# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ingeniería

# TIEMPOS DE COLAPSO DE LAS BURBUJAS DE VAPOR.

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

**INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA**

(A R E A  M E C A N I C A)

P R E S E N T A

**JORGE LUIS NAUDE DE LA LLAVE**

**Director : Dr. Federico Méndez Lavielle**

México, D. F. 1993

INDICE

## NOMENCLATURA:

$a$ radio adimensional de la burbuja R/Ro.

$c_p$ capacidad calorífica del líquido a presión constante.

$h$ entalpía de vaporización.

$Ja$ numero de Jacob, $c_p \rho_l DT/h \rho_v$.

$R$ radio de la burbuja.

$r$ coordenada radial.

$T$ temperatura

$t$ tiempo

$x$ variable adimensional, $(r-R)/Ro$

$V_r$ velocidad radial

$dR/dt$ velocidad del radio de la burbuja

Símbolos griegos

$\alpha$ difusividad térmica del liquido

$\theta$ temperatura adimensional, $(T-To)/\Delta T$

$\Theta$ otra temperatura adimensional (considerada en los modelos)

$\rho_v$ densidad del vapor

$\rho_l$ densidad del liquido

$\tau$ tiempo adimensional, $\alpha t/Ro^2$

$\tau^*$ otro tiempo adimensional, $4\pi^{-1}Ja^2$

$\tau_c^*$ tiempo crítico de colapso

$\sigma$ variable de perturbación, $Ja t$

Subíndices:

$R$ superficie de la burbuja

$0$ orden cero de perturbación

$1$ primer orden de perturbación

$2$ segundo orden de perturbación

$0$ estado inicial

## *RESUMEN*

El presente trabajo está basado en el estudio realizado por el científico A.D. Okhotsimskii [1] que trata de obtener el tiempo de colapso de las burbujas de vapor. Se basa en las idealizaciones de un modelo que considera la burbuja cómo una esfera que se encuentra inmersa en un líquido y el factor dominante en predecir el tiempo de colapso es la transferencia de calor por conducción. Para estas idealizaciones se desecha la posibilidad de que el colapso lo produzca el factor hidrodinámico de acuerdo con la ecuación de Rayleigh. También se asume que el proceso ocurre lentamente de manera que la presión de la burbuja y del líquido se igualen en un cierto tiempo. En éste caso la burbuja cede calor al líquido. Esto quiere decir que la ecuación de conducción para el líquido fuera de la burbuja necesita resolverse tomándo en cuenta el movimiento de la frontera de la burbuja. Se advierte que el criterio dominante en parámetros adimensionales es el número de Jakob $J_a$. El autor toma en cuenta las variaciones en el radio, llega a un análisis numérico que cubre un rango para $J_a$ de $-\infty$ a $\infty$. El problema del autor se presenta al comparar sus resultados con la solución numérica de la ecuación diferencial en donde existe un error que crece a medida que la burbuja se colapsa. El fin de la presente tesis es obtener una solución de la ecuación diferencial que elimine este rango de error por medio de técnicas de perturbación regular.

El planteamiento del problema es el mismo del autor, y se considera a la burbuja inmersa en un líquido lo suficientemente grande y en reposo con una temperatura y presión de referencia $T_\infty$, $p_\infty$ respectivamente. La burbuja se encuentra en estado estable con

una $T_o$ y $p_o$ y se le lleva a una $T_o+\Delta T$ y $p_o+\Delta p$ o sea un escalón que se mantiene constante durante todo el proceso ya que las condiciones de equilibrio líquido-vapor deben satisfacerse. El flujo de calor así generado lleva a una condensación en las paredes de la burbuja que con el tiempo la llevan al colapso. El caso aqui tratado es el límite de $Ja\to 0$ el otro límite $Ja\to\infty$ se trató con integral de Green además de otras técnicas de perturbación (capa límite) y se llegó a una ecuación integrodiferencial que estaba fuera de los alcances del presente trabajo.

Lo que se desea obtener es la evolución del radio adimensional a contra el tiempo adimensional $\tau^*$. Las correcciones en teoría de perturbación llevan a plantear expansiones en temperatura y el radio en base a una nueva variable temporal que es $\sigma=Ja\tau$.

Dentro de la expansiones tenémos para la temperatura y el radio

$$\theta=\theta_0(x,\sigma) + Ja\theta_1(x,\sigma) + Ja^2\theta_2(x,\sigma) + \ldots$$

$$a=a_0(\sigma) + Ja a_1(\sigma) + Ja^2 a_2(\sigma) +\ldots$$

CAPITULO I

# I. INTRODUCCION

## I.1. *ANTECEDENTES*

Dentro de la ingeniería térmica frecuentemente nos encontramos con el fenómeno de condensación en todos los niveles de trabajo industriales como en ingeniería de instalación.

Equipos complejos son construídos tanto para provocarla como para evitarla. La condensación como todo fenómeno de la naturaleza no eś ni buena ni mala, solamente es necesario conocerla y aprender sus mecanismos, sus implicaciones, sus interacciones y en general sus aplicaciones dentro de la ingeniería. Los equipos que por excelencia se utilizan para provocarla son los condensadores. Estos se encuentran en toda la industria de proceso asi como en aplicaciones específicas aeronavales, etc.

En la industria del aire acondicionado los problemas de condensación se deben evitar en todo, para esto el conocimiento del fenómeno es crucial. En las cámaras de refrigeración es algunas veces perjudicial ya que el agua líquida llega a descomponer los alimentos creando asi ambientes no deseados para su aplicación.

En los serpentines se presenta condensación constantemente lo que produce caídas en la eficiencia y en la transferencia de calor en estos, además de fallas que pueden llegar a su destrucción y corrosión.

En la industria de termoelectricidad, el fenómeno se repite en casi todos los equipos de planta. El ejemplo más claro es el del condensador, donde la teoría y aplicación del fenómeno son cotidianas. En la caldera se tiene un fenómeno a la inversa en donde se puede aplicar la misma teoría con sus respectivas correcciones. Los problemas en caldera se repiten en la red de tuberías alimentadoras de las turbinas. La mayoría de las turbinas trabajan con vapor seco por lo tanto la caldera debe proporcionarlo por si misma o por medios recalentadores de manera que el suministro de éste a la tubería y a la turbina sea el adecuado. Dentro del equipo de bombeo los problemas de cavitación llevan al estudio de ecuaciones semejantes para el estudio de éste problema.

