



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Efectos no exponenciales en  
el decaimiento cuántico

Tesis

Que para obtener el Título de

**FISICO**

Presenta:

Verónica Ivette Riquer Ramírez

*Mayo de 1993*

México, D.F.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# TESIS CON FALLA DE ORIGEN

# Contenido

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Resonancias</b>	<b>5</b>
2.1	Generalidades	5
2.2	Matriz $S$ y Resonancias	10
2.3	Matriz $S$ y Función de Green	23
<b>3</b>	<b>Estados Resonantes</b>	<b>27</b>
3.1	Normalización de los Estados Resonantes	27
3.2	Expresión de la Función de Green Cerca de sus Polos	31
3.3	Desarrollo de la Función de Green	36
<b>4</b>	<b>Desarrollo de <math>A(t)</math></b>	<b>41</b>
4.1	Contribución no Exponencial a $A(t)$	41
4.2	Cálculo de la Forma General para $A(t)$	52
<b>5</b>	<b>Fórmula Exacta de un Término para <math>A(t)</math></b>	<b>63</b>
5.1	Propiedades	63
5.1.1	Fórmula para Tiempos Cortos	65
5.1.2	Desarrollo Asintótico para $A(t)$	67
5.2	Discusión de Ejemplos	70
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>95</b>
<b>A</b>	<b>Cálculo Numérico de la Probabilidad de no Decaimiento no Exponencial</b>	<b>101</b>
A.1	Programa de Cómputo	102

# Lista de Figuras

2.1	Representación de los polos de la matriz $S$ , en el plano complejo $k$ . . . . .	12
2.2	Mapeo del plano complejo $k$ al plano $E$ . . . . .	14
2.3	Superficies de Riemann para el plano complejo $E$ . . . . .	15
2.4	Parte resonante del corrimiento de fase (plano $k$ ) . . . . .	18
2.5	Corrimiento de fase y sección transversal para una resonancia tipo Breit-Wigner . . . . .	19
2.6	Parte resonante del corrimiento de fase (plano $E$ ) . . . . .	22
3.1	Contorno para evaluar la función de Green . . . . .	38
4.1	Mapeo del contorno en el plano $s$ , al contorno en $E$ . . . . .	46
4.2	Mapeo del contorno en el plano $k$ al plano $E$ . . . . .	47
4.3	Deformación del contorno para evaluar la función de Green retardada . . . . .	49
4.4	Deformación del contorno, con énfasis en estados ligados y continuo de energías. . . . .	50
4.5	Representación de la función de onda antes de decaer, y del potencial al que está sometida . . . . .	54
5.1	Decaimiento exponencial y no exponencial para $R = 0.1$ y $t = 0 \rightarrow 1$ <i>vida media</i> . . . . .	72
5.2	Decaimiento exponencial y no exponencial para $R = 0.1$ y $t = 0 \rightarrow 8.3$ <i>vidas medias</i> . . . . .	73
5.3	Decaimiento exponencial y no exponencial para $R = 0.1$ y $t = 0 \rightarrow 20$ <i>vidas medias</i> . . . . .	75
5.4	Comportamiento exponencial y no exponencial para $R = 1$ y $t = 0 \rightarrow 1$ <i>vida media</i> . . . . .	76

5.5	Comportamiento exponencial y no exponencial para $R = 1$ y $t = 0 \rightarrow 2.5$ <i>vidas medias</i> . . . . .	77
5.6	Comportamiento exponencial y no exponencial para $R = 1$ y $t = 0 \rightarrow 10$ <i>vidas medias</i> . . . . .	78
5.7	Comportamiento exponencial y no exponencial para $R = 1$ y $t = 0 \rightarrow 30$ <i>vidas medias</i> . . . . .	79
5.8	Efectos no exponenciales para el sistema $R = 10$ y $t = 0 \rightarrow 0.1$ <i>vidas medias</i> . . . . .	80
5.9	Efectos no exponenciales para el sistema $R = 10$ y $t = 0 \rightarrow 0.3$ <i>vidas medias</i> . . . . .	81
5.10	Efectos no exponenciales en el sistema $R = 10$ y $t = 0 \rightarrow 1$ <i>vida media</i> . . . . .	83
5.11	Efectos no exponenciales en el sistema $R = 10$ y $t = 0 \rightarrow 50$ <i>vidas medias</i> . . . . .	84
5.12	Desviaciones al comportamiento exponencial en el caso $R = 25$ y $t = 0 \rightarrow 0.01$ <i>vidas medias</i> . . . . .	85
5.13	Desviaciones al comportamiento exponencial en el caso $R = 25$ y $t = 0 \rightarrow 0.1$ <i>vidas medias</i> . . . . .	86
5.14	Desviaciones al comportamiento exponencial en el caso $R = 25$ y $t = 20 \rightarrow 40$ <i>vidas medias</i> . . . . .	87
5.15	Desviaciones al comportamiento exponencial en el caso $R = 25$ y $t = 0 \rightarrow 50$ <i>vidas medias</i> . . . . .	88
5.16	Manifestación de la parte no exponencial en el decaimiento del sistema $R = 100$ y $t = 0 \rightarrow 0.01$ <i>vidas medias</i> . . . . .	89
5.17	Manifestación de la parte no exponencial en el decaimiento del sistema $R = 100$ y $t = 0 \rightarrow 0.1$ <i>vidas medias</i> . . . . .	90
5.18	Manifestación de la parte no exponencial en el decaimiento del sistema $R = 100$ y $t = 30 \rightarrow 48$ <i>vidas medias</i> . . . . .	92
5.19	Manifestación de la parte no exponencial en el decaimiento del sistema $R = 100$ y $t = 0 \rightarrow 50$ <i>vidas medias</i> . . . . .	93

# Capítulo 1

## INTRODUCCION

La conocida ley de decaimiento exponencial fue obtenida por primera vez por Gamow en 1928 [1], dentro del marco del decaimiento  $\alpha$ . Es bien conocido, desde entonces, que la probabilidad de que una partícula no decaiga se encuentra dada por:

$$P(t) = e^{-\Gamma t/\hbar} \quad (1.1)$$

donde  $\hbar/\Gamma$  es la vida media de la partícula.

Sin embargo, esta ley no es un resultado riguroso de la Mecánica Cuántica. Se sabe que su validez está limitada a un cierto intervalo de tiempo tal que a *tiempos muy cortos* y a *tiempos largos* el decaimiento no es exponencial. Es a tiempos intermedios cuando el comportamiento es mayormente exponencial.

En 1957, Khalifin [2] demuestra formalmente que a partir del hecho de que el espectro de energías de un sistema cuántico está acotado, entonces para tiempos  $t \gg \hbar/\Gamma$ , que denominaremos *tiempos largos*, el decaimiento no es de tipo exponencial.

Durante los años sesenta, Khalifin demuestra también [3] que para *tiempos cortos*,  $t \ll \hbar/\Gamma$ , la probabilidad de no decaimiento  $P(t)$  es

no exponencial.

Esto define un intervalo en el cual el decaimiento es esencialmente exponencial. Por lo tanto, es de particular relevancia describir y entender las 3 regiones que los *tiempos largos y cortos* determinan en cualquier sistema cuántico que decae. Además de evaluar la desviación de un comportamiento exponencial estrictamente.

Es así que el presente trabajo tiene por objetivo el hallar una *fórmula exacta de un término* considerando la expresión general para la amplitud de no decaimiento  $A(t)$  [1], válida para todo tiempo, que nos permite evaluar las desviaciones a la ley exponencial en cualquier sistema cuántico no estacionario (régimen no relativista). La formulación para  $A(t)$  se fundamenta en un formalismo de resonancias, basado en la condición a la frontera de *onda saliente* [5].

Entonces, es a partir de la expresión de  $A(t)$ , que derivaremos analíticamente la *fórmula exacta de un término*. Estudiaremos después, la presencia de efectos no exponenciales en diferentes sistemas, analizándolos sistemáticamente mediante métodos numéricos. Se hará especial énfasis en la interpretación del significado de *tiempos cortos y tiempos largos*, para cada sistema ejemplificado.

Nos ocuparemos, particularmente, del análisis de  $A(t)$  para tiempos muy pequeños en comparación con la vida media del sistema que decae.

El trabajo se constituye de las siguientes secciones:

1. En el segundo capítulo trataremos las propiedades generales de las resonancias, y su relación con la matriz  $S$  y la función de Green.
2. El tercer capítulo versa sobre la normalización de los estados resonantes, la expresión para la función de Green cerca de sus polos y su expansión respecto de las eigenfunciones.



3. El desarrollo que conduce a la expresión para la amplitud de no decaimiento  $A(t)$ , en su forma general, será expuesto en el capítulo 4.
4. Es en el capítulo 5, donde obtendremos la *fórmula exacta de un término* para  $A(t)$ . Calcularemos la expresión para *tiempos cortos* y la forma asintótica. Finalmente discutiremos varios ejemplos.
5. En el capítulo 6 se encuentran las conclusiones de este estudio.
6. Por último, en el *apéndice A*, daremos el programa de cómputo con el que se realizaron los cálculos numéricos de la probabilidad de no decaimiento, explicando detalles específicos.



# Capítulo 2

## RESONANCIAS

### 2.1 GENERALIDADES

El decaimiento de un sistema cuántico no-relativista puede describirse satisfactoriamente por medio del concepto de resonancia. Los estados resonantes fueron empleados por primera vez por Gamow [1] en su trabajo sobre decaimiento  $\alpha$ , por lo que también reciben frecuentemente el nombre de *estados de Gamow*. Para describir a los estados resonantes requerimos soluciones a la ecuación de Schrödinger, en las cuales no existan componentes de onda entrante a distancias infinitas [5]. Existen otros formalismos para describir a las resonancias, [6], [7].

Consideremos ahora, sin mayor pérdida de generalidad, que tenemos una partícula de momento angular cero sometida a un potencial de alcance finito, es decir

$$V(r) = 0; \quad r > a \quad (2.1)$$

El mismo método puede aplicarse a cualquier otro momento angular.

La ecuación radial de Schrödinger está dada por

$$\frac{\partial^2 \psi(k, r)}{\partial r^2} + [k^2 - V(r)]\psi(k, r) = 0 \quad (2.2)$$

con  $k$  el vector de onda y la energía  $E = k^2$ . Las unidades apropiadas son:  $\hbar = 2m = 1$ .

En el origen,  $r = 0$ , la función de onda radial satisface,

$$\psi(k, 0) = 0 \quad (2.3)$$

La solución para puntos fuera del alcance del potencial, se expresa por:

$$\psi(k, r) = A(k)e^{ikr} + B(k)e^{-ikr} ; \quad r > a \quad (2.4)$$

con los coeficientes  $A$  y  $B$  definidos para cualquier  $k$ . El término  $A$  representa la onda saliente y el  $B$  la onda entrante.

La definición de la matriz de dispersión o matriz  $S$ , se encuentra dada por [8]:

$$S(k) = -\frac{A(k)}{B(k)} \quad (2.5)$$

La matriz  $S$  es una noción teórica muy importante, ya que permite establecer la conexión con cantidades que se miden experimentalmente; como por ejemplo la sección eficaz, la cual para procesos elásticos, que son los que consideraremos en este trabajo, se escribe como:

$$\sigma = \frac{\pi}{k^2} |1 - S(k)|^2 \quad (2.6)$$

La matriz  $S$  posee características muy interesantes. Por ejemplo, la matriz  $S$  tiene las siguientes propiedades de simetría [9]:

- (i) Si reemplazamos  $k$  por  $-k$  en la ecuación (2.4), la expresión que resulta sigue siendo solución a la ecuación radial de Schrödinger; por tanto se tiene,

$$S(k)S(-k) = 1 \quad (2.7)$$

- (ii) Sustituir  $k$  por  $-k^*$  nos conduce a:

$$S(-k^*) = S^*(k) \quad (2.8)$$

Para potenciales de alcance finito, es bien sabido [10] que la matriz  $S$  correspondiente se puede extender analíticamente a cualquier valor de  $k$  en el plano complejo, y es analítica excepto en un número infinito de singularidades.

Para potenciales que cumplen la condición dada por la ecuación (2.1), se sabe que los polos de la matriz  $S$  se encuentran en la mitad inferior del plano complejo  $k$ , o en el eje imaginario positivo [10]. Los polos complejos tienen simetría especular respecto del eje imaginario.

- (iii) Otra importante propiedad, es la unitariedad, que se expresa por la relación [11],

$$S(k)S^*(k) = 1 \quad (2.9)$$

En nuestro caso la unitariedad de  $S$  nos conduce, usando la ecuación (2.5), a:

$$A(k) = B^*(k) \quad (2.10)$$

Como se mencionó anteriormente, las resonancias requieren de la condición,

$$B(k) = 0 \quad (2.11)$$

es decir, la ausencia de onda entrante en la solución asintótica de la ecuación radial de Schrödinger. Entonces se tendría,

$$\psi(k, r) = A(k)e^{ikr} \quad r > a \quad (2.12)$$

De este modo encontramos que para  $k$  real

$$B(k) = 0 \Rightarrow A(k) = 0 \quad (2.13)$$

por lo que sólo existiría la solución trivial a la ecuación de Schrödinger.

Por consiguiente, los valores de  $k$  que cumplan la condición (2.10) deben ser necesariamente complejos. Físicamente, las energías complejas describen situaciones en las cuales una partícula permanece un tiempo finito en un estado de un sistema, para luego decaer.

Podemos denotar los valores de  $k$  que cumplan la ecuación (2.12) como  $k_n$ , y a las eigenfunciones correspondientes como  $u_n(r)$ . Para  $r > a$ , tenemos:

$$u_n(r) = A_n e^{ik_n r} \quad (2.14)$$

Si escribimos

$$k_n = \alpha_n - i\beta_n \quad \alpha_n, \beta_n > 0 \quad (2.15)$$

entonces los respectivos eigenvalores de la energía  $E_n$ , son también de carácter complejo y se expresan por:

$$E_n = k_n^2 = (\alpha_n - i\beta_n)^2 \quad (2.16)$$

desarrollando el producto

$$E_n = (\alpha_n^2 - \beta_n^2) - 2i\alpha_n\beta_n \quad (2.17)$$

que serán designados como:

$$E_n = \epsilon_n - i\frac{\Gamma_n}{2} \quad (2.18)$$

con  $\epsilon_n$  posición de la resonancia,  $\Gamma_n$  el ancho correspondiente. Tanto  $\epsilon_n$  como  $\Gamma_n$  son observables experimentalmente.

Debido a lo anterior se puede escribir la ecuación (2.14), incorporando la dependencia temporal, como:

$$u_n(r, t) = A_n e^{i(\alpha_n r - t_n t)} e^{-\frac{\Gamma_n}{2} (t - \frac{r}{\alpha_n})} \quad (2.19)$$

Cabe señalar que la parte imaginaria negativa de  $k_n$  se refiere a que la dependencia radial de la función de onda, crece exponencialmente con la distancia. Debido a la consideración de estados que decaen en el tiempo exponencialmente, a una distancia  $r$  del origen observamos partículas emitidas por el sistema a un tiempo  $t - r/\alpha_n$ ; (donde  $\alpha_n$  es la velocidad de la partícula). A ese tiempo las partículas eran más abundantes en una cantidad determinada por el factor  $e^{\tau/\alpha_n t}$ , con  $\tau$  la vida media de la partícula.

El módulo de la función de onda se puede escribir como

$$\| u_n(r, t) \|^2 = \| u_n(r) \|^2 e^{-\Gamma t} \quad (2.20)$$

el cual exhibe un decaimiento temporal.

## 2.2 MATRIZ S Y RESONANCIAS

Como ya hemos dicho, hay varios tratamientos diferentes para explicar el fenómeno de las resonancias. Sin embargo, todos coinciden al resaltar los pronunciados picos que se observan en la gráfica de la sección transversal, cerca de la energía resonante  $E_n$ . Esto podría relacionarse con la existencia de un estado cuasiligado, localizado en  $E_n$ , en el sistema blanco-proyectil. Si el proyectil se envía con energía  $E_n$ , el blanco lo capturará temporalmente en un estado meta-estable o cuasiligado.



Podemos describir a las resonancias de una forma satisfactoria mediante las propiedades analíticas de la matriz  $S$  [12].

Los polos de la matriz  $S$  corresponden a los ceros de la función de Jost, pues para un momento angular dado podemos expresar a  $S$  como:

$$S(k) = \frac{J(-k)}{J(k)} \quad (2.21)$$

con  $J(k)$  la función de Jost [10].

Los polos de la matriz  $S$  situados en la mitad superior del plano complejo  $k$  ( $\text{Im}k > 0$ ) corresponden a estados ligados [10].

La discusión se puede extender sin cambios esenciales a  $\ell \neq 0$ .

Para potenciales de alcance finito, esto es  $V(r) \equiv 0; r > a$ , se puede demostrar [10] que la matriz  $S$  es analítica en todo el plano complejo  $k$ , excepto en un número infinito de polos, los cuales corresponden a los ceros de  $J(k)$ .

En el caso de  $\text{Im}k < 0$ , los polos están distribuidos simétricamente con respecto al eje imaginario  $k$ , y son un número infinito de ellos. También pueden aparecer una cantidad finita de polos sobre el eje imaginario negativo.

Podemos graficar los polos de  $S(k)$ . Resulta claro que buena parte de la información sobre las resonancias se encuentra en la matriz  $S$ . Encontramos la estructura manifestada en la gráfica de la *figura 2.1*.

