

00384



Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

División de Estudios de Posgrado

**3 - VARIETADES NO ORIENTABLES
Y CUBIERTAS RAMIFICADAS**

T E S I S

Que para obtener el grado académico de:

DOCTOR EN CIENCIAS

(Matemáticas)

P r e s e n t a :

Víctor Manuel Núñez Hernández

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Francisco Javier González Acuña

México, D. F.

1993

**TESIS CON
FALLA DE CUBIERTA**



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

CONTENIDO

Introducción	1
§ 1. Preliminares algebraicos	5
§ 2. Variedades de Seifert	16
§ 3. El homomorfismo $\beta w_1(M)$ para M variedad de Seifert	26
§ 4. Fibraciones sobre S^1	44
§ 5. Superficies de Whitney en variedades de Seifert	58
§ 6. Cubiertas dobles	65
§ 7. Variedades de Seifert que son recubridores cíclicos de dos hojas	77
Referencias	94

INTRODUCCIÓN.

En [Montesinos 2, Hilden] se demuestra que toda 3-variedad orientable es cubierta ramificada de tres hojas sobre S^3 . Una pregunta natural es ¿cuáles 3-variedades orientables son cubiertas ramificadas dobles de S^3 ?

En [Montesinos 1] se da una respuesta a esta pregunta para variedades de Seifert salvo una cuestión que posteriormente [Tollefson] responde afirmativamente, dando así una lista completa de las 3-variedades de Seifert que son cubiertas dobles ramificadas de S^3 .

En [Berstein-Edmonds] se demuestra que toda 3-variedad no orientable es cubierta ramificada de a lo más seis hojas de $P^2 \times S^1$, distinguiendo dos casos:

i) Si $\beta w_1(M) = 0$, entonces M es cubierta ramificada de tres hojas de $S^2 \otimes S^1$ y siendo $S^2 \otimes S^1$ un cubriente doble de $P^2 \times S^1$, se obtiene la cubierta deseada.

ii) Si $\beta w_1(M) \neq 0$, entonces M es cubierta ramificada de tres hojas de $P^2 \times S^1$.

Surge también la pregunta natural ¿cuáles 3-variedades no orientables son cubiertas ramificadas dobles de $S^2 \otimes S^1$ y cuáles 3-variedades no orientables son cubiertas ramificadas dobles de $P^2 \times S^1$?

En este trabajo (§ 7.) se obtiene :

i) Una lista de las variedades de Seifert no orientables que no admiten una fibrición sobre S^1 que son cubiertas dobles de $S^2 \otimes S^1$.

ii) Una lista de las variedades de Seifert no orientables que no admiten una fibrición sobre S^1 que son cubiertas dobles de $P^2 \times S^1$.

y como aplicacón de las mismas técnicas

iii) Una lista de las variedades de Seifert que no admiten una fibrición sobre S^1 que son cubiertas dobles de $S^2 \times S^1$.

Es de subrayarse la técnica empleada en este trabajo que sugiere un modo de ataque general para los problemas en 3-variedades no orientables. Vagamente descrito, es el siguiente procedimiento:

Si M es una 3-variedad no orientable, se encuentra $F^2 \subset M$ una superficie de Stiefel-Whitney (§ 1.) conveniente. Recortando a M a lo largo de F , se obtiene una variedad \hat{M} orientable y con frontera. Se elige una 3-variedad orientable V tal que $\partial V \cong \partial \hat{M}$ y uniendo se obtiene $M^* = \hat{M} \cup V$ una 3-variedad orientable cerrada. Se aplica entonces algùn teorema para variedades orientables en M^* y deshaciendo los cambios se obtiene un teorema para la M original.

Como ilustracón de esto, mencionamos que un modo de proceder frecuente para

estudiar una 3-variedad no orientable M , es estudiar su doble cubierta de orientación \tilde{M} y se trata de rescatar algunas de las propiedades de \tilde{M} para M . Ahora la doble cubierta de orientación de M se obtiene de dos copias de la variedad \tilde{M} pegadas adecuadamente, donde \tilde{M} resulta de recortar a M a lo largo de una superficie de Stiefel-Whitney.

Así en este trabajo se encuentra una superficie de Whitney muy simple para cada variedad de Seifert no orientable (§ 5.), se recorta la variedad y se cierra con toros sólidos para obtener una variedad de Seifert orientable. Después de salvar los detalles técnicos necesarios en la § 6. y aplicando el teorema de [Montesinos 1, Tollefson], se obtienen los resultados principales en la § 7.

Este trabajo está estructurado de la manera siguiente:

En la § 1. se estudian cuestiones técnicas con respecto a las clases de Stiefel-Whitney y su relación con las cubiertas ramificadas de las variedades de dimensión 3. Se define también el importante concepto de superficie de Stiefel-Whitney.

La § 2. está dedicada a uniformar la notación relacionada con las variedades de Seifert.

En la § 3. estudiando el primer grupo de homología se dan condiciones necesarias y suficientes, en términos de los invariantes de Seifert, para que una variedad de Seifert M satisfaga $\beta w_1(M) = 0$.

En la § 4. se estudian las variedades de Seifert que admiten una fibración sobre S^1 como una aplicación de la herramienta desarrollada en la § 3.

En la § 5. se construyen explícitamente superficies de Whitney convenientes y simples para las variedades de Seifert no orientables.

En la § 6. se prueban teoremas generales acerca de las cubiertas ramificadas dobles de $S^2 \tilde{\times} S^1$ y de $P^2 \times S^1$. En esta sección se desarrollan las herramientas principales de este trabajo. Varios de los resultados de esta sección son interesantes por sí mismos.

Finalmente en la § 7. se dan listas de las variedades de Seifert genéricas que son cubiertas ramificadas dobles de $S^2 \times S^1$, de $S^2 \otimes S^1$ y de $P^2 \times S^1$ (Teoremas 7.7, 7.8 y 7.9).

§1. PRELIMINARES ALGEBRAICOS.

En esta sección revisaremos algunas de las propiedades de las clases de Stiefel-Whitney para las 3-variedades. Un tratamiento bellísimo de este tema se encuentra en [Milnor-Stasheff].

La letra I denotará siempre a un intervalo cerrado y muy frecuentemente $I = [0, 1]$ o bien $I = [-1, 1]$.

DEFINICIÓN 1.1. Sean $\xi = \pi : E(\xi) \rightarrow B(\xi)$ un haz vectorial y

$$w_i(\xi) \in H^i(B(\xi); Z_2), \quad i \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

una sucesión de clases de cohomología.

Esta sucesión se llama la sucesión de *clases de Stiefel-Whitney de ξ* si satisface los siguientes axiomas:

Axioma 1. $w_0(\xi) = 1 \in H^0(B(\xi); Z_2)$ y $w_i(\xi) = 0 \in H^i(B(\xi); Z_2)$ para $i > n$, donde ξ es un n -haz vectorial.

Axioma 2. Naturalidad. Si $f : B(\xi) \rightarrow B(\eta)$ está cubierta por un mapeo de haces de ξ a η , entonces

$$w_i(\xi) = f^* w_i(\eta).$$

Axioma 3. El teorema del producto de Whitney. Si ξ y η son haces vectoriales sobre el mismo espacio base, entonces

$$w_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{i=0}^k w_i(\xi) \cdot w_{k-i}(\eta).$$

Axioma 4. Para el haz canónico lineal γ_1^1 sobre la circunferencia P^1 , la primera clase de Stiefel-Whitney $w_1(\gamma_1^1)$ es distinta de cero.

DEFINICIÓN 1.2. Si τ_M es el haz tangente de la variedad M , escribimos $w_k(M) := w_k(\tau_M)$.

OBSERVACIÓN 1.1. Por el Teorema de Coeficientes Universales se tiene un isomorfismo natural $H^1(X; Z_2) \cong Hom(H_1(X), Z_2)$. Siempre que no se preste a confusión consideraremos idénticos a estos dos grupos, así que será frecuente que sin previo aviso consideremos a los elementos del primer grupo de cohomología como homomorfismos.

LEMA 1.1. Si $M\bar{o}$ es la cinta de Möbius, entonces $w_1(M\bar{o})[P^1] \neq 0$, donde $P^1 \hookrightarrow M\bar{o}$ es el ánimo de $M\bar{o}$ y cuya clase $[P^1]$ genera a $H_1(M\bar{o})$.

Demostración. Podemos considerar a $M\bar{o}$ como el cociente $I \times I / \sim$ donde la identificación es $(-1, m) \sim (1, -m)$ y el intervalo $I = [-1, 1]$. Sea $\nu = \pi : E(\nu) \rightarrow M\bar{o}$ el haz normal a $M\bar{o}$ en R^3 . Podemos identificar a $E(\nu)$ con una vecindad regular de $M\bar{o}$ en R^3 , es decir, $E(\nu) \cong ((I \times I) \times I) / \sim$, donde la identificación es $((-1, m_2), m_3) \sim ((1, -m_2), -m_3)$, y la proyección $\pi[(x, y), z] = [x, y]$. Así que si $i : P^1 \hookrightarrow M\bar{o}$ es el

ánima, entonces P^1 corresponde a los puntos de la forma $\{(0, x), 0\}$. Los puntos de la forma $\{(0, x), y\}$ constituyen otra cinta de Möbius. Por tanto $\nu|_{P^1} \cong \gamma_1^1$ y se concluye que i está cubierta por un mapeo de haces $\gamma_1^1 \hookrightarrow \nu$.

Luego $i^*(w_1(\nu)) = w_1(\gamma_1^1) \neq 0$. Como $w_1(\nu) = \overline{w_1(M\bar{\sigma})}$, el inverso multiplicativo de $w_1(M\bar{\sigma})$, se tiene que $w_1(M\bar{\sigma}) \neq 0$ y por tanto $w_1(M\bar{\sigma})|_{P^1} \neq 0$.

PROPOSICIÓN 1.2. *Si M es una n -variedad, entonces $w_1(M)[\alpha] = 1$ si y sólo si α invierte la orientación en M .*

Demostración. Demostraremos las siguientes dos afirmaciones de donde se seguirá la proposición:

(i) " $w_1(M)$ asigna 1 a cada lazo que invierte la orientación en M ."

(ii) " $w_1(M)$ asigna 0 a cada lazo que conserva la orientación en M ."

"(i)" Sea $M\bar{\sigma}$ la cinta de Möbius. Como $H^1(M\bar{\sigma}; Z_2) \cong Z_2 \cong (\{P^1\})$, el grupo generado por la clase del plano proyectivo unidimensional, $w_1(M\bar{\sigma})$ está caracterizado como el homomorfismo que asigna 1 a $\{P^1\}$. Sea α un lazo que invierte la orientación en M , luego α posee una vecindad regular homomorfa a $M\bar{\sigma} \times I^{n-2}$. Sea $\varphi: M\bar{\sigma} \times I^{n-2} \hookrightarrow M$ un encaje tal que $\varphi(P^1 \times \{0\}) = \alpha$. Por la naturalidad de w_1 , se tiene que $\varphi^*(w_1(M)) = w_1(M\bar{\sigma} \times I^{n-2})$; como $M\bar{\sigma}$ y $M\bar{\sigma} \times I^{n-2}$ son del mismo tipo de homotopía, se tiene que $\varphi^*(w_1(M))[\alpha] = w_1(M\bar{\sigma} \times I^{n-2})|_{P^1 \times \{\bar{0}\}} \neq 0$. Por tanto $w_1(M)[\alpha] \neq 0$, es decir, $w_1(M)[\alpha] = 1$.

"(ii)" Si $\mathcal{O} \subset H_1(M)$ es el subgrupo de las clases representadas por lazos que conservan la orientación en M y $v: H_1(M) \rightarrow Z_2$ es un homomorfismo que asigna 1 a cada lazo que invierte la orientación en M , entonces $\ker v \subset \mathcal{O}$. En efecto si $[\alpha] \in \ker v$,

entonces α no puede invertir la orientación, de lo contrario $v[\alpha] = 1 \neq 0$. Por tanto α conserva la orientación en M y $[\alpha] \in \mathcal{O}$.

Si M es orientable, entonces $H_1(M) = \mathcal{O} = \ker v$.

Si M es no orientable, entonces tanto \mathcal{O} como $\ker v$ tienen índice 2 en $H_1(M)$. Se sigue que $\mathcal{O} = \ker v$, de lo contrario existiría $\beta \in \mathcal{O}$ tal que $\beta \notin \ker v$ y por tanto $H_1(M) = (\ker v \cup \{\beta\}) \subsetneq \mathcal{O}$, lo que sería una contradicción. \square

COROLARIO 1.3. M es orientable $\Leftrightarrow w_1(M) = 0$. \square

Cuadrados de Steenrod.

Recordaremos la definición de los cuadrados de Steenrod que usaremos para calcular clases de Stiefel-Whitney.

DEFINICIÓN 1.3. Sean $i, q, n \in \mathbb{N}$ el conjunto de los enteros positivos y sea $Sq^i : H^n(X, A; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{n+i}(X, A; \mathbb{Z}_2)$ una transformación natural de funtores. Entonces $\{Sq^i\}$ se llama *las operaciones de cohomología cuadrados de Steenrod* si satisface los siguientes axiomas:

- 1) Sq^i es un homomorfismo.
- 2) $Sq^0 = 1$.
- 3) $\dim x = n \Rightarrow Sq^n x = x^2$.
- 4) $i > \dim x \Rightarrow Sq^i x = 0$.

5) **Fórmula de Cartan.**

$$Sq^k(xy) = \sum_{i=0}^k Sq^i x \cdot Sq^{k-i} y.$$

6) Sq^1 es el homomorfismo cofrontera de Bockstein β_4 asociado a la sucesión exacta de coeficientes

$$0 \rightarrow Z_2 \rightarrow Z_4 \rightarrow Z_2 \rightarrow 0.$$

7) **Relaciones de Adem.** Si $0 < a < 2b$, entonces

$$Sq^a Sq^b = \sum_{j=0}^{[a/2]} \binom{b-1-j}{a-2j} Sq^{a+b-j} Sq^j.$$

Se puede demostrar que una transformación tal existe y que está determinada de manera única por los axiomas 1-5 [Steenrod-Epstein]. Un hecho notable es que las clases de Stiefel-Whitney se pueden construir en términos de los cuadrados de Steenrod:

$$w_i(\xi) := \varphi^{-1} Sq^i \varphi(1),$$

donde $\varphi : H^k(B(\xi); Z_2) \rightarrow H^{k+i}(E(\xi), E_0(\xi); Z_2)$ es el isomorfismo de Thom [Milnor-Stasheff, p. 91].

Se sabe que existe una única clase de cohomología $v_k \in H^k(M; Z_2)$ que satisface la identidad

$$v_k \cdot x = Sq^k(x) \in H^n(M^n; Z_2)$$

para todo $x \in H^{n-k}(M; Z_2)$ y toda n -variedad cerrada M . Nótese que por el axioma (4) de los cuadrados de Steenrod si $k > n - k$, entonces $v_k = 0$.

TEOREMA 1.4. (Wu). $w_k(M) = \sum_{i+j=k} Sq^i(v_j)$.

[Milnor-Stasheff, pp. 131-132].□

De inmediato se tiene que para una 3-variedad M

$$w_1(M^3) = Sq^0(v_1) + Sq^1(v_0) = v_1.$$

Tambien

$$w_2(M^3) = Sq^0(v_2) + Sq^1(v_1) + Sq^2(v_0) = v_2 + v_1^2.$$

Y como $2 > 3 - 2$, $v_2 = 0$. Por tanto

$$w_2(M^3) = w_1(M^3)^2.$$

Como M^3 es cobordante a cero para toda M^3 3-variedad cerrada [Lickorish 1 y 2], se sigue que $w_3(M^3) = 0$ para toda M^3 ya que todos los números de Stiefel-Whitney de M^3 son cero [Milnor-Stasheff], en particular $\langle w_3(M^3), [M^3] \rangle = w_3(M^3)[M^3] = 0$.

Resumiendo se tiene el

COROLARIO 1.5. Si M es 3-variedad cerrada, entonces

0) $w_0(M) = 1$.

1) $w_1(M) : H^1(M) \rightarrow Z_2$ es el homomorfismo que asigna 0 a cada curva que conserva la orientación y 1 a cada curva que invierte la orientación en M .

2) $w_2(M) = w_1(M)^2$.

3) $w_k(M) = 0$ para $k \geq 3$.□

Denotaremos por $\beta : H^1(M; Z_2) \rightarrow H^{1+1}(M; Z)$ al homomorfismo cofrontera de Bockstein asociado a la sucesión exacta de coeficientes

$$0 \rightarrow Z \rightarrow Z \rightarrow Z_2 \rightarrow 0.$$

Como se tiene el morfismo de sucesiones exactas

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & Z & \rightarrow & Z & \rightarrow & Z_2 \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \rho_2 & & \downarrow \rho_4 & & \downarrow 1 \\ 0 & \rightarrow & Z_2 & \rightarrow & Z_4 & \rightarrow & Z_2 \rightarrow 0 \end{array}$$

donde ρ_2 (ρ_4) es la reducción módulo 2 (4), se sigue que conmuta el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} H^1(M; Z_2) & \xrightarrow{\beta} & H^2(M; Z) \\ \downarrow 1 & & \downarrow \rho_2 \\ H^1(M; Z_2) & \xrightarrow{\beta_4} & H^2(M; Z_2) \end{array}$$

[Dold, pp. 20-21]. Luego $\beta_4 w_1(M) = \rho_2 \beta w_1(M)$; como $\beta_4 w_1(M) = Sq^1 w_1(M) = w_1(M)^2 = w_2(M)$ se sigue que

$$w_2(M) = \rho_2 \beta w_1(M),$$

es decir, $w_2(M)$ es la reducción módulo 2 de $\beta w_1(M)$, lo que prueba el siguiente

LEMA 1.6. $\beta w_1(M) = 0 \Rightarrow w_2(M) = 0. \square$

Adelante (Observación 1.3) se dará una interpretación geométrica de este hecho.

LEMA 1.7. [Gómez-González-Hoste]. $\beta w_1(M) = 0$ si y sólo si todo elemento de orden finito en $H_1(M)$ conserva la orientación en M .

Demostración. Sea $r : Z \rightarrow Z_2$ el epimorfismo reducción módulo 2. Por la exactitud de la sucesión siguiente

$$H^1(M; Z) \xrightarrow{r} H^1(M; Z_2) \xrightarrow{\beta} H^2(M; Z_2)$$

se sigue que $\beta w_1(M) = 0$ si y sólo si $w_1(M)$ está en la imagen de r^* . Considérese el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H^1(M; Z) & \xrightarrow{r^*} & H^1(M; Z_2) \\ \downarrow \sigma & & \cong \downarrow c \\ \text{Hom}(H_1(M), Z) & \xrightarrow{r^*} & \text{Hom}(H_1(M), Z_2) \end{array}$$

Se tiene que $\omega \in \text{Im } r^*$ si y sólo si existe $\varphi : H_1(M) \rightarrow Z$ tal que $\varphi \in \sigma H_1(M)$ y $c(\omega) = r \circ \varphi$. Esto último es cierto si y sólo si $c(\omega)(\text{torsión } H_1(M)) = 0$ (φ resulta ser un cociclo porque ω lo es).

Luego $\beta w_1(M) = 0$ si y sólo si $c(w_1(M))(\text{torsión } H_1(M)) = 0$ y, por la Proposición 1.2, esto último vale si y sólo si todo elemento de orden finito de $H_1(M)$ conserva la orientación. \square

COROLARIO 1.8. Si $H_1(M) \cong \bigoplus_{i=1}^n G_i$, entonces $\beta w_1 M = 0 \iff$ todo elemento de orden finito en G_i conserva la orientación en M para $i = 1, 2, \dots, n$. \square

Revisemos algunos hechos algebraicos de las cubiertas ramificadas. Un tratamiento más completo del tema se encuentra en [Berstein y Edmonds].

LEMA 1.9. Si $\varphi : M \rightarrow N$ es cubierta ramificada y N es orientable, entonces M es orientable.

Demostración. Triangulamos a M y a N de tal manera que φ sea simplicial; si orientamos coherentemente a los simplejos de N , entonces podemos orientar a los simplejos de M de tal manera que φ conserve la orientación en cada simplejo. Como φ es continua se sigue que M es orientable. \square

COROLARIO 1.10. Si $\varphi : M \rightarrow N$ es cubierta ramificada, entonces φ manda a los lazos que invierten la orientación en M en lazos que invierten la orientación en N .

Demostración. Sea α un lazo que invierte la orientación en M y $\beta = \varphi\alpha$. Sea U una vecindad regular de α tal que φU es una vecindad regular de β . Como U es una variedad no orientable, por el lema anterior, φU no puede ser orientable. Por tanto β invierte la orientación en N . \square

COROLARIO 1.11. Si $\varphi : M \rightarrow N$ es cubierta ramificada, entonces $\varphi^* w_1(N) = w_1(M)$. \square

Lo que sigue es parte de una interpretación geométrica de la primera clase de Stiefel-Whitney en las 3-variedades que probará ser de gran utilidad.

DEFINICIÓN 1.4. El término *superficie* significará una 2-variedad, compacta y conexa.

Sea $D : H^1(M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_2(M; \mathbb{Z}_2)$ el isomorfismo dualidad de Poincaré asociado a la 3-variedad M .

PROPOSICIÓN 1.12. Supongamos que M es una variedad no orientable y sea $F \subset M$ superficie, entonces

$M - F$ es orientable si y sólo si $[F] = Dw_1(M) \in H_2(M; \mathbb{Z}_2)$.

Demostración. Supóngase que $M - F$ es orientable. Nótese que $\text{Hom}(H_1(M; \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2) \cong \text{Hom}(\text{Hom}(H_1(M), \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2) \cong \text{Hom}(H_1(M), \mathbb{Z}_2) \cong H^1(M; \mathbb{Z}_2)$.

