma y la cuenca, para el caso de desplazamiento desde el interior de la plataforma. Para el segundo un patrón de fallamiento con trayectoria ascendente hacia el pie del talud. Ambos resultados están en acuerdo con observaciones de fallamiento de los márgenes de las plataformas carbonatadas fósiles de Valles-SanLuis Potosí y El Doctor en el centro-oeste de México.

Hay que observar que los resultados del modelado muestran para ambos casos que el esfuerzo diferencial no se concentra en la región del talud y borde de plataforma. Incluso se requiere de un factor de sobre presión para extender la zona inestable, ≈ 2 para el primer caso y >2 para el segundo, hasta el pie de la plataforma. Esto es contrario a las observaciones de campo que sugieren que el esfuerzo diferencial probablemente tiene un máximo en esta zona.

Sin embargo, el campo de desplazamiento, σ_1 , σ_2 y τ , generados por los desplazamientos desde el interior de la plataforma tienen una mayor extensión que para el segundo caso. Esto sugiere que la geometría de cuña del talud tiene influencia en la transición a la zona de los esfuerzos gravitacionales. Aunque otra explicación a este fenómeno es que se requiere de una mayor energía para desplazar el interior de la plataforma que el interior de la cuenca.

10.- AGRADECIMIENTOS

Agradezco, principalmente al Dr. Max Suter, quien dirigió este trabajo, por sus aportaciones y tiempo dedicado, al resto del comité asesor y sinodales por sus comentarios y revisiones a los manuscritos preliminares: Dr. Gonzalo Alduncin González, Dr. Ramon Zúñiga Dávila-Madrid, Dr. Fernando Ortega Gutiérrez, Dr. Luis Reyes Avila, Dr. Jose Manuel Espíndola Castro y Dr. Daniel Byrne.

Al Instituto de Geología, especialmente a su Director Dr. Fernando Ortega Gutiérrez y al Dr. Luis Miguel Mitre Salazar, por el apoyo logístico para eleborar este trabajo, y a la Geological Society of America que otorgó un financiamiento al autor (No. 4768-91)

Finalmente, al Club MODULEF de la UNAM que amablemente permitieron al autor el acceso al sistema y por el tiempo de procesamiento cedido.

11.-REFERENCIAS

- Alduncin , G., 1986a, Formulación subdiferencial y variacional de problemas de valores sobre la frontera: *Comunicaciones técnicas*, Instituto de Geofísica, UNAM, Serie Investigación No. 4, 43 p.
- Alduncin , G., 1987, Duality and variational principles of potential boundary value problems: *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 64, p. 469-485.
- Alduncin , G., y J. Carrera, 1987, Upwind approximations of the transport equation: *Comunicaciones técnicas*, Instituto de Geofísica, UNAM, Serie de Investigación No. 87, 24 p.
- Alduncin , G., 1989, Subdiferencial and variational formulations of boundary value problems: *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 72, p. 173-186.
- Alduncin , G., 1991, Métodos de resolventes para la solución numérica de problemas de la mecánica no lineal: *Comunicaciones Técnicas*, Instituto de Geofísica, UNAM, Serie de investigación No 128, 18 p.
- Anderson, E.M., 1942, **The dynamics of faulting**; 2da ed. Oliver and Boyd, Edimburgo, 206 p..
- Ashby, M.F. and R. A. Verrall, 1977, Micromechanisms of flow and fracture, and their relevance to the rheology of the upper mantle: *Phil. Trans. R. Soc. London, A.*, v. 286, p. 59-95
- Atkinson, B.K., 1987, **Fracture mechanics of rocks**. Academic Press, London, 534 p.
- Barr, T.D. y F.A. Dahlen. 1989, Frictional mountain building, 2. Thermal structure and heat budget: *Journal of Geophysical Research*, v.94, p. 3923-3947.
- Bayly, B., 1992, **Mechanics in structural geology**: Springer-Verlag, New York, 253 p.
- Bernardou, B., George, P.L., Hassim, A., Joly, P., Laug, P., Perronet, A., Saltel, E., Steer, D., Vanderborck, G. y M. Vidrasa. 1986, **MODULEF a modular library of finite elements**: INRIA, Paris, 351 p.
- Berger, P. y M. Johnson, 1980, First-order analysis of deformation of a thrust sheet moving over a ramp: *Tectonophysics*, v. 70 p. 9-24.
- Brown, S.R., 1987a, A note on the description of surface roughness using fractal dimensions: *Geophys. Res. Lett.*, v. 14, p. 1095-1098.
- Brown, S.R., 1987b, Fluid flow through rock joints: The effect of surface roughness. *Journal of Geophysical Research*, v. 92, p. 1337-1347.
- Byerlee, J.D., 1978, Friction of rocks : *Pure and Applied Geophysics*, v. 116, p. 615-626.
- Calcutte, L.R., 1969, **The analysis of laminated composite structures**, Van Nostram Reinhold Company, New York, 222 p.
- Ciarlet, P.G., 1978, **The finite element method for elliptic problems**, North Holland, Amsterdam, 530 p.

