

300615

8  
zej



**UNIVERSIDAD LA SALLE**

**ESCUELA DE INGENIERIA**

**INCORPORADA A LA U. N. A. M.**

**"APLICACIONES DE LA EXTENSOMETRIA  
ELECTRICA A LA ENSEÑANZA DE LA  
MECANICA DE MATERIALES Y DEL  
ANALISIS ESTRUCTURAL"**

**TESIS PROFESIONAL**

**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:**

**INGENIERO CIVIL**

**P R E S E N T A :**

**AMANDA GARDUÑO GALLO**

**Asesor en Tesis: M. EN I. Fco. Javier Ribe Martínez de Velasco**

**MEXICO, D. F.**

**1993**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

|   |    |
|---|----|
| INTRODUCCION  | 1  |
| CAPITULO I: LA EXTENSOMETRIA  | 3  |
| 1.1 GENERALIDADES   | 4  |
| 1.2 TIPOS DE EXTENSOMETROS  | 8  |
| 1.3 EL EXTENSOMETRO ELECTRICO DE RESISTENCIA  | 20 |
| 1.4 TRANSDUCTORES   | 44 |
| CAPITULO II: MECANICA DE MATERIALES   | 47 |
| 2.1 GENERALIDADES   | 48 |
| 2.2 CONCEPTOS BASICOS   | 49 |
| 2.3 ESFUERZO NORMAL   | 51 |
| 2.4 DEFORMACION UNITARIA  | 52 |
| 2.5 DIAGRAMAS ESFUERZO-DEFORMACION  | 53 |
| 2.6 ELASTICIDAD Y PLASTICIDAD   | 57 |
| 2.7 LEY DE HOOKE  | 58 |
| 2.8 RELACION DE POISSON   | 59 |
| 2.9 DEFORMACIONES TERMICAS  | 60 |
| 2.10 ESFUERZO CORTANTE  | 61 |
| 2.11 DEFORMACION ANGULAR  | 63 |
| 2.12 ESTADO DE ESFUERZO PLANO   | 65 |
| 2.13 ESFUERZOS PRINCIPALES Y ESFUERZOS<br>CORTANTES MAXIMOS   | 69 |
| 2.14 CIRCULO DE MOHR  | 71 |
| 2.15 DEFORMACION PLANA, DEFORMACIONES PRINCIPALES,<br>DEFORMACION ANGULAR MAXIMA, CIRCULO DE MOHR<br>PARA DEFORMACIONES | 74 |
| 2.16 LEY DE HOOKE PARA ESFUERZO PLANO   | 78 |
| 2.17 TRANSFORMACION DEL CIRCULO DE MOHR<br>DE DEFORMACIONES A ESFUERZOS   | 80 |
| 2.18 ROSETAS DE DEFORMACION   | 81 |
| 2.19 EJEMPLO DE APLICACION DE LAS ROSETAS<br>DE DEFORMACION   | 88 |

|   |         |
|---|---------|
| CAPITULO III: ANALISIS ESTRUCTURAL                                  | 91      |
| 3.1 GENERALIDADES   | 92      |
| 3.2 ANALISIS APROXIMADO DE ESTRUCTURAS<br>HIPERESTATICAS            | 97      |
| 3.3 ANALISIS EXACTO DE ESTRUCTURAS<br>HIPERESTATICAS                | 106     |
| <br>CAPITULO IV: MANUAL DE PRACTICAS PARA<br>MECANICA DE MATERIALES | <br>125 |
| 4.1 RECOMENDACIONES GENERALES                                       | 126     |
| 4.2 PRACTICA 1) MODULO DE ELASTICIDAD                               | 128     |
| 4.3 PRACTICA 2) RELACION DE POISSON                                 | 136     |
| 4.4 PRACTICA 3) ESFUERZOS PRINCIPALES                               | 146     |
| 4.5 PRACTICA 4) VIGA EN VOLADIZO                                    | 158     |
| 4.6 PRACTICA 5) ESFUERZOS EN UN PUNTO                               | 169     |
| <br>CAPITULO V: MANUAL DE PRACTICAS PARA<br>ANALISIS ESTRUCTURAL    | <br>173 |
| 5.1 RECOMENDACIONES GENERALES                                       | 174     |
| 5.2 INTRODUCCION  | 176     |
| 5.3 GENERALIDADES   | 178     |
| 5.4 PRACTICA 1) MOMENTO FLEXIONANTE<br>AL CENTRO DEL CLARO          | 180     |
| 5.5 PRACTICA 2) APOYO ARTICULADO Y<br>APOYO EMPOTRADO               | 184     |
| 5.6 PRACTICA 3) CARGA PUNTUAL SIMETRICA<br>Y ASIMETRICA             | 188     |
| <br>APENDICE: ILUSTRACION DEL EQUIPO                                | <br>192 |
| <br>CONCLUSIONES  | <br>198 |
| <br>REFERENCIAS   | <br>200 |
| <br>BIBLIOGRAFIA  | <br>201 |

## INTRODUCCION

El objetivo de la aplicación de la Extensometría, es conocer el campo de deformaciones unitarias en la superficie de un cuerpo. El conocimiento de las deformaciones permite establecer el estado superficial de esfuerzos, lo cual es la solución al problema básico del Análisis Experimental de Esfuerzos.

Aunque existen diversos métodos extensométricos, el que se estudia en el presente trabajo se basa en los Extensómetros - Eléctricos de Resistencia, debido a que es un método sencillo, preciso y económico.

El funcionamiento de los Extensómetros Eléctricos de Resistencia se basa en el principio de que la resistividad de un conductor cambia cuando le ocurre una deformación mecánica. Estos extensómetros consisten en una rejilla sensible que se adhiere a la superficie del espécimen a analizar, y que se deformará cuando así lo haga el espécimen. La deformación de la rejilla origina un cambio en su resistencia eléctrica, el cual se mide y se transforma en una medida de deformación. Cada rejilla mide la deformación normal en una dirección única, por lo que generalmente son necesarios tres extensómetros para determinar el estado de esfuerzos en el plano en un punto. A esta agrupación de extensómetros se le conoce como Roseta de Deformación.

La gran utilidad de la Extensometría Eléctrica para la Ingeniería, se debe a la diversidad de formas en que puede instalarse el sistema sensor para determinar las deformaciones unitarias, y en consecuencia los esfuerzos. De este modo, es posible adherir los extensómetros de resistencia prácticamente a cualquier tipo de superficie (acero, concreto, plástico, etc.), en diversas condiciones ambientales (temperatura y humedad), y ante diferentes solicitaciones de carga (estáticas o dinámicas). -

Inclusive es posible adherir los extensómetros en la varilla de refuerzo para así determinar el esfuerzo real que se desarrolla en ella para diversas condiciones de carga de la estructura, o bien, con un tipo especial de extensómetros, introducirlos en el concreto en la etapa de colado, y así realizar una medición casi directa de los esfuerzos en el interior de una estructura de concreto.

Además, los Extensómetros Eléctricos de Resistencia se emplean para instrumentar Transductores, que son dispositivos que transforman un efecto de entrada (carga, presión, desplazamiento, etc.) en una señal de salida que varía proporcionalmente.

Ahora bien, el objetivo principal de este trabajo no es el aplicar la Extensometría solamente para realizar un Análisis Experimental de Esfuerzos, sino es el utilizarla como una herramienta en la enseñanza de conceptos básicos para materias como Mecánica de Materiales y como Análisis Estructural. Se pretende facilitar la comprensión del comportamiento de los materiales y de las estructuras, y mostrar la posibilidad de comprobar resultados experimentalmente. Esto es, realizando una serie de prácticas utilizando modelos instrumentados con extensómetros, y así, con los resultados de las deformaciones obtenidos, calcular, de mostrar y/o comparar resultados basados en un Análisis Experimental, con los de un Análisis Teórico.

## CAPITULO I

### LA EXTENSOMETRIA

## 1.1 GENERALIDADES

El Análisis de Esfuerzos es la solución al estado superficial de esfuerzos de uno o varios puntos ante ciertas condiciones. El hacer el análisis de esfuerzos de un elemento significa establecer los tipos, magnitudes y direcciones de los esfuerzos en los puntos de interés bajo todas las condiciones de carga - también de interés. Esta información se aúna al conocimiento de las propiedades del material para predecir y explicar el comportamiento de un elemento esforzado. Así, por ejemplo, la magnitud de los esfuerzos se compara con el esfuerzo último para predecir la ruptura.

Si el estado superficial de esfuerzos puede establecerse - de consideraciones teóricas, entonces es posible el Análisis Teórico de Esfuerzos.

Pero si el estado superficial de esfuerzos se establece - utilizando cantidades determinadas experimentalmente, entonces se hace un Análisis Experimental de Esfuerzos. Este análisis no involucra la medición del esfuerzo, sino que se basa en la medición de una cantidad que pueda relacionarse con éste. Para relacionar las cantidades medidas con los esfuerzos se requieren algunos cálculos basados en la teoría, de ahí que el Análisis Experimental de Esfuerzos no sea totalmente experimental.

Generalmente, la cantidad medida para el Análisis Experimental de Esfuerzos es la deformación axial. Para éste caso, se requiere determinar experimentalmente la deformación en un punto y a partir de ahí deducir el estado superficial de esfuerzos.

La deformación axial es el cambio en la longitud de una longitud original dada, por lo que los métodos experimentales involucran dos mediciones de longitud: la primera, que sirve de referencia, y la segunda para establecer el cambio en esa longitud



al deformarse. La medición del cambio de una longitud finita no da la medición en un punto, pero da la deformación promedio a lo largo de toda la longitud.

El objetivo de la aplicación de la Extensometría es conocer el campo de deformaciones unitarias en la superficie de un cuerpo cuando éste es sometido a cargas. Esto conduce al establecimiento del estado superficial de esfuerzos, es decir, al Análisis Experimental de Esfuerzos.

Por lo anterior, no es de sorprender el gran esfuerzo que se ha hecho para desarrollar y perfeccionar un extensómetro universal. Se han desarrollado extensómetros que se basan en principios mecánicos, ópticos, eléctricos, acústicos y neumáticos. Ninguno ha conjuntado las siguientes características que lo harían un extensómetro ideal:

- 1) De tamaño extremadamente pequeño.
- 2) De masa insignificante.
- 3) Fácil de instalar en el elemento que a analizar.
- 4) Altamente sensible a las deformaciones.
- 5) Inalterable ante cambios de temperatura, humedad u otras condiciones ambientales que se puedan presentar al probar los elementos.
- 6) Capaz de indicar tanto deformaciones estáticas como dinámicas.
- 7) Capaz de hacer lecturas en sitio o a distancia, y de registrarlas.
- 8) Económico.
- 9) Capaz de ser el elemento sensible de otros distemas de transducción en los que una cantidad desconocida, como la presión, es medida a partir de una deformación.

Aunque no hay ningún instrumento que cumpla con todas las características anteriores, entre los extensómetros eléctricos de resistencia se encuentran los óptimos.

Dentro de cada sistema extensométrico hay cuatro características básicas que requieren de una consideración especial: la longitud, la sensibilidad, el alcance de deformación y la precisión de la lectura.

- Longitud.

Los errores de medición son directamente proporcionales a la longitud  $l_0$ , por lo que es conveniente que ésta sea lo menor posible. El error también depende del ancho  $\omega_0$ . En los extensómetros mecánicos  $l_0$  es la distancia que hay entre los dos puntos en que el extensómetro está en contacto con el espécimen, y  $\omega_0$  es el ancho del borde de la cuchilla móvil. En los extensómetros eléctricos de resistencia, tanto la longitud  $l_0$  como el ancho  $\omega_0$  se determinan por las dimensiones de la rejilla sensible. (Fig. 1 ).

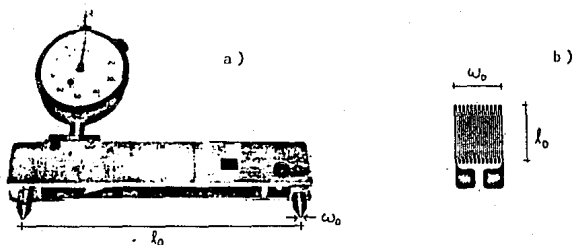


Fig. 1 Longitud y ancho en extensómetros:  
a) Mecánico, b) Eléctrico de Resistencia.

- Sensibilidad de Deformación.

La sensibilidad es el mínimo valor de deformación que puede leerse en la escala asociada al extensómetro. No debe confundirse con la precisión o exactitud, ya que grandes valores de aumento pueden darse a la escala para incrementar la sensibilidad, pero la fricción y el uso ocasionan errores que limitan la exactitud. Dependiendo de la aplicación se pueden utilizar extensómetros con sensibilidad de menos de  $1 \mu\text{m}/\text{m}$ , o para cuando la sensibilidad no es muy importante, de 50 a  $100 \mu\text{m}/\text{m}$ . La elección del extensómetro depende del grado de sensibilidad requerido, y a menudo, el elegir un extensómetro de alta sensibilidad cuando no es necesario, aumenta la complejidad del método de medición.

- Alcance de Deformación.

El alcance representa la máxima deformación que puede registrarse sin afectar al extensómetro. El alcance está interrelacionado con la sensibilidad, ya que extensómetros muy sensibles responden a pequeñas deformaciones con indicaciones apreciables y el alcance es limitado por la escala completa del indicador.

- Precisión o Exactitud de Lectura.

Como ya se mencionó, la precisión no está asegurada por la sensibilidad. Usualmente, los instrumentos muy sensibles son propensos a errores a menos que se les maneje con extremo cuidado. En los extensómetros mecánicos, la falta de precisión puede deberse a la pérdida de movilidad debido a fricción, cambios de temperatura, desgaste del mecanismo, etc. Además, en todos los extensómetros puede haber errores de lectura.

Se deben tomar en cuenta los cuatro puntos anteriores para la correcta elección del extensómetro a utilizar.

## 1.2 TIPOS DE EXTENSOMETROS

Los principios utilizados para la construcción de los extensómetros, son la base para su clasificación en tres grupos fundamentales:

- Mecánicos.
- Ópticos.
- Eléctricos.

### 1.2.1 Extensómetros Mecánicos.

Las técnicas más antiguas para la medición de deformaciones, son aquellas que involucran la medición mecánica directa del cambio de la longitud de un espécimen. El principio básico de los extensómetros mecánicos es el amplificar las pequeñas deformaciones a valores que puedan ser captados a simple vista.

En general, los extensómetros mecánicos son relativamente baratos y fáciles de operar, y tienen la ventaja sobre otros tipos de extensómetros de que contienen su sistema de amplificación en sí mismos, por lo que no requieren equipo auxiliar, como es el caso de los extensómetros eléctricos, en los que el equipo auxiliar equipara en costo y complejidad al extensómetro mismo.

Algunas de las desventajas de los extensómetros mecánicos, comparados con los eléctricos de resistencia, son su peso, volumen, baja precisión y respuesta de baja frecuencia. Sin embargo, la necesidad de calibración y de instrumentación electrónica de los extensómetros eléctricos de resistencia, hace que el uso de los mecánicos sea práctico en algunos casos. Además, un mismo extensómetro mecánico puede utilizarse para obtener lecturas en cualquier número de posiciones.

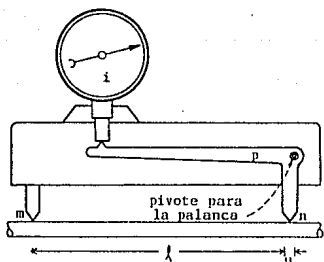


Fig. 2 Extensómetro tipo Berry.

Un tipo de extensómetro que aplica solamente principios mecánicos es el denominado BERRY, que se muestra en la Fig. 2 . Puede observarse que los puntos de contacto del instrumento con la superficie son "m" y "n", siendo uno de ellos fijo y el otro móvil, siguiendo éste último el desplazamiento acumulado en la base de medición " $\lambda$ ". Dicho desplazamiento es amplificado - por la palanca (p) y registrado por el indicador de carátula (i) que proporciona el valor "u" del desplazamiento, multiplicado - por un factor de amplificación "k" , obtenido por calibración. Es decir:

$$\text{lectura del indicador} = k u$$

de donde el desplazamiento "u" estará definido por:

$$u = \frac{\text{lectura}}{k}$$

Finalmente, la deformación unitaria  $\epsilon$  se obtiene dividiendo el desplazamiento entre la longitud de la base de medición:

$$\epsilon = \frac{u}{\lambda} = \frac{\text{lectura}}{k \lambda}$$

Aunque el rango de medición de este tipo de aparato es muy amplio, y tiene la gran ventaja de ser reutilizable, su principal desventaja estriba en su baja precisión, pues las lecturas pueden realizarse con una aproximación de 50  $\mu\text{m/m}$ .

Es importante saber que los extensómetros mecánicos no pueden utilizarse para la medición de deformaciones dinámicas o variables. En estos casos las dificultades relativas a la instalación segura del extensómetros son considerables, y la respuesta lenta debida a la inercia ocasionada por la masa del extensómetro, y el que no exista un método de registro automático, son un gran impedimento. En resumen, los extensómetros mecánicos son - recomendables para pruebas estáticas en las que los especímenes a probar tengan una superficie libre y disponible para la instalación y observación del extensómetro.

Existe un extensómetro mecánico que no tiene todas las desventajas anteriormente mencionadas, éste es el extensómetro de Registro por Surcos. Tiene la sensibilidad de los demás extensómetros mecánicos, pero sí puede usarse para registrar deformaciones variables. En la Fig. 3-a se muestra uno de estos extensómetros.

El registro consiste en un patrón de "surcos" sobre una placa, y este registro se lee a través de un comparador óptico o con un microscopio especial calibrado para este uso. La Fig. 3-b muestra un patrón de registro.

Este tipo de extensómetro mantiene la ventaja de tener las lecturas en sí mismo, pero no tiene todas las desventajas de los demás extensómetros mecánicos, como ya se mencionó.

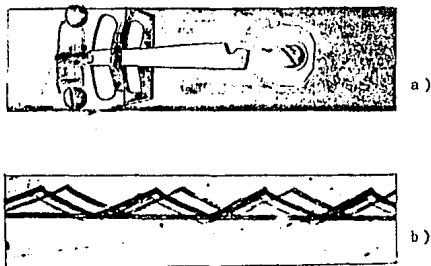


Fig. 3 Extensómetro Mecánico de Registro por Surcos; a) Tipo deForest, b) Patrón de registro de una barra en cantiliver con carga repetida (registro amplificado 175 veces).

### 1.2.2 Extensómetros Ópticos.

Al ser un haz de luz más fácil de manipular que un artefacto mecánico, carecer de peso y estar libre de fricción, no es de sorprender que se haya buscado el aplicar la amplificación por haz luminoso al problema de la medición de deformaciones.

Uno de los extensómetros que se basa en este principio, es el TUCKERMAN. Este instrumento emplea un sistema de palancas óptico, en donde la palanca transmite únicamente el movimiento, no la fuerza. Este extensómetro es de sensibilidad relativamente alta, indicando deformaciones de hasta  $2 \mu\text{m}/\text{m}$ . Este extensómetro puede usarse para la medición de deformaciones dinámicas de hasta 150 ciclo/seg. La Fig. 4 ilustra un extensómetro Tucker man.

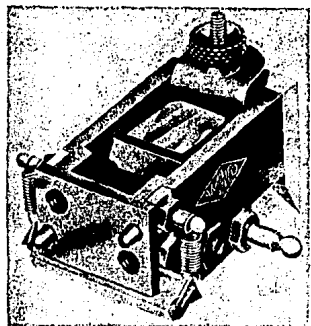


Fig. 4 El Extensómetro Óptico Tuckerman consiste en un extensómetro (1- ilustración), y en un telescopio de precisión con una fuente de luz y una retícula para medir las deformaciones a partir del movimiento del haz luminoso.

El fenómeno de interferencia óptica también ha sido empleado en la medición de deformaciones. El método de interferencia usa dos planos ópticos pegados, ya sea directamente o a través de palancas, a la estructura que se va a probar. El movimiento relativo de los planos ópticos ocasiona franjas de interferencia que pasan por un punto de referencia. Estas franjas se toman como una medida de la deformación.

El método de interferencia es sumamente sensible y preciso, así como delicado. Este tipo de extensómetro se utiliza en laboratorio para trabajar bajo condiciones ideales.

Existe también un extensómetro óptico que se basa en la difracción de la luz. Consiste en dos hojas que se unen o soldan a un componente, como se ilustra en la Fig. 5. Las dos hojas se separan entre sí una distancia "b" para formar una pequeña abertura, y se instala en el espécimen. Un haz de luz monocromática es dirigida hacia el orificio para producir un patrón de difracción que puede ser observado como una línea de puntos en una pantalla a una distancia "R" de la abertura. Un ejemplo de un patrón de difracción se muestra en la Fig. 6.



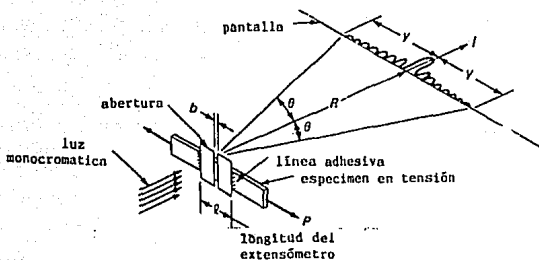


Fig. 5 Arreglo para un Extensómetro de Difracción.

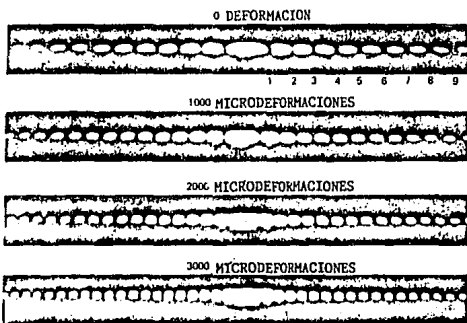


Fig. 6 Difractogramas que muestran el cambio del patrón de difracción al aumentar la deformación.

En general, la principal ventaja de los extensómetros ópticos, es su gran sensibilidad.

### 1.2.3 Extensómetros Eléctricos.

Los extensómetros eléctricos son instrumentos contruidos de manera que cualquier cambio de longitud (deformación) del cuerpo al cual están sujetos, está acompañado por un cambio proporcional en alguna de sus características eléctricas. La amplificación de la señal se realiza por medios electrónicos. La gran ventaja que tienen los extensómetros eléctricos es la relativa facilidad con que la señal de salida puede ser amplificada, medida y registrada.

Según la propiedad eléctrica que es afectada por la deformación, los extensómetros eléctricos se pueden dividir en:

- a) De Capacitancia.
- b) De Inductancia (Magnéticos).
- c) Piezoeléctricos.
- d) De Resistencia.

A continuación se hará una breve descripción de cada uno de ellos.

#### a) Extensómetro Eléctrico de Capacitancia.

Está compuesto por un capacitor o condensador, cuya capacidad puede hacerse variar con la deformación. Un capacitor consiste fundamentalmente de dos placas separadas por un aislante (que puede ser el aire), como se muestra en la Fig. 7. La impedancia de una corriente alterna depende de la capacidad del condensador, la cual a su vez depende de la distancia entre las placas y de su área. Cualquiera de estas variables puede usarse como transductor de la deformación. De tal forma se construye el extensómetro y se instala en el espécimen a probar, de manera que las deformaciones superficiales en la vecindad inmediata al extensómetro alteren, ya sea el espacio entre las placas o su área.

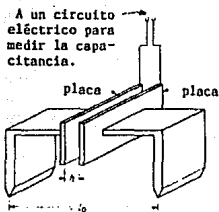


Fig. 7 Esquema de un Extensómetro de Capacitancia con espacio variable entre las placas.

Estos extensómetros tienen varias desventajas, incluyendo que su tamaño es relativamente grande, que son indeseablemente sensibles a vibraciones, que tienen dificultad para ser instalados y su complejidad en el circuito eléctrico. Pero pueden ser aplicados en sistemas de transductores con la ventaja de trabajar a temperaturas elevadas, y de que el sistema involucra fuerzas operativas muy bajas. Estos transductores de capacitancia pueden utilizarse para medir presión, fuerza y desplazamiento.

#### b) Extensómetro Eléctrico de Inductancia.

El extensómetro de inductancia es esencialmente una bobina con núcleo de hierro, cuya inductancia puede variar con la deformación. Las variaciones de la inductancia pueden lograrse cambiando la longitud del espacio de aire en el flujo magnético del circuito o cambiando la posición relativa entre otro inductor y la bobina.

Este tipo de extensómetros eléctricos tienen las mismas desventajas que los de capacitancia, y algunas más, como son su peso, volumen y susceptibilidad a influencias magneto-mecánicas. Pero comparado con los extensómetros de resistencia, tienen una señal de salida muy alta, lo que simplifica el circuito de lectura. Por sus características, estos extensómetros se utilizan en conjunto con transductores para medir deformación, desplazamiento, presión, aceleración, fuerza y temperatura.

### c) Extensómetro Eléctrico Piezoeléctrico.

El efecto piezoeléctrico es una propiedad que tienen ciertos materiales (cristales), y consiste en un cambio del voltaje al ser deformados. Esta diferencia de voltaje es proporcional a la deformación y es de relativamente alta magnitud. Los materiales piezoeléctricos pueden ser naturales, como el cuarzo, o se les pueden dar las propiedades artificialmente al fabricarlos, como en el caso de algunas cerámicas policristalinas.

Los extensómetros piezoeléctricos son interesantes debido a su alta señal producida por unidad de deformación, y porque son autogeneradores, es decir, no requieren suministro de energía. Pero su uso no se ha generalizado por varias razones:

- No pueden usarse para medir deformaciones estáticas ya que su carga se pierde gradualmente, y por lo mismo son difíciles de calibrar.

- No pueden ser precalibrados porque al instalarlos se afecta su sensibilidad.

- Producen un considerable refuerzo en el punto al que se sujetan, y esto cambia el campo de deformaciones que se pretende estudiar.

Por estas razones, los extensómetros piezoeléctricos se utilizan para dar una señal cuando una deformación es percibida, y para dar una medida cualitativa de la deformación.

### d) Extensómetro Eléctrico de Resistencia.

El extensómetro eléctrico de resistencia no es más que una resistencia que se instala en la superficie donde se desea determinar una deformación unitaria. Al aplicar la carga, se produce una deformación en la muestra, y la resistencia, al estar adherida a la superficie deformable, sufre también alteraciones geométricas que son máximas en dirección colineal a la rejilla sensible (Fig. 8). El principio básico es que la resistividad eléctrica de un conductor, cambia cuando sufre una deformación mecánica.

El valor de la deformación se obtiene por medio de la medición del cambio de resistividad eléctrica en el elemento.

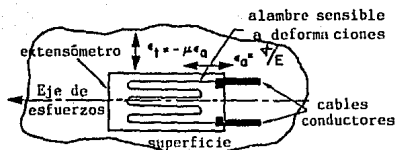


Fig. 8 Extensómetro Eléctrico de Resistencia.

Varios tipos de extensómetros de resistencia han sido desarrollados utilizando como elemento resistivo metales, no metales y semiconductores, y siendo algunos de alambre o en forma laminar, y ya sea adheridos o no adheridos directamente al espécimen a probar. (Fig. 9).

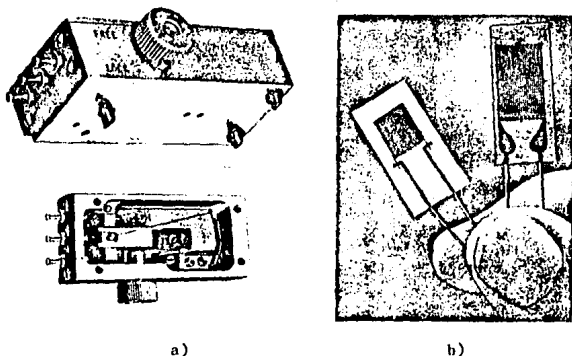


Fig. 9 Extensómetros de Resistencia: a) No adherible (de alambre), b) Adheribles (de alambre y laminar). Ilustraciones aproximadamente de tamaño real.

En la Fig. 10 se muestran los tres tipos más comunes de extensómetros eléctricos de resistencia. El extensómetro de alambre emplea alambre de diámetro entre 0.0012 cm y 0.0025 cm. El extensómetro laminar emplea una hoja de menos de 0.0025 cm de espesor. El semiconductor normalmente emplea un material a base de silicio, con la ventaja de que se pueden obtener valores muy grandes del factor de celda (GF); este material se produce en barras frágiles con espesor de 0.025 cm. En la siguiente tabla se pueden comparar las características de los tres materiales más comunes en la fabricación de estos extensómetros.

| MATERIAL                 | FACTOR DE CELDA GF | RESISTENCIA (ohms) | COEFICIENTE DE TEMPERATURA POR RESISTENCIA ( $^{\circ}\text{C}^{-1} \times 10^4$ ) | COMENTARIOS   |
|--------------------------|--------------------|--------------------|--|---|
| 57% Cu, 43% Ni           | 2.0                | 100                | 10.8   | El GF es constante sobre un amplio rango de deformaciones unitarias. Se usa en temperaturas $< 260^{\circ}\text{C}$ . |
| Aleaciones de platino    | 4.0                | 50                 | 2,160  | Apropiado en temperaturas elevadas (arriba de $500^{\circ}\text{C}$ ).  |
| Semiconductor de silicio | -100 a 150         | 200                | 90,000   | Frágil, su GF es alto; inadecuado para medir grandes deformaciones.   |

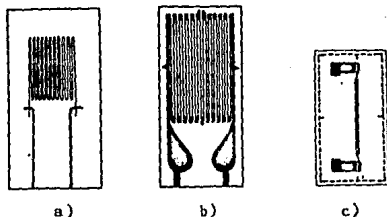


Fig. 10 Extensómetros Eléctricos de Resistencia:  
a) de alambre, b) laminar, c) semiconductor.

En el siguiente subcapítulo se describen con más detalles el funcionamiento y las aplicaciones del extensómetro de resistencia, pero antes es conveniente mencionar las ventajas generales de este tipo de extensómetro:

- Su constante de calibración es muy estable con el tiempo, y su cambio con la temperatura dentro del rango más usual es despreciable.

- Es capaz de medir deformaciones unitarias con una precisión de 1 microdeformación ( $1\mu\text{m}/\text{m}$ ).

- El tamaño del extensómetro puede ser tan pequeño o tan grande como se requiera.

- La respuesta del extensómetro permite el registro de deformaciones tanto estáticas como dinámicas.

- El sistema permite lecturas a distancia.

- Tiene un comportamiento lineal, proporcional a la deformación.

- No se requieren instalaciones ni técnicas de manejo muy complejas.

Se deben mencionar también las desventajas de los extensómetros eléctricos de resistencia, los cuales no impiden su uso, sino lo hacen selectivo.

- Representan una instalación permanente y en consecuencia no pueden emplearse en otro punto más que el originalmente instrumentado. Por lo cual debe elegirse dicho punto con gran cuidado para evitar gastos innecesarios.

- Requieren de un equipamiento electrónico adicional, cuyo costo se amortiza en función directa del número de puntos instrumentados.

- Algunos factores ambientales extremos (excesivo calor o demasiada humedad) afectan la instalación y requieren precaución adicional.

### 1.3 EL EXTENSOMETRO ELECTRICO DE RESISTENCIA

Se debe hacer la aclaración de que el extensómetro eléctrico del que se hablará en este subcapítulo, y el cual se manejará a lo largo de este trabajo, es aquel en que el elemento resistivo se adhiere directamente a la estructura. Esto se debe a que estos extensómetros son los que reúnen el mayor número de ventajas, además de ser comerciales y por lo mismo fáciles de conseguir.

#### 1.3.1 Funcionamiento.

El elemento resistivo de los extensómetros de resistencia, consiste en un fino alambre de metal o en una delgada laminilla metálica, siendo este último el más común, aunque también se llega a utilizar un filamento de material semiconductor.

A fin de reducir la longitud del extensómetro, manteniendo la sensibilidad (manteniendo una resistencia relativamente larga), el alambre o la laminilla se acomodan en forma de rejilla. (Fig. 11).

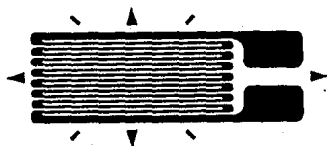


Fig. 11 Configuración típica de una rejilla laminar.



El elemento resistivo se adhiere a una base adecuada, usualmente papel, plástico o cerámica. Esta base sirve de apoyo o soporte y permite un transporte y manejo más fácil de la rejilla, además de que actúa como aislante. El extensómetro completo consiste en el elemento resistivo y en su base o soporte. (Fig. 12).

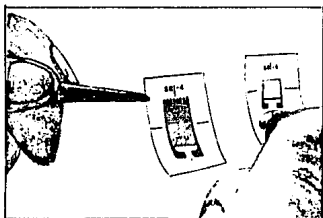


Fig. 12 Las bases son necesarias para el manejo de los frágiles extensómetros.

Como ya se mencionó anteriormente, el principio de estos - extensómetros es el cambio de resistividad que ocurre cuando la rejilla sensible se deforma. El cambio en la resistividad depende de la magnitud de la deformación, de la geometría de la rejilla y del material (aleación) de dicha rejilla.

La mayoría de los extensómetros se diseñan con rejillas lineales que permiten la medición de la deformación en una dirección a lo largo del eje longitudinal del extensómetro. En estos casos, la rejilla del extensómetro estará localizada en un campo de esfuerzo uniaxial, pero de hecho estará sujeta a deformaciones en dos direcciones perpendiculares por el efecto de Poisson. (Fig. 8). La deformación unitaria  $\epsilon$  a lo largo del eje longitudinal está relacionada con el cambio de resistencia a través de un coeficiente denominado "factor de celda" o "gage factor" (GF):

$$\frac{1}{(GF)} \frac{\Delta R}{R} = \epsilon$$

En la práctica, los valores del factor de celda y de la resistencia de la rejilla, son especificados por el fabricante, de modo que solo es necesario medir el valor de  $\Delta R$  para poder determinar la deformación unitaria. Para la mayoría de los extensómetros el valor de GF es constante sobre un amplio rango de deformaciones. Experimentalmente se ha encontrado que los GF de los materiales varían entre -140 y +175 . En la mayoría de los casos el GF es el mismo para deformaciones a tensión que a compresión. Es preferible que el factor de celda tenga un valor alto para - que produzca un mayor cambio de resistencia para una deformación dada, permitiendo así el uso de equipo de menor sensibilidad.