Probaremos que para todo $[\alpha] \in H_1(M; \mathbb{Z}_2)$ tal que α invierte la orientación en M se cumple que $D^{-1}[F][\alpha] = 1$.

Sea α un lazo en M que intersecciona transversalmente a F en dos o más puntos. Sean $x_1, x_2 \in \alpha \cap F$, $x_1 \neq x_2$. Entonces, como F es conexa, existe un disco $D \subset F$ tal que $x_1, x_2 \in \text{Int}D$. Podemos suponer que $D \times I \subset M$ y que $(D \times I) \cap \alpha = (\{x_1\} \times I) \cup (\{x_2\} \times I)$. Definimos $\alpha^* := (\alpha - (D \times I)) \cup (\gamma \times \{0\}) \cup (\gamma \times \{1\})$ donde $\gamma \subset \text{Int}D$ es un arco con extremos $\{x_1, x_2\}$. Como $\gamma \times I$ define una Z_2 -homología, se sigue que $[\alpha^*] = [\alpha] \in H_1(M; Z_2)$ y que $\#(\alpha^* \cap F) = \#(\alpha \cap F) - 2$; es claro que α conserva la orientación en M si y sólo si α^* conserva la orientación en M .

Supongamos ahora que α es un lazo que invierte la orientación en M y $\#(\alpha \cap F)$ es mínimo. Se sigue que $\#(\alpha \cap F) = 1$. En efecto si $\#(\alpha \cap F) > 1$, podríamos reducir los puntos de la intersección por parejas contradiciendo la elección de α . Si $\#(\alpha \cap F) = 0$, entonces $\alpha \subset M - F$ y por tanto α es orientable, lo que de nuevo es una contradicción.

Luego, por la demostración de la Proposición 1.12 y el Corolario 1.5, se sigue que $D^{-1}[F] = w_1(M)$. \square

DEFINICIÓN 1.5. Supongamos que M es una 3-variedad y sea $F \subset M$, entonces F se llama una superficie de Stiefel-Whitney para M si y sólo si F es superficie orientable y $[F] = Dw_1(M)$.

OBSERVACIÓN 1.2. Si $F \subset M$ es una superficie de Stiefel-Whitney, entonces $M - F$ es conexo.

El siguiente resultado de Berstein y Edmonds es básico para el estudio de las variedades M tales que $\beta w_1(M) = 0$.

TEOREMA 1.13. Si M es variedad no orientable, entonces $\beta w_1(M) = 0$ si y sólo si existe $F \subset M$ superficie de Stiefel-Whitney bilateral en M . \square

La superficie F es la preimagen de un punto bajo un mapeo $g : M \rightarrow S^1$. Por técnicas usuales [Hempel], se puede obtener una 2-variedad F' con las mismas propiedades que F , salvo la conexidad, pero tal que F' es incompresible en M , es decir,

COROLARIO 1.14. *M variedad no orientable, entonces $\beta w_1(M) = 0$ si y sólo si existe $F \subset M$ 2-variedad orientable, bilateral, no separante tal que $[F] = Dw_1(M) \in H_1(M; \mathbb{Z}_2)$ y F es incompresible en M . \square*

OBSERVACIÓN 1.3. Supóngase que $\beta w_1(M) = 0$ y sea $F \subset M$ una superficie de Whitney bilateral, entonces $F \cap F = \emptyset$, es decir, $w_2(M) = w_1(M)^2 = 0$ (compárese con el Lema 1.6).

§ 2. VARIEDADES DE SEIFERT.

Esta sección es de carácter introductorio y sirve sólo para normalizar la notación. La mejor referencia para el tema es el artículo original de Seifert.

DEFINICIÓN 2.1. Sea μ, ν números enteros primos relativos y $\rho : D^2 \rightarrow D^2$ la rotación bajo un ángulo de $2\pi(\nu/\mu)$, entonces el espacio cociente $\frac{D^2 \times I}{(x,0) \sim (\rho(x),1)}$ se llama un *toro sólido fibrado* de tipo (μ, ν) .

Si llamamos fibras a los segmentos $\{x\} \times I$, con $x \in D^2$, entonces $D^2 \times I$ es un "cilindro fibrado". Al hacer la identificación en el cilindro $D^2 \times I$, las fibras se descomponen en clases tales que cada clase contiene exactamente μ segmentos que conforman una circunferencia y forman una *fibra* del toro sólido, salvo la clase que contiene al eje $\{0\} \times I$ que contiene únicamente al eje y que se vuelve también una fibra en el toro sólido y se llama el *ánima del toro sólido*. Si $\mu = 1$, el toro sólido se llama *toro sólido ordinario*.

DEFINICIÓN 2.2. Un mapeo $h : V \rightarrow V$, donde V es un toro sólido fibrado, se dice que respeta las fibras si y sólo si (i) h es un homeomorfismo y (ii) h mapea a las fibras de V en fibras de V .

OBSERVACIÓN 2.1. Si V es un toro sólido fibrado de tipo (μ, ν) se puede suponer, salvo homeomorfismo que respeta las fibras, que $\mu > 0$ y que $0 \leq \nu \leq \frac{1}{2}\mu$.

DEFINICIÓN 2.3. Sea M una 3-variedad cerrada y conexa, entonces M se llama *variedad de Seifert* si y sólo si

i) M es unión ajena de circunferencias llamadas las *fibras* de M .

ii) Cada punto de M está en exactamente una fibra.

iii) Para cada fibra H , existe una vecindad V de H que es unión de fibras tal que V se puede mapear sobre un toro sólido fibrado mediante un homeomorfismo que respeta las fibras y donde H se mapea al *ánima* del toro sólido.

DEFINICIÓN 2.4. Si M es variedad de Seifert y H es una fibra de M , entonces H se llama *fibra ordinaria* si y sólo si su vecindad es un toro sólido ordinario. En cualquier otro caso H se llama *fibra excepcional*.

Si H es fibra excepcional y su vecindad es un toro sólido fibrado de tipo (μ, ν) , H se llama *fibra excepcional de orden μ* .

OBSERVACIÓN 2.2. Si M es variedad de Seifert, entonces M sólo tiene un número finito de fibras excepcionales.

DEFINICIÓN 2.5. Una *variedad de Seifert con frontera* es una variedad \overline{M} que se obtiene de una variedad de Seifert M al retirarle el interior de un número finito de

vecindades fibradas de fibras ordinarias.

DEFINICIÓN 2.6. Si M es variedad de Seifert, entonces la *superficie de órbitas* G de M es el cociente de M al identificar cada fibra de M con un punto.

NOTA. Es facil ver que G es efectivamente una superficie.

LEMA 2.1. Si G es la superficie de órbitas de M con proyección $p : M \rightarrow G$ y $\omega \subset G$ es un 2-disco tal que $p^{-1}\omega$ no contiene fibras excepcionales, entonces $p^{-1}\omega$ es un toro sólido ordinario. \square

DEFINICIÓN 2.7. Un disco en G como en el lema anterior se llama una *vecindad ordinaria* en G .

COROLARIO 2.2. Sean \overline{M} y \widetilde{M} variedades de Seifert con frontera que se obtienen de M . Si \overline{M} y \widetilde{M} tienen el mismo número de componentes en la frontera, entonces \overline{M} y \widetilde{M} son homeomorfas bajo un homeomorfismo que respeta las fibras.

Demostración. Sea G la superficie de órbitas de M y $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in G$ las imágenes de las fibras ordinarias que se retiran de M para obtener a la variedad \overline{M} (retirando a x_1, \dots, x_n) y a la variedad \widetilde{M} (retirando a y_1, \dots, y_n).

Sin perder la generalidad $\{x_1, \dots, x_n\} \cap \{y_1, \dots, y_n\} = \emptyset$.

Entonces existen $\omega_1, \dots, \omega_n \subset G$ vecindades ordinarias tales que $\{x_i, y_i\} \subset \text{int}(\omega_i)$ y $\omega_i \cap \omega_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Luego existe $h_i : \omega_i \rightarrow \omega_i$ homeomorfismo tal que $h_i|_{\partial\omega_i} = 1_{\partial\omega_i}$ y $h_i(x_i) = y_i$ para $i \in \{1, \dots, n\}$. Claramente h_i se levanta al toro sólido ordinario preimagen de ω_i como un homeomorfismo H_i que respeta las fibras y que deja fija a la frontera. Por

tanto $\left(\prod_{i=1}^n H_i\right) \cup id : M \rightarrow M$ induce un homeomorfismo $H : \overline{M} \rightarrow \overline{M}$ que respeta las fibras. \square

DEFINICIÓN 2.8. Sea $p : M \rightarrow G$ variedad de Seifert con frontera (puede suceder que $\partial M = \emptyset$). Sea $h : I \rightarrow G$ una trayectoria y para cada $s \in I$ definimos $H(s) := p^{-1}(h(s))$. Se dice que *las fibras están orientadas simultáneamente a lo largo de h* si y sólo si se le puede dar una orientación a la fibra $H(t)$ para cada $t \in I$ de tal manera que para todo $s \in I$ existe U una vecindad de $h(s)$ tal que para todo $x, y \in h^{-1}(U)$, $H(x)$ es \mathbb{Z} -homóloga a $H(y)$ en $p^{-1}(U)$, donde una fibra excepcional de orden μ cuenta μ veces.

OBSERVACIÓN 2.3. Para toda trayectoria $h : I \rightarrow G$, existe una orientación simultánea de las fibras a lo largo de h .

Demostración. Es claro si $h(I)$ está contenida en una vecindad de órbitas $U \subset G$, es decir, si $p^{-1}(U)$ es un toro sólido.

En el caso general, como $h(I)$ es compacto, éste está cubierto por un número finito de vecindades de órbitas y se sigue la observación. \square

Evidentemente las fibras se pueden orientar a lo largo de h sólo de dos maneras: "la orientación a lo largo de h está determinada por la orientación de una sola fibra, por ejemplo de $H(0)$ ".

DEFINICIÓN 2.9. Se dice que la orientación de $H(0)$ *se traslada a lo largo de h a $H(1)$* cuando hay una orientación simultánea.

OBSERVACIÓN 2.4. Si h y h' son trayectorias homotópicas con los mismos extremos y si $H(0)$ está orientada, entonces la traslación de la orientación a $H(1)$ a lo

largo de h y de h' da el mismo resultado.

Demostración. En efecto $h * h'^{-1}$ es un lazo nulhomotópico y por tanto bordea una 2-célula singular e que se puede cubrir por un número finito de vecindades de órbita en G , que de hecho podemos tomar como 2-simplejos de e . Como $h * h'^{-1}$ es el producto de los 1-simplejos de e cancelando las aristas que se recorren en sentidos opuestos y como la orientación de las fibras se conserva a lo largo de una trayectoria cerrada contenida en una vecindad de órbitas, se sigue la observación. \square

Lo que se tiene entonces es, para cada M variedad de Seifert, un homomorfismo evaluación $ev = ev(M) : \pi_1(G) \rightarrow Z_2$, donde $ev[\alpha]$ es $+1$ si la orientación de la fibra $p^{-1}(\alpha(0))$ se conserva a lo largo de α y -1 si se invierte. Es claro que $ev(a \cdot b) = ev(a) \cdot ev(b)$.

La evaluación está pues determinada si se conocen los valores de un sistema fundamental de curvas de G para $\pi_1(G)$. Más aún, como $H_1(G)$ es la abelianización de $\pi_1(G)$ y Z_2 es abeliano, la evaluación queda determinada por un homomorfismo $ev = ev(M) : H_1(G) \rightarrow Z_2$ y, por tanto, si se conocen los valores de un sistema fundamental de curvas de G para $H_1(G)$, se conoce la evaluación. En este trabajo consideraremos siempre que $ev(M) : H_1(G) \rightarrow Z_2$.

DEFINICIÓN 2.10. Dos variedades de Seifert M y M' están en la misma clase si y sólo si existe $h : G \rightarrow G'$ homomorfismo tal que $ev(M') \circ h_* = ev(M)$.

OBSERVACIÓN 2.5. Si quitamos el interior de una vecindad fibrada de una fibra en una variedad de Seifert y pegamos un nuevo toro sólido fibrado en el hoyo resultante, la clase de la variedad de Seifert no cambia ya que la clase está determinada si conocemos el valor de una curva en cada clase de homología. Se pueden entonces

escoger representantes de las clases de homología de tal manera que no se afecten al quitar y rellenar vecindades de fibras, es decir, este proceso de cambiar a la variedad de Seifert no afecta a la evaluación de las curvas así como no afecta a la superficie de órbitas.

TEOREMA 2.3 [Seifert]. *Cada clase de variedades de Seifert determina y está determinada por una única variedad de Seifert con frontera, el espacio clasificante \bar{F}_0 . El espacio clasificante es la única variedad de Seifert con frontera y sin fibras excepcionales que tiene como superficie de órbitas a la superficie de órbitas evaluada (menos el interior de un disco) que caracteriza a la clase. De el espacio \bar{F}_0 se obtienen todas las variedades de la clase quitando un número finito r de fibras y tapando los $r+1$ toros frontera resultantes con toros sólidos fibrados arbitrarios. \square*

2.4. [Seifert]. *Para una superficie evaluada arbitraria, existe una única clase de variedades de Seifert correspondiente. Una evaluación de la superficie se obtiene de una evaluación arbitraria de un sistema fundamental canónico de curvas de la superficie cerrada.*

Esbozo de la demostración. Supongamos que G es una superficie evaluada. Cortamos a G para obtener un polígono fundamental v y la agujeramos cortando los vértices de v para obtener \bar{v} . Sea $\bar{V} := \bar{v} \times S^1$. Entonces \bar{V} es un toro sólido que tiene a \bar{v} como disco meridional. Identificamos mediante un homeomorfismo que respeta fibras a cada pareja de anillos A y A' en la frontera de \bar{V} que se mapeen a aristas correspondientes a y a' de \bar{v} de tal manera que una fibra de A se identifica con una fibra de A' si el punto de a se identifica con el punto correspondiente de a' . Entonces existen esencialmente sólo dos mapeos distintos de A a A' . En efecto si orientamos las fibras de \bar{V} simultáneamente de tal manera que cada dos fibras orientadas de \bar{V} sean homólogas, podemos mapear a

A en A' bajo un mapeo que conserve o que invierta la orientación de las fibras. En el primer caso la orientación de las fibras se conserva a lo largo de una curva que vaya de un punto de A a través del interior de \bar{V} al punto equivalente de A' ; en el segundo caso se invierte. Si identificamos de esta manera a cada dos anillos de \bar{V} que correspondan a aristas equivalentes de \bar{v} , obtenemos de \bar{V} una variedad de Seifert con frontera sin fibras excepcionales cuya superficie de órbitas es la superficie G agujerada. Es decir, es el espacio clasificante de la clase.

En el caso de que G originalmente haya tenido frontera, cerramos cada hoyo con un disco, repetimos la construcción y al final perforamos al espacio clasificante obtenido. \square

OBSERVACIÓN 2.6. Sea α una curva simple cerrada en la superficie de órbitas G . Entonces $ev[\alpha] = +1$ si y sólo si $p^{-1}(\alpha) = S^1 \times S^1$ y $ev[\alpha] = -1$ si y sólo si $p^{-1}(\alpha) = \text{botella de Klein}$ por el Teorema 2.4. Luego, por nuestra definición de variedad de Seifert con frontera, si $\alpha \subset \partial G$, entonces forzosamente $ev[\alpha] = +1$.

[Seifert] determina las clases de los espacios fibrados de la siguiente manera:

TEOREMA 2.5. Supongamos que $p : M \rightarrow G$ es una variedad de Seifert, entonces M es orientable si y sólo si $ev(M) = w_1(G)$, la primera clase de Stiefel-Whitney de G .

Además

i) si G es orientable y $ev(M)$ es no trivial y $e : H_1(G) \rightarrow Z_2$ es cualquier homomorfismo no trivial, entonces $ev(M)$ y e determinan a la misma clase de variedades de Seifert.

ii) si G es no orientable, $\{v_1, \dots, v_k, d_1, \dots, d_r\} \subset G$ es un sistema fundamental de curvas para $H_1(G)$ donde v_i invierte la orientación en G para $i \in \{1, \dots, k\}$ y $d_j \subset \partial G$

para $j \in \{1, \dots, s\}$ y $e: H_1(G) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ es un homomorfismo distinto de $w_1(G)$, entonces e determina la misma clase que alguno de los homomorfismos siguientes:

I) $d_j, v_i \mapsto +1$ para $j \in \{1, \dots, s\}, i \in \{1, \dots, k\}$

II) $d_j \mapsto +1$ para $j \in \{1, \dots, s\}; v_1 \mapsto +1; v_i \mapsto -1$ para $i \in \{2, \dots, k\}$ ($k \geq 2$)

III) $d_j \mapsto +1$ para $j \in \{1, \dots, s\}; v_1, v_2 \mapsto +1; v_i \mapsto -1$ para $i \in \{3, \dots, k\}$ ($k \geq 3$).

□

OBSERVACIÓN 2.7. La igualdad de los homomorfismos $ev(M) = w_1(G)$, significa que si G es orientable, $ev(M)(\alpha) = +1$ para toda $\alpha \in H_1(G)$ y que, si G es no orientable, entonces $ev(M)(v_i) = -1$ y $ev(M)(d_j) = +1$.

OBSERVACIÓN 2.8. Describiremos ahora los espacios clasificantes de las distintas variedades de Seifert.

En cada caso describiremos una 3-variedad cerrada. Para obtener el espacio clasificante se retira la vecindad de una fibra ordinaria.

Si la variedad de Seifert que nos interesa es una variedad de Seifert con frontera, entonces se retira la cantidad necesaria de fibras ordinarias.

Enlistaremos cada caso según la notación de Seifert. El símbolo O representa que la variedad de Seifert M es orientable y N que es no orientable. El símbolo o representa que la superficie de órbitas G de M es orientable y n que es no orientable. El espacio \overline{F}_0 será el espacio clasificante de la clase de M .

Oo. \overline{F}_0 se obtiene de $G \times S^1$.

On. \bar{F}_0 se construye como en la explicación del Teorema 2.4, es decir, se recorta a G para obtener un polígono fundamental v y en $V := v \times S^1$ se identifican los anillos correspondientes a las aristas de v mediante el homeomorfismo $h : I \times S^1 \rightarrow I \times S^1$; $(t, e^{i\theta}) \mapsto (1-t, e^{-i\theta})$.

NnI. \bar{F}_0 se obtiene de $G \times S^1$. Es el caso (ii). I. del Teorema 2.5.

NnII. \bar{F}_0 se construye como en la explicación del Teorema 2.4, es decir, se recorta a G para obtener un polígono fundamental v con aristas $a_1, a'_1, \dots, a_n, a'_n$ y en el producto $V := v \times S^1$ se identifican los anillos A_k con A'_k correspondientes a las aristas de v mediante el homeomorfismo $h_k : a_k \times S^1 \rightarrow a'_k \times S^1$; $(t, e^{i\theta}) \mapsto (1-t, e^{-i\theta})$ para $k \geq 2$ y con el homeomorfismo $h_1 : a_1 \times S^1 \rightarrow a'_1 \times S^1$; $(t, e^{i\theta}) \mapsto (1-t, e^{i\theta})$. Es el caso (ii). II. del Teorema 2.5.

NnIII. \bar{F}_0 se construye como en la explicación del Teorema 2.4, es decir, se recorta a G para obtener un polígono fundamental v con aristas $a_1, a'_1, \dots, a_n, a'_n$ y en $V := v \times S^1$ se identifican los anillos A_k con A'_k correspondientes a las aristas de v mediante el homeomorfismo $h_k : a_k \times S^1 \rightarrow a'_k \times S^1$; $(t, e^{i\theta}) \mapsto (1-t, e^{-i\theta})$ para $k \geq 3$ y con el homeomorfismo $h_j : a_j \times S^1 \rightarrow a'_j \times S^1$; $(t, e^{i\theta}) \mapsto (1-t, e^{i\theta})$ para $j = 1, 2$. Es el caso (ii). III. del Teorema 2.5.

No. Este es el caso (i) del Teorema 2.5. La representación que nos conviene de \bar{F}_0 es como sigue: sea \tilde{G} la superficie que se obtiene de G al recortar a lo largo de una curva simple cerrada $b \subset G$ no separante; b es un "meridiano" de G y $\partial\tilde{G} = b_1 \cup b_2$. En $\tilde{G} \times S^1$ se identifican los toros frontera con el homeomorfismo $h : b_1 \times S^1 \rightarrow b_2 \times S^1$; $(z, e^{i\theta}) \mapsto (z, e^{-i\theta})$.

NOTACIÓN. Denotamos por (X, k) a la clase de las variedades de Seifert (ce-

rradas) con superficie de órbitas de género k (que es el número de asas o de gorros cruzados de la superficie cuando es orientable o no orientable respectivamente) donde $X \in \{O, N\}$, $x \in \{o, n, nI, nII, nIII\}$.

Denotaremos por $(Xx, k|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$ a la variedad de Seifert que se obtiene del espacio clasificante de (Xx, k) cerrando a la frontera $\partial(\overline{F}_0)$ con un toro sólido de tipo $(1, b)$ mediante un homeomorfismo de las fronteras que conserve las fibras y obtenemos a \widetilde{M} . A continuación retiramos r fibras ordinarias de \widetilde{M} y cada componente de la frontera se cierra con un toro sólido de tipo (α_i, β_i) mediante un homeomorfismo de las fronteras que respeta las fibras para $i = 1, \dots, r$.

OBSERVACIÓN 2.9. El símbolo de Seifert $(Xx, k|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$ se normaliza de la siguiente manera:

- i) si $X = O$, entonces $0 < \beta_i < \alpha_i$ y $\alpha_i > 1$ para $i = 1, \dots, r$.
- ii) si $X = N$, entonces $0 < \beta_i < \frac{1}{2}\alpha_i$ y $\alpha_i > 2$, o bien $\alpha_i = 2$ y $\beta_i = 1$ para $i = 1, \dots, r$ y $b \in \{0, 1\}$.