En las torres de enfriamiento donde se trabaja con mezclas aire-vapor-agua es evidente la necesidad de crear modelos en base a la condensación con transferecia de masa.

En las chimeneas y en general en los escapes de las máquinas de combustión interna si la condensación se presenta los problemas de corrosión son verdaderamente graves sin mencionar los de contaminación.

En la industria química se trabaja constantemente con reactores, evaporadores, condensadores y cambiadores de calor en donde la aplicación de modelos más exactos del fenómeno de condensación se refleja en ahorros importantes de energía y recursos, así como de mantenimiento provocado por la corrosión etc.

También en la industria química el manejo de sustancias tóxicas y explosivas es mejor en forma líquida y por ende, modelos para la presión y la temperatura para dicho cambio de fase son extremadamente necesarios, el manejo de desechos tóxicos gaseosos se puede llevar a cabo condensando estos para un manejo más sencillo.

Dentro de la industria metal mecánica ciertas fundiciones llegan a presentar gases en sus vaciados produciendo defectos importantes y una forma es retirarlos y condensarlos, de esta manera se evitan dichos defectos además de que estos son verdaderamente tóxicos. La presencia de condensados no deseados en equipos de cambio de fase produce un decremento muy importante en el coeficiente de transferencia de calor, que a su vez se refleja en su rendimiento.

Uno de los modelos más comunes que se aplican para el estudio del cambio de fase es la condensación en gotas. Para promover la condensación en gotas se han llevado a cabo experimentos que demuestran como en superficies lisas las gotas crecen y se deslizan dejando nuevamente la superficie descubierta para que vapor nuevo llegue a condensarse. El coeficiente de transferencia de calor de este sistema aumenta de 10 a 20 veces del de condensación en película, ésta otra forma de condensación presenta problemas de drenado constante y por eso se procura el anterior.

Para promover la condensación en gotas se prefieren superficies verticales o inclinadas y lisas. La superficie lisa no es durable por efectos corrosivos del vapor por lo tanto disminuye la eficiencia del equipo fácilmente. Por otra parte las superficies rugosas, donde el coeficiente de transferencia de calor es mayor se tienen diseños que permiten capturar el condensado dejando superficies libres en donde el nuevo vapor llegará a condensarse.

## I.2. *GENERALIDADES*

El estudio del colapso de una burbuja de vapor después del salto en la presión externa es un fenómeno complejo, que implica el estudio de factores múltiples, realizado por Nigmatulin [2]. Los experimentos numéricos presentados por este autor incorporaban los efectos de la inercia del líquido, transferencia de calor en dos fases, cinética de la fase de transición, viscosidad, y de la tensión superficial. Para esto se requirieron un gran número de parámetros adimensionales y un programa muy complejo. Calculos del crecimiento de las burbujas en ebullición nucleada se complican aún mas por que el hecho de que el campo de temperaturas a su alrededor no es uniforme. La burbuja se origina en una capa límite sobrecalentada y elimina esta capa localmente de la pared, mientras la pared se enfría produciendo la evaporación. Hay tres modos en los que podemos estudiar el crecimiento de la burbuja, lo siguientes artículos son un extracto del libro de Van Stralen [3].

### I.2.1. *Modos de formación de burbuja*

1.-En el modo hidrodinámico donde la temperatura $\theta(t)=\theta_o=const.$, cuando $t\to 0$, donde la inercia del líquido domina, que es la así llamada solución de Rayleigh. $R(t)\simeq(\rho\theta_o)^{1/2}t$ $\simeq(p\theta_o)^{1/2}t$ para el caso de presiones ambiente bajas donde el vapor es un gas ideal e inicialmente la burbuja se expande con una velocidad $dR/dt$ constante.

2.-El modo asintótico (isobárico $\theta(t)=0$, cuándo $t\to\infty$) que es un problema de difusión de calor con $R(t)\simeq(\theta o/p)t^{1/2}$ y el crecimiento es $R\simeq t^{1/2}$ decreciendo gradualmente.

3.-El modo transitorio que es una combinación de los anteriores, donde el crecimiento inicial es gobernado por el modo 1 y el avanzado por el modo 2. Este modo depende sustancialmente del sobrecalentamiento de las fronteras.

Cuando la presión $p\rightarrow 0$ el radio R y la rápidez dR/dt decrecen de acuerdo con la solución de Rayleigh, mientras que si $p\rightarrow\infty$, lo que implica la solución de difusión y se produce el efecto opuesto. Es decir un decremento de la presión ambiente prolonga el modo inicial de crecimiento; mientras que a presiones elevadas el crecimiento se describe casi por la ecuación de conducción. Las complicaciones vienen cuando se estudia la formación de burbujas cerca de la superficie sobrecalentada. Primeramente se forma una película delgada bajo la burbuja, que posteriormente desaparece al evaporarse esto habla de dificultades en la transición de ebullición nucleada a la de película. Segundo se forman puntos secos que causan irregularidades en la formación de burbujas, sobretodo a presiones ambiente bajas.
Dentro de la ebullición nucleada se tiene crecimiento local donde un líquido subenfriado está en contacto con una superficie sobrecalentada, las burbujas crecen y se colapsan sin dejar la superficie, lo interesante de esto es el incremento sustancial de la transferencia de calor por convección. Esto se aplica a los sistemas de flujo bifásico con circulación forzada.
Los anteriores modos son el resultado de las múltiples

investigaciones que a continuación se resumen del libro de Van Stralen [op. cit].

## I.3. *TEORIA DE FORMACION DE BURBUJAS EN LIQUIDOS PUROS: DIFUSION DE CALOR*

En 1930 Bosnjakovič calculó la densidad del flujo de calor en una burbuja ascendiendo en un líquido bajo las siguientes hipótesis:

1.-El calor latente de vaporización se lleva a cabo en las fronteras de la burbuja como consecuencia de un pequeño sobrecalentamiento en el líquido en regiones alejadas de la frontera de la burbuuja.
2.-Después de un pequeño estado inicial, la burbuja es rodeada contínuamente por una delgada capa límite líquida donde la transferencia es por conducción unicamente.
3.-Se asume equilibrio termodinámico en la frontera de la burbuja. El vapor está a temperatura de saturación uniforme T, debido a este equilibrio y su gran difusividad térmica.