Aunque el extensómetro de resistencia es sensible a cambios de temperatura, los cuales pueden inducir deformaciones aparentes en el aparato de medición, estos efectos han sido minimizados al emplear aleaciones cuyo coeficiente de expansión térmica es bajo y/o coincide con el coeficiente del material en donde se adhiere el sensor. Este tipo de extensómetros son denominados - "auto-compensables".

Para los extensómetros que no son auto-compensables, se puede hacer una compensación por efectos de temperatura, la cual se hace directamente en forma experimental, debido a que es difícil calcular las correcciones para los efectos por temperatura en - los extensómetros eléctricos. En la Fig. 13 se muestra un arreglo para efectuar dicha compensación. El extensómetro 1 se instala en el espécimen de prueba, y el 2 en una pieza que no sufrirá de deformaciones durante la prueba, y que se mantendrá a la misma temperatura que la pieza a probar. Los extensómetros se deben instalar de la misma manera en ambas piezas. En esta forma, cualquier cambio en la resistencia del extensómetro 1, debido a la - temperatura, se anulará con un cambio similar en el otro extensómetro, y el desbalance que se detecte se deberá únicamente a la deformación unitaria del extensómetro 1.

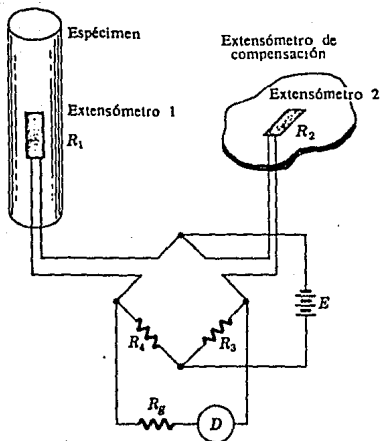


Fig. 13 Arreglo experimental para efectuar la compensación por temperatura en los extensómetros eléctricos.

La configuración de los extensómetros puede variar, y depende de la orientación de los ejes principales la elección del extensómetro, así:

- Configuración Singular (Fig. 14): se utilizan individualmente para el caso uniaxial de esfuerzos, o para formar rosetas agrupándolos.

- Configuración Doble o Roseta Doble (Fig. 15): se utilizan en el caso biaxial, cuando la dirección de los esfuerzos principales se conoce.

- Configuración Triple o Roseta (Fig. 16): se utilizan si se desconoce la dirección de los esfuerzos principales.

- Configuración Espiral (Fig. 17): tipo especial de extensómetro que mide deformaciones tangenciales.

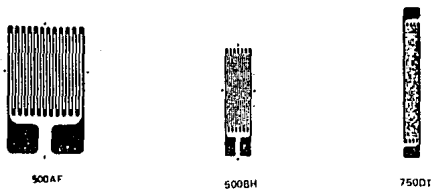


Fig. 14 Configuración Singular de extensómetros para esfuerzo uniaxial.

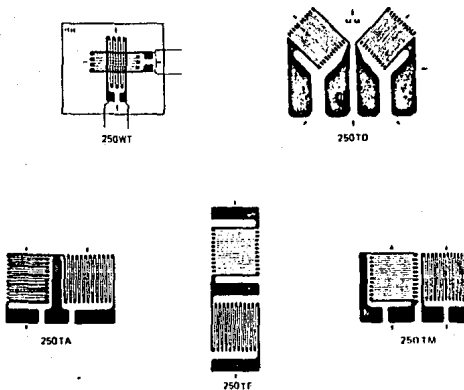


Fig. 15 Rosetas rectangulares de dos elementos para cuando se conocen las direcciones principales.

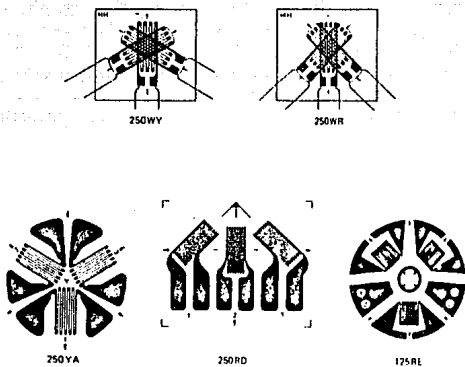


Fig. 16 Rosetas de tres elementos, para cuando se desconocen las direcciones principales.



Fig. 17 Extensómetro Espiral.

Los extensómetros de resistencia se conectan en forma individual o colectiva a un aparato medidor de deformaciones unitarias directamente a través de un equipo de conmutación (Fig. 18).

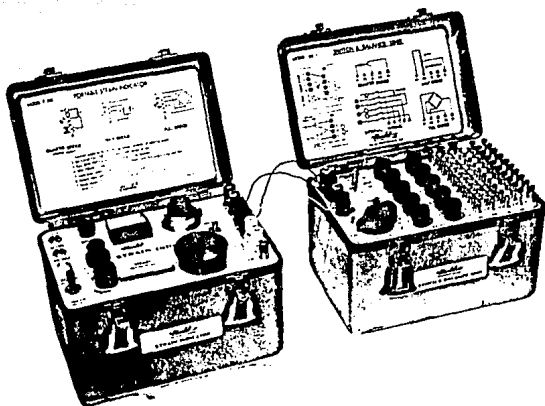
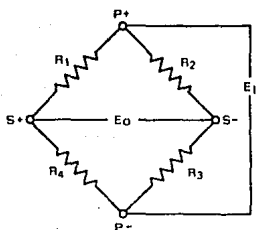


Fig. 18 Aparato indicador y equipo de conexión (conmutador).

El aparato indicador no es más que un señalador de cambios de corriente eléctrica ( $E_0$ ) a la salida de un circuito de medición, generalmente el denominado "Puente de Wheatstone". En dicho circuito (Fig. 19), el sensor puede ocupar el lugar  $R_1$ , estando las demás resistencias ( $R_2$ ,  $R_3$  y  $R_4$ ) contenidas físicamente en el aparato indicador. En este circuito, ya sea una o todas las resistencias, pueden ser extensómetros.

Empleando el control de ajuste del factor de celda del aparato, el voltaje de salida estará expresado directamente en unidades de deformación unitaria.



Nota:

Una o todas las resistencias pueden ser extensómetros.

Fig. 19 Circuito Puente de Wheatstone.

El Puente de Wheatstone se utiliza para la comparación y - medición de resistencias en un rango de 1ohm a 1megaohm. Para realizar una medición más exacta con este circuito, se deben conocer en forma precisa los valores de las resistencias; además, el galvanómetro que se utilice debe ser lo suficientemente sensible para detectar los mínimos desequilibrios en el circuito.

Los circuitos puente pueden operar bajo "condiciones de equilibrio" o por "deflexión". En la condición de equilibrio, el dispositivo sensor arroja una lectura de cero para condiciones de balance. En cualquier otro estado, la lectura del galvanómetro o dispositivo sensor sufrirá una cierta "deflexión" a partir de su condición de equilibrio, la cual depende de su grado de - desequilibrio. Así, la señal en el galvanómetro o detector se - toma como una indicación del desbalance del puente e indica la variación de una de sus ramas a partir de una condición específica de equilibrio. El uso de la deflexión en el puente permite la medición de señales dinámicas, en las cuales no se dispone - del tiempo suficiente para alcanzar las condiciones de balance.

El Puente de Wheatstone es muy útil ya que puede indicar - lecturas estáticas y dinámicas de los extensómetros. Puede utilizarse como instrumento de lectura directa, donde el voltaje de salida es medido y relacionado con la deformación.

### 1.3.2 Construcción.

En el caso de los extensómetros de alambre, existen básicamente dos técnicas para su fabricación: rejilla plana y bobina. (Fig. 20).

- Rejilla Plana: La rejilla se forma enrollando el alambre alrededor de alfileres. Luego se levanta la rejilla y se acomoda en una base cementada; finalmente se protege con una cubierta adecuada, fieltro por ejemplo. (Fig. 21-a).

- Bobina: El alambre se enrolla alrededor de un delgado cilindro de material aislante. Luego se aplana el cilindro y se coloca entre dos hojas de material aislante protector. (Fig 21-b).

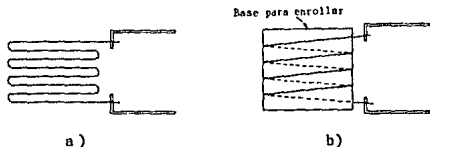


Fig. 20 Extensómetros de alambre:  
a) Rejilla plana, b) Bobina.

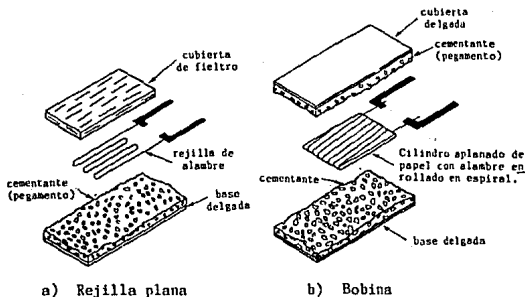


Fig. 21 Métodos utilizados en la construcción de extensómetros de alambre.



Para los extensómetros laminares, la rejilla se puede obtener de dos maneras: imprimiendo el patrón deseado en una lámina de material sensible a deformaciones con una tinta resistente al ácido y a continuación disolviendo el metal no protegido, o bien perforando la rejilla de la lámina.

Como se muestra en la Fig. 22, el filamento de la rejilla - comunmente termina en apéndices alargados, lo cual facilita el que los cables de entrada sean soldados. Estos extensómetros también se unan a un soporte de papel o plástico (Fig. 22).

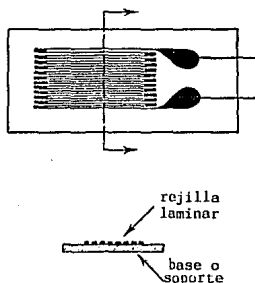
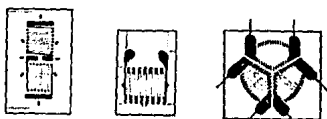


Fig. 22 Extensómetro laminar.

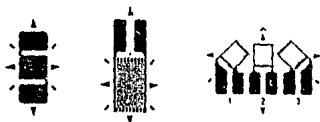
Los extensómetros laminares tienen varias ventajas. El ancho de la laminilla al final de cada vuelta puede incrementarse para reducir la sensibilidad a las deformaciones transversales. La sección transversal del conductor es rectangular, lo que aumenta la facilidad para disipar el calor y mejora la adherencia entre rejilla y soporte. El factor de celda de estos extensómetros es usualmente 5% a 10% mayor que el de sus equivalentes de alambre. Otra ventaja del proceso constructivo, es que permite fabricar un gran número de configuraciones de rejillas y en diferentes tamaños, casi cualquier patrón puede producirse. En la Fig. 23 se ilustran algunos extensómetros laminares comerciales.



BALDWIN-LIMA-HAMILTON CORP.



BUDD COMPANY (INSTRUMENT DIVISION)



MICRO-MEASUREMENTS, INC.

Fig. 23 Diseños típicos de rejillas de extensómetros laminares disponibles comercialmente.

Por lo anterior, se puede concluir que los extensómetros laminares tienen más ventajas que los de alambre: se puede colocar su rejilla sensible más cerca de la superficie a probar, y todos sus elementos están en el mismo plano; además, son más sensibles, presentan menor histerénesis, su comportamiento ante cambios de temperatura es mejor, y tienen mayor capacidad de transmisión de corriente; es posible lograr patrones más compactos (las líneas en la rejilla pueden estar más juntas) y hay gran variedad de configuraciones para elegir.

Otro factor importante para la construcción de un extensómetro, es la unión de la rejilla a una base. La mayoría de los extensómetros de alambre se montan en una base de papel delgado, y en caso de que se vayan a usar a temperaturas altas (mayores a 150°C) se emplea una base de bakelita; en estos casos se puede emplear un pegamento nitroceluloso o una resina fenólica. Los extensómetros laminares utilizan materiales base de papel, bakelita y películas de epoxy; el cementante (pegamento) empleado puede ser epóxico, el cual también puede emplearse para los de alambre. Cuando se utilice una base epóxica se debe evitar el uso de cementantes nitrocelulosos. Se debe tomar en cuenta que las bases epóxicas no son adecuadas para usos generales, ya que son muy frágiles y se rompen fácilmente al instalar el extensómetro.

Las bases de los extensómetros sirven de respaldo (soporte), permiten un manejo más fácil, son flexibles (permitiendo la instalación del extensómetro en superficies curvas), y sirven de aislante eléctrico. Normalmente las bases tienen marcas para facilitar el centrado del extensómetro (Fig. 24).

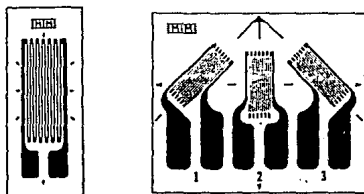


Fig. 24 Extensómetros con base o soporte.

### 1.3.3 Instalación.

Aunque los extensómetros de resistencia son versátiles, precisos y sensibles, su funcionamiento depende de su unión a la superficie del elemento a probar. Para una medición precisa, el extensómetro deberá recibir la deformación transmitida por el cementante (pegamento) de enlace sin distorsiones (ni reducción ni amplificación). Esto requiere de un buen trabajo de unión, que depende tanto de la elección del pegamento adecuado, como de los procedimientos de instalación correctos.

Cada fabricante da instrucciones y recomendaciones para el cementante a usar según el extensómetro, y para los procedimientos de unión óptimos.

Para la elección del cementante se toman en cuenta tres consideraciones principales: los materiales usados en la construcción del extensómetro, las condiciones ambientales, y el tiempo disponible para realizar la instalación del extensómetro.

Los extensómetros comerciales, que normalmente operan a temperaturas menores a  $180^{\circ}\text{C}$ , se pueden dividir en tres grupos, atendiendo al material de su base, según el cual es el pegamento recomendado:

- 1) Base de papel: cementante nitroceluloso ( $T < 72^{\circ}\text{C}$ ).
- 2) Base de bakelita: fibra celulosa ( $T < 180^{\circ}\text{C}$ ), fibra de vidrio ( $T < 230^{\circ}\text{C}$ ), resinas bakeliticas ( $T < 230^{\circ}\text{C}$ ).
- 3) Base epóxica: cementantes cianoacrilicos o resinas epóxicas ( $T < 94^{\circ}\text{C}$ ).

En los tres casos se pueden utilizar cementantes epóxicos (Fig. 25) o acrílicos.

Respecto al curado, los cementantes nitrocelulosos, en condiciones favorables (calor y poca humedad), requieren 24 horas para curar; los bakelíticos requieren de la adición de calor (200°C) y presión, condiciones difíciles de lograr en campo; los cementantes epóxicos y acrílicos curan a temperatura ambiente, y requieren poca presión, con un corto tiempo de curado. Los cementantes cianoacrílicos unen tan rápido que pueden considerarse de contacto, reduciendo radicalmente el tiempo de instalación, además de que no necesitan presión.

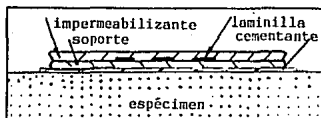


Fig. 25 Pegamento epóxico empaquetado para mezclar dos componentes.

A continuación se hacen algunas sugerencias respecto a los extensómetros y cementantes a utilizar en ciertas situaciones:

1) Para temperaturas de hasta 50°C se pueden usar extensómetros con base de papel, bakelita o epoxy. Los primeros deberán utilizar cementantes nitrocelulosos; los de base epóxica deben unirse con cementantes cianoacrílicos o epóxicos; los de bakelita con cementantes epóxicos. Si las condiciones del sitio de instalación son severas (grandes deformaciones, muchos ciclos, etc.), se recomiendan las bases epóxicas y de bakelita unidas con pegamentos epóxicos, pero para condiciones normales, los extensómetros con base epóxica y cementante cianoacrílico son los adecuados.

2) Todas las instalaciones en exteriores y todas aquellas que se usarán por un período largo de tiempo, deben ser impermeables. Esto evita la pérdida de resistencia o la corrosión. Normalmente se impermeabiliza el extensómetro con una capa de material impermeable (Fig. 26-a) o con una cubierta protectora (Fig. 26-b).



a)

Fig. 26-a Sección transversal de un extensómetro instalado.



b<sub>1</sub>)

b<sub>2</sub>)

b<sub>3</sub>)

Fig. 26-b<sub>1</sub> Extensómetro adherido y listo para la instalación de la cubierta protectora.

Fig. 26-b<sub>2</sub> Impermeabilización con cubierta protectora parcialmente instalada.

Fig. 26-b<sub>3</sub> Instalación e impermeabilización de un extensómetro, finalizadas.

3) La instalación de extensómetros que se someterán a vibraciones o a cambios bruscos, debe atender especialmente a los cables conductores, los cuales deben tener una unión flexible - con el extensómetro.

4) Para temperaturas entre 50°C y 180°C se recomiendan los extensómetros de bakelita unidos con pegamento epóxico de curado a alta temperatura.

5) Para temperaturas mayores a 180°C existen extensómetros especiales (de materiales semiconductores) que se adhieren con cementantes cerámicos. Para impactos o cambios bruscos en altas temperaturas, se recomiendan los extensómetros soldables.

Antes de cementar el extensómetro al espécimen, la superficie debe estar preparada para asegurar una unión firme. La superficie debe ser lisa, pero sin llegar a estar pulida, ya que esto último impide la adherencia. Se deben remover todo tipo de costuras, herrumbre, pintura, arena, etc. Y si la superficie está muy pulimentada es necesario volverla ligeramente áspera, ya sea con lija o con chorro de arena.

A continuación se emplean solventes (acetonas) para remover todos los residuos de grasa y limpiar perfectamente la superficie. Se puede aumentar la adherencia tratando a la superficie - con una solución básica para dar afinidad química con el cementante.

Es importante mantener la limpieza hasta que el extensómetro esté en su lugar. Después de que han sido limpiados, no se debe tocar extensómetro ni superficie con los dedos. El cementante y el extensómetro deben instalarse inmediatamente después de que se limpió la superficie. Si el extensómetro ha sido manejado, se puede limpiar su base frotando cuidadosamente con un algodón con solvente. Si la base es de papel, se debe tener extrema precaución para no dañar al extensómetro con el solvente. Como es inevitable cierto grado de contacto entre los dedos y el extensómetro, se recomienda frotarse los dedos frecuentemente - con un algodón humedecido con solvente.

La localización del extensómetro se marca sobre la superficie del espécimen, ya sea que se delimite la posición, o bien - que se marquen ejes longitudinales y/o transversales. El extensómetro se puede instalar utilizando el método de la cinta adhesiva, como se ilustra en la Fig. 27. La posición y orientación del extensómetro se mantienen con la cinta adhesiva, mientras el cementante es aplicado, y mientras se presiona en su lugar, oprimiendo y sacando el exceso de cementante.

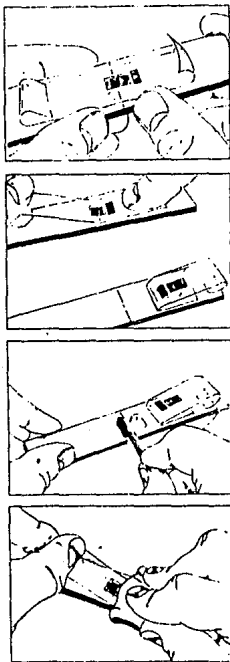


Fig. 27 Método de la cinta adhesiva para la instalación de extensómetros laminares. Se utiliza, generalmente, con pegamentos de contacto.



Una vez instalado el extensómetro, se debe esperar el tiempo suficiente para que el cementante cure y endurezca completamente. Aunque en las orillas esté seco, es posible que el que está debajo del extensómetro todavía no lo esté. El proceso de curado es crítico, ya que el cementante se expandirá con el calor, reducirá su volumen por la polimerización, se contraerá al enfriarse, etc. El tiempo de curado depende, como ya se mencionó, del cementante que se utilice.

Ya instalado el extensómetro, se procede a la conexión de los cables conductores, lo cual debe hacerse con cuidado para asegurar la precisión y estabilidad de la salida eléctrica. Los cables conductores deben tener baja resistencia eléctrica, flexibilidad y facilidad de manejo, y deben ser aislantes. Para usos a temperaturas normales se utiliza un cable con cubierta aislante termoplástica; para altas temperaturas se necesitan otros aislantes como teflón, fibra de vidrio o cerámica.

La probabilidad de dañar al extensómetro durante el cableado se reduce si se aseguran o pegan los conductores a la estructura en un punto cercano al extensómetro "antes" de soldar las conexiones al extensómetro. Para prevenir la aparición de cualquier deformación en los conductores del extensómetro una vez completada la instalación, se recomienda dejar una pequeña vuelta en cada cable, como se muestra en la Fig. 28. Lo usual es colocar un trozo de cinta adhesiva inmediatamente después de la unión de los conductores, lo cual puede absorber sacudidas eléctricas y eliminar deformaciones externas al extensómetro. Todos los cables conductores del transductor al extensómetro deben estar asegurados con cinta adhesiva o pegados a la estructura para evitar movimientos relativos. (Fig. 28).

La soldadura y el fundente utilizados para unir los cables conductores al extensómetro, también deben elegirse. Se debe utilizar un fundente no corrosivo. La soldadura depende de la temperatura de operación del extensómetro, para temperaturas menores a 150°C se utilizan soldaduras de plomo-estaño.

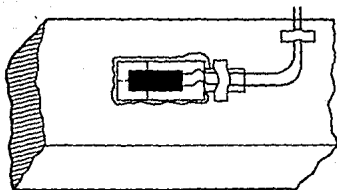


Fig. 28 Apariencia de un extensómetro correctamente instalado.

El procedimiento para soldar es igual al de cualquier soldadura electrónica. Los cables y filamentos conductores del extensómetro (apéndices en el caso de los laminares) deben ser cubiertos con estaño de la soldadura. Luego se colocan en su sitio los cables y se conectan con un cautín hasta que la soldadura esté líquida y brillante. Se puede agregar soldadura si es necesaria, pero normalmente es suficiente la primera. La unión debe calentarse lo suficiente para derretir al fundente, pero teniendo cuidado de no dañar al extensómetro con el calor excesivo. (Fig.29).



a) b)  
Fig. 29 Conexión de los cables: a) Soldando los cables, b) Instalación completa.

Como los extensómetros laminares son frágiles, se debe tener extremo cuidado al soldar los cables. Por eso se suelen utilizar láminas terminales (Fig. 30), que son mucho más fuertes que los apéndices de los extensómetros. Un cable de diámetro muy pequeño conecta el extensómetro a la terminal, y de ahí se conectan los cables conductores. En caso de que sea necesaria la compensación por temperatura, se pueden utilizar tres cables conductores soldados a la terminal, como se indica en la Fig. 31.

Si se va a impermeabilizar el extensómetro (con materiales epóxicos, silicones o con cubierta), el material impermeabilizante se debe aplicar de manera que cubra la mitad de la lámina terminal y todo el extensómetro (Fig. 30).

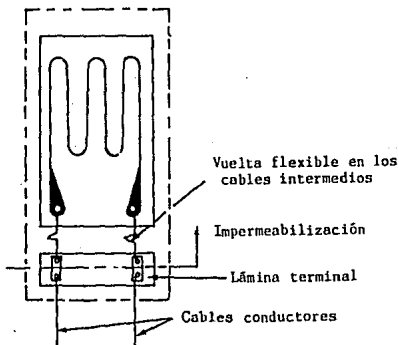


Fig. 30 Disposición adecuada de cableado e impermeabilización.

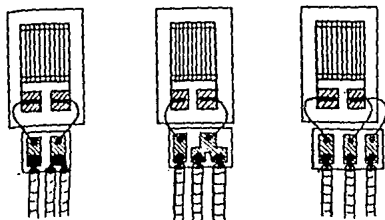


Fig. 31 Utilización de terminales para conectar los cables a los extensómetros laminares.

Cuando se ha terminado la instalación del extensómetro, se deben hacer una serie de pruebas rápidas para asegurarse de que funcionará correctamente. Se revisa que la unión del extensómetro a la superficie sea firme, un indicador de una buena unión es si la cinta adhesiva se puede despegar limpiamente; se inspecciona visualmente; con una punta afilada se debe comprobar que en las esquinas sólo se rompen pequeñas partes de la base del extensómetro, pero no deben separarse hojuelas completas, porque indicaría una mala unión.

Es importante revisar la resistencia del extensómetro. Si muestra un circuito abierto, pero todas las conexiones soldadas son conductoras, significa que el extensómetro se dañó y es inservible. Si al medir la resistencia del extensómetro se encuentra una diferencia considerable en comparación con la que especifica el fabricante, significa que hubo problemas en el manejo o en la instalación del extensómetro, y éste ya no será confiable.

Normalmente el extensómetro mostrará una resistencia de más de 1,000 megohms, pero se toleran resistencias menores. El mínimo para dar un funcionamiento estable y preciso es 50 megohms.

Aún hay una última prueba, particularmente para la unión - del extensómetro a la superficie, que consiste en conectar el ex extensómetro a un indicador de deformaciones estáticas, balancear el puente, poner el indicador en cero, y luego presionar suavemente sobre el extensómetro con la cabeza de un lápiz. Al aplicar la presión, el indicador debe mostrar una pequeñísima desviación, pero al dejar de presionar, debe indicar cero o casi cero de nug vo. Si el indicador no regresa o queda inestable, significa que hay una unión imperfecta (que pudo haber sido ocasionada por una burbuja de aire debajo del extensómetro) o que el extensómetro - está dañado, por lo que habrá que reemplazarlo.

En general, los problemas asociados con la instalación de los extensómetros eléctricos de resistencia son de tres tipos:

- 1) Por efectos de temperatura.
- 2) Por efectos de humedad.
- 3) Debido al cableado.

Los primeros aparecen cuando existe una diferencia entre la expansión térmica del elemento resistivo y la del material al - cual está adherido. Además la resistencia del extensómetro también cambia con la temperatura, por lo cual es necesario hacer ciertas compensaciones.

La absorción de humedad por la base o el cementante puede cambiar la resistencia eléctrica entre el extensómetro y el potencial de tierra, afectando las lecturas finales de salida. Por eso hay casos en que se necesita impermeabilizar el extensómetro.

Los problemas con los cables se deben a falsos contactos - entre el elemento resistivo y el circuito externo de registro. Pueden estar ocasionados por conexiones mal soldadas, o por el uso de cables rígidos que originen que se desprenda el extensómetro del espécimen o incluso que se rompa. Por esto hay que seguir el proceso de cableado cuidadosamente.

Se debe tener gran cuidado en todo el proceso de instalación del extensómetro: elección de extensómetro y cementante, preparación de la superficie, proceso de pegado y soldadura de cables. La medición de las deformaciones puede depender no tanto del sensor, como de su instalación.

#### 1.3.4 Instalación en Concreto.

El concreto presenta problemas peculiares para la instalación e instrumentación de los extensómetros de resistencia. Como en el caso de cualquier material, es esencial una superficie lisa y absolutamente limpia para asegurar una buena unión.

En los primeros intentos de utilizar extensómetros de resistencia para estudiar estructuras de concreto, se encontraron los siguientes problemas: dificultades para la instalación, la humedad del concreto afectaba la resistividad, y habían variaciones en las propiedades físicas según la dirección (el concreto no es absolutamente homogéneo ni isotrópico).

Para solucionar los problemas mencionados, se sigue el procedimiento de instalación que a continuación se explica:

Primero se prepara la superficie para que esté lisa y suave, se remueve el polvo y se seca completamente. Se aplica una capa de pegamento nitroceluloso, y se coloca una pieza de celuloide de 0.025 cm. de espesor, presionando firmemente, el cual servirá como base para el extensómetro. Al presionar el celuloide se hace que el pegamento penetre en los poros del concreto. Se deja secar esta capa por 24 horas, luego se lija y se instala el extensómetro convencionalmente. A continuación se aplica una capa de cera, y luego se cubre el extensómetro y el rededor con laca. Esto último ayuda a que el extensómetro funcione por largos períodos de tiempo.

Si el concreto se va a probar en exterior, o si está situado en un lugar donde puede absorber humedad, es preferible utilizar una laminilla metálica, que sirve de barrera a la humedad, en lugar de la hoja de celuloide.

Debido a que el concreto es un material heterogéneo, compuesto de agregados finos y gruesos, así como cemento y agua, la distribución local de los esfuerzos puede ser errática y no representativa de la distribución total de esfuerzos, que normalmente es el objetivo de la instrumentación. Esta situación se soluciona utilizando un extensómetro lo suficientemente largo (Fig. 32) para que promedie el efecto de los esfuerzos no uniformes en la dirección axial del extensómetro.

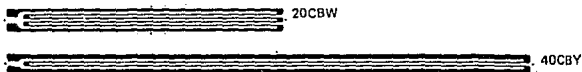


Fig. 32 Extensómetros individuales para uso en concreto.

También se ha desarrollado un método que permite introducir el extensómetro directamente dentro del concreto durante la etapa de colado del espécimen o miembro estructural. Este método consiste en instalar el extensómetro dentro de un sobre rectangular de lámina metálica de unos 0.025 cm. de espesor. Se utiliza para el sobre un material cuya ductilidad y maleabilidad permita que se le doble y maneje sin romperse. El extensómetro en el sobre se introduce en el espécimen de concreto en la posición deseada, orientándolo inmediatamente después de colar el concreto. La mezcla de cemento y agua se adhiere al sobre, obteniéndose así una transferencia completa de esfuerzos. Este tipo de extensómetros, con todo y su "envoltura", se encuentran comercialmente.

## 1.4 TRANSDUCTORES.

Al extensómetro de resistencia, por ser un dispositivo pequeño, preciso, ligero y económico, se le han dado muchos usos además de la determinación directa de deformaciones. Existen una gran variedad de instrumentos que lo utilizan como el elemento sensible para medir cargas, fuerzas, presiones, desplazamientos, torsiones y otras variables físicas. Estos instrumentos se denominan: Transductores.

Un Transductor es básicamente un dispositivo cuya función es transformar un efecto de entrada (desplazamiento lineal o angular) en una señal eléctrica de salida que varíe proporcionalmente.

Ya que la deformación es la cantidad fundamental que miden los extensómetros, todos los transductores que los utilizan se construyen de manera que la variable física que se pretende conocer pueda deformar uno o más miembros elásticos a los que se les instalan extensómetros.

Por ejemplo, en un Transductor de Carga, se mide la carga aplicada a un elemento al medir la deformación que sufre al ser cargado. Como carga y deformación tienen una relación lineal, mientras no se pase del límite de proporcionalidad, el transductor se puede calibrar para que la señal sea interpretada y se dé la lectura de la carga. La constante de proporcionalidad se puede obtener si se conoce el módulo de elasticidad y el área de la sección transversal del elemento; o bien se puede calibrar aplicando cargas conocidas y midiendo las deformaciones correspondientes. Esta técnica básica ha sido explotada de diferentes maneras para elaborar otro tipo de Transductores. Las propiedades del circuito puente de Wheatstone, junto con las leyes de la distribución de esfuerzos elásticos, son los fundamentos. En la Fig. 33 se puede observar un sistema actual consistente en un Transductor de Carga acompañado de una consola de indicador digital.



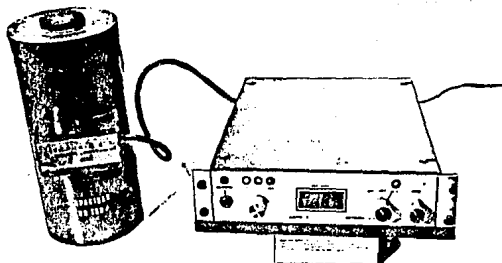


Fig. 33 Transductor de carga y consola de indicación.

Algo muy interesante es que cualquier variable que se pueda instrumentar con un transductor que trabaja con extensómetro, puede también ser controlada con el mismo instrumento. Los extensómetros pueden usarse para activar encendidos, aplicar señales correctivas o hacer sonar alarmas cuando la variable que miden sobrepasa un límite preestablecido.

Una ventaja de los Transductores es que su tamaño es mucho menor que el de sus correspondientes instrumentos mecánicos. Además, su señal de salida puede ser mostrada o grabada en un punto lejano al de la medición. La desventaja principal radica en su relativamente baja señal eléctrica de salida, lo que puede hacer necesario el uso de amplificación electrónica entre el extensómetro y el transductor. Para evitar esto, se pueden utilizar extensómetros piezoresistentes, pero implican un costo mayor.

En la aplicación a los transductores se emplea el puente de Wheatstone en forma total, usando cuatro extensómetros (Fig. 34) en una configuración denominada "Puente Completo". De esta manera se logra una máxima señal de salida que pueda detectarse con mayor facilidad empleando un aparato de lectura sencillo.

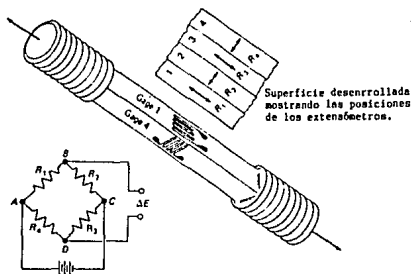


Fig. 34 Extensómetros instalados en un espécimen a tensión para construir un Transductor de Carga.

## CAPITULO II

### MECANICA DE MATERIALES

## 2.1 GENERALIDADES

La Mecánica de Materiales, también llamada Resistencia de Materiales o Mecánica de los Cuerpos Deformables, estudia y establece las relaciones entre las cargas exteriores aplicadas y sus efectos en el interior de los cuerpos sólidos. Los objetivos de este estudio son la determinación de los esfuerzos, deformaciones y deflexiones producidos por las cargas. Si estas magnitudes se pueden determinar hasta la carga de falla, se conocerá el Comportamiento Mecánico del Cuerpo.