REFERENCIAS

- Cloetingh, S.A., Wortel, M.J. y N.Y. Vlaar, 1984, Passive margin evolutions, initiation of subduction and the Wilson Cycle: *Tectonophysics*, v.109, p.147-163.
- CRC, Pratical handbook of physycal propierities of rocks and minerals, 1989, Robert S. Carmichael Ed., Cayo Hueso, Florida, 741 p.
- Couples, G., 1977, Stress and shear fracture patterns resulting from a suite of complicated boundary conditions with applications to the Wind River Mountain: *Pure and Applied Geophysics*, v. 115 p. 113-133.
- Dahlen , F.A., y T.D Barr, 1989, Frictional mountain building. 1. Deformation and mechanical energy budget: *Journal of Geophysical Research*, v. 88, p. 3906-3922.
- Davis, D., Suppe, J., y F.A Dahlen, 1983, Mechanics of fold-and-thrust belts and accretionary wedges: *Journal of Geophysical Research*, v. 88, p. 1153-1172.
- Ekeland, I., y R. Teman, 1976, **Convex analisys and variational problems**: North-Holland, Amsterdam, 402 p.
- Enos, P., 1977, Tamabra limestone of the POza Rica Trend, Cretaceus, Mexico: *Soc. Econ. Paleontologist and Mineralogist*, Spec. Publ. 25, p. 273-314.
- Glowinski, R., Lions, J.L., y R. Tremolieres, 1976, **Analyse numerique des inequations variationnelles**: Vol 1., Dunod, Paris.
- Goff, D. y D. Wiltchko, 1992, Stresses beneath a ramping thrust sheet: *Journal of Structural Geology*, v.14, n. 4, p. 437-449
- Granier, T., 1985, Origin , damping, and pattern of development of faults in granites: *Tectonics*, v. 4., p. 721-737.
- Gurtin, M.E., 1981, **An introduction to continuum mechanics**: Academic Press, San Francisco, 256 p.
- Hafner, W., 1951, Stress distribution and faulting: *Bull. Geol. Soc. Am.*, v.62, p. 373-398.
- Handbook of physical constants: *Geological Society of America* , Special Pappers, No. 36, 325 p.
- Handy, M.R., 1989, Deformation regimes and rheological evolution of fault zones in the lithosphere: the effects of pressure, temperature, grain size, and time: *Tectonophysics*, v. 163, p. 119-152.
- Hubbert, M.K., y W.W. Rubey, 1959, Role of fluid pressure in the mechanics of overthrust faulting: *Bull. Geol. Soc. Am.*, v. 70, p. 115-166.
- Jaeger, J.C, 1969, **Elasticity, fracture, and flow, with engineering and geological applications**: 3ra edición, Chapman and Hall, London, 268 p.
- Johnson, C., 1991, **Numerical solution of partial differential equations by the finite element methods**: Cambridge University Press, Cambridge, 279 p.
- Jordan, P., 1987, The deformational behavior of bimineralic limestone-halite agregates: *Tectonophysics*, v. 11, p. 185-197.