La forma de la gráfica es siempre similar para  $V(r) \in \mathbf{R}$ , finito, debido a los siguientes principios:

1. Causalidad
2. Invariancia ante inversiones temporales

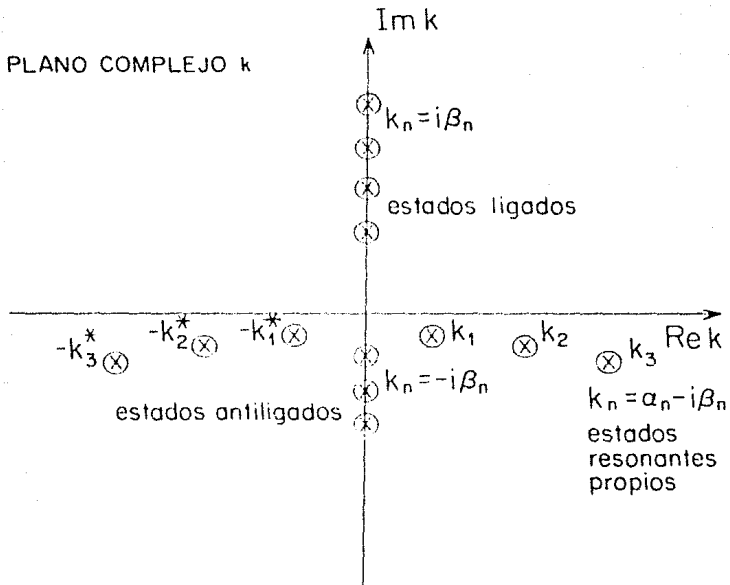


Figura 2.1: Polos de la matriz  $S$ , en el plano complejo  $k$ . Se representan los estados resonantes propios, los estados ligados y los antiligados.

Los polos de la matriz  $S$ , como ya hemos encontrado, corresponden generalmente a estados ligados, antiligados y resonantes. Analicemos ahora su estructura.

Sea  $r > a$

(i) Los estados ligados se representan por

$$k_n = i\beta_n \quad (2.22)$$

$$E_n = k_n^2 = -\beta_n^2 \quad (2.23)$$

(ii) Los estados virtuales o antiligados son

$$k_n = -i\beta_n \quad (2.24)$$

$$E_n = k_n^2 = -\beta_n^2 \quad (2.25)$$

(iii) Los estados resonantes propios ( $\alpha_n > \beta_n$ ) se expresan como:

$$k_n = \alpha_n - i\beta_n \quad (2.26)$$

$$E_n = (\alpha_n^2 - \beta_n^2) - 2i\alpha_n\beta_n \quad (2.27)$$

El mapeo  $k \rightarrow E$  en su forma gráfica, tiene el aspecto mostrado en la *figura 2.2*.

Una hoja se sitúa sobre la otra, y se conectan por un corte ramal. Esto queda representado en la *figura 2.3*.

Los ceros  $S$  de  $J$ , en este caso, pueden no tener efectos resonantes observables, aún cuando la función de Jost no tenga ceros en esa región.

Como ya hemos dicho, los polos de  $S$  en  $Imk > 0$  corresponden a estados ligados, mientras que en  $Imk < 0$  pueden corresponder a

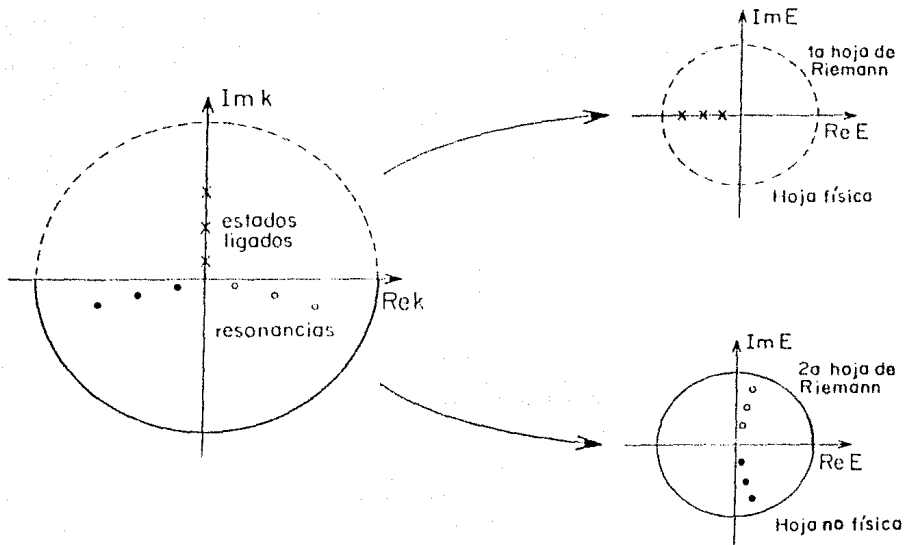


Figura 2.2: Mapeo del plano complejo  $k$  al plano complejo  $E$ .

resonancias. Este hecho sugiere fuertemente una relación entre ambos tipos de estados.

Un análisis superficial nos muestra que nuestra aseveración es correcta. Supongamos que para un cierto valor del potencial  $V_0$ , tenemos dos polos situados simétricamente respecto al eje imaginario. Si el potencial varía, los polos cambian de posición. Si el potencial se hace más atractivo, los dos polos simétricos se juntan en el eje imaginario negativo. Haciéndose más fuerte el potencial, un polo se mueve hacia arriba ( $\text{Im} k > 0$ ) y se convierte en un estado ligado; el otro polo se convierte en un estado antiligado. En el caso en el que el potencial sea

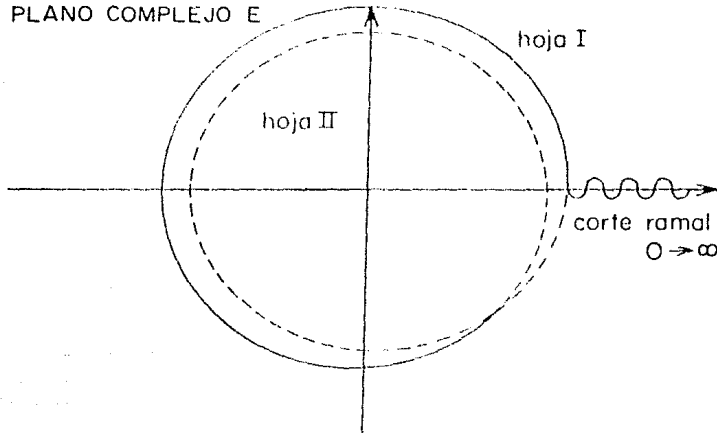


Figura 2.3: Superficies de Riemann en el plano complejo  $E$ .

menos atractivo, el polo se traslada a  $Imk < 0$ , y se convierte en una resonancia si  $\ell > 0$ ; o en un estado virtual si  $\ell < 0$ .

Si  $\ell > 0$ , el polo del umbral es de tipo doble. Si hacemos el potencial ligeramente más atractivo que  $V_0$ , los dos polos se sitúan en el eje imaginario, uno como estado ligado y otro como estado virtual o antiligado.

Cuando  $V \rightarrow V_0$  los polos se deslizan sobre el eje imaginario hacia el origen, y cuando  $V = V_0$  ambos se encuentran en el estado ligado de energía cero. Cuando el potencial empieza a ser menos atractivo, los polos en el origen se trasladan tangencialmente al eje real. El polo de la derecha se convierte en una resonancia y continúa ese camino hasta que, eventualmente, se hace inobservable.

Fuera del alcance del potencial, hemos visto que la solución a la

ecuación radial de Schrödinger está dada por:

$$\psi(r) = A(k)e^{ikr} + B(k)e^{-ikr} \quad (2.28)$$

Esta relación puede reescribirse, de acuerdo a la forma usual en la teoría de dispersiones [12], como

$$\psi(r) = C(k) \sin(kr + \delta(k)) \quad (2.29)$$

de aquí se obtiene que,

$$e^{2i\delta(k)} = -\frac{A}{B} = S \quad (2.30)$$

Se ha introducido el número  $\delta(k)$ , que representa *el corrimiento de fase* de la solución asintótica respecto de la fase de la solución de partícula libre. Es decir, la presencia de un potencial dispersor se refleja únicamente en un cambio de fase de la onda dispersada.

Una buena descripción de una resonancia puede hacerse en términos del corrimiento de fase,

Sea  $\bar{k}$  un polo de  $S$ . Podemos expresar a  $k$  de la siguiente manera

$$k = k_r - ik_i \quad (k_i > 0) \quad (2.31)$$

con los subíndices  $r \rightarrow$  real e  $i \rightarrow$  imaginario. Excepto en casos especiales, tratándose de un canal los polos son de carácter simple [10].

Como  $J(k)$  tiene un cero simple en  $\bar{k}$ , existe una vecindad para la cual podemos hacer la siguiente aproximación:

$$J(k) \approx \left[ \frac{dJ}{dk} \right]_k (k - \bar{k}) \quad (2.32)$$

Si  $\bar{k}$  es suficientemente cercana al eje real entonces existe un intervalo real, concentrado en  $k_r$ , en el cual la aproximación de  $J(k)$  es válida. Para examinar el corrimiento de fase en dicho intervalo señalamos que, para  $k$  real, el corrimiento de fase es menos la fase de  $J(k)$ . Entonces:

$$\delta(k) \approx -\text{arg} \left[ \frac{dJ}{dk} \right]_k - \text{arg}(k - \bar{k}) \quad (2.33)$$

con  $k \in \mathbf{R}$ , cercana a  $k_r$ .

$$\delta(k) \equiv \delta_{bg}(k) + \delta_{res}(k) \quad (2.34)$$

donde

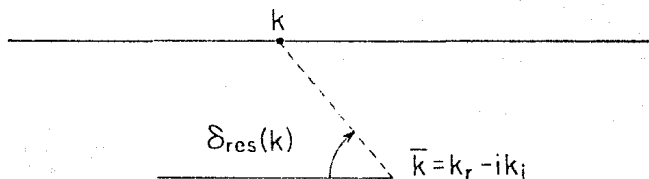
$$\delta_{res}(k) = -\text{arg}(k - \bar{k}) \quad (2.35)$$

y

$$\delta_{bg}(k) = -\text{arg} \left[ \frac{dJ}{dk} \right]_k \quad (2.36)$$

La cantidad  $\delta_{res}(k)$  es la parte resonante del corrimiento de fase. Puede esquematizarse, (excepto por un ángulo  $\pi$  irrelevante), mediante la *figura 2.4*.

Es fácil observar que conforme  $k$  crece hacia  $\bar{k}$ ,  $\delta_{res}(k)$  va desde 0 hasta  $\pi$ . Entre más cercana sea  $\bar{k}$  al eje real, el incremento en  $\delta_{res}(k)$  es mucho más pronunciado. Entonces cerca de un cero de  $J(k)$  próximo al eje real, se tiene que el corrimiento de fase total  $\delta = \delta_{bg} + \delta_{res}$ , se

PLANO COMPLEJO  $k$ Figura 2.4: Parte resonante del corrimiento de fase, en el plano  $k$ .

incrementa repentinamente por  $\pi$ .

Podemos caracterizar a una resonancia, por el pronunciado incremento de  $\pi$  que experimenta  $\delta(k)$ .

La sección transversal parcial  $\sigma(k)$  puede expresarse como:

$$\sigma(k) = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta(k) \quad (2.37)$$

Cerca de una resonancia,  $\sigma(k)$  depende de  $\delta_{res}(k)$ .

Es claro que pueden presentarse diferentes posibilidades. La más usual es aquella en la cual  $\delta_{r,i}(k)$  es cero, y entonces,  $\delta$  va desde 0 a  $\pi$  cerca de  $k = k_r$ . Este tipo de resonancia recibe el nombre de resonancia pura de Breit-Wigner [13]. Gráficamente se observa en la *figura 2.5*.

En este caso, la sección transversal parcial es muy pequeña a ambos



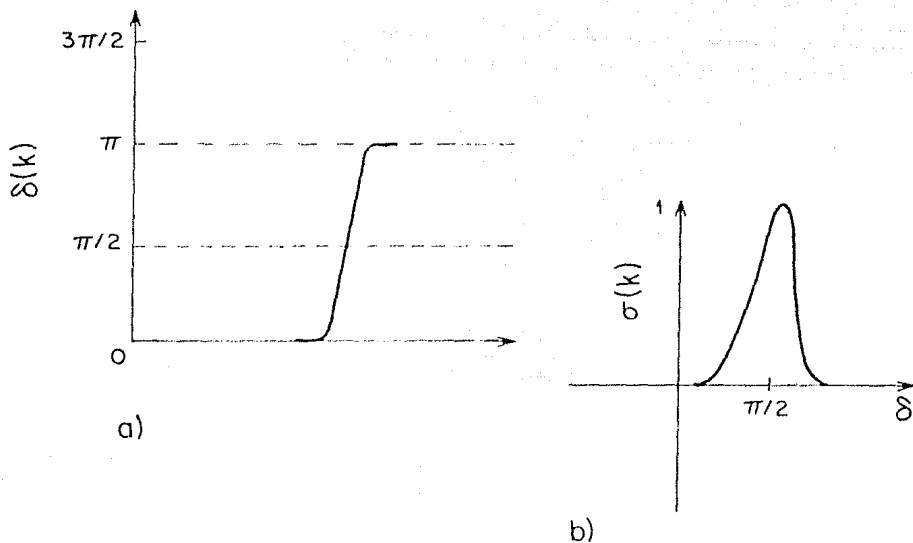


Figura 2.5: a) Corrimiento de fase y b) Sección transversal para una resonancia tipo Breit-Wigner.

lados de la resonancia, y presenta un pronunciado pico cuando  $\delta$  pasa por  $\pi/2$ .  $\sigma(k)$  mantiene entonces su límite unitario.

Volveremos después a retomar la resonancia de Breit-Wigner, como un método de aproximación para la sección transversal total, en la vecindad de una resonancia.

Ahora bien, algunos cálculos se hacen empleando la energía:

$$E = k^2 \quad (2.38)$$

Por tanto, estamos en un buen momento para resaltar algunos aspectos de la relación entre ambas variables.

El mapeo  $k \rightarrow E$  es dos a uno. Es decir:

$$\begin{aligned} k &= |k| e^{i\theta} \\ E &= |E| e^{i\phi} \end{aligned} \quad (2.39)$$

y

$$\begin{aligned} E &= |k|^2 e^{2i\theta} \\ \implies 2\theta &= \phi \end{aligned}$$

Esto es, si completamos una vuelta en el plano  $E$ , habremos recorrido media vuelta en el plano complejo  $k$ . Esto nos conduce a requerir dos superficies de Riemann para el plano  $E$ . Tradicionalmente, la correspondencia entre  $k$  y las dos hojas de  $E$  se escoge a saber: la primera hoja, u hoja física, corresponde a la mitad superior del plano ( $\text{Im}k > 0$ ); la segunda hoja corresponde a la parte inferior del plano ( $\text{Im}k < 0$ ).

Para cada  $E$ , se tienen los valores  $\pm k$  que corresponden a diferentes puntos en las hojas de Riemann (plano  $E$ ). Uno se encuentra en la primera hoja y el otro cae en la segunda hoja, pero ambos tienen el mismo valor numérico  $E = k^2$ .

La primera hoja tiene un corte que va de 0 a  $\infty$ . La parte superior del borde corresponde a la región física  $k \geq 0$ . Si continuamos por el corte, llegamos a la segunda hoja. Considerando lo anterior, una resonancia  $\bar{k}$ , se convierte en un cero en la segunda hoja de Riemann, dado

por:

$$\tilde{E} = \bar{k}^2 = \epsilon_r - i\frac{\Gamma}{2} \quad (2.40)$$

con  $-\Gamma/2$  convención para la parte imaginaria de  $\tilde{E}$ . Retomando el argumento para  $k$ , cerca de la resonancia podemos hacer la siguiente aproximación:

$$J(E) \approx \left[ \frac{dJ}{dE} \right]_F (E - \tilde{E}) \quad (2.41)$$

y análogamente para cualquier  $E$  real, próxima a  $\epsilon_r$ , se tiene:

$$\delta(E) \approx \delta_{bg} + \delta_{res}(E) \quad (2.42)$$

con  $E \in \mathbf{R}$ , cercana a  $\epsilon_r$ .

La parte resonante del corrimiento de fase está dada mediante la gráfica de la *figura 2.6*.

Algunos sencillos cálculos trigonométricos (*Figura 2.6*), nos llevan a:

$$\sin \delta_{res}(E) = \frac{\Gamma/2}{[(E - \epsilon_r)^2 + (\Gamma/2)^2]^{1/2}} \quad (2.43)$$

En particular, tratándose de la resonancia de Breit-Wigner, tenemos que  $\delta_{bg} = 0$  y  $\delta = \delta_{res}$ . En este caso, la sección transversal parcial se expresa por:

PLANO COMPLEJO  $E$

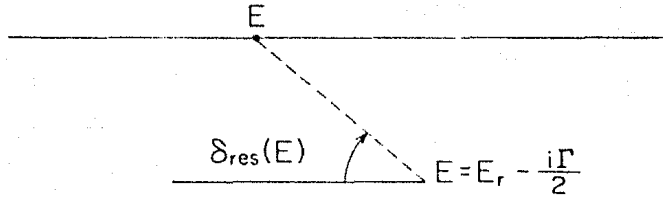


Figura 2.6.: Parte resonante del corrimiento de fase, en el plano complejo  $E$ .

$$\sigma(E) \propto \sin^2 \delta(E) = \frac{(\Gamma/2)^2}{(E - \epsilon_r)^2 + (\Gamma/2)^2} \quad (2.44)$$

que es la fórmula de Breit-Wigner [13]. El pico de la resonancia está situado, como ya hemos señalado, con su centro en  $\epsilon_r$  y tiene un ancho  $\Gamma$ .

Si suponemos que  $S$  tiene un polo simple  $l$  en la parte inferior del plano, y que es cercano al eje real, entonces la forma más general para  $S$  congruente con la unitariedad es:

$$S(k) = e^{2i\delta(k)} \approx e^{2i\delta_{bg}} \frac{k - k^*}{k - k} \quad (2.45)$$

con  $\delta_{bg} \in \mathbf{R}$  y  $k$  próximo a  $k_r$

## 2.3 MATRIZ S Y FUNCION DE GREEN

Para relacionar los estados resonantes con procesos físicos, una manera muy adecuada es recurrir a la función de Green de la ecuación de Schrödinger, con la condición a la frontera de onda saliente.