Estas hipótesis se basaron en los experimentos de Jakob y Fritz para ebullición de agua a presión atmosférica, en donde la formación de burbujas se llevó a cabo en la superficie calentada mientras el resto del líquido permanecía a temperatura uniforme.

### I.3.1. *Transferencia de calor sin evaporación en la superficie caliente.*

Heidrich y Prüger midieron la temperatura de líquidos hirvientes supercalentados (sin burbujas), que es la región de convección de la curva de ebullición. La distribución de temperatura de la capa límite del líquido es lineal y la transferencia de calor es debida puramente a conducción. El equilibrio termodinámico ocurre en la interfase líquido-vapor, donde el salto de temperatura es de 0.001K. Las temperaturas del líquido y del vapor fuera de la capa límite son uniformes.

## I.4. *TEORIAS DEL CRECIMIENTO DE LAS BURBUJAS DE VAPOR*

### I.4.1. *Teoría de Bosjankovič*

Para el crecimiento isobárico con difusión de calor. La evaporación ocurre en la interfase líquido vapor, donde el calor lo suministra el líquido sobrecalentado por conducción a través de la capa límite. El espesor de la capa límite es independiente de la diferencia de la temperatura y al incrementarse el tiempo, este espesor lo hará linealmente.

#### I.4.1.1. *Modelos con la ecuación de Rayleigh*

Se puede obtener una ecuación diferencial de segundo orden, no lineal para el radio R(t) de una cavidad expandiendose en un líquido, inmiscible, incompresible e infinito que está inicialmente en reposo (ver cap. 2). Estas idealizaciones son la base de la aplicación al estudio de crecimiento en burbujas. Correciones posteriores son necesarias para el estudio de fenómenos que no se podrían realizar con dichas idealizaciones.

### I.4.2. *Extensión de la ecuación de Rayleigh.*

Foster y Zuber, Plesset y Zwick, y Scriven llevaron el modelo para el caso de una esfera de vapor en un líquido viscoso inicialmente uniformemente sobrecalentado. Esta corrección se basa en equilibrio termodinámico y la presión en exceso es producida por el sobrecalentamiento instantáneo en la pared de la burbuja. Además se resta un término de tensión superficial y un término de presión del líquido dentro de la cavidad. El modo inicial de crecimiento lo rige la hidridinámica del líquido.

### I.4.3. *Teoría de Foster-Zuber*

El líquido evaporando en la interfase de una burbuja de vapor es un sumidero de calor esférico en movimiento que puede ser encontrado por la integración de un sumidero puntual móvil instantáneo. La temperatura del vapor $T(R,t)$ en la burbuja es uniforme, debido a su gran difusividad térmica y su pequeña masa, provocando un gran intercambio de calor convectivo. Esta temperatura es $T(R,t)=T(t)$. Foster y Zuber, y Zwick demostraron que cuando $\Theta(t)\to 0$ y $t\to\infty$, la temperatura del vapor se aproxima a la de saturación. Esta predicción está de acuerdo con los experimentos de Prüger.

a)El crecimiento inicial, con las condiciones iniciales $R(0)=R_o$ y velocidad y aceleración cero, significa que la burbuja está en un equilibrio metaestable. Por lo tanto el crecimiento debe comenzar por una perturbación, puede ser un impacto rápido de moléculas o por una fuente de calor constante. b)El crecimiento asintótico ya no es gobernado exclusivamente por hidrodinamica ya que el rango de crecimiento es directamente proporcional a la temperatura inicial y decrece inversamente con el tiempo.

### I.4.4. *Teoría de Plesset-Zwick*

Para el caso de que la temperatura $\Theta_R=\Theta_o$ . El calor latente de vaporización en la frontera de la burbuja se transmite por conducción a través de una delgada capa límite adyacente a la burbuja. El sobrecalentamiento en la frontera de la burbuja (que iguala la temperatura uniforme del vapor como consecuencia de una gran difusividad térmica del vapor) decrece gradualmente del valor inicial $\Theta_o$ a cero, permitiendo el efecto refrigerante de la evaporación. Plesset y Zwick presentaron separadamente su ecuación aplicando teoría de perturbación para obtener una solución en aproximaciones suscesivas para la difusión de calor radialmente a través de una frontera esférica móvil. Con fines de convergencia, el procedimiento se basa en el concepto de una delgada capa límite, para la cual las variaciones de temperatura son pocas. a)El crecimiento asintótico, se considera $R/R_o>>1$, para un tiempo largo y es equivalente a $\Theta_R\to 0$ en la teoría de Foster-Zuber, la temperatura del vapor se aproxima al valor de saturación.

b)Aproximación plana si y solo si la curvatura de la burbuja no se considera. Desde luego en un modelo mas simple, éste incluye dos modos, el de transición y oscilaciones en el radio de la burbuja. El último fenómeno, que las demás teorías no incluyen, ha sido verificado experimentalmente. La teoría incluye el colapso de las burbujas.

c)Teoría de Scriven para el crecimiento asintótico. Scriven hace una extensión de la ecuación de conducción de calor para esferas simétricas, de esta forma establece el efecto de convección radial resultado de las diferentes densidades de distintas fases, dos de sus condiciones de contorno establecen la velocidad radial instantánea del líquido adyacente a la burbuja y a una distancia mayor del centro de la burbuja. Al cambiar la variable en una solución de semejanza $T(r,t)=T(s)$, se obtiene para resultados numéricos que la evaporación de toda la masa del líquido sobrecalentado ocurre instantáneamente a su máximo sobrecalentamiento.

### I.4.5. *Teoría de Skinner-Bankoff*

Practicamente es una extensión de la teoría de Scriven, estudiando el crecimiento de la burbuja en campos esféricos y simétricos de variación general, además de incluír sobrecalentamiento negativo como subenfriamiento (ebullición local), y sobrecalentamiento inicial uniforme.

## I.5. *ESTUDIO DE UN MODELO DE FORMACION DE BURBUJAS CON TRANSFERENCIA DE MASA (SISTEMAS BINARIOS).*

A partir de un artículo de Nigmatulin [op. cit] se toma el siguiente extracto. El estudio de las oscilaciones en una burbuja de vapor en un líquido, parte de la utilidad práctica de usar pantallas de burbujas para amortigüar ondas de choque y el uso de perturbaciones acústicas en procesos técnicos.