Los análisis teóricos y los resultados experimentales son sumamente importantes en el estudio de la Mecánica de Materiales. Para que las fórmulas aplicadas para predecir el comportamiento mecánico den un resultado cercano a la realidad, es necesario conocer y tomar en cuenta las propiedades de los materiales. Esta información proviene del laboratorio, donde los materiales se someten a fuerzas conocidas y se observa su comportamiento, dando especial atención a la aparición de rupturas, deformaciones, etc. Pero en la práctica es probable encontrar problemas que no puedan resolverse eficazmente mediante procedimientos teóricos, por lo cual se requieren las mediciones experimentales.

El conocimiento del comportamiento de los materiales es fundamental para el diseño confiable de cualquier estructura. Así, si se sabe la magnitud del esfuerzo máximo de una sección, se podrá elegir el material apropiado para ella; o si se conocen las propiedades físicas del material, será posible diseñar un elemento del tamaño adecuado.

El Análisis Experimental de Esfuerzos se refiere a las observaciones a partir de las cuales se puede determinar el estado superficial de esfuerzos en un cuerpo. Este análisis se basa en los resultados de la medición de deformaciones, de las cuales se pueden inferir los esfuerzos. Por eso es necesario conocer las relaciones que hay entre Esfuerzo y Deformación.

## 2.2 CONCEPTOS BASICOS

**CARGA:** sollicitación a la que es sometido un elemento estructural compuesto por uno o varios materiales.

**Tipos de Carga:**

- Axial: su línea de acción coincide con el eje del elemento sollicitado. (Compresión, Tensión).
- Cortante: su línea de acción es perpendicular al eje del elemento.
- Momento Flexionante: combinación de un estado de tensión y compresión en un mismo elemento. Su eje de giro es perpendicular al plano formado por la línea de acción de las fuerzas Normal y Cortante.
- Momento Torsionante: sollicitación que induce a un giro del elemento sobre su propio eje.

**DEFORMACION:** cambio de dimensiones o de forma que sufre un elemento al ser sometido a una carga.

**Tipos de Deformación:**

- Longitudinal: acortamiento o alargamiento debido a una carga Axial, ya sea compresión o tensión. (Fig. 1).

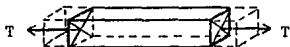


Fig. 1

- Angular: cambio de forma sin que haya aumento ni disminución de las dimensiones del elemento, es resultado del esfuerzo cortante. (Fig. 2).

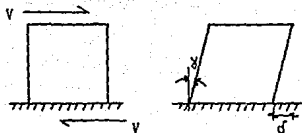


Fig. 2

- Por Momento Flexionante (Fig. 3):

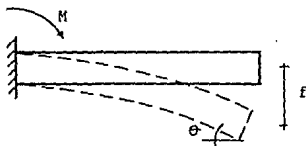


Fig. 3

- Por Torsión: la deformación es angular (Fig. 4).

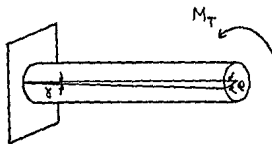


Fig. 4

- Por Temperatura.
- Por Fatiga (cargas repetidas).
- Por Efecto Poisson (deformaciones transversales).

### 2.3 ESFUERZO NORMAL

Considérese una barra de sección transversal constante, sometida a fuerzas de tensión en sus extremos. (Fig. 5).

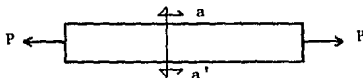


Fig. 5

Si se hace un corte perpendicular al eje longitudinal de la barra en a-a' se observa que para que una sección aislada quede en equilibrio, debe haber una fuerza por unidad de área, la cual se encuentra uniformemente distribuida a lo largo de la sección y de toda la barra. (Fig. 6).

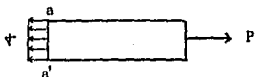


Fig. 6

Esta fuerza por unidad de área es el Esfuerzo Normal ( $\nabla$ ):

$$\nabla = \frac{P}{A} = \frac{\text{fuerza axial aplicada}}{\text{area de la seccion transversal}} \quad \dots(1)$$

El Esfuerzo Normal puede ser de tensión o de compresión, dependiendo de la fuerza aplicada.

Para que la ecuación (1) sea válida, el esfuerzo  $\nabla$  debe estar uniformemente distribuido sobre la sección transversal de la barra, y para que esto suceda, la fuerza axial P deberá estar aplicada en el centroide de la sección transversal [Ref. 1]. Si la fuerza axial no actúa en el centroide se origina flexión y se requiere de un análisis complejo.

Hay que tomar en cuenta que la distribución de esfuerzos en los extremos de la barra, depende de la aplicación de la carga axial  $P$ , si ésta es uniforme, también lo será el esfuerzo. Pero generalmente la carga se concentra en un área pequeña, originando esfuerzos locales elevados y una distribución no uniforme. Al alejarse de los extremos donde se aplica la carga, la distribución de esfuerzos se va haciendo uniforme. Cuando el esfuerzo no es uniforme, la ecuación  $\sigma = P/A$  es el Esfuerzo Normal Medio.

## 2.4 DEFORMACION UNITARIA

Al someter una barra a carga axial, ésta sufrirá un cambio en su longitud: alargamiento o acortamiento, dependiendo de si está a tensión o a compresión. La variación total en su longitud es la deformación axial ( $\delta$ ), como se ilustra en la Fig. 7.

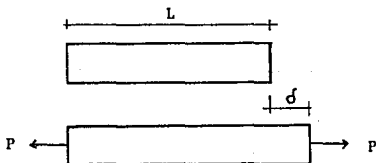


Fig. 7

La Deformación Unitaria ( $\epsilon$ ) es la deformación axial ( $\delta$ ) que presenta un elemento por unidad de longitud al ser sometido a una carga:

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} \quad \dots\dots(2)$$



## 2.5 DIAGRAMAS ESFUERZO-DEFORMACION

Los diagramas Esfuerzo-Deformación se obtienen experimentalmente para cada material, y son muy útiles en la Ingeniería.

Generalmente, los Esfuerzos se calculan dividiendo la carga  $P$  aplicada entre el área transversal original de una probeta o muestra. A tales valores de esfuerzo se les denomina Esfuerzos - Nominales (también llamados Esfuerzos Convencionales o de Ingeniería). Pero se sabe que en un material ocurre estricción o contracción transversal (Fig. 8), por lo que para encontrar el Esfuerzo Real se divide la fuerza aplicada entre el área transversal instantánea, es decir, el área final.

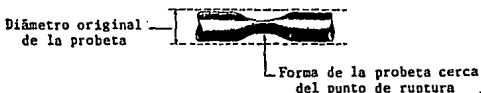


Fig. 8 Contracción típica de una probeta de acero dulce sometida a tensión.

Por ejemplo, para el acero estructural (acero dulce) a tensión, se obtiene el siguiente diagrama Esfuerzo-Deformación:

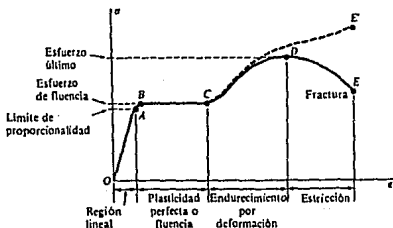


Fig. 9 Diagrama Esfuerzo-Deformación del acero estructural a tensión (fuera de escala).

De dicho diagrama se hacen las siguientes observaciones:

El diagrama empieza con una línea recta desde el origen O, hasta el punto A. En esta región, el  $\sigma$  y la  $\epsilon$  son directamente proporcionales, y el comportamiento del material es lineal. Al punto A se le denomina Límite de Proporcionalidad, y a partir de ahí el esfuerzo deja de ser proporcional a la deformación. La pendiente de la recta  $\overline{OA}$  es el Módulo de Elasticidad E, que físicamente representa la rigidez del material sometido a una carga.

Al aumentar la carga después del Límite de Proporcionalidad la deformación aumenta rápidamente para incrementos pequeños del esfuerzo, hasta llegar al punto B, Punto de Fluencia, a partir del cual la curva se vuelve horizontal presentándose grandes deformaciones sin incremento de carga (esfuerzo) hasta llegar al punto C.

Después de las grandes deformaciones por la fluencia del material (de B a C), se da un endurecimiento por deformación, por lo que de nuevo es necesario incrementar la carga para lograr una deformación. El diagrama toma una pendiente positiva de C a D, donde se alcanza el Esfuerzo Último (o Límite de Resistencia). El alargamiento posterior está acompañado de una reducción de la carga, y finalmente se presenta el Punto de Ruptura, en el punto E. El Punto de Ruptura es algo menor que el Esfuerzo Último, debido a que no se toma en cuenta la estricción, esto es, cercana a la ruptura, el material se alarga rápidamente y al mismo tiempo se contrae transversalmente, por lo que en el instante de la ruptura, la carga se distribuye en un área más pequeña. Si se calcula el Esfuerzo Real en el Punto de Ruptura,  $E'$ , se obtiene un valor del Punto de Ruptura mayor que el del Esfuerzo Último. Pero para fines prácticos se calculan los esfuerzos con el área transversal original.

Comparando diagramas  $\sigma$ - $\epsilon$  se observa que el Punto de Fluencia y el Límite de Proporcionalidad están tan cerca que para la mayoría de los casos pueden considerarse como uno mismo.

Para aquellos materiales que no tienen bien definido su Punto de Fluencia, éste se determina trazando una paralela a la tangente en el origen, desplazada una distancia, generalmente 0.2 % de la deformación. La intersección de esta recta y la curva  $\sigma$ - $\epsilon$  se toma como el Punto de Fluencia del material (Fig. 10).

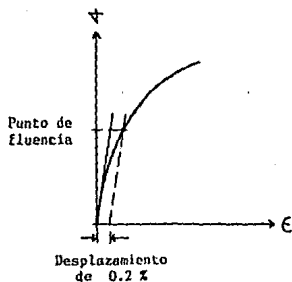


Fig. 10 Método del desplazamiento para determinar el Punto de Fluencia de un material.

En la Fig. 11 se muestran ejemplos de diagramas  $\sigma$ - $\epsilon$ .

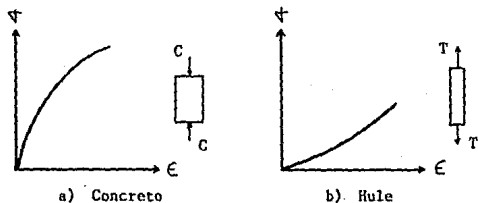


Fig. 11

Los materiales Frágiles presentan un diagrama  $\sigma$ - $\epsilon$  como el de la Fig. 12, debido a que fallan a tensión a valores bajos de deformación unitaria. Algunos ejemplos de este tipo de materiales son: concreto, piedra, hierro fundido, vidrio, cerámica.

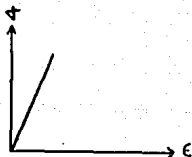


Fig. 12 Diagrama  $\sigma$ - $\epsilon$  de un material Frágil.

Y los materiales Dúctiles son aquellos que soportan grandes deformaciones plásticas antes de la falla; su diagrama  $\sigma$ - $\epsilon$  es similar al de la Fig. 13. Ejemplos de materiales dúctiles: acero estructural, aluminio, cobre, plomo, latón, bronce.



Fig. 13 Diagrama  $\sigma$ - $\epsilon$  de un material Dúctil.

Para muchos materiales, los diagramas  $\sigma$ - $\epsilon$  que se obtienen a compresión son similares a los de tensión. Sin embargo para otros, los diagramas difieren según el sentido de la fuerza aplicada. Por ejemplo, el hierro fundido y el concreto son muy débiles a tensión, pero no así a compresión, como se observa en la Fig. 14.

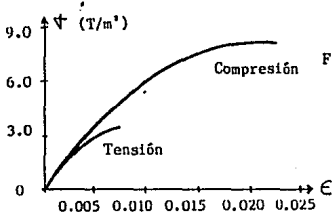


Fig. 14 Diagramas  $\sigma$ - $\epsilon$  de hierro fundido sujeto a tensión y a compresión.

## 2.6 ELASTICIDAD Y PLASTICIDAD

- **Materiales Elásticos:** son aquellos que recuperan su forma original al ser descargados. Pueden ser Elástico Lineales o Elástico No Lineales. (Fig. 15).

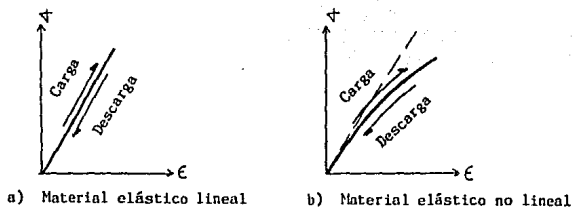


Fig. 15

- **Materiales Plásticos:** son aquellos que presentan deformaciones permanentes después de ser descargados (Fig. 16).

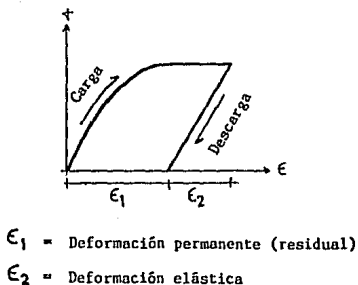


Fig. 16

## 2.7 LEY DE HOOKE

La relación lineal entre Esfuerzo y Deformación Unitaria se conoce como Ley de Hooke, y se expresa como:

$$\sigma = E \epsilon \quad \dots\dots\dots(3)$$

Donde E, módulo de elasticidad, es la pendiente del diagrama  $\sigma$ - $\epsilon$  en la región linealmente elástica, y es característico de cada material.

Para el acero,  $E = 2,100,000 \text{ kg/cm}^2$

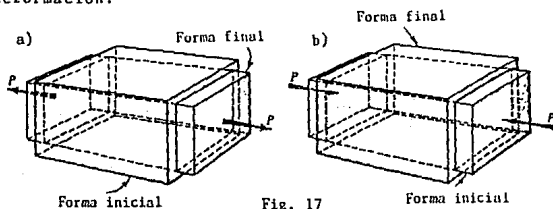
$$\begin{aligned} \text{Para el concreto, } E &= 14,000 \sqrt{f'c} & \text{si } f'c \geq 250 \text{ kg/cm}^2 \\ E &= 8,000 \sqrt{f'c} & \text{si } f'c < 250 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

Hay que recordar que la Ley de Hooke sólo se aplica hasta el Límite de Proporcionalidad del material (generalmente se idealiza la curva  $\sigma$ - $\epsilon$  hasta este punto en una línea recta). Por lo que las fórmulas basadas en dicha ley se limitan en muchos casos al comportamiento del material en el intervalo inferior de esfuerzos.

Teniendo en mente la Ley de Hooke, se observa que se puede determinar la intensidad promedio del esfuerzo en un cuerpo ante ciertas condiciones de carga, midiendo experimentalmente la deformación y multiplicándola por el módulo de elasticidad, siempre y cuando no se sobrepase el Límite de Proporcionalidad. Esta es básicamente la única manera de determinar el Esfuerzo experimentalmente, ya que ésta no es una cantidad fundamental física como la deformación, sino una cantidad derivada.

## 2.8 RELACION DE POISSON

Además de la deformación de los materiales en la dirección del Esfuerzo Normal, ocurre cierta contracción o expansión perpendicular al esfuerzo (Fig. 17). Esta deformación lateral es una deformación sin esfuerzo, ya que aunque no exista un esfuerzo normal transversal al elemento cargado axialmente, sí ocurre una deformación.



Esta deformación lateral unitaria es proporcional a la deformación axial en el rango elástico lineal, si el material es homogéneo (misma composición) e isotrópico (mismas propiedades elásticas en todas direcciones).

La Relación de Poisson ( $\nu$ ) es la relación que hay entre la deformación lateral y la deformación axial:

$$\nu = \frac{\text{deformación lateral}}{\text{deformación axial}}$$

Experimentalmente se ha encontrado que el valor de  $\nu$  fluctúa entre 0.25 y 0.35. Entre los materiales con valores muy bajos de  $\nu$  se encuentra el corcho, con un valor cercano a 0 (es por eso su uso como tapón), y el concreto con  $\nu$  de 0.1 a 0.2. El límite superior para  $\nu$  es de 0.5, al cual se aproxima el caucho, este valor significa la constancia física de volúmen. En la práctica,  $\nu$  puede considerarse con el mismo valor a tensión que a compresión.

## 2.9 DEFORMACIONES TERMICAS

Los cambios de temperatura producen en los cuerpos dilataciones o contracciones, generalmente se expanden al calentarse y se contraen cuando se enfrían. Estas deformaciones térmicas - normalmente son reversibles.

La deformación lineal por temperatura ( $\delta_T$ ) se calcula con:

$$\delta_T = \alpha (\Delta T) L \quad \dots\dots\dots(4)$$

en donde:

$\alpha$  = coeficiente de dilatación térmica, es una propiedad del material, su unidad es el inverso de la temperatura.

$\Delta T$  = variación de temperatura.

$L$  = longitud.

La ecuación (4) generalmente se emplea para calcular cambios de longitud de miembros estructurales, sin tomar en cuenta la deformación transversal, ya que no afecta a la transmisión de esfuerzos del elemento.

Si no se impide la deformación debida a la temperatura, como en los sistemas estáticamente determinados, no aparecerán esfuerzos en la estructura, pero muchas veces las deformaciones - térmicas están total o parcialmente impedidas, y entonces, como en el caso de las estructuras estáticamente indeterminadas, aparecen fuerzas internas que tienden a contrarrestar dichas deformaciones. Los esfuerzos originados por estas fuerzas internas se denominan Esfuerzos Térmicos. Tales esfuerzos también se pueden presentar si el elemento se calienta de manera no uniforme, aún si la estructura es estáticamente determinada.



## 2.10 ESFUERZO CORTANTE

Contrariamente a los Esfuerzos Normales que actúan perpendicularmente a la superficie, el Esfuerzo Cortante actúa paralelo a ella. Aparecen Esfuerzos Cortantes siempre que las fuerzas aplicadas obliguen a que una sección del sólido tienda a deslizarse sobre la sección adyacente. En la Fig. 18 se muestran algunos ejemplos.

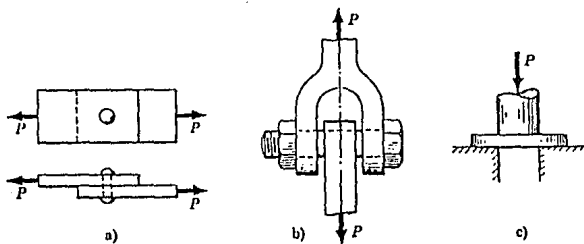


Fig. 18 Ejemplos de secciones sometidas a cortante.

Para calcular el Esfuerzo Cortante Medio ( $\tau$ ) en una sección dada, se divide la fuerza cortante total  $V$  entre el área  $A$  sobre la que actúa:

$$\tau = \frac{V}{A} \quad \dots\dots\dots(5)$$

Los esfuerzos cortantes en un elemento diferencial de un cuerpo sometido a cortante puro (sujeto únicamente a esfuerzos cortantes), actúan tanto paralelos a las fuerzas cortantes aplicadas, como perpendiculares a ellas. Lo anterior se ilustra en la Fig. 19.

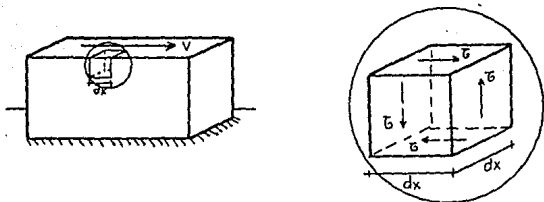


Fig. 19

Y por equilibrio de momentos se encuentra que las magnitudes de los esfuerzos cortantes en las cuatro caras del elemento diferencial son iguales [Ref. 2] , y se puede establecer que:

- Los esfuerzos cortantes en caras opuestas de un elemento son de igual magnitud y sentido contrario.

- Los esfuerzos cortantes en caras perpendiculares son iguales en magnitud y sus sentidos apuntan hacia la intersección de las caras sobre las que actúan, o en sentido opuesto.

En realidad, la distribución del esfuerzo cortante en una sección no es uniforme prácticamente en ningún caso, y por ello la expresión (5) se interpreta como el esfuerzo cortante "medio". Sólo cuando la distancia entre las fuerzas aplicadas sea muy pequeña, o el ancho de la sección sea igualmente pequeño, la distribución del esfuerzo cortante tiende a ser uniforme.

## 2.11 DEFORMACION ANGULAR

Las fuerzas cortantes producen una Deformación Angular (dig torsión), diferenciándose de las fuerzas axiales en que éstas últimas producen una variación en las dimensiones del elemento, - mientras que la fuerza cortante no ocasiona cambio de longitud, sino sólo un cambio de forma. Fig. 20.

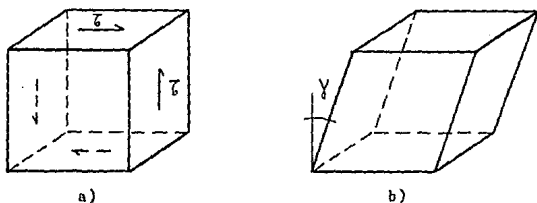


Fig. 20 Esfuerzo Cortante y Deformación Angular.

De la Fig. 21 se observa que la deformación angular media se obtiene dividiendo  $d_s$  entre  $L$ . Esto es porque  $\tan \gamma = d_s/L$  pero como  $\gamma$  es siempre muy pequeño,  $\tan \gamma \approx \gamma$ , con lo que:

$$\gamma = \frac{d_s}{L} \quad \dots\dots(6)$$

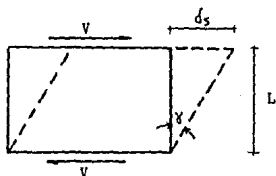


Fig. 21

Las propiedades de un material sometido a cortante, se determinan por pruebas de cortante directo o pruebas de torsión. Con ésto se pueden trazar diagramas Esfuerzo-Deformación en Cortante, siendo similares a los de Esfuerzo-Deformación por Fuerza Axial. Las propiedades a Cortante como el Límite de Proporcionalidad, Esfuerzo de Fluencia y Esfuerzo Ultimo, se pueden obtener de los diagramas. Normalmente, las propiedades en Cortante son del orden de la mitad que las correspondientes en tensión.

Si el material es Elástico Lineal, la ley de Hooke también es válida en Cortante, existiendo una relación lineal entre la Deformación Angular y el Esfuerzo Cortante:

$$\tau = G \gamma \quad \dots\dots\dots (7)$$

en donde G es el Módulo de Elasticidad al Cortante (o Módulo de Rigidez).

Los módulos de Elasticidad a tensión y a cortante, E y G, se pueden relacionar por la siguiente ecuación:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \dots\dots\dots (8)$$

En la cual se observa que G, E y  $\nu$  no son propiedades independientes de un material. Y como en los materiales comunes  $\nu$  varía de 0 a 0.5, el valor de G está entre E/3 y E/2.

## 2.12 ESTADO DE ESFUERZO PLANO

Cuando se somete un cuerpo sólido a cargas externas, el material del cuerpo resiste y transmite dichas cargas. Como ya se vió en 2.3 , si se hace un corte transversal en una barra sometida a tensión, se observa que para que se mantenga el equilibrio, se da el Esfuerzo Normal:  $\sigma = P/A$ .

Pero si el corte no se hace perpendicular al eje longitudinal de la barra (Fig. 22-a), la fuerza  $P$  no actúa perpendicular a la superficie. Para hacer un análisis similar al del esfuerzo normal, se descompone  $P$  en  $N$ , normal a la sección, y en  $T$ , -- fuerza que actúa tangencialmente a la superficie. (Fig. 22-b).

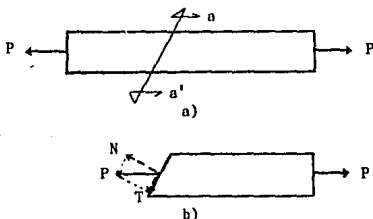


Fig. 22

La acción de estas dos componentes en el material resistente es muy diferente y resulta en los dos tipos fundamentales de esfuerzos:

$$\text{Esfuerzo Normal} = \sigma = N/A$$

$$\text{Esfuerzo Cortante} = \tau = T/A$$

en donde  $A$  es el área de la sección oblicua.

Es por eso que los esfuerzos en un punto de la barra pueden expresarse como una combinación de esfuerzos normales y cortantes, cuyas magnitudes dependen de la orientación del plano de la sección.

Los componentes de la fuerza definen al plano que contiene todos los esfuerzos. Esta condición es el Estado de Esfuerzo Plano. La mayoría de los problemas de Análisis de Esfuerzos en ingeniería, son de este tipo.

Si se toma el plano de los esfuerzos como el plano X-Y, se puede representar un estado general de esfuerzos en un punto con los esfuerzos actuando en una partícula, como se muestra en la Fig. 23-a. Cada cara es sometida a una combinación de esfuerzo normal (tensión, considerado positivo, o compresión, negativo) y de esfuerzo cortante. La notación usual es la siguiente:

- $\sigma_x$  = esfuerzo normal en un plano cuya normal es paralela al eje X.
- $\sigma_y$  = esfuerzo normal en un plano cuya normal es paralela al eje Y.
- $\tau_{xy}$  = esfuerzo cortante; el primer subíndice se refiere a la dirección de la normal al plano en el cual actúa el esfuerzo, y el segundo subíndice se refiere a la dirección del esfuerzo en ese plano.

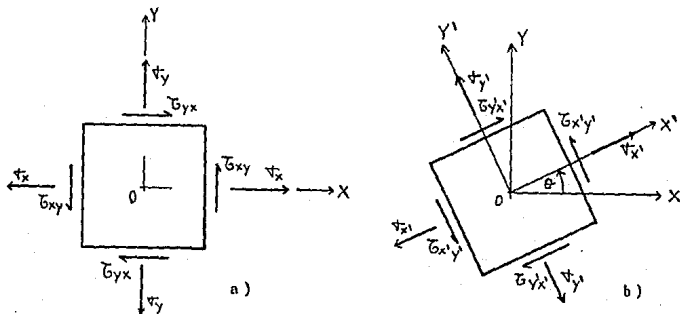


Fig. 23

Sacando momentos con respecto a O de las fuerzas que actúan en el elemento (Fig. 23-a) se observa que para mantener el equilibrio,  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ . Por lo que un Estado de Esfuerzo Plano puede expresarse por la combinación de tres esfuerzos:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ .

Si se cambia la orientación de los ejes, las magnitudes de los componentes del esfuerzo también cambiarán, aunque se describa el mismo Estado de Esfuerzos. En la Fig. 23-b se muestran unos ejes  $X'-Y'$  que han sido rotados un ángulo  $\theta$  de  $X$  a  $Y$ . El equilibrio de las fuerzas en el elemento trapezoidal da las relaciones siguientes entre los componentes del esfuerzo:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \dots (9-a)$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \dots (9-b)$$

$$\tau_{x'y'} = \tau_{xy} \cos 2\theta - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta \dots (9-c)$$

Estas ecuaciones se conocen como las Ecuaciones de Transformación para Esfuerzo Plano porque transforman las componentes del esfuerzo de un conjunto de ejes a otro.

Por medio de estas ecuaciones se encuentra cierta orientación de los ejes que hace que el esfuerzo cortante sea cero, y que los esfuerzos normales en esos planos sean el máximo y el mínimo que existan en ese punto. Esto ocurre cuando el ángulo entre el eje  $X$  y el eje rotado  $X'$  está dado por:

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \dots (10)$$

Los ejes  $X'-Y'$  así localizados son los Ejes de los Esfuerzos Principales, y los correspondientes esfuerzos normales, son los Esfuerzos Principales  $\sigma_{\max}$  y  $\sigma_{\min}$ , en ese punto.

El caso general de Esfuerzo Plano se reduce a estados de esfuerzos más simples bajo ciertas condiciones. Si todos los esfuerzos que actúan sobre el elemento de la Fig. 23-a son nulos, excepto el esfuerzo normal  $\sigma_x$ , entonces el elemento está en un estado de Esfuerzo Uniaxial (Fig. 24-a). Las ecuaciones de transformación correspondientes son:

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \theta \quad \dots\dots\dots(11-a)$$

$$\tau_{x'y'} = -\sigma_x \sin \theta \cos \theta \quad \dots\dots\dots(11-b)$$

Otro caso es un estado de esfuerzo Cortante Puro (Fig. 24-b) cuando  $\sigma_x = \sigma_y = 0$ , cuyas ecuaciones de transformación son:

$$\sigma_{x'} = 2 \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad \dots\dots\dots(12-a)$$

$$\tau_{x'y'} = \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad \dots\dots\dots(12-b)$$

El último caso es el estado de Esfuerzo Biaxial, condición en que el elemento se somete a esfuerzos normales en dos direcciones, sin esfuerzos cortantes. Las ecuaciones para esfuerzo biaxial se obtienen de las ecuaciones de transformación para esfuerzo plano, eliminando los términos que contienen a  $\tau_{xy}$ . (Fig 24-c).

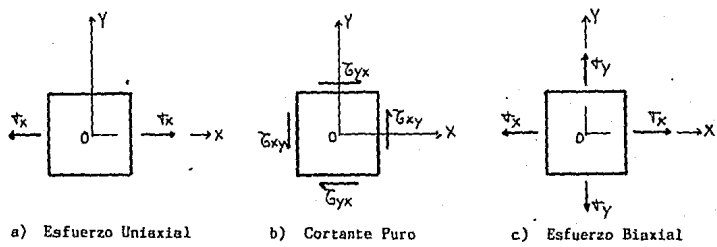


Fig. 24



## 2.13 ESFUERZOS PRINCIPALES Y ESFUERZOS CORTANTES MAXIMOS

Las ecuaciones de transformación para esfuerzo plano, muestran que los esfuerzos normales y cortante, varían al girar el elemento un ángulo  $\theta$ . Con fines de diseño, usualmente son necesarios los valores máximos y mínimos, o sea, los Esfuerzos Principales y los Esfuerzos Cortantes Máximos.

La ecuación (10) da el valor del ángulo  $\theta$  que define la orientación de los Planos Principales (planos sobre los que actúan los Esfuerzos Principales). De esa ecuación pueden obtenerse dos valores para  $2\theta$  (entre  $0^\circ$  y  $360^\circ$ ), que difieren en  $180^\circ$ , estando un valor entre  $0^\circ$  y  $180^\circ$ , y el otro entre  $180^\circ$  y  $360^\circ$ . Por lo que el ángulo  $\theta$  tiene dos valores que difieren en  $90^\circ$ , uno entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$ , y el otro entre  $90^\circ$  y  $180^\circ$ . A un ángulo le corresponde el Esfuerzo Principal Máximo y al otro el Mínimo, y ambos ocurren en planos mutuamente perpendiculares.

Los valores de los Esfuerzos Principales pueden calcularse al sustituir los valores de  $\theta$  en la ecuación de transformación de esfuerzos (9-a) y despejar  $\sigma_x$ . Así se asocia también el Esfuerzo Principal al ángulo correspondiente.

También es posible utilizar las fórmulas generales para los Esfuerzos Principales:

$$\sigma_{x',y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \dots(13)$$

El signo positivo da el esfuerzo algebraicamente mayor. Pero esta ecuación no indica cuál ángulo corresponde a cada esfuerzo. Para determinarlo se puede tomar un valor de esfuerzo principal y sustituirlo en la ecuación (9-a), y así correlacionar ángulo y esfuerzo.

Los Planos Principales para elementos en estado de esfuerzo Axial y Biaxial son los mismos planos X y Y (Fig. 24-a,c) ya que  $\tan 2\theta = 0$ , por lo que los dos valores de  $\theta$  son  $0^\circ$  y  $90^\circ$ .

Para un elemento en Cortante Puro (Fig. 25), los Planos Principales están orientados a  $45^\circ$  respecto al eje X, ya que la  $\tan 2\theta$  es infinita, de ahí que los valores de  $\theta$  son  $45^\circ$  y  $135^\circ$ .

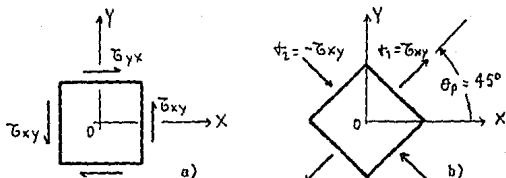


Fig. 25

Además de los Esfuerzos Normales Máximos, también se busca el Esfuerzo Cortante Máximo, cuyos planos están a  $45^\circ$  de los Planos Principales. Para encontrar el Esfuerzo Cortante Máximo se utiliza la expresión:

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \dots\dots(14)$$

o a partir de los Esfuerzos Principales:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad \dots\dots(15)$$

Sobre los planos del Esfuerzo Cortante Máximo también actúan Esfuerzos Normales, que equivalen al Esfuerzo Medio de los esfuerzos normales sobre los planos X y Y:

$$\sigma_{\text{med}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad \dots\dots(16)$$

Este esfuerzo  $\sigma_{\text{med}}$  actúa simultáneamente en el plano de Esfuerzo Cortante Máximo y en el del Mínimo.

En los casos de Esfuerzo Uniaxial y Esfuerzo Biaxial (Fig. 24-a,c) los planos de Esfuerzo Cortante Máximo ocurren a  $45^\circ$  de los ejes X y Y. En el caso del Cortante Puro (Fig. 24-b), los esfuerzos Cortantes Máximos ocurren en los planos X y Y.

## 2.14 CIRCULO DE MOHR

Si se prepara una gráfica cuya ordenada sea el esfuerzo cortante y cuya abscisa sea el esfuerzo normal, las ecuaciones de transformación (9) darán las coordenadas de un punto que representa la combinación de esfuerzos en el plano  $X'-Y'$ , pasando por la posición donde se conocen los esfuerzos. El lugar geométrico de estos puntos, determinados al variar el ángulo  $\theta$ , es un círculo cuyo centro se localiza sobre el eje horizontal en:

$$\tau_{med} = \frac{\tau_x + \tau_y}{2}$$

y cuyo radio es:

$$R_{\tau} = \tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\tau_x - \tau_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Esta representación gráfica del estado de esfuerzos es conocida como el Círculo de Esfuerzos de Mohr. Es de gran ayuda para visualizar las relaciones entre los esfuerzos que actúan sobre planos a diversos ángulos en un punto.