Las funciones de onda del continuo, obedecen la ecuación radial de Schrödinger ( $l = 0$ ),

$$\frac{\partial^2 \psi(r)}{\partial r^2} + [k^2 - V(r)]\psi(r) = 0 \quad (2.46)$$

Las condiciones a la frontera pueden establecerse como:

$$\psi(r = 0) = 0 \quad (2.47)$$

o bien para  $r > a$ ,

$$\psi(r) = Ae^{ikr} + Be^{-ikr} \quad (2.48)$$

La función de Green de la ecuación radial de Schrödinger satisface

$$\frac{\partial^2 G^+(r, r'; k)}{\partial r^2} + [k^2 - V(r)]G^+(r, r'; k) = \delta(r - r') \quad (2.49)$$

con  $G^+(r, r'; k)$  la función de Green de onda saliente. Las condiciones a la frontera son

$$G^+(0, r'; k) = 0 \quad (2.50)$$

$$\left[ \frac{\partial G^+(r, r'; k)}{\partial r} \right]_{r=a-} = \left[ ikG^+(r, r'; k) \right]_{r=a} \quad (2.51)$$

Multiplicando  $G^+(r, r'; k)$  por la ecuación que cumple  $\psi(r)$ , y  $\psi(r)$  por la ecuación que satisface  $G^+(r, r'; k)$ , restando ambas ecuaciones e integrando sobre el espacio para la región interna del potencial, tenemos:

$$\begin{aligned} & \int_0^a dr \left[ \psi(r) \frac{\partial^2 G^+(r, r'; k)}{\partial r^2} - G^+(r, r'; k) \frac{\partial^2 \psi(r)}{\partial r^2} \right] \\ & + \int_0^a dr [\psi(r)[k^2 - V]G^+(r, r'; k) - G^+(r, r'; k)[k^2 - V]\psi(r)] \\ & = \int_0^a dr \delta(r - r')\psi(r) \quad (2.52) \end{aligned}$$

con  $0 \leq r' \leq a$ .

Mediante la fórmula de Green, obtenemos

$$\left[ \psi(r) \frac{\partial G^+(r, r'; k)}{\partial r} - G^+(r, r'; k) \frac{\partial \psi(r)}{\partial r} \right]_0^a = \psi(r') \quad (2.53)$$

Utilizando las condiciones a la frontera y evaluando:

$$\psi(a)ikG^+(a, r'; k) - G^+(a, r'; k) \frac{\partial \psi(a)}{\partial r} = \psi(r') \quad (2.54)$$

reordenando términos:

$$G^+(a, r'; k) \left[ ik\psi(a) - \frac{\partial\psi(a)}{\partial r} \right] = \psi(r') \quad (2.55)$$

pero

$$\begin{aligned} \left[ ik\psi(a) - \frac{\partial\psi(a)}{\partial r} \right] &= ik[Ae^{ika} + Be^{-ika}] \\ &= ikAe^{ika} + ikBe^{-ika} = 2ikBe^{-ika} \quad (2.56) \end{aligned}$$

Sustituyendo

$$G(a, r'; k)[2ikB(k)e^{-ika}] = \psi(r') \quad 0 \leq r' \leq a \quad (2.57)$$

Evaluando la ecuación anterior en  $r' = a$ , y dividiendo entre  $B$  se tiene:

$$G^+(a, a; k) \left[ 2ik \frac{B}{B} e^{-ika} \right] = \frac{A}{B} e^{ika} + \frac{B}{B} e^{-ika} \quad (2.58)$$

pero por la definición de la matriz  $S$  resulta:

$$G^+(a, a; k)[2ik e^{-ika}] = -S(k)e^{ika} + e^{-ika} \quad (2.59)$$

de este modo, si  $r = r' = a$

$$S(k) = [1 - 2ikG^+(a, a; k)]e^{-2ika} \quad (2.60)$$

La relación anterior fue encontrada por C. Bloch a finales de los años cincuenta [14].

Concluimos pues que  $S$  y  $G^+(a, a; k)$  tienen las mismas propiedades analíticas, y por consiguiente, los mismos polos. Sin embargo observamos que la función de Green de onda saliente es una herramienta mucho más poderosa que la matriz  $S$ , al contener más información.



## Capitulo 3

# ESTADOS RESONANTES

En esta sección del trabajo, obtendremos la normalización de los estados resonantes, la expresión para la función de Green cerca de un polo y su expansión en términos de las eigenfunciones.

### 3.1 NORMALIZACION DE LOS ESTADOS RESONANTES

Como obtuvimos en el capítulo anterior, las eigenfunciones para los estados resonantes en  $r > a$ , pueden expresarse como:

$$u_n(r) = A_n e^{ik_n r} \quad r > a \quad (3.1)$$

y su módulo se escribe

$$|u_n(r)|^2 = |A_n|^2 e^{2\beta_n r} \quad (3.2)$$

La normalización se define usualmente del modo siguiente:

$$\int_0^{\infty} |\psi_n(r)|^2 dr = 1 \quad (3.3)$$

que en el caso de estados resonantes equivaldría a:

$$\int_0^a |u_n(r)|^2 dr + |A|^2 \int_a^{\infty} e^{2ik_n r} dr \rightarrow \infty \quad (3.4)$$

Es obvio que los métodos usuales de normalización no son aplicables en el caso de estados resonantes.

Las funciones  $u_n(r)$  obedecen la ecuación radial de Schrödinger,

$$\frac{d^2 u_n(r)}{dr^2} + [k_n^2 - V(r)]u_n(r) = 0 \quad (3.5)$$

con las condiciones a la frontera:

$$u_n(0) = 0 \quad (3.6)$$

$$\left[ \frac{du_n(r)}{dr} \right]_{r=a_{-}} = ik_n u_n(a) \quad (3.7)$$

Con el fin de obtener la condición de normalización, planteamos la ecuación de Schrödinger para la eigenfunción  $u_m(r)$ ,

$$\frac{d^2 u_m(r)}{dr^2} + [k_m^2 - V(r)]u_m(r) = 0 \quad (3.8)$$

y en la frontera

$$u_m(0) = 0 \quad (3.9)$$

$$\left[ \frac{du_m(r)}{dr} \right]_{r=a_-} = ik_m u_m(a) \quad (3.10)$$

Multipliquemos ahora  $u_m$  por la ecuación para  $u_n$ , y  $u_n$  por la ecuación de  $u_m$ . Tenemos:

$$u_m(r) \frac{d^2 u_n(r)}{dr^2} + [k_n^2 - V(r)]u_n(r)u_m(r) = 0 \quad (3.11)$$

y

$$u_n(r) \frac{d^2 u_m(r)}{dr^2} + [k_m^2 - V(r)]u_m(r)u_n(r) = 0 \quad (3.12)$$

Restemos ambas ecuaciones e integremos de  $r = 0$  a  $r = a$ :

$$\int_0^a \left[ u_m(r) \frac{d^2 u_n(r)}{dr^2} - u_n(r) \frac{d^2 u_m(r)}{dr^2} \right] dr + \int_0^a [k_n^2 - k_m^2] u_n(r) u_m(r) = 0 \quad (3.13)$$

La primera integral resulta ser:

$$\int_0^a \frac{d}{dr} \left[ u_m(r) \frac{du_n(r)}{dr} - u_n(r) \frac{du_m(r)}{dr} \right] dr \quad (3.14)$$

Por tanto tenemos:

$$\left[ u_m(r) \frac{du_n(r)}{dr} - u_n(r) \frac{du_m(r)}{dr} \right]_{r=a} + (k_n^2 - k_m^2) \int_0^a u_n(r) u_m(r) dr = 0 \quad (3.15)$$

utilizando las condiciones a la frontera, se obtiene

$$(k_n - k_m) \left[ i u_n(a) u_m(a) + (k_n + k_m) \int_0^a u_n(r) u_m(r) dr \right] = 0 \quad (3.16)$$

De este modo,  $u_n(r)$  y  $u_m(r)$  son funciones ortogonales si el producto escalar se define por,

$$\delta_{nm} = \frac{i}{k_n + k_m} u_n(a) u_m(a) + \int_0^a u_m(r) u_n(r) dr \quad (3.17)$$

La condición de normalización se obtiene de la definición de producto escalar si  $m = n$ . Entonces

$$\int_0^a u_n^2(r) dr + \frac{i}{2k_n} u_n^2(a) = 1 \quad (3.18)$$

Esta definición de producto escalar es válida, pues la integral de  $u_n^2$  es diferente de cero. En el caso en que dicha integral fuera cero, pasamos a otro límite de integración  $a'$  tal que  $a' > a$ , dado que la definición se extiende para cualquier  $r$  a partir de que el potencial se anule.

### 3.2 EXPRESION DE LA FUNCION DE GREEN CERCA DE SUS POLOS

Retomemos ahora el formalismo de la función de Green, dado que es una manera adecuada de relacionar los estados resonantes con procesos de interés físico.

Como sabemos, la función de Green de la ecuación radial de Schrödinger satisface:

$$\frac{\partial^2 G^+(r, r'; k)}{\partial r^2} + [k^2 - V(r)]G^+(r, r'; k) = \delta(r - r') \quad (3.19)$$

con condiciones a la frontera expresadas como:

$$G^+(0, r', k) = 0 \quad (3.20)$$

$$\left[ \frac{\partial G^+(r, r'; k)}{\partial r} \right]_{r=a} = ikG^+(a, r'; k) \quad r' < a \quad (3.21)$$

Resultará muy conveniente, analizar el comportamiento de la función de Green cerca de uno de sus polos complejos.

Cerca de un polo complejo  $k_n$ , podemos poner a la función de Green como [15]:

$$G^+(r, r'; k) = \frac{\rho_n(r, r')}{k - k_n} + \chi(r, r'; k) \quad (3.22)$$

donde  $\chi(r, r'; k)$  es regular en  $k_n$  y  $\rho_n(r, r')$  es el residuo, que se define por:

$$\text{residuo}[G^+(r, r'; k)] = \lim_{k \rightarrow k_n} (k - k_n) \left[ \frac{\rho_n(r, r')}{k - k_n} + \chi(r, r'; k) \right] \quad (3.23)$$

en el límite ( $k \rightarrow k_n$ )

$$\text{res}[G^+(r, r'; k)] = \rho_n(r, r') \quad (3.24)$$

Obtengamos ahora una forma explícita para el residuo  $\rho_n(r, r')$ .

Sustituyendo la ecuación (3.22) en la ecuación (3.19) y arreglando términos, tenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k - k_n} \left[ \frac{\partial^2 \rho_n(r, r')}{\partial r'^2} + [k^2 - V(r)]\rho_n(r, r') \right] \\ & + \left[ \frac{\partial^2 \chi(r, r'; k)}{\partial r'^2} + [k^2 - V(r)]\chi(r, r'; k) - \delta(r - r') \right] = 0 \quad (3.25) \end{aligned}$$

Ahora, sumemos y restemos la cantidad  $k_n^2 \rho_n(r, r')/(k - k_n)$  y tomemos el límite cuando  $k \rightarrow k_n$ . Por consistencia, los términos que contienen

$(k - k_n)^{-1}$ , y los que tienen un límite constante cuando  $k \rightarrow k_n$ , se cancelan por separado:

$$\frac{\partial^2 \rho_n(r, r')}{\partial r^2} + [k_n^2 - V(r)]\rho_n(r, r') = 0 \quad (3.26)$$

y,

$$\frac{\partial^2 \chi(r, r'; k_n)}{\partial r^2} + [k_n^2 - V(r)]\chi(r, r'; k_n) + 2k_n \rho_n(r, r') = \delta(r - r') \quad (3.27)$$

Sustituyamos ahora la expresión para  $G^+(r, r'; k)$  dada por la ecuación (3.22) en las condiciones a la frontera expresadas por las fórmulas (3.20) y (3.21):

$$G^+(0, r'; k) = \frac{\rho_n(0, r')}{k - k_n} + \chi(0, r'; k) = 0 \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial G^+(r, r'; k)}{\partial r} \right]_{r=a_-} &= \frac{1}{k - k_n} \left[ \frac{\partial \rho_n(r, r')}{\partial r} \right]_{r=a_-} + \left[ \frac{\partial \chi(r, r'; k)}{\partial r} \right]_{r=a_-} \\ &= ik \left[ \frac{\rho_n(r, r')}{k - k_n} + \chi(r, r'; k) \right]_{r=a} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Si sumamos  $\pm k_n \rho_n(r, r')/(k - k_n)$ , a las ecuaciones anteriores, y nuevamente tomamos el límite cuando  $k \rightarrow k_n$ , análogamente, se tiene:

$$\rho_n(0, r') = 0 \quad (3.30)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial r} \rho_n(r, r') - ik_n \rho_n(r, r') \right]_{r=a} = 0 \quad (3.31)$$

y además,

$$\chi(0, r'; k_n) = 0 \quad (3.32)$$

$$\left[ \frac{\partial \chi_n(r, r'; k)}{\partial r} - ik_n \chi(r, r'; k_n) \right]_{r=a} = [i \rho_n(r, r')]_{r=a} \quad (3.33)$$

La ecuación (3.26) y las condiciones (3.30) y (3.31) son iguales a las planteadas para  $u_n(r)$  en las expresiones (3.5), (3.6) y (3.7). Por lo tanto:

$$\rho_n(r, r') = u_n(r) \rho'(r') \quad (3.34)$$

A fin de obtener  $P(r')$  de una forma explícita, multipliquemos la ecuación (3.5) por  $\chi(r, r'; k_n)$  y la fórmula (3.27) por  $u_n(r)$ . Restemos e integremos:

$$\int_0^a \left[ \frac{\partial^2 \chi(r, r'; k_n)}{\partial r^2} u_n(r) - \chi(r, r'; k_n) \frac{d^2 u_n(r)}{dr^2} u_n(r) \right] + \int_0^a u_n(r) 2k_n \rho_n(r, r') dr = \int_0^a u_n(r) \delta(r, r') dr \quad (3.35)$$

Empleando la fórmula de Green, obtenemos:

$$\left[ u_n(r) \frac{\partial \chi(r, r'; k_n)}{\partial r} - \chi(r, r'; k_n) \frac{d u_n(r)}{dr} \right]_0^a + \int_0^a u_n(r) \rho_n(r, r') dr = \int_0^a u_n(r) \delta(r - r') dr \quad (3.36)$$



Utilizando en la fórmula (3.36) las condiciones a la frontera (3.6), (3.7), (3.32), (3.33) y la ecuación (3.34), se tiene

$$iu_n^2(a)P(r') + 2k_n P(r') \int_0^a u_n^2(r) dr = \int_0^a u_n(r) \delta(r - r') dr \quad (3.37)$$

Rearreglando términos,

$$2k_n P(r') \left[ \frac{i}{2k_n} u_n^2(a) + \int_0^a u_n^2(r) dr \right] = u_n(r') \quad (3.38)$$

entonces

$$P(r') = \frac{u_n(r')}{\left[ \int_0^a u_n^2(r) dr + \frac{i}{2k_n} u_n^2(a) \right] 2k_n} \quad (3.39)$$

Por consiguiente, el residuo  $\rho_n(r, r')$  de la función de Green en el polo resulta ser:

$$\rho_n(r, r') = \frac{u_n(r) u_n(r')}{\left[ \int_0^a u_n^2(r) dr + \frac{i}{2k_n} u_n^2(a) \right] 2k_n} \quad (3.40)$$

observando que el denominador es la condición de normalización que dedujimos anteriormente. Por tanto, hemos obtenido que en el caso general, los residuos de la función de Green en los polos  $k_n$ , se pueden escribir como el producto de las eigenfunciones de la ecuación radial de Schrödinger, divididos por  $2k_n$ . Es decir:

$$\text{res}\{G^+(r, r', k)\} = \rho_n(r, r') = \frac{u_n(r)u_n(r')}{2k_n} \quad (3.41)$$

en donde las funciones ligadas, antiligadas y resonantes  $u_n(r)$ , cumplen con las ecuaciones siguientes:

$$\frac{d^2 u_n(r)}{dr^2} + [k_n^2 - V(r)]u_n(r) = 0 \quad (3.42)$$

y las condiciones a la frontera dadas por,

$$u_n(0) = 0 \quad (3.43)$$

$$\left[ \frac{du_n(r)}{dr} \right]_{r=a_-} = [ik_n u_n(r)]_{r=a} \quad (3.44)$$

### 3.3 DESARROLLO DE LA FUNCION DE GREEN

Obtengamos ahora la expansión de  $G^+(r, r', k)$ , en términos de las eigenfunciones  $u_n(r)$ .

Consideremos el contorno  $\Upsilon$ , que se muestra en la *figura 3.1*. Rodeamos todas las singularidades con el círculo  $\Phi$ , y a cada polo por separado mediante los contornos  $\Phi_n$ ; el valor real  $k$ , queda encerrado en  $\Phi_k$ . Aplicando entonces el teorema de Cauchy, se obtiene:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Upsilon} \frac{G^+(r, r'; k)}{k - k'} dk' = 0 \quad (3.45)$$

donde el contorno  $\Upsilon$  excluye todas las singularidades.

Desarrollando el término izquierdo de la ecuación anterior, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Phi} \frac{G^+(r, r'; k')}{k - k'} dk' + \sum_n \frac{1}{2\pi i} \int_{\Phi_n} \frac{G^+(r, r'; k')}{k - k'} dk' \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Phi_k} \frac{G^+(r, r'; k')}{k - k'} dk' = 0 \quad (3.46) \end{aligned}$$

Podemos utilizar ahora la expresión que derivamos para el *residuo* de la *función de Green* cerca de un polo, dada en la ecuación (3.41). Así,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Phi} \frac{G^+(r, r'; k')}{k - k'} dk' - \sum_n \frac{u_n(r)u_n(r')}{2k_n(k - k_n)} + G(r, r'; k) = 0 \quad (3.47)$$

De aquí que:

$$G^+(r, r'; k) = \sum_n \frac{u_n(r)u_n(r')}{2k_n(k - k_n)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Phi} \frac{G^+(r, r'; k')}{k - k'} dk' \quad (3.48)$$

Observamos que la expansión contiene una suma finita de términos discretos y una contribución de carácter integral. Dado que para potenciales de alcance finito el número de polos complejos es infinito [16], tenemos que considerar el límite de radio infinito para el contorno  $\Phi$ ;

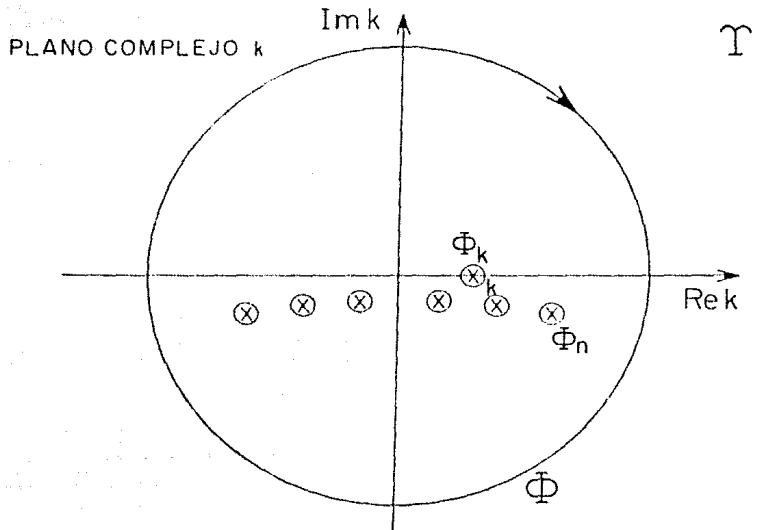


Figura 3.1: Contorno considerado al evaluar la función de Green.

así incluimos todos los polos en la sumatoria. Se sabe que [17]:

$$G^+(r, r'; k) \rightarrow 0 \quad r, r' > a \quad (3.49)$$

siempre que

$$|k| \rightarrow \infty$$

en todas las direcciones del plano complejo  $k$ , por lo que el término integral se hace cero.