En flujos líquido-vapor, las interacciones de masa y energía se llevan a cabo en la interfase, estas interacciones son responsables de la mayoría de los cambios en el flujo, el campo de velocidades y temperatura.

En otros trabajos en los que se han tratado diferentes aspectos del problema por ejemplo: En el caso de que las oscilaciones sean pequeñas, la transferencia de calor domina por encima de los efectos de viscosidad y compresibilidad del líquido. También se ha estudiado experimentalmente el problema de transferencia de calor de una burbuja de gas sometida a oscilaciones no lineales. Como se vió anteriormente existen una gran cantidad de estudios referentes al colapso y formación de burbujas con muchas idealizaciones, que conducen a modelos restringidos.

Wang y Khabeev calculan la dinámica de las burbujas en un campo sonoro, y descubren dos modos de resonancia para la burbuja, así como una nueva frecuencia de resonancia diferente de la de Minnaert. Otros intentos para encotrar las propiedades resonantes de las burbujas en equilibrio llevados a cabo por Nephiras y Finch arrojaron una aproximación de las frecuencias, aunque en otro trabajo de D.Y. Hsieh quien trató analíticamente de encontrar dichas frecuencias y una explicación física del segundo modo resonancia. Hsieh llega a una fórmula errónea debido a las idealizaciones que plantea.

En el trabajo de Nigmatulin [op. cit] se trata un problema de trnasferencia de calor, masa y la interacción dinámica entre una burbuja vapor-gas y un líquido, considerando temperatura no uniforme en la burbuja y la difusión interna de los componentes de la mezcla gas-vapor. Una solución numérica se obtiene para el problema del movimiento radial de la burbuja inducido por un cambio repentino en la presión del líquido, que es la situación en la que se encuentran las burbujas delante del frente de una onda de choque que después las golpea.

También se consideran las burbujas oscilando en un líquido bajo la influencia de un campo sonoro. Los efectos capilares y las transiciones de fase, tomados en cuenta producen una nueva frecuancia resonante de las burbujas pequeñas que difiere de la de Minnaert. Se obtienen las expresiones para la frecuencia y el rango de amortigüación térmico de las oscilaciones de las burbujas. También se obtienen los coeficientes de transferencia de calor entre las burbujas oscilantes en la dirección radial y el líquido. Todo esto se estudió por el método de diferencias finítas.

## I.6. *OBJETIVOS Y ALCANCES*

Después de haber citado los modelos anteriores se pretenderá ubicar el objetivo de la tésis El orígen del presente trabajo es un trabajo realizado por A.D. Okhotsimskii [op. cit.], que explicaré con detalle a continuación. El autor utiliza las ecuaciones de transferencia de calor tomando en cuenta el movimiento de la frontera de la burbuja, resuelve para los casos límite del factor adimensional dominante que es el número de Jakob $[-\infty,\infty]$, una solución para la evolución del radio adimensional (a). Posteriormente mediante un algorítmo corrige dicha solución que en sus resultados numéricos contienen cierto rango de error respecto de la solución numérica de la ecuación. Para la tésis en cambio se usará un método analítico por medio de técnica de perturbación regular con el fin de obtener la solución analítica, que permita ver la funcionalidad de las variables involucradas y obtener la solución de la evolución del radio adimensional (a), para comparar los resultados numéricos con los del autor. Dependiendo de estos la técnica de perturbación regular se puede expander para obtener mejores resultados e irse aproximándose a la solución numérica de la ecuación.

## CAPITULO II

### II DEDUCCION DEL MODELO

Partiendo de las ecuaciones de Navier-Stokes para llegar al modelo en cuestión,se hacen las siguientes suposiciones: Coordenadas esféricas y sólamente tomando en cuenta que la transferencia de calor que provoca el colapso de la burbuja se lleva a cabo en la dirección radial únicamente, y que el colapso es en la misma dirección. Además se supone que hay simetría en la gota, lo cual implica que sólo se toma en cuenta la dirección radial.

### II.1. *ECUACION DE CONTINUIDAD*

Debido a que la cantidad de movimiento y la transferencia de calor es en la dirección r, y la variación en las otras dos direcciones $\theta$ y $\phi$ no la tomaremos en cuenta por existir simetría se tiene.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2 V_r) = 0 \tag{2.1}$$

La ecuación de cantidad de movimiento no se toma en cuenta en virtud de que el tiempo en que ocurre la transferencia de calor es muy corto para alcanzar a perturbar el estado inicial del líquido, de tal forma que el efecto convectivo sobre el líquido sólo aparece a través del movimiento de la gota.

## II.2. *ECUACION DE LA ENERGIA*

Para fluídos Newtonianos con propiedades constantes puede demostrarse que la ecuación de la energía se reduace a:

$$\rho C_p \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + V_r \frac{\partial T}{\partial r} \right] = k \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right] \right] + \mu\phi + q \qquad (2.2)$$

Los términos de disipación viscosa $\mu\phi$ y el de fuente generadora de calor se desprecian, el primero por estar a velocidades bajas y el segundo por no existir fuente de calor interna.
Al rearreglar la ecuación, dividiendo entre $\rho C_p$ y desarrollando la derivada se obtiene

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V_r \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right] \qquad (2.3)$$

donde

$$\alpha = \frac{\rho C_v}{k} \qquad (2.3\text{-}1)$$

Al suponer $\rho$=cte.