REFERENCIAS

- Jordan, P., y R. Nüesch, 1989, Deformational behavior of shale interlayer in evaporite detachment horizons, Jura overthrust, Switzerland: *J. Struct. Geol.*, v. 11, p. 859-871.
- Kilsdonk, B., y R.C. Fletcher, 1989, An analytical model of hanging-wall and footwall deformation at ramps on normal and thrust faults: *Tectonophysics*, v. 163, p. 153-168.
- Müller W.H., y K.J. Hsü, 1980, Stress distribution in overthrusting slabs and mechanics of Jura deformation: *Rock Mechanics, Suppl.*, v. 9, p. 219-232
- Nakamura, K., Shimazaky, K., y N. Yonckura, 1984, Subduction, bending, and exduction. Present and Quaternary tectonics of the northern border of the Philippine Sea Plate: *Bull. Soc. Geol. France*, v. 26, p. 221-243.
- Mandl, G., 1988, **Mechanics of tectonic faulting**: Elsevier, Amsterdam, 407 p.
- Neville, B.S., y S.H. Kirby, 1978, Transient creep and semibrittle behavior of crystalline rocks: *Pure and Applied Geophysics*, v. 116, p. 807-839.
- Palacios-Nieto, M., 1980, Geología y geotécnica del proyecto hidroeléctrico Zimapán, Estados de Hidalgo y Querétaro: Libro guía de la excursión geológica a la región de Zimapán y áreas circundantes, Estados de Hidalgo y Querétaro, VI Convención Geológica Nacional, Sociedad Geológica Mexicana, p.33- 41.
- Paterson, M.S., 1973, Nonhydrostatic thermodynamics and its geological applications: *Reviews of Geophysics and Space Physics*, v. 11, p. 355-289.
- Paterson, M.S., 1978, **Experimental rock deformation - the brittle field**: Springer Verlag, New York, 254 p.
- Pfiffner, O.A., y J.G. Ramsay, 1982, Constraints on geological strain rates of naturally deformed rocks: *Journal of Geophysical Research*, v. 87, p. 311-321.
- Press, W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A. y W.T. Vettering, 1986, **Numerical recipes**: Cambridge University Press, New Rochelle, New York, 818 p.
- Ramsay, J.G., y Huber, M.I., 1987, **The techniques of modern structural geology, vol 2: Folds and fractures**: Academic Press, New York, 700 p.
- Rutter, E.H., 1976, The kinetics of rocks deformation by pressure solution: *Phil. Trans. R. Soc. London A.*, v. 283, p. 203-219.
- Saver, F.M., (ed.) 1964, Nuclear Geoplosics, A source book of underground phenomena and effects of nuclear explosions, p.II:Mechanical properties of earth material: Stanford Research Institute.
- Santiago, J., Carrillo, J., y B. Martell, 1984, Geología petrolera de México, en Marmisolle-Daguierre et. al. (eds.), **Evaluación de formaciones en México**, p. 1-1 - 1-36.
- Schedl, A., y D.V. Wiltschko, 1987, Possible effects of pre-existing basement topography on thrust fault ramping: *Journal of Structural Geology*, v. 9, p. 1029-1037.

REFERENCIAS

- Schmid, S.M., 1982, Microfabric studies as indicators of deformation mechanisms and flow laws operative mountain building, en Hsu, K.J. (ed.), **Mountain building processes**, p. 95-110., Academic Press, Londres.
- Segal, P. y D.D. Pollard, 1983, Nucleation and growth of strike-slip faults in granites: *Journal of Geophysical Research*, v. 88, p. 555-568.
- Scholz, C.H., 1990, **The mechanics of earthquakes and faulting**: Cambridge University Press, Cambridge. 439 p.
- Somerville, P., 1978, The accommodation of plate collisions by deformation in the Izu Block, Japan: *Bull. Earthquake Res. Inst., Univ. Tokio*, v. 53, p. 629-648.
- Stearns, D.W., y M. Friedman, 1972, Reservoirs in fractured rock: *American Association of Petroleum Geologists Memoir 30*, p. 339-385.
- Suppe, J., 1985, **Principles of structural geology**: Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 537 p.
- Suter, M., 1984, Cordilleran deformation along the eastern edge of the Valles-San Luis Potosi carbonate platform, Sierra Madre Oriental fold-thrust belt in eastern-central Mexico: *Geological Society of America Bulletin*, v. 95, p. 1387-1397.
- Suter, M., 1987, Structural traverse across the Sierra Mader Oriental fold-thrust belt in east-central Mexico: *Geological Society of America Bulletin*, v. 98, p. 249-264.
- Suter, M., 1990, Geología de la hoja Tamanzunchale, Estados de Hidalgo, Querétaro y San Luis Potosi, Inst. Geología, UNAM, 55p.
- Suter, M., y M. Vargas, 1986, Dolomitización e intensidad de fracturamiento del Campo Cárdenas: *Boletín de la Asociación Mexicana de Geólogos Petroleros*, v. 35, p. 37-65.
- Teman, R., 1970, **Analyse numérique**: Presses Universitaires de Paris, Paris.
- Turcotte, D.L., y G. Schubert, 1982, **Geodynamics, applications of continuum physics to geological problems**: John Wiley and Sons, New York, 450 p.
- Wilson, J.L., 1975, **Carbonates facies in geologic history**: Springer Verlag, New York, 450 p.