Por lo tanto, la expansión de  $G^+(r, r'; k)$  está dada por [17]:

$$G^+(r, r'; k) = \sum_n \frac{u_n(r)u_n(r')}{2k_n(k - k_n)} \quad 0 \leq r, r' < a \quad (3.50)$$

La expresión anterior permanece válida aún para  $r < r' = a$ . En el caso  $r = r' = a$ , la expansión diverge, a menos que se introduzcan subtracciones [17]. La expansión dada por la ecuación (3.50), se suma sobre el conjunto finito de estados ligados y antiligados, y también sobre el conjunto completo de estados resonantes. Recordemos que para cada polo complejo  $k_n$  situado en el cuarto cuadrante, con la eigenfunción respectiva  $u_n(r)$ , corresponde, por argumentos de invariancia ante inversiones temporales, un polo  $-k_n^*$ , situado en el tercer cuadrante.

Sustituycamos la ecuación (3.50) en (3.19); sumemos  $\pm k_n^2 u_n(r)$ . Usando además (3.19), obtenemos:

$$\sum_n \frac{k + k_n}{2k_n} u_n(r)u_n(r') = \delta(r - r') \quad r, r' < a \quad (3.51)$$

La expresión anterior es obviamente inconsistente, debido a que la parte izquierda depende de  $k$ , a menos que se cumpla,

$$\sum_n \frac{u_n(r)u_n(r')}{k_n} = 0 \quad r, r' < a \quad (3.52)$$

y,

$$\frac{1}{2} \sum_n u_n(r)u_n(r') = \delta(r - r') \quad r, r' < a \quad (3.53)$$

Sustituir la ecuación (3.51) en las condiciones a la frontera para  $G^+(r, r'; k)$  ((3.20) y (3.21)), en  $r = a$  implica

$$\sum_n^{\infty} \frac{u_n(a)u_n(r')}{k_n} = 0 \quad r < a \quad (3.54)$$

Las expresiones (3.52) y (3.54) señalan que el conjunto de estados ligados, antiligados y resonantes son linealmente dependientes; mientras que la condición (3.53) establece que este conjunto de funciones cumple una relación modificada de cerradura.

# Capitulo 4

## DESARROLLO DE A(t)

### 4.1 EXPRESION PARA LA CONTRIBUCION NO EXPONENCIAL A A(t)

La amplitud de no decaimiento se expresa por [18]

$$A(t) = \int \int \Psi(r, 0) g(r, r'; t) \Psi(r', 0) dr dr' \quad (4.1)$$

Para poder evaluar  $A(t)$ , necesitamos encontrar la transformada de Laplace de la función de Green de onda saliente; esto introduce la dependencia temporal en nuestro formalismo,

$$G^+(r, r', k) \rightarrow g(r, r', t) \quad (4.2)$$

La transformada de Laplace de la función de Green de onda saliente, corresponde a la función de Green retardada ( $t > 0$ ).

Recordando que la transformada de Laplace se define por [19]:

$$\mathcal{L}F(t) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt = f(s) \quad (4.3)$$

mientras que la transformada inversa se expresa

$$\mathcal{L}^{-1}f(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} f(s) ds = F(t), \quad t > 0 \quad (4.4)$$

Es conveniente partir de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, la cual está dada por:

$$\left( i \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \Psi(r, t) = 0 \quad (4.5)$$

con

$$H = -\frac{d^2}{dr^2} + V(r) \quad (4.6)$$

Para la función de Green, análogamente, tenemos:

$$\left( i \frac{\partial}{\partial t} - H \right) g(r, r'; t) = i\delta(r - r')\delta(t) \quad t > 0 \quad (4.7)$$

donde  $g(r, r'; t)$  es la función de Green retardada.

Aplicando la transformada de Laplace a los distintos términos en (4.7), se tiene



$$\mathcal{L}H(g(r, r'; t)) = H\mathcal{L}g(r, r'; t) = H\tilde{g}(r, r'; s) \quad (4.8)$$

y

$$i\mathcal{L}\frac{\partial}{\partial t}g(r, r'; t) = i[s\tilde{g}(r, r'; s) - \tilde{g}(r, r'; 0)] \quad (4.9)$$

Sustituyendo en la ecuación (4.7), se obtiene

$$-H\tilde{g}(r, r'; s) + i s\tilde{g}(r, r'; s) = i\tilde{g}(r, r'; 0) \quad (4.10)$$

simplificando

$$(H - is)(i\tilde{g}(r, r'; s)) = \tilde{g}(r, r'; 0) = \delta(r - r') \quad (4.11)$$

pues sabemos que

$$\Psi(r, t) = \int g(r, r'; t)\Psi(r', 0)dr' \quad (4.12)$$

si  $t \rightarrow 0^+$  entonces

$$\Psi(r, 0^+) = \int g(r, r'; t)\Psi(r', 0)dr' \Rightarrow g(r, r'; 0^+) = \delta(r - r') \quad (4.13)$$

Haciendo

$$E = is \quad (4.14)$$

resulta

$$G^+(r, r'; E) \equiv -i\tilde{g}(r, r'; s) \quad (4.15)$$

De la definición anterior se desprende que la ecuación que satisface la función de Green ha de representarse por:

$$(E - H)G^+(r, r'; E) = \delta(r - r') \quad (4.16)$$

donde  $G^+(r, r'; E)$  es la función de Green de onda saliente.

Ahora bien, dado que  $E = is$ , analicemos cómo afecta este cambio a los límites de integración de la transformada inversa de Laplace.

En primer lugar, resulta claro que la definición de  $G^+(r, r'; k)$  es congruente:

$$f(s)ds = \tilde{g}(r, r'; s)(-idE) = (-i\tilde{g}(r, r'; s))dE = G^+(r, r'; E)dE$$

Además, podemos expresar a  $E$ ,  $i$ ,  $s$  de la siguiente manera:

$$s = |s| e^{i\theta} \quad (4.17)$$

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad (4.18)$$

entonces

$$E = is = e^{i\frac{\pi}{2}} |s| e^{i\theta} = |s| e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})} \quad (4.19)$$

Por consiguiente, pasar de  $s$  a  $E$ , es equivalente a rotar el plano complejo  $s$  un ángulo  $\frac{\pi}{2}$ .

De esta forma, los límites de integración de la transformada inversa de Laplace resultan:

$$\begin{aligned} \text{límite inferior } \gamma - i\infty &\rightarrow i\gamma + \infty \\ \text{límite superior } \gamma + i\infty &\rightarrow i\gamma - \infty \end{aligned} \quad (4.20)$$

pues  $\gamma \rightarrow i\gamma$ ;  $-i\infty \rightarrow +\infty$ ;  $i\infty \rightarrow -\infty$ .

Así, el contorno en  $s$  situado a la *derecha* de todas las singularidades, en el plano  $E$  estará *sobre* todas las singularidades. De manera gráfica, esto se observa en la *figura 4.1*.

Pero también debemos recordar que

$$E = k^2 \quad (4.21)$$

¿Cómo se transforma la recta  $B$  en el plano  $E$ , al cambiar al plano  $k$ ?

La recta  $B$  se encuentra determinada por

$$B: v = c_1; \quad c_1 \text{ constante real, } c_1 > 0 \quad (4.22)$$

Por otro lado, sea

$$\begin{aligned} z &= (x + iy) \\ w &= (u + iv) \end{aligned}$$

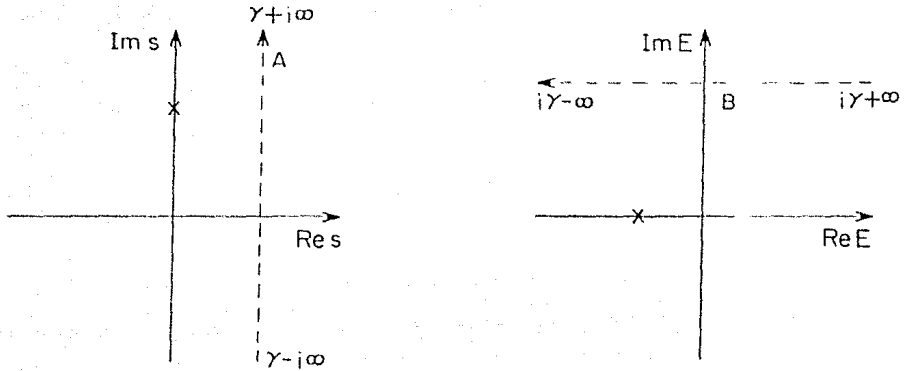


Figura 4.1: Mapeo del contorno en el plano  $s$ , al contorno en  $E$ .

entonces si  $w = z^2$ , tenemos:

$$w = u + iv = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$\Rightarrow u = x^2 - y^2$$

y

$$v = 2xy \tag{4.23}$$

Por consiguiente, la recta  $B$  en el plano  $E$ , se convierte en la hipérbola  $C$  en el plano  $k$ , dada por:

$$C: 2xy = c_1 \quad (4.24)$$

Esto se observa gráficamente en la *figura 4.2*.

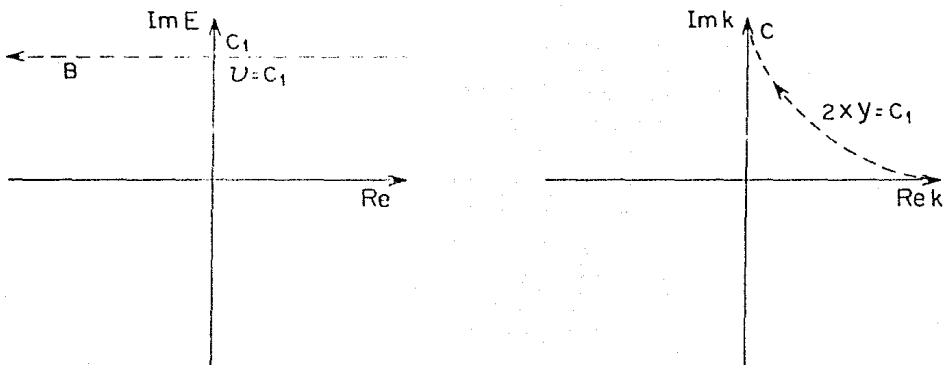


Figura 4.2: Mapeo del contorno en el plano complejo  $k$  al plano  $E$ .

Así pues, hemos llegado a la siguiente expresión para  $g(r, r'; t)$ , la cual es imprescindible evaluar:

$$g(r, r'; t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C [G^{(4)}(r, r'; k) e^{-ik^2 t/2k}] dk \quad (4.25)$$

Para encontrar  $g(r, r'; t)$ , debemos definir el contorno  $\Omega$  donde ha de evaluarse. Estamos particularmente interesados en la física asociada a los polos, de modo que trataremos de encerrarlos en el contorno que buscaremos en el plano  $k$ .

Hemos de considerar que  $e^{-ik^2 t}$  diverge, para valores de  $k$  muy grandes, tanto en el primero como en el tercer cuadrante. Sin embargo, dicho factor decrece rápidamente, para *tiempos* razonables, en los otros cuadrantes.

Puede demostrarse, además, que  $G^+(r, r'; k)$  varía de tal modo que  $k$  es a lo más de tipo exponencial [5].

Para  $k \rightarrow \infty$ , el factor que domina a la integral de  $g(r, r'; t)$  es  $e^{-ik^2 t}$ . Por consiguiente el contorno no puede mandarse a infinito, pero es modificable en el segundo y cuarto cuadrantes.

Una posibilidad de deformar el contorno, de una manera que demostrará su utilidad, es como se muestra en el esquema de la *figura 4.3* [5].

Podemos señalar que la Mecánica Cuántica pone especial énfasis en los estados ligados y el continuo de energías. Esto se obtiene considerando el contorno dibujado en la *figura 4.4*.

Hemos de recurrir a la herramienta disponible en la teoría de variable compleja, con el fin de expresar a  $g(r, r'; t)$  de un modo fácil de operar.

Usando el Teorema de Cauchy, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Omega} \{G^+(r, r'; k) e^{-ik^2 t} 2k\} dk &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \{G^+(r, r'; k) e^{-ik^2 t} 2k\} dk \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{S_1} \{G^+(r, r'; k) e^{-ik^2 t} 2k\} dk \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{S_2} \{G^+(r, r'; k) e^{-ik^2 t} 2k\} dk \end{aligned}$$

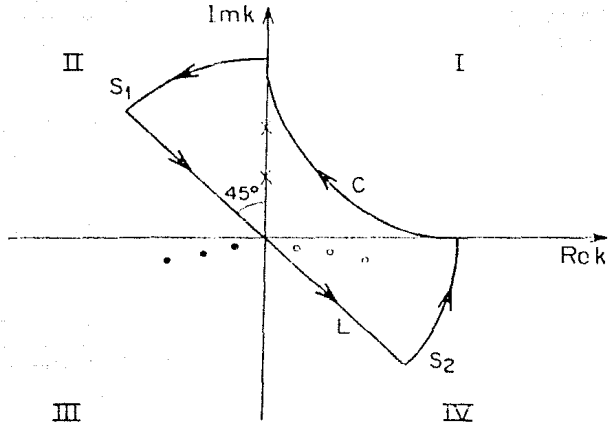


Figura 4.3: Deformación del contorno para evaluar  $g(r, r'; t)$ .

$$\begin{aligned}
 &+ \frac{1}{2\pi i} \int_L [G^+(r, r'; k) e^{-ik^2 t} 2k] dk \\
 &= \sum_n \text{res} [G^+(r, r'; k) e^{-ik^2 t} 2k] \quad (4.26)
 \end{aligned}$$

Recordemos en este momento que

$$\begin{aligned}
 k^2 &= (\alpha^2 - \beta^2) - 2i\alpha\beta = \epsilon - i\frac{\Gamma}{2} \\
 \Gamma &= 4\alpha\beta \\
 \Rightarrow e^{-ik^2 t} &= e^{-i\epsilon t} e^{-\frac{\Gamma}{2} t}
 \end{aligned}$$

Volviendo ahora a la expresión para  $g(r, r'; t)$ , demosmos que la

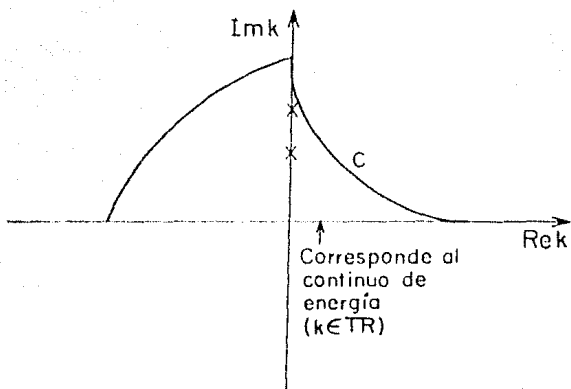


Figura 4.1: Deformación del contorno, con énfasis en estados ligados y continuo de energías.

integral sobre  $S_1$  y la integral sobre  $S_2$  tienden a cero si  $k \rightarrow \infty$ .

En el cuadrante II, se tiene:

$$k = (-\alpha + i\beta) \quad (4.27)$$

$$[G^+(r, r'; k) e^{-ik^2 t_2}]_{t \rightarrow \infty} \rightarrow k^p e^{-\alpha t} e^{-\frac{\beta t}{2}} (-\alpha + i\beta) \rightarrow 0 \quad (4.28)$$

La tendencia a cero del integrando depende de la forma explícita de  $G^+(r, r'; k)$ . Se puede demostrar que en  $r < a$ , si  $k \rightarrow \infty$ ,  $G^+(r, r'; k)$  toma la forma de  $k^p$ .

En el cuadrante IV, obtenemos:

$$k = (\alpha - i\beta) \quad (4.29)$$



$$[G^+(r, r'; k)e^{-ik^2 t_2 k}]_{|k| \rightarrow \infty} \rightarrow k^p e^{+it} e^{-\frac{p}{2}} \rightarrow \infty \quad (4.30)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Omega} [G^+(r, r'; k)e^{-ik^2 t_2 k}] dk &= \sum_n \text{res}[G^+(r, r'; k)e^{-ik^2 t_2 k}] \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_L [G^+(r, r'; k)e^{-ik^2 t_2 k}] dk \end{aligned} \quad (4.31)$$

Por otra parte, el residuo se define por:

$$\text{res}_{k \rightarrow k_n} [G^+(r, r', k)] \equiv \lim_{k \rightarrow k_n} (k - k_n) G^+(r, r'; k)$$

Así que evaluando en cada polo, tenemos:

$$\text{res}[G^+(r, r'; k)e^{-ik^2 t_2 k}] = \lim_{k \rightarrow k_n} [k - k_n] \frac{\rho_n(r, r') e^{-ik^2 t_2 k}}{k - k_n} \quad (4.32)$$

entonces

$$\text{res}[G^+(r, r'; k)e^{-k^2 t_2 k}] = \rho_n(r, r') e^{-i v_n t} e^{-\frac{p}{2} t_2 k_n} \quad (4.33)$$

Esto refleja claramente un decaimiento exponencial para cada polo  $k_n$ .