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\rho r^2 V_r\right] = 0 \qquad (2.4)$$

al integrar esta ecuación se obtiene

$$r^2 V_r = C \qquad (2.4\text{-}1)$$

donde C es una constante arbitraria.
Al evaluar $V_r$ en el radio de la gota $V_R = dR/dt$ y por continuidad se obtiene

$$V_r = \frac{R^2}{r^2}\frac{d\,R}{dt} \qquad (2.5)$$

Al llevar (2.5) a (2.3) se tiene

$$\frac{\partial\,T}{\partial t} + \frac{dR}{dt}\,\frac{R^2}{r^2}\,\frac{\partial\,T}{\partial r} = \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2\partial\,T}{r\,\partial r}\right] \qquad (2.6)$$

## II.3. *CONDICIONES INICIAL Y EN LA FRONTERA*

Para resolver esta ecuación (2.6), de segundo orden no lineal , se plantean las condiciones de contorno que deben de ser dos espaciales y una condición inicial.
Las condiciones en T, son las siguientes: La primera es un

incremento de temperatura en la superficie de la burbuja representado por $\Delta T$, que por simplicidad se traduce en un salto de temperatura uniforme. La segunda es que lejos del radio se tiene la temperatura del líquido To, que coincide con la condición inicial en el tiempo t=0. Lo anterior se escribe como.

$$T(R,t)=To+\Delta T; T(r,0)=T(\infty,t)=To \quad (2.7)$$

Para cuando hay cambio de fase se debe cumplir el siguiente balance de energía en la interfase:

$$\begin{bmatrix}\text{el flujo de calor}\\ \text{de la fase vapor}\\ \text{en la dirección}\\ \text{radial, r}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{el flujo de calor}\\ \text{de la fase líquida}\\ \text{en la dirección}\\ \text{radial, r}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{calor liberado}\\ \text{durante el}\\ \text{cambio de fase}\\ \text{por unidad de area}\end{bmatrix}$$

es decir

$$-(qv-ql)=\rho v h f g \frac{d}{dt} s(t) \qquad (2.7\text{-}1)$$

donde qv es la transferencia de calor por conducción en la fase vapor y ql es la transferencia de calor en la fase líquida por conducción en r=R dados por las expresiones:

$$ql=-kl\frac{\partial}{\partial r}Tl\Big]_{r=R};\quad qv=-kv\frac{\partial}{\partial r}Tv\Big]_{r=R} \qquad (2.7\text{-}2)$$

Además $h_{fg}$ representa la entalpía de vaporización.

Se asume que la densidad es igual en ambas fases con el fin de que no exista algún movimiento de la interfase debido a los efectos convectivos producto del cambio de volúmen por esta diferencia de densidades.

La interfase describe una superficie $r=s(t)$ que para éste modelo la temperatura es igual, en otras palabras:

$$T_v(r,T)=T_l(r,T)=T \tag{2.7-3}$$

Debido a que la gota mantiene su temperatura no hay flujo de calor en la fase vapor por lo tanto $q_v=0$

$$k_l \frac{\partial T_l}{\partial r} = \rho v h_{fg} \frac{d\, s(t)}{dr} \tag{2.7-4}$$

al despejar la velocidad de la interfase $dR(t)/dr$

$$\frac{d R}{dt} = \frac{C_v \rho_l \alpha}{h \rho v} \frac{\partial T}{\partial r}\bigg]_{r=R} \quad ; \qquad R(0)=R_o \tag{2.8}$$

en virtud de que la condición (2.8) es una ecuación diferencial de primer orden en el tiempo requiere una condición inicial que en este caso es $R(0)=R_o$, esto es en el tiempo cero se tiene el radio inicial de la burbuja.

## II.4. *ADIMENSIONALIZACION*

Para un manejo mas sencillo del problema se adimensionaliza la ecuación pasando de las variables T, r, t, y R, a $\theta$, $x$, $\tau$, y $\alpha$. Según Okhotsimskii [op. cit.].
Definidas como

$$a=\frac{R}{Ro};\ \theta=\frac{(T-To)}{\Delta T};\ x=\frac{(r-R)}{Ro};\ \tau=\alpha t Ro^{-2}$$

Al aplicar las reglas de la cadena correspondientes en las ecuaciones (2.6) a (2.8) queda, (ver Apéndice A)

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau}=\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial\theta}{\partial x}\left\{\frac{da}{d\tau}\left[1-\left[\frac{a}{x+a}\right]^2\right]+\frac{2}{x+a}\right\} \qquad (2.9)$$

$$\frac{da}{d\tau}=Ja\frac{\partial\theta}{\partial x}\bigg]_{x=0} \quad ; \quad a(0)=1 \qquad (2.10)$$

$$\theta(0,\tau)=1 \quad ; \quad \theta(x,0)=\theta(\infty,\tau)=0 \qquad (2.11)$$

Se puede ver que en la ecuación (2.10) aparece el número de Jakob que es la relación entre el calor sensible máximo absorbido por el líquido (vapor) a el calor latente absorbido por el líquido (vapor) durante la condensación (ebullición). Para muchas aplicaciones el calor sensible es mucho más pequeño que el latente y el número de Jakob es pequeño. La forma más conveniente de el número de Jakob es:

$$Ja=\frac{C_p\rho_l\Delta T}{h\rho_v} \qquad (2.10\text{-}1)$$

Se tienen dos variables que son a y $\tau$ sujetas al parámetro adimensional de Jakob.

El sistema mostrado (2.8)-(2.11), será resuelto por la técnica de perturbación regular del siguiente capítulo.

CAPITULO III

# III. TEORIA DE PERTURBACION Y APLICACION

## III.1. *GENERALIDADES*

La teoría de perturbación es una colección de métodos de análisis sistemático del comportamiento de las soluciones de ecuaciones diferenciales y en diferencias. El procedimiento general es identificar un parámetro pequeño, que usualmente se denota como $\varepsilon$; cuando $\varepsilon=0$, el problema es relativamente simple y refleja, en primera aproximación las principales características físicas del modelo analizado. En virtud de ello, el conocimiento del orden cero ($\varepsilon=0$), es fundamental para el análisis completo de perturbación; esto es, la solución global se puede estudiar por un análisis local en la vecindad de $\varepsilon=0$. Esta solución se construye por un análisis local en la vecindad de $\varepsilon=0$ como series de potencias en $\varepsilon$:

$$y(x)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\varepsilon^2 y_2(x)+\ldots$$

Esta se conoce como serie de perturbación, lo importante es notar que la solución es local en $\varepsilon$ pero global en x. Si $\varepsilon$ es muy pequeño se espera que $y(x)$ sea aproximada con pocos términos de la serie.

Las series de perturbación frecuentemente divergen para todos los $\varepsilon$ diferentes de cero, y si $\varepsilon$ no es pequeño los resultados pueden ser insuficientes.

En general se trata de descomponer un problema dificil en un número infinito de problemas relatívamente sencillos. La teoría de perturbación es muy útil cuando los primeros pasos revelan asuntos importantes de la solución y los restantes dan correcciones pequeñas.