**APÉNDICE : ARCHIVOS DE MODULEF PARA GENERAR EL
MODELO DE ELEMENTOS FINITOS Y SU SOLUCIÓN**

A continuación se presentan los archivos con los datos para obtener, mediante **MODULEF**, el modelo de elementos finitos y la solución numérica del problema de valores sobre la frontera de la elasticidad presentado en este trabajo. **MODULEF** tiene malladores y módulos ya compilados (conversacionales) para la generación automática de mallas y para obtener la solución de modelos clásicos de la mecánica del medio continuo. En los conversacionales se introducen los parámetros del modelo (geometría, tipo de elementos finitos, funciones de interpolación, constantes materiales, fuerzas de cuerpo y condiciones de frontera) y como salida se obtienen archivos con estos parámetros, con un formato estandarizado. Estos, a su vez sirven de entrada a ejecutables que forman la base de datos del modelo de elementos finitos: nodos y puntos, conectividad entre los nodos, funciones de interpolación, matriz de rigideces y el vector carga. Esta organización tiene la ventaja de que una vez creados estos archivos, fácilmente se pueden efectuar cambios sin necesidad de correr el conversacional.

Se presentan únicamente los archivos de salida de los conversacionales, de la versión francesa, para el caso de desplazamientos prescritos desde el interior de la cuenca.

Contenido del archivo de salida MALLA.DATA del conversacional que requiere los datos para generar el mallado de la región de definición del problema. Durante la ejecución del conversacional hay que especificar los puntos y líneas que definen la frontera (sección POIN y LIGN), las coordenadas de los puntos, los puntos que unen las líneas, la segmentación de las líneas y asociarles a cada punto y línea un número de referencia o etiqueta. También hay que especificar el tipo de mallador, QUAC en este caso, y el archivo con la estructura de datos conteniendo los nodos y puntos de la malla (PLATAFORMA.NOPO).

'PLATAFORMA

'POIN

\$	NOP	NOREF(NOP)	X(NOP)	Y(NOP)	\$ IMPRE NPOINT \$
1	1	1	0.000000E+00	0.130000E+04	
2	1	1	0.000000E+00	0.000000E+00	
3	2	2	0.100000E+05	0.000000E+00	
4	3	3	0.100000E+05	0.700000E+03	
5	3	3	0.600000E+04	0.700000E+03	
6	3	3	0.400000E+04	0.130000E+04	

'LIGN

\$	NOLIG	NOELIG	NEXTR1	NEXTR2	NOREFL	NFFRON	\$ IMPRE NDLM \$	RAISON \$
1	20	1	2	1	0	0	0.100000E+01	
2	55	2	3	2	0	0	0.100000E+01	
3	20	3	4	2	0	0	0.100000E+01	
4	20	4	5	3	0	0	0.100000E+01	
5	16	5	6	3	0	0	0.100000E+01	
6	20	6	1	3	0	0	0.100000E+01	

'QUAC

\$ IMPRE NIVEAU	NUDSD	NBRELI
1	1	1

NS1L

\$ LISTE DES LIGNES DU CONTOUR :

1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6
20	-1				

'ADPO

\$ IMPRE NIVEA1	NIVEA2	N1	ISSET
1	1	2	1
			0

APENDICE

```

0          1          $ ISEQ NOESOM
'RENC      1          2          1          $ IMPRE NIVEA1 NIVEA2
'SAUV      1          1          0          $ IMPRE NINOPO NTNPO
PLATAFORMA.NOPO $ NOM FICHIER
'FIN

```

Contenido del archivo de salida INTERPOL.DATA del conversacional que requiere los datos para calcular las funciones de interpolación o funciones intérpretes. Durante la ejecución del conversacional hay que especificar la dimensión del problema (2 o 3), la biblioteca del tipo de problema a resolver (ELAS) y el tipo de elementos finitos (TRIA 2P2D, triángulos lagrangianos rectos con funciones de interpolación de segundo grado) y los archivos con la estructura de datos de la malla de elementos finitos y sus coordenadas: PLATAFORMA.MAIL y PLATAFORMA.COOR.

```

0          $ Y A T I L D E S F O N C T I O N S
INTERPRETEES
2          1          0          $ NDIM NDSO NBSDC
4          0          $ NNR NBLC
ELAS       $ NOM DE LA BIBLIOTHEQUE
1          $ NTYED DU SD 1
TRIA 2P2D $ LE NOM DES ELEMENTS DROITS
0          $ NTYEC DU SD 1
PLATAFORMA.NOPO $ NOM DU FICHIER
0          $ ET NIVEAU DE LA SD NOPO
PLATAFORMA.MAIL $ NOM DU FICHIER
0          $ ET NIVEAU DE LA SD MAIL
PLATAFORMA.COOR $ NOM DU FICHIER
0          $ ET NIVEAU DE LA SD COOR
0          0          $ NTMAIL NTCOORD