En el *capítulo 3*, ecuación (3.41), encontramos que:

$$\rho_n(r, r') = \frac{u_n(r)u_n(r')}{2k_n} \quad (4.34)$$

De lo anterior se obtiene que la expresión para  $g(r, r', t)$  [5], se puede escribir como:

$$\begin{aligned} g(r, r', t) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Omega} [G^{++}(r, r'; k) e^{-ik^2 t} 2k] dk \\ &= \sum_n u_n(r) u_n(r') e^{-k_n^2 t} \\ &\sim \frac{1}{2\pi i} \int_L [G^{++}(r, r'; k) e^{-ik^2 t} 2k] dk \end{aligned} \quad (4.35)$$

La contribución no exponencial se manifiesta en el segundo sumando, es decir, en la integral sobre  $L$ .

Con los conceptos anteriores, podemos expresar a la amplitud de no-decaimiento  $A(t)$  como:

$$A(t) = \sum_n A_n(t) + I(t) \quad (4.36)$$

con  $I(t)$  la contribución no exponencial.

## 4.2 CALCULO DE LA FORMA GENERAL PARA $A(t)$

Revisando algunas referencias bibliográficas hemos encontrado, con mucha frecuencia, que expresan a la amplitud de no-decaimiento como:

$$A(t) = A_n(t) \quad A_n, \text{ resonancia principal} \quad (4.37)$$

Que lo anterior sea estrictamente válido, tiene estrecha relación con la forma de  $\Psi(r, 0)$ . Si la forma de  $\Psi(r, 0)$  es tal que abarca varias resonancias, el resultado anterior no se sigue. Cabe señalar que la validez de la expresión anterior para  $A(t)$ , es independiente de la separación de las resonancias.

La resonancia por lo cual ha de decaer preferentemente el sistema, está dada básicamente por la función

$$\rho_n(r, r')$$

la cual se expresa en función de  $u_n(r)$  y  $u_n(r')$ , eigenfunciones de la ecuación radial de Schrödinger, asociadas a los polos.

Ahora bien, en la expresión original para  $A(t)$ , no habíamos establecido concretamente los límites de integración respectivos. Estos son:

$$A(t) = \int_0^a dr \int_0^a dr' \Psi(r, 0) g(r, r', t) \Psi(r', 0) \quad (4.38)$$

con

$$P(t) = |A(t)|^2 \quad (4.39)$$

El límite de integración  $a$ , es debido a que para que un sistema decaiga es imprescindible establecer cuando estamos "afuera" (decaimiento) y cuando "adentro" (no-decaimiento). Es decir, podemos representarlo gráficamente por la *figura 4.5*.

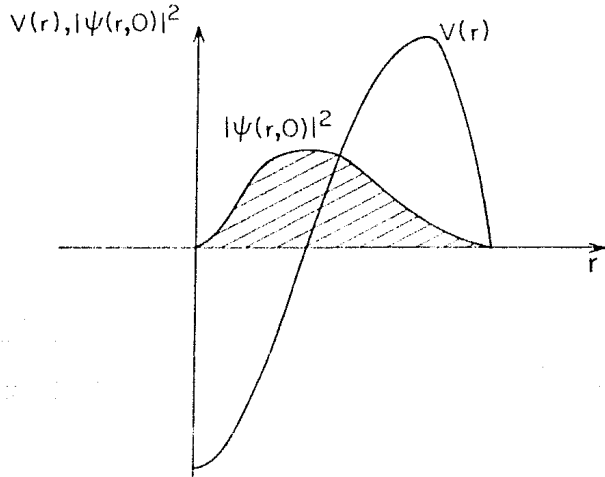


Figura 4.5: Representación de la función de onda antes de decaer, y del potencial al cual está sometido el sistema.

La expresión para la amplitud de no decaimiento  $A(t)$ , considerada en la ecuación (4.36), puede escribirse con la ayuda de la fórmula (4.1), como:

$$A(t) = \sum_n c_n c_n e^{-i\omega_n t} e^{-\Gamma_n t} + I_n(t) \quad (4.10)$$

con

$$c_n = \int \Psi(r, 0) u_n(r) dr \quad (4.11)$$

$$c_n = \int \Psi(r', 0) u_n(r') dr' \quad (4.12)$$

$$I(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \int dr \int dr' \Psi(r, 0) G^+(r, r'; k) \Psi(r', 0) e^{-ik^2 t} 2k dk \quad (4.43)$$

Podemos hacer las siguientes observaciones:

1. Si  $t = 0$ ,  $A(0) = 1$

$$\implies \sum_n c_n c_n + I_n(t) = 1 \quad (4.44)$$

2. Los términos discretos implican decaimiento exponencial.

Gamow derivó la expresión [1]:

$$A(t) = e^{-i\pi n t} e^{-\frac{\Gamma_n t}{2}} \quad (4.45)$$

y por lo tanto,

$$P(t) = e^{-\Gamma_n t} \quad (4.46)$$

En todos los sistemas observados hasta ahora,  $P(t)$  se comporta del modo calculado por Gamow. Experimentalmente podemos encontrar  $(E_n, \Gamma_n)$  que contienen toda la información del decaimiento. Es por esto que deseamos expresar  $I(t) = f(E_n, \Gamma_n)$ .

Para obtener la forma completa de  $I(t)$ , utilizamos el desarrollo de  $G^+(r, r', k)$ , dado por la ecuación (3.50); esto es:

$$G^+(r, r'; k) \equiv \sum_n \frac{u_n(r) u_n(r')}{2k_n(k - k_n)} \quad r, r' < a \quad (4.47)$$

Sustituyendo la expresión de  $G^+(r, r'; k)$  en la fórmula para  $I(t)$ , resulta:

$$I(t) = - \sum_n \frac{1}{2\pi i} \int_0^n dr \Psi(r, 0) \int_0^n dr' \Psi(r', 0) \int_L \frac{u_n(r)u_n(r')}{2k_n(k - k_n)} 2k e^{-ik^2 t} dk \quad (4.48)$$

Encontremos ahora una expresión más simple para la función de Green. Observemos que la sumatoria puede descomponerse del modo siguiente:

$$\sum_n \frac{u_n(r)u_n(r')}{2k_n(k - k_n)} = \sum_n \frac{u_n(r)u_n(r')}{2k} \left[ \frac{k}{k_n(k - k_n)} \right] \quad (4.49)$$

$$\sum_n \frac{u_n(r)u_n(r')}{2k_n(k - k_n)} = \sum_n \frac{u_n(r)u_n(r')}{2k} \left[ \frac{1}{k - k_n} + \frac{1}{k_n} \right] \quad (4.50)$$

entonces,

$$\sum_n \frac{u_n(r)u_n(r')}{2k_n(k - k_n)} = \sum_n \frac{u_n(r)u_n(r')}{2k(k - k_n)} + \frac{1}{2k} \sum_n \frac{u_n(r)u_n(r')}{k_n} \quad (4.51)$$

pero sabemos que,

$$\sum_n \frac{u_n(r)u_n(r')}{k_n} = 0 \quad (4.52)$$

por lo tanto,

$$\sum_n \frac{u_n(r)u_n(r')}{2k_n(k-k_n)} = \sum_n \frac{u_n(r)u_n(r')}{2k(k-k_n)} \quad (4.53)$$

Podemos entonces expresar a  $G^+(r, r'; k)$  del modo siguiente:

$$G^+(r, r'; k) = \sum_n \frac{u_n(r)u_n(r')}{2k(k-k_n)} = \sum_n \frac{u_n(r)u_n(r')}{2k(k-k_n)} + \sum_n \frac{u_n^*(r)u_n^*(r')}{2k(k+k_n^*)} \quad (4.54)$$

De esta forma, usando (4.54) en la ecuación (4.48), la expresión para  $I(t)$  nos queda:

$$\begin{aligned} I(t) = & -\frac{1}{2\pi i} \sum_n c_n \bar{c}_n \int_L \frac{e^{-ik^2 t} dk}{k-k_n} \\ & -\frac{1}{2\pi i} \sum_n (c_n \bar{c}_n)^* \int_L \frac{e^{-ik^2 t} dk}{k+k_n^*} \end{aligned} \quad (4.55)$$

Evaluemos la siguiente integral,

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{e^{-ik^2 t} dk}{k-k_n} \quad (4.56)$$

Multipliquemos al numerador y al denominador de la integral (4.56), por  $t^{\frac{1}{2}}$ , y cambiemos el signo del denominador:

$$-\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{e^{-ik^2 t} t^{\frac{1}{2}} dk}{t^{\frac{1}{2}} k_n - t^{\frac{1}{2}} k} \quad (4.57)$$

Sea

$$\varphi = kt^{\frac{1}{2}} \quad (4.58)$$

entonces:

$$\frac{i}{\pi} \int_L \frac{e^{-i\varphi^2} d\varphi}{t^{\frac{1}{2}} k_n - \varphi} \quad (4.59)$$

Hagamos el cambio de variable correspondiente a una rotación en el plano, de  $45^{\circ}$ <sup>1</sup>; esto es:

$$\lambda = \sqrt{-i}\varphi \quad (4.60)$$

Es así que la integral se expresa entonces,

$$\frac{i\sqrt{-i}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\lambda^2} d\lambda}{t^{\frac{1}{2}} k_n - \sqrt{-i}\lambda} \quad (4.61)$$

Multiplcando la expresión anterior por  $\sqrt{i}/\sqrt{i}$ , se tiene

$$\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\lambda^2} d\lambda}{\sqrt{i} k_n t^{\frac{1}{2}} - \lambda} \quad (4.62)$$

---

<sup>1</sup>Recordando que  $\sqrt{-i} = e^{-\frac{\pi}{4}}$



Definamos la siguiente variable:

$$z \equiv \sqrt{i} k_n t^{\frac{1}{2}} \quad (4.63)$$

La integral a evaluar queda, finalmente, de la forma de la *función de error*  $\omega(z)$  [20]; es decir:

$$\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\lambda^2} d\lambda}{z - \lambda} \equiv \omega(z) \quad (4.64)$$

La segunda integral de la ecuación (4.55), se obtiene por un proceso análogo; salvo que el signo se preserve, debido a que en el denominador aparece una suma, en lugar de la resta que se presenta en la primera integral; así, no es necesario un cambio de signo. Nos queda:

$$-\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\lambda^2} d\lambda}{z - \lambda} \equiv \omega(z) \quad (4.65)$$

con  $\tilde{z} \equiv \sqrt{i} k_n^* t^{\frac{1}{2}}$

Para expresar la integral en términos de la *función de error*  $\omega(z)$  se requiere que  $Imz > 0$  [20]. Verifiquemos que la condición sea válida en nuestro caso:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1+i}{\sqrt{2}} k_n t^{\frac{1}{2}} \\ z &= \frac{1+i}{\sqrt{2}} (\alpha_n - i\beta_n) t^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.66)$$

i.e.

$$z = \frac{\alpha_n + \beta_n}{\sqrt{2}} t^{\frac{1}{2}} + i \frac{(\alpha_n - \beta_n)}{\sqrt{2}} t^{\frac{1}{2}} \quad (4.67)$$

por lo tanto:

$$Imz > 0 \implies \alpha_n > \beta_n \text{ que se cumple siempre} \quad (4.68)$$

Mientras que

$$Im\bar{z} > 0 \implies \alpha_n + \beta_n > 0 \quad (4.69)$$

pero por definición  $\alpha_n, \beta_n > 0$ .

Así que la expresión (4.55) toma la forma,

$$I(t) = \sum_n \left[ c_n \bar{c}_n \left( -\frac{1}{2} \omega(z) \right) + (c_n c_n)^* \left( \frac{1}{2} \omega(\bar{z}) \right) \right] \quad (4.70)$$

o bien,

$$I(t) = -\frac{1}{2} \sum_n \left[ c_n \bar{c}_n \omega[(ik_n^2 t)^{\frac{1}{2}}] - (c_n c_n)^* \omega[(ik_n^{*2} t)^{\frac{1}{2}}] \right] \quad (4.71)$$

Finalmente, obtenemos la expresión para  $A(t)$ .

$$A(t) = \sum_n \left[ c_n \bar{c}_n e^{-ik_n^2 t} - \frac{1}{2} c_n \bar{c}_n \omega[(ik_n^2 t)^{\frac{1}{2}}] + \frac{1}{2} (c_n c_n)^* \omega[(ik_n^{*2} t)^{\frac{1}{2}}] \right] \quad (4.72)$$

es decir,

$$A(t) = f(\epsilon_n, \Gamma_n) \quad (4.73)$$

Como un medio para comprobar si nuestra expresión es válida, analicemos el caso  $t = 0$ :

$$t = 0 \implies A(0) = 1$$

$$A(0) = \sum_n \left[ c_n \bar{c}_n - \frac{1}{2} c_n \bar{c}_n + \frac{1}{2} (c_n \bar{c}_n)^* \right] \quad (4.74)$$

$$A(0) = \frac{1}{2} \sum_n [c_n \bar{c}_n + (c_n \bar{c}_n)^*] = 1 \quad (4.75)$$

$$A(0) = \text{Re} \sum_n c_n \bar{c}_n = 1 \quad (4.76)$$



## Capítulo 5

# FORMULA EXACTA DE UN TERMINO PARA A(t)

### 5.1 PROPIEDADES

Consideremos ahora una función inicial arbitraria  $\phi(r, 0)$  cuyo traslape con un polo sea diferente de cero, y cero con las demás resonancias. Los coeficientes se representarían entonces como:

$$c_n \dot{c}_n = x_n + iy_n \quad (5.1)$$

Las reglas de suma que cumplen los coeficientes, provienen de las condiciones que cumplen las sumas de las eigenfunciones  $u_n(r)$  (ecuaciones (3.52) y (3.53)); son las siguientes:

$$\sum_n \frac{c_n \dot{c}_n}{k_n} - \frac{(c_n \dot{c}_n)^*}{k_n^*} = 0 \quad (5.2)$$

$$\frac{1}{2} \sum_n [c_n \dot{c}_n + (c_n \dot{c}_n)^*] = 1 \quad (5.3)$$

En el caso que consideramos ahora, estas reglas de suma se verían como:

$$\frac{c_n \bar{c}_n}{k_n} - \frac{(c_n \bar{c}_n)^*}{k_n^*} = 0 \quad (5.4)$$

$$\frac{1}{2} [c_n \bar{c}_n + (c_n \bar{c}_n)^*] = 0 \quad (5.5)$$

De aquí que los coeficientes resultan ser:

$$c_n \bar{c}_n = 1 - i \frac{\beta_n}{\alpha_n} \quad (5.6)$$

$$(c_n \bar{c}_n)^* = 1 + i \frac{\beta_n}{\alpha_n} \quad (5.7)$$

según la definición de  $k_n$ .

De (4.72) tenemos que la expresión para  $A(t)$  queda finalmente:

$$A(t) = \left(1 - i \frac{\beta_n}{\alpha_n}\right) e^{-ik_n^* t} - \frac{1}{2} \left[ \left(1 - i \frac{\beta_n}{\alpha_n}\right) \omega[(ik_n^* t)^{\frac{1}{2}}] \right] + \frac{1}{2} \left[ \left(1 + i \frac{\beta_n}{\alpha_n}\right) \omega[(ik_n^* t)^{\frac{1}{2}}] \right] \quad (5.8)$$

La función  $\omega(z)$ , puede expresarse en términos de la *función de Moshinsky*,  $M(r=0, k_n, t)$  [21].

### 5.1.1 FORMULACION PARA TIEMPOS CORTOS

Con el fin de calcular  $A(t)$ , recurrimos a los desarrollos en serie de las funciones *exponencial* y de *error* [20].

$$\text{Función exponencial } e^\theta = \sum_n \frac{\theta^n}{n!} \quad (5.9)$$

$$\text{Función de error } \omega(\theta) = \sum_n \frac{(i\theta)^n}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \quad (5.10)$$

Desarrollando en serie las funciones exponencial y de error para tiempos pequeños,

$$t \ll \frac{1}{\Gamma}, \frac{1}{\epsilon_n}; \quad t \text{ pequeño}$$

$$e^{-ik_n^2 t} = 1 + \frac{(-ik_n^2 t)}{1!} + \frac{(-ik_n^2 t)^2}{2!} + \frac{(-ik_n^2 t)^3}{3!} + \dots \quad (5.11)$$

$$\omega[(ik_n^2 t)^{\frac{1}{2}}] = 1 + \frac{i(ik_n^2 t)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} + \frac{(i(ik_n^2 t)^{\frac{1}{2}})^2}{\Gamma(2)} + \frac{(i(ik_n^2 t)^{\frac{1}{2}})^3}{\Gamma(\frac{5}{2})} + \frac{(i(ik_n^2 t)^{\frac{1}{2}})^4}{\Gamma(3)} + \dots \quad (5.12)$$

Desarrollando la expresión para la función de error, se tiene:

$$\omega[(ik_n^2 t)^{\frac{1}{2}}] = 1 + \frac{\sqrt{-i} k_n t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}} - ik_n^2 t + \frac{\sqrt{i} k_n^3 t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{4}\pi^{\frac{1}{2}}} - \frac{k_n^4 t^2}{2} + \dots \quad (5.13)$$

análogamente,

$$\omega[(ik_n^{*2} t)^{\frac{1}{2}}] = 1 + \frac{\sqrt{-i} k_n^* t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}} - ik_n^{*2} t + \frac{\sqrt{i} k_n^{*3} t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{4}\pi^{\frac{1}{2}}} - \frac{k_n^{*4} t^2}{2} + \dots \quad (5.14)$$

Calculemos el término principal de la amplitud de no decaimiento  $A(t)$ :

$$A(t) \simeq \left(1 - i \frac{\beta_n}{\alpha_n}\right) - \frac{1}{2} \left(1 - i \frac{\beta_n}{\alpha_n}\right) \left[ \frac{i(ik_n^2 t)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} \right] + \frac{1}{2} \left(1 + i \frac{\beta_n}{\alpha_n}\right) \left[ \frac{i(ik_n^{*2} t)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} \right] \quad (5.15)$$

Simplificando,

$$A(t) \simeq 1 - \frac{\sqrt{i}\beta_n}{\alpha_n\pi^{\frac{1}{2}}}[k_n + k_n^*]t^{\frac{1}{2}} + \frac{i\sqrt{i}}{\pi^{\frac{1}{2}}}[k_n^* - k_n]t^{\frac{1}{2}} \quad (5.16)$$

pero  $k_n^* - k_n = 2i\beta_n$ , y  $k_n + k_n^* = 2\alpha_n$ ; entonces

$$A(t) \simeq 1 - \frac{\sqrt{i}\beta_n}{\pi^{\frac{1}{2}}}t^{\frac{1}{2}} \quad (5.17)$$



Por lo tanto, la contribución principal a la *probabilidad de no decaimiento*  $P(t)$ , es:

$$P(t) = A(t)A^*(t) \simeq 1 - \frac{8\beta_n}{\sqrt{2\pi}} t^{\frac{1}{2}} \quad (5.18)$$

Observamos que para  $P(t)$ , el término dominante a *tiempos cortos* es proporcional a  $t^{\frac{1}{2}}$ .