Se muestra [Seifert] que, con esta normalización y ciertas convenciones técnicas, a cada variedad de Seifert se le asocia un único símbolo de Seifert que la determina salvo homeomorfismo que respeta las fibras.

§3. EL HOMOMORFISMO $\beta_{w_1}(M)$ PARA M VARIEDAD DE SEIFERT.

En esta sección se probará el siguiente

TEOREMA 3.1. Si M es la variedad de Seifert que tiene asociado el símbolo de Seifert $(Xx, k|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$, donde $Xx \in \{No, NnI, NnII, NnIII\}$, entonces

$\beta_{w_1}(M) \neq 0$ si y sólo si

i) $Xx = NnII$, o bien

ii) $Xx = NnI$ y k es impar y $\lambda(M) = \alpha \left(b + \sum_{i=1}^r \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right)$ es par,

donde $\alpha = m.c.m. \{ \alpha_1, \dots, \alpha_r \}$.

NOTACIONES. Si A es un conjunto de enteros, $m.c.d.A$ ($m.c.m.A$) denotará al máximo común divisor (mínimo común múltiplo) de los elementos de A .

Si \bar{x} es un conjunto de generadores y \bar{r} es un conjunto de combinaciones lineales

de los elementos de \bar{x} , el símbolo $\langle \bar{x} : \bar{r} \rangle$ denotará al grupo abeliano presentado por los generadores \bar{x} y las relaciones \bar{r} .

Será frecuente que la relación $r = s$ la escribamos como $r = s$.

A lo largo de toda esta sección usualmente las letras latinas serán elementos de un grupo y las letras griegas serán números enteros.

Movidas de Tietze.

Dada la presentación $\langle x_1, \dots, x_n : r_1, \dots, r_s \rangle$, se pueden realizar las siguientes movidas:

I (I') Añadir (retirar) la relación $f(r_1, \dots, r_s)$, donde $f(r_1, \dots, r_s)$ es una combinación lineal entera de r_1, \dots, r_s .

II (II') Añadir (retirar) el generador x^* y la relación $x^* - g(x_1, \dots, x_n)$, donde el generador $x^* \notin \{x_1, \dots, x_n\}$ y $g(x_1, \dots, x_n)$ es una combinación lineal entera de x_1, \dots, x_n .

Al realizar cualquiera de las cuatro movidas anteriores se obtienen presentaciones de grupos isomorfos. Los isomorfismos estan dados por las inclusiones:

I, I':

$$\langle x_1, \dots, x_n : r_1, \dots, r_s \rangle \begin{array}{c} \leftrightarrow \\ x_i \longleftrightarrow \end{array} \langle x_1, \dots, x_n : r_1, \dots, r_s, f(r_1, \dots, r_s) \rangle$$

II, II':

$$\langle x_1, \dots, x_n, x^* : r_1, \dots, r_s, x^* - g(x_1, \dots, x_n) \rangle \begin{array}{c} \leftrightarrow \\ x_i \longleftrightarrow \\ x^* \longleftarrow \end{array} \langle x_1, \dots, x_n : r_1, \dots, r_s \rangle$$

El primer grupo de homología de las variedades de Seifert.

LEMA 3.2. Sea $p: M \rightarrow G$ variedad de Seifert. Entonces

i) si $M = (Oo, k|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$, entonces

$$H_1(M) = \langle a_1, b_1, \dots, a_k, b_k, q_1, \dots, q_r, h : -bh + q_1 + \dots + q_r = 0, \\ \alpha_i q_i + \beta_i h = 0 \rangle,$$

ii) si $M = (On, k|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$, $k \geq 1$, entonces

$$H_1(M) = \langle v_1, \dots, v_k, q_1, \dots, q_r, h : -bh + q_1 + \dots + q_r = 2v_1 + \dots + 2v_k, \\ \alpha_i q_i + \beta_i h = 0, \\ 2h = 0 \rangle,$$

iii) si $M = (No, k|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$, $k \geq 1$, entonces

$$H_1(M) = \langle a_1, b_1, \dots, a_k, b_k, q_1, \dots, q_r, h : -bh + q_1 + \dots + q_r = 0, \\ \alpha_i q_i + \beta_i h = 0, \\ 2h = 0 \rangle,$$

iv) si $M = (NnI, k|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$, $k \geq 1$, entonces

$$H_1(M) = \langle v_1, \dots, v_k, q_1, \dots, q_r, h : -bh + q_1 + \dots + q_r = 2v_1 + \dots + 2v_k, \\ \alpha_i q_i + \beta_i h = 0 \rangle,$$

v) si $M = (NnII, k|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$, $k \geq 2$, entonces

$$H_1(M) = \langle v_1, \dots, v_k, q_1, \dots, q_r, h : -bh + q_1 + \dots + q_r = 2v_1 + \dots + 2v_k, \\ \alpha_i q_i + \beta_i h = 0, \\ 2h = 0 \rangle,$$

vi) si $M = (NnIII, k|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r)), k \geq 3$, entonces

$$H_1(M) = \langle v_1, \dots, v_k, q_1, \dots, q_r, h : -bh + q_1 + \dots + q_r = 2v_1 + \dots + 2v_k, \\ \alpha_i q_i + \beta_i h = 0, \\ 2h = 0 \rangle,$$

donde todas las presentaciones son de grupos abelianos, h es la clase de una fibra ordinaria de M , $a_1, b_1, \dots, a_k, b_k$, o bien, v_1, \dots, v_k son los generadores de $H_1(G)$ y q_1, \dots, q_r son curvas contenidas en las vecindades de las fibras excepcionales (Ver por ejemplo [Seifert]). \square

OBSERVACIÓN 3.1. Nótese que en la presentación de los grupos de homología de una variedad de Seifert M , los generadores q_1, \dots, q_r, h se pueden representar por curvas que conservan la orientación en M , ya que están contenidas en toros sólidos. Luego sólo en el conjunto de generadores que provienen de curvas de la superficie de órbitas se pueden encontrar curvas que invierten la orientación en M .

Sea $M = (Xx, k|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$ una variedad de Seifert, definimos el grupo $G := \langle q_1, \dots, q_r, h : \alpha_i q_i + \beta_i h = 0, i = 1, \dots, r \rangle$.

Definición técnica.

$$\delta_1 := 1;$$

$$\alpha'_1 := \alpha_1;$$

$$\beta'_1 := \beta_1.$$

Tomamos $\rho_1, \sigma_1 \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\alpha'_1 \rho_1 + \beta'_1 \sigma_1 = 1.$$

Definimos

$$u_1 := -\sigma_1 q_1 + \rho_1 h;$$

$$x_1 := \alpha'_1 q_1 + \beta'_1 h.$$

Supongamos que hemos definido a $\delta_i, \rho_i, \sigma_i, \alpha'_i, \beta'_i \in Z$ y a $u_i, x_i \in G$ para $i \geq 1$. Se definen entonces:

$$\delta_{i+1} := m.c.d.\{\alpha_{i+1}, \alpha'_1 \cdots \alpha'_i \beta_{i+1}\} = m.c.d.\{\alpha_{i+1}, \alpha'_1 \cdots \alpha'_i\};$$

$$\alpha'_{i+1} := \frac{\alpha_{i+1}}{\delta_{i+1}};$$

$$\beta'_{i+1} := \frac{\alpha'_1 \cdots \alpha'_i}{\delta_{i+1}} \beta_{i+1}.$$

Tomamos enteros ρ_{i+1}, σ_{i+1} tales que

$$\alpha'_{i+1} \rho_{i+1} + \beta'_{i+1} \sigma_{i+1} = 1$$

y entonces definimos

$$u_{i+1} := -\sigma_{i+1} q_{i+1} + \rho_{i+1} u_i;$$

$$x_{i+1} := \alpha'_{i+1} q_{i+1} + \beta'_{i+1} u_i.$$

LEMA 3.3. $\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_r = \frac{\alpha_1 \cdots \alpha_r}{m.c.m.\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}}.$

Demostración. Se demostrará por inducción sobre r .

$$\delta_1 = 1 = \frac{\alpha_1}{m.c.m.\{\alpha_1\}}, \text{ que es el primer paso de inducción.}$$

Supongamos que $\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_j = \frac{\alpha_1 \cdots \alpha_j}{m.c.m.\{\alpha_1, \dots, \alpha_j\}}$, para $j \geq 1$. Como

$$\begin{aligned} \delta_{j+1} &= m.c.d.\{\alpha_{j+1}, \alpha'_1 \cdots \alpha'_j\} \\ &= m.c.d.\{\alpha_{j+1}, \frac{\alpha_1 \cdots \alpha_j}{\delta_1 \cdots \delta_j}\} \\ &= m.c.d.\{\alpha_{j+1}, m.c.m.\{\alpha_1, \dots, \alpha_j\}\} \text{ (por hipótesis de inducción)} \\ &= \frac{\alpha_{j+1} \cdot m.c.m.\{\alpha_1, \dots, \alpha_j\}}{m.c.m.\{\alpha_{j+1}, m.c.m.\{\alpha_1, \dots, \alpha_j\}\}} \\ &= \frac{\alpha_{j+1} \cdot m.c.m.\{\alpha_1, \dots, \alpha_j\}}{m.c.m.\{\alpha_1, \dots, \alpha_j, \alpha_{j+1}\}}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \delta_1 \cdots \delta_j \delta_{j+1} &= \frac{\alpha_1 \cdots \alpha_j}{m.c.m.\{\alpha_1, \dots, \alpha_j\}} \cdot \frac{\alpha_{j+1} \cdot m.c.m.\{\alpha_1, \dots, \alpha_j\}}{m.c.m.\{\alpha_1, \dots, \alpha_j, \alpha_{j+1}\}} \\ &= \frac{\alpha_1 \cdots \alpha_j \cdot \alpha_{j+1}}{m.c.m.\{\alpha_1, \dots, \alpha_j, \alpha_{j+1}\}}. \end{aligned}$$

□

COROLARIO 3.4. $\alpha'_1 \cdots \alpha'_r = m.c.m.\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ para $1 \leq j \leq r$. □

LEMA 3.5. $G \cong \langle x_2, \dots, x_r, u_r : \delta_2 x_2 = 0, \dots, \delta_r x_r = 0 \rangle$.

Demostración. Se demostrará por inducción sobre r .

Como

$$\begin{aligned} \alpha_1 u_1 &= -\alpha_1 \sigma_1 q_1 + \alpha_1 \rho_1 h \\ &= -\alpha_1 \sigma_1 q_1 + (1 - \beta_1 \sigma_1) h \\ &= -\sigma_1 (\alpha_1 q_1 + \beta_1 h) + h \end{aligned} \tag{1}$$

y

$$-\beta_1 u_1 = -\beta_1 \sigma_1 q_1 - \beta_1 \rho_1 h$$

$$\begin{aligned}
 &= (1 - \alpha_1 \rho_1) q_1 - \beta_1 \rho_1 h \\
 &= q_1 - \rho_1 (\alpha_1 q_1 + \beta_1 h)
 \end{aligned} \tag{2}$$

luego

$$h = \alpha_1 u_1 \quad \text{y} \quad q_1 = -\beta_1 u_1 \tag{3}$$

en el grupo G .

Sustituyendo

$$\alpha_j q_j + \beta_j h = \alpha_j q_j + \beta_j \alpha_1 u_1 \quad \text{para } j = 2, \dots, r \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 q_1 + \beta_1 h &= -\alpha_1 \beta_1 u_1 + \alpha_1 \beta_1 u_1 \\
 &= (-\alpha_1 \beta_1 + \alpha_1 \beta_1) u_1
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$-\sigma_1 q_1 + \rho_1 h = \sigma_1 \beta_1 + \rho_1 \alpha_1 u_1 = u_1. \tag{6}$$

Se tiene entonces un isomorfismo

$$G \cong_{\mathcal{V}_1} \langle q_2, \dots, q_r, u_1 : \alpha_2 q_2 + \beta_2 \alpha_1 u_1 = 0, \dots, \alpha_r q_r + \beta_r \alpha_1 u_1 = 0 \rangle.$$

Este isomorfismo está dado por las siguientes movidas de Tietze:

- II. Añadir el generador u_1 y la relación $u_1 = \sigma_1 q_1 + \rho_1 h$.
- I. Añadir las relaciones $h = \alpha_1 u_1$ y $q_1 = -\beta_1 u_1$, por (1).y (2).
- I. Añadir las relaciones $\alpha_j q_j + \beta_j \alpha_1 u_1 = 0$, para $j = 2, \dots, r$, por (4).
- I'. Retirar las relaciones $\alpha_j q_j + \beta_j h = 0$ para $j = 1, \dots, r$, por (4) y (5).

I'. Retirar la relación $u_1 = -\sigma_1 q_1 + \rho_1 h$, por (6).

II'. Retirar los generadores q_1 y h y las relaciones $h = \alpha_1 u_1$ y $q_1 = -\beta_1 u_1$.

Y claramente φ_1 está definido por

$$\varphi_1(h) = \alpha_1' u_1,$$

$$\varphi_1(q_1) = \beta_1' u_1$$

$$\varphi_1(q_j) = q_j,$$

para $j = 2, \dots, r$.

Supongamos ahora que se tiene un isomorfismo

$$\begin{aligned} G \stackrel{\cong}{\cong} \langle x_2, \dots, x_i, q_{i+1}, \dots, q_r, u_i : \alpha_{i+1} q_{i+1} + \beta_{i+1} \alpha_1' \cdots \alpha_i' u_i = 0, \dots, \\ \alpha_r q_r + \beta_r \alpha_1' \cdots \alpha_i' u_i = 0, \\ \delta_2 x_2 = \cdots = \delta_i x_i = 0 \rangle, \end{aligned}$$

para $1 \leq i < r$, donde

$$\varphi_i(h) = \alpha_1' \cdots \alpha_i' u_i$$

$$-\varphi_i(q_j) = \beta_j' \alpha_{j+1}' \cdots \alpha_i' u_i + \beta_j' \alpha_{j+1}' \cdots \alpha_{i-1}' \sigma_i x_i +$$

$$+ \beta_j' \alpha_{j+1}' \cdots \alpha_{i-2}' \sigma_{i-1} x_{i-1} + \cdots + \beta_j' \sigma_{j+1} x_{j+1} - \rho_j x_j,$$

para $j = 1, \dots, i$ y

$$\varphi_i(q_j) = q_j,$$

para $j = i+1, \dots, r$.

Como

$$\begin{aligned}\alpha'_{i+1} u_{i+1} &= -\alpha'_{i+1} \sigma_{i+1} q_{i+1} + \alpha'_{i+1} \rho_{i+1} u_i \\ &= -\alpha'_{i+1} \sigma_{i+1} q_{i+1} + (1 - \beta'_{i+1} \sigma_{i+1}) u_i \\ &= -\sigma_{i+1} (\alpha'_{i+1} q_{i+1} + \beta'_{i+1} u_i) + u_i \\ &= -\sigma_{i+1} x_{i+1} + u_i;\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}-\beta'_{i+1} u_{i+1} &= -\beta_{i+1} \sigma_{i+1} q_{i+1} - \beta'_{i+1} \rho_{i+1} u_i \\ &= (1 - \alpha'_{i+1} \rho_{i+1}) q_{i+1} - \beta'_{i+1} \rho_{i+1} u_i \\ &= q_{i+1} - \rho_{i+1} (\alpha'_{i+1} q_{i+1} + \beta'_{i+1} u_i) \\ &= q_{i+1} - r_{i+1} x_{i+1};\end{aligned}$$

luego

$$q_{i+1} = -\beta'_{i+1} u_{i+1} + \rho_{i+1} x_{i+1}, \quad (7)$$

y

$$u_i = \alpha'_{i+1} u_{i+1} + \sigma_{i+1} x_{i+1}. \quad (8)$$

Sustituyendo

$$\begin{aligned}\alpha_{i+1} q_{i+1} + \beta_{i+1} \alpha'_1 \cdots \alpha'_i &= \alpha_{i+1} (-\beta'_{i+1} u_{i+1} + \rho_{i+1} x_{i+1}) \\ &\quad + \beta_{i+1} \alpha'_1 \cdots \alpha'_i (\alpha'_{i+1} u_{i+1} + \sigma_{i+1} x_{i+1}) \\ &= (\alpha_{i+1} \rho_{i+1} + \beta_{i+1} \alpha'_1 \cdots \alpha'_i \sigma_{i+1}) x_{i+1} + \\ &\quad + (\beta_{i+1} \alpha'_1 \cdots \alpha'_i \alpha'_{i+1} - \alpha_{i+1} \beta'_{i+1}) u_{i+1}\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\alpha_{i+1} &= \alpha'_{i+1} \delta_{i+1}, \\ \beta'_{i+1} &= \beta_{i+1} \alpha'_1 \cdots \alpha'_i \delta_{i+1}\end{aligned}$$

y

$$\alpha_{i+1}\beta'_{i+1} = \alpha_{i+1} \frac{\alpha'_1 \cdots \alpha'_i}{\delta_{i+1}} \beta_{i+1} = \beta_{i+1} \alpha'_1 \cdots \alpha'_i \alpha'_{i+1},$$

por tanto

$$\begin{aligned} \alpha_{i+1}q_{i+1} + \beta_{i+1}\alpha'_1 \cdots \alpha'_i u_i &= \delta_{i+1}(\alpha'_{i+1}\rho_{i+1} + \beta_{i+1}\sigma_{i+1})x_{i+1} + (\alpha_{i+1}\beta'_{i+1} - \alpha_{i+1}\beta'_{i+1})u_{i+1} \\ &= \delta_{i+1}x_{i+1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Sea $j \geq 2$. Como

$$\begin{aligned} \alpha_j q_j + \beta_j \alpha'_1 \cdots \alpha'_i u_i &= \alpha_j q_j + \beta_j \alpha'_1 \cdots \alpha'_i (\alpha'_{i+1} u_{i+1} + \sigma_{i+1} x_{i+1}) \\ &= \alpha_j q_j + \beta_j \alpha'_1 \cdots \alpha'_i \alpha'_{i+1} u_{i+1} + \delta_{i+1} (\beta_j \frac{\alpha'_1 \cdots \alpha'_i}{\delta_{i+1}} \sigma_{i+1}) x_{i+1}, \end{aligned}$$

luego

$$\alpha_j q_j + \beta_j \alpha'_1 \cdots \alpha'_i u_i = \alpha_j q_j + \beta_j \alpha'_1 \cdots \alpha'_i \alpha'_{i+1} u_{i+1} \quad (10)$$

en G . Nótese que $\delta_{i+1} |\alpha'_1 \cdots \alpha'_i$ por definición.

Ahora

$$\begin{aligned} -\sigma_{i+1}q_{i+1} + \rho_{i+1}u_i &= -\sigma_{i+1}(-\beta'_{i+1}u_{i+1} + \rho_{i+1}x_{i+1}) + \rho_{i+1}(\alpha'_{i+1}u_{i+1} + \sigma_{i+1}x_{i+1}) \\ &= (-\sigma_{i+1}\rho_{i+1} + \rho_{i+1}\sigma_{i+1})x_{i+1} + (\sigma_{i+1}\beta'_{i+1} + \rho_{i+1}\alpha'_{i+1})u_{i+1} \\ &= u_{i+1} \end{aligned} \quad (11)$$

y

$$\begin{aligned} \alpha'_{i+1}q_{i+1} + \beta'_{i+1}u_i &= \alpha'_{i+1}(-\beta'_{i+1}u_{i+1} + \rho_{i+1}x_{i+1}) + \beta'_{i+1}(\alpha'_{i+1}u_{i+1} + \sigma_{i+1}x_{i+1}) \\ &= (\alpha'_{i+1}\rho_{i+1} + \beta'_{i+1}\sigma_{i+1})x_{i+1} + (-\alpha'_{i+1}\beta'_{i+1} + \beta'_{i+1}\alpha'_{i+1})u_{i+1} \\ &= x_{i+1}, \end{aligned} \quad (12)$$

se tiene por tanto un isomorfismo

$$G \stackrel{\varphi_{i+1}}{\cong} \langle x_2, \dots, x_{i+1}, q_{i+2}, \dots, q_r, u_{i+1} : \alpha_{i+2}q_{i+2} + \beta_{i+2}\alpha'_1 \cdots \alpha_{i+1}u_{i+1} = 0, \dots, \\ \alpha_r q_r + \beta_r \alpha'_1 \cdots \alpha'_{i+1} u_{i+1} = 0, \\ \delta_2 x_2 = \dots = \delta_{i+1} x_{i+1} = 0 \rangle.$$

Con las siguientes movidas de Tietze se construye un isomorfismo ψ :

II. Añadir los generadores x_{i+1} , u_{i+1} y las relaciones $u_{i+1} = -\sigma_{i+1}q_{i+1} + \rho_{i+1}u_i$, $x_{i+1} = \alpha'_{i+1}q_{i+1} + \beta'_{i+1}u_i$.

I. Añadir las relaciones $q_{i+1} = \beta'_{i+1}u_{i+1} + \rho_{i+1}x_{i+1}$, $u_i = \alpha'_{i+1}u_{i+1} + \sigma_{i+1}x_{i+1}$, por (7) y (8).

I. Añadir las relaciones $\delta_{i+1}x_{i+1} = 0$, $\alpha_j q_j + \beta_j \alpha'_1 \cdots \alpha'_{i+1} u_{i+1} = 0$, para $j = i+2, \dots, r$, por (9) y (10).

I'. Retirar las relaciones $\alpha_j q_j + \beta_j \alpha'_1 \cdots \alpha'_i u_i = 0$, para $j = i+1, \dots, r$, por (9) y (10).

I'. Retirar las relaciones $u_{i+1} = -\sigma_{i+1}q_{i+1} + \rho_{i+1}u_i$, $x_{i+1} = \alpha'_{i+1}q_{i+1} + \beta'_{i+1}u_i$, por (11) y (12).