La analogía entre el análisis local de las ecuaciones diferenciales y la teoría formal de perturbación se puede usar para clasificar los problemas de perturbación. Una solución en series cerca de un punto ordinario de una ecuación diferencial puede representarse por una serie de Taylor con radio de convergencia que no desaparece. Para una solución en series en un punto singular no tiene la forma anterior, puede ser una serie divergente o convergente y su notable propiedad es que puede existir en la vecindad de un punto singular a pesar de no existir en dicho punto.

En series de perturbación regular se tiene una serie de potencias en $\varepsilon$ con un radio de convergencia que no desaparece. Un hecho importante de los problemas de perturbación regular es que la solución exacta para valores pequeños de $|\varepsilon|$ pero no cero se aproxima suavemente a la solución no perturbada de orden cero cuando $\varepsilon \to 0$.

## III.2. *APLICACION DE LA TEORIA DE PERTURBACION*

Para la solución de la ecuación (2.8) no lineal se requiere aplicar una técnica matemática avanzada que en este caso es la teoría de perturbación regular, en este caso se deben realizar dos expansiones una para $\theta$ y otra para a, y como el tiempo de colapso

$\tau$ es muy grande para ser apreciado físicamente se debe reescalar, para eliminar el régimen permanente en las ecuaciones.

Sea tiempo $\sigma$=Ja$\tau$

$$\sigma = Ja\tau \tag{3.1}$$

La serie de perturbación se realizará en las dos variables $\theta$ y a en el nuevo tiempo $\sigma$:

$$\theta = Ja^0\theta_0(x,\sigma) + Ja^1\theta_1(x,\sigma) + Ja^2\theta_2(x,\sigma) + \ldots. \tag{3.2}$$

$$a = Ja^0 a_0(\sigma) + Ja^1 a_1(\sigma) + Ja^2 a_2(\sigma) + \ldots \tag{3.3}$$

Al sustituír (3.2) y (3.3) en la ecuación (2.9) se tiene:

$$Ja\left[\frac{\partial}{\partial\sigma}\theta_0 + Ja\frac{\partial}{\partial\sigma}\theta_1 + Ja^2\frac{\partial}{\partial\sigma}\theta_2\right] = \frac{\partial^2\theta_0}{\partial x^2} + Ja\frac{\partial^2\theta_1}{\partial x^2} + Ja^2\frac{\partial^2\theta_2}{\partial x^2} + \left[\frac{\partial}{\partial x}\theta_0 + \right.$$

$$\left. Ja\frac{\partial}{\partial x}\theta_1 + Ja^2\frac{\partial}{\partial x}\theta_2\right] \left\{Ja\left[\frac{d}{d\sigma}a_0 + Ja\frac{d}{d\sigma}a_1 + Ja^2\frac{d}{d\sigma}a_2\right]\left[1 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{(a_0 + a_1Ja + a_2Ja^2)^2}{(x+a_0 + a_1Ja + a_2Ja^2)^2} + \frac{2}{(x+a_0 + a_1Ja + a_2Ja^2)^2}\right]\right\} \tag{3.4}$$

que después de rearreglarse con ayuda del binomio de Newton, se tiene (ver Apéndice B):

$$Ja\left[\frac{\partial\ \theta_0}{\partial\sigma} + Ja\frac{\partial\ \theta_1}{\partial\sigma} + Ja^2\frac{\partial\ \theta_2}{\partial\sigma}\right] = \frac{\partial^2\theta_0}{\partial x^2} + Ja\frac{\partial^2\theta_1}{\partial x^2} + Ja^2\frac{\partial^2\theta_2}{\partial x^2} + \left[\frac{\partial\ \theta_0}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + Ja\frac{\partial\ \theta_1}{\partial x} + Ja^2\frac{\partial\ \theta_2}{\partial x}\right]\left\{Ja\left[\frac{d}{d\sigma}a_0 + Ja\frac{d}{d\sigma}a_1 + Ja^2\frac{d}{d\sigma}a_2\right]\left[1 - \right.\right.$$

$$\left.\left. -a_0^2/(x+a_0)^2\left[1-\frac{2a_1Ja}{x+a_0}-\frac{4a_1^2Ja^2}{a_0(x+a_0)}+\frac{2a_1Ja}{a_0}\right]+2/(x+a_0)\left(1-\frac{a_2Ja^2}{x+a_0}-\frac{a_1Ja}{x+a_0}\right)\right]\right\}$$

(3.5)

De la ecuación (3.5) se igualan los términos del mismo orden, $Ja^0$, $Ja^1$, y $Ja^2$, y se separan en dichos órdenes.

Para el orden $Ja^0$, se tiene

$$\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x^2} + \frac{2}{x+a_0}\ \frac{\partial\ \theta_0}{\partial x} = 0 \qquad (3.6)$$

Para el orden $Ja^1$, se tiene

$$\frac{\partial\ \theta_0}{\partial\sigma} = \frac{\partial^2\theta_1}{\partial x^2} + \frac{\partial\ \theta_0}{\partial x}\ \frac{d}{d\sigma}a_0\left[1-\left[\frac{a_0}{x+a_0}\right]^2\right] + \frac{2a_1}{(x+a_0)^2}\ \frac{\partial\ \theta_0}{\partial x} +$$

$$\frac{2}{(x+a_0)^2}\ \frac{\partial\ \theta_1}{\partial x} \qquad (3.7)$$

Para el orden $J\alpha^2$, se tiene

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \sigma} = \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} + \left[\frac{-2a_0a_1}{(x+a_0)^3} \frac{-2a_1}{(x+a_0)^2}\right]\frac{\partial \theta_0}{\partial x}\frac{d a_0}{d\sigma} + \left[\frac{d a_0}{d\sigma} \frac{-a_0^2}{(x+a_0)^2}\frac{d a_0}{d\sigma}\right]\frac{\partial \theta_0}{\partial x} +$$

$$+ \frac{-2a_2}{(x+a_0)^2}\frac{\partial \theta_0}{\partial x} - \frac{2a_1}{(x+a_0)^2}\frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \frac{2}{(x+a_0)}\frac{\partial \theta_2}{\partial x} + \frac{\partial \theta_0}{\partial x}\frac{d a_1}{d\sigma} -$$

$$- \frac{a_0}{(x+a_0)}\frac{\partial \theta_0}{\partial x}\frac{d a_1}{d\sigma} \tag{3.8}$$