### 5.1.2 DESARROLLO ASINTOTICO PARA A(t)

Consideremos la fórmula completa de  $A(t)$ , obtenida en el *capítulo 4*, ecuación (4.72):

$$A(t) = c_n \bar{c}_n e^{-ik_n^2 t} - \frac{1}{2} [c_n \bar{c}_n \omega(z) - (c_n \bar{c}_n)^* \omega(\bar{z})] \quad (5.19)$$

en donde

$$z \equiv \sqrt{ik_n} t^{\frac{1}{2}} \quad (5.20)$$

$$\bar{z} \equiv \sqrt{ik_n^*} t^{\frac{1}{2}} \quad (5.21)$$

$$c_n \bar{c}_n = 1 - i \frac{\beta_n}{\alpha_n} \quad (5.22)$$

Para desarrollar  $\omega(z)$  a tiempos largos, recurrimos a la *función de error complementaria*  $erfc(z)$ . Se sabe que podemos relacionar ambas funciones [20], del siguiente modo:

$$\omega(z) = e^{-z^2} erfc(-iz) \quad (5.23)$$

Definamos que,

$$y = -iz \implies y^2 = -z^2 \quad (5.24)$$

Si  $y \rightarrow \infty$ , el desarrollo asintótico se expresa como:

$$\sqrt{\pi} y e^{y^2} erfc(y) \simeq 1 - \frac{1}{2y^2} + \frac{3}{4y^4} - \dots \quad (5.25)$$

es decir,

$$e^{y^2} erfc(y) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi} y} - \frac{1}{2\sqrt{\pi} y^3} + \frac{3}{4\sqrt{\pi} y^5} - \dots \quad (5.26)$$

Por lo tanto,

$$\omega(z) \equiv e^{-z^2} erfc(-iz) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}(-iz)} - \frac{1}{2\sqrt{\pi}(-iz)^3} + \dots \quad (5.27)$$

$$\omega(\bar{z}) \equiv e^{-\bar{z}^2} erfc(-i\bar{z}) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}(-i\bar{z})} - \frac{1}{2\sqrt{\pi}(-i\bar{z})^3} + \dots \quad (5.28)$$

Sustituyendo en la forma para  $A(t)$ , nos queda

$$A(t) = c_n \bar{c}_n e^{-ik_n^2 t} - \frac{1}{2} c_n \bar{c}_n \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi}(-iz)} - \frac{1}{2\sqrt{\pi}(-iz)^3} \right] + \frac{1}{2} (c_n \bar{c}_n)^* \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi}(-iz)} - \frac{1}{2\sqrt{\pi}(-iz)^3} \right] \quad (5.29)$$

Simplificando,

$$A(t) = c_n \bar{c}_n e^{-ik_n^2 t} - \frac{i}{2\sqrt{\pi}} \left[ \frac{c_n \bar{c}_n}{z} - \frac{(c_n \bar{c}_n)^*}{z} \right] - \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left[ \frac{c_n \bar{c}_n}{z^3} - \frac{(c_n \bar{c}_n)^*}{z^3} \right] \quad (5.30)$$

Retomando los valores para  $z$  y  $\bar{z}$ , resulta:

$$A(t) = c_n \bar{c}_n e^{-ik_n^2 t} - \frac{\sqrt{i}}{2\sqrt{\pi}} \left[ \frac{c_n \bar{c}_n}{k_n} - \frac{(c_n \bar{c}_n)^*}{k_n^*} \right] \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{4\sqrt{i\pi}} \left[ \frac{c_n \bar{c}_n}{k_n^3} - \frac{(c_n \bar{c}_n)^*}{k_n^{*3}} \right] \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \quad (5.31)$$

pero sabemos que

$$\frac{c_n \bar{c}_n}{k_n} - \frac{(c_n \bar{c}_n)^*}{k_n^*} = \frac{k_n}{\alpha_n k_n} - \frac{k_n^*}{\alpha_n k_n^*} \equiv 0 \quad (5.32)$$

De aquí que el término proporcional a  $t^{-\frac{1}{2}}$  se anule. Tenemos entonces

$$A(t) = c_n \bar{c}_n e^{-ik_n^2 t} - \frac{1}{4\sqrt{i\pi}} \left[ \frac{c_n c_n}{k_n^3} - \frac{(c_n c_n)^*}{k_n^3} \right] \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \quad (5.33)$$

Es decir, si  $c_n c_n = k_n / \alpha_n$ , resulta:

$$A(t) = c_n \bar{c}_n e^{-ik_n^2 t} - \frac{1}{4\sqrt{i\pi} \alpha_n} \left[ \frac{1}{k_n^2} - \frac{1}{k_n^2} \right] \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \quad (5.34)$$

Calculemos la probabilidad asintótica de no decaimiento. Si  $t \rightarrow \infty$  la *función exponencial* va a cero más rápido que la parte no exponencial; obtenemos:

$$P(t) \simeq \frac{1}{16\pi\alpha_n^2} \frac{\Gamma_n^2}{(\epsilon_n^2 + \Gamma_n^2/4)^2} \frac{1}{t^3} \quad (5.35)$$

Por consiguiente, para *tiempos largos*, la *probabilidad de no decaimiento* presenta como dependencia principal un término proporcional a  $t^{-3}$ .

## 5.2 DISCUSION DE EJEMPLOS

Trataremos diferentes casos, en los que varía la razón de la *energía*  $E_n$  al *ancho*  $\Gamma_n$  de la resonancia. En todos los ejemplos, el valor de  $\Gamma_n$  es *uno*; es decir, la vida media del sistema es *uno*. De este modo, al graficar el *logaritmo natural* de la probabilidad de no decaimiento contra el tiempo (en unidades de vida media), el decaimiento puramente exponencial queda representado por una recta de pendiente  $-1$ . Esto

hace más fácil la visualización de las desviaciones al comportamiento estrictamente exponencial.

Todos los cálculos fueron realizados en la microvax 3900 del Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma de México. El programa se escribió en FORTRAN, y en doble precisión; así que todos los valores se manejan con 16 cifras de precisión para los números reales, y 32 para los complejos. Se manejan cantidades cuyo intervalo se encuentre entre  $1 \times 10^{-308}$  y  $1 \times 10^{308}$ <sup>1</sup>.

Procedamos a presentar los ejemplos.

El primer caso corresponde a un sistema que difícilmente puede encontrarse en la naturaleza; sin embargo, tiene interés teórico. Se trata del sistema con  $E_n = 0.1$  y  $\Gamma_n = 1$ . Para una apreciación más adecuada, graficamos difentes cortes, en los cuales el tiempo va aumentando. Observamos que en este caso peculiar, el decaimiento no pasa nunca por la *fase exponencial*. Alrededor de 3 *vidas medias*, el comportamiento es ya el correspondiente a *tiempos largos*. Encontramos una sola oscilación en todo el tiempo. A *tiempos cortos*, la desviación al decaimiento exponencial va como  $t^{\frac{1}{2}}$ .

En esta primera gráfica de la serie  $R = E_n/\Gamma_n = 0.1$ , correspondiente a la *figura 5.1*, podemos observar claramente que la parte completa del decaimiento es proporcional a  $t^{\frac{1}{2}}$ .

La segunda gráfica seleccionada, que aparece en la *figura 5.2*, muestra como en este caso especial, no existe la parte estrictamente exponencial del decaimiento. En  $t \simeq 3$  *vidas medias*, se encuentra el cambio de pendiente indicado por el cruce con la fase exponencial.

El último ejemplo de este grupo, que se observa en la *figura 5.3* muestra claramente el comportamiento tanto a *tiempos cortos*, como a *tiempos largos*. Debe resaltarse el hecho de que el decaimiento *nunca*

---

<sup>1</sup>Tanto el programa como detalles específicos, pueden encontrarse en el *Apéndice A*.

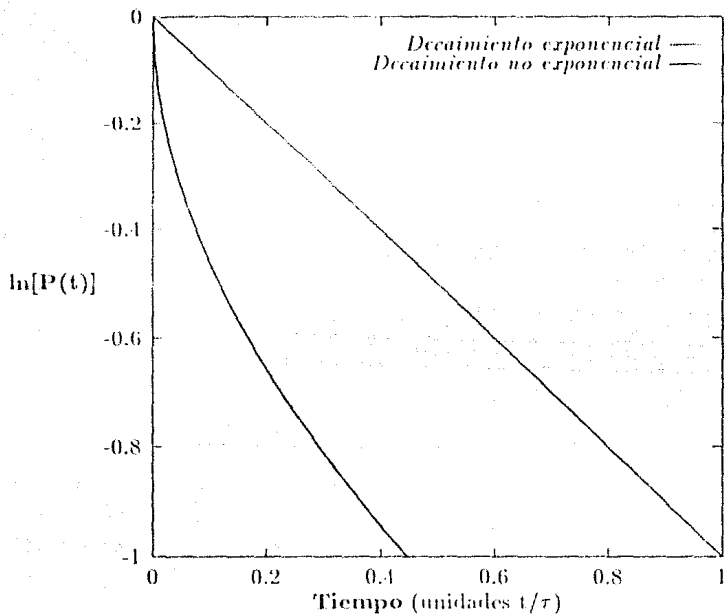


Figura 5.1: Comparación del decaimiento no exponencial respecto del exponencial, para  $R = 0.1$  y  $t = 1$  vida media.

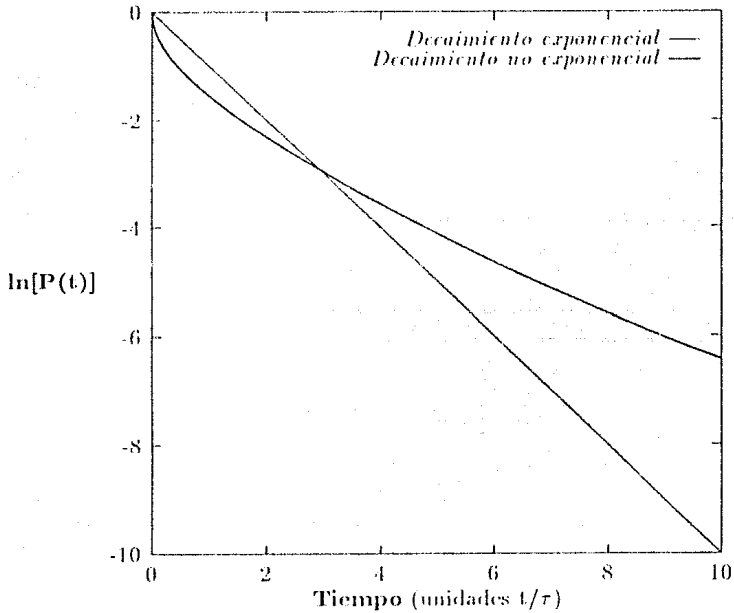


Figura 5.2: Gráfica del  $\ln(\text{probabilidad de no decaimiento})$  en su parte exponencial y en su forma completa. Obsérvese el cruce de la parte no exponencial con la exponencial, alrededor de 3 *vidas medias*.

es exponencial.

En el segundo conjunto de gráficas, ilustramos el caso  $E_n = 1$  es decir,  $R = E_n/\Gamma_n = 1$ . En la *figura 5.4* tenemos la parte de *tiempos cortos*, correspondiente a este sistema. La primera oscilación es más suave que en el caso anterior. Los llamados *tiempos cortos* aparecen antes. Conforme  $R$  crece, los *tiempos cortos* se encuentran más cerca del origen. Se observa nuevamente que el término principal de la parte no exponencial del decaimiento, va como  $t^{\frac{1}{2}}$ .

La *figura 5.5* nos muestra la segunda oscilación de la parte no exponencial. Cruza la parte exponencial cerca de 1.2 *vidas medias*.

Avanzando en el tiempo, presentamos la tercera gráfica del conjunto  $R = 1$ . Podemos observarla en la *figura 5.6*. Seguimos en el régimen de *tiempos cortos*; las oscilaciones parecen atenuarse, para más tarde hacerse pronunciadas.

En el cuarto y último ejemplo de este conjunto, que corresponde a la *figura 5.7*, se observa el desarrollo de la gráfica para *tiempos largos*. En este caso, puede verse la existencia de la parte puramente exponencial del decaimiento. Cabe señalar que este sistema sí puede encontrarse en la naturaleza; es decir, va más allá del interés meramente teórico. Obsérvese con cuidado la peculiar manera en que se pasa a los *tiempos largos*; con un pronunciado pico a  $t = 12$  *vidas medias*.

Analicemos ahora el sistema  $E_n = 10$ , es decir  $R = 10$ . En el primer caso, que se observa en la *figura 5.8*, tenemos la parte de *tiempos cortos*. Debe notarse que las desviaciones ocurren a tiempos más pequeños, conforme crece  $R$ . Se percibe la dependencia en  $t^{\frac{1}{2}}$ , de la parte no exponencial.

La siguiente gráfica de  $R = 10$ , que se puede ver en la *figura 5.9*, nos muestra la segunda oscilación de la parte no exponencial. Las oscilaciones van atenuándose alrededor de la parte exponencial, hasta fundirse con ella.



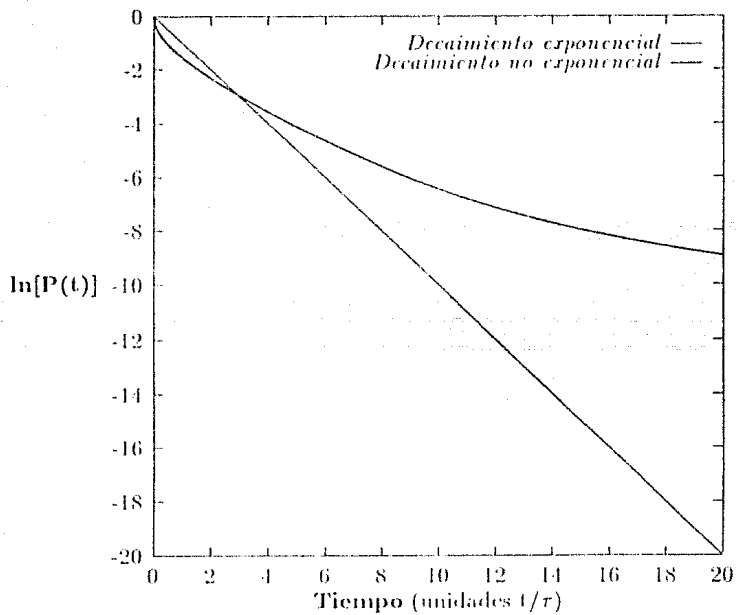


Figura 5.3: Gráfica que ilustra el comportamiento para el sistema  $R = 0.1$ , para *tiempos largos* y *tiempos cortos*.

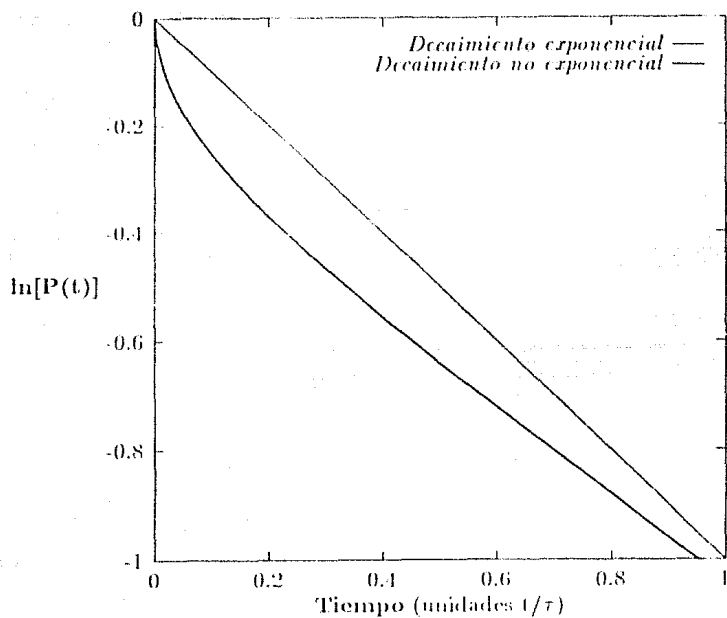


Figura 5.4: Gráfica para el caso  $R = 1$ , a *tiempos cortos*. La primera oscilación es menos pronunciada que en el sistema  $R = 0.1$ .

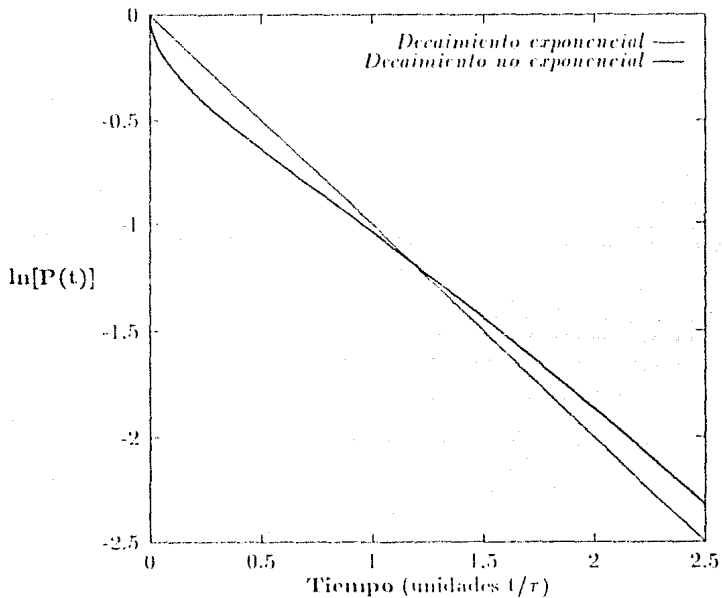


Figura 5.5: Para  $R = 1$ , se ilustra la segunda oscilación del logaritmo natural de la probabilidad de no decaimiento en su forma completa.