II'. Retirar los generadores q_{i+1} , u_i y las relaciones $q_{i+1} = -\beta'_{i+1}u_{i+1} + \rho_{i+1}x_{i+1}$.
 $u_i = \alpha'_{i+1}u_{i+1} + \sigma_{i+1}x_{i+1}$.

El isomorfismo ψ está dado por $\psi(x_j) = x_j$, para $j = 2, \dots, i$; $\psi(u_i) = \alpha'_{i+1}u_{i+1} + \sigma_{i+1}x_{i+1}$; $\psi(q_j) = q_j$, para $j = i+2, \dots, r$; $\psi(q_{i+1}) = -\beta'_{i+1}u_{i+1} + \rho_{i+1}x_{i+1}$.

Tomamos entonces $\varphi_{i+1} := \psi\varphi_i$ y por tanto

$$\begin{aligned}\varphi_{i+1}(h) &= \psi(\alpha'_1 \cdots \alpha'_i u_i) \\ &= \alpha'_1 \cdots \alpha'_i \alpha'_{i+1} u_{i+1} + \alpha'_1 \cdots \alpha'_i \sigma_{i+1} x_{i+1} \\ &= \alpha'_1 \cdots \alpha'_i \alpha'_{i+1} u_{i+1}\end{aligned}$$

ya que $\delta_{i+1} | \alpha'_1 \cdots \alpha'_i$. Ahora

$$\varphi_{i+1}(g_j) = \psi(g_j) = g_j, \text{ para } j = i+2, \dots, r$$

$$\begin{aligned}-\varphi_{i+1}(g_j) &= \psi(\beta'_j \alpha'_{j+1} \cdots \alpha'_i u_i + \beta'_j \alpha'_{j+1} \cdots \alpha'_{i-1} \sigma_i x_i + \\ &\quad + \beta'_j \alpha'_{j+1} \cdots \alpha'_{i-2} \sigma_{i-1} x_{i-1} + \cdots + \beta'_j \sigma_{j+1} x_{j+1} - \rho_j x_j) \\ &= \beta'_j \alpha'_{j+1} \cdots \alpha'_{i+1} u_{i+1} + \beta'_j \alpha'_{j+1} \cdots \alpha'_{i+1} \sigma_{i+1} x_{i+1} + \\ &\quad + \beta'_j \alpha'_{j+1} \cdots \alpha'_{i-1} \sigma_i x_i + \cdots + \beta'_j \sigma_{j+1} x_{j+1} - \rho_j x_j, \text{ para } j = 1, \dots, i. \text{ También}\end{aligned}$$

$$-\varphi_{i+1}(g_{i+1}) = \psi(g_{i+1}) = \beta_{i+1} u_{i+1} - \rho_{i+1} x_{i+1}.$$

El lema se sigue por inducción. \square

COROLARIO 3.6. *El homomorfismo $\varphi_r : G \rightarrow \langle x_2, \dots, x_r, u_r : \delta_2 x_2 = \cdots = \delta_r x_r = 0 \rangle$ dado por*

$$\begin{aligned}\varphi_r h &= \alpha'_1 \cdots \alpha'_r u_r \\ -\varphi_r q_1 &= \beta'_1 \alpha'_2 \cdots \alpha'_r u_r + \beta'_1 \alpha'_2 \cdots \alpha'_{r-1} \sigma_r x_r + \cdots + \beta'_1 \sigma_2 x_2 \\ &\quad \vdots \\ -\varphi_r q_j &= \beta'_j \alpha'_{j+1} \cdots \alpha'_r u_r + \beta'_j \alpha'_{j+1} \cdots \alpha'_{r-1} \sigma_r x_r + \cdots + \beta'_j \sigma_{j+1} x_{j+1} - \rho_j x_j \\ &\quad \vdots \\ -\varphi_r q_r &= \beta'_r u_r - \rho_r x_r\end{aligned}$$

es un isomorfismo. \square

LEMA 3.7. $\varphi_r(-bh + q_1 + \dots + q_r)$ es una combinación lineal entera de u_r, x_2, \dots, x_r .

Si $\varphi_r(-bh + q_1 + \dots + q_r) = \lambda u_r + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_r x_r$, entonces

$$\begin{aligned} -\lambda &= b\alpha'_1 \cdots \alpha'_r + \beta'_1 \alpha'_2 \cdots \alpha'_r + \beta'_2 \alpha'_3 \cdots \alpha'_r + \dots + \beta'_r \\ &= \frac{b\alpha_1 \cdots \alpha_r + \beta_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r + \alpha_1 \beta_2 \cdots \alpha_r + \dots + \alpha_1 \alpha_2 \cdots \beta_r}{\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_r} \\ &= m.c.m.\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} \left(b + \sum_{i=1}^r \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right). \end{aligned}$$

□

DEFINICIÓN 3.1. Si $M = (X, k|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$ una variedad de Seifert, definimos

$$\lambda(M) = m.c.m.\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} \left(b + \sum_{i=1}^r \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right).$$

En lo que sigue utilizaremos continuamente el Corolario 1.8 de la §1, para determinar si $\beta w_1(M)$ es o no el homomorfismo cero, donde M es una variedad de Seifert no orientable. Modificaremos, en cada caso, la presentación del primer grupo de homología dada en el Lema 3.2.

1. $M = (No, k|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$, $k \geq 1$, entonces

$$\begin{aligned} H_1(M) &\cong \langle a_1, b_1, \dots, a_k, b_k, q_1, \dots, q_r, h : -bh + q_1 + \dots + q_r = 0, \\ &\quad \alpha_i q_i + \beta_i h = 0, \\ &\quad 2h = 0 \rangle \\ &\cong \langle a_1, b_1, \dots, a_k, b_k : - \rangle \oplus \langle q_1, \dots, q_r, h : -bh + q_1 + \dots + q_r = 0, \\ &\quad \alpha_i q_i + \beta_i h = 0, \\ &\quad 2h = 0 \rangle \end{aligned}$$

Por tanto los generadores que provienen de la superficie de órbitas tienen todos orden infinito en $H_1(M)$ y por tanto $\beta w_1(M) = 0$.

2. $M = (NnI, 2k|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$, $k \geq 1$, entonces

$$\begin{aligned} H_1(M) &\cong \langle v_1, \dots, v_{2k}, q_1, \dots, q_r, h : -bh + q_1 + \dots + q_r = 2v_1 + \dots + 2v_{2k}, \\ &\quad \alpha_i q_i + \beta_i h = 0 \rangle \\ &\cong \langle v_1, \dots, v_{2k-1} : - \rangle \oplus \langle t, q_1, \dots, q_r, h : -bh + q_1 + \dots + q_r = 2t, \\ &\quad \alpha_i q_i + \beta_i h = 0 \rangle \end{aligned}$$

Donde se hizo el cambio $t = v_1 + \dots + v_{2k}$. Todas las v_i invierten la orientación en M . Como t es la suma par de curvas que invierten la orientación, por tanto t conserva la orientación en M . Luego todas las posibles curvas de orden finito en $H_1(M)$ conservan la orientación en M y $\beta w_1(M) = 0$.

3. $M = (NnIII, k|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$, $k \geq 3$, entonces

$$\begin{aligned} H_1(M) &\cong \langle v_1, \dots, v_k, q_1, \dots, q_r, h : -bh + q_1 + \dots + q_r = 2v_1 + \dots + 2v_k, \\ &\quad \alpha_i q_i + \beta_i h = 0 \rangle \\ &\cong \langle v_1, \dots, v_{k-1} : - \rangle \oplus \langle t, q_1, \dots, q_r, h : -bh + q_1 + \dots + q_r = 2t, \\ &\quad \alpha_i q_i + \beta_i h = 0, \\ &\quad 2h = 0 \rangle \end{aligned}$$

Donde se hizo el cambio $t = v_1 + \dots + v_k$. Ahora v_1 y v_2 invierten la orientación en M y para $i \geq 3$, v_i conserva la orientación en M . De nuevo t conserva la orientación en M y como en el caso 2, $\beta w_1(M) = 0$.

4. $M = (NnII, k|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r)), k \geq 2$, entonces

$$\begin{aligned} H_1(M) &\cong \langle v_1, \dots, v_k, q_1, \dots, q_r, h : -bh + q_1 + \dots + q_r = 2v_1 + \dots + 2v_k, \\ &\quad \alpha_i q_i + \beta_i h = 0 \rangle \\ &\cong \langle v_1, \dots, v_{k-1} : - \rangle \oplus \langle t, q_1, \dots, q_r, h : -bh + q_1 + \dots + q_r = 2t, \\ &\quad \alpha_i q_i + \beta_i h = 0, \\ &\quad 2h = 0 \rangle \end{aligned}$$

Donde se hizo el cambio $t = v_1 + \dots + v_k$. Como v_1 invierte la orientación en M y para $i \geq 2$, v_i conserva la orientación en M , luego t invierte la orientación en M . El segundo sumando de la última presentación es claramente un grupo de torsión y por tanto t tiene orden finito en $H_1(M)$. Luego $\beta w_1(M) \neq 0$.

5. $M = (NnI, 2k+1|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r)),$ entonces

$$\begin{aligned} H_1(M) &\cong \langle v_1, \dots, v_{2k+1}, q_1, \dots, q_r, h : -bh + q_1 + \dots + q_r = 2v_1 + \dots + 2v_{2k+1}, \\ &\quad \alpha_i q_i + \beta_i h = 0 \rangle \\ &\cong \langle v_1, \dots, v_{2k} : - \rangle \oplus \langle t, q_1, \dots, q_r, h : -bh + q_1 + \dots + q_r = 2t, \\ &\quad \alpha_i q_i + \beta_i h = 0 \rangle \end{aligned}$$

Donde se hizo el cambio $t = v_1 + \dots + v_{2k+1}$. Por ser t suma impar de curvas que invierten la orientación en M , se tiene que t invierte la orientación en M .

Luego el que $\beta w_1(M)$ sea cero o no dependerá de si t tiene orden finito o no en el grupo

$$\begin{aligned} &\langle t, q_1, \dots, q_r, h : -bh + q_1 + \dots + q_r = 2t, \alpha_i q_i + \beta_i h = 0 \rangle \\ &\cong H_1(NnI, 1|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r)) \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 3.8.

$$\beta w_1(NnI, 2k+1|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r)) = 0$$

\Leftrightarrow

$$\beta w_1(NnI, 1|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r)) = 0.$$

□

LEMA 3.9.

$$\beta w_1(NnI, 2k+1|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r)) = 0$$

\Leftrightarrow

$$\lambda(M) = m.c.m.\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} \left(b + \sum_{i=1}^r \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right) \text{ es impar.}$$

Demostración. Basta determinar cuándo t tiene orden finito en el grupo

$$\langle t, q_1, \dots, q_r, h : -bh + q_1 + \dots + q_r = 2t, \alpha_i q_i + \beta_i h = 0 \rangle.$$

$$\text{Sea } G := \langle q_1, \dots, q_r, h : \alpha_i q_i + \beta_i h = 0 \rangle.$$

Usando el Corolario 3.6 y el Lema 3.7 tenemos una presentación

$$G = \langle x_2, \dots, x_r, u_r, t : \delta_i x_i = 0, \lambda u_r + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_r x_r = 2t \rangle$$

Supongamos que λ es par.

Definimos $\omega := t - \frac{\lambda}{2}u_r$, entonces $2\delta_2 \cdots \delta_n \omega = 0$, es decir, ω es una curva no orientable, ya que t lo es y u_r es orientable por construcción. Como ω tiene orden finito en $H_1(M)$, por tanto $\beta\omega_1(M) \neq 0$.

Supongamos que λ es impar, digamos $\lambda = 2\ell + 1$.

Definimos

$$\omega := -\ell u_r + t;$$

$$\nu := \lambda u_r - 2t.$$

Luego

$$u_r = 2\omega + \nu;$$

$$t = \lambda\omega + \ell\nu;$$

se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \langle t, d_2, \dots, d_r, u_r : \lambda u_r + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_r x_r = 2t, \delta_i x_i = 0 \rangle &\cong \\ &\cong \langle \omega : - \rangle \oplus \langle x_2, \dots, x_r : \delta_i x_i = 0 \rangle. \end{aligned}$$

Como x_2, \dots, x_r son claramente curvas orientables, se concluye que $\beta\omega_1(M) = 0$.

□

Resumiendo, podemos concluir la siguiente forma equivalente del Teorema 3.1:

Si M es la variedad de Seifert asociada con el símbolo de Seifert

$$(Xx, k|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r)),$$

donde $Xx \in \{N_0, NnI, NnII, NnIII\}$, entonces

$\beta w_1(M) = 0$ si y sólo si

i) $Xx = No$, o bien

ii) $Xx = NnIII$, o bien

iii) $Xx = NnI$ y k es par, o bien

iv) $Xx = NnI$, k es impar y $\lambda(M) = m.c.m.\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} \left(b + \sum_{i=1}^r \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right)$ es impar.

□

§4. FIBRACIONES SOBRE S^1 .

El hecho básico en el tema de las fibricaciones es el

TEOREMA 4.1. [Stallings] Sea M una 3-variedad compacta e irreducible. Si $\pi_1(M)$ tiene un subgrupo $N \neq Z_2$ normal y finitamente generado tal que $\frac{\pi_1(M)}{N} \cong Z$, entonces M fibra sobre S^1 con fibra una 2-variedad compacta T tal que $\pi_1(T) \cong N$.

Esbozo de la demostración. Como se tiene un epimorfismo $\varphi_* : \pi_1(M) \rightarrow Z$ y M es asférica por ser irreducible, por tanto existe una función continua $\varphi : M \rightarrow S^1$ tal que $\varphi_* = \varphi_*$. Deformando a φ adecuadamente podemos obtener que $\varphi^{-1}(1) = T \subset M$ sea una superficie incompresible. Stallings continúa demostrando que efectivamente $\pi_1(T) \cong N$ y que M es un S^1 -haz con fibra T y proyección φ . \square

OBSERVACIÓN 4.1. La proyección φ tiene una sección $\psi : S^1 \rightarrow M$ tal que $\#(\psi(S^1) \cap T) = 1$.

En todo lo que sigue, si $F \subset M \rightarrow S^1$ es una fibración y M es una variedad de Seifert, llamaremos a F la "hoja" de la fibración y las fibras de la fibración de Seifert de M se seguirán llamando las "fibras" de M .

A menos que se indique lo contrario supondremos siempre que la fibración es *equivariante*, es decir, la hoja de la fibración es transversal a todas las fibras de M .

El siguiente resultado de Orlik, Vogt y Zieschang se pueden encontrar en [Orlik p. 120-121].

TEOREMA 4.2. *Sea G el grupo fundamental de la variedad de Seifert M y H el subgrupo cíclico generado por una fibra ordinaria h . Supongamos que H es infinito y que M es irreducible.*

Entonces $[G, G] \cap H = 1$ si y sólo si M fibra sobre S^1 con fibra una superficie compacta F .

OBSERVACIÓN 4.2. La condición $[G, G] \cap H = 1$ en el Teorema 4.2, es equivalente a que h tenga orden infinito en $H_1(M)$. Recordamos que en el teorema anterior se está hablando de una fibración sobre S^1 *equivariante*.

Por ejemplo, si $M = (N\theta, 1|(1, 0))$ entonces $2h = 0$ en $H_1(M)$, por tanto M no tiene fibraciones *equivariantes* sobre S^1 , sin embargo $M \cong (N\pi I, 2|(1, 0)) = K^2 \times S^1$, donde K^2 es la botella de Klein.

La condición de que M sea irreducible en los teoremas anteriores realmente no es una restricción para las variedades de Seifert pues se tiene el

TEOREMA 4.3. [Jaco, p.] *Sea M variedad de Seifert, entonces M es irreducible si*

y sólo si $M \notin \{P^3 \# P^3, S^2 \times S^1, S^2 \otimes S^1\}$, donde $S^2 \otimes S^1$ es el haz de esferas no trivial sobre S^1 . \square

LEMA 4.4. Supongamos que $\langle u_1, \dots, u_n : - \rangle \oplus T \cong \langle u'_1, \dots, u'_n : - \rangle \oplus T$, donde T es un grupo de torsión y las presentaciones son de grupos abelianos.

Si existen a y b enteros tales que $au_n = bu'_n$, entonces $a = \pm b$.

Demostración. Como $u_n = b_1 u'_1 + \dots + b_n u'_n + t$ para algún $t \in T$, por tanto

$$au_n = ab_1 u'_1 + \dots + ab_n u'_n + at = bu'_n;$$

luego $ab_n u'_n = bu'_n$. Como u'_n tiene orden infinito, se sigue que $ab_n = b$, es decir, $a|b$. De manera similar obtenemos que $b|a$ y por tanto $a = \pm b$. \square

Estudiaremos la estructura de las fibraciones sobre S^1 de las variedades de Seifert.

Sea $\varphi : F \subset M \rightarrow S^1$ una fibración, donde M es la variedad de Seifert irreducible $(X, k|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$. Sea $p : M \rightarrow G$ la proyección de órbitas de M . Suponemos que F es transversal a todas las fibras de M . Como M es irreducible, por tanto $F \not\cong S^2$. Supondremos también que $F \not\cong P^2$, que es lo mismo que pedir que $M \not\cong P^2 \times S^1$.

Supongamos que existe $H \leq H_1(M)$ subgrupo cíclico que es sumando directo de $H_1(M)$ y que contiene a h (por supuesto, este es siempre el caso) y sea u un generador de H . Ahora, si $u \cdot [F] = d$, entonces $h \cdot [F] = d\alpha$, donde $h = \alpha u$, $\alpha \geq 1$. Por el Lema 4.4, α es un número bien definido. Definimos $\bar{g} = p|_F : F \rightarrow G$, entonces $\bar{g}^{-1}(x) = p^{-1}(x) \cap F$ tiene $d\alpha$ puntos para todo $x \in G$ punto ordinario y $\bar{g}^{-1}(y) = p^{-1}(y) \cap F$ tiene $\frac{d\alpha}{\alpha_k}$ puntos para todo $y \in G$ punto excepcional de orden α_k , es decir, \bar{g} es una cubierta ramificada de grado total $d\alpha$ ramificada a lo largo de $\{p_1, \dots, p_r\} \subset G$, donde p_i es el

punto excepcional de orden α_i y \bar{y} tiene grado local α_i en \bar{y} para todo $\bar{y} \in \bar{y}^{-1}(p_i)$, $i = 1, \dots, r$.

Según la fórmula de Riemann-Hurwitz

$$\begin{aligned}\chi(F) &= d\alpha\chi(G) - \sum_{y \in \bar{y}^{-1}\{p_1, \dots, p_r\}} (\deg(\bar{y}; y) - 1) \\ &= d\alpha\chi(G) - \sum_{i=1}^r \sum_{t=1}^{d\alpha/\alpha_i} (\alpha_i - 1) \\ &= d\alpha\chi(G) - \sum_{i=1}^r \frac{d\alpha}{\alpha_i} (\alpha_i - 1)\end{aligned}$$

Nótese que como $H_1(M) = K \oplus H$, donde $K \leq H_1(M)$, por tanto tenemos el epimorfismo $f : H_1(M) \rightarrow Z$ tal que $f(u) = 1$ y $f(K) = \{0\}$ y por tanto tenemos el epimorfismo $\bar{f} = Ab \circ f : \pi_1(M) \rightarrow Z$ (Ab es la abelianización). Según la construcción de Stallings y el Teorema 4.3, podemos construir una fibración $F' \subset M \rightarrow S^1$ tal que $u \cdot [F'] = 1$ y por tanto $h \cdot [F'] = \alpha$. Veremos adelante (Lemas 4.6 y 4.7) que, por supuesto, esta es la fibración "mínima" de M .

Como $\varphi : F \subset M \rightarrow S^1$ es una fibración y M es de Seifert, por tanto existe un homeomorfismo periódico $g : F \rightarrow F$ de orden finito tal que $M \cong \frac{F \times I}{g}$. Por construcción $\frac{F}{g} = G$ y la proyección $F \rightarrow G$ coincide con \bar{g} , es decir, \bar{g} es una cubierta cónica con traslación cubriente g .

Analizaremos un poco más la naturaleza de \bar{g} :

LEMA 4.5. Sean G, H, K grupos, $f : G \rightarrow H$ y $g : H \rightarrow K$ homomorfismos tales que Imf es normal en H .

a) Si g es epimorfismo, entonces $g \circ f$ es epimorfismo $\Leftrightarrow ImfKerg = H$.

b) Si $p : H \rightarrow \frac{H}{\text{Im}f}$ es la proyección natural, entonces $\text{Im}f\text{Kerg} = H \Leftrightarrow \text{Im}p = p(\text{Kerg})$.

Demostración. (a) Supongamos que $g \circ f$ es epimorfismo. Sea $x \in H$, por hipótesis existe $t \in G$ tal que $g \circ f(t) = g(x)$; por tanto $f(t)^{-1}x \in \text{Kerg}$ y $x = f(t)[f(t)^{-1}x] \in \text{Im}f\text{Kerg}$. Luego $H \subset \text{Im}f\text{Kerg}$.

Supongamos ahora que $\text{Im}f\text{Kerg} = H$. Sea $y \in K$, como g es epimorfismo, existe $v \in H$ tal que $g(v) = y$; por hipótesis existe $t \in G$ y $k \in \text{Kerg}$ tal que $v = f(t)k$; luego $g \circ f(t) = g(f(t)) = g(f(t))g(k) = g(f(t)k) = g(v) = y$, es decir, $g \circ f$ es epimorfismo.

(b) Supongamos que $\text{Im}f\text{Kerg} = H$. Sea $x \in \text{Im}p$, por tanto existe $v \in H$ tal que $x = p(v)$; por hipótesis existen $t \in G$ y $k \in \text{Kerg}$ tal que $v = f(t)k$; luego $x = p(v) = p(f(t)k) = p(f(t))p(k) = p(k) \in p(\text{Kerg})$; por tanto $\text{Im}p \subset p(\text{Kerg})$.