Ya que las ecuaciones de transformación están expresadas en términos del ángulo  $2\theta$ , todas las relaciones angulares son dobles en el Círculo de Mohr. Las direcciones angulares (sentido de las manecillas del reloj o contrario) pueden elegirse y seguir una convención. Los esfuerzos normales se consideran positivos si son de tensión y se dibujan sobre la abscisa a la derecha del origen. El asignar el signo al esfuerzo cortante es arbitrario, lo que implica dos formas de trazar el Círculo de Mohr. En la primera, se traza el cortante positivo hacia abajo, por lo que el ángulo  $2\theta$  es positivo en sentido contrario a las manecillas del reloj. En la segunda forma, el cortante es positivo hacia arriba y  $2\theta$  es positivo en el sentido de las manecillas del reloj (Fig. 26). Ambas formas son correctas, prefiriéndose en este trabajo la primera forma debido a que el ángulo  $\theta$  para el elemento esforzado es positivo en sentido contrario a las ma-

nechillas del reloj, y así evitar errores al considerar el ángulo  $2\theta$  con la misma convención.

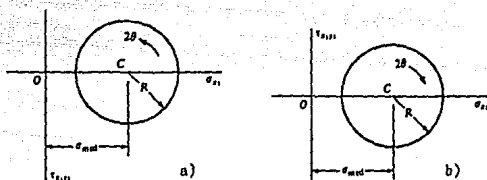


Fig. 26 Dos formas del círculo de Mohr: a)  $\tau$  es positivo hacia abajo y  $2\theta$  es positivo en sentido contrario a las manecillas del reloj; b)  $\tau$  es positivo hacia arriba y  $2\theta$  es positivo en el sentido del reloj.

Por ejemplo, considérese el estado de esfuerzos mostrado en la Fig. 27-a. Un elemento del material en el punto considerado está sujeto a un esfuerzo de tensión de 10 ton en la dirección X, a un esfuerzo de compresión de 2 ton en la dirección Y, y a un esfuerzo cortante de 8 ton con las direcciones mostradas. La representación del círculo de Mohr para este estado de esfuerzo se muestra en la Fig. 27-b. La combinación que actúa en la cara X,  $\sigma_x = +10$  ton,  $\tau_{xy} = 8$  ton, se marca como el punto A, y la combinación que actúa en la cara Y,  $\sigma_y = -2$  ton,  $\tau_{xy} = -8$  ton, es el punto B. La duplicidad de los ángulos en el círculo de Mohr significa que los puntos A y B están separados  $180^\circ$  (a los extremos del diámetro del círculo). El centro del círculo está en O, y es la intersección del eje de los esfuerzos normales y de la línea AB. Los esfuerzos principales se encuentran en los extremos del diámetro horizontal como  $\sigma_1 = +14$  ton y  $\sigma_2 = -6$  ton, y la dirección del eje de los esfuerzos principales es la mitad de  $53^\circ 8'$  (en contra de las manecillas del reloj). Estos resultados se muestran en la Fig. 27-c.

A partir del círculo de Mohr se pueden determinar los esfuerzos sobre cualquier plano inclinado, así como los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes máximos.

También se puede utilizar el círculo de Mohr en forma inversa. Si se conocen los esfuerzos y el ángulo que actúan sobre un elemento girado, se puede construir el círculo y determinar los esfuerzos para  $\sigma = 0$ .

Es posible trazar el círculo de Mohr a escala y así calcular los valores de los esfuerzos, pero es preferible efectuar los cálculos numéricos para los esfuerzos. Aunque ya no se utilizan técnicas gráficas en los cálculos de ingeniería, el círculo de Mohr sigue siendo una excepción.

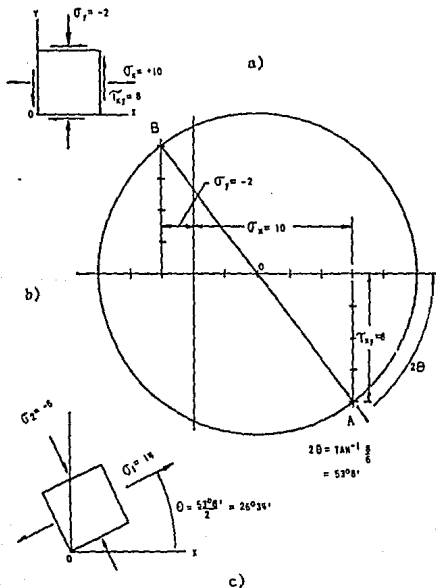


Fig. 27 Círculo de Mohr para esfuerzos.

2.15 DEFORMACION PLANA, DEFORMACIONES PRINCIPALES, DEFORMACION ANGULAR MAXIMA, CIRCULO DE MOHR PARA DEFORMACIONES.

La acción de las fuerzas que producen esfuerzo normal y cortante, tiene su contraparte en las deformaciones. La Fig. 28 muestra las deformaciones (exageradas) de ambos tipos: deformación normal ( $\epsilon$ ), extensión o compresión, y deformación por cortante ( $\gamma$ ), que es una distorsión angular medida en radianes. Un elemento sometido a estas deformaciones está en un Estado de Deformación Plana.

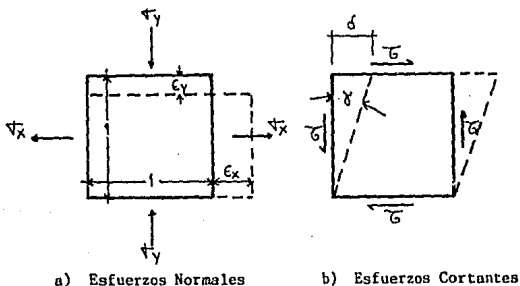


Fig. 28

Estas deformaciones varían con la dirección en forma análoga a los esfuerzos. Por eso también son necesarias las ecuaciones de transformación para Deformación Plana. La suposición de que las deformaciones son muy pequeñas, implica que solo se consideren los efectos de primer orden (aproximación satisfactoria para los problemas estructurales en ingeniería), y se encuentran las siguientes ecuaciones, en donde  $\theta$  es el ángulo medido del eje X al eje X':

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \quad \dots(17-a)$$

$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \quad \dots(17-b)$$

$$\gamma_{x'y'} = \gamma_{xy} \cos 2\theta - (\epsilon_x - \epsilon_y) \sin 2\theta \quad \dots\dots\dots(17-c)$$

La comparación de estas ecuaciones con las de transformación para Esfuerzo Plano, muestra una sustitución de  $\epsilon$  por  $\sigma$ , y de  $\gamma/2$  por  $\tau$ . Esta similitud implica que las ecuaciones válidas para el esfuerzo plano, pueden convertirse en relaciones de deformación. Así, para encontrar los ejes de la Deformación Principal, hay que rotar los ejes un ángulo dado por:

$$\tan 2\theta = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \quad \dots\dots\dots(18)$$

Como en el caso del Esfuerzo Plano, con los Esfuerzos Principales, aquí las Deformaciones Principales ocurren en direcciones perpendiculares. Además, es estos ejes, la Deformación Cortante o Angular es cero. Al analizar un elemento en Esfuerzo Plano orientado en las direcciones Principales, se ve que no hay esfuerzo Cortante actuando, por lo que tampoco habrá Deformación Angular; así que las Deformaciones Normales en este elemento son las Deformaciones Principales, y se puede concluir que los Planos Principales son los mismos para Esfuerzo Plano y para Deformación Plana.

Las Deformaciones Principales se calculan con la ecuación:

$$\epsilon_{x',y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad \dots(19)$$

Las Deformaciones Angulares Máximas están a 45° de las Direcciones de los Esfuerzos Principales. La Deformación Angular Máxima está dada por:

$$\frac{\gamma_{\max}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad \dots\dots(20)$$

En las direcciones de Deformación Angular Máxima, las Deformaciones Normales son iguales a  $(\epsilon_x + \epsilon_y)/2$ .

El círculo de Mohr para Deformación se grafica utilizando la deformación normal  $\epsilon$ , en las abscisas, y la mitad de la deformación cortante  $\gamma/2$ , en las ordenadas. Este círculo tiene su centro en el eje horizontal en:

$$\epsilon_{\text{med}} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \quad \dots\dots(21)$$

y el radio del círculo de deformación está dado por:

$$R_{\epsilon} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad \dots\dots(22)$$

El estado de deformación en dos dimensiones se define por los tres parámetros  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  y  $\gamma_{xy}$  relacionados a unos ejes, o por las Deformaciones Principales y su orientación relativa a una dirección dada. La determinación experimental del estado de deformación requiere de tres mediciones independientes en el punto que se examina. Las Deformaciones Normales son más fáciles de medir que las Angulares; de ahí que el problema se resuelva haciendo una medición de la deformación Normal en tres direcciones y resolviendo simultáneamente las siguientes ecuaciones:

$$\epsilon_A = \epsilon_{\theta_1} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta_1 + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta_1 \quad \dots(23-a)$$

$$\epsilon_B = \epsilon_{\theta_2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta_2 + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta_2 \quad \dots(23-b)$$

$$\epsilon_C = \epsilon_{\theta_3} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta_3 + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta_3 \quad \dots(23-c)$$

para encontrar  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  y  $\gamma_{xy}$ .



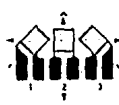
La elección de los ángulos  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$ , en  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ , o bien  $0^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ , simplifica la solución y la subsecuente determinación de las Deformaciones Principales.

Esa combinación de elementos para medir deformaciones en diferentes direcciones es llamada "Roseta de Deformaciones". Como la roseta se instala sobre la superficie del cuerpo, en donde el material está en Esfuerzo Plano, se pueden emplear las ecuaciones de transformación para deformación Plana en el cálculo de las deformaciones en diferentes direcciones sobre la superficie. Si no se tiene información para determinar el Estado de Deformación, se requieren tres elementos en la roseta (tres direcciones). Pero si el número de incógnitas se ha reducido, por ejemplo si se conocen las direcciones Principales, se puede utilizar una roseta de dos elementos. (Fig. 29).

Las deformaciones  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  y  $\gamma_{xy}$  se determinan a partir de las lecturas de los extensómetros de la roseta, con ellas se pueden calcular las deformaciones en cualquier otra dirección, ya sea con el Círculo de Mohr o por medio de las ecuaciones de transformación. También se pueden calcular las deformaciones Principales y las deformaciones Angulares Máximas.



a) Rosetas Dobles



b) Rosetas Triples



Fig. 29

## 2.16 LEY DE HOOKE PARA ESFUERZO PLANO

Dos consideraciones se combinan para relacionar el Esfuerzo y la Deformación en un material homogéneo (uniforme en todo el cuerpo) e isotrópico (mismas propiedades en todas direcciones) con comportamiento elástico lineal. La primera es la Ley de Hooke en una dimensión, que da la relación para el esfuerzo uniaxial, con la deformación en el mismo sentido:

$$\nabla_x = \epsilon_x E \quad \dots\dots\dots(24)$$

Y la segunda consideración es el efecto Poisson, esto es, el esfuerzo uniaxial produce deformación no sólo en la dirección X en que actúa, sino también en las direcciones Y y Z, y estas deformaciones son de signo contrario y proporcionales en magnitud a la deformación:

$$\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu \epsilon_x \quad \dots\dots\dots(25)$$

en donde  $\nabla_y = \nabla_z = 0$ .

Por lo que la expresión generalizada de la Ley de Hooke (el caso triaxial), puede formarse superponiendo ambos efectos:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\nabla_x - \nu (\nabla_y + \nabla_z)] \quad \dots\dots\dots(26-a)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\nabla_y - \nu (\nabla_z + \nabla_x)] \quad \dots\dots\dots(26-b)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\nabla_z - \nu (\nabla_x + \nabla_y)] \quad \dots\dots\dots(26-c)$$

Estas ecuaciones pueden resolverse para calcular el esfuerzo, resultando tres ecuaciones como la siguiente:

$$\nabla_x = \frac{E}{1 - 2\nu} \left[ \epsilon_x + \frac{\nu}{1 - \nu} (\epsilon_y + \epsilon_x) \right] \quad \dots\dots\dots(27)$$

Normalmente, el problema es determinar el Estado de Deformación en la superficie de un cuerpo: un caso de esfuerzo bidimensional. En estas condiciones el esfuerzo normal en la superficie  $\sigma_z$  es cero, y las ecuaciones (27) se reducen a:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \quad \dots\dots(28-a)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \quad \dots\dots(28-b)$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \quad \dots\dots(28-c)$$

o resolviéndolas para los esfuerzos:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) \quad \dots\dots(29-a)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) \quad \dots\dots(29-b)$$

$$\sigma_z = 0$$

Los esfuerzos Cortantes y las Deformaciones Angulares también se pueden relacionar linealmente:

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} \quad \dots\dots(30-a)$$

$$\tau_{yz} = G \gamma_{yz} \quad \dots\dots(30-b)$$

$$\tau_{zx} = G \gamma_{zx} \quad \dots\dots(30-c)$$

Estas ecuaciones (29,30) pueden emplearse para determinar los esfuerzos cuando se conocen las deformaciones.

2.17 TRANSFORMACION DEL CIRCULO DE MOHR  
DE DEFORMACIONES A ESFUERZOS

La analogía entre los componentes del esfuerzo y de la deformación, permite la siguiente relación: un círculo de Mohr de deformación se transforma en una circunferencia de esfuerzos mediante los siguientes cambios de escala y origen:

$$R_{\tau} = R_{\epsilon} \frac{E}{1+\nu} \quad \dots\dots(41)$$

$$(OC)_{\tau} = (OC)_{\epsilon} \frac{E}{1+\nu} \quad \dots\dots(42)$$

En donde  $R_{\tau}$  y  $R_{\epsilon}$  son los radios de las circunferencias de esfuerzo y de deformación respectivamente (Fig. 37). Y  $(OC)_{\tau}$  y  $(OC)_{\epsilon}$  las abscisas de los centros de dichas circunferencias.

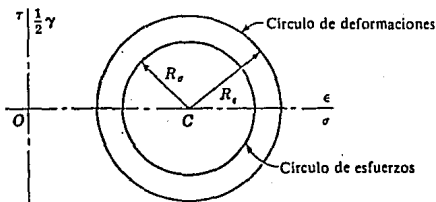


Fig. 37 Transformación de la circunferencia de Mohr de deformaciones en el círculo de Mohr de esfuerzos.

## 2.18 ROSETAS DE DEFORMACION

El esfuerzo en una barra sometida a una fuerza axial simple se puede determinar experimentalmente utilizando un extensómetro eléctrico (Fig. 30) adherido a la barra y orientado en la dirección (conocida) del esfuerzo. Este se calcula mediante  $\sigma = E \epsilon$ . En estas condiciones, la deformación unitaria que se mide es una Deformación Principal, este es el caso de Esfuerzo Uniaxial.

En el caso de Esfuerzo Biaxial, se emplearían dos extensómetros o una roseta rectangular doble (Fig. 31), siempre y cuando se conozcan las direcciones de los Esfuerzos Principales, y así orientar la roseta de manera que sus ejes coincidan con los Principales.

Pero como generalmente no se conocen las direcciones Principales, se requieren tres extensómetros, en arreglos conocidos como "rosetas" (Fig. 32).

Los dos tipos de rosetas más utilizados son:

- 1) Roseta Rectangular (a 45°) - con extensómetros en las posiciones 0°, 45° y 90°. (Fig. 33).
- 2) Roseta en Delta o Equiangular (a 60°) - con extensómetros en las posiciones 0°, 120° y 240°. (Fig. 34).

A continuación se explicarán mejor ambos casos.

### - Roseta Rectangular.

Para el caso de la roseta rectangular, al sustituir el valor de los ángulos en las ecuaciones (23), se obtiene:

$$\epsilon_x = \epsilon_A \quad \dots\dots(31-a)$$

$$\epsilon_y = \epsilon_C \quad \dots\dots(31-b)$$

$$\frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{\epsilon_A + \epsilon_C}{2} - \epsilon_B \quad \dots\dots(31-c)$$

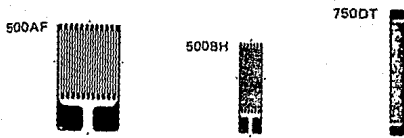


Fig. 30

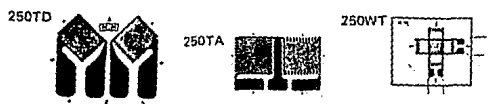


Fig. 31

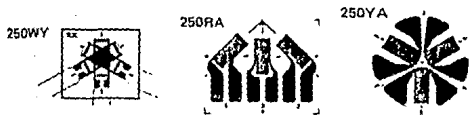


Fig. 32

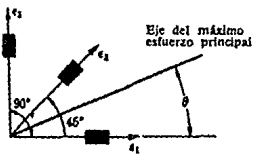


Fig. 33 Roseta rectangular.

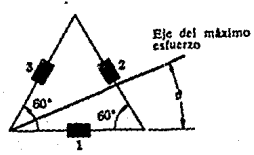


Fig. 34 Roseta en delta.

Al sustituir las ecuaciones (31) en las (18,19), se encuentran las deformaciones Principales:

$$\epsilon_{x',y'} = \frac{\epsilon_A + \epsilon_C}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\epsilon_A - \epsilon_C)^2 + (2\epsilon_B - \epsilon_A - \epsilon_C)^2} \quad \dots(32)$$

y la localización de los ejes Principales se obtiene a partir del ángulo  $\theta$ :

$$\tan 2\theta = \frac{2\epsilon_B - \epsilon_A - \epsilon_C}{\epsilon_A - \epsilon_C} \quad \dots\dots\dots(33)$$

Al resolver la ecuación (33) se encuentran dos valores para el ángulo  $\theta$ , llámense  $\theta_1$ , que se refiere al ángulo entre el eje X y el eje de la deformación Principal Máxima, y  $\theta_2$ , el ángulo entre el eje X y el eje de la deformación Principal Mínima. Para localizar el cuadrante en el que se encuentra  $\theta$ , se pueden seguir las siguientes reglas:

$$\begin{array}{ll} 0 < \theta < 90^\circ & \text{si } \epsilon_B > \frac{\epsilon_A + \epsilon_C}{2} \\ -90^\circ < \theta < 0 & \text{si } \epsilon_B < \frac{\epsilon_A + \epsilon_C}{2} \end{array}$$

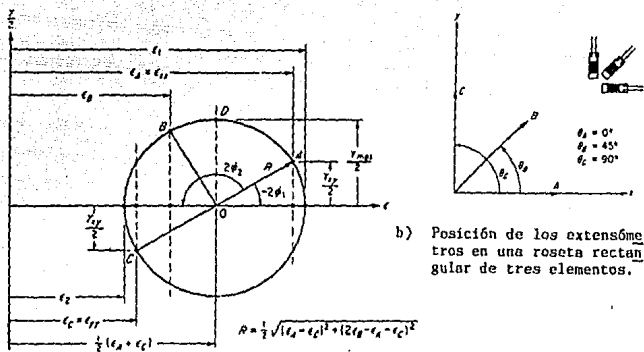
Los esfuerzos Principales se encuentra a partir de las ecuaciones (32,33) y las (29), con lo cual se obtiene:

$$\tau_{x',y'} = E \left[ \frac{\epsilon_A + \epsilon_C}{2(1-\nu)} \pm \frac{1}{2(1+\nu)} \sqrt{(\epsilon_A - \epsilon_C)^2 + (2\epsilon_B - \epsilon_A - \epsilon_C)^2} \right] \quad \dots\dots(34)$$

El Máximo Esfuerzo Cortante se calcula con:

$$\tau_{\max} = \frac{E}{2(1+\nu)} \sqrt{(\epsilon_A - \epsilon_B)^2 + (\epsilon_B - \epsilon_C)^2} \quad \dots\dots(35)$$

El Círculo de Mohr (Fig. 35) también se puede aplicar a partir de las relaciones (31) y así encontrar las deformaciones Principales, de las cuales se pueden determinar los esfuerzos Principales empleando las ecuaciones (29) o transformando el Círculo de Mohr de deformaciones a esfuerzos.



a) Círculo de Mohr para deformaciones.

Fig. 35 Solución gráfica para las deformaciones principales y sus direcciones a partir de una roseta rectangular.

- Roseta en Delta.

Para la roseta en delta:

$$\epsilon_x = \epsilon_A \quad \dots\dots\dots(36-a)$$

$$\epsilon_y = 1/3 [ 2(\epsilon_B + \epsilon_C) - \epsilon_A ] \quad \dots\dots\dots(36-b)$$

$$\gamma_{xy} = 2\sqrt{3}/3 (\epsilon_C - \epsilon_B) \quad \dots\dots\dots(36-c)$$

Y con las ecuaciones (36, 18, 19) se encuentran las deformaciones Principales:

$$\epsilon_{x',y'} = 1/3 (\epsilon_A + \epsilon_B + \epsilon_C) + \sqrt{2}/3 \sqrt{(\epsilon_A - \epsilon_B)^2 + (\epsilon_B - \epsilon_C)^2 + (\epsilon_C - \epsilon_A)^2} \quad \dots\dots(37)$$



Y de la ecuación (18) se determina la localización de los ejes Principales:

$$\tan 2\theta = \frac{\sqrt{3} (\epsilon_C - \epsilon_B)}{2 \epsilon_A - \epsilon_B - \epsilon_C} \dots\dots\dots(38)$$

En este caso, el ángulo  $\theta$  estará en el primer cuadrante - cuando  $\epsilon_C > \epsilon_B$ , y en el segundo si  $\epsilon_B > \epsilon_C$ .

Los esfuerzos Principales pueden determinarse de las deformaciones Principales empleando las ecuaciones (29), con lo que se obtiene:

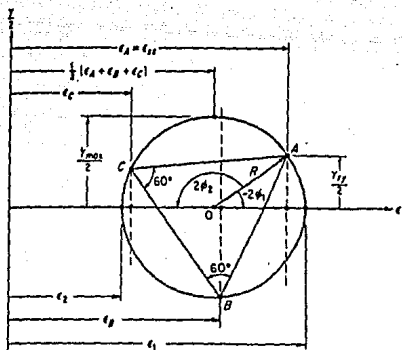
$$\sigma_{x',y'} = E \left\{ \frac{(\epsilon_A + \epsilon_B + \epsilon_C)}{3(1-\nu)} \pm \frac{\sqrt{2}}{3(1+\nu)} \sqrt{(\epsilon_A - \epsilon_B)^2 + (\epsilon_B - \epsilon_C)^2 + (\epsilon_C - \epsilon_A)^2} \right\} \dots\dots(39)$$

El Máximo esfuerzo Cortante se calcula a partir de:

$$\tau_{max} = \frac{\sqrt{2}}{3(1+\nu)} E \sqrt{(\epsilon_A - \epsilon_B)^2 + (\epsilon_B - \epsilon_C)^2 + (\epsilon_C - \epsilon_A)^2} \dots\dots(40)$$

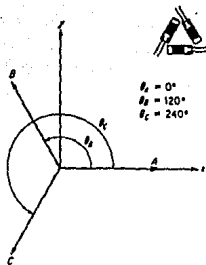
Del mismo modo que con la Roseta Rectangular, con la Roseta en Delta se pueden encontrar las deformaciones Principales por medio del Círculo de Mohr. (Fig. 36).

Cabe mencionar que los extensómetros eléctricos pueden ser sensibles tanto a las deformaciones transversales como a las axiales. Generalmente el cambio de resistencia que produce una deformación transversal es menor al 3% del cambio producido por la deformación axial, por lo que en la mayoría de las aplicaciones es despreciable. Si se requiere tomar en cuenta el efecto transversal es necesario hacer algunas correcciones. [Ref. 3].



$$R = \sqrt{\left(\epsilon_A - \frac{1}{3}(\epsilon_A + \epsilon_B + \epsilon_C)\right)^2 + \frac{1}{3}(\epsilon_C - \epsilon_B)^2}$$

a) Círculo de Mohr para deformaciones.

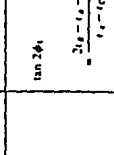
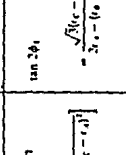
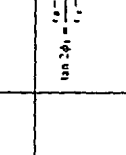
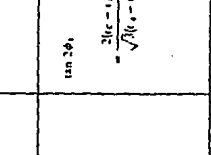


b) Posición de los extensómetros en una roseta delta de tres elementos.

Fig. 36 Solución gráfica para las deformaciones principales y sus direcciones a partir de una roseta delta.

En la tabla 2.1 se hace un resumen de las expresiones analíticas utilizadas para cuatro tipos de rosetas.

TABLA 2.1 Resumen de ecuaciones para deformaciones y esfuerzos principales, y sus direcciones.

| Tipo de roseta                  | Arreglo de los extensómetros  | Deformaciones Principales y Esfuerzos Principales  | Angulo principal   | Identificación $0 < \phi_1 < 90$                 |
|---------------------------------|---|--|--|--|
| Rectangular de tres elementos   |  | $\epsilon_{1,1} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (2\epsilon_{xy})^2}$ $\sigma_{1,1} = \frac{E}{2} \left[ \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{1 + \nu} \pm \frac{1}{1 + \nu} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (2\epsilon_{xy})^2} \right]$   | $\tan 2\phi_1 = \frac{2\epsilon_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y}$                                    | $\epsilon_x > \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}$ |
| Delta                           |  | $\epsilon_{1,1} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_x - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2}$ $\sigma_{1,1} = \frac{E}{3} \left[ \frac{\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z}{(1 + \nu)} \pm \frac{\sqrt{2}}{(1 + \nu)} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_x - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2} \right]$ | $\tan 2\phi_1 = \frac{\sqrt{3}(\epsilon_x - \epsilon_y)}{2\epsilon_x - (\epsilon_y + \epsilon_z)}$ | $\epsilon_x > \epsilon_y$                        |
| Rectangular de cuatro elementos |  | $\epsilon_{1,1} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z + \epsilon_w}{4} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_w)^2}$ $\sigma_{1,1} = \frac{E}{2} \left[ \frac{\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z + \epsilon_w}{1 + \nu} \pm \frac{1}{1 + \nu} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_w)^2} \right]$   | $\tan 2\phi_1 = \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{\epsilon_z - \epsilon_w}$                           | $\epsilon_x > \epsilon_y$                        |
| Tee-delta                       |  | $\epsilon_{1,1} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + 3(\epsilon_{xy})^2}$ $\sigma_{1,1} = \frac{E}{2} \left[ \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{1 + \nu} \pm \frac{1}{1 + \nu} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + 3(\epsilon_{xy})^2} \right]$   | $\tan 2\phi_1 = \frac{2(\epsilon_{xy})}{\epsilon_x - \epsilon_y}$                                  | $\epsilon_x > \epsilon_y$                        |

## 2.19 EJEMPLO DE APLICACION DE LAS ROSETAS DE DEFORMACION

Se instala una roseta rectangular sobre una placa de acero estructural ( $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\nu = 0.3$ ). Los valores medidos de las tres deformaciones unitarias son:

$$\epsilon_{0^\circ} = + 500 \text{ } \mu\text{cm/cm}$$

$$\epsilon_{45^\circ} = + 400 \text{ } \mu\text{cm/cm}$$

$$\epsilon_{90^\circ} = = 100 \text{ } \mu\text{cm/cm}$$

Calcular las deformaciones y esfuerzos Principales, así como su dirección, y el esfuerzo cortante Máximo.

Solución:

- Deformaciones Principales

Por medio de la ecuación (32) se pueden encontrar las deformaciones máximas y mínimas:

$$\epsilon_{x',y'} = \frac{500-100}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(500+100)^2 + (2(400)-500+100)^2}$$

$$\epsilon_{x',y'} = 200 \pm 360.56$$

$$\epsilon_{\max} = 560.56$$

$$\epsilon_{\min} = -160.56$$

- Con la ecuación (33) se localizan los ejes principales:

$$\tan 2\theta = \frac{2(400)-500-(-100)}{500-(-100)} = 0.667$$

$$2\theta = 33.7^\circ$$

$$\theta_1 = 16.8^\circ$$

$$\theta_2 = 16.8^\circ + 90^\circ = 106.8^\circ$$

- Esfuerzos Principales

Con la ecuación (34):

$$\sigma = \frac{2.1}{2} \left[ \frac{500+(-100)}{1-0.3} \pm \frac{1}{1+0.3} \sqrt{(500-(-100))^2 + (2(400)-500-(-100))^2} \right]$$

$$\sigma = \frac{2.1}{2} [ 571.4 \pm 554.7 ]$$

$$\sigma_{\max} = 1182.4 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{\min} = 17.5 \text{ kg/cm}^2$$

- Esfuerzo Cortante Máximo

Este se puede calcular con la ecuación (35):

$$\tau_{\max} = \frac{2.1}{\sqrt{2}(1+0.3)} \sqrt{(500-400)^2 + (400-(-100))^2}$$

$$\tau_{\max} = 582.4 \text{ kg/cm}^2$$

Otra solución puede ser:

Utilizando las ecuaciones (31) se sabe que:

$$\epsilon_x = \epsilon_A = 500 \mu\text{cm/cm}$$

$$\epsilon_y = \epsilon_C = -100 \mu\text{cm/cm}$$

$$\gamma_{xy} = \epsilon_A + \epsilon_C - 2\epsilon_B = -400 \text{ radianes}$$

Con la ecuación (19) se calculan las Deformaciones Principales:

$$\epsilon_{x'y'} = \frac{500+(-100)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{500-(-100)}{2}\right)^2 + \left(\frac{-400}{2}\right)^2}$$

$$\epsilon_{x'y'} = 200 \pm 360.56$$

$$\epsilon_{\max} = 560.56 \mu\text{cm/cm}$$

$$\epsilon_{\min} = -160.56 \mu\text{cm/cm}$$

Con la ecuación (18) se encuentran las Direcciones Principales:

$$\tan 2\theta = \frac{400}{500-(-100)} = 0.667$$

$$\theta_1 = 16.8^\circ$$

$$\theta_2 = 106.8^\circ$$

Los Esfuerzos Principales, con las ecuaciones (29):

$$\sigma_{\max} = \frac{2.1}{1-(0.3)} (560.56 + 0.3(-160.56))$$

$$\sigma_{\max} = 1182.4 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{\min} = \frac{2.1}{1-(0.3)} (-160.56 + 0.3(560.56))$$

$$\sigma_{\min} = 17.5 \text{ kg/cm}^2$$

Y con la ecuación (15) se encuentra el esfuerzo Cortante Máximo:

$$\tau_{\max} = \frac{1182.4 - 17.5}{2}$$

$$\tau_{\max} = 582.4 \text{ kg/cm}^2$$

C A P I T U L O   I I I

A N A L I S I S   E S T R U C T U R A L

### 3.1 GENERALIDADES

El Análisis Estructural estudia el comportamiento de vigas, armaduras y marcos para determinar los elementos mecánicos y a partir de ellos lograr un Diseño Estructural satisfactorio.

El empleo de estructuras estáticamente indeterminadas (hiperestáticas) es cada vez más común, debido a la utilización de:

- Estructuras monolíticas de concreto armado.
- Estructuras de acero unidas por soldadura eléctrica.
- Nuevos métodos de Análisis Estructural.

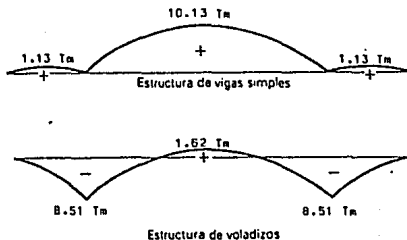
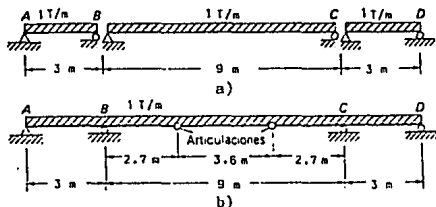
En la práctica es difícil lograr una viga simplemente apoyada, por ejemplo, las vigas soldadas o remachadas a columnas no son simplemente apoyadas. Lo mismo sucede con las armaduras estáticamente determinadas en las que es difícil lograr articulaciones: los pasadores tienen fricción, y si se utilizan pernos como conectores, éstos se enmohecen impidiendo las rotaciones. Por lo que en sentido estricto, todas las armaduras son hiperestáticas.

En las estructuras simples, al incrementarse el claro, el momento flexionante aumenta rápidamente. Si se mantuviera constante el peso por unidad de longitud de una estructura, independientemente del claro, el momento flexionante por carga muerta variaría proporcionalmente al cuadrado de la longitud del mismo ( $M = wl^2/8$ ). Lo cual no es cierto ya que el peso de la estructura no permanece constante y aumenta a medida que el claro es más grande, para así resistir el incremento de los momentos flexionantes, por lo que el momento flexionante debido a carga muerta crece en proporción mayor que la que está en función del cuadrado de la longitud del claro. Es principalmente por economía que en el caso de grandes claros se justifica la utilización de estructuras que tengan momentos menores que los que aparecen en las estructuras simplemente apoyadas.



Un tipo de estructuración que reduce considerablemente los momentos flexionantes es la de Voladizo (Fig. 1). Las tres vigas simples de la Fig. 1-a se sustituyen por una estructura de voladizos, haciendo continua la viga sobre los apoyos B y C, y considerando articulaciones en el tramo central, como se indica en la Fig. 1-b. Se dispone así de una ecuación de condición ( $M_{\text{artic}} = 0$ ) para cada una de las articulaciones introducidas, dando un total de cinco ecuaciones y cinco incógnitas, por lo que la estructura obtenida es estáticamente determinada (isostática).

En la Fig. 2 se ilustran los diagramas de momento flexionante correspondientes a las estructuras de la Fig. 1. Se puede observar que el momento flexionante máximo para las estructuras - en voladizo, es mucho menor que para las vigas simples, lo cual permite diseñar una construcción más ligera y económica.



En algunos casos es posible tener una viga con ambos extremos empotrados, en lugar de una simplemente apoyada. En la Fig. 3 se comparan los momentos flexionantes en una viga simplemente apoyada y en una doblemente empotrada, ambas con la misma carga.