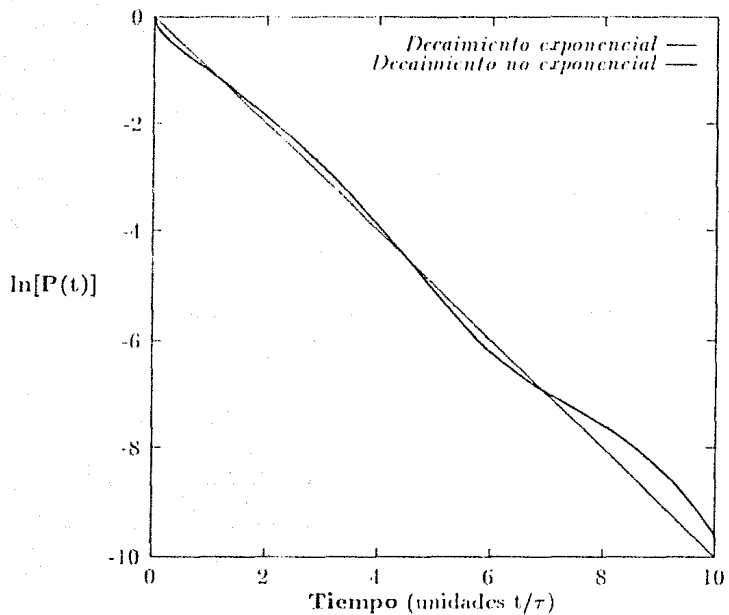


Figura 5.6: Comportamiento del sistema  $R = 1$  a  $t = 10$  *vidas medias*; nótese que la última oscilación es más intensa que las otras.

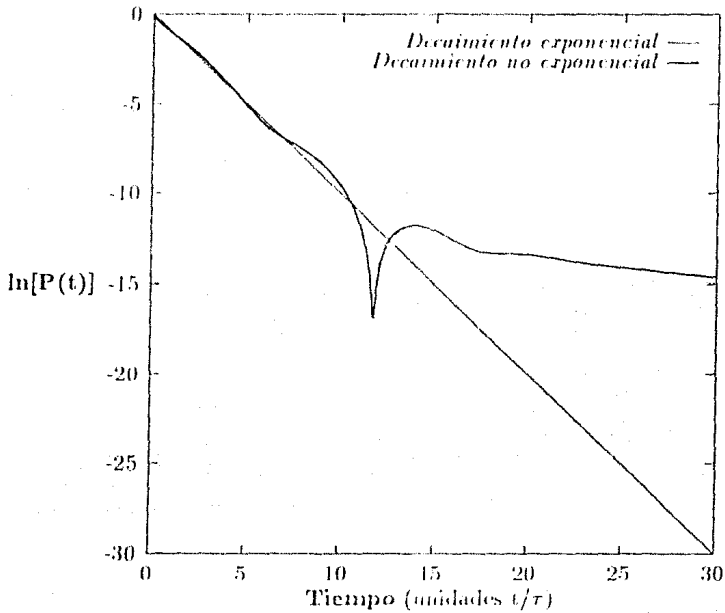


Figura 5.7: Comportamiento del sistema  $R = 1$ , para *tiempos largos*; se puede ver que entre 1 y 5 *vidas medias* el decaimiento es exponencial.

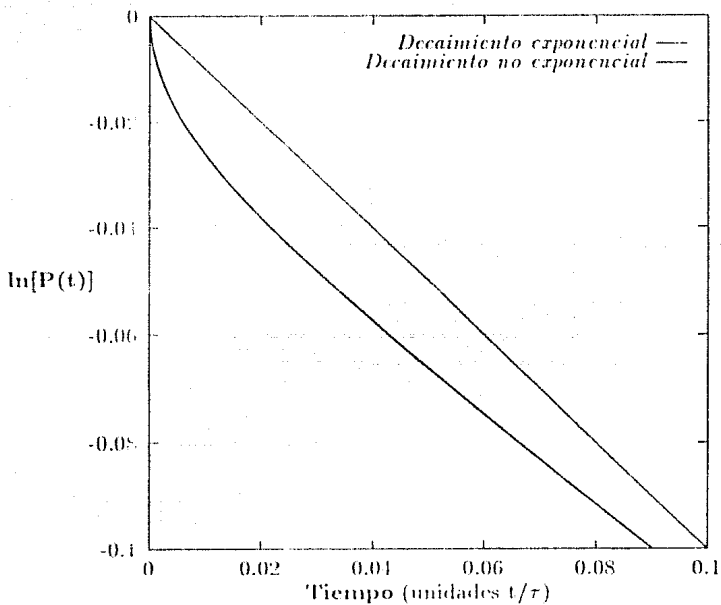


Figura 5.8: Sistema  $R = 10$ . Se manifiesta la primera oscilación para los *tiempos cortos*. Nótese que las desviaciones a *tiempos pequeños* ocurren más cerca de  $t = 0$ .

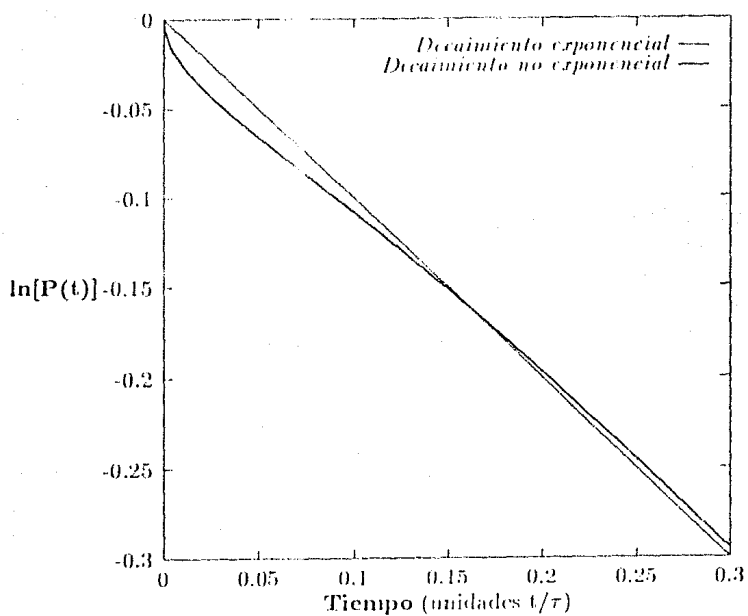


Figura 5.9: Gráfica que ilustra, para  $B = 10$ , la atenuación de las oscilaciones del comportamiento no exponencial, respecto del exponencial.

En la gráfica de la *figura 5.10*, dibujada a *una vida media*, se aprecia claramente la parte estrictamente exponencial del decaimiento. A partir de  $t = .012$  *vidas medias*, se puede hablar del decaimiento calculado por Gamow.

La última gráfica de  $R = 10$ , presentada en la *figura 5.11* determina los *tiempos largos*. Estos se encuentran después de 20 *vidas medias*, aproximadamente. A partir de aquí, el término principal de la probabilidad de no decaimiento completa, depende de  $t^{-3}$ .

Procedamos ahora a tratar el caso  $R = E_n = 25$ . En la primera gráfica correspondiente a la *figura 5.12*, se nota muy claramente como, al aumentar  $R$ , las oscilaciones del decaimiento no exponencial aparecen a tiempos cada vez menores. Las desviaciones son más pequeñas, como puede apreciarse.

La *figura 5.13* muestra como las oscilaciones van disminuyendo, hasta juntarse con la parte exponencial. Se dibuja hasta  $t = 0.1$  *vidas medias*.

Ahora, en la *figura 5.14*, presentamos una ampliación del comportamiento del decaimiento no exponencial, antes de cambiar a la parte de *tiempos largos*; esto ocurre a 25 *vidas medias*, aproximadamente.

En la última gráfica con  $R = 25$ , representada por la *figura 5.15*, se ilustra la desviación a *tiempos largos*, empezando en  $t = 0$ . Las oscilaciones a *tiempos pequeños*, no pueden verse a esta escala.

El último conjunto de gráficas corresponde a  $R = E_n = 100$ . La *figura 5.16*, ilustra el desarrollo a *tiempos cortos*. Las oscilaciones son siempre de la misma forma, salvo que tienen distinta escala.

La segunda gráfica, que se observa en la *figura 5.17*, muestra la recuperación del decaimiento exponencial. Debe notarse que esto ocurre a tiempos más cortos, respecto de los otros casos. A  $t = .016$  *vidas medias*, tratamos ya con la parte estrictamente exponencial.



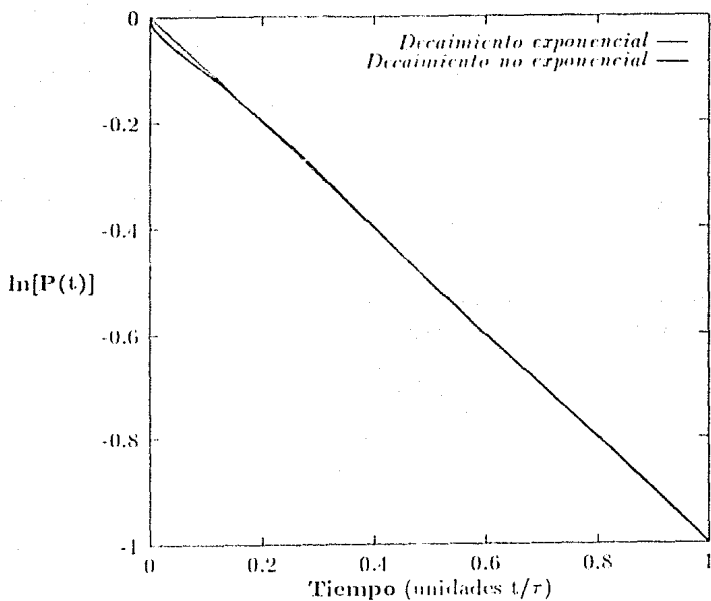


Figura 5.10: En esta gráfica apreciamos la recuperación del decaimiento exponencial entre  $t = .012$  y  $t = 1$  vidas medias; seguimos en el caso  $R = 10$ .

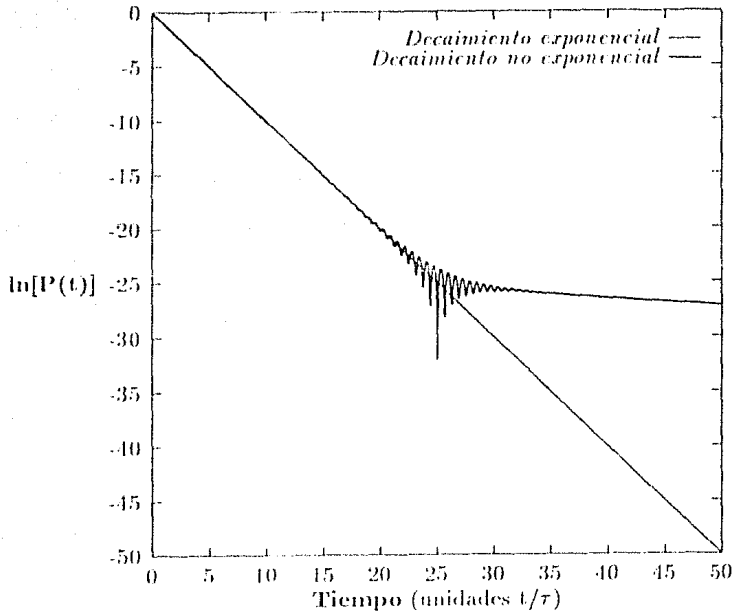


Figura 5.11: Ilustración de los llamados *tiempos largos*, para el sistema  $R = 10$ . Obsérvese la existencia de oscilaciones, poco antes de pasar al régimen de *tiempos largos*, en  $t = 20$  *vidas medias*.

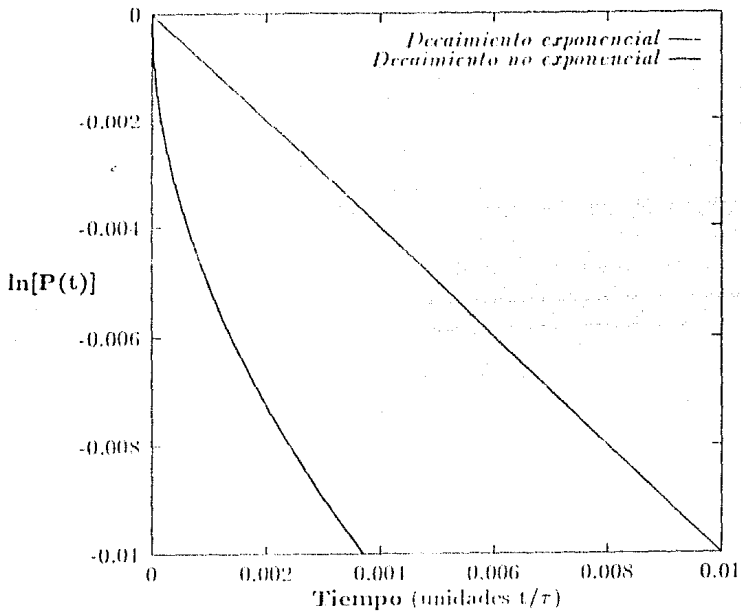


Figura 5.12: Primera gráfica para el sistema  $R = 25$ . Las oscilaciones son de menor magnitud, y se presentan a tiempos más pequeños.

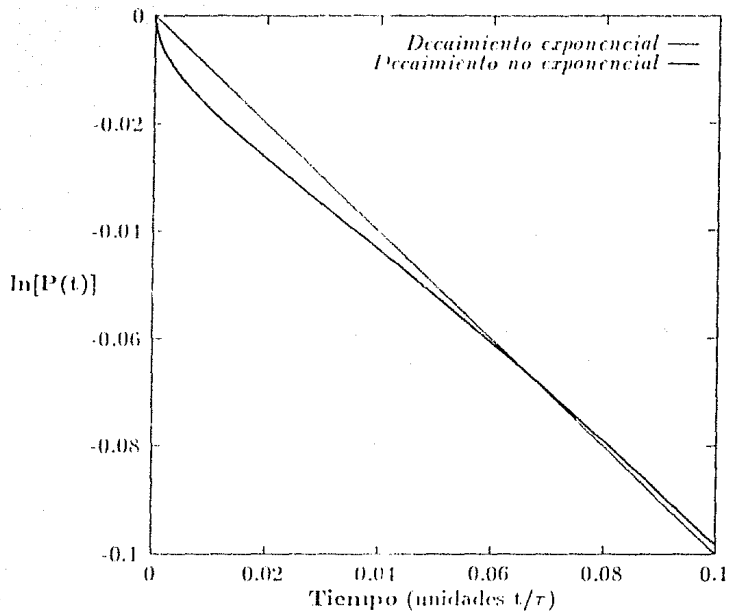


Figura 5.13: Segunda oscilación para el sistema  $R = 25$ . Se aprecia como las desviaciones se van atenuando.

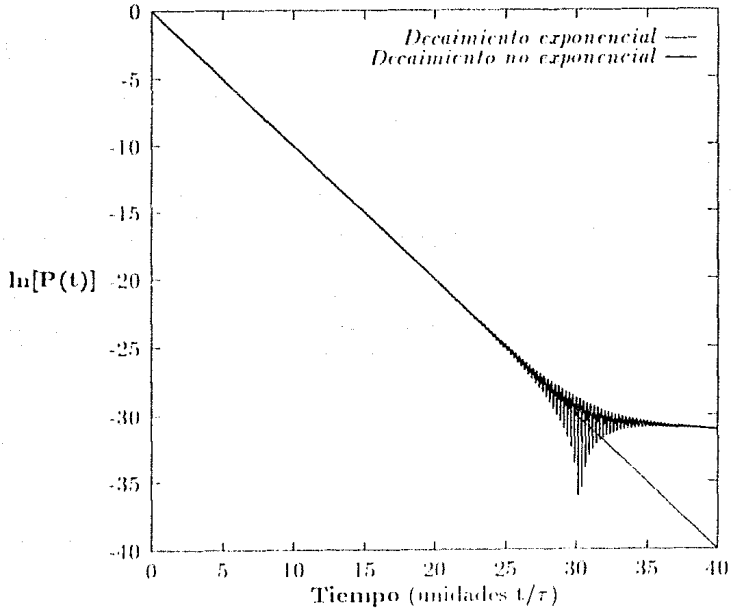


Figura 5.14: Acercamiento del desarrollo del decaimiento no exponencial a tiempos largos. Nótese que conforme  $R$  crece, el número de fluctuaciones aumenta.

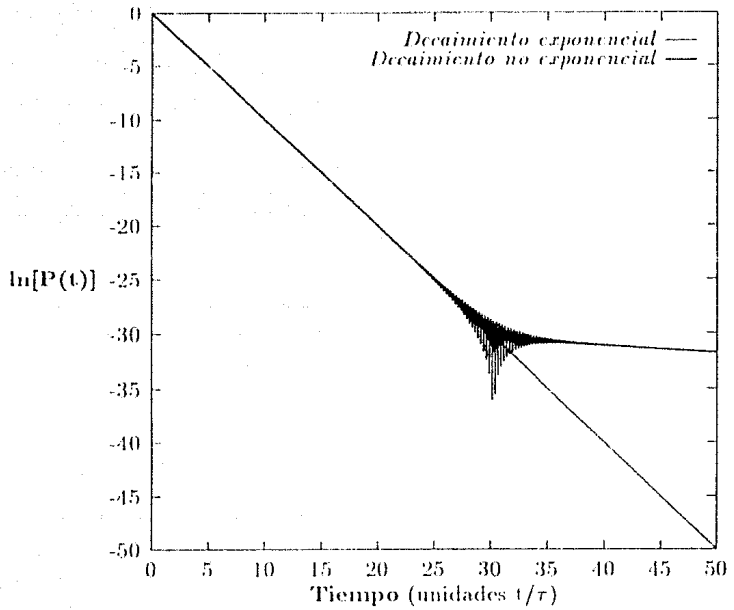


Figura 5.15: Desarrollo a *tiempos largos* de  $R = 25$ , desde otra escala. Las primeras desviaciones no pueden observarse.