Supongamos que $\text{Im}p = p(\text{Kerg})$. Sea $x \in H$; por hipótesis existe $k \in \text{Kerg}$ tal que $p(x) = p(k)$; por tanto $p(xk^{-1}) = 1$ y por tanto $xk^{-1} \in \text{Im}f$; luego existe $r \in G$ tal que $xk^{-1} = f(r)$. Se sigue que $x = f(r)k \in \text{Im}f\text{Kerg}$; por tanto $H \subset \text{Im}f\text{Kerg}$. \square

LEMA 4.6. Sea B superficie cerrada. Sea $\varphi : F \rightarrow B$ una cubierta cíclica ramificada a lo largo de $B_\varphi = \{p_1, \dots, p_r\}$ tal que el grado local de φ en \tilde{p} es α_i para todo $\tilde{p} \in \varphi^{-1}(p_i)$, $i = 1, \dots, r$.

(i) Si q es el grado total de φ y $\alpha = \text{m.c.m.}\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$, entonces $\alpha | q$.

Además $q = \alpha$ si y sólo si φ es primitiva, es decir, $\varphi_\# : \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(B)$ es epimorfismo.

(ii) Si φ es primitiva, entonces B es no orientable si y sólo si F es no orientable.

Demostración. "(i)" Sea $D_i \subset B$ una vecindad regular de p_i tal que $D_i \cap D_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y sea $d_i = \partial D_i$ para $i, j = 1, \dots, r$. Definimos $\hat{B} = \overline{B - \bigcup D_i}$ y $\hat{F} = \overline{F - \bigcup \varphi^{-1}(D_i)}$.

Si $\pi_1 B = \langle x_1, \dots, x_n : s = 1 \rangle$ (presentación no abeliana), donde s es un producto de conmutadores o un producto de cuadrados dependiendo de que B sea orientable o no, entonces $\pi_1 \hat{B} = \langle x_1, \dots, x_n, d_1, \dots, d_r : d_1 \cdots d_r = s \rangle$; luego $i_{\#}$ es epimorfismo y $\text{Ker } i_{\#} = \langle d_1, \dots, d_r \rangle$ el subgrupo normal generado por $\{d_1, \dots, d_r\}$, donde $i : \hat{B} \hookrightarrow B$ es la inclusión. Como φ es cíclica, por tanto $\frac{\pi_1 \hat{B}}{\text{Im } \varphi|_{\#}} = Z_q$. Sea \tilde{D}_i una componente de $\varphi^{-1}(D_i)$; como el grado local de φ en \tilde{p} es α_i para todo $\tilde{p} \in \varphi^{-1}(p_i)$, por tanto $\varphi|_{\#} \partial \tilde{D}_i = d_i^{\alpha_i}$ y $\varphi|_{\#} \gamma \neq d_i^{\beta}$ para $0 < |\beta| < \alpha_i$, toda $\gamma \in \pi_1 \hat{B}$ y toda $i \in \{1, \dots, r\}$. Luego $o([d_i]) = \alpha_i$ en $\frac{\pi_1 \hat{B}}{\text{Im } \varphi|_{\#}} = Z_q$, en particular $\alpha_i | q$ para toda $i \in \{1, \dots, r\}$, por tanto $\alpha = \text{m.c.m.}\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} | q$.

Supongamos ahora que $\alpha = q$. Ésto pasa si y sólo si $\frac{\pi_1 \hat{B}}{\text{Im } \varphi|_{\#}} = \langle [d_1], \dots, [d_r] \rangle = p(\text{Ker } i_{\#})$, donde $p : \pi_1 \hat{B} \rightarrow \frac{\pi_1 \hat{B}}{\text{Im } \varphi|_{\#}}$ es la proyección natural. Según el Lema 4.4, esta condición es equivalente a que $\varphi|_{\#}$ o $i_{\#}$ sea epimorfismo ya que, como habíamos observado, $i_{\#}$ es epimorfismo.

Como el diagrama de homomorfismos

$$\begin{array}{ccc} \pi_1 \hat{F} & \xrightarrow{j_{\#}} & \pi_1 F \\ \varphi|_{\#} \downarrow & & \downarrow \varphi_{\#} \\ \pi_1 \hat{B} & \xrightarrow{i_{\#}} & \pi_1 B \end{array}$$

conmuta, se sigue que $\varphi|_{\#}$ o $i_{\#}$ es epimorfismo si y sólo si $\varphi_{\#}$ es epimorfismo, ya que $j_{\#}$ es epimorfismo.

"(ii)" Si F es no orientable, entonces G es no orientable por el Lema 1.9.

Supongamos que G es no orientable y que F es orientable. Sea $W \leq \pi_1(\hat{B})$ el

subgrupo de orientación de índice 2; entonces $Im\varphi|_{\#} \leq W$; como $Im\varphi|_{\#} \cdot Keri_{\#} = \pi_1(\hat{B})$, se concluye que hay elementos en $Keri_{\#}$ que invierten la orientación en \hat{B} , pues el índice de W en $\pi_1(\hat{B})$ es 2. Ésto es una contradicción pues $Keri_{\#}$ está generado por las componentes de la frontera de \hat{B} . Debemos concluir que F es no orientable. \square

Podemos ahora analizar con más detalle la estructura de las variedades de Seifert que fibran sobre S^1 .

LEMA 4.7. *Sea M variedad de Seifert. Si $F' \subset M \rightarrow S^1$ es una fibración y $p: M \rightarrow G$ es la proyección de órbitas, entonces $\varphi := p|_{F'}: F' \rightarrow G$ se factoriza a través de una cubierta ramificada primitiva $\bar{y}: F \rightarrow G$ y un espacio cubriente $\psi: F' \rightarrow F$.*

Demostración. Llamamos $\hat{G} := G - B_{\phi}$. Sea $\rho: \pi_1(\hat{G}) \rightarrow \frac{\pi_1(\hat{G})}{Im\varphi|_{\#}}$ la proyección natural. Como $\frac{\pi_1(\hat{G})}{Im\varphi|_{\#}} \cong Z_{q\alpha}$ para algún q entero positivo, entonces

$$H := \rho^{-1}\{0, q, 2q, \dots, (\alpha - 1)q\}$$

es un subgrupo de $\pi_1(\hat{G})$ de índice α y $Im\varphi|_{\#} \leq H$. Luego existen $\hat{\psi}: \hat{F}' \rightarrow \hat{F}$ cubriente de grado q y $\hat{y}: \hat{F} \rightarrow \hat{G}$ cubriente cíclico de grado α que factorizan a φ . Tomando la compactación de Fox, obtenemos $\psi: F' \rightarrow F$ cubriente de grado q y $\bar{y}: F \rightarrow G$ cubierta cíclica de grado α que es primitiva según el Lema 4.6. \square

El caso orientable.

TEOREMA 4.8. *Si M es una variedad de Seifert orientable que fibra sobre S^1 , entonces $M \in (Oo, g)$.*

Si $M = (Oo, g|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$, entonces M fibra sobre S^1 si y sólo si

$b + \sum_{i=1}^r \frac{\beta_i}{\alpha_i} = 0$ y en este caso la hoja F de característica de Euler máxima *satisface*

$$\chi(F) = \alpha \chi(G) - \sum_{i=1}^r \frac{\alpha}{\alpha_i} (\alpha_i - 1),$$

donde $\alpha = m.c.m.\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ y G es la superficie de órbitas de M .

Demostración. Supongamos que M es orientable.

i) Si $M \in (Or, k)$, entonces tenemos explícitamente la relación $2h = 0$ en la presentación del Lema 3.2 y por tanto M no fibra sobre S^1 .

ii) Si $M = (Oo, g|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$, entonces

$$H_1(M) \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^{2g} \oplus \langle x_1, \dots, x_r, u_r : \delta_i x_i = 0, -\lambda u_r = \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_r x_r \rangle$$

y

$$\varphi_r(h) = m.c.m.\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} u_r,$$

por el Corolario 3.6 y el Corolario 3.7.

Se sigue que h tiene orden infinito en $H_1(M)$ si y sólo si $-\lambda = -\lambda(M) = 0$ y esto si y sólo si $b + \sum_{i=1}^r \frac{\beta_i}{\alpha_i} = 0$ (que es la misma condición de [Orlik, p.122]).

Nótese que el subgrupo cíclico sumando directo de $H_1(M)$ que contiene a h es $H = \langle u_r \rangle$. \square

El caso no orientable.

TEOREMA 4.10. Si M es una variedad de Seifert no orientable, entonces M fibra sobre S^1 si y sólo si $M \in (NnI, k)$.

Si $M = (NnI, k|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$ con superficie de órbitas G , entonces M fibra sobre S^1 con hoja una superficie F que satisface:

i) Si $\lambda(M)$ es impar, entonces F es orientable y la hoja de característica de Euler máxima satisface

$$\chi(F) = 2\alpha\chi(G) - \sum_{i=1}^r \frac{2\alpha}{\alpha_i} (\alpha_i - 1).$$

ii) Si $\lambda(M)$ es par, entonces F es no orientable y si k es par, entonces $\chi(F)$ es par. La hoja F de característica de Euler máxima satisface

$$\chi(F) = \alpha\chi(G) - \sum_{i=1}^r \frac{\alpha}{\alpha_i} (\alpha_i - 1),$$

donde $\alpha = m.c.m. \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ en todos los casos.

Demostración. Supongamos que M es no orientable.

— Si $M \in (No, k)$, o bien

— si $M \in (NnII, k)$, o bien

— si $M \in (NnIII, k)$, entonces $2h = 0$ y por tanto M no fibra sobre S^1 .

— Si $M = (NnI, k|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$, entonces

$$H_1(M) \cong Z^{k-1} \oplus \langle x_2, \dots, x_r, u_r : \delta_i x_i = 0, 2t - \lambda u_r = \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_r x_r \rangle.$$

1er. caso. $\lambda = \lambda(M)$ es impar, digamos $\lambda = 2\ell + 1$.

Definimos $w := -\ell u_r + t$, $v := \lambda u_r - 2t$, entonces $u_r = 2w + v$ y $t = \lambda w + \ell v$; haciendo movidas de Tietze obtenemos

$$\begin{aligned} H_1(M) &\cong Z^{k-1} \oplus \langle w : - \rangle \oplus \langle x_2, \dots, x_r, v : \delta_i x_i = 0, \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_r x_r = v \rangle \\ &= Z^{k-1} \oplus \langle w : - \rangle \oplus \langle x_2, \dots, x_r : \delta_i x_i = 0 \rangle, \end{aligned}$$

entonces $\varphi(h) = \alpha u_r = 2\alpha w$ tiene orden infinito en $H_1(M)$ y M fibra sobre S^1 con hoja una superficie $F \subset M$ y $\bar{g} = p|_F : F \rightarrow G$ es una cubierta ramificada cíclica de grado total 2α .

Nótese que el subgrupo cíclico sumando directo de $H_1(M)$ que contiene a h es $H = \langle w \rangle$.

Si además hubiera otra fibricación $F' \subset M \rightarrow S^1$, de manera similar a la demostración del Lema 4.7, se obtendría un espacio cubriente $F' \rightarrow F$. Luego $\chi(F) \geq \chi(F')$ y F' es orientable, si F es orientable.

Luego en caso de existir una fibricación $F \subset M \rightarrow S^1$ con hoja orientable y tal que la cubierta ramificada asociada $F \rightarrow G$ tiene grado total 2α , entonces todas las posibles fibricaciones $M \rightarrow S^1$ tienen hoja orientable.

Supongamos que F es orientable. Si $\rho : \tilde{G} \rightarrow G$ es la doble cubierta de orientación, entonces tenemos la siguiente factorización

$$\begin{array}{ccc} & & F \\ & \swarrow \bar{g} & \\ \tilde{G} & & \downarrow \bar{g} \\ & \searrow \rho & \\ & & G \end{array}$$

y \bar{g} satisface las hipótesis de Lema 4.5, es decir, es una cubierta ramificada a lo largo de $\{p_1, p'_1, \dots, p_r, p'_r\}$, el grado local de \bar{g} en p es α_i para todo $p \in \bar{g}^{-1}(p_i)$ y para todo $p \in \bar{g}^{-1}(p'_i)$ y el grado total de \bar{g} es $\alpha = m.c.m.\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$. Luego \bar{g} es primitiva.

Exhibiremos una cubierta ramificada con las propiedades anteriores con F orientable.

LEMA 4.9. Si $M = (NnI, k|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$ y $\lambda(M)$ es impar, entonces

existe F superficie orientable y $g: F \rightarrow F$ homeomorfismo periódico de orden $2\alpha = 2m.c.m.\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ tal que $M = \frac{F \times I}{g}$.

Demostración. Sea Γ_t la unión de los segmentos $\bigcup_{m=1}^{t-1} \{te^{2\pi im/t} | 0 \leq t \leq 1\}$. Para $k \in \{1, \dots, r\}$ tómesese la cubierta ramificada $\varphi_k: \frac{\alpha}{\alpha_k} S^2 \rightarrow S^2$ descrita de la siguiente manera (donde $\frac{\alpha}{\alpha_k} S^2 = \bigcup_{i=1}^{\alpha/\alpha_k} S^2$):

Sea $S_1 \subset R^3$ la frontera de una vecindad regular pequeña de $\Gamma_{\alpha_k} \times \{0\}$ en R^3 . Entonces $S_1 \cong S^2$. Para $j \in \{2, \dots, \frac{\alpha}{\alpha_k}\}$ construimos a S_j como la imagen de S_1 bajo la rotación de $2\pi \frac{j\beta_k}{\alpha}$ grados con eje de rotación el eje z seguida de la traslación $(x, y, z) \mapsto (x, y, z + j)$.

De tal manera que $S_1 \cup \dots \cup S_{\alpha/\alpha_k} \cong \frac{\alpha}{\alpha_k} S^2$. Entoces definimos a $\varphi_k(x)$ como el punto que se obtiene de rotar a R^3 un ángulo de $2\pi \frac{\beta_k}{\alpha}$ con eje de rotación el eje z y trasladar una distancia de 1 en dirección del eje z para $x \in S_j$, $j = 1, \dots, \frac{\alpha}{\alpha_k} - 1$ y a $\varphi_k(x)$ como el punto que se obtiene de rotar a R^3 un ángulo de $2\pi \frac{\beta_k}{\alpha}$ con eje de rotación el eje z y trasladar una distancia de $-\frac{\alpha}{\alpha_k}$ en dirección del eje z para $x \in S_{\alpha/\alpha_k}$.

Luego φ_k es una cubierta cíclica ramificada en dos puntos p_k y p'_k de grado total α y grado local en p igual a α_k para todo $p \in \varphi_k^{-1}(p_k)$ y todo $p \in \varphi_k^{-1}(p'_k)$.

Construimos ahora a $\varphi': F' \rightarrow S^2$ tomando la suma conexa $\varphi_1 \# \varphi_2 \# \dots \# \varphi_r$ (por ejemplo, para construir $\varphi_1 \# \varphi_2$, se toman dos 2-discos D_1 y D_2 en las bases de φ_1 y φ_2 , respectivamente, que no toquen a la ramificación. Entonces $\varphi_1^{-1}(D_1) \cong \varphi_2^{-1}(D_2) \cong \alpha D^2$ y se puede realizar la suma conexa equivariante en la base, a lo largo de D_1 y D_2 y, en el dominio, a lo largo de $\varphi_1^{-1}(D_1)$ y $\varphi_2^{-1}(D_2)$).

A continuación tomamos la cubierta $\eta : \alpha\tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$ de α hojas y sin ramificación y realizamos $\varphi'' = \varphi' \# \eta : F \rightarrow \tilde{G}$, donde $\tilde{G} \rightarrow G$ es la cubierta doble de orientación.

La cubierta ramificada φ'' es cíclica y posee una traslación cubriente $g : F \rightarrow F$ de orden α .

OBSERVACIÓN 4.3.

$$\frac{F \times I}{g} = (Oo, genero(\tilde{G}))((1, \bar{b}), (\alpha_1, \beta_1), (-\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r), (-\alpha_r, \beta_r))$$

y después de normalizar

$$\frac{F \times I}{g} = (Oo, genero(\tilde{G}))((1, \bar{b}), (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_1, \alpha_1 - \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r), (\alpha_r, \alpha_r - \beta_r)),$$

donde $\bar{b} = -\sum \frac{\beta_i}{\alpha_i} - \sum \frac{\alpha_i - \beta_i}{\alpha_i}$.

Podemos arreglar los puntos de ramificación $\{p_1, p'_1, \dots, p_r, p'_r\}$ en \tilde{G} de tal manera que $u(p_j) = p'_j$ para $j = 1, \dots, r$, donde $u : \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$ es la traslación cubriente de $\tilde{G} \rightarrow G$. Así levantamos a u a un homeomorfismo $\tilde{u} : F \rightarrow F$ tal que $\tilde{u} \circ g = g \circ \tilde{u}$.

Finalmente definimos $\varphi = g \circ \tilde{u} : F \rightarrow F$ que tiene las propiedades exigidas. \square

OBSERVACIÓN 4.4. La manera de obtener a M a partir de $F \times I/g$ está determinada por los invariantes de Seifert de M según la construcción anterior. Luego $\lambda(M)$ debe ser impar. En otras palabras, si $M \in (NnI, k)$ y $F \subset M \rightarrow S^1$ es la fibración para la que $\chi(F)$ se maximiza con F orientable, entonces $\lambda(M)$ debe ser impar.

2do. caso. $\lambda = \lambda(M)$ es par, digamos $\lambda = 2\ell$.

Definimos $w := t - \frac{\lambda}{2}u_r = t - \ell u_r$; haciendo movidas de Tietze obtenemos

$$H_1(M) \cong Z^{k-1} \oplus \langle u_r : - \rangle \oplus \langle x_2, \dots, x_r, w : \delta_i x_i = 0, 2w = \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_r x_r \rangle.$$

Entonces $\varphi(h) = \alpha u_r$ tiene orden infinito en $H_1(M)$ y M fibra sobre S^1 con hoja una superficie F .

Nótese que el subgrupo cíclico sumando directo de $H_1(M)$ que contiene a h es $H = \langle u_r \rangle$.

La superficie F debe ser no orientable por el Lema 4.7.

Si k es par, entonces F también debe ser no orientable y además $\chi(F)$ es par. En efecto, si $\chi(F)$ es impar, entonces existe $\gamma \subset F$ lazo simple que invierte la orientación en F y el orden de γ en $H_1(F)$ es 2. Como F es bilateral en M , por tanto γ invierte la orientación en M y por tanto γ no es nulhomóloga en M . Si $i : F \hookrightarrow M$ es la inclusión entonces $2[\gamma] = 2i_*[\gamma] = i_*2[\gamma] = 0$, es decir, γ tiene orden finito en $H_1(M)$ y por el Teorema 3.1 debería suceder que $\beta w_1(M) \neq 0$, contradiciendo al hecho de que k es par. \square

Subrayamos el siguiente hecho que da una caracterización geométrica de un resultado de la §3.

COROLARIO 4.11. $M \in (NnI, 2k+1)$

\implies

$\beta w_1(M) = 0 \Leftrightarrow$ para toda fibración $F \subset M \rightarrow S^1$, F es orientable. \square

Nos interesará el caso en que la hoja F es un toro.

TEOREMA 4.12. [Hempel] Si M es una variedad de Seifert que fibra sobre S^1 con hoja un toro T y monodromía $\varphi : T \rightarrow T$ de orden finito, entonces M es alguno de los siete espacios siguientes:

i) $M = (Oo, 1|(1, 0)).$

ii) $M = (Oo, 0|(1, -2), (2, 1), (2, 1), (2, 1), (2, 1)).$

iii) $M = (No, 1|(1, 0)) = (NnI, 2|(1, 0)).$

iv) $M = (NnI, 2|(1, 1)).$

v) $M = (Oo, 0|(1, 1), (3, 1), (3, 2)).$

vi) M se obtiene de $\varphi(x, y) = (y, -x).$

vii) M se obtiene de $\varphi(x, y) = (-y, x + y).$

OSERVACIÓN 4.5. La fibración del teorema anterior en los casos (iii), (vi) y (vii) no es equivariante respecto a la estructura de variedad de Seifert de M , tampoco se tiene que $\frac{T}{\varphi}$ sea homeomorfa a la superficie de órbitas (ni siquiera es superficie cerrada).

Notamos también que hay variedades de Seifert que fibran sobre S^1 con hoja un toro, pero con monodromía de orden infinito, por ejemplo, las variedades $(Oo, 1|(1, b))$ con b un entero; en todas éstas la fibra tiene orden finito en el primer grupo de homología.

§5. SUPERFICIES DE WHITNEY EN VARIEDADES DE SEIFERT.

TEOREMA 5.1. Sea $p: M \rightarrow G$ variedad de Seifert no orientable, entonces existe $T \subset M$ toro hecho de fibras de M tal que $M - T$ es orientable.

En los siguientes casos T es bilateral:

i) $M \in (No, g)$, $g \geq 1$,

ii) $M \in (NnI, 2k)$, $k \geq 1$,

iii) $M \in (NnIII, k)$, $k \geq 3$.

En los casos restantes T es unilateral:

iv) $M \in (NnI, 2k + 1)$, $k \geq 0$,

v) $M \in (NnII, k)$, $k \geq 2$.

Se verá en la Proposición 5.2 y la Proposición 5.3 que en los casos (i), (ii) y (iii) T

necesariamente es bilateral y que en los casos (iv) y (v) necesariamente T es unilateral.

Demostración del Teorema 5.1. Sea $p: M \rightarrow G$ la proyección de órbitas.

"(i)" Supongamos que $M \in (No, g)$ y sea $\{a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g\} \subset G$ un sistema fundamental de curvas para $H_1(G)$ tal que $a_i \cap a_j = \emptyset$, $a_i \cap b_j = \emptyset$, $b_i \cap b_j = \emptyset$ para $i \neq j$ y $a_i \cap b_i$ es un punto para $i = 1, \dots, g$.