El momento flexionante máximo en la viga doblemente empotrada es solo dos tercios del que se presenta en la simplemente apoyada. Pero por lo general es difícil empotrar por completo los extremos de una viga, por lo que se utilizan apoyos libres intermedios (Fig. 4). Los tramos continuos sucesivos fijarán parcialmente los apoyos interiores, tendiendo así a reducir el momento flexionante en el claro central. En la Fig. 4 se comparan los momentos flexionantes que se producen en tres vigas simples independientes, y los que aparecen en una viga continua.

Por lo anterior se ve que los momentos desarrollados en vigas se reducen considerablemente por la continuidad de la estructura. Esta disminución se produce si las vigas están rígidamente unidas entre sí, o si se conectan en forma rígida a las columnas. Existe continuidad de acción en la resistencia de una carga aplicada en cualquier parte de una estructura continua, debido a que su acción es resistida por el efecto combinado de todos los elementos del sistema.

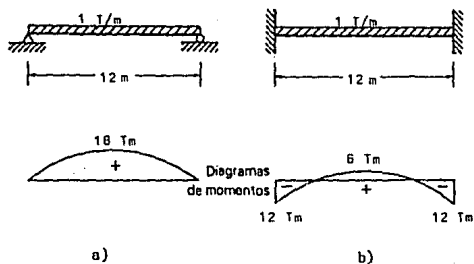


Fig. 3

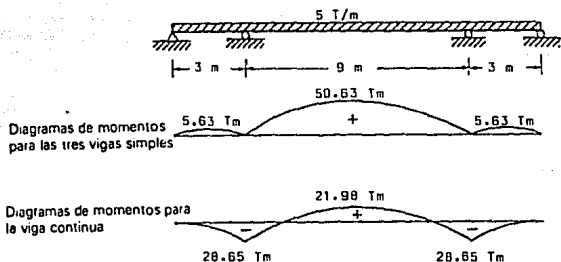


Fig. 4

Aunque el momento flexionante máximo en una viga continua es más de un 40% menor que en las vigas simples, la reducción del costo total de la estructura no tiene la misma proporción. La reducción real del costo será de un 2% ó 3% del costo total debido a que cimentación, uniones estructurales y sistemas de piso no disminuyen por la reducción del momento flexionante.

Al comparar a las estructuras hiperestáticas con las isostáticas, se encuentra las siguientes ventajas de las primeras:

- Ahorro en materiales: Al disminuir el momento flexionante se permite el uso de elementos de menores dimensiones. La continuidad permite el uso de elementos menores para los mismos claros y cargas, o bien, un mayor espaciamiento entre apoyos para elementos de las mismas dimensiones. Las estructuras continuas son menos costosas al no tener articulaciones y apoyos libres necesarios para volverlas isostáticas.

- Estructuras más rígidas: Lo cual es importante en algunos casos, por ejemplo si se tienen cargas en movimiento o vibraciones intensas.

- Construcciones en Voladizo: Este sistema de construcción es útil en el caso de puentes o en otras situaciones donde se dificulta la construcción de obra falsa.

Y las desventajas de las estructuras hiperestáticas en comparación con las isostáticas son:

- Asentamientos en los apoyos: Para las estructuras hiperestáticas los asentamientos en los apoyos causan grandes cambios en los momentos flexionantes, fuerzas cortantes, esfuerzos y reacciones, por lo que se deben cuidar las condiciones de la cimentación.

- Cambios de esfuerzos: Estos se pueden deber, además del hundimiento de los apoyos, a cambios en la posición relativa de los elementos estructurales debido a variaciones de temperatura, mala fabricación o deformaciones internas.

- Dificultad de Análisis y Diseño: En las estructuras hiperestáticas las fuerzas dependen de sus dimensiones y de sus propiedades elásticas (módulo de elasticidad, momentos de inercia, etc.). Esto dificulta el diseño: no podrán determinarse las fuerzas hasta conocer las dimensiones de los elementos estructurales, y no podrán determinarse las dimensiones si no se conocen las fuerzas. Esto se resuelve por "Aproximaciones Sucesivas", esto es suponiendo unas dimensiones y calculando las acciones dinámicas, diseñando los elementos para dichas fuerzas, calculando las fuerzas para estas nuevas dimensiones, y así sucesivamente hasta obtener el diseño final.

- Inversión de sentido en los esfuerzos: En las estructuras hiperestáticas se produce un mayor número de inversiones de esfuerzo que en las isostáticas. Esto implica secciones más reforzadas que otras, y diseñadas para resistir diferentes condiciones de esfuerzo.

### 3.2 ANALISIS APROXIMADO DE ESTRUCTURAS HIPERESTATICAS

Las estructuras hiperestáticas pueden analizarse en forma "exacta" o de modo "aproximado". Los métodos aproximados se aplican en las siguientes situaciones:

- 1) Si no se dispone del tiempo necesario para realizar un análisis exacto.
- 2) Si la estructura es muy complicada para un análisis exacto.
- 3) En algunos casos, los métodos aproximados dan resultados tan precisos como con un análisis exacto.
- 4) A partir de un análisis aproximado se obtienen las fuerzas con las que se dimensionarán los elementos, y luego efectuar un análisis exacto de una estructura hiperestática.
- 5) Se puede utilizar un análisis aproximado para verificar el resultado de uno exacto.

Aunque existen muchos métodos para realizar análisis aproximados, en este trabajo sólo se explicarán brevemente algunos de ellos que posteriormente podrán aplicarse durante las prácticas del Capítulo V.

Para el análisis con métodos aproximados, se debe formular una hipótesis por cada grado de indeterminación, y cada hipótesis aporta una ecuación adicional que se usará en los cálculos.

#### 3.2.1 Análisis de Estructuras por Carga Vertical.

Un método aproximado consiste en suponer puntos de inflexión en las trabes, localizados a  $1/10$  de la longitud a partir de cada extremo, y que es nula la fuerza axial en dichas trabes.

Con esto se crea una viga simplemente apoyada entre los puntos de inflexión, determinándose por estática los momentos

positivos en la viga. En las traves aparecen momentos negativos entre sus extremos y los puntos de inflexión, cuyos valores pueden calcularse al considerar la viga hasta el punto de inflexión como en voladizo. (Fig. 5).

La fuerza cortante en el extremo de cada traves contribuye a las fuerzas axiales de las columnas, al igual que los momentos flexionantes negativos de las traves son transmitidos a las columnas. En columnas intermedias los momentos flexionantes sobre las traves de cada lado se oponen entre sí y pueden anularse. En las columnas exteriores hay momentos flexionantes de un solo lado, producidas por las traves unidas a ellas.

En la Fig. 5 se analiza la viga AB por el método anteriormente explicado.

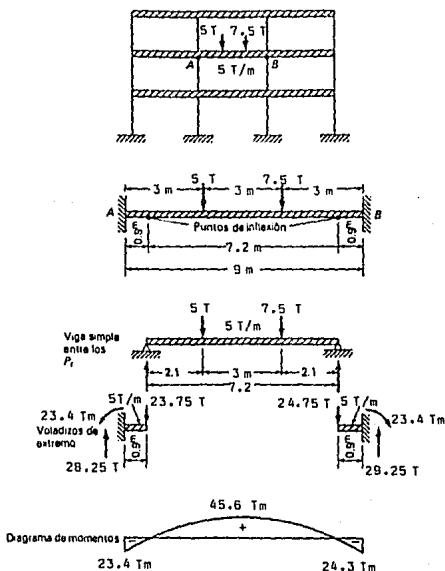


Fig. 5

### 3.2.2 Análisis de Estructuras por Carga Horizontal.

A mayor altura de un edificio, mayor debe ser la atención que se dé a las fuerzas verticales y horizontales que actúan sobre él. Debe tener suficiente resistencia lateral para evitar el colapso, debe evitar deformaciones excesivas, y debe tener la suficiente rigidez lateral para evitar desplazamientos notables.

Las cargas laterales se pueden contrarrestar con muros de cortante, elementos diagonales (en X), o con uniones resistentes a momento flexionante.

Los edificios constituidos por marcos rígidos son hiperestáticos, y su análisis por métodos aproximados es más sencillo que por los exactos. Pero con la ayuda de calculadoras y computadoras, es posible realizar análisis exactos en menor tiempo que el requerido para los métodos aproximados (a mano), por lo que cada vez se utilizan más los métodos exactos.

Los métodos aproximados que se explican a continuación no toman en cuenta las propiedades elásticas de los elementos estructurales, lo cual debe considerarse en construcciones asimétricas y en edificios muy altos. Existen varios métodos aproximados que consideran las propiedades elásticas, como son el método del Factor, el método de Witmer y el de los Porcentajes K.

Cuando la relación entre la altura del edificio y su mínima dimensión lateral sea mayor a cinco, se recomienda utilizar un método que tome en cuenta las propiedades elásticas, como los anteriormente mencionados, que obtienen valores más cercanos a los métodos exactos, o bien emplear algún procedimiento exacto como por ejemplo el método de las Rigideces o el de Distribución de Momentos.

### 3.2.3 Método del Portal.

Por su sencillez, este es el método aproximado más común para el análisis de edificios de menos de 25 pisos sujetos a cargas laterales.

En este método, se divide a la estructura en marcos independientes (Fig. 6), y se establecen tres suposiciones:

1) La deformación en las columnas ocasiona un punto de inflexión a la mitad de la altura (Fig. 7).

2) La deformación en las trabes crea un punto de inflexión al centro del claro (Fig. 7).

3) Las fuerzas cortantes horizontales en cada nivel se distribuyen entre las columnas de la siguiente manera:

- Usualmente se supone que las columnas extremas toman el 50% del cortante que toman las centrales. Esto se entiende al observar la Fig. 6 en la que cada columna interior forma parte de dos marcos, mientras que una extrema sólo sirve para uno.

- Otra distribución se basa en que la fuerza cortante que toma cada columna es proporcional al área de losa que soporta, lo cual da resultados más reales.

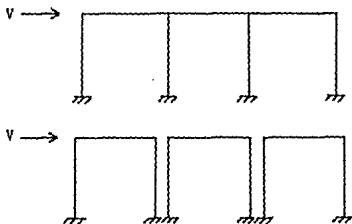


Fig. 6



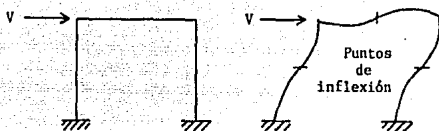


Fig. 7

**Análisis:**

1) Cortante en Columnas: En cada entrepiso las columnas - centrales toman lo doble del cortante que las extremas (Fig. 6).

2) Momento en Columnas: Con el punto de inflexión a la mitad de la columna, el momento flexionante superior e inferior es igual al producto de la fuerza cortante por media altura.

3) Momento en Trabes: Se calcula por equilibrio en el nudo ya conocidos los momentos en las columnas.

4) Cortante en Trabes: Con los momentos de las trabes se calcula la fuerza cortante; al suponer el punto de inflexión al centro del claro, resulta que el cortante es igual al momento flexionante entre la mitad de la longitud de la trabe (Fig. 8).

5) Fuerza Axial en Columnas: Se obtiene directamente a partir de las fuerzas cortantes en trabes.

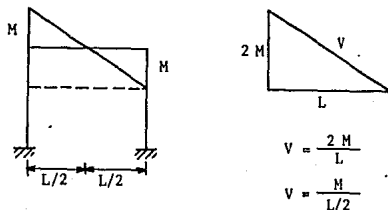


Fig. 8

### 3.2.4. Método del Voladizo.

Este es otro método sencillo para analizar edificios sujetos a fuerza laterales, y es más adecuado para edificios altos (hasta 35 pisos) de poca anchura que el del Portal.

Las hipótesis respecto a la ubicación de los puntos de inflexión en columnas y trabes son las mismas que en el método del Portal. Pero la fuerza cortante en un nivel se reparte entre las columnas conforme a una relación que considera que la fuerza axial en cada columna es proporcional a su distancia al centro de gravedad de todas las columnas de ese nivel. Cuanto mayor sea la distancia de una columna al centro de gravedad, ma yor será su fuerza axial.

#### Análisis:

1) Fuerza Axial en Columnas: Considerando cada nivel, se toman momentos con respecto al punto de inflexión de una columna de las fuerzas que se encuentran sobre el plano de contraflexión en las columnas de ese nivel.

2) Cortante en Trabes: Con las fuerza axiales en las columnas, se calculan las fuerzas cortantes en las trabes. Esto se hace de izquierda a derecha, y del nivel superior al inferior.

3) Momentos en Columnas y Trabes: Los momentos flexionantes en las trabes se obtienen al aplicar los cortantes de la trabe en el punto de inflexión, es decir, la fuerza cortante por la mitad de su longitud. Y por equilibrio en el nudo se obtiene el momento en las columnas.

4) Cortante en Columnas: La fuerza cortante en las columnas es igual al momento flexionante de éstas entre la mitad de la altura de la columna.

### 3.2.5 Método de Bowman.

Los métodos exactos han mostrado que los puntos de inflexión no aparecen precisamente a la mitad, por lo que se pueden emplear ubicaciones más cercanas a la realidad. El método de Bowman toma en cuenta el número de pisos del edificio y el número de crujeías, para dar la ubicación de los puntos de inflexión. También considera los anchos de las crujeías para dividir la fuerza cortante que corresponde a las columnas de cada nivel. Con estas consideraciones se logran resultados más exactos que con los métodos del Portal y del Voladizo.

Suposiciones para el método de Bowman:

- 1) Los puntos de inflexión en columnas se localizan en:

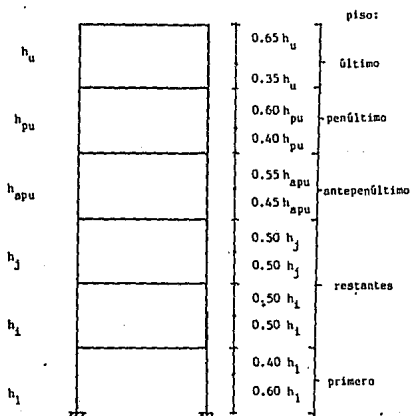
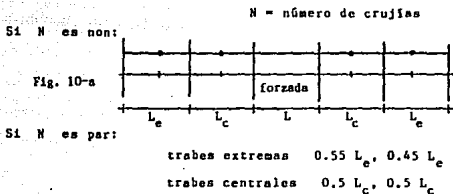
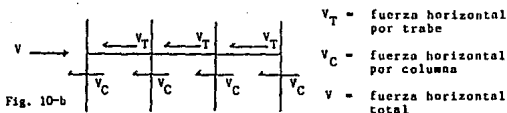


Fig. 9

2) Los puntos de inflexión en traveses se encuentran en:



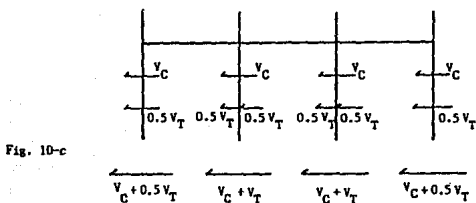
3) El cortante se dividirá en cortante de columnas y cortante de traveses:



- En el Primer entrepiso:

$$V_C = \frac{(N - 0.5) V}{\text{núm. de columnas}} \quad V_T = \frac{V - (\text{núm de columnas}) V_C}{\text{núm. de traveses}}$$

El  $V_T$  se divide en 50% para cada extremo:



- En los entrepisos Superiores:

$$V_C = \frac{\left(\frac{N-2}{N+1}\right) v}{\text{n\u00fam de columnas}} \quad V_T = \frac{v - (\text{n\u00fam de columnas}) V_C}{\text{n\u00fam de traves}$$

An\u00e1lisis:

1) Cortante en Columnas

- Primer Entrepiso:

$$\text{Columnas Externas: } V_E = \frac{\left(\frac{N-0.5}{N+1}\right) v}{N+1} + 0.5 \left[ \frac{v - \left(\frac{N-0.5}{N+0.5}\right) v}{N} \right]$$

$$\text{Columnas Internas: } V_I = \frac{\left(\frac{N-0.5}{N+0.5}\right) v}{N+1} + \frac{v - \left(\frac{N-0.5}{N+0.5}\right) v}{N}$$

- Entrepisos Superiores:

$$\text{Columnas Externas: } V_E = \frac{\left(\frac{N-2}{N+1}\right) v}{N+1} + 0.5 \left[ \frac{v - \left(\frac{N-2}{N+1}\right) v}{N} \right]$$

$$\text{Columnas Internas: } V_I = \frac{\left(\frac{N-2}{N+1}\right) v}{N+1} + \frac{v - \left(\frac{N-2}{N+1}\right) v}{N}$$

2) Momento en Columnas: Se obtienen al multiplicar las fuerzas por sus respectivos brazos (distancia al punto de inflexi\u00f3n).

3) Momento en Traves: Se encuentra por equilibrio de momentos en el nudo.

4) Cortante en Traves y Fuerza Axial en Columnas: El cortante en traves se obtiene a partir del cortante en columnas con la relaci\u00f3n:

$$V_T = \frac{v - (\text{n\u00fam de columnas}) V_C}{\text{n\u00fam de traves}$$

Y la fuerza axial en columnas se obtiene directamente a partir de las fuerzas cortantes en traves.

### 3.3 ANALISIS EXACTO DE ESTRUCTURAS HIPERESTATICAS

Los dos métodos exactos más utilizados para el análisis de estructuras hiperestáticas son: el método de Giros y Desplazamientos, y el de Distribución de Momentos.

Aunque el método de Giros y Desplazamientos es anticuado para algunos casos en comparación con el de Distribución de Momentos, tiene las siguientes ventajas:

- 1) En algunos casos es más rápida su resolución.
- 2) Su estudio sirve de base para entender mejor el de Distribución de Momentos.
- 3) Con él se pueden verificar resultados obtenidos mediante la Distribución de Momentos.
- 4) La determinación de giros y desplazamientos da una idea de la deformación de la estructura.
- 5) Las ecuaciones de giros y desplazamientos pueden resolver problemas complejos de análisis estructural con la ayuda de computadoras.

El método de Distribución de Momentos, o método de Cross, no implica la resolución de ecuaciones simultáneas difíciles de manejar, como puede suceder en el método de Giros y Desplazamientos. Este método implica un proceso iterativo que va convergiendo hasta llegar a obtener resultados bastante exactos, o bien se puede suspender después de dos o tres ciclos, logrando así un análisis aproximado satisfactorio, esto depende de la precisión requerida.

### 3.3.1 Método de Giros y Desplazamientos.

El nombre de este método proviene de que los momentos en los extremos de estructuras hiperestáticas se pueden expresar en términos de los giros en los nudos y de los desplazamientos en las juntas. Para obtener las ecuaciones se supone que los elementos estructurales son de sección constante entre apoyos. Es posible utilizar este método para elementos de sección variable, pero es muy complejo y por lo tanto impráctico. Se supone también que los nudos de la estructura pueden girar o desplazarse, pero los ángulos entre los elementos que convergen en una junta permanecen constantes.

Considérese el tramo AB de la viga continua de la Fig. 11-a. Si ese tramo se considera doblemente empotrado, la pendiente de su curva elástica sería nula en los extremos, ocasionando que el tramo tome la forma que se muestre en la Fig. 11-b. Pero como en realidad los nudos A y B no están perfectamente fijos, existe un pequeño giro que ocasiona la configuración indicada en la Fig. 11-c. También puede haber un asentamiento en los apoyos, como se ve en la Fig. 11-d, lo que produce un desplazamiento angular de todo el elemento (en la Fig. 11-d se supone que el apoyo B se asienta una distancia  $\Delta$ ).

Con lo anterior se puede concluir que los momentos de empotramiento  $M_{AB}$  y  $M_{BA}$  son iguales a la suma de los momentos originados por:

- 1) Los momentos de empotramiento perfecto  $MEP_{AB}$  y  $MEP_{BA}$ .
- 2) Los momentos producidos por los giros en los nudos ( $\theta_A$  y  $\theta_B$ ).
- 3) Los momentos producidos por la rotación ( $\psi = \Delta/l$ ) al desplazarse uno o ambos nudos.

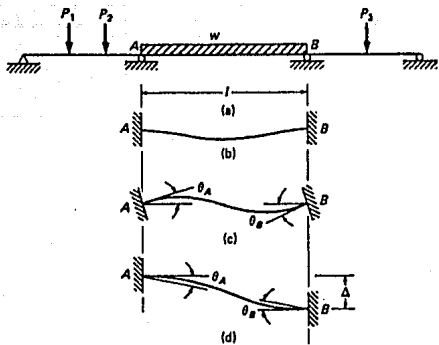


Fig. 11

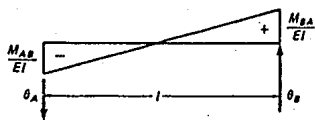


Fig. 12



Para una viga en particular, el cambio de pendiente  $\theta$  es igual a la fuerza cortante de extremo de la viga al ser cargada con el diagrama  $M/EI$ . En la Fig. 12 se supone que la viga tiene los momentos de empotramiento  $M_{AB}$  y  $M_{BA}$ .

Las reacciones son las siguientes:

$$\theta_A = (\lambda/6EI) (2M_{AB} - M_{BA}) \dots\dots\dots(1-a)$$

$$\theta_B = (\lambda/6EI) (2M_{BA} - M_{AB}) \dots\dots\dots(1-b)$$

Además, si alguno de los apoyos se desplaza una distancia  $\Delta$ , los ángulos  $\theta_A$  y  $\theta_B$  cambiarían en una cantidad  $\Delta/\lambda$  (equivalente a  $\Psi$ ), obteniéndose así las siguientes expresiones para los giros totales en el empotramiento:

$$\theta_A = (\lambda/6EI) (2M_{AB} - M_{BA}) + \Psi \dots\dots\dots(2-a)$$

$$\theta_B = (\lambda/6EI) (2M_{BA} - M_{AB}) + \Psi \dots\dots\dots(2-b)$$

Al despejar  $M_{AB}$  y  $M_{BA}$  de las ecuaciones (2), se obtienen los momentos de empotramiento debidos a los giros y desplazamientos. Como  $I/L = K =$  factor de rigidez, se obtiene que:

$$M_{AB} = 2EK (2\theta_A + \theta_B - 3\Psi) \dots\dots\dots(3-a)$$

$$M_{BA} = 2EK (2\theta_B + \theta_A - 3\Psi) \dots\dots\dots(3-b)$$

Y finalmente los Momentos de Empotramiento son el resultado de la suma de los momentos debidos a giros y desplazamientos más los MEP, por lo que:

$$M_{EAB} = 2EK (2\theta_A + \theta_B - 3\Psi) + MEP_{AB} \dots\dots\dots(4-a)$$

$$M_{EBA} = 2EK (2\theta_B + \theta_A - 3\Psi) + MEP_{BA} \dots\dots\dots(4-b)$$

- Aplicación al Análisis de Vigas Continuas.

En este análisis cada tramo de viga continua se considera individualmente y se calculan sus momentos de empotramiento perfecto (MEP) en cada extremo.

Las ecuaciones de momento por giros se escriben en términos de los valores desconocidos de  $\theta$  en los apoyos o juntas. En cada apoyo interior la suma de momentos debe ser cero, con lo que puede obtenerse un sistema de ecuaciones simultáneas a partir de las cuales se obtienen los valores de  $\theta$ . Si el extremo es un empotramiento,  $\theta$  es nulo, y si el extremo es libre, se anula el momento.

Cuando la longitud de los tramos, los módulos de elasticidad y los momentos de inercia son constantes a lo largo de toda la viga continua, se pueden suprimir los valores  $2EK$  de las ecuaciones.

La convención de signos que se utiliza es la siguiente: si el momento flexionante tiende a hacer girar el nudo en el sentido del reloj se considera negativo, y viceversa. (Fig.13).

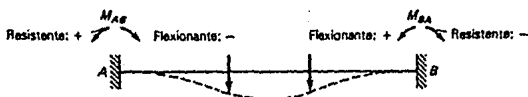


Fig. 13

- Aplicación al Análisis de Marcos Rígidos sin Desplazamiento Lateral.

El método de Giros y Desplazamientos puede aplicarse a marcos rígidos de la misma forma que a vigas continuas si no existe desplazamiento lateral o deformación asimétrica. Un marco no se ladeará ni se inclinará si es simétrico respecto a su eje vertical en dimensiones, cargas y momentos de inercia de sus secciones, o si están restringidos los desplazamientos por los apoyos.

- Aplicación al Análisis de Marcos Rígidos con Desplazamiento Lateral.

Si las cargas, momentos de inercia y dimensiones de un marco no son simétricos respecto al eje vertical, el marco se desplazará lateralmente, como en la Fig. 14. Los nudos B y C se desplazan hacia la derecha produciendo un giro en los elementos AB y CD, sin que exista diferencia angular en BC. Si se despreocia la deformación axial de BC, cada nudo se desplaza igual  $\Delta$ .

Los giros de AB y CD debidos al desplazamiento lateral son  $\Delta/l_{AB}$  y  $\Delta/l_{CD}$ . Se observa que para un mismo  $\Delta$ , mientras más corto sea un elemento, mayor será la rotación y el efecto sobre el momento. Se recomienda usar una sola rotación como incógnita y establecer la otra en función de la primera. Así, para el ejemplo se utiliza  $\Psi$  para AB, y  $(2/3)\Psi$  para CD.

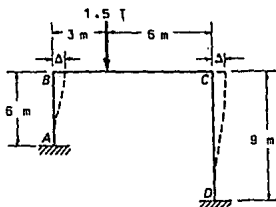


Fig. 14

Para hacer el análisis hay que recordar que  $\theta_A = \theta_D = 0$ , y tomar en cuenta tres condiciones:

- 1) Suma de momentos en B es cero ( $\Sigma M_B = 0 = M_{BA} + M_{BC}$ ).
- 2) Suma de momentos en C es cero ( $\Sigma M_C = 0 = M_{CB} + M_{CD}$ ).
- 3) Suma de fuerzas horizontales es cero ( $\Sigma H = 0 = H_A + H_D$ ).

Las únicas fuerzas horizontales son las reacciones en A y B, y pueden calcularse para cada columna dividiendo los momentos de las columnas entre sus alturas:

$$H_A = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{l_{AB}} \dots\dots\dots(5-a)$$

$$H_D = \frac{M_{CD} + M_{DC}}{l_{DC}} \dots\dots\dots(5-b)$$

- Aplicación al Análisis de Marcos de Varios Pisos.

Este método también puede aplicarse a marcos con más de una acción de desplazamiento lateral, como la estructura de la Fig. 15, aunque es más común analizarla por el método de Cross.

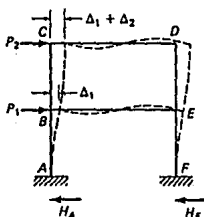


Fig. 15

Las cargas horizontales hacen que la estructura se deforme, desplazándose los nudos B y E una distancia  $\Delta_1$ , y los nudos C y D una distancia  $\Delta_1 + \Delta_2$ . Los giros serán  $\Psi_1 = \Delta_1 / l_{AB}$ , y  $\Psi_2 = \Delta_2 / l_{BC}$  para los niveles inferior y superior sucesivamente.

Con las siguientes condiciones se obtienen las ecuaciones:

- Suma de momentos en B, C, D y E es cero.

$$-\theta_A = \theta_F = 0.$$

También es necesario considerar los cortantes que actúan sobre el marco. La suma de las fuerzas resistentes horizontales en cada nivel debe ser igual a la fuerza cortante externa en dicho nivel pero en sentido opuesto. Para el nivel inferior el cortante es el acumulado de las fuerzas horizontales, es decir,  $P_1 + P_2$ . Y las reacciones en la base de las columnas son iguales a los momentos de empotramiento entre la altura de la columna. Por lo que:

$$H_A + H_F + P_1 + P_2 = 0 \quad \dots\dots\dots(6-a)$$

$$\frac{M_{AB} + M_{BA}}{l_{AB}} + \frac{M_{EF} + M_{FE}}{l_{EF}} + P_1 + P_2 = 0 \quad \dots\dots\dots(6-b)$$

Y para el nivel superior, con fuerza cortante externa  $P_2$ , se obtiene:

$$\frac{M_{BC} + M_{CB}}{l_{BC}} + \frac{M_{DE} + M_{ED}}{l_{DE}} + P_2 = 0 \quad \dots\dots\dots(7)$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones se obtienen los momentos.

Como se ve, este método no es práctico para marcos de varios niveles, ya que implica resolver un gran número de ecuaciones simultáneas.

### 3.3.2 Método de Distribución de Momentos.

El método de Distribución de Momentos, también conocido como método de Cross, consiste básicamente en suponer una estructura cuyos nudos son absolutamente rígidos, es decir, que no permiten desplazamientos ni giros de los elementos que concurren a ellos, y después se llega a la estructura real permitiendo sucesivamente giros y desplazamientos, "deshaciendo" paulatinamente la rigidez supuesta.

Para iniciar el análisis de una viga como la mostrada en la Fig. 16, se supone que los tramos  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$  están incomunicados y sus extremos están perfectamente empotrados.

Si se libera un nudo restableciendo la continuidad, en este nudo se sumarán algebraicamente los momentos de empotramiento perfecto que actuaban en los extremos que concurrían al nudo. Así, en el apoyo B, al liberar el nudo, aparecerá un momento que no estará equilibrado si la suma algebraica de momentos es diferente de cero, por lo que los extremos de los elementos  $L_1$  y  $L_2$  que concurren en B tratarán de girar.

Para evitar ese giro hay que aplicar en el nudo B un momento igual y de sentido contrario al desequilibrado, momento que tomarán los elementos proporcionalmente a su rigidez (capacidad de resistir flexión).

Pero al repartir (transportar) el momento equilibrante, aparecerán en los extremos opuestos unos momentos que producen un nuevo desequilibrio, siendo preciso realizar nuevamente el equilibrio en todos los nudos por nueva distribución de los momentos transmitidos, y repetir la operación de transporte de cierta cantidad de los momentos a los extremos opuestos.

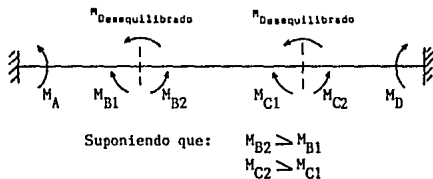
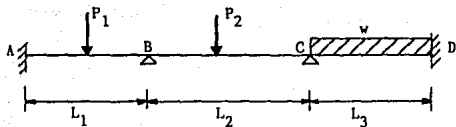


Fig. 16

Para aplicar el método de Cross, hay que resolver dos cuestiones:

- 1) El valor de los Momentos Transportados a los extremos opuestos de aquellos que concurren al nudo liberado.
- 2) La cantidad de Momento Equilibrante que corresponde a cada extremo de los elementos que concurren al nudo liberado.

Para determinar el Momento Transportado (o Transmitido), considérese la viga de sección transversal constante y sin carga mostrada en la Fig. 17-a. Si se aplica un momento  $M_1$  en el extremo izquierdo, se desarrolla un momento  $M_2$  en el extremo derecho. El extremo izquierdo es un nudo que ha sido liberado y  $M_1$  producirá en él un giro  $\theta_1$ . Pero no ocurrirá ningún desplazamiento del extremo de la izquierda respecto al de la derecha.

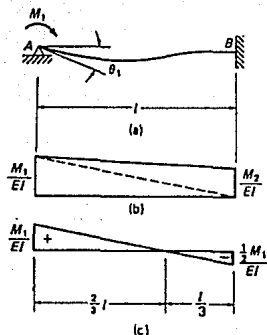


Fig. 17

Aplicando el Segundo Teorema del Area del Diagrama de Momentos se puede calcular la magnitud de  $M_2$ . Se divide en triángulos el diagrama de la Fig. 17-b para facilitar los cálculos:

$$\delta_A = \frac{(1/2 M_1 l) (1/3 l) + (1/2 M_2 l) (2/3 l)}{E I} = 0 \quad \dots\dots(8-a)$$

$$\delta_A = \frac{M_1 l^3}{6 E I} + \frac{M_2 l^3}{6 E I} = 0 \quad \dots\dots(8-b)$$

$$M_1 + 2 M_2 = 0 \quad \dots\dots(8-c)$$

$$M_2 = - (1/2) M_1 = \alpha M_1 \quad \dots\dots(8-d)$$

en donde  $\alpha$  es el factor de transporte y es  $-1/2$  para elementos de sección constante.



Por lo tanto, si en el extremo de una viga se aplica un momento, en el otro extremo (empotrado) se transmitirá un momento cuya magnitud es la mitad del primero y de signo contrario.

El signo (-) del factor de transporte proviene de la convención de signos siguiente: Un momento actuante en un extremo que produzca tensión en las fibras inferiores, se transmitirá originando tensión en las fibras superiores del otro extremo.

Para resolver lo segundo, hay que Distribuir los Momentos. Al liberar un nudo, éste comienza a girar debido al momento desequilibrado. Se debe determinar que cantidad de este momento será resistido por cada elemento estructural, lo cual depende de su rigidez. Generalmente los elementos estructurales que concurren a un nudo tienen diferente rigidez.

En la Fig. 17-c se muestra el diagrama  $M/EI$  con las relaciones apropiadas. Con el Primer Teorema del Area del Diagrama de  $M/EI$ , se determina la deformación angular  $\theta_1$ , originada por  $M_1$  en A:

$$\theta_1 = \frac{(1/2)(M_1)(2/3l) - (1/2)(1/2M_1)(1/3l)}{EI} \dots\dots\dots(9-a)$$

$$\theta_1 = \frac{M_1 l}{4EI} \dots\dots\dots(9-b)$$

Si todos los elementos son del mismo material, tendrán el mismo  $E$ , y el giro variará directamente a  $l/I$ . A mayor rotación, menor será el momento que se soporte. El momento resistido varía inversamente a la rotación, o directamente a  $I/l$  que es el factor de rigidez ( $K$ ).

Para determinar el momento que toma cada elemento concurrente a un nudo, se multiplica el factor de distribución (FD), que es el valor de  $K$  del elemento entre la suma de los  $K$  de las barras concurrentes, por el momento. O sea que cada elemento resistirá una porción del momento de equilibrio igual a su  $K$  entre la suma de todas las  $K$  para ese nudo.