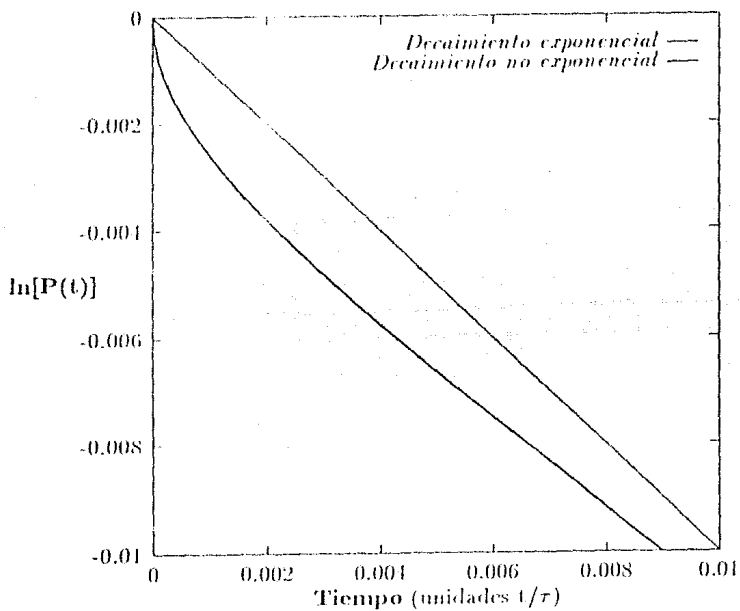


Figura 5.16: Sistema  $R = 100$ . Se muestra el comportamiento a tiempos cortos.

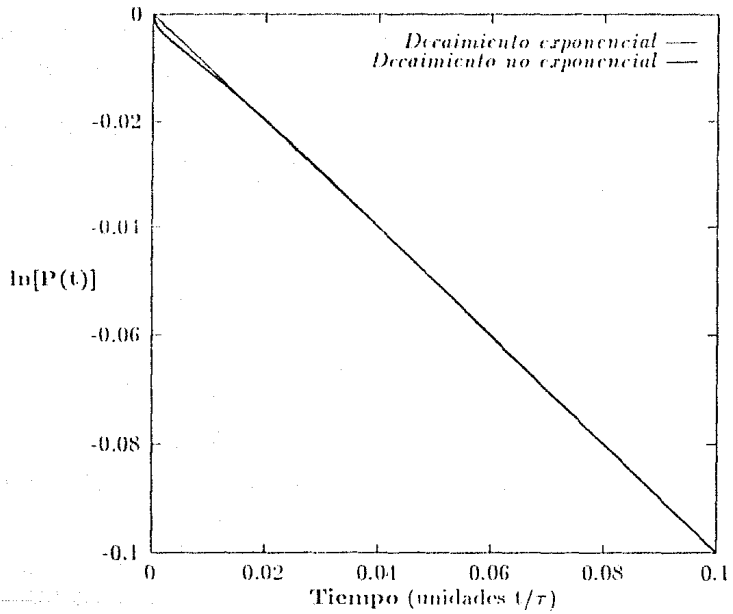


Figura 5.17: Recuperación del decaimiento exponencial en el caso  $R = 100$ ; nótese que los *tiempos cortos*, terminan en  $t = .016$  vidas medias.



Mostramos, en la *figura 5.18*, una amplificación del comportamiento que se presenta antes de pasar al régimen asintótico, en el decaimiento no exponencial. Las fluctuaciones se manifiestan con más intensidad y en número mayor que en los casos ya analizados.

La última gráfica que describiremos para  $R = 100$ , es la que corresponde a la visualización del decaimiento, desde el origen, hasta los *tiempos largos*. Se puede observar en la *figura 5.19*.

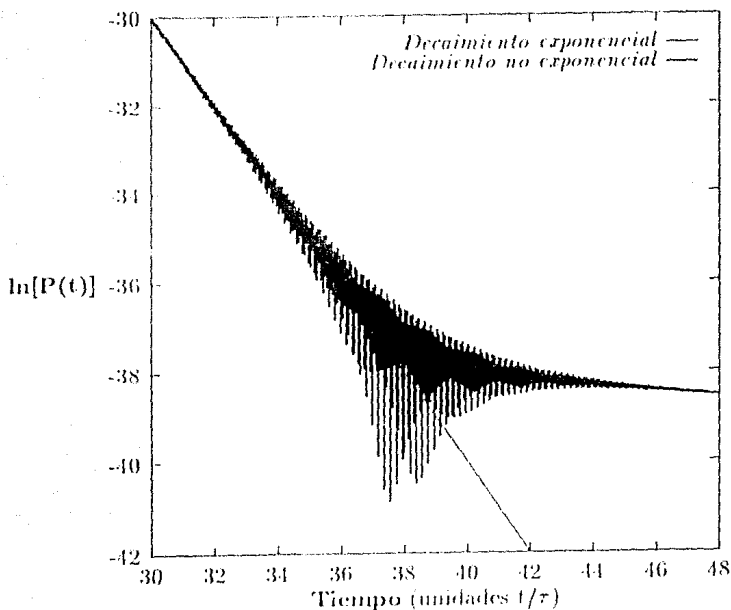


Figura 5.18: Amplificación del comportamiento del sistema  $R = 100$ , al acercarse a la parte asintótica del decaimiento no exponencial. Las oscilaciones van aumentando, para luego atenuarse y desaparecer en la parte de *tiempos largos*.

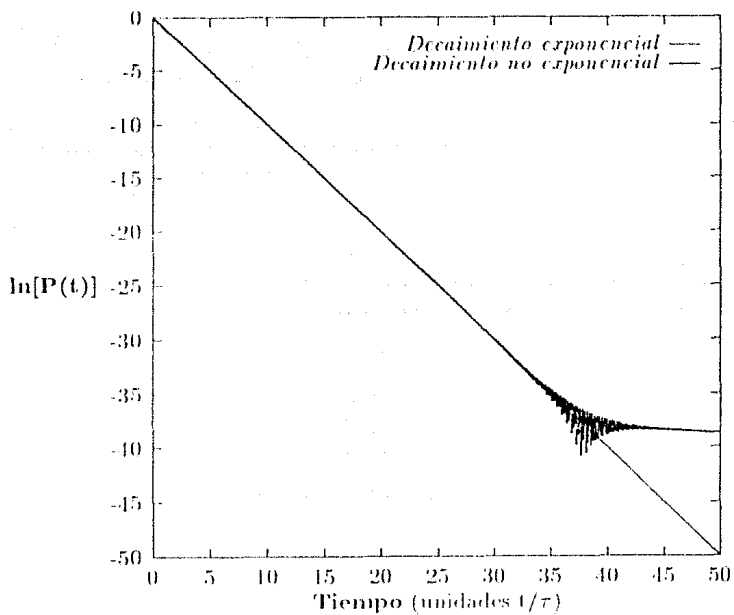


Figura 5.19: Gráfica correspondiente a los *tiempos largos*, para el caso  $R = 100$ . Después de aproximadamente  $t = 31$  *vidas medias*, el decaimiento no exponencial depende principalmente de  $t^{-3}$ .



## Capítulo 6

# CONCLUSIONES

De acuerdo al análisis realizado, podemos concluir que en todos los sistemas cuánticos tratados, están presentes los efectos no exponenciales; tanto a *tiempos cortos* como a *tiempos largos*. En el caso  $R \approx 0.1$ , específicamente, no se encuentra región de decaimiento estrictamente exponencial; de hecho, no aparece en aquellas resonancias con  $E_n \ll \Gamma_n$ .

Es muy importante hacer notar, que si se toma la *fórmula exacta de un término*, los coeficientes que aparecen en la expresión para la amplitud de no decaimiento *no son estrictamente uno*. Su parte real es uno, pero tienen una parte imaginaria que, aunque pequeña, es vital. Son estos coeficientes los que dan lugar a que, a *tiempos largos*, la contribución  $t^{-\frac{1}{2}}$  se anule. Esto nos lleva a que el término principal a la probabilidad de no decaimiento sea proporcional a  $t^{-3}$ . Recordemos que estos coeficientes quedaron expresados como:

$$c_n \bar{c}_n = 1 - i \frac{\beta_n}{\alpha_n} \quad (6.1)$$

El comportamiento de la probabilidad de no decaimiento en su forma general, a *tiempos pequeños*, resulta proporcional a  $t^{\frac{1}{2}}$ . Tanto esta dependencia, como la de *tiempos largos*, fueron verificadas numéricamente con un programa de ajuste de curvas, prácticamente sin error.

Se puede observar que en los casos estudiados en este trabajo, la primera oscilación del *logaritmo natural* de la probabilidad de no decaimiento en su forma completa, va por abajo del comportamiento exponencial. Que significan *tiempos cortos* y cuales pueden llamarse *tiempos largos*, depende del sistema cuántico de que se trate, en particular del valor de la razón  $R = E_n/\Gamma_n$ . Como apreciamos en las gráficas, cada sistema tiene sus peculiaridades. Pero hablando en general, se presentan los siguientes hechos:

1. Las primeras desviaciones respecto del decaimiento exponencial, se encuentran más temprano en el tiempo, si  $R$  es más grande.
2. Las desviaciones asintóticas aparecen a tiempos cada vez mayores, al aumentar  $R$ .
3. Las oscilaciones a *tiempos pequeños*, son de mayor intensidad, en tanto  $R$  sea menor.
4. Al crecer  $R$ , las fluctuaciones a *tiempos largos* aumentan en intensidad y en número.

# Bibliografía

- [1] **G. Gamow.** *Zur Quantentheorie des Atomkernes.* *Z.Phys.*, **51** p.204, (1928).
- [2] **L. A. Khalfin.** *Z. Eksp. i Teor. Fiz.* **33** (1957) (traducción : *Contribution to the Decay Theory of a Quasy-stationary State.* *Soviet Physics JETP*, **6** p.1053, (1958)).
- [3] **L. A. Khalfin.** *Phenomenological Theory of  $K^0$  Mesons and the Non-exponential Character of the Decay.* *JETP Lett.*, **8** p. 65, (1968).
- [4] **Gastón García-Calderón.** *Resonant States and the Decay Process. Symmetries in Physics*, editores A. Frank y K. B. Wolf. Springer-Verlag, Berlín, p. 253. (1992).
- [5] **Gastón García-Calderón & Rudolf Peierls.** *Resonant States and their Uses.* *Nucl. Phys. A*, **265** p.443. (1976).
- [6] **P. L. Kapur & R. Peierls.** *The Dispersion Formula for Nuclear Reactions.* *Proc. Roy. Soc. A*, **166** p. 277, (1938).
- [7] **E. P. Wigner & L. Eisenbud.** *Higher Angular Momenta and Long Range Interaction in Resonance Reactions.* *Phys Rev*, **72** p.29, (1947).
- [8] **John R. Taylor.** *Scattering Theory.* John Wiley & Sons capítulos 11, 12 y 13, (1972).
- [9] **R. E. Peierls.** *Complex Eigenvalues in Scattering Theory.* *Proc. Roy. Soc. A*, **253** p.16. (1959).

- [10] **J. Humblet & L. Rosenfeld.** *Theory of Nuclear Reactions.* *Nucl. Phys.*, **26** p.529, (1961).
- [11] **Emilio Segrè.** *Nuclear and Particles.* W. A. Benjamin Inc., capítulo 11, (1965).
- [12] **Leonard S. Rodberg & R. M. Thaler.** *Introduction to the Quantum Theory of Scattering.* *Pure and Applied Physics*, editores H. S. W. Massey y Keith A. Brueckner, Academic Press Inc. **26** capítulo 3, (1970).
- [13] **G. Breit & E. P. Wigner.** *Capture of Slow Neutrons.* *Phys. Rev.*, **49** p. 519, (1936).
- [14] **Claude Bloch.** *Une Formulation Unifiée de la Théorie des Réactions Nucléaires.* *Nucl. Phys.*, **4** p.503, (1957).
- [15] **G. García-Calderón.** *On the Over-completeness of the Set of Bound, Antibound and Resonant States.* *Lett. Nuovo Cimento*, **33**, 9 p.253, (1982).
- [16] **G. García-Calderón.** *An Expansion of Continuum Wave Functions in Terms of Resonant States.* *Nucl. Phys. A*, **261** p. 130,(1976).
- [17] **G. García-Calderón.** *Note on the Asymptotic Energy Behaviour of the Green Function for a Cut-off Potential.* *Lett. Nuovo Cimento*, **26**, 17 p.562, (1979).
- [18] **Roger G. Newton.** *Scattering Theory of Waves and Particles.* Springer-Verlag, Berlín, capítulo 12, (1982).
- [19] **Murray R. Spiegel.** *Laplace Transforms.* Schaum Publishing Company capítulos 1, 2 y apéndice B, (1980).
- [20] **Milton Abramowitz & Irene A. Stegun.** *Handbook of Mathematical Functions.* Dover Publications, Inc p.297, (1970).



- [21] **Gastón García-Calderón, G. Loyola and Marcos Moshinsky.** *The Decay Process: An Exactly Solvable Example and its Implications.* *Symmetries in Physics*, editores A. Frank y K. B. Wolf. Springer-Verlag, Berlín, p.273, (1992).

1988. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 15, 1-12.
- Wolpe, J. (1958). *Behavior therapy: An experimental approach*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Wolpe, J. (1969). *Behavior therapy: Techniques and corrections*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Wolpe, J. (1977). *Behavior therapy: Principles and procedures*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Wolpe, J. (1980). *Behavior therapy: Applications and behavior change*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Wolpe, J. (1982). *Behavior therapy: Principles and procedures*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Wolpe, J. (1987). *Behavior therapy: Principles and procedures*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Wolpe, J. (1990). *Behavior therapy: Principles and procedures*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Wolpe, J. (1995). *Behavior therapy: Principles and procedures*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Wolpe, J. (1998). *Behavior therapy: Principles and procedures*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Wolpe, J. (2001). *Behavior therapy: Principles and procedures*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Wolpe, J. (2004). *Behavior therapy: Principles and procedures*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Wolpe, J. (2007). *Behavior therapy: Principles and procedures*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Wolpe, J. (2010). *Behavior therapy: Principles and procedures*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Wolpe, J. (2013). *Behavior therapy: Principles and procedures*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Wolpe, J. (2016). *Behavior therapy: Principles and procedures*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Wolpe, J. (2019). *Behavior therapy: Principles and procedures*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Wolpe, J. (2022). *Behavior therapy: Principles and procedures*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Wolpe, J. (2025). *Behavior therapy: Principles and procedures*. New York: Holt, Rinehart & Winston.

## Apendice A

# Cálculo numérico de la probabilidad de no decaimiento no exponencial

El programa para evaluar la probabilidad de no decaimiento en su forma completa, y compararlo con la parte exponencial, fue escrito en *FORTRAN*, en doble precisión. La compilación es tal, que el rango se extiende desde  $1 \times 10^{-308}$  hasta  $1 \times 10^{308}$ ; esto con el fin de poder realizar los cálculos requeridos.

Se usó una subrutina de la biblioteca *IMSL*, para calcular numéricamente la *función de error* con argumento complejo. También requerimos de modificar y compilar una subrutina de la biblioteca *CERN*, para cuando el programa de *IMSL* se encontrara fuera de rango. La exactitud de los valores dados por las subrutinas se compararon con tablas [20].

Los datos de entrada del programa son la *energía*  $E_n$ , el *ancho* de la resonancia  $\Gamma_n$ , el *tiempo* en unidades de vida media y el *incremento* en el tiempo.

Para visualizar y amplificar los efectos no exponenciales, la salida del programa produce el *logaritmo natural* de las probabilidades de no decaimiento. Estos datos van directamente a las gráficas.

Las gráficas fueron realizadas con el programa *gnuplot*, y cada una de ellas contiene 20,000 puntos.

A continuación presentamos el programa que se usó para este trabajo.

## A.1 Programa de Cómputo

PROGRAM SHARAZSAD

```
double precision  En, gamman, t, incremento,
                  tiempo, hbarra, probabilidad,
                  probabilidadc.xp, improbabilidad,
                  improbabilidadc.xp
complex*16        r, z, ku, fcxp, i, N, s, ze,
                  f, g, ax
integer           a, b
```

```
open(unit=13, status = 'new', form = 'formatted')
```

```
print *, 'Dar el valor de En'
```

```
read (5,*) En
```

```
print *, 'Dar el valor de gamman'
```

```
read (5,*) gamman
```

```
print *, 'Cual es el valor de t?'
```

```
read (5,*) tiempo
```

```
print *, 'Cual es el valor del incremento en el tiempo?'
```

read (5,\*) incremento

```
hbarra = 1.d0
m = 1.d0
i = dcmplx(0.d0,1.d0)
```

```
kn = cdsqrt(dcmplx(En * m/hbarra, -(gamman/2.d0 * m/hbarra)))
```

```
f = dcmplx(1.d0, dimag(kn)/dreal(kn))
g = dconjg(f)
```

do t = 0.d0, tiempo, incremento

```
fexp = cdxp(-i * kn **2.d0 * t)
```

```
z = dcmplx(cdsqrt(i * kn **2.d0 * t))
```

```
call mericz(z, r, a)
```

$$z_c = \text{dcmplx}(\text{cdsqrt}(i * \text{dconjg}(kn) * *2.d0 * t))$$

```
call mericz(zc, s, b)
```

$$N = f * (-r/2.d0) + g * (s/2.d0)$$

$$\begin{aligned} \text{probabilidadc} &= \text{cdabs}(fcxp) * *2.d0 \\ \text{lnprobabilidadc} &= \text{dlog}(\text{probabilidadc}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{probabilidad} &= \text{cdabs}(N + f * fcxp) * *2.d0 \\ \text{lnprobabilidad} &= \text{dlog}(\text{probabilidad}) \end{aligned}$$

```
write (6,23) t, lnprobabilidadc, lnprobabilidad
```

```
23 format (F6.3, 3x, F32.30, 3x, F32.30)
```

```
end do
```

```
end
```