Similarmente, el uso de las ecuaciones (3.2) y (3.3) en la ecuación (2.9) conduce a:

$$\frac{d a_0}{d\sigma} + J\alpha\frac{d a_1}{d\sigma} + J\alpha^2\frac{d a_2}{d\sigma} = \left.\frac{\partial \theta_0}{\partial x}\right]_{x=0} + J\alpha\left.\frac{\partial \theta_1}{\partial x}\right]_{x=0} + J\alpha^2\left.\frac{\partial \theta_2}{\partial x}\right]_{x=0}$$

(3.9)

Con el procedimiento anterior

$$\frac{d\, a_0}{d\sigma} = \frac{\partial\, \theta_0}{\partial x}\Big]_{x=0} \tag{3.10}$$

$$\frac{d\, a_1}{d\sigma} = \frac{\partial\, \theta_1}{\partial x}\Big]_{x=0} \tag{3.11}$$

$$\frac{d\, a_2}{d\sigma} = \frac{\partial\, \theta_2}{\partial x}\Big]_{x=0} \tag{3.12}$$

De igual forma para las anteriores ecuaciones se realiza la expansión de su condición inicial

$$a(0) = a_0(0) + Ja\, a_1(0) + Ja^2 a_2(0) \tag{3.13}$$

$$a_0(0) + Ja\, a_1(0) + Ja^2 a_2(0) = 1 + 0Ja + 0Ja^2 \tag{3.13-1}$$

Al igualar ordenes de Jakob

$$a_0(0)=1 \quad ; \quad a_1(0)=0 \quad ; \quad a_2(0)=0 \tag{3.13-2}$$

Las condiciones para resolver el sistema (3.6)-(3.8) se pueden obtener de manera similar, esto es:

$$\theta(0,\sigma)=\theta_0(0,\sigma) + Ja\theta_1(0,\sigma) + Ja^2\theta_2(0,\sigma) \qquad (3.14)$$

$$\theta_0(0,\sigma) + Ja\theta_1(0,\sigma) + Ja^2\theta_2(0,\sigma)=1 + 0Ja + 0Ja^2 \qquad (3.14\text{-}1)$$

$$\theta_0(0,\sigma)=1 \quad ; \quad \theta_1(0,\sigma)=0 \quad ; \quad \theta_2(0,\sigma)=0 \qquad (3.14\text{-}2)$$

De la misma forma la otra condiciones inicial y de contorno se traducen en:

$$\theta(x,0)=\theta(\infty,\sigma)=0$$

$$\theta_0(x,0)=\theta_0(\infty,\sigma)=\theta_1(x,0)=\theta_1(\infty,\tau)=\theta_2(x,0)=\theta_2(\infty,\tau)=0 \qquad (3.14\text{-}3)$$

Lo que sigue es resolver los sistemas (3.5) a (3.14) para la temperatura $\theta$ y el radio de la burbuja (a), esta última en función de $\tau$ por métodos de solución convencionales.

# CAPITULO IV

## IV. SOLUCION DEL PROBLEMA

### IV.1. *PREAMBULO*

Este capítulo trata de la solución del sistema (3.5)-(3.14) mediante métodos convencionales.

La técnica de perturbación permite resolver a la temperatura en forma independiente de la evolución del radio en su orden respectivo. Para los subsecuentes órdenes se utiliza la solución del orden anterior. Al resolver para la temperatura $\theta$ se lleva a la ecuación de la evolución del radio (a) y se resuelve esta en función de $\tau$, todo esto por metodos convencionales.

Una vez que se obtienen las soluciones de los diferentes órdenes en $\theta$ y (a), se llevan a las series (3.1) y (3.2) para obtener la solución buscada. De ahí los resultados se obtendrán para diferentes números de Jakob.

### IV.2. *SOLUCION PARA EL ORDEN CERO*

De la ecuación (3.6) se tiene el siguiente arreglo

$$\frac{1}{(x+a)^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[(x+a)^2\frac{\partial \theta o}{\partial x}\right] = 0 \qquad (4.1)$$

al integrar dos veces

$$\theta_o = -\frac{F_1(\sigma)}{(x+a)} + F_2(\sigma) \qquad (4.2)$$

al aplicar las condiciones de frontera para obtener $F_1$ y $F_2$

$$F_1(\sigma) = -a \quad ; \quad F_2(\sigma) = 0$$

$$\theta_o = \frac{a_o}{a_o+x} \qquad (4.3)$$

al evaluar la condición de contorno $da_o/d\sigma$ en virtud de que se conoce la derivada de la ecuación (4.3) $\partial\theta_o/\partial x$ que se evalúa en $x=0$, se tiene una ecuación de primer orden, para $a_o$

$$\frac{d\,a_o}{d\sigma} = -\left.\frac{a_o}{(a_o+x)^2}\right]_{x=0} = -\frac{1}{a_o} \qquad (4.4)$$

al integrar (4.4) se obtiene $a_o$

$$a_o = (1-2\sigma)^{1/2} \qquad (4.5)$$

Con el fin de comparar con el autor [1] se define un tiempo $\tau^*$

$$\sigma = J\alpha\tau \text{ y } \tau^* = 4\pi^{-1}J\alpha^2\tau$$

$$ao = (1-2Ja\tau)^{1/2} = (1-\tau^{*}\pi/(2Ja))^{1/2} \qquad (4.6)$$

Para obtener el tiempo crítico $\tau_c^{*}$, que es el tiempo para el cual el radio de la burbuja se hace cero, se iguala con la ecuación (4.6) y se obtiene después de simplificar:

$$\tau_c^{*} = \frac{2Ja}{\pi} \qquad (4.6\text{-}1)$$

lo cual permite escribir la ecuación (4.6) como:

$$ao = (1-\tau^{*}/\tau_c^{*})^{1/2} \qquad (4.7)$$

que es la del autor [1]

IV.3. *SOLUCION DEL PRIMER ORDEN*

En la ecuación (3.7), se sustituyen ao, $\theta o$ y sus derivadas

$$-\frac{x}{ao(x+ao)^{2}} = \frac{1}{(x+ao)^{2}}\frac{\partial}{\partial x}\left[(x+ao)^{2}\frac{\partial \theta_1}{\partial x}\right] + \frac{1}{(x+ao)^{2}}\left[1-\frac{ao}{(x+ao)^{2}}\right] +$$

$$+\frac{2ao\,a_1}{(x+ao)^{4}} \qquad (4.8)$$

Al integrar dos veces (4.8)

$$\theta_1 = \frac{a_o - 2a_oa_1}{2(x+a_o)^2} + \frac{x^2}{2a_o(x+a_o)} - \frac{x+a_o}{a_o} + \frac{x}{x+a_o} - \frac{F_3(\sigma)}{x+a_o} + F_4(\sigma) \tag{4.9}$$