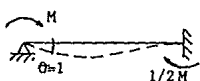
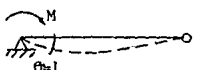
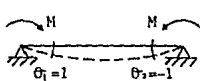
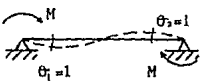
Al suponer  $\theta_1 = 1$  y despejar  $M_1$  de la ecuación (9-b) se obtiene:

$$M_1 = 4EI/l = r \quad \dots\dots\dots(10)$$

donde  $r$  = rigidez angular, que es el momento que hay que aplicar en el extremo de una barra para producir un giro unitario.

Existen diferentes casos en los que se modifica la rigidez, dependiendo del apoyo del extremo opuesto al apoyo simple. En la Tabla 1 se indican los principales.

La convención de signos es la misma que se utilizó para el método de Giros y Desplazamientos.

| Tabla 1   |         |                      |
|---|---------|----------------------|
|   | Rigidez | Factor de transporte |
|    | $4EI/l$ | $1/2$                |
|    | $3EI/l$ | $0$                  |
|   | $2EI/l$ | $-1$                 |
|  | $6EI/l$ | $1$                  |

- Aplicación al Análisis de Vigas Continuas.

La aplicación del método de Cross puede resumirse en los siguientes pasos:

- 1) Calcular factores de distribución ( $FD = K/\sum K$ ).
- 2) Calcular momentos de empotramiento perfecto en los extremos de los elementos que concurren a un nudo (MEP).
- 3) Sumar algebraicamente los valores de los momentos de empotramiento en los extremos de los elementos que concurren en un nudo (Momento Desequilibrado = MDe).
- 4) Distribuir el Momento Desequilibrado entre los elementos que concurren al nudo, proporcionalmente a sus rigideces y con signo contrario para equilibrar ( $MD = FD [-MDe]$ ).
- 5) Transportar a los extremos opuestos de los elementos la mitad del momento que se obtuvo en la distribución ( $MT = FT[MD]$ ).
- 6) Repetir pasos 4 y 5 hasta la aproximación deseada.
- 7) El momento final en el extremo de un elemento es igual a la suma de todos sus momentos hasta la última distribución ( $MF = \sum M$ ).

Si un nudo se encuentra empotrado, la suma de los momentos finales (MF) no será nula sin que exista desequilibrio, debido a que los empotramientos absorben íntegramente el momento. En los demás nudos la suma de momentos finales debe ser nula.

Es recomendable equilibrar los nudos uno cada vez, iniciando con el de mayor desequilibrio, efectuar los transportes y continuar con el siguiente nudo más desequilibrado. De esta manera se acelera la convergencia del método.

- Aplicación al Análisis de Marcos Continuos.

El análisis de marcos continuos se puede realizar por medio del método de Cross en forma similar al análisis de vigas continuas siempre y cuando no existan desplazamientos laterales.

Pero los marcos estructurales generalmente pueden ladearse al ser sometidos a la acción de cargas, esto sucede si hay asimetría en el marco (en forma o cargas) y entonces se hace necesario, además del equilibrio de giros en los nudos, el equilibrio las fuerzas horizontales y verticales. Para el análisis de estos marcos se debe seguir un método diferente al de aquellos en los que no ocurren desplazamientos.

Un método consiste en suponer un apoyo que impide la inclinación de la estructura. En estas condiciones se calcula la distribución de los momentos y la fuerza que debe suministrar el apoyo imaginario para mantener el marco en su posición (Fig. 18).

Si se eliminara el apoyo imaginario, la estructura se desplazaría y produciría momentos en los extremos de las columnas.

En caso de que todas las columnas tengan igual longitud y momento de inercia, los momentos flexionantes producidos por el desplazamiento lateral serán los mismos en todas las columnas. Si difieren longitudes o momentos de inercia, los momentos variarían en proporción a los valores de  $I/l^3$ . [Ref. 4].

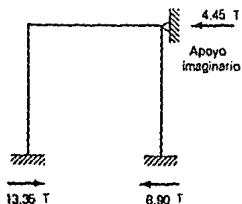


Fig. 18

El análisis se hace en dos etapas:

1) Se consideran los nudos empotrados y después se permite que giren, evitando el desplazamiento lateral con un apoyo imaginario. Se calcula la fuerza que impide el desplazamiento.

2) Se puede suponer un desplazamiento  $\Delta$  del apoyo imaginario, se calculan los momentos que lo producen y se determina el valor de la fuerza que causa ese desplazamiento. O bien, se suponen valores de momentos (proporcionales a  $I/k'$ , y si  $I$  y  $k$  son iguales para todas las columnas, los momentos supuestos tendrán el mismo valor) y se calcula la fuerza en el apoyo.

Comparando las fuerzas obtenidas en ambas etapas se obtiene el factor de corrección (C):

$$C = \frac{\text{fuerza Primera etapa}}{\text{fuerza Segunda etapa}}$$

Factor por el cual se multiplican o "corrigen" los resultados de la Segunda etapa.

Finalmente se suman algebraicamente los resultados de las dos etapas (la segunda ya corregida), obteniéndose así los valores de los momentos finales.

- Aplicación al Análisis de Marcos de Varios Niveles.

El marco de la Fig. 19 se puede ladear de dos maneras, es decir, para analizarlo hay que considerar dos condiciones de desplazamiento lateral:

1) Suponer momentos en el piso superior para cuando el marco inferior permanece rígido y el superior se desplaza, y realizar la distribución de momentos en toda la estructura.

2) Suponer momentos en el piso inferior para cuando el piso superior permanece rígido, y distribuir momentos.

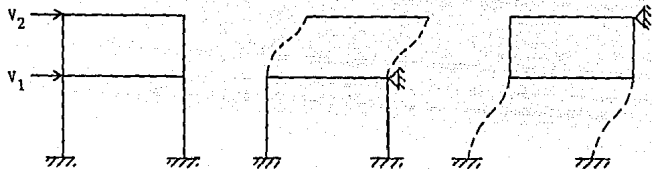


Fig. 19

Después de la distribución se tendrán en las columnas momentos de cierta intensidad, y la suma de los cortantes debidos a la flexión debe ser igual a la suma de las cargas aplicadas.

Denominando  $(\Sigma M_1)_2$  y  $(\Sigma M_2)_2$  a la suma algebraica de los momentos que se presentan en el primero y segundo nivel en la condición 1), y  $(\Sigma M_1)_1$ ,  $(\Sigma M_2)_1$  en la condición 2), para establecer dos ecuaciones que satisfagan el equilibrio horizontal, determinando los momentos producidos por las cargas horizontales  $P_1$  ( $P_1 = V_2 + V_1$ ) y  $P_2$  ( $P_2 = V_2$ ). Las ecuaciones son:

$$\frac{\alpha(\Sigma M_1)_2}{h_1} + \frac{\beta(\Sigma M_1)_1}{h_1} = P_1 + P_2 \quad \dots\dots(11-a)$$

$$\frac{\alpha(\Sigma M_2)_2}{h_2} + \frac{\beta(\Sigma M_2)_1}{h_2} = P_1 \quad \dots\dots(11-b)$$

La solución de las ecuaciones (11) da los valores de  $\alpha$  y  $\beta$ . Y los valores finales de los momentos serían la suma del producto de  $\alpha$  por los momentos distribuidos según la condición 1), más el de  $\beta$  por los de la condición 2).

Este método se complica al aumentar los niveles, ya que el número de ecuaciones es proporcional a ellos. Para estos casos es recomendable utilizar otro método, por ejemplo el de Ritter.

### 3.3.3 Método de Ritter.

El método de Ritter es un método sencillo para analizar marcos de varios niveles sujetos a cargas horizontales o verticales que por su condición (asimetría) sea necesario equilibrar dichas fuerzas. El método de Ritter se desarrolla por medio de correcciones sucesivas.

Considérese el marco de la Fig. 20-a. Si se supone que cada columna adquiere una forma aproximadamente senoidal al deformarse (Fig. 20-b), se crea un punto de inflexión a la mitad de la altura. Así puede considerarse que la columna consta de dos vigas en voladizo (Fig. 20-c). El momento flexionante en cada viga será igual al producto de la fuerza cortante ( $V$ ) por la mitad de la altura ( $h/2$ ). Por lo que el momento flexionante total en una columna es igual al producto de la fuerza cortante resistida por la columna, por su altura ( $Vh$ ).

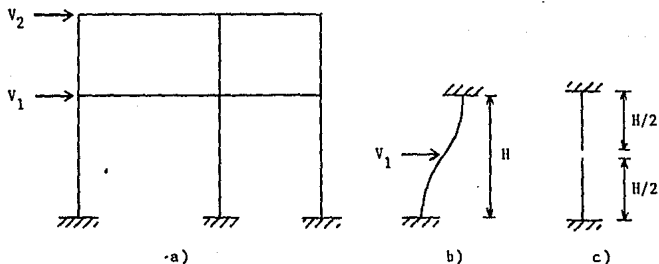


Fig. 20

El procedimiento consiste en:

- 1) Calcular los momentos de empotramiento perfecto.
- 2) Determinar los momentos totales en las columnas ( $V_i h_i$ ) de cada nivel, y distribuirlos entre las mismas en proporción a sus valores de  $I/\lambda^3$ , y en forma equitativa para la parte superior e inferior de cada columna.
- 3) Equilibrar los nudos.
- 4) Transportar los momentos en todo el marco.
- 5) Como los momentos totales de columna ya no son  $V_i h_i$ , determinar la diferencia y equilibrar los nudos (sumar o restar la diferencia en proporción a  $I/\lambda^3$ ).
- 6) Repetir el ciclo desde el paso 3) hasta que las magnitudes de las correcciones sean mínimas.

Con este método se evita el resolver sistemas de ecuaciones (como sucede con el de Cross), valiéndose tan solo de una secuencia de distribuciones, transportes y "correcciones".



CAPITULO IV

MANUAL DE PRACTICAS

PARA MECANICA DE MATERIALES

#### 4.1 RECOMENDACIONES GENERALES

Estas recomendaciones están dirigidas a la persona encargada de dirigir las prácticas:

- Las prácticas propuestas en este Manual son un complemento en la impartición de las materias de Mecánica de Materiales y de Análisis Estructural. Es conveniente que los alumnos conozcan la teoría relativa a cada experimento antes de realizar la práctica.

- Es muy importante recordar, y dar el énfasis adecuado a los alumnos, que el objetivo de los experimentos es obtener datos e información acerca del comportamiento del material o de las estructuras (basándose en modelos), y de ninguna manera centrar la atención en la instrumentación, equipo electrónico y demás dispositivos. Estos instrumentos son importantes, y es conveniente conocer su funcionamiento general, pero para estos experimentos sólo forman parte del equipo a utilizar, son herramientas de trabajo.

- Todo el equipo y material de trabajo deberá manejarse con cuidado y siguiendo el instructivo de uso para lograr así resultados confiables. A fin de obtener la mayor precisión y repetibilidad de resultados, se deben explotar las capacidades de cada instrumento. Esto requiere una instalación adecuada, control preciso del equipo, y estar alerta a condiciones o efectos que puedan alterar los resultados del experimento.

- Es conveniente dar a los alumnos una breve explicación del funcionamiento y principios del equipo, así como de su importancia para el análisis experimental de esfuerzos en general, y de la importancia que tenga para el caso particular de cada práctica. También se les deben comentar las posibles fallas en los resultados debidas al equipo.

- Siguiendo el procedimiento descrito en cada práctica, se podrá conducir cada experimento desde la instalación hasta el análisis de los resultados. En caso de que se encuentren anomalías en los resultados, se recomienda repetir el experimento a fin de encontrar y eliminar la causa. Cuando los experimentos se lleven a cabo adecuadamente y con equipo en buenas condiciones, los resultados que se obtengan serán consistentes y repetibles.

- Es necesario que cada práctica sea sistemática y completamente documentada en un reporte escrito. El reporte es un registro permanente de la información experimental y de las condiciones ante las que se obtuvieron esos resultados. No sólo sirve para comunicar los resultados del experimento a otros, sino que también debe dar la suficiente información acerca del equipo y procedimiento para que otros puedan repetirlo y verificar los resultados.

- Hay que señalar que aunque en las siguientes prácticas se propone el uso de cierto equipo para la instrumentación, y en el procedimiento de cada práctica se indican los pasos a seguir para la instalación y lectura de datos, este equipo no es el único y se puede encontrar equipo más moderno, o bien, un poco más antiguo (por ejemplo analógico), pero cuya función es la misma, y por lo tanto se puede usar para los mismos fines y con resultados similares. El único cambio, en relación a estas prácticas, sería en el procedimiento para la obtención de datos, que deberá hacerse de acuerdo al instructivo de uso del equipo con el que se trabaje.

## 4.2 PRACTICA 1) MODULO DE ELASTICIDAD

### OBJETIVO

Aplicar la extensometría eléctrica en la determinación del Módulo de Elasticidad.

### INTRODUCCION

El propósito de este experimento es conocer el Módulo de Elasticidad (Módulo de Young) de una viga de aluminio en voladizo. El Módulo de Elasticidad es una constante de cada material, y es un índice de su rigidez.

Para muchos materiales estructurales como el aluminio y el acero, la deformación unitaria  $\epsilon$  es una función lineal del esfuerzo  $\sigma$  en el rango de esfuerzos normalmente alcanzados en los elementos estructurales. En una gráfica  $\sigma$ - $\epsilon$  (Fig. 1.1) de un material bajo esfuerzos uniaxiales, la pendiente de la porción lineal representa, por definición, el Módulo de Elasticidad.

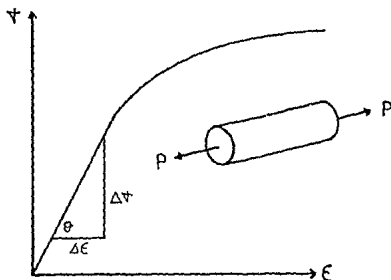


Fig. 1.1 Diagrama  $\sigma$ - $\epsilon$  de una muestra a tensión.

De aquí que:

$$E = \tan \theta = \frac{\Delta \nabla}{\Delta \epsilon} \quad \dots\dots\dots(1)$$

donde:

$E$  = módulo de elasticidad (kg/cm<sup>2</sup>)

$\nabla$  = esfuerzo (kg/cm<sup>2</sup>)

$\epsilon$  = deformación unitaria (cm/cm)

El esfuerzo en un concepto establecido por definición, y no es directamente medible. Debido a esto, la determinación experimental de esfuerzos en un miembro estructural o en un elemento mecánico, requiere de la medición de la deformación unitaria, y la subsecuente determinación del esfuerzo a partir de la Ley de Hooke.

Para esfuerzos uniaxiales la Ley de Hooke es una forma de la ecuación (1):

$$\nabla = E \epsilon \quad \dots\dots\dots(2)$$

Y para el caso más común, el de un estado biaxial de esfuerzos, es como sigue:

$$\nabla_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) \quad \dots\dots(3-a)$$

$$\nabla_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) \quad \dots\dots(3-b)$$

donde:

$\nu$  = relación de Poisson

Para la determinación experimental de esfuerzos se requiere medir la deformación unitaria y conocer el módulo de elasticidad y la relación de Poisson. Al analizar las ecuaciones (2) y (3) se puede observar que el porcentaje de error en el esfuerzo  $\nabla$  depende del módulo de elasticidad  $E$ . De ahí la importancia en la ingeniería de conocer el valor exacto del Módulo de Elasticidad.

## MATERIAL Y EQUIPO

- Viga de aluminio.
- Extensómetro (Strain Gage) compensado por temperatura.
- Indicador de deformaciones unitarias.
- Dispositivo de empotramiento para viga.
- Pesas de laboratorio.
- Regla graduada.
- Micrómetro.

## GENERALIDADES

Para este experimento se invierte el procedimiento usual del análisis experimental de esfuerzos (explicado en la Introducción) para obtener el módulo de elasticidad a partir de un caso sencillo para el cual se puede calcular el esfuerzo con otras consideraciones.

En este experimento se obtendrá el diagrama  $\sigma$ - $\epsilon$  para una viga de aluminio en voladizo, con carga concentrada en el extremo libre (Fig. 1.2).

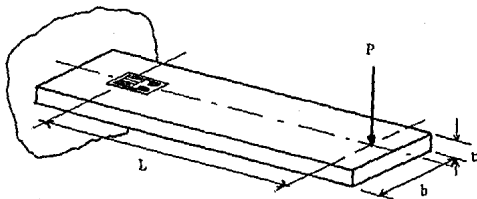


Fig. 1.2

El esfuerzo se puede calcular con la fórmula de la flexión estática:

$$\sigma = \frac{M c}{I} \dots\dots\dots(4)$$

Conocidas las dimensiones de la viga, y la carga que actúa sobre ella, se tiene que:

$$I = b t^3 / 12 \dots\dots\dots(5)$$

$$c = t / 2 \dots\dots\dots(6)$$

$$M = P L \dots\dots\dots(7)$$

Y al sustituir las ecuaciones (5), (6) y (7) en la (4), se puede calcular el esfuerzo  $\sigma$ :

$$\sigma = P L (t/2) (12/bt^3) \dots\dots\dots(8')$$

$$\sigma = 6 P L / b t^2 \dots\dots\dots(8)$$

donde:

M = momento flexionante en el eje del extensómetro (kg cm)

c = semiespesor de la viga (cm)

I = momento de inercia de la sección transversal de la viga (cm<sup>4</sup>)

P = carga puntual aplicada (kg)

L = longitud efectiva de la viga (cm)

NOTA (Procedimiento Alternativo con dos extensómetros)

Se pueden instalar dos extensómetros en la viga, uno en la parte superior y otro en la parte inferior, pero en el mismo punto y alineados con el eje longitudinal de la viga.

Para una viga de sección rectangular constante, los esfuerzos, y las deformaciones, son iguales en magnitud y de signos opuestos en las superficies superior e inferior de la viga, en cualquier sección (Fig. 1.3-a).

Si los dos extensómetros están conectados al indicador de deformaciones con "medio puente" (Fig. 1.3-b), la deformación indicada será lo doble de la deformación real.

Los procedimientos son los mismos que para el experimento de un solo extensómetro.

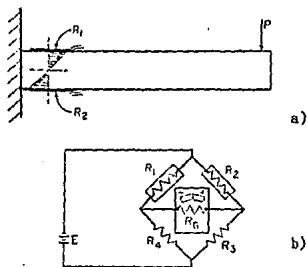


Fig. 1.3 Arreglos físico y eléctrico de los extensómetros para medir deformaciones en una viga en voladizo. Este sistema resulta compensado por temperatura, y la señal eléctrica de salida se duplica.



## PROCEDIMIENTO

### A) Adquisición de Datos.

- Empotrar la viga en el brazo de empotramiento con el extremo instrumentado (con el extensómetro) del lado del empotramiento.

- Conectar al indicador de deformaciones.

- Medir la distancia del eje de la resistencia del extensómetro (rejilla) al punto de aplicación de la carga en el extremo libre de la viga.

- Medir el ancho y espesor de la viga con un micrómetro.

- Con la fórmula de la flexión, la ecuación (8), calcular la carga  $P$  necesaria para producir un esfuerzo de aproximadamente  $1,000 \text{ kg/cm}^2$  en el punto instrumentado.

- Con la viga descargada (excepto el peso propio y el del gancho de carga), colocar el indicador de deformaciones en cero.

- Aplicar la carga calculada en incrementos (se recomiendan 10), y en cada uno efectuar la lectura correspondiente en el indicador de deformaciones. Registrar los datos.

- Descargar la viga en el mismo número de decrementos, y nuevamente registrar carga y deformación en cada decremento.

### B) Análisis y Presentación de Datos.

- Para cada incremento y decremento de carga, calcular los esfuerzos en la viga (ecuación 8).

- Registrar en la tabla de la hoja de trabajo la carga, esfuerzo y deformación en cada nivel de carga.

- Graficar los esfuerzos y deformaciones.

Los puntos obtenidos deberán estar aproximadamente en una línea recta, y deberá haber una mínima diferencia entre los puntos de incremento y los de decremento (indicativo de histé-

resis). Si los datos no se comportan como se ha descrito, probablemente el extensómetro está mal instalado. Esto puede verificarse aplicando la mayor carga a la viga y dejándola varios minutos. El extensómetro funciona normalmente si no hay cambio apreciable en la indicación de la deformación unitaria durante ese tiempo, y si al descargar, el indicador regresa a cero.

- Trazar una línea recta de manera que los puntos de la gráfica estén balanceados a ambos lados de la línea. La línea no necesariamente debe pasar por el origen.

- Medir  $\Delta V$  y  $\Delta E$  sobre un segmento de la línea tan grande como sea posible, y calcular E de la ecuación (2).

Para mayor precisión, se puede utilizar algún método de análisis estadístico, como el de mínimos cuadrados, para establecer la pendiente de la mejor línea recta obtenida con esos puntos.

#### REPORTE

El alumno debe preparar un breve reporte describiendo con sus propias palabras el objetivo del experimento, el equipo y el procedimiento seguido. Establecer los resultados obtenidos, incluyendo la tabla de datos experimentales y la gráfica  $V-E$ . Comentar las probables fuentes de error y los efectos relativos en la exactitud del Módulo de Elasticidad que se ha determinado.



#### 4.3 PRACTICA 2) RELACION DE POISSON

##### OBJETIVO

Aplicar la extensometría eléctrica en la determinación de la Relación de Poisson.

##### INTRODUCCION

El propósito de este experimento es medir la relación de Poisson de una viga de aluminio en voladizo. La relación de Poisson es una de las dos constantes elásticas fundamentales (junto con el Módulo de Elasticidad) que relaciona el esfuerzo a la deformación unitaria. Así, la Ley de Hooke para un estado biaxial de esfuerzos se puede escribir como:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) \quad \dots\dots\dots(1-a)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) \quad \dots\dots\dots(1-b)$$

donde:

- $\sigma$  = esfuerzo (kg/cm<sup>2</sup>)
- $\epsilon$  = deformación unitaria (cm/cm)
- $\nu$  = relación de Poisson (adimensional)
- $E$  = módulo de Elasticidad (kg/cm<sup>2</sup>)

Tanto el módulo de Elasticidad  $E$ , como la relación de Poisson  $\nu$ , son necesarios para transformar las deformaciones medidas en esfuerzos.

Es un hecho experimentalmente observable que cuando un espécimen de un material elástico isotrópico está sujeto a esfuerzo uniaxial, el espécimen no sólo se deforma en la dirección del esfuerzo, sino que también presenta una deformación de signo opuesto en la dirección perpendicular (Fig. 2.1).

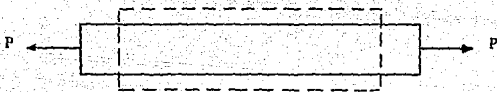


Fig. 2.1 Alargamiento axial y contracción lateral de una barra sometida a tensión.

La Relación de Poisson es el valor absoluto de la relación de la deformación transversal a la deformación axial en un elemento sujeto a esfuerzos uniaxiales:

$$\nu = \left| \frac{\epsilon_{\text{transversal}}}{\epsilon_{\text{longitudinal}}} \right| = \left| \frac{\epsilon_t}{\epsilon_l} \right| \quad \dots\dots\dots(2)$$

La Relación de Poisson se puede calcular fácilmente con - extensómetros, utilizando dos en un miembro uniaxialmente esforzado: uno alineado en la dirección del esfuerzo, y el otro perpendicular al primero. Como la mayoría de los extensómetros presentan cierto grado de sensibilidad a las deformaciones transversales al eje de sensibilidad principal, se puede hacer la corrección por sensibilidad transversal a fin de obtener un valor más preciso de la relación de Poisson por este método. Comúnmente se utiliza para este propósito un espécimen de prueba a tensión, con un campo uniforme de esfuerzos, y los extensómetros se colocan adyacentes uno al otro en forma de "T".

Pero la Relación de Poisson también puede obtenerse con - bastante exactitud de una viga en voladizo, aunque la deformación unitaria varíe linealmente a lo largo de la viga. En este caso, el extensómetro axial se coloca longitudinalmente en una cara de la viga, y el extensómetro transversal se coloca perpendicularmente en la cara opuesta, en la misma sección (Fig. 2.2).

La relación de las dos deformaciones (después de corregir la lectura del extensómetro lateral debido a la sensibilidad - transversal) es la relación de Poisson.

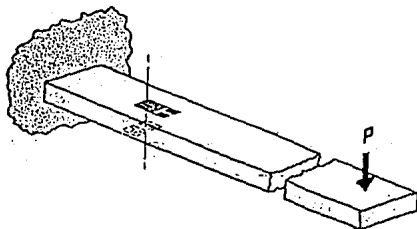


Fig. 2.2

#### MATERIAL Y EQUIPO

- Viga de aluminio.
- Extensómetros (2).
- Indicador de deformaciones unitarias.
- Dispositivo de empotramiento.
- Pesas de laboratorio.

## GENERALIDADES

En este experimento se utilizará una viga de aluminio en flexión, instrumentada con dos extensómetros. A flexión, las deformaciones unitarias longitudinales correspondientes a los puntos superior e inferior de la superficie de una viga, son de magnitudes iguales pero de signo contrario (Fig. 2.3), y lo mismo sucede para las deformaciones unitarias transversales. Con esto como base, se colocará un extensómetro longitudinalmente en la superficie superior de la viga, y un segundo extensómetro transversal al primero en el punto correspondiente de la superficie inferior (Fig. 2.2).

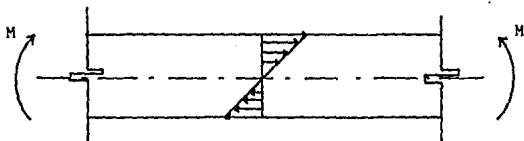


Fig. 2.3 Los esfuerzos y deformaciones en una viga de sección rectangular sometida a flexión, tienen la misma magnitud pero signo contrario en las superficies superior e inferior de cualquier sección.

La viga se empotrará y se cargará a flexión en un nivel de deformación unitaria arbitrario. Como el estado de esfuerzos en la viga es uniaxial, se efectuarán las lecturas de las deformaciones unitarias longitudinal y transversal para el cálculo de la relación de Poisson.

## PROCEDIMIENTO

### A) Adquisición de Datos.

- Instalar la viga empotrando un extremo en el brazo del dispositivo para empotramiento, con el extensómetro longitudinal en la cara superior.

- Conectar los extensómetros uno a la vez, primero con la viga sin flexión y después con la viga flexionada. Obtener una lectura de referencia inicial (que puede ser cero) para cada extensómetro con la viga sin flexionar, y una lectura final con la viga flexionada. La diferencia de estas lecturas dará la deformación unitaria.

- Conectar los conductores del extensómetro a las terminales del indicador de deformaciones.

- Colocar el ajuste del factor de sensibilidad del extensómetro (valor dado en el paquete del extensómetro) en el indicador de deformaciones, y prender el instrumento.

- Colocar el control de medición y ajustar el control de balance hasta que indique balance nulo. No ajustar el control de balance durante el experimento.

- El proceso de lectura es el siguiente: Con los extensómetros conectados al indicador de deformaciones se carga la viga con una carga  $P_1$ , se lee y registra la deformación unitaria longitudinal  $\epsilon_l$  y luego la transversal  $\epsilon_t$  (sin corregir). Se repite el proceso tres o cuatro veces con diferentes pesos  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$ , etc.

- Para verificar la estabilidad del sistema, es necesario llevar la viga a la posición inicial (sin flexión). Si el sistema opera normalmente, la lectura debe estar muy cercana a la inicial. Si la variación es mayor de  $\pm 10 \mu\epsilon$ , se debe localizar la fuente de error y repetir el experimento.



## B) Análisis y Presentación de Datos.

Antes de calcular la relación de Poisson a partir de las deformaciones unitarias longitudinal y transversal, es recomendable, si se cuenta con la información necesaria, corregir la deformación unitaria transversal por sensibilidad transversal.

Debido a que la deformación unitaria longitudinal de la viga es varias veces mayor que la deformación unitaria transversal, el extensómetro transversal está sujeto a una mayor deformación en su dirección transversal. Como resultado del ancho de las líneas de las rejillas en los extensómetros, y por las vueltas que conectan las líneas de la rejilla, los extensómetros son sensibles generalmente, no sólo a las deformaciones paralelas a la dirección de la rejilla, sino también (en un grado, mucho menor) a la deformación perpendicular a la dirección de la rejilla (Fig. 2.4). Esta propiedad de los extensómetros se conoce como "sensibilidad transversal", y se simboliza como  $K_t$ .

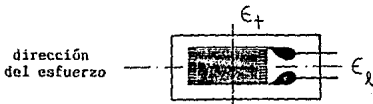


Fig. 2.4 Extensómetro instalado en la dirección del esfuerzo. La rejilla es ligeramente sensible a las deformaciones transversales.

La corrección por sensibilidad transversal se puede hacer utilizando la gráfica anexa, para la cual se requiere:

- 1) La relación  $\epsilon_l / \epsilon_t$ .
- 2) La sensibilidad transversal  $K_t$  del extensómetro transversal (dato del fabricante indicado en el paquete).

- Para entrar en la gráfica se toma como abscisa el valor de  $K_t$  de los extensómetros del experimento.

- Se proyecta una línea hacia arriba a la línea inclinada que representa la relación de las deformaciones transversal y longitudinal.

- De la intersección de estas líneas se traza una horizontal y se lee el valor del factor de corrección "C".

- Se multiplica la deformación unitaria transversal por C para obtener la deformación unitaria transversal corregida. La deformación unitaria longitudinal no necesita corregirse por sensibilidad transversal ya que estos efectos son mínimos y por lo tanto pueden despreciarse.

Como un procedimiento alterno para la corrección:

Cualquier par de deformaciones unitarias, medidas en ángulo recto una con respecto a otra, pueden corregirse con las siguientes expresiones:

$$\epsilon_1 = \frac{1 - \nu_0 K_t}{1 + K_t} (\hat{\epsilon}_1 - K_t \hat{\epsilon}_2)$$

$$\epsilon_2 = \frac{1 - \nu_0 K_t}{1 + K_t} (\hat{\epsilon}_2 - K_t \hat{\epsilon}_1)$$

donde:

$\hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2$  = deformaciones unitarias ortogonales observadas (sin corregir).

$\epsilon_1, \epsilon_2$  = deformaciones unitarias corregidas.

$K_t$  = sensibilidad transversal.

$\nu_0$  = 0.285 = valor más común de la relación de Poisson bajo el cual se calibran los extensómetros para el factor de celda.

Después de corregir la deformación unitaria transversal, se puede determinar la relación de Poisson con la expresión ya conocida:

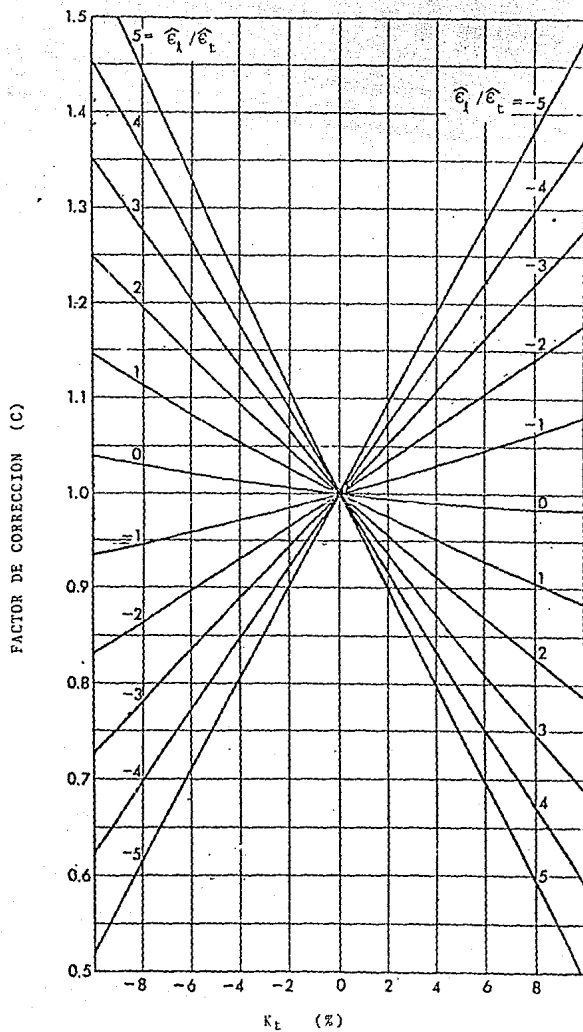
$$\nu = \left| \frac{\epsilon_t}{\epsilon_1} \right|$$

Finalmente se obtiene un promedio de los valores obtenidos para encontrar la relación de Poisson representativa.

#### REPORTE

El alumno debe preparar un breve reporte describiendo con sus propias palabras el propósito del experimento, el equipo utilizado, el procedimiento y los resultados obtenidos. Debe incluir los datos originales, los cálculos para la corrección de la deformación transversal, y los cálculos para la relación de Poisson; comentar las probables fuentes de error en el experimento, y su efecto relativo en la aproximación de la relación de Poisson que se obtuvo. Comparar los resultados con datos publicados para aleaciones de aluminio, y comparar la relación de Poisson para aleaciones de aluminio con la del acero, corcho, concreto, hule o algún otro material de interés.

## CORRECCION POR SENSIBILIDAD TRANSVERSAL



HOJA DE TRABAJO

- Tabulación de Datos y Resultados:

| CARGA<br>(kg) | DEFORMACIONES LEIDAS |                    | $K_t$ | c | CORRECCION<br>$\epsilon_t = c \hat{\epsilon}_t$ | $\nu = \frac{\epsilon_t}{\epsilon_\lambda}$ |
|---------------|----------------------|--------------------|-------|---|---|---|
|               | $\epsilon_\lambda$   | $\hat{\epsilon}_t$ |       |   |   |   |
|               |                      |                    |       |   |   |   |
|               |                      |                    |       |   |   |   |
|               |                      |                    |       |   |   |   |
|               |                      |                    |       |   |   |   |
|               |                      |                    |       |   |   |   |
|               |                      |                    |       |   |   |   |
|               |                      |                    |       |   |   |   |

$\nu$  promedio =

- Valores de la Relación de Poisson de varios materiales:

| MATERIAL              | $\nu$ | FUENTE |
|-----------------------|-------|--------|
| Aleación de Aluminio  |       |        |
| Acero                 |       |        |
| Concreto (compresión) |       |        |
| Hule                  |       |        |
| Vidrio                |       |        |
| Mármol (compresión)   |       |        |

#### 4.4 PRACTICA 3) ESFUERZOS PRINCIPALES

##### OBJETIVO

Comparar los Esfuerzos Principales obtenidos a partir de:

- a) Roseta de deformaciones.
- b) Análisis Teórico.