```

Contenido del archivo de salida LIMITES.DATA del conversacional que requiere los datos para calcular las condiciones de frontera tipo Dirichlet (lista de los grados de libertad restringidos). Durante la ejecución del conversacional hay que especificar el archivo que contiene el mallado, el archivo que almacenará las condiciones de frontera (PLATAFORMA.BDCL), las etiquetas de los elementos (puntos y líneas) con grados de libertad restringidos, tipo de grados de libertad y los valores prescritos.

```

PLATAFORMA.MAIL $ NOM DU FICHIER
34              $ ET NIVEAU DE LA SD MAIL
PLATAFORMA.BDCL $ NOM DU FICHIER
35              $ ET NIVEAU DE LA SD BDCL
0              $ NTBDCI
1          4          5          $ ICONST NBRF NTYP
1          1          VN          $ REF INC.VARIATIONNELLE MNEMO
1          2          VN          $ REF INC.VARIATIONNELLE MNEMO
2          1          VN          $ REF INC.VARIATIONNELLE MNEMO
2          2          VN          $ REF INC.VARIATIONNELLE MNEMO
0.5000000D+02 $ VALEUR
0.0000000D+00 $ VALEUR
0.0000000D+00 $ VALEUR
0.0000000D+00 $ VALEUR

```

APENDICE

```

O          $ 1 SI SD NDL1
O          $ 1 SI CL EN RL A LA MAIN;
          -1 SI CL EN RL PAR SP
    
```

Contenido del archivo de salida CALCULOS.DATA del conversacional que requiere los datos para calcular la matriz de rigideces y el vector de carga. Durante la ejecución del conversacional hay que especificar los archivos con el mallado y sus coordenadas, el archivo de salida con estructura de datos de la matriz de rigideces y vector de carga (PLATAFORMA.TAE), el tipo de material (isotrópico), las constantes materiales, la fuerza de cuerpo, las etiquetas de los elementos (puntos y líneas) con tracciones prescritas y el valor en estos.

```

PLATAFORMA.MAIL          $ NOM DU FICHIER
  35                     $ ET NIVEAU DE LA SD MAIL
PLATAFORMA.COOR         $ NOM DU FICHIER
  35                     $ ET NIVEAU DE LA SD COOR
PLATAFORMA.TAE          $ NOM DU FICHIER
  35                     $ ET NIVEAU DE LA SD TAE
  0                       $ NTTAE
  0                       $ 1 SI POBA EST UTILISE , 0
                        SINON
  2                       $ NPROV
  0                       $ NTHELA
  0                       $ IOPT(*)
:RIE      0      1      1      1   $ NOM DU TABLEAU DES CL ET
                                NOMBRE DE CL
  1                       $ NOMBRE DE SD A DECRITS ,
LISTE 1
  1
  1                       $ NBRE DE REFERENCES DECRITES ,
LISTE 1
  3
  2      0      1           $ NDIM NAXIS ISOTROPIE
  1                       $ NOPTIO
  0.6500000D+11   0.4000000D+00   0.0000000D+00 $ TENSEUR E(I,J)
  0.0000000D+00   0.0000000D+00   0.0000000D+00 $ TENSEUR E(I,J)
  1
  0.0000000D+00   -0.2660000D+05   $ NDSM
  0.0000000D+00   -0.1500000D+08   $ F DANS OMEGA
                                $ F SUR GAMMA
    
```

Contenido del archivo de salida SOLUCION.DATA del conversacional que requiere los datos para calcular la solución numérica del modelo de elementos finitos. Durante la ejecución del conversacional hay que especificar los archivos con el mallado y funciones de interpolación, el archivo con la matriz de rigideces y el vector de carga y el archivo con las condiciones de frontera. Para este caso se obtuvo la solución mediante el *método de Cholesky*.

```

PLATAFORMA.MAIL          $ NOM DU FICHIER
  1                       $ ET NIVEAU DE LA SD MAIL
  1      5      2         $ NDSM NTYP ND
PLATAFORMA.TAE          $ NOM DU FICHIER
  1                       $ ET NIVEAU DE LA SD TAE
    
```

APENDICE

1
PLATAFORMA.BDCL
1
0
PLATAFORMA.B
1
4

\$ 1 SI BDCL EST UTILISE , 0
SINON
\$ NOM DU FICHIER
\$ ET NIVEAU DE LA SD BDCL
\$ 1 SI CL. EN RL. EXISTE
\$ NOM DU FICHIER
\$ ET NIVEAU DE LA SD B
\$ IMPREB