Entonces, sin perder la generalidad, la evaluación en G , $ev: H_1(G) \rightarrow Z_2$ es el homomorfismo $ev(a_i) = -1$, $ev(b_j) = ev(a_i) = +1$ para $i \in \{2, \dots, g\}$ $j \in \{1, \dots, g\}$, según el Teorema 2.5, (i).

Luego $T := p^{-1}(b_1)$ es un toro fibrado bilateral en M , ya que b_1 es una curva bilateral en G , y $M - T$ es orientable porque $ev|: H_1(G - a_1) \rightarrow Z_2$ es el homomorfismo trivial (compárese con la Observación 2.8).

"(ii)" Supongamos que $M \in (NnI, 2k)$, entonces G se puede representar como una superficie orientable de género $k - 1$ más una asa no orientable.

Sea $\{a_1, \dots, a_k, b, b_2, \dots, b_k\} \subset G$ un sistema fundamental de curvas para $H_1(G)$ donde a_i, b_i y b son curvas que conservan la orientación en G para $i \geq 2$ y a_1 es una curva que invierte la orientación en G .

Luego $T := p^{-1}(b)$ es un toro fibrado bilateral en M ya que b es una curva bilateral en G .

Ahora $G - b$ es una superficie orientable y $ev|: H_1(G - b) \rightarrow Z_2$ es trivial, por tanto $M - T$ es orientable.

"(iii)" Supongamos que $M \in (NnIII, k)$. Sea $\{v_1, \dots, v_k\} \subset G$ un sistema funda-

mental de curvas para $H_1(G)$ donde $v_i \subset G$ invierte la orientación para $i \in \{1, \dots, k\}$.

Entonces, sin perder la generalidad, la evaluación $ev : H_1(G) \rightarrow Z_2$ es el homeomorfismo $ev(v_1) = ev(v_2) = +1$ y $ev(v_i) = -1$ para $i \geq 3$, una por cada gorro cruzado de G .

Sea $\omega \subset G$ una curva simple cerrada Z -homóloga a $v_1 + v_2$, entonces ω es una curva bilateral en G de valor $ev(v_1) \cdot ev(v_2) = +1$.

Si $T := p^{-1}(\omega)$, entonces T es por tanto un toro bilateral fibrado y $M - T$ es orientable ya que $ev| = w_1(G - \omega) : H_1(G - \omega) \rightarrow Z_2$.

“(iv)” Supongamos que $M \in (NnI, 2k + 1)$, entonces G se puede representar como una superficie orientable de género k más un gorro cruzado. Si P^1 es la curva simple cerrada unilateral del gorro cruzado de G , entonces $G - P^1$ es orientable y como $ev : H_1(G) \rightarrow Z_2$ es trivial, por tanto $ev| : H_1(G - P^1) \rightarrow Z_2$ es trivial.

Luego si $T := p^{-1}(P^1)$, entonces T es un toro fibrado unilateral en M y $M - T$ es orientable.

“(v)” Supongamos que $M \in (NnII, k)$ y sea $\{v_1, \dots, v_k\} \subset G$ un sistema fundamental de curvas para $H_1(G)$ donde $v_i \subset G$ es unilateral en G para $i = 1, \dots, k$. Entonces sin perder la generalidad, $ev : H_1(G) \rightarrow Z_2$ es el homomorfismo tal que $ev(v_1) = +1$ y $ev(v_i) = -1$ para $i \geq 2$.

Si $T := p^{-1}(v_1)$, entonces T es un toro fibrado unilateral en M y $M - T$ es orientable ya que $ev| = w_1(G - v_1)$. \square

PROPOSICIÓN 5.2. En los casos (iv) y (v) del Teorema 5.1, si $T \subset M$ es un toro

fibrado bilateral, entonces $M - T$ es no orientable.

Demostración. En el caso (v) es imposible que exista una superficie bilateral cuyo complemento en M sea orientable por el Teorema 1.13, ya que $\beta w_1(M) \neq 0$ según el Teorema 3.1.

En el caso (iv), si $T \subset M$ es un toro fibrado bilateral, entonces $p(T) \subset G$ es una curva bilateral y por tanto $G - p(T)$ es no orientable ya que $\chi(G)$ es impar y como $ev|$ es trivial, es decir, $ev| \neq w_1(G - p(T))$, se sigue que $M - T$ es no orientable. \square

PROPOSICIÓN 5.3. *En los casos (i), (ii) y (iii) del Teorema 5.1, si $T \subset M$ es un toro fibrado unilateral, entonces $M - T$ es no orientable.*

Demostración. Si $p : M \rightarrow G$ es la proyección de órbitas, entonces $p(T)$ es una curva unilateral en G .

Luego en el caso (i) es imposible que exista un toro unilateral fibrado.

En el caso (ii) como $\chi(G)$ es par, se tiene que $G - p(T)$ es no orientable y como la evaluación de G es trivial, por tanto $M - T$ es no orientable.

En el caso (iii), como $p(T)$ es una curva unilateral de valor $+1$, debe existir en G al menos otra curva unilateral de valor $+1$, de lo contrario M estaría en la clase $NnII$. Luego la evaluación de $G - p(T)$ es distinta de la primera clase de Siefel-Whitney de G y por tanto $M - T$ debe ser no orientable. \square

COROLARIO 5.4. *Sea M variedad de Seifert no orientable. Si $T, T' \subset M$ son toros fibrados tales que $M - T$ y $M - T'$ son orientables, entonces $M - T$ y $M - T'$ son homeomorfas mediante un homeomorfismo que respeta las fibras.*

Demostración. De la demostración del Teorema 5.1 es fácil ver que las evaluaciones que resultan en las superficies que se obtienen al retirar de la superficie de órbitas las proyecciones de T y T' respectivamente son equivalentes y como $\partial(M - T) \cong \partial(M - T')$ se sigue el resultado como una aplicación inmediata del Corolario 2.2. \square

COROLARIO 5.5. Sea M una variedad de Seifert y sea $T \subset M$ un toro de Stiefel-Whitney que es unión de fibras de M . Sea $\mathcal{N}(T) \subset M$ una vecindad regular de T que también es unión de fibras de M .

i) Si $M = (No, g | (1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$, entonces $\overline{M - \mathcal{N}(T)}$ es la variedad de Seifert con frontera que se obtiene de

$$M^* = (Oo, g - 1 | (1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$$

al retirarle el interior de dos vecindades fibradas de fibras ordinarias.

ii) Si $M = (NnI, 2k | (1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$, entonces $\overline{M - \mathcal{N}(T)}$ es la variedad de Seifert con frontera que se obtiene de

$$M^* = (Oo, k - 1 | (1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$$

al retirarle el interior de dos vecindades fibradas de fibras ordinarias.

iii) Si $M = (NnIII, k | (1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$, entonces $\overline{M - \mathcal{N}(T)}$ es la variedad de Seifert con frontera que se obtiene de

$$M^* = (On, k - 2 | (1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$$

al retirarle el interior de dos vecindades fibradas de fibras ordinarias.

iv) Si $M = (NnI, 2k + 1|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$, entonces $\overline{M - \mathcal{N}(T)}$ es la variedad de Seifert con frontera que se obtiene de

$$M^* = (Oo, k|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$$

al retirarle el interior de una vecindad fibrada de una fibra ordinaria.

v) Si $M = (NnII, k|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$, entonces $\overline{M - \mathcal{N}(T)}$ es la variedad de Seifert con frontera que se obtiene de

$$M^* = (On, k - 1|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$$

al retirarle el interior de una vecindad fibrada de una fibra ordinaria. \square

LEMA 5.6. Sea M variedad de Seifert orientable y sea $T \subset M$ toro fibrado tal que $M - T$ es conexo.

i) Si $M = (Oo, g|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$, entonces $\overline{M - \mathcal{N}(T)}$ es la variedad de Seifert con frontera que se obtiene de

$$M^* = (Oo, g - 1|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$$

al retirarle el interior de dos vecindades fibradas de fibras ordinarias.

ii) Si $M = (On, k|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$, entonces $\overline{M - \mathcal{N}(T)}$ es la variedad de Seifert con frontera que se obtiene de

$$M^* = (On, k - 2|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$$

al retirarle el interior de dos vecindades fibradas de fibras ordinarias.

En los casos (ii) y (iii) la clase $Dw_1(M)$ puede representarse por una 2-subvariedad F que es la unión ajena de dos toros unilaterales en M y cuyo complemento es homeomorfo al enunciado arriba.

Demostración. Se sigue de observaciones similares a las de la demostración del Corolario 5.4. \square

Anotamos los hechos siguientes que se estudiaron en el §4, pero cuya demostración independiente ilustra el poder de la herramienta que ofrecen las superficies de Whitney.

TEOREMA 5.7. Si $M \in (NnI, 2k+1)$ y $\beta w_1(M) = 0$, entonces existe una fibrición de Steenrod $F \subset M \rightarrow S^1$ con F una superficie orientable.

Demostración. Como $\beta w_1(M) = 0$, por tanto existe $F \subset M$ 2-variedad orientable, bilateral e incompresible en M tal que $M - F$ es orientable. Luego alguna componente conexa $F_1 \subset F$ no está fibrada con las fibras de M por la Proposición 5.2. Es decir, F_1 es una superficie incompresible, bilateral y no fibrada de M , luego M fibra sobre S^1 con hoja F_1 [Heil]. \square

COROLARIO 5.8. Si $M \in (NnI, 2k+1)$, son equivalentes

i) $\beta w_1(M) = 0$.

ii) $\lambda(M) = m.c.m\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} \left(b + \sum_{i=1}^r \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right)$ es impar.

iii) Existe $F \subset M \rightarrow S^1$ fibración de Steenrod con F orientable.

Demostración. Sólo basta ver que (iii) \Rightarrow (i). Como F es una superficie de Whitney bilateral para M , por tanto existe una cubierta ramificada $M \rightarrow S^2 \otimes S^1$ [Berstein y Edmonds]. Luego por el Corolario 1.11 se tiene que $\beta w_1(M) = 0$. \square

§6. CUBIERTAS DOBLES.

El símbolo $S^2 \tilde{\times} S^1$ denotará o bien a $S^2 \times S^1$, o bien a $S^2 \otimes S^1$, el haz de esferas no trivial sobre S^1 .

LEMA 6.1. *Si $\varphi : M \rightarrow S^2 \tilde{\times} S^1$ es una cubierta doble ramificada, donde M es una 3-variedad que no posee esferas no separantes, entonces si $S \subset S^2 \tilde{\times} S^1$ es una esfera no separante, se cumple que $S \cap B_\varphi \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que $S \cap B_\varphi = \emptyset$, entonces $\varphi^{-1}S = S_1 \sqcup S_2$ donde $S_1 \cong S_2$ son dos 2-esferas. Sea $*$ $\in S$ y sea $\gamma : I \rightarrow S^2 \tilde{\times} S^1$ un lazo basado en $*$ tal que $\gamma \cap S = \{*\}$ y esta intersección es transversal. Podemos escoger a γ de tal manera que $\gamma \cap B_\varphi = \emptyset$. Entonces $\varphi^{-1}\gamma = \gamma_1 \sqcup \gamma_2$ consta de dos trayectorias con extremos en $\varphi^{-1}(*) = \{*_1, *_2\}$, donde $*_i \in S_i$ y $\gamma_i(0) = *_i$ para $i = 1, 2$.

Si $\gamma_1(1) = *_1$, entonces γ_1 conecta a los dos lados de S_1 y por tanto $S_1 \subset M$ es una esfera no separante. Esta contradicción muestra que $\gamma_1(1) = *_2$ y por tanto $\gamma_2(1) = *_1$.

Luego $\gamma_1 \gamma_2$ (producto de trayectorias) conecta a los dos lados de S_1 y de nuevo S_1 es no separante en M . Debemos concluir que $S \cap B_\varphi \neq \emptyset$.

TEOREMA 6.2. Si $\varphi: M \rightarrow S^2 \tilde{\times} S^1$ es una cubierta doble ramificada, donde M es una 3-variedad que no posee esferas no separantes, entonces existe $S \subset S^2 \tilde{\times} S^1$ esfera no separante tal que $F := \varphi^{-1}S$ es una superficie bilateral e incompresible en M .

Además si M es no orientable, entonces F es una superficie de Whitney para M .

Demostración. Sea $S \subset S^2 \tilde{\times} S^1$ una esfera no separante y supongamos que $F = \varphi^{-1}S$ es compresible en M (es claro que F es conexa porque $S \cap B_\varphi \neq \emptyset$; que es bilateral ya que S lo es y que $M - F$ es orientable ya que $S^2 \tilde{\times} S^1 - S$ lo es). Sea $u: M \rightarrow M$ la involución que define a φ . Entonces existe $D \subset M$ disco compresor para F tal que $uD = D$, o $uD \cap D = \emptyset$ [Gordon-Litherland, Thm. 3].

1er. caso " $uD \cap D = \emptyset$ ". Entonces $\varphi|_D: D \rightarrow \varphi(D)$ es un homeomorfismo y $\partial\varphi(D) = \varphi(\partial D) = \varphi(D) \cap S$. Haciendo cirugía en S a lo largo de $\varphi(D)$ obtenemos dos 2-esferas $S_1, S_2 \subset S^2 \tilde{\times} S^1$ tal que, digamos, S_1 es no separante en $S^2 \tilde{\times} S^1$ y S_2 es frontera de una 3-bola $B \subset S^2 \tilde{\times} S^1$.

Luego $F_1 := \varphi^{-1}(S_1)$ y $F_2 := \varphi^{-1}(S_2)$ son el resultado de hacer cirugía en F a lo largo de $D \sqcup u(D)$. Como $F_2 = \partial\varphi^{-1}(B)$, F_2 es Z -homóloga a 0 y por tanto F_1 es Z -homóloga a F . En particular es Z_2 -homóloga, es decir, $Dw_1(M) = [F] = [F_1]$, si M es no orientable. Por tanto se sigue satisfaciendo que $M - F_1$ es orientable y, como S_1 es no separante, por el Lema 6.1 $B_\varphi \cap S_2 \neq \emptyset$; por tanto F_1 es una superficie.

2do. caso " $uD = D$ ". Sea $k: D \times I \rightarrow M$ un encaje tal que $k(D \times \{\frac{1}{2}\}) = D$ y tal que $W := k(D \times I)$ satisface que $u(W) = W$. Se sigue que $u|_W: W \rightarrow W$ es equivalente a

una de las siguientes involuciones: $u_1(x, t) := (r(x), t)$, o $u_2(x, t) := (\rho(x), 1 - t)$ donde $r : D \rightarrow D$ es una rotación de 180° y $\rho : D \rightarrow D$ es una reflexión con respecto a un diámetro de D [Kim-Tollefson], ya que u induce una cubierta ramificada y, por tanto, $\text{fix}(u)$ es una 1-variedad.

En el caso de que $u|$ sea equivalente a u_2 , se tiene que $u(D \times \{0\}) \cap (D \times \{1\}) = (D \times \{1\}) \cap (D \times \{0\}) = \emptyset$ y obtenemos un disco compresor como en el primer caso y se sigue entonces el mismo procedimiento.

Si $u|$ es equivalente a u_1 , de nuevo $\varphi(D)$ es un disco ($\varphi| : D \rightarrow \varphi(D)$ es una cubierta doble ramificada en un punto), tal que $\partial\varphi(D) = \varphi(\partial D) = S \cap \varphi(D)$. Haciendo de nuevo cirugía, abajo, a lo largo de $\varphi(D)$ y, arriba, a lo largo de D , obtenemos una esfera $S_1 \subset S^2 \tilde{\times} S^1$ no separante y una superficie $F_1 := \varphi^{-1}(S_1) \subset M$ bilateral que es el resultado de comprimir a F y de borrar las componentes resultantes de la cirugía que son Z -nulhomólogas.

Repetiendo el proceso del primer caso o del segundo caso, eventualmente obtenemos una esfera no separante $S \subset S^2 \tilde{\times} S^1$ y una superficie $F := \varphi^{-1}(S) \subset M$ incompresible y bilateral en M y tal que $M - F$ es orientable. \square

COROLARIO 6.3. Sea $\varphi : M \rightarrow S^2 \tilde{\times} S^1$ una cubierta doble y M una variedad como en el Teorema 6.2. Si $\#(S \cap B_\varphi)$ es mínimo con respecto a todas las 2-esferas $S \subset S^2 \cap S^1$ que son no separantes, entonces $F := \varphi^{-1}(S)$ es incompresible.

Demostración. En la demostración del Teorema 6.2, como tomábamos discos que eran efectivamente compresores, por tanto se borraron componentes de la superficie Z -nulhomólogas que eran cubiertas dobles ramificadas de S , es decir, se disminuía $\#(S \cap B_\varphi)$ efectivamente. \square

COROLARIO 6.4. Si $\varphi : M \rightarrow S^2 \times S^1$ es cubierta doble ramificada y M no posee esferas no separantes, entonces existe $F \subset M$ superficie bilateral incompresible tal que $\varphi|_{\overline{M - \mathcal{N}(F)}} : \overline{M - \mathcal{N}(F)} \rightarrow S^2 \times I$ es cubierta doble ramificada, donde $\mathcal{N}(F) = F \times I$ es una vecindad regular de F en M .

Además $\varphi|_{F \times \{i\}} : F \times \{i\} \rightarrow S^2 \times \{i\}$ es la doble cubierta de la 2-esfera ramificada en $2 \cdot \text{genero}(F) + 2$ puntos. \square

LEMA 6.5. Si $\varphi : F \rightarrow S^2$ es la cubierta doble ramificada en $2 \cdot \text{genero}(F) + 2$ puntos, donde $\text{genero}(F) \leq 2$, entonces para todo homeomorfismo $h : F \rightarrow F$, existen homeomorfismos $g : S^2 \rightarrow S^2$ y $g' : F \rightarrow F$ tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{g'} & F \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ S^2 & \xrightarrow{g} & S^2 \end{array}$$

conmuta y g' es isotópico a h y g es isotópico a la identidad o a una reflexión, dependiendo de si h conserva o invierte la orientación respectivamente.

Demostración. Si h conserva la orientación, entonces h es isotópico al producto de homeomorfismos de Dehn a lo largo de las curvas c_1, \dots, a_1, \dots

Cada uno de estos homeomorfismos es el levantamiento bajo φ de los homeomorfismos de arco definidos en los arcos $\overline{c_1}, \dots, \overline{a_1}, \dots$ (ver Figura 6.1). Nótese que cada uno de estos homeomorfismos de arco es isotópico a la identidad. Se sigue el lema en este caso.

En caso de que h invierta la orientación, h es isotópico al producto de homeomorfismos de Dehn como antes, seguido de una reflexión. Esta reflexión es el levantamiento de una reflexión en S^2 con respecto a un plano que contenga a B_φ . \square

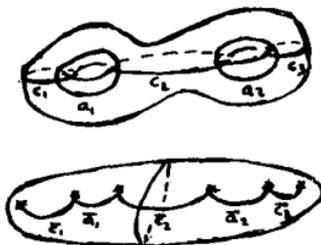


Figura 6.1.

COROLARIO 6.6. Si $\varphi : M \rightarrow S^2 \tilde{\times} S^1$ es una cubierta doble ramificada con M variedad que no posee esferas no separantes, entonces existe $F \subset M$ superficie incompresible tal que si $h_1, h_2 : F \rightarrow F$ son dos homeomorfismos arbitrarios, V_1, V_2 son dos cubos con asas tales que $\partial V_i = F$ y $\text{genero}(F) \leq 2$, entonces existe $\psi : \overline{M - \mathcal{N}(F)} \bigcup_{h_1} V_1 \bigcup_{h_2} V_2 \rightarrow S^3$ cubierta doble ramificada.

Demostración. La cubierta $\varphi| : \overline{M - \mathcal{N}(F)} \rightarrow S^2 \times I$ al restringirse a la frontera es una cubierta doble ramificada como en el Lema 6.5. Si $\psi_i : V_i \rightarrow B^3$ es la cubierta doble ramificada en $\text{genero}(F) + 1$ arcos propiamente encajados, entonces por el lema anterior, $\varphi|$ se puede extender a la doble cubierta ramificada $\psi = (\varphi|) \cup \psi_1 \cup \psi_2 : \overline{M - \mathcal{N}(F)} \bigcup_{h_1} V_1 \bigcup_{h_2} V_2 \rightarrow S^2 \times I \bigcup B^3 \bigcup B^3 \cong S^3$. \square

OBSERVACIÓN 6.1. El Corolario 6.6 nos ofrece un criterio utilísimo, que será una herramienta principal en la § 7, para determinar si una variedad de Seifert M que no fibra sobre S^1 no es cubierta doble ramificada de $S^2 \tilde{\times} S^1$. A saber si la variedad asociada a M (ver Lema 7.2) no cubre doblemente a S^3 , entonces M no puede cubrir a $S^2 \tilde{\times} S^1$.

Una herramienta similar obtendremos en el Corolario 6.14.

TEOREMA 6.7. *Sea N una 3-variedad que no posee esferas no separantes. Supongamos que existe $T \subset N$ superficie orientable e incompresible en N . Si $\varphi : M \rightarrow N$ es una doble cubierta ramificada, entonces existe $T' \subset N$ superficie incompresible en N , homeomorfa y Z_2 -homóloga a T tal que $F := \varphi^{-1}(T')$ es una 2-variedad orientable e incompresible en M .*

Además si M es no orientable y T es una superficie de Whitney para N , entonces F representa a $Dw_1(M)$. En particular si F es conexa, entonces F es una superficie de Whitney para M .

Demostración. Deformando un poco a T podemos suponer que $T \cap B_\varphi$ es transversal. Si F es desconexa, entonces $F \cong T \sqcup T$ es incompresible en M .