##### INTRODUCCION

El propósito de esta práctica es medir las deformaciones unitarias a lo largo de tres ejes diferentes en un punto de una viga en voladizo, con estas deformaciones calcular los esfuerzos principales, y luego compararlos con los esfuerzos obtenidos por la fórmula de la flexión.

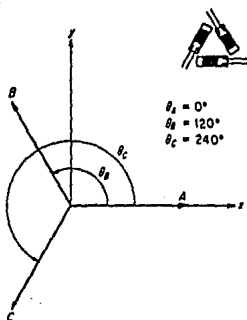
En general, para determinar las deformaciones (y esfuerzos) principales en un estado de esfuerzo biaxial, se necesitan medir tres deformaciones unitarias a lo largo de diferentes ejes en un mismo punto. Mientras que el campo de esfuerzo en la superficie de una viga en voladizo cargada simétricamente es uniaxial (excepto cerca del empotramiento y del punto de carga), el esfuerzo varía con respecto al ángulo de cada punto. El campo de las deformaciones unitarias, que en este caso es biaxial debido al efecto de Poisson, varía en forma similar.

Los tres ejes a lo largo de los cuales se deben medir las deformaciones unitarias se pueden orientar arbitrariamente respecto al punto de interés. Pero para facilitar los cálculos, es preferible espaciar los ejes de medición en submúltiplos de  $\pi$ , como  $\pi/3$  ( $60^\circ$ ) ó  $\pi/4$  ( $45^\circ$ ). Al arreglo de extensómetros utilizado para medir deformaciones unitarias múltiples con respecto a un punto se le conoce como "Roseta".

Comercialmente se pueden encontrar Rosetas de tres extensómetros en dos configuraciones principalmente, que corresponden a los ángulos antes mencionados: la roseta Delta y la roseta Rectangular (Fig. 3.1). La roseta Delta es llamada así debido a que el arreglo de los extensómetros en forma de triángulo equilátero es equivalente a la configuración mostrada.



a) Roseta Delta



b) Roseta Rectangular

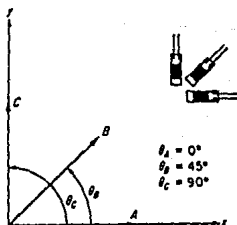


Fig. 3.1 Rosetas de deformaciones.

Para la roseta Delta las deformaciones principales se pueden calcular utilizando la siguiente expresión:

$$\epsilon_{p,q} = \frac{\epsilon_A + \epsilon_B + \epsilon_C}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_A - \epsilon_B)^2 + (\epsilon_B - \epsilon_C)^2 + (\epsilon_C - \epsilon_A)^2} \dots\dots\dots(1)$$

Y la expresión para la roseta Rectangular es:

$$\epsilon_{p,q} = \frac{\epsilon_A + \epsilon_C}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\epsilon_A - \epsilon_C)^2 + (2\epsilon_B - \epsilon_A - \epsilon_C)^2} \dots(2)$$

donde:

$\epsilon_{p,q}$  = deformaciones principales algebraicamente máxima y mínima respectivamente (cm/cm).

$\epsilon_A, \epsilon_B, \epsilon_C$  = deformaciones unitarias medidas a lo largo de los ejes correspondientes (cm/cm).

Las deformaciones principales máxima y mínima corresponden a las alternativas positiva y negativa respectivamente de las ecuaciones (1) y (2). La deformación principal algebraicamente mínima puede ser numericamente mayor que el máximo algebraico si es negativa.

Los esfuerzos principales se pueden calcular sustituyendo las deformaciones principales en la expresión de la Ley de Hooke (biaxial):

$$\sigma_p = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_p + \nu \epsilon_q) \dots\dots\dots(3-a)$$

$$\sigma_q = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_q + \nu \epsilon_p) \dots\dots\dots(3-b)$$

donde:

$\sigma_{p,q}$  = esfuerzos principales máximo y mínimo (kg/cm<sup>2</sup>)

$\nu$  = relación de Poisson

E = módulo de elasticidad (kg/cm<sup>2</sup>)



## MATERIAL Y EQUIPO

- Viga de aluminio instrumentada con una roseta.
- Indicador de deformaciones unitarias.
- Dispositivo de empotramiento.
- Pesas de laboratorio.
- Micrómetro o Vernier.
- Regla graduada.

## GENERALIDADES

En esta práctica se determinarán las deformaciones y esfuerzos principales de una viga en voladizo instrumentada con una roseta. Posteriormente, conocidas las dimensiones de la viga y la magnitud de la carga, se determinará el esfuerzo a flexión longitudinal con la fórmula de la flexión. Puesto que en este caso los ejes principales para deformación y esfuerzo se conocen, y coinciden con los ejes geométricos de la viga, el es esfuerzo máximo principal obtenido de la roseta será aproximadamente igual al esfuerzo a flexión longitudinal calculado. De igual forma, el esfuerzo mínimo principal obtenido de las lecturas de la roseta, deberá ser muy cercano a cero, puesto que el esfuerzo transversal en la viga es igual a cero.

Es evidente que para la configuración de la viga utilizada y para las condiciones de carga del experimento, no es necesaria una roseta para determinar los esfuerzos principales. Sin embargo, instalando una roseta a la viga en una orientación tal que ninguno de sus ejes coincida con los de la viga, se puede simular completamente el problema generalizado de un estado de esfuerzo biaxial (en el que normalmente se requiere el uso de una roseta).

La persona que realice adecuadamente esta práctica, estará preparada para determinar los esfuerzos principales en cualquier situación, para lo cual los extensómetros (strain gages) son la herramienta de medición ideal (Fig. 3.2).

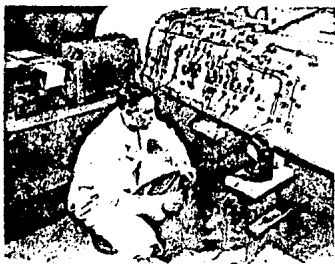


Fig. 3.2 Aplicación de los extensómetros en el análisis de esfuerzos sobre el casco de una lancha.

Las deformaciones y los esfuerzos principales se calculan en esta práctica sin corregir por Sensibilidad Transversal a los elementos de la roseta (extensómetros). La Sensibilidad Transversal es el resultado del ancho de las líneas de la rejilla resistente del extensómetro y de las vueltas que unen a dichas líneas, que ocasionan que los extensómetros sean sensibles no sólo a la deformación paralela a la dirección de la rejilla, sino también, en mucho menor grado, a la deformación perpendicular a la dirección de la resistencia.

## PROCEDIMIENTO

### A) Adquisición de Datos.

- Empotrar la viga en el dispositivo de empotramiento, con el extremo instrumentado con la roseta del lado del empotramiento y en la parte superior.

- Conectar los alambres conductores al indicador de deformaciones. Se conectarán los extensómetros uno a la vez.

- Medir la distancia del eje de la roseta al punto de carga del extremo libre de la viga, utilizando un metro o una regla graduada, y medir el ancho y espesor de la viga con un micrómetro.

- Con la fórmula de la flexión, calcular la carga P que se debe aplicar en el extremo libre de la viga de manera que produzca un esfuerzo de aproximadamente 1,000 kg/cm<sup>2</sup> en el eje de la roseta.

Fórmula de la flexión:

$$\sigma_L = \frac{M c}{I} = \frac{6 P L}{b t^2} \dots\dots\dots(4)$$

donde:

- $\sigma_L$  = esfuerzo longitudinal en el eje de la roseta (kg/cm<sup>2</sup>)
- M = momento flexionante en el eje de la roseta (kg cm)
- c = semiespesor de la viga (cm)
- I = momento de inercia de la sección transversal de la viga (cm<sup>4</sup>)
- P = carga (kg)
- L = distancia del punto de aplicación de la carga al eje de la roseta (cm)
- b = ancho de la viga (cm)
- t = espesor de la viga (cm)

- Con la viga descargada ajustar el control del factor de celda del extensómetro y encender el indicador de deformaciones.

- Ajustar el aparato a una lectura cero con el control de balance. Esto permitirá una lectura directa de la deformación unitaria. En algunos casos la desviación inicial de lectura de un extensómetro en particular impide el mencionado balance en cero, en estos casos conviene ajustar en un valor cómodo en su manejo, por ejemplo de +1,000 unidades.

- Después de tomar la lectura inicial para el extensómetro A (que puede o no ser cero), apagar el indicador de deformaciones, desconectar el extensómetro A, y conectar el B, encender el indicador y tomar la lectura inicial para el extensómetro B.

- Repetir el procedimiento para el extensómetro C, recordando que se debe mantener el control de balance fijo en su posición original.

- Después de registrar la lectura inicial para el extensómetro B, aplicar la carga P previamente calculada (o aproximadamente esa carga) en el extremo libre de la viga. Registrar el peso exacto en la hoja de trabajo. Registrar esta lectura final y llevar a cero el indicador.

- Dejar la viga cargada y repetir la toma de lectura final para los extensómetros A y B. Dejar el último extensómetro conectado al instrumento, descargar la viga y revisar que esta última lectura sea aproximadamente la misma que la inicial para ese extensómetro. Si las lecturas no coinciden, localizar la fuente de error y repetir el experimento.

Los extensómetros deben tener estabilidad, por lo que la viga instrumentada debe tener repetibilidad, a menos de que el extensómetro esté dañado. Si las lecturas no se repiten adecuadamente, es probable que se haya movido el control de balance después de su ajuste inicial, o que las conexiones estén flojas y no puedan evitar los pequeños cambios de resistencia debidos a las reconexiones.

## B) Análisis y Presentación de Datos.

- Obtener la deformación unitaria de cada elemento de la roseta (extensómetro) restando la lectura inicial de la final. Si la lectura inicial es mayor que la final, la deformación unitaria será negativa, indicando compresión. Registrar los resultados en la hoja de trabajo.

- Sustituir las deformaciones unitarias en la ecuación (1) ó (2), según el caso, para obtener las deformaciones principales  $\epsilon_p$  y  $\epsilon_q$ .

- Debido a que el estado de esfuerzos en la superficie de la viga en voladizo es uniaxial, con los ejes principales conocidos, a lo largo y perpendicular al eje de la viga, el valor absoluto de  $\epsilon_q/\epsilon_p$ , es la relación de Poisson del material de la viga:

$$\nu = \left| \frac{\epsilon_q}{\epsilon_p} \right| \quad \dots\dots\dots(5)$$

Registrar este valor en la hoja de trabajo y sustituirlo, junto con  $\epsilon_p$  y  $\epsilon_q$ , y un valor del módulo de elasticidad para el aluminio  $E = 731,850 \text{ kg/cm}^2$ , en la ecuación (3) para calcular los esfuerzos principales  $\tau_p$  y  $\tau_q$ . El esfuerzo lateral (transversal) teórico de la viga es cero, por lo que el  $\tau_q$  calculado debe ser mínimo.

- Calcular el esfuerzo longitudinal  $\tau_L$  sustituyendo la carga exacta utilizada y las dimensiones de la viga en la ecuación (4). Registrar los valores en la tabla de la hoja de trabajo para facilitar la comparación de resultados.

## REPORTE

El alumno debe preparar un breve reporte en el que describa con sus propias palabras el propósito del experimento, el equipo e instalación necesarios, así como el procedimiento seguido. Incluir las hojas de trabajo en el reporte. Comentar las probables fuentes de error durante la práctica y como afectan en la diferencia entre el esfuerzo principal obtenido de las mediciones con la roseta y el obtenido a partir de la fórmula de la flexión, es decir práctica y analíticamente.

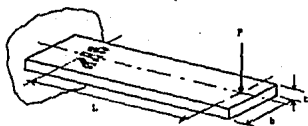
## HOJA DE TRABAJO

Dimensiones de la Viga:

L = longitud = \_\_\_\_\_ cm

b = ancho = \_\_\_\_\_ cm

t = espesor = \_\_\_\_\_ cm



Cálculo de la carga P (para un esfuerzo de 1,000 kg/cm<sup>2</sup>):

$$P = \frac{\sigma b t^3}{6 L} = \frac{(1,000) ( ) ( )^3}{6 ( )} = \text{_____ kg}$$

Carga Real Utilizada \_\_\_\_\_ kg

Medición de Deformaciones:

| Extensómetro | Lectura inicial | Lectura final | Deformación | Factor de celda |
|--------------|-----------------|---------------|-------------|-----------------|
| 1            |                 |               |             |                 |
| 2            |                 |               |             |                 |
| 3            |                 |               |             |                 |

Cálculo de las deformaciones Principales:

I) ROSETA DELTA

$$A = \frac{\epsilon_A + \epsilon_B + \epsilon_C}{3} = \frac{( ) + ( ) + ( )}{3} = \text{_____ } \mu\epsilon$$

$$B = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_A - \epsilon_B)^2 + (\epsilon_B - \epsilon_C)^2 + (\epsilon_C - \epsilon_A)^2}$$

$$B = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{[( ) - ( )]^2 + [( ) - ( )]^2 + [( ) - ( )]^2} = \text{_____ } \mu\epsilon$$

$$\epsilon_p = A + B = ( ) + ( ) = \text{_____ } \mu\epsilon$$

$$\epsilon_q = A - B = ( ) - ( ) = \text{_____ } \mu\epsilon$$

HOJA DE TRABAJO (Continuación)

- Resumen:

| ROSETA                      | FORMULA DE LA FLEXION                              |
|-----------------------------|--|
| $\epsilon_p = \mu\epsilon$  | $\sigma_L/E = ( ) / 731,850 = \mu\epsilon$         |
| $\epsilon_q = \mu\epsilon$  | $(\nu\sigma_L)/E = ( )( ) / 731,850 = \mu\epsilon$ |
| $\nu =$                     |  |
| $\sigma_p = \text{kg/cm}^2$ | $\sigma_L = \text{kg/cm}^2$                        |
| $\sigma_q = \text{kg/cm}^2$ | 0  |



II) ROSETA RECTANGULAR

$$A = \frac{\epsilon_A + \epsilon_C}{2} = \frac{(\quad) + (\quad)}{2} = \quad \mu\epsilon$$

$$B = \frac{1}{2} \sqrt{(\epsilon_A - \epsilon_C)^2 + (2\epsilon_B - \epsilon_A - \epsilon_C)^2}$$

$$B = \frac{1}{2} \sqrt{[(\quad) - (\quad)]^2 + [2(\quad) - (\quad) - (\quad)]^2} = \quad \mu\epsilon$$

$$\epsilon_p = A + B = (\quad) + (\quad) = \quad \mu\epsilon$$

$$\epsilon_q = A - B = (\quad) - (\quad) = \quad \mu\epsilon$$

- Cálculo de la Relación de Poisson:

$$\nu = \left| \frac{\epsilon_q}{\epsilon_p} \right| = \frac{(\quad)}{(\quad)} = \quad$$

- Cálculo de los Esfuerzos Principales:

$$\sigma_p = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_p + \nu \epsilon_q) = \frac{731,850}{1 - (\quad)^2} [(\quad) + (\quad)(\quad)]$$

$$\sigma_p = \quad \text{kg/cm}^2$$

$$\sigma_q = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_q + \nu \epsilon_p) = \frac{731,850}{1 - (\quad)^2} [(\quad) + (\quad)(\quad)]$$

$$\sigma_q = \quad \text{kg/cm}^2$$

- Cálculo del Esfuerzo Principal Máximo a partir de la fórmula de la Flexión:

$$\sigma_L = \frac{6 P L}{b t^2} = \frac{6 (\quad)(\quad)}{(\quad)(\quad)^2} = \quad \text{kg/cm}^2$$

#### 4.5 PRACTICA 4) VIGA EN VOLADIZO

##### OBJETIVO

Determinar la Fuerza Cortante y la Carga Aplicada a partir de las deformaciones medidas.

Verificar la linealidad de la deformación a lo largo del eje de la viga.

Revisar las relaciones de Cortante y de Momento Flexionante comparando dos formas para determinar los esfuerzos.

##### INTRODUCCION

La viga en voladizo (cantiliver) es un elemento estructural muy utilizado. Este tipo de vigas pueden tener sección variable, y soportar diferentes tipos de cargas.

En esta práctica se estudiará el ejemplo más simple de viga en voladizo, que es una viga de sección rectangular constante, empotrada en un extremo, y con una sola carga aplicada sobre el eje longitudinal de la viga cerca del extremo libre.

En la Fig. 4.1 se muestra una viga en cantiliver, junto con sus diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante. El equilibrio estático requiere que la fuerza cortante de cualquier sección X de la viga sea igual a la carga P. Por eso el diagrama de cortante tiene una altura constante a partir del punto de aplicación de la carga hasta el empotramiento. El momento flexionante en cualquier sección X es el producto de la carga por su brazo de palanca,  $M = PX$ . De ahí que el momento flexionante varíe linealmente desde cero, en el punto de carga, hasta PL en el empotramiento, como se indica en el diagrama. Los diagramas coinciden con el hecho de que el cortante en cada sección es igual a la derivada del momento flexionante (pendiente del diagrama de momentos). Esto es:

$$V = \frac{dM}{dX} \dots\dots\dots(1)$$

donde:

V = fuerza cortante (kg)

M = momento flexionante (kg cm)

X = distancia de la sección al punto de carga (cm)

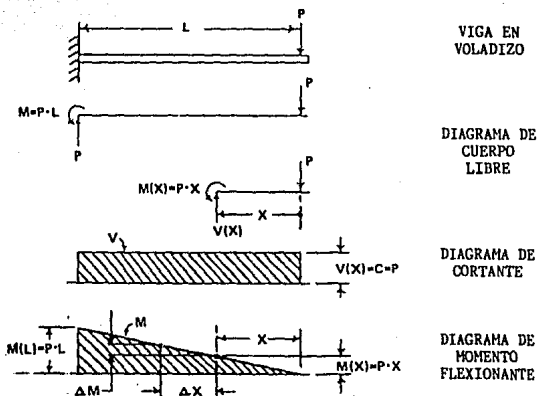


Fig. 4,1 Viga en voladizo con sus diagramas correspondientes.

Otra característica de la viga en voladizo de esta práctica, es que el esfuerzo es uniaxial en cualquier punto de la superficie, excepto junto al punto de carga y junto al empotramiento. Los esfuerzos en la superficie de la viga en cualquier punto, X, a lo largo del eje, se pueden calcular con:

$$\nabla(X) = \frac{M(X)c}{I} = \frac{6PX}{bt^3} = \frac{PX}{Z} \quad \dots\dots\dots(2)$$

donde:

- $\nabla(X)$  = esfuerzo normal en la superficie de la viga en la sección X (kg/cm<sup>2</sup>)
- c = distancia del eje neutro a la fibra extrema de la superficie de la viga (cm)
- I = momento de inercia de la sección transversal de la viga (cm<sup>4</sup>)
- P = carga puntual (kg)
- b = ancho de la viga (cm)
- t = espesor de la viga (cm)
- Z = módulo de sección de la viga (cm<sup>3</sup>)

Para esfuerzos uniaxiales la Ley de Hooke puede expresarse como:

$$C = \frac{\nabla}{E} \quad \dots\dots\dots(3)$$

donde:

- E = deformación unitaria (cm/cm)
- E = módulo de elasticidad (kg/cm<sup>2</sup>)

De ahí que la deformación longitudinal en cualquier sección X sea:

$$C(X) = \frac{6PX}{Ebt^3} = \frac{6M(X)}{Ebt^3} \quad \dots\dots\dots(4)$$

La ecuación (4) demuestra que la deformación axial varía linealmente a lo largo de la viga desde cero en el punto de carga hasta un máximo teórico de  $6PL/Ebt^3$  en el extremo empotrado.

## MATERIAL Y EQUIPO

- Viga de aluminio con tres extensómetros en diferentes puntos sobre el eje longitudinal de la viga.
- Indicador de deformaciones unitarias.
- Dispositivo de empotramiento.
- Micrómetro o Vernier.
- Regla graduada.

## GENERALIDADES

Este experimento puede realizarse utilizando una viga instrumentada con tres extensómetros instalados uniformemente espaciados a lo largo del eje de la viga, como se muestra en la Fig. 4.2.

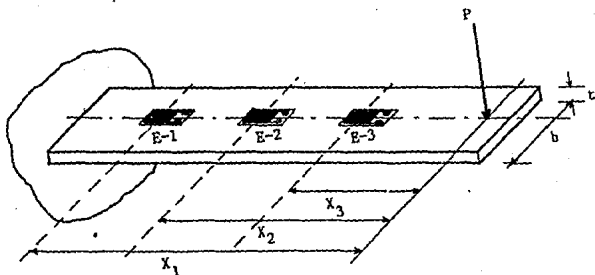


Fig. 4.2

Como la distribución de las deformaciones a lo largo de la viga es lineal, se puede reescribir la ecuación (1) como:

$$v = \frac{\Delta M}{\Delta X} \dots\dots\dots(5)$$

donde:

$\Delta M$  = cambio del momento flexionante en un incremento de longitud definido por  $\Delta X$ .

$\Delta X$  = cambio de distancia (ver Fig. 4.1)

Despejando M de la ecuación (4) y sustituyendo en la ecuación (5):

$$v = \frac{E b t^3}{6} \frac{\Delta \epsilon}{\Delta X} \dots\dots\dots(6)$$

De la ecuación (6) se puede obtener la fuerza cortante a partir de la diferencia de deformaciones indicadas en un par de extensómetros, dividido entre la distancia que los separa:

$$v_{1-2} = \frac{E b t^3}{6} \left( \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{x_1 - x_2} \right) \dots\dots\dots(7)$$

$$v_{2-3} = \frac{E b t^3}{6} \left( \frac{\epsilon_2 - \epsilon_3}{x_2 - x_3} \right) \dots\dots\dots(8)$$

Con las ecuaciones (7) ó (8) se encuentra la fuerza cortante, y por consiguiente la fuerza aplicada a la viga. Ya que generalmente los resultados de dichas ecuaciones variarán un poco debido a errores en el experimento, su promedio es la mejor estimación de la carga.

La técnica utilizada es un método conveniente para determinar directamente la fuerza cortante en cualquier viga con cargas puntuales, ya que en estos casos las variaciones de momento y de deformación son lineales entre las cargas y/o reacciones.

La linealidad de la distribución de deformaciones se puede verificar graficando las deformaciones leídas. Después de trazar una línea recta por esos puntos, la pendiente de la línea  $\Delta\epsilon/\Delta X$ , puede usarse para revisar la carga calculada previamente. Como la viga es de sección uniforme, la gráfica puede representar, además de la distribución de deformaciones, el diagrama de momentos con sólo cambiar la escala.

Conocida la carga por cualquiera de los dos métodos anteriores, se pueden calcular los esfuerzos en un punto (1), por ejemplo, con la siguiente relación:

$$\sigma_1 = \frac{M_1 c}{I} = \frac{6 P X_1}{b t^2} \dots\dots\dots(9)$$

donde:

P = carga determinada (kg)

Aunque también se pueden calcular el esfuerzo en el punto (1) directamente a partir de la deformación, por medio de la Ley de Hooke para esfuerzos uniaxiales:

$$\sigma_1 = E \epsilon_1 \dots\dots\dots(10)$$

Los esfuerzos calculados por las ecuaciones (9) y (10) pueden compararse para verificar las relaciones fundamentales utilizadas en esta práctica.

## PROCEDIMIENTO

### A). Adquisición de Datos.

- Empotrar la viga con la superficie instrumentada en la parte superior.

- Conectar los cables conductores al indicador de deformaciones unitarias. Conviene emplear en esta práctica una unidad de conmutación para facilitar la operación de lectura de deformaciones (Fig. 18, Capítulo I).

- La diferencia de deformaciones que se requieren en las ecuaciones (7) y (8) para determinar el cortante, puede obtenerse directamente con el indicador de deformaciones.

- Ajustar el control del factor de celda del extensómetro y encender el indicador de deformaciones.

- Empleando el control de balance, ajustar el aparato a una lectura cero. Esto permite una indicación directa de la deformación unitaria. En algunos casos la desviación inicial de lectura de un extensómetro en particular impide el mencionado balance en cero; en estos casos conviene ajustar en un valor cómodo en su manejo (+1,000 unidades por ejemplo).

- Aplicar carga puntual (flexionar) en el extremo libre de la viga hasta que se indique una pequeña desviación del cero.

- En caso de contar con una unidad de conmutación, para tomar las lecturas bastará con girar el indicador de canal y tomar lecturas, pero si no se cuenta con dicho equipo se pueden seguir dos procedimientos:

1) Conectar un par de extensómetros, realizar la lectura inicial. Desconectar y tomar la lectura inicial del segundo par de extensómetros. Aplicar la carga y tomar la lectura (final), primero del segundo par de extensómetros (que se dejó conectado) y luego se desconecta y se toma la lectura final del primer par. La diferencia entre las lecturas inicial y final de ambos pares de extensómetros debe ser muy similar, si no igual.



2) Conectar un par de extensómetros, realizar la lectura inicial y a continuación aplicar la carga y tomar la lectura final. Desconectar este par de extensómetros y conectar el otro, realizar la lectura inicial y luego la final aplicando la misma carga que con el primer par.

- El procedimiento descrito da la diferencia de deformaciones en puntos adyacentes a lo largo de la viga, pero no las deformaciones en cada punto. Para obtener las deformaciones individuales se deben conectar los extensómetros uno a la vez, y repetir cualquiera de los procedimientos 1 ó 2 descritos anteriormente, o bien utilizando el conmutador. Se puede iniciar con la viga cargada para la lectura inicial, y descargarla para la lectura final.

#### B) Análisis y Presentación de Datos.

I- Fuerza Cortante a partir de la diferencia de Deformaciones:

- Medir el ancho y espesor de la viga con un micrómetro, y registrar las dimensiones.

- Suponer un módulo de elasticidad  $E = 731,850 \text{ kg/cm}^2$ , y sustituir los datos en las ecuaciones (7) y (8) para obtener dos valores del cortante.

- Registrar los resultados. Promediar los dos valores obtenidos del cortante para estimar la carga aplicada.

#### II- Linealidad de Deformaciones y Momento Flexionante:

- Restar la lectura final de la inicial para los extensómetros individuales, y registrar los resultados. Estos valores representan las deformaciones en los puntos respectivo debido a la carga.

- Marcar los tres puntos en la gráfica de deformación contra distancia al punto de aplicación de la carga.

- Trazar la línea recta que mejor se ajuste a los tres puntos. Registrar la pendiente de la línea y la máxima desviación de cualquier punto a la línea trazada.

- Sustituir la pendiente en las ecuaciones (7) y (8) para tener otra estimación de la carga.

### III- Esfuerzo en un punto.

- Calcular el esfuerzo en el punto (1) con la ecuación (9), utilizando la carga promedio de las dos cargas calculadas anteriormente.

- Suponer  $E = 731,850 \text{ kg/cm}^2$ , y calcular el esfuerzo en el punto (1) directamente de la deformación en ese punto y con la ecuación (10).

- Registrar los esfuerzos calculados y compararlos.

### REPORTE

El alumno debe preparar un breve reporte en el que describa el objetivo de la práctica, material y equipo utilizados, - procedimiento seguido y resultados obtenidos. Incluir la hoja de trabajo con los datos de las lecturas originales, los cálculos necesarios y las gráficas hechas. Comentar las posibles - fuentes de error y su efecto al estimar la carga y el esfuerzo.

Aplicando los conceptos vistos en esta práctica, explicar porqué una viga en cantiliver adecuadamente instrumentada con extensómetros, puede utilizarse como un transductor de carga.

## HOJA DE TRABAJO

- Dimensiones de la Viga:

$b$  = ancho = \_\_\_\_\_ cm

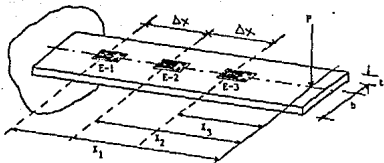
$t$  = espesor = \_\_\_\_\_ cm

$\Delta x$  = separación entre extensómetros = \_\_\_\_\_ cm

$x_3$  = distancia de P a E-3 = \_\_\_\_\_ cm

$x_2$  = distancia de P a E-2 = \_\_\_\_\_ cm

$x_1$  = distancia de P a E-1 = \_\_\_\_\_ cm



- Medición de Deformaciones:

| Diferencia de Deformaciones |                 |               |                   |
|-----------------------------|-----------------|---------------|-------------------|
| Conjunto de Extensómetros   | Lectura inicial | Lectura final | $\Delta \epsilon$ |
| 1-2                         |                 |               |                   |
| 2-3                         |                 |               |                   |

| Deformación en cada punto |                 |               |             |
|---------------------------|-----------------|---------------|-------------|
| Extensómetro              | Lectura inicial | Lectura final | Deformación |
| 1                         |                 |               |             |
| 2                         |                 |               |             |
| 3                         |                 |               |             |

HOJA DE TRABAJO (Continuación)

- Cálculo de la Carga Aplicada P:

a) Con Diferencia de Deformaciones.

$$V_{1-2} = \frac{E b t^3}{6} \left( \frac{\Delta_{1-2}}{\Delta x} \right) = \frac{731,850 ( ) ( )^3 ( )}{6 ( )} = \text{--- kg}$$

$$V_{2-3} = \frac{E b t^3}{6} \left( \frac{\Delta_{2-3}}{\Delta x} \right) = \frac{731,850 ( ) ( )^3 ( )}{6 ( )} = \text{--- kg}$$

$$V_{\text{promedio}} = [V_{1-2} + V_{2-3}] / 2 = \text{--- kg}$$

b) Con la pendiente de la gráfica  $\epsilon - X$ .

$$V_m = \frac{E b t^3}{6} (m) = \frac{731,850 ( ) ( )^3 ( )}{6} = \text{--- kg}$$

- Cálculo del Esfuerzo en el Punto 1:

a) Fórmula de la Flexión.

$$\nabla_1 = \frac{6 P X_1}{b t^3} = \frac{6 ( ) ( )}{( ) ( )^3} = \text{--- kg/cm}^2$$

b) Ley de Hooke.

$$\nabla_1 = E \epsilon_1 = 731,850 ( ) = \text{--- kg/cm}^2$$

- Resumen:

| Carga (P)               | Esfuerzo ( $\nabla_1$ )                |
|-------------------------|--|
| $V_{1-2} =$             | Fórmula de la Flexión:<br>$\nabla_1 =$ |
| $V_{2-3} =$             |  |
| $V_{\text{Promedio}} =$ | Ley de Hooke:<br>$\nabla_1 =$          |
| $V_m =$                 |  |

#### 4.6 PRACTICA 5) ESFUERZOS EN UN PUNTO

##### OBJETIVO

Comparar los resultados de esfuerzo obtenidos a partir de:

- a) Extensómetro longitudinal.
- b) Extensómetros longitudinal y transversal.
- c) Análisis Teórico.

Recordar los conceptos vistos en las prácticas anteriores.

##### INTRODUCCION

En esta práctica se obtendrán los esfuerzos por tres procedimientos diferentes, aplicando los conceptos y experimentos vistos en las prácticas anteriores, así como algunos resultados obtenidos en ellas, como son los valores del módulo de elasticidad,  $E$ , y de la relación de Poisson,  $\nu$ .

##### MATERIAL Y EQUIPO

— Viga de aluminio instrumentada con dos extensómetros, uno en dirección longitudinal y otro en dirección transversal.

- Indicador de deformaciones unitarias.
- Dispositivo de empotramiento.
- Pesas de laboratorio.
- Micrómetro o Vernier.
- Regla graduada o Metro.

## GENERALIDADES

Al medir las deformaciones en un punto de una viga en voladizo, es posible calcular el esfuerzo en ese punto, esto es, realizar un Análisis Experimental de Esfuerzos.

Pero como la viga utilizada en esta práctica es un caso sencillo, se puede analizar Teóricamente, conociendo sus dimensiones y aplicando la fórmula de la flexión para calcular el esfuerzo. Así, por medio de la Ley de Hooke para un estado de esfuerzo uniaxial (en el caso de conocer la deformación longitudinal), o bien para un estado biaxial (con dos extensómetros en el mismo punto), y con la fórmula de la flexión, se pueden calcular y comparar los esfuerzos.

## PRODECIMIENTO

### A) Adquisición de Datos.

- Disponer la viga en voladizo con los extensómetros en la parte superior y del lado del empotramiento.
- Conectar los cables al indicador de deformaciones.
- Medir la distancia del eje del extensómetro al punto de aplicación de la carga.
- Medir el ancho y espesor de la viga.
- Aplicar la carga conocida en el extremo libre de la viga.
- Realizar la lectura de las deformaciones longitudinal,  $\epsilon_x$ , y transversal,  $\epsilon_y$ , sin corregir por sensibilidad transversal. registrar las lecturas.
- Como paso opcional se puede hacer la corrección por sensibilidad transversal (ver Práctica 2).

## B) Análisis y Presentación de Datos.

- Calcular el esfuerzo longitudinal  $\sigma_x$  aplicando solamente el valor de la deformación unitaria longitudinal,  $\epsilon_x$  en la Ley de Hooke para esfuerzos uniaxiales:

$$\sigma_x = E \epsilon_x \quad \dots\dots(1)$$

Aplicar el valor del módulo de elasticidad obtenido en la Práctica 1).

- Con la Ley de Hooke para el estado de esfuerzos biaxial, calcular los esfuerzos longitudinal y transversal. Aplicar el valor de E de la Práctica 1), y el valor de  $\nu$  de la Práctica 2).

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) \quad \dots\dots(2)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) \quad \dots\dots(3)$$

- Con el valor de la carga aplicada, y las dimensiones de la viga, calcular el esfuerzo con la fórmula de la flexión:

$$\sigma_x = \frac{6 P L}{b t^2} \quad \dots\dots(4)$$

## REPORTE

El alumno deberá describir el objetivo de la práctica, el material y equipo utilizado, el procedimiento seguido y los resultados que se obtuvieron. Incluir la hoja de trabajo con las lecturas de las deformaciones y con los cálculos hechos. Comentar las probables fuentes de error y como afectan en los resultados.

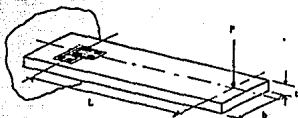
HOJA DE TRABAJO

- Dimensiones de la Viga:

L = longitud = \_\_\_\_\_ cm.

b = ancho = \_\_\_\_\_ cm

t = espesor = \_\_\_\_\_ cm



- Tabulación de Datos:

| Carga | Deformaciones leídas |              | Corrección opcional |              | Valores calculados |              |
|-------|----------------------|--------------|---------------------|--------------|--------------------|--------------|
|       | $\epsilon_x$         | $\epsilon_y$ | $\epsilon_x$        | $\epsilon_y$ | P-1<br>E           | P-2<br>$\nu$ |
|       |                      |              |                     |              |                    |              |

- Cálculo de Esfuerzos:

a) Esfuerzo Uniaxial.

$$\sigma_x = E \epsilon_x = ( \quad ) ( \quad ) = \text{_____ kg/cm}^2$$

b) Esfuerzos Biaxiales.

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) = \frac{( \quad )}{1-( \quad )^2} [( \quad ) + ( \quad ) ( \quad )] = \text{_____ kg/cm}^2$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) = \frac{( \quad )}{1-( \quad )^2} [( \quad ) + ( \quad ) ( \quad )] = \text{_____ kg/cm}^2$$

c) Fórmula de la Flexión.

$$\sigma_x = \frac{6 P L}{b t^2} = \frac{6 ( \quad ) ( \quad )}{( \quad ) ( \quad )^2} = \text{_____ kg/cm}^2$$

- Comparación de Resultados:

| Experimental |                              | Analítico    |
|--------------|------------------------------|--------------|
| Uniaxial     | Biaxial                      |              |
| $\sigma_x =$ | $\sigma_x =$<br>$\sigma_y =$ | $\sigma_x =$ |



C A P I T U L O   V

M A N U A L   D E   P R A C T I C A S

P A R A   A N A L I S I S   E S T R U C T U R A L

## 5.1 RECOMENDACIONES GENERALES

Para la serie de prácticas propuestas para Análisis Estructural, son válidas todas las recomendaciones generales hechas en el Capítulo 4 para las prácticas de Mecánica de Materiales, además de las siguientes:

- El alumno, además de estar familiarizado con la teoría y conceptos relativos a la obtención de deformaciones, así como el conocimiento previo para utilizar el indicador de deformaciones, y a partir de ellas calcular esfuerzos y momentos, debe conocer algunos métodos para la solución de marcos, es decir, ser capaz de realizar un Análisis Estructural Teórico.

- Es recomendable que al hacer el Análisis Teórico se utilicen varios métodos (Exactos y/o Aproximados) con la finalidad de comparar resultados y concluir cual es el más preciso en relación con el Análisis Experimental, y ver si el modelo se comporta realmente siguiendo las suposiciones de los métodos de análisis.

- El modelo del marco propuesto para estas prácticas tiene una gran variedad de combinaciones para analizar, y aunque en estas prácticas se propone un número limitado de casos, es posible implementar nuevas prácticas siguiendo lineamientos similares a los planteados aquí.

- Así mismo, es posible utilizar modelos de marcos más complejos, ya sea aumentando el número de niveles y/o de crujeas. De esta manera se pueden estudiar otros efectos, por ejemplo se podría ilustrar el comportamiento del marco ante un sismo y observar el periodo de vibración o cómo afecta la rigidez o la asimetría, por mencionar solo algunos casos. Este tipo de prácticas serían muy útiles durante los cursos de Ingeniería Sísmica o similares, en los que se manejan conceptos que serían más comprensibles si se pueden observar, aunque sea con modelos

- Para estas prácticas se debe recordar que es difícil lograr resultados exactos que coincidan con los de un Análisis Teórico, ya que los resultados están sujetos a pequeñas variaciones debidas, principalmente, al equipo e instrumentación y a su manejo. Aún así, en condiciones normales se obtiene un porcentaje de error de  $\pm 5$ , lo cual es bastante aceptable.

Para conocer el porcentaje de error  $E(\%)$  que se obtiene en los resultados, se utiliza la siguiente relación:

$$E(\%) = \frac{R_{\text{experimental}} - R_{\text{teorico}}}{R_{\text{teorico}}} \times 100 \quad \dots(1)$$

En la cual se considera el Resultado Teórico como el correcto, ya que los casos analizados en las prácticas son sencillos y por lo mismo predecibles analíticamente. En cambio los Resultados Experimentales pueden variar debido a errores en el manejo del equipo o a otros factores que modifiquen la lectura de las deformaciones. La relación (1) permite conocer el porcentaje de error, incluyendo si este es positivo o negativo.

- En estas prácticas se requiere el uso de un aparato indicador de deformaciones unitarias, pero como se leerán las deformaciones en más de un extensómetro, es conveniente contar también con un equipo conmutador para agilizar las lecturas y disminuir la probabilidad de errores debidos al constante encendido y apagado del aparato indicador, así como a la conexión y desconexión de cables.

## 5.2 INTRODUCCION

Dado que las prácticas propuestas para Análisis Estructural siguen un planteamiento muy similar, y como la teoría básica necesaria para realizarlas es común a todas ellas, tanto la Introducción, como las Generalidades, se harán de manera global, y no en particular para cada práctica, como fue el caso de las prácticas de Mecánica de Materiales.

La versatilidad del modelo del marco utilizado en estas prácticas, permite tres opciones básicas para las situaciones a analizar:

- Variación de las condiciones de apoyo (Fig. 2.1a).
- Variación de las condiciones de carga (Fig. 2.1b).
- Variación del punto instrumentados, o punto de medición (Fig. 2.1c).

Y dichas opciones pueden combinarse originando un sinúmero de situaciones (Fig. 2.1d).

El propósito de estos experimentos es el entender como se comportan los elementos de un marco en diferentes situaciones, y comprobar que los métodos de análisis y sus hipótesis se cumplen para cada caso experimental.

En estas prácticas se utilizará un marco de aluminio el cual será sometido a diferentes sollicitaciones de carga en cada práctica, y el cual estará instrumentado con extensómetros ubicados en determinados puntos. Se leerán las deformaciones y a partir de ellas se calculará el Momento que está originando la carga aplicada en la estructura. A continuación se compararán estos Momentos Experimentales con los obtenidos a partir de un Análisis Teórico, y de esta comparación se podrá observar si la estructura se comporta como se supone teóricamente.

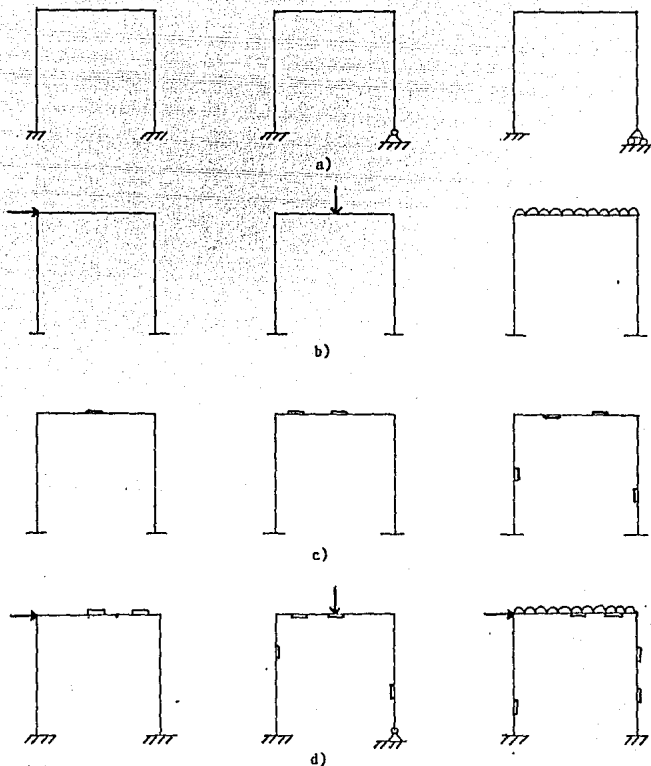


Fig. 2.1 Ejemplos de condiciones para analizar un marco rígido.

### 5.3 GENERALIDADES

El Análisis Experimental se basa en la obtención de las deformaciones unitarias para a partir de ellas calcular esfuerzos y momentos, por lo que este análisis no es del todo experimental, sino conjuga la obtención de datos experimentales con suposiciones y cálculos teóricos.

Para la obtención experimental del Momento es necesario - partir de dos relaciones conocidas la Ley de Hooke:

$$\nabla = E \epsilon \quad \dots\dots\dots(2)$$

en donde:

- $\nabla$  = esfuerzo (kg/cm<sup>2</sup>)
- E = módulo de elasticidad (kg/cm<sup>2</sup>)
- $\epsilon$  = deformación unitaria (cm/cm)

Y la fórmula de la Flexión:

$$\nabla = \frac{M}{S} = \frac{M c}{I} \quad \dots\dots\dots(3)$$

donde:

- M = momento flexionante (kg cm)
- S = módulo de sección (cm<sup>3</sup>)
- c = distancia del eje neutro a la fibra más alejada (cm)
- I = momento de inercia (cm<sup>4</sup>)

Conocidas las dimensiones de las columnas y vigas (de sección rectangular) que forman el marco, se sabe que:

$$I = \frac{b h^3}{12} \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$c = \frac{h}{2} \quad \dots\dots\dots(5)$$

en donde:

b = base (cm)

h = altura (cm)

Por lo que al sustituir (4) y (5) en la ecuación (3) se obtiene que:

$$\delta = \frac{6 M}{b h^2} \dots\dots\dots(6)$$

Y al igualar las ecuaciones (2) y (6), se encuentra que se puede calcular el momento M a partir de las dimensiones conocidas (medibles) de las secciones, y de las deformaciones unitarias (también medibles, por medio de extensómetros):

$$M = \frac{E E b h^2}{6} \dots\dots\dots(7)$$

El módulo de elasticidad E utilizado en estas prácticas, se puede tomar con un valor aproximado de  $0.73 \times 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>, ya que el modelo del marco es de aluminio, o bien, si se realizó con anterioridad la Práctica 1 de Mecánica de Materiales, el valor de E obtenido en ella.

Ahora bien, del Análisis Teórico de la estructura se obtienen los momentos flexionantes en los nudos del marco. Con ellos se pueden trazar los diagramas de momento, y así calcular el momento en un punto cualquiera del marco. Esto es necesario debido a que la Extensometría permite conocer experimentalmente los momentos en los puntos instrumentados, pero estos no necesariamente se localizarán en los nudos o en sus proximidades.

#### 5.4 PRACTICA 1) MOMENTO FLEXIONANTE AL CENTRO DEL CLARO

##### OBJETIVO

Comprobar que el Momento Flexionante en el centro del claro de un marco simétrico sometido a carga horizontal (similar a un cortante sísmico) es cero, y que va aumentando al acercarse a los nudos empotrados, en donde es máximo.

##### MATERIAL Y EQUIPO

- Modelo de marco de aluminio instrumentado con tres extensómetros, uno al centro del claro de la trabe, y los otros a diferentes distancias (Fig. 4.1a).
- Indicador de deformaciones unitarias.
- Marco para carga horizontal (Fig. 4.1b).
- Pesas de laboratorio.
- Micrómetro o Vernier.
- Regla graduada o Metro.

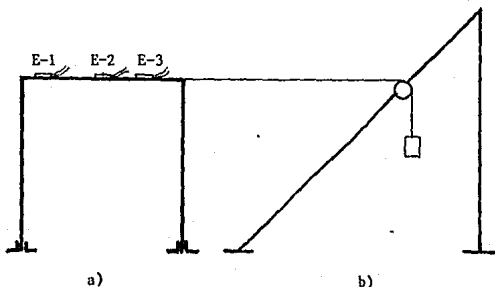


Fig. 4.1



## PROCEDIMIENTO

### A) Adquisición de Datos.

- Tomar las dimensiones de la sección transversal de la viga: base (ancho) y altura (espesor) con un vernier.
- Medir las distancias a las que están localizados los ex tensómetros.
- Empotrar el modelo del marco de aluminio en la base del marco para carga.
- Conectar los extensómetros al indicador de deformaciones unitarias.
- Aplicar a la trabe (viga) una fuerza horizontal aproximada de 0.5 kg. Registrar la lectura de la deformación para cada extensómetro.
- Repetir el paso anterior para diferentes cargas, por ejemplo 0.8, 1.0, 1.2 kg.

### B) Análisis y Presentación de Datos.

- Sustituir las dimensiones de la viga, la deformación unitaria y el módulo de elasticidad en la ecuación (7) para calcular el momento en cada punto instrumentado, y para cada carga.
- Registrar los momentos obtenidos en la hoja de trabajo.
- Con los resultados del momento trazar el diagrama de mo mentos de la trabe para cada carga aplicada.
- Resolver en forma analítica el marco, por ejemplo por el Método del Portal, para cada fuerza horizontal aplicada.
- Trazar los diagramas de momento correspondientes.
- Comparar resultados.

## REPORTE

El alumno debe preparar un breve reporte describiendo con sus propias palabras el objetivo del experimento, el equipo utilizado y el procedimiento seguido. Establecer los resultados obtenidos, incluyendo la tabla de datos experimentales, los resultados del análisis teórico y los diagramas de momento. Comentar las probables fuentes de error durante el experimento y su efecto relativo a los resultados experimentales comparados con los teóricos. Calcular el porcentaje de error. Expresar sus conclusiones.

## HOJA DE TRABAJO

Dimensiones de la Viga:

L = longitud = \_\_\_\_\_ cm

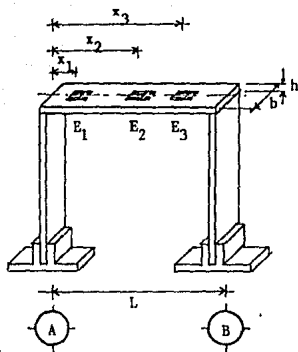
b = base = \_\_\_\_\_ cm

h = altura = \_\_\_\_\_ cm

$x_1$  = distancia del nudo A al  $E_1$  = \_\_\_\_\_ cm

$x_2$  = L/2 = \_\_\_\_\_ cm

$x_3$  = distancia del nudo A al  $E_3$  = \_\_\_\_\_ cm



Cálculo del Momento Experimental:

$$n = \frac{E b h^3}{6} = \frac{(\quad)(\quad)(\quad)^3}{6} = \text{_____ kg/cm}^2$$

$$M_{\text{Experimental}} = \epsilon_i (n)$$

$$\text{Error} = E(\%) = \frac{M_{\text{Experimental}} - M_{\text{Teórico}}}{M_{\text{teórico}}} \times 100$$

Tabulación de Datos y Resultados:

| Extensómetro | Carga | ε | M <sub>Experimental</sub> | M <sub>Teórico</sub> | E(%) |
|--------------|-------|---|---------------------------|----------------------|------|
| E-1          |       |   |                           |                      |      |
| E-2          |       |   |                           | 0                    |      |
| E-3          |       |   |                           |                      |      |
| E-1          |       |   |                           |                      |      |
| E-2          |       |   |                           | 0                    |      |
| E-3          |       |   |                           |                      |      |
| E-1          |       |   |                           |                      |      |
| E-2          |       |   |                           | 0                    |      |
| E-3          |       |   |                           |                      |      |

## 5.5 PRACTICA 2) APOYO ARTICULADO Y APOYO EMPOTRADO

### OBJETIVO

Comprobar que el cambio en un apoyo (de empotramiento a - articulación) ocasiona cambios en el comportamiento de la estructura, es decir, en los momentos flexionantes.

### MATERIAL Y EQUIPO

- Marco de aluminio instrumentado con varios extensómetros, tanto en columnas como en la trabe. (Fig. 5.1)
- Indicador de deformaciones unitarias.
- Barra para carga uniformemente repartida de aproximadamente 1.0 kg.
- Micrómetro o Vernier.
- Regla graduada o Metro.

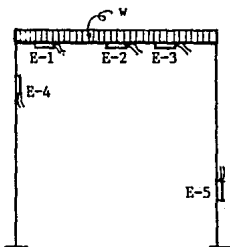


Fig. 5.1

## PROCEDIMIENTO

### A) Adquisición de Datos.

- Tomar las dimensiones del marco, y ubicar los puntos - instrumentados.
- Colocar el marco en la base, empotrando los apoyos.
- Aplicar la carga repartida sobre la trabe del marco y registrar la deformación de cada punto instrumentado.
- Descargar el marco y desempotrar uno de los apoyos dejándolo articulado.
- Aplicar la carga de nuevo y registrar las deformaciones.

### B) Análisis y Presentación de Datos.

- Calcular el momento flexionante en cada punto instrumentado, en ambos casos, sustituyendo valores en la siguiente ecuación:

$$M = \frac{C E b h^3}{6}$$

- Registrar los valores de los momentos calculados.
- Obtener analíticamente los momentos flexionantes.
- Trazar los diagramas de momentos. Comparar los momentos de los mismos puntos para las dos condiciones de apoyo observadas.

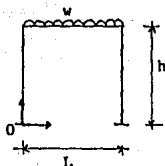
## REPORTE

El alumno debe preparar un breve reporte describiendo el objetivo del experimento, el equipo y el procedimiento. Incluir la hoja de trabajo con las deformaciones obtenidas, los cálculos hechos y los resultados. Comentar las probables fuentes de error y como afectan en los resultados. Comparar los resultados para las dos condiciones de apoyos.

## HOJA DE TRABAJO

- Dimensiones del Marco:

$h_{\text{columna}} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}$   
 $L_{\text{trabe}} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}$   
 sección de la trabe =  $\underline{\hspace{2cm}} \text{ cm} \times \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}$   
 sección de la columna =  $\underline{\hspace{2cm}} \text{ cm} \times \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}$



$x_1$  = distancia del origen a un extensómetro ( $E_1$ )

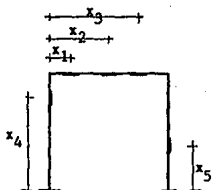
$x_1 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}$

$x_2 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}$

$x_3 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}$

$x_4 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}$

$x_5 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}$



- Carga Aplicada:

Carga aplicada =  $w = \underline{\hspace{2cm}} \text{ kg/cm}$

- Cálculo del Momento Experimental:

$$n = \frac{E b h^3}{6} = \frac{(\quad)(\quad)(\quad)^3}{6} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ kg/cm}^2$$

$$M_{\text{Experimental}} = \epsilon_i (n)$$

- Cálculo del Error (%):

$$\text{Error} = E(\%) = \frac{M_{\text{Experimental}} - M_{\text{Teórico}}}{M_{\text{Teórico}}} \times 100$$

HOJA DE TRABAJO (Continuación)

- Tabulación de Datos y Resultados:

a) Doble  
Empotramiento.



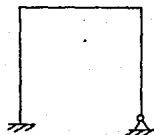
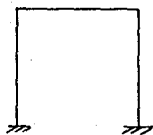
| Extensómetro | $\epsilon$ | $M_{\text{Experimental}}$ | $M_{\text{Teórico}}$ | $E(x)$ |
|--------------|------------|---------------------------|----------------------|--------|
| E-1          |            |                           |                      |        |
| E-2          |            |                           |                      |        |
| E-3          |            |                           |                      |        |
| E-4          |            |                           |                      |        |
| E-5          |            |                           |                      |        |

b) Empotado-  
Articulado.



| Extensómetro | $\epsilon$ | $M_{\text{Experimental}}$ | $M_{\text{Teórico}}$ | $E(x)$ |
|--------------|------------|---------------------------|----------------------|--------|
| E-1          |            |                           |                      |        |
| E-2          |            |                           |                      |        |
| E-3          |            |                           |                      |        |
| E-4          |            |                           |                      |        |
| E-5          |            |                           |                      |        |

- Diagramas de Momentos (comparativos):



## 5.6 PRACTICA 3) CARGA PUNTUAL SIMETRICA Y ASIMETRICA

### OBJETIVO

Observar como cambia el comportamiento de un marco cuando se aplica una carga puntual al centro del claro de la trabe, y cuando la carga no está aplicada al centro.

### MATERIAL Y EQUIPO

- Marco de aluminio instrumentado con tres extensómetros en la trabe, uno al centro del claro, los otros dos a diferentes distancias, y dos en cada columna en diferentes puntos. - (Fig. 6.1)

- Indicador de deformaciones unitarias.
- Pesas de laboratorio.
- Micrómetro o Vernier.
- Regla graduada o Metro.

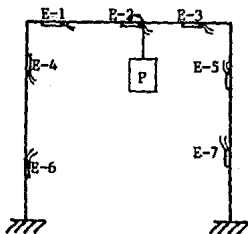


Fig. 6.1



## PROCEDIMIENTO

### A) Adquisición de Datos.

- Medir el marco y localizar los extensómetros.
- Empotrar el modelo del marco en la base.
- Aplicar una carga puntual al centro del claro de la trabe y registrar las deformaciones en cada punto instrumentado.
- Repetir el paso anterior aplicando la misma carga pero en otro punto de la trabe.

### B) Análisis y Presentación de Datos.

- Calcular para las dos solicitaciones de carga, el momento flexionante en cada punto instrumentado, sustituyendo valores en la siguiente ecuación:

$$M = \frac{E E b h^3}{6}$$

- Registrar los momentos experimentales calculados y trazar los diagramas de momento correspondientes.
- Hacer el análisis teórico del marco para las dos solicitaciones de carga y calcular los momentos en los puntos instrumentados. Trazar los diagramas de momento.
- Comparar los diagramas de momentos y los momentos.

## REPORTE

El alumno deberá describir el objetivo de la práctica, el equipo utilizado, el procedimiento y los resultados. Incluir - los valores experimentales obtenidos, los cálculos necesarios y los diagramas comparativos de momento. Comentar las probables fuentes de error y como afectan en los resultados. Expresar las conclusiones respecto al cambio que ocasiona el sitio de aplicación de la carga.

## HOJA DE TRABAJO

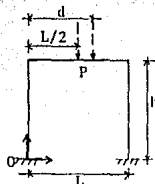
Dimensiones del Marco:

$h$  = altura = \_\_\_\_\_ cm

$L$  = longitud = \_\_\_\_\_ cm

sección de la trabe = \_\_\_\_\_ cm x \_\_\_\_\_ cm

sección de las columnas = \_\_\_\_\_ cm x \_\_\_\_\_ cm



Localización de los Extensómetros y Carga Aplicada:

$x_1$  = distancia del origen al Extensómetro<sub>1</sub> ( $E_1$ )

$x_1$  = \_\_\_\_\_ cm

$x_2$  = \_\_\_\_\_ cm

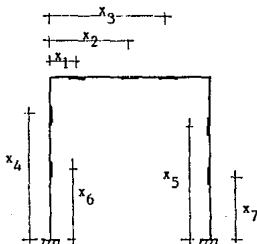
$x_3$  = \_\_\_\_\_ cm

$x_4$  = \_\_\_\_\_ cm

$x_5$  = \_\_\_\_\_ cm

$x_6$  = \_\_\_\_\_ cm

$x_7$  = \_\_\_\_\_ cm



Carga Puntual Aplicada =  $P$  = \_\_\_\_\_ kg

Punto de aplicación de la carga asimétrica =  $d$  = \_\_\_\_\_ cm

Cálculo del Momento Experimental:

$$n = \frac{E b h^3}{6} = \frac{(\quad)(\quad)(\quad)^3}{6} = \text{_____ kg/cm}^2$$

$M_{\text{Experimental}} =$  (n)

Cálculo del Error (%):

$$\text{Error} = E(\%) = \frac{M_{\text{Experimental}} - M_{\text{Teórico}}}{M_{\text{Teórico}}} \times 100$$

- Tabulación de Datos y Resultados:

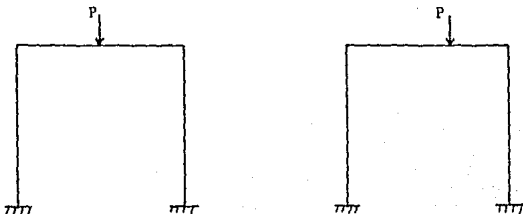
a) Carga Puntual al Centro del Claro.

| Extensómetro | $\epsilon$ | $M_{\text{Experimental}}$ | $M_{\text{Teórico}}$ | E(%) |
|--------------|------------|---------------------------|----------------------|------|
| E-1          |            |                           |                      |      |
| E-2          |            |                           |                      |      |
| E-3          |            |                           |                      |      |
| E-4          |            |                           |                      |      |
| E-5          |            |                           |                      |      |
| E-6          |            |                           |                      |      |
| E-7          |            |                           |                      |      |

b) Carga Puntual en Cualquier Punto.

| Extensómetro |  | $M_{\text{Experimental}}$ | $M_{\text{Teórico}}$ | E(%) |
|--------------|--|---------------------------|----------------------|------|
| E-1          |  |                           |                      |      |
| E-2          |  |                           |                      |      |
| E-3          |  |                           |                      |      |
| E-4          |  |                           |                      |      |
| E-5          |  |                           |                      |      |
| E-6          |  |                           |                      |      |
| E-7          |  |                           |                      |      |

- Diagramas de Momento (comparativos):



A P E N D I C E

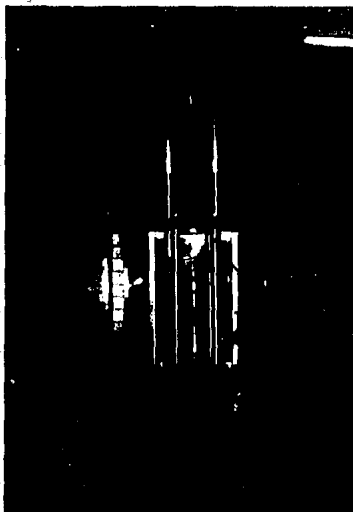
I L U S T R A C I O N   D E L   E Q U I P O

APENDICE A



Viga de aluminio instrumentada en cantiliver  
e indicador digital de deformaciones unitarias.

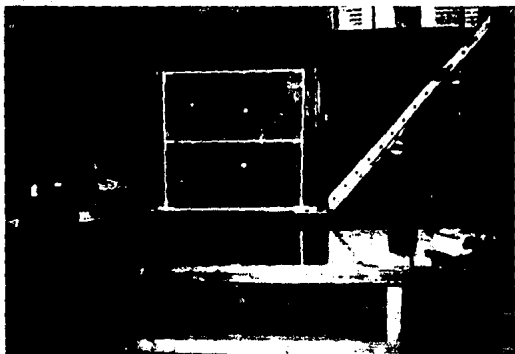
## APENDICE B



Probeta instrumentada con dos extensómetros, uno en posición longitudinal y el otro transversal, para el cálculo de la relación de Poisson.

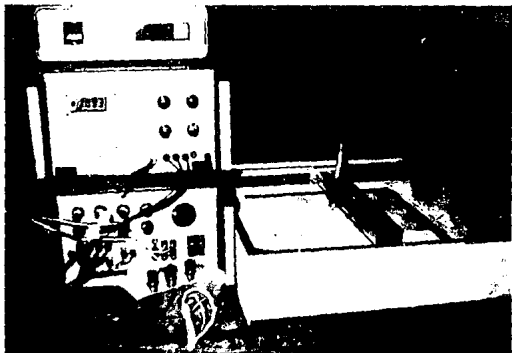
Para conocer la carga que se aplica a la probeta se utiliza un Transductor de Carga que funciona con extensómetros de resistencia.

APENDICE C



Modelo de marco de aluminio instrumentado con extensómetros de resistencia, marco de carga, aparato indicador de deformaciones unitarias y conmutador.

APENDICE D



Equipo digital indicador de deformaciones unitarias,  
conmutador y graficadora x-y (P-C).



APENDICE E



Modelo de estructura reticular en mesa vibratoria instrumentada con extensómetro de resistencia, para medición de esfuerzos dinámicos.

## CONCLUSIONES

En la práctica de la Ingeniería Civil no siempre se pueden resolver los problemas del Análisis de Esfuerzos por medio de procedimientos analíticos, ya que en situaciones poco ideales, por ejemplo para el caso de una trabe de sección variable con cargas aplicadas fuera de los ejes en varios puntos, el análisis resulta complejo y probablemente inexacto. En estos casos es cuando se requieren medir "directamente" los esfuerzos, esto es midiendo las deformaciones unitarias y con ellas inferir los esfuerzos. De aquí la importancia de conocer el principal método de Análisis Experimental de Esfuerzos: la Extensometría Eléctrica de Resistencia.

El Análisis Experimental de Esfuerzos se lleva a cabo midiendo la deformación del espécimen sometido a carga, para de allí inferir los esfuerzos locales. La medición de la deformación es solo una parte de la solución del problema, ya que el trabajo analítico que se debe aplicar a los datos experimentales para poder determinar los esfuerzos, es de igual importancia. Por esto es necesario tener el conocimiento teórico suficiente que nos permita el manejo y uso de los resultados de mediciones experimentales.

Utilizando un sencillo modelo de trabe instrumentado, se pueden explicar y observar fácilmente algunos conceptos básicos de Mecánica de Materiales. Del mismo modo, con modelos de marcos se puede entender mejor el comportamiento de las estructuras, y se puede comprobar si las suposiciones hechas para los diferentes métodos de Análisis de Estructuras son válidas, así como observar cuál de ellos se aproxima más al comportamiento real del marco, es decir, a los resultados experimentales obtenidos del modelo instrumentado.

Es interesante el observar que las aplicaciones didácticas de los extensómetros, por medio de experimentos (prácticas), son de gran utilidad dada su sencillez y claridad, además de su versatilidad, ya que se pueden implementar muchas prácticas más, - llegando inclusive a utilizar marcos instrumentados para observar y analizar fenómenos estudiados en materias tales como Ingeniería Sísmica.

Generalmente, en los cursos de Ingeniería se da mayor atención a la formación y al desarrollo de la habilidad en el análisis teórico de los problemas, y se olvidan los métodos experimentales. Es de gran importancia el conocimiento de estos métodos, y el llevar a cabo las prácticas propuestas en este trabajo sirve como una pequeña introducción a dichos métodos.

Es necesario despertar el interés por las investigaciones experimentales, lo cual no significa tan sólo el realizar mediciones con exactitud, sino el saber interpretar y utilizar los - resultados de dichas mediciones. El ingeniero debe estar familiarizado tanto con los métodos de medición, como con las técnicas de análisis para la interpretación de los datos experimentales. El estudio de los métodos experimentales es una extensión necesaria de las materias analíticas. El conocimiento de los métodos para verificar el trabajo analítico sensibiliza las teorías, y un entendimiento claro de las dificultades de las mediciones experimentales crea una actitud cuidadosa en el teórico.

Las técnicas experimentales han evolucionado a la par del desarrollo de dispositivos electrónicos destinados a detectar - parámetros físicos primarios, obteniéndose cada vez mayor precisión en las mediciones de cantidades físicas. Este desarrollo continuará debido a la demanda de medición y control para una - gran variedad de aplicaciones, por lo que el ingeniero debe estar familiarizado con los principios básicos que rigen el uso - de la instrumentación.

## REFERENCIAS

- 1] GERE, J.M. y TIMOSHENKO S.  
"Mecánica de Materiales"  
Grupo Editorial Iberoamérica  
México, 1986  
Capítulo 1, pág. 6,7
- 2] GERE, J.M. y TIMOSHENKO S.  
"Mecánica de Materiales"  
Grupo Editorial Iberoamérica  
México, 1986  
Capítulo 1, pág. 26, 27
- 3] DALLY, J.W. y RILEY, W.F.  
"Experimental Stress Analysis"  
Mc Graw Hill  
New York, 1978  
Capítulo 10, pág. 328, 329
- 4] MC CORNAC, J.C.  
"Análisis Estructural"  
HARLA  
México, 1983  
Capítulo 24, pág. 511, 512

## BIBLIOGRAFIA

- 1) HOLMAN, J.P.  
"Métodos Experimentales para Ingenieros"  
Mc Graw Hill  
México, 1990
- 2) DALLY, J.W. y RILEY, W.F.  
"Experimental Stress Analysis"  
Mc Graw Hill  
New York, 1978
- 3) DOVE, R.C. y ADAMS, P.H.  
"Experimental Stress Analysis and motion Measurement"  
Charles E. Merrill Books  
Ohio, 1964
- 4) PERRY, C.C. y LISSNER, H.R.  
"The Strain Gage Primer"  
Mc Graw Hill  
New York, 1962
- 5) POPOV, E.P.  
"Introducción a la Mecánica de Sólidos"  
LIMUSA  
México, 1982
- 6) GERE, J.M. y TIMOSHENKO, S.  
"Mecánica de Materiales"  
Grupo Editorial Iberoamérica  
México, 1986

- 7) TUPPENY, W.H. y KOBAYASHI, A.S.  
"Análisis Experimental de Tensiones"  
Ediciones URMO  
España, 1970
- 8) MC CORMAC, J.C.  
"Análisis Estructural"  
HARLA  
México, 1983
- 9) OLVERA, A.  
"Análisis de Estructuras"  
Compañía Editorial Continental, S.A.  
México, 1972
- 10) LINEBACK, L.D.  
"Strain Gage meets computer in the Teaching Laboratory"  
Measurements Group, Education Division  
U.S.A., 1985
- 11) "Manual on Experimental Stress Analysis"  
Society for Experimental Stress Analysis  
U.S.A., 1965
- 12) "Diseño y Fabricación de Transductores de Carga  
de baja y mediana capacidad"  
Gabriel Gallo Ortiz, Proyecto de Investigación  
884901, DEPI-IPN, 1989