Supongamos que F es conexa y compresible. Sea $D \subset M$ un disco compresor equivariante para F . Analizando casos como en el Teorema 6.2, podemos lograr que $\varphi(D)$ sea un disco compresor para T , luego al hacer cirugía en T a lo largo de $\varphi(D)$, obtenemos una superficie $T_1 \cong T$ y, puesto que T es incompresible en N , una 2-esfera $S \subset N$ que es frontera de una 3-subvariedad $W \subset N$, por las hipótesis sobre N . Luego T_1 es Z_2 -homóloga a T . Se tiene que las 2-variedades $F_1 := \varphi^{-1}(T_1)$ y $F_2 := \partial\varphi^{-1}(W)$ son el resultado de hacer cirugía en F a lo largo de $\varphi^{-1}\varphi(D)$. Luego F_2 es Z_2 -homóloga a cero y por tanto F_1 es Z_2 -homóloga a F , es decir, F_1 representa a $Dw_1(M)$ si F representa a $Dw_1(M)$.

Tenemos ahora a T_1 en el lugar de T y a F_1 en el lugar de F y podemos seguir comprimiendo equivariantemente hasta que eventualmente obtenemos $T' \subset N$ y $F' \subset M$ tal que $T' \cong T$ y F' es incompresible en M (conexa o no). \square

OBSERVACIÓN 6.2. En el Teorema 6.7

(i) Si N es irreducible, podemos obtener a T' isotópica a T .

(ii) O bien $\varphi^{-1}(T)$ es conexa, o bien $\varphi^{-1}(T) \cong T \sqcup T$.

Sea $P^1 \subset P^2$ lazo simple no contraíble, entonces $T := P^1 \times S^1 \subset P^2 \times S^1$ es un toro unilateral e incompresible en $P^2 \times S^1$. Nótese que T es incompresible pero no inyecta su grupo fundamental en $\pi_1(P^2 \times S^1)$.

Además T es una superficie de Whitney para $P^2 \times S^1$. Como $P^2 \times S^1$ es irreducible se tiene el

COROLARIO 6.8. Si $\varphi : M \rightarrow P^2 \times S^1$ es una doble cubierta ramificada, entonces existe $T' \subset P^2 \times S^1$ isotópica a T tal que $\varphi^{-1}(T')$ es incompresible en M .

Además si M es no orientable, entonces $\varphi^{-1}(T')$ representa a $Dw_1(M)$. \square

Denotaremos por $id \times 2 : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$ al espacio cubriente de dos hojas $(x, y) \mapsto (x, y^2)$.

LEMA 6.9. Si $\varphi : M \rightarrow P^2 \times S^1$ es una doble cubierta ramificada, entonces existe $F \subset M$ 2-variedad orientable e incompresible tal que $\varphi|_F : \overline{M - \mathcal{N}(F)} \rightarrow D^2 \times S^1$ es una cubierta doble ramificada.

Además si $F \cong S^1 \times S^1$, entonces:

i) Si F es bilateral en M , entonces φ restringida a cada componente de $\partial\mathcal{N}(F)$ es un homeomorfismo.

ii) Si F es unilateral en M , entonces φ restringida a $\partial\mathcal{N}(F)$ es el cubriente $id \times 2$.

Demostración. La superficie F es la preimagen del toro T' mencionado en el Corolario 6.8.

Sea $u : M \rightarrow M$ la involución que induce a φ y supongamos que $F \cong S^1 \times S^1$. Como $u(F) = F$, por tanto $u|_F : F \rightarrow F$ es una involución.

Hay exactamente cinco involuciones no equivalentes en $S^1 \times S^1$: una involución libre que conserva la orientación, una involución libre que invierte la orientación y tres que se distinguen por los puntos fijos: (1) cuatro puntos, (2) una curva simple cerrada y (3) dos curvas simples cerradas. De estas cinco involuciones sólo la involución libre que conserva la orientación tiene como cociente a $S^1 \times S^1$ e induce al cubriente $id \times 2$, luego $u|_F$ es equivalente a esta involución.

Elegimos a $\mathcal{N}(F) \subset M$ una vecindad regular de F tal que $u| : \mathcal{N}(F) \rightarrow \mathcal{N}(F)$ es una involución libre.

"(i)" Si F es bilateral, entonces $\mathcal{N}(F) \cong F \times I$; se sigue de [Kim-Tollefson] que u es equivalente a $g \times \lambda$, donde $g : F \rightarrow F$ es una involución y $\lambda(t) = t$ o $\lambda(t) = 1 - t$. Puesto que $\partial\mathcal{N}(F)/u$ es no orientable, debe suceder que $g = u|_F$ y $\lambda(t) = 1 - t$. Por tanto, u intercambia a las componentes de $\partial\mathcal{N}(F)$ y, por tanto, φ restringida a cada componente de $\partial\mathcal{N}(F)$ es un homeomorfismo.

"(ii)" Si F es unilateral, entonces $\mathcal{N}(F) \cong M\bar{o} \times S^1 \cong \mathcal{N}(T')$, donde $M\bar{o}$ es la cinta de Möbius. Sea $\alpha \subset M\bar{o}$ un arco propiamente encajado tal que $M\bar{o} - \alpha$ es orientable, entonces $A := \alpha \times S^1$ es una superficie de Whitney incómpresible para $\mathcal{N}(T')$. Por el Teorema 6.7, $\varphi^{-1}(A)$ es una superficie de Whitney para $\mathcal{N}(F)$ y es un anillo propiamente encajado en $\mathcal{N}(F)$ (la posibilidad de que $\varphi^{-1}(A) \cong A \sqcup A$ se descarta porque $\mathcal{N}(F)$ es no orientable y que $\varphi^{-1}(A) = F$ se descarta porque sabemos que $F/u \cong S^1 \times S^1$).

Luego $u| : \varphi^{-1}(A) \rightarrow \varphi^{-1}(A)$ es equivalente a una rotación de 180° . Concluimos que $u|_{\partial\mathcal{N}(F)}$ es equivalente a la involución libre que conserva la orientación y por tanto que φ restringida a $\partial\mathcal{N}(F)$ es el cubriente $id \times 2.\square$

OBSERVACIÓN 6.3. Si en el lema anterior M es variedad de Seifert y $F \subset M$ es un toro que es unión de fibras de M , entonces se puede elegir $\mathcal{N}(F) \subset M$ vecindad regular de F tal que $u| : \mathcal{N}(F) \rightarrow \mathcal{N}(F)$ conserva las fibras de M y por tanto:

i) Si F es bilateral en M , entonces φ restringida a cada componente de $\partial\mathcal{N}(F)$ es un homeomorfismo que conserva las fibras.

ii) Si F es unilateral en M , entonces φ restringida a $\partial\mathcal{N}(F)$ es el cubriente $id \times 2$ y manda fibras en fibras (una fibra de $\partial\mathcal{N}(F)$ cubre dos veces, bajo φ , a una fibra de $\partial\mathcal{N}(T')$).

TEOREMA 6.10. Sea u una involución de la variedad de Seifert irreducible M tal que la proyección $\varphi : M \rightarrow M/u$ es una cubierta doble ramificada. Si $M/u \cong S^2 \tilde{\times} S^1$ o $M/u \cong P^2 \times S^1$, entonces existe una fibración de Seifert para M con respecto a la cual u conserva las fibras.

Demostración. Supongamos que $M/u \cong S^2 \tilde{\times} S^1$ o $M/u \cong P^2 \times S^1$, entonces existe $T \subset M/u$ superficie orientable e incompresible tal que $F := \varphi^{-1}(T)$ es orientable e incompresible en M . Entonces o bien M fibra sobre S^1 con hoja F , o bien F es un toro que es unión de fibras de M [Heil].

En el primer caso $M - F \cong F \times I$. Entonces existe una estructura de producto en $F \times I$ tal que $u|$ conserva esa estructura [Kim-Tollefson]. Luego u conserva las fibras con respecto a esta nueva estructura de Seifert para M .

En el segundo caso $u: \overline{M - \mathcal{N}(F)} \rightarrow \overline{M - \mathcal{N}(F)}$ es una involución en la variedad de Seifert orientable $\overline{M - \mathcal{N}(F)}$. Ahora $\overline{M - \mathcal{N}(F)}$ es irreducible porque M lo es y F es incompresible [Waldhausen] y la superficie de órbitas de $\overline{M - \mathcal{N}(F)}$ no es una 2-esfera (por ejemplo $\partial(\overline{M - \mathcal{N}(F)}) \neq \emptyset$); además u conserva las fibras de $\partial\mathcal{N}(F)$. Luego podemos encontrar una estructura de fibrición de Seifert en $\overline{M - \mathcal{N}(F)}$ con respecto a la cual u conserva las fibras [Tollefson]. Además, de la demostración de Tollefson, se sigue que la fibrición de Seifert encontrada restringida a $\partial(\overline{M - \mathcal{N}(F)})$ coincide con la original y por tanto la podemos extender a M ; luego u conserva las fibras de M . \square

OBSERVACIÓN 6.4. Se puede probar un teorema similar al anterior para involuciones en general en variedades de Seifert no orientables, dado que en una variedad tal existe un toro fibrado de Whitney que bajo la involución va a dar a un toro fibrado de Whitney.

LEMA 6.11. Sea M variedad de Seifert. Si $\varphi: M \rightarrow P^2 \times S^1$ es una cubierta doble ramificada y $\varphi^{-1}(T)$ es disconexo, entonces $M \in (NnIII, k)$ o $M \in (NnI, 2k)$.

Demostración. Supongamos que $\varphi^{-1}(T) = T_1 \sqcup T_2$. Entonces T_i es un toro fibrado unilateral en M , para $i = 1, 2$; nótese que M debe ser no orientable pues, por ejemplo, $\mathcal{N}(T_1)$ es no orientable. Como $M - T_1 \sqcup T_2$ es orientable, esto sólo puede pasar si $M \in (NnIII, k)$ o $M \in (NnI, 2k)$ (compárese con el Teorema 5.1 y las proposiciones 5.2 y 5.3). \square

LEMA 6.12. Sea $p: M \rightarrow G$ una variedad de Seifert que no fibra sobre S^1 con hoja orientable. Si existe $T \subset M$ toro fibrado unilateral que es superficie de Stiefel-Whitney para M y existe $\varphi: M \rightarrow P^2 \times S^1$ cubierta doble ramificada, entonces $G \cong P^2$.

Demostración. Sea $u: M \rightarrow M$ la involución que induce a φ . Por el Teorema 6.10 y la

demonstración del Lema 6.9, se sigue que u restringida a cualquier fibra ordinaria de M que no intersecta a $\text{fix}(u)$ debe ser equivalente a una rotación de 180° . Luego $G \cong P^2$, la superficie de órbitas de $P^2 \times S^1$. \square

LEMA 6.13. Si M es variedad de Seifert y $\varphi : M \rightarrow P^2 \times S^1$ es cubierta doble ramificada, entonces $M \notin (No, g)$.

Demostración. Supongamos que $\varphi : M \rightarrow P^2 \times S^1$ es cubierta doble ramificada y que $M \in (No, g)$. Podemos encontrar $T \subset M$ toro fibrado bilateral de Stiefel-Whitney tal que $\varphi| : \overline{M - \mathcal{N}(T)} \rightarrow D^2 \times S^1$ es una cubierta doble ramificada y φ restringida a cada componente de $\partial\mathcal{N}(T)$ es un homeomorfismo que conserva las fibras (Observación 6.3 y Teorema 5.1). Para obtener de nuevo a M a partir de $\overline{M - \mathcal{N}(T)}$, debemos identificar las componentes de la frontera mediante un homeomorfismo que invierta la orientación de las fibras. Este homeomorfismo necesariamente es un levantamiento del homeomorfismo $f : \partial D^2 \times S^1 \rightarrow \partial D^2 \times S^1$ tal que $(z, w) \mapsto (z, \bar{w})$. Pero el cociente $D^2 \times S^1 / f \not\cong P^2 \times S^1$. Esta contradicción muestra que $M \notin (No, g)$. \square

COROLARIO 6.14. Sea $\varphi : M \rightarrow P^2 \times S^1$ una cubierta doble ramificada, donde M es una variedad de Seifert que no fibra sobre S^1 con hoja orientable. Entonces existe $F \subset M$ 2-variedad incompresible que es unión de fibras de M tal que:

i) F es un toro bilateral en M o F es unión ajena de dos toros unilaterales en M . Además existe $\psi : \overline{M - \mathcal{N}(F)} \cup V_1 \cup V_2 \rightarrow S^3$ cubierta doble ramificada, donde V_1, V_2 son toros sólidos ordinarios de tipo $(1, \pm 1)$ y la unión es a lo largo de las fibras, o bien

ii) F es un toro unilateral en M . Además existe $\psi : \overline{M - \mathcal{N}(F)} \cup V \rightarrow S^3$ cubierta doble ramificada, donde V es un toro sólido de tipo $(1, \pm 2)$ y la unión es a lo largo de las fibras.

Demostración. Por el Lema 6.9 existe $F \subset M$ que es un toro incompresible o es unión de dos toros ajenos e incompresibles tal que $\varphi^{-1}(T) = F$ ya que M no fibra sobre S^1 con hoja orientable. Luego $\varphi| : \overline{M - \mathcal{N}(F)} \longrightarrow \overline{(P^2 \times S^1) - \mathcal{N}(T)} \cong D^2 \times S^1$ es una cubierta doble ramificada.

“(i)” Supongamos que F es bilateral o que es unión de dos toros ajenos unilaterales. Si V es un toro sólido fibrado de tipo $(1, \pm 1)$, entonces uniendo a $\overline{(P^2 \times S^1) - \mathcal{N}(T)}$ con V mediante un homeomorfismo de las fronteras que conserva las fibras, obtenemos a S^3 . Tomando el cubriente (disconexo) doble $\eta : V_1 \sqcup V_2 \longrightarrow V$, podemos extender $\varphi|$ a la cubierta doble ramificada $\psi = (\varphi|) \cup \eta : \overline{M - \mathcal{N}(F)} \cup V_1 \cup V_2 \longrightarrow S^3$ por el Lema 6.9, (i).

“(ii)” Si F es unilateral, entonces por el Lema 6.9, (ii), $\varphi|_{\partial \mathcal{N}(F)}$ es el espacio cubriente $id \times 2$. Este cubriente se extiende al cubriente doble $\eta : V \longrightarrow V'$, donde V' es un toro sólido de tipo $(1, \pm 1)$ y V es un toro sólido de tipo $(1, \pm 2)$. Luego podemos extender $\varphi|$ a la cubierta doble ramificada $\psi = (\varphi|) \cup \eta : \overline{M - \mathcal{N}(F)} \cup V \longrightarrow S^3$. \square

§7. VARIETADES DE SEIFERT QUE SON RECUBRIDORES CÍCLICOS DE DOS HOJAS

OBSERVACIÓN 7.1. Según los resultados de la § 4 y el Teorema 6.10, si M es una variedad de Seifert irreducible que fibra sobre S^1 con hoja orientable F , donde F es la hoja de característica de Euler mínima respecto a todas las fibraciones, entonces el problema de determinar si M es cubierta doble ramificada de $S^2 \tilde{\times} S^1$ se reduce a un problema de superficies. Es decir, si $g : F \rightarrow F$ es el homeomorfismo periódico tal que $M \cong F \times I/g$ y si $u : F \rightarrow F$ es una involución que induce a la doble cubierta $F \rightarrow S^2$ ramificada en $2\text{genero}(F) + 2$ puntos, entonces existe una cubierta doble ramificada $M \rightarrow S^2 \tilde{\times} S^1$ tal que la hoja se proyecta a S^2 si y sólo si $g \circ u = u \circ g$.

De cualquier manera sería deseable, en términos de los invariantes de Seifert, determinar condiciones para construir cubiertas dobles ramificadas de $S^2 \tilde{\times} S^1$.

DEFINICIÓN 7.1. Sea M una variedad de Seifert. Entonces llamaremos a M *genérica* si M no fibra sobre S^1 con fibra una superficie orientable y si M es irreducible.

En lo que resta de la sección se trabajará con variedades genéricas y se obtendrán teoremas de clasificación de cubiertas dobles para éstas.

LEMA 7.1. Sea M variedad de Seifert.

i) Si $\varphi : M \rightarrow S^2 \times S^1$ es una cubierta doble ramificada, entonces M es orientable.

ii) Si $\varphi : M \rightarrow S^2 \otimes S^1$ es una cubierta doble ramificada, entonces $\beta w_1(M) = 0$. En particular si $M \in (NnI, 2k+1)$ y $\lambda(M)$ es par, o bien $M \in (NnII, k)$, entonces M no es cubierta doble ramificada de $S^2 \otimes S^1$.

Demostración. Inmediato de el Lema 1.9, el Corolario 1.11 y el Teorema 3.1. \square

LEMA 7.2. Sea M una variedad de Seifert genérica. Si $\varphi : M \rightarrow S^2 \times S^1$ es una cubierta doble ramificada y $S \subset S^2 \times S^1$ es una esfera no separante, entonces $M - \varphi^{-1}(S)$ es conexo.

Demostración. Supongamos que $M - \varphi^{-1}(S)$ es desconexo. Como $\varphi^{-1}(S)$ es conexo (Lema 6.1), entonces $M - \varphi^{-1}(S)$ tiene exactamente dos componentes conexas, digamos $\overline{M - \mathcal{N}(\varphi^{-1}(S))} = M_1 \sqcup M_2$. Si u es la involución que induce a φ , entonces $\text{fix}(u) \cap M_i \neq \emptyset$ por tanto $u(M_i) = M_i$ para $i = 1, 2$. Luego $\varphi| : M_i \rightarrow S^2 \times I$ es una cubierta doble; por tanto $\varphi| : \partial M_i \rightarrow \partial S^2 \times I \cong S^2 \sqcup S^2$ es una cubierta, en particular es continua y suprayectiva; se sigue que $S^2 \sqcup S^2$ es conexo, lo que es una contradicción. \square

LEMA 7.3. Sea M variedad de Seifert genérica. Supongamos que M es cubierta doble ramificada de $S^2 \times S^1$.

i) Si $M = (Oo, g|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$, entonces

$$M^* = (Oo, g-1|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$$

es cubierta doble de S^3 .

ii) Si $M = (On, k|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$, entonces

$$M^* = (On, k-2|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$$

es cubierta doble de S^3 .

En cada caso existe $T \subset M^*$ toro fibrado tal que la cubierta sobre S^3 restringida a T es la cubierta doble $T \rightarrow S^2$ ramificada en cuatro puntos.

Demostración. Inmediata del Lema 7.2, el Lema 5.6 y el Corolario 6.6. \square

LEMA 7.4. Sea M variedad de Seifert genérica. Supongamos que M es cubierta doble ramificada de $S^2 \otimes S^1$.

i) Si $M = (No, g|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$, entonces

$$M^* = (Oo, g-1|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$$

es cubierta doble de S^3 .

ii) Si $M = (NnI, 2k|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$, entonces

$$M^* = (Oo, k-1|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$$

es cubierta doble de S^3 .

iii) Si $M = (NnIII, k|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$, entonces

$$M^* = (On, k - 2|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$$

es cubierta doble de S^3 .

En cada caso existe $T \subset M^*$ toro fibrado tal que la cubierta sobre S^3 restringida a T es la cubierta doble $T \rightarrow S^2$ ramificada en cuatro puntos.

Demostración. Inmediata del Corolario 5.5 y el Corolario 6.6. \square

En el Lema 7.4 no se consideran las otras posibilidades para M debido al Teorema 4.10 y el Lema 7.1(ii).

OBSERVACIÓN 7.2. Si M fibra sobre S^1 con hoja F orientable de género menor o igual que dos, por el Corolario 6.4 y el Lema 6.5, M es cubierta doble ramificada de $S^2 \times S^1$ o de $S^2 \otimes S^1$; dependiendo de si M es orientable o no, respectivamente.

LEMA 7.5. Sea M variedad de Seifert genérica. Supongamos que M es cubierta doble ramificada de $P^2 \times S^1$.

i) Si $M = (NnI, 2k|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$, entonces

$$M^* = (Oo, k - 1|(1, \pm 1), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$$

es cubierta doble de S^3 .

ii) Si $M = (NnI, 1|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$, entonces

$$M^* = (Oo, 0|(1, \pm 2), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$$

es cubierta doble de S^3 .

iii) Si $M = (NnIII, k|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$, entonces

$$M^* = (On, k - 2|(1, \pm 1), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$$

es cubierta doble de S^3 .

Demostración. Inmediata del Corolario 5.5 y el Corolario 6.14. \square

En el Lema 7.5 no se consideran las otras posibilidades para M a causa de los lemas 6.12 y 6.13.

Hasta ahora se han restringido los candidatos posibles a ser cubiertas dobles ramificadas. Con el teorema siguiente restringiremos la lista aún más y en la demostración se exhibirán las cubiertas dobles necesarias para dar las listas de los teoremas 7.7, 7.8 y 7.9.

TEOREMA 7.6 [Montesinos¹, Tollefson]. Sea M variedad de Seifert, entonces M es cubierta doble ramificada de S^3

\iff

i) $M \in (Oo, 0)$, o bien

ii) $M \in (On, k)$, o bien

iii) M es alguna de las siguientes variedades

a) $(Oo, g|(1, 2)); (Oo, g|(1, -2));$

b) $(Oo, g|(1, 0), (\alpha, 1))$, $\alpha > 1$; $(Oo, g|(1, 0)); (Oo, g|(1, -1), (\alpha, \alpha - 1))$, $\alpha > 1$;
 $(Oo, g|(1, -1));$

c) $(Oo, g|(1, 0), (\alpha, 1), (\alpha, 1)); (Oo, g|(1, -2), (\alpha, \alpha - 1), (\alpha, \alpha - 1));$

d) $(Oo, g|(1, 0), (\alpha, 2)); (Oo, g|(1, -1), (\alpha, \alpha - 2))$ con α impar;

e) $(Oo, g|(1, 2b), (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (\alpha_2, \beta_2));$

f) $(Oo, g|(1, 2b), (\alpha_1, 2\beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (\alpha_2, \beta_2)),$ con α_1 impar;

g) $(Oo, g|(1, 2b), (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2));$

h) $(Oo, g|(1, 2b), (\alpha_1, 2\beta_1), (\alpha_2, \beta_2));$

i) $(Oo, g|(1, 2b), (\alpha_1, 2\beta_1), (\alpha_2, 2\beta_2)), \alpha_1$ y α_2 impares;

donde $g \geq 1$ en todos los casos.

Esbozo de la demostración. Montesinos construye las involuciones que inducen las cubiertas dobles buscadas y demuestra que no puede haber más variedades de Seifert que cubran doblemente a S^3 fuera de los ejemplos exhibidos salvo una cuestión [Montesinos1, p.21] que se resuelve afirmativamente en [Tollefson].

Las construcciones de Montesinos son como sigue:

“(i)” Si $M = (Oo, 0|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$, entonces M se puede representar como sigue.

En el cilindro $D^2 \times I$ se identifican la tapa $D^2 \times \{1\}$ con el fondo $D^2 \times \{0\}$ mediante la identidad y la cara de enfrente $\{(z, t) \in \partial D^2 \times I | \operatorname{Re} z \geq 0\}$ con la cara de atrás $\{(z, t) \in \partial D^2 \times I | \operatorname{Re} z \leq 0\}$ mediante la identificación $(z, t) \sim (-\bar{z}, t)$ y obtenemos $S^2 \times S^1$.

Tomamos $r+1$ puntos x_0, x_1, \dots, x_r en el eje $E = \{(z, \frac{1}{2}) | \operatorname{Im} z = 0\}$. Los intervalos $\{x_0\} \times I, \dots, \{x_r\} \times I$ se vuelven fibras ordinarias $F_0, \dots, F_r \subset S^2 \times S^1$. Retirando



Figura 7.1.

vecindades fibradas de F_0, \dots, F_r y sustituyéndolas con toros sólidos fibrados de tipo $(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r)$, obtenemos a M .

La involución $u' : \overline{S^2 \times S^1 - \mathcal{N}(F_0 \cup \dots \cup F_r)} \rightarrow \overline{S^2 \times S^1 - \mathcal{N}(F_0 \cup \dots \cup F_r)}$ inducida por la involución $\bar{u} : D^2 \times I \rightarrow D^2 \times I$, que es una rotación de 180° con eje de rotación E , se puede extender a una involución $u : M \rightarrow M$ tal que $\text{fix}(u) = E \cup F$, donde $F = \{(z, 1) | \text{Im} z = 0\}$. Se tiene que $M \rightarrow M/u \cong S^3$ es una cubierta doble ramificada sobre el enlace de la Figura 7.2, donde α, β representa al ovillo racional de tipo α, β .

OBSERVACIÓN 7.3. Si además de los puntos $x_0, \dots, x_r \in E$, tomamos dos puntos más $x_{-1}, x_{-2} \in E$, repitiendo la construcción obtenemos una cubierta doble ramificada $\hat{\varphi} : \hat{M} \rightarrow S^2 \times I$, donde $\hat{M} = \overline{M - \mathcal{N}(F_{-1} \sqcup F_{-2})}$.

El homeomorfismo $f_1 : S^2 \times \{0\} \rightarrow S^2 \times \{1\}$ tal que $(x, 0) \mapsto (x, 1)$ se levanta, bajo φ , al homeomorfismo $\tilde{f}_1 : \partial \mathcal{N}(x_{-1}) \times S^1 \rightarrow \partial \mathcal{N}(x_{-2}) \times S^1$ tal que $(z, w) \mapsto (z + x_{-2} - x_{-1}, w)$.

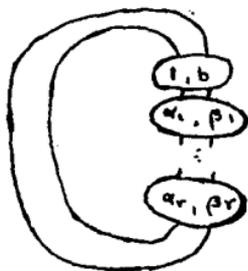


Figura 7.2.

El homeomorfismo $f_2 : S^2 \times \{0\} \rightarrow S^2 \times \{1\}$ que es una reflexión respecto a un plano E que contiene a la ramificación se levanta, bajo φ , al homeomorfismo $\tilde{f}_2 : \partial N(x_{-1}) \times S^1 \rightarrow \partial N(x_{-2}) \times S^1$ tal que $(z, w) \mapsto (\overline{z + x_{-2} - x_{-1}}, w)$. Ver Figura 7.3.

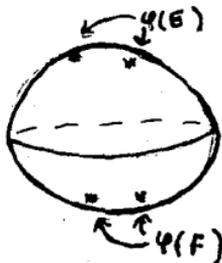


Figura 7.3.

El homeomorfismo $f_3 : S^2 \times \{0\} \rightarrow S^2 \times \{1\}$ que es una reflexión respecto a un plano F que contiene al ecuador y separa a $\varphi(E) \cap S^2$ de $\varphi(F) \cap S^2$ se levanta, bajo φ , al

homeomorfismo $\tilde{f}_2 : \partial\mathcal{N}(x_{-1}) \times S^1 \rightarrow \partial\mathcal{N}(x_{-2}) \times S^1$ tal que $(z, w) \mapsto (z+x_{-2}-x_{-1}, \bar{w})$.

Ver figura 7.4.

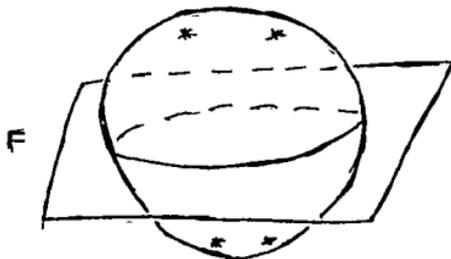


Figura 7.4.

Obsérvese que

$$\hat{M}/\tilde{f}_1 \cong M = (Oo, 1|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$$

$$\hat{M}/\tilde{f}_2 \cong M = (NnI, 2|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$$

$$\hat{M}/\tilde{f}_3 \cong M = (No, 1|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$$

y también

$$S^2 \times I/f_1 \cong S^2 \times S^1$$

$$S^2 \times I/f_2 \cong S^2 \otimes S^1$$

$$S^2 \times I/f_3 \cong S^2 \otimes S^1$$

Obtenemos entonces las cubiertas dobles ramificadas

$$\varphi_1 : M = (Oo, 1|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r)) \rightarrow S^2 \times S^1$$

$$\varphi_2 : M = (NnI, 2|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r)) \longrightarrow S^2 \otimes S^1$$

$$\varphi_3 : M = (No, 1|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r)) \longrightarrow S^2 \otimes S^1.$$

Sean $y_1 = (0, 1), y_2 = (0, -1) \in D^2$. Si $F_i = \{y_i\} \times S^1$, entonces la involución u manda a F_1 en F_2 y $u : \partial\mathcal{N}(y_1) \times S^1 \longrightarrow \partial\mathcal{N}(y_2) \times S^1$ es el homeomorfismo tal que $(z, w) \mapsto (z + y_2 - y_1, w \cdot e^{\pi i \theta}) = (u_1(z), u_2(w))$.

El homeomorfismo $f : \partial D^2 \times S^1 \longrightarrow \partial D^2 \times S^1$ tal que $(z, w) \mapsto (-z, w)$ se levanta, bajo φ , al homeomorfismo $\tilde{f} : \partial\mathcal{N}(y_1) \times S^1 \longrightarrow \partial\mathcal{N}(y_2) \times S^1$ tal que $(z, w) \mapsto (-u_1(z), u_2(z))$.

Obtenemos la cubierta doble ramificada

$$\varphi_4 : (NnI, 2|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r)) \longrightarrow P^2 \times S^1$$

Continuación de la demostración del Teorema.

“(ii)” Si $M = (On, k|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$, entonces M se puede representar como sigue.

Del disco D^2 retiramos el interior de las vecindades regulares B_1, \dots, B_k de los k puntos b_1, \dots, b_k alineados en el eje $e = \{z | \operatorname{Im} z = 0\}$. Ver Figura 7.5.

En el cilindro $\hat{D}^2 \times I$ realizamos las mismas identificaciones y modificaciones que en el caso (i), es decir, en el cilindro perforado $\hat{D}^2 \times I$ se identifican la tapa $\hat{D}^2 \times \{1\}$ con el

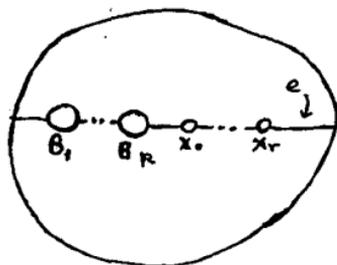


Figura 7.5.

fondo $\tilde{D}^2 \times \{0\}$ mediante la identidad y la cara derecha $\{(z, t) \in \partial D^2 \times I \mid \text{Re} z \geq 0\}$ con la cara izquierda $\{(z, t) \in \partial D^2 \times I \mid \text{Re} z \leq 0\}$ mediante la identificación $(z, t) \sim (-\bar{z}, t)$ y obtenemos $S^2 \times S^1$ perforada.

Además realizamos las identificaciones $(z, w) \sim (-z, \bar{w})$ para $(z, w) \in \partial B_i \times S^1$, $i = 1, \dots, n$, para obtener la variedad $N = (O_n, k \mid (1, 0))$.

Nótese que la rotación \bar{u} del caso (i) conmuta con la involución $(z, w) \mapsto (-z, \bar{w})$ y por tanto se extiende a una involución $u' : N \rightarrow N$.

De nuevo tomamos $r + 1$ puntos de el eje e y, sustituyendo las fibras correspondientes, obtenemos M . La involución u' definida en $\overline{N - \mathcal{N}(F_0 \cup \dots \cup F_r)}$ se extiende a una involución $u : M \rightarrow M$ y se tiene que $M \rightarrow M/u \cong S^3$ es una cubierta ramificada sobre el enlace de la Figura 7.6.

OBSERVACIÓN 7.4. De igual manera que en la Observación 7.3, podemos levantar los homeomorfismos adecuados para obtener las cubiertas dobles ramificadas

$$\varphi_1 : (O_n, k + 2 \mid (1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r)) \rightarrow S^2 \times S^1$$

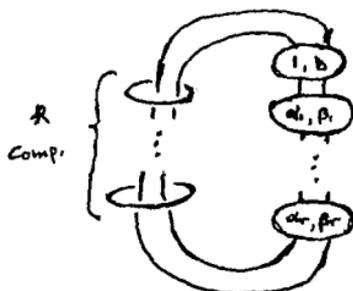


Figura 7.6.

$$\varphi_2 : (NnIII, k + 2|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r)) \rightarrow S^2 \otimes S^1$$

$$\varphi_4 : (NnIII, k + 2|(1, b), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r)) \rightarrow P^2 \times S^1.$$

Continuación de la demostración del Teorema.

“(iii)” Si $M \in (Oo, g)$, $g \geq 1$ y M es una de las variedades enlistadas, entonces la involución $u : M \rightarrow M$ se obtiene de la involución $r \times id : G \times S^1 \rightarrow G \times S^1$, donde $r : G \rightarrow G$ es la involución en la superficie de órbitas que induce la doble cubierta $G \rightarrow S^2$ ramificada en $2 \cdot genero(G) + 2$ puntos.

Extendiéndola a las fibras de M , resulta que $M/u \cong S^3$ si y sólo si M es una de las variedades enlistadas. Además de la demostración de Montesinos se desprende que la única cubierta doble $M \rightarrow S^3$ posible es la exhibida. En este caso la ramificación es unión de fibras de alguna fibración de S^3 .

OBSERVACIÓN 7.5. Si $T \subset M$ es un toro que es unión de fibras ordinarias, entonces

$fix(u) \cap T = \emptyset$ o $fix(u) \cap T$ es infinito. Luego si $V \subset S^3$ es un toro sólido ordinario que no toca a la ramificación, entonces V se levanta a dos toros sólidos ordinarios de M que son ajenos. Luego no podemos obtener cubiertas sobre $S^2 \times S^1$ a causa del Corolario 6.4.

Sea $y_1 \in G - fix(u)$ y $y_2 = r(y_1)$; retirando las fibras correspondientes obtenemos $\tilde{\varphi} : \hat{M} \rightarrow D^2 \times S^1$ y podemos identificar, arriba y abajo, con el homeomorfismo f de la Observación 7.3 y su levantamiento. \square

TEOREMA 7.7. *Sea M variedad de Seifert genérica. Entonces M es cubierta doble ramificada de $S^2 \times S^1$*

\iff

- i) $M \in (Oo, 1)$, o bien
- ii) $M \in (On, k)$, $k \geq 3$.

En el caso (i) se construye una cubierta doble con el enlace de ramificación de la Figura 7.7. El dibujo representa a $S^2 \times I$ y se debe identificar a $S^2 \times \{0\}$ con $S^2 \times \{1\}$ mediante la identidad en S^2 para obtener $S^2 \times S^1$.

En el caso (ii) se construye una cubierta doble con el enlace de ramificación de la Figura 7.8. El dibujo representa a $S^2 \times I$ y se debe identificar a $S^2 \times \{0\}$ con $S^2 \times \{1\}$ mediante la identidad en S^2 para obtener $S^2 \times S^1$.

Demostración. Inmediata de el Lema 7.3 y las observaciones 7.3, 7.4 y 7.5. \square

TEOREMA 7.8. *Sea M variedad de Seifert genérica y no orientable. Entonces M es cubierta doble ramificada de $S^2 \otimes S^1$*

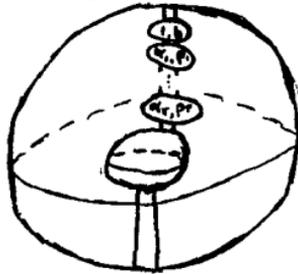


Figura 7.7.

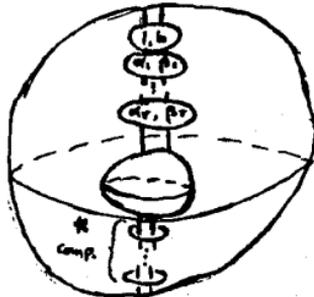


Figura 7.8.



- i) $M \in (No, 1)$, o bien
- ii) $M \in (NnI, 2)$, o bien
- iii) $M \in (NnIII, k)$.

En el caso (i) se construye una cubierta doble con el enlace de ramificación de la Figura 7.7. El dibujo representa a $S^2 \times I$ y se debe identificar a $S^2 \times \{0\}$ con $S^2 \times \{1\}$ mediante una reflexión respecto a un plano que contiene a los cuatro puntos de ramificación en S^2 para obtener $S^2 \otimes S^1$.

En el caso (ii) se construye una cubierta doble con el enlace de ramificación de la Figura 7.7. El dibujo representa a $S^2 \times I$ y se debe identificar a $S^2 \times \{0\}$ con $S^2 \times \{1\}$ mediante una reflexión respecto a un plano que contiene al ecuador de S^2 para obtener $S^2 \otimes S^1$.

En el caso (iii) se construye una cubierta doble con el enlace de ramificación de la Figura 7.8. El dibujo representa mediante una reflexión respecto a un plano que contiene a los cuatro puntos de ramificación en S^2 para obtener $S^2 \otimes S^1$.

Demostración. Inmediata del Lema 7.4 y las observaciones 7.3, 7.4 y 7.5. \square

TEOREMA 7.9. Sea M variedad de Seifert genérica y no orientable. Entonces M es cubierta doble ramificada de $P^2 \times S^1$

\iff

i) $M = P^2 \times S^1$, o bien

ii) $M \in (NnI, 2)$, o bien

iii) $M \in (NnIII, k)$, o bien

iv) M es alguna de las variedades siguientes con conjunto de ramificación en fibras de una fibración de $P^2 \times S^1$.

- a) $(NnI, 2g + 2|(1, 2)); (NnI, 2g + 2|(1, -2));$
- b) $(NnI, 2g + 2|(1, 0), (\alpha, 1)), \alpha > 1; (NnI, 2g + 2|(1, 0));$
 $(NnI, 2g + 2|(1, -1), (\alpha, \alpha - 1)), \alpha > 1; (NnI, 2g + 2|(1, -1));$
- c) $(NnI, 2g + 2|(1, 0), (\alpha, 1), (\alpha, 1)); (NnI, 2g + 2|(1, -2), (\alpha, \alpha - 1), (\alpha, \alpha - 1));$
- d) $(NnI, 2g + 2|(1, 0), (\alpha, 2)); (NnI, 2g + 2|(1, -1), (\alpha, \alpha - 2))$ con α impar;
- e) $(NnI, 2g + 2|(1, 2b), (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (\alpha_2, \beta_2));$
- f) $(NnI, 2g + 2|(1, 2b), (\alpha_1, 2\beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (\alpha_2, \beta_2)),$ con α_1 impar;
- g) $(NnI, 2g + 2|(1, 2b), (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2));$
- h) $(NnI, 2g + 2|(1, 2b), (\alpha_1, 2\beta_1), (\alpha_2, \beta_2));$
- i) $(NnI, 2g + 2|(1, 2b), (\alpha_1, 2\beta_1), (\alpha_2, 2\beta_2)),$ α_1 y α_2 impares;

donde $g \geq 2$ en todos los casos.

En el caso (ii) se construye una cubierta doble con el enlace de ramificación de la Figura 7.9. El dibujo representa a $D^2 \times S^1$ y se debe hacer una identificación en la frontera mediante el homeomorfismo $f: \partial D^2 \times S^1 \rightarrow \partial D^2 \times S^1$ tal que $(z, w) \mapsto (\bar{z}, w)$ para obtener $P^2 \times S^1$.

En el caso (ii) se construye una cubierta doble con el enlace de ramificación de la Figura 7.10. El dibujo representa a $D^2 \times S^1$ y se debe hacer una identificación en la frontera mediante el homeomorfismo $f: \partial D^2 \times S^1 \rightarrow \partial D^2 \times S^1$ tal que $(z, w) \mapsto (\bar{z}, w)$ para obtener $P^2 \times S^1$.

Demostración. Los únicos espacios cubrientes (sin ramificación) de $P^2 \times S^1$ son $P^2 \times S^1$ y $S^2 \tilde{\times} S^1$; luego la única variedad de Seifert genérica que es cubriente de $P^2 \times S^1$ es $P^2 \times S^1$ mismo.

La demostración de los casos restantes es inmediata de los lemas 6.11, 6.12, 6.13, del Lema 7.5 y las observaciones 7.3, 7.4 y 7.5. \square

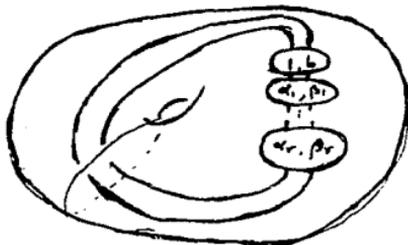


Figura 7.9.

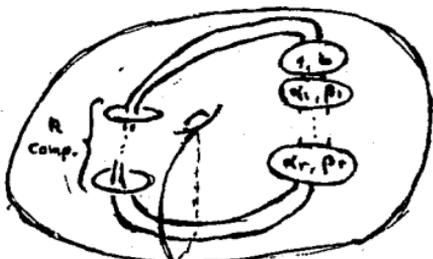


Figura 7.10.

REFERENCIAS

- [Berstein-edmonds]. I.Berstein, A.Edmonds.: *On the construction of branched coverings of low dimensional manifolds*. Trans.Amer.Math.Soc. **247** (1979),87-123.
- [Gómez-González-Hoste]. J.C.Gómez-Larrañaga,F.González-Acuña, J.Hoste: *Minimal atlases on 3-manifolds*. Math.Proc.Camb.Phil.Soc. **109** (1991), 105-115.
- [Gordon-Litherland]. C.McA.Gordon, R.A.Litherland: *Incompressible surfaces in branched coverings*. In: The Smith conjecture (ed. J.W.Morgan, H.Bass) (1984),139-152.
- [Heil]. W.Heil: *Almost sufficiently large Seifert fiber spaces*. Michigan Math.J. **20** (1973),217-223.
- [Hempel]. J.Hempel: *3-manifolds*. Ann. of Math. Studies **86** (1976), Princeton Univ.Press.
- [Hilden]. H.Hilden: *Three-fold branched coverings of S^3* . Amer.J. of Math. **98** (1976), 989-997.
- [Jaco]. W.Jaco: *Lectures on 3-manifold topology*. CMBS series **43** Amer.Math.Soc. (1980).
- [Kim-Tollefson]. P.K.Kim, J.Tollefson: *PL involutions of fibred 3-manifolds*. Trans. Amer. Math. Soc. **232** (1977), 221-237.
- [Lickorish 1]. R.Lickorish: *A representation of orientable combinatorial 3-manifolds*. Ann. of Math. **76** (1962), 530-540.
- [Lickorish 2]. R.Lickorish: *Homeomorphisms of non orientable 2-manifolds*. Proc.

Cam-bridge Philos.Soc. 59 (1963), 307-317.

[Milnor-Stasheff]. J.Milnor, Stasheff: *Lectures on characteristic classes*. Princeton Univ.Press.

[Montesinos 1]. J.M.Montesinos: *Varietades de Seifert que son recubridores cíclicos ramificados de dos hojas*. Bol.Soc.Mat. Mexicana 18 (1973),1-32

[Montesinos 2]. J.M.Montesinos: *3-manifolds as 3-branched coverings of S^3* . Quart. J. Math. Oxford (2)27 (1976), 85-94.

[Orlik]. Orlik: *Seifert manifolds*. Lecture Notes in Math. 291 (1972), Springer Verlag

[Seifert]. H.Seifert: *Topologie dreidimensionaler gefaserner Räume*. Acta Math. 60 (1933), 147-238.

[Steenrod-Epstein]. : *Cohomology operations*. Princeton Univ. Press

[Stallings]. J.R.Stallings: *On fibering certain 3-manifolds*. In: *Topology of 3-manifolds*, Proc. 1961 Top.Inst.Univ. Georgia (Ed. M.Fort) 95-100.

[Tollefson]. J. Tollefson: *Involutions on Seifert fibered spaces*. Pacific J. Math. 74 (1978) 519-529.

[Waldhausen]. F.Waldhausen: *Eine Klasse von 3-dimensionalen Manigfaltigkeiten II*. Invent.Math 4 (1967), 87-117.