Al evaluar las condiciones de contorno

$$F_3(\sigma) = -(a_o/2 + a_1) \qquad ; \qquad F_4(\sigma) = 0$$

Por lo tanto (4.9) queda

$$\theta_1 = \frac{a_o - 2a_oa_1}{2(x+a_o)^2} + \frac{x^2}{2a_o(x+a_o)} - \frac{x+a_o}{a_o} + \frac{x}{x+a_o} + \frac{a_1+(a_o/2)}{x+a_o} \tag{4.10}$$

Nuevamente para obtener $a_1$ se sigue lo mismo que para $a_o$

$$\left.\frac{\partial\,\theta_1}{\partial x}\right]_{x=0} = -\frac{3}{2a_o} + \frac{a_1}{a_o^2} = \frac{d\,a_1}{d\sigma} \tag{4.11}$$

que por medio del factor integrante se obtiene $a_1$ (ver apéndice)

$$a_1 = - \frac{3\sigma}{2(1-2\sigma)^{1/2}} = - \frac{3\ Ja\tau}{2(1-2Ja\tau)^{1/2}} \tag{4.12}$$

que al sumar en la serie (3.3) se obtiene (a)

$$a = (1-2Ja\tau)^{1/2} - \frac{3\ Ja^2\tau}{2(1-2Ja\tau)^{1/2}} \tag{4.13}$$

En términos de $\tau^*$

$$a = \left[1 - \frac{\pi\tau^*}{2Ja}\right]^{1/2} - \frac{3\pi\tau^*}{8\left[1 - \frac{\pi\tau^*}{2Ja}\right]^{1/2}} \tag{4.14}$$

para este caso $\tau_c^*$ es igual a

$$\tau_c^* = \frac{2Ja}{\pi(1+0.75Ja)} \tag{4.14-1}$$

al derivar la ecuación (4.14) con respecto a $\tau^*$ evaluada en el tiempo crítico de colapso $\tau_c^*$ se tiene

$$\left.\frac{da}{d\tau^*}\right]_{\tau^*=\tau_c^*} = -\frac{\pi}{4Ja}\left[1+\frac{1}{.75Ja}\right]^{1/3}\left[1+(.75Ja)^{1/2}\right] \qquad (4.14\text{-}2)$$

lo cual demuestra que es finita y menor que cero, esto es, se conoce la derivada en el tiempo de colapso.

## IV.3. *SOLUCION DEL SEGUNDO ORDEN*

Al calcular el segundo orden de perturbación para encontrar la corrección en $a_2$ (ver apéndice)

$$a_2 = -\frac{1}{(1-\sigma)^{1/2}}\left[-\frac{5}{6}\sigma - \frac{13}{18}\ln(1-\sigma) + \frac{3}{16}(1-\sigma)^{1/2} - \frac{3}{16(1-\sigma)^{3/2}}\right]$$

(4.15)

Al sustituir en la serie para obtener finalmente a en términos de $\tau^*$

$$a = \sqrt{1 - \frac{\pi\tau^*}{2Ja}} - \frac{3\pi\,\tau^*}{8\sqrt{1 - \frac{\pi\tau^*}{2Ja}}} - \frac{Ja^2}{\sqrt{1 - \frac{\pi\tau^*}{2Ja}}}\left[\frac{3}{16} + \frac{11\pi\tau^*}{98Ja} - \frac{13}{8}\ln\left(1 - \frac{\pi\tau^*}{2Ja}\right) - \frac{3}{16\left(1 - \frac{\pi\tau^*}{2Ja}\right)}\right] \tag{4.16}$$

CAPITULO V

# V. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

La parte metodológica más importante del trabajo ha sido el poder aplicar la teoría de perturbación regular para resolver analíticamente un problema no lineal. La solución que se obtiene es mejor que una solución numérica ya que nos muestra de manera explícita la relación funcional de las variables involucradas. Como se vió en la ecuación (4.14-2), se conoce la derivada del radio justo en el colapso asunto que el autor [1] con la técnica de aproximaciones desconoce y suponer que esta derivada es infinita como erroneamente juzga el autor, puede implicar dos cosas, que el salto de temperatura es infinito lo cual no tiene sentido, por el planteamiento del problema, o que la conductividad térmica del líquido sea infinita, lo cual también es imposible.

Dentro de la solución obtenida se tiene el perfil de temperatura, y la evolución del radio. En la siguiente tabla se tienen los resultados de la evlolución del radio a contra el tiempo $\tau^*$ para Ja=0.01, y Ja=0.02, con los datos y resultados del autor [1] que para el caso de los resultados siguientes $\tau^*$ es dato, todo esto con el fin de comparar.

Ja=0.01

| anum | aaut | ao | $a_1 Ja$ | $a=ao+a_1 Ja$ | $\tau^*$ | $ao+a_1 Ja+$ $+a_2 Ja^2$ | $\frac{da}{d\tau^*}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.9 | 0.927458 | 0.928569 | 0.001112 | 0.927456 | 0.000877 | 0.927430 | -170.54 |
| 0.8 | 0.839383 | 0.841980 | 0.002571 | 0.839387 | 0.001853 | 0.839322 | -188.3 |
| 0.7 | 0.748089 | 0.752426 | 0.004324 | 0.748102 | 0.002762 | 0.747985 | -211.12 |
| 0.6 | 0.655835 | 0.662029 | 0.006365 | 0.655660 | 0.003576 | 0.655480 | -240.77 |
| 0.5 | 0.563573 | 0.572450 | 0.008808 | 0.563641 | 0.00428 | 0.563365 | -280.14 |
| 0.4 | 0.471119 | 0.483168 | 0.011898 | 0.471269 | 0.00488 | 0.470871 | -335.82 |
| 0.3 | 0.383429 | 0.399529 | 0.015775 | 0.383754 | 0.00535 | 0.383206 | -415.53 |
| 0.2 | 0.302019 | 0.323490 | 0.020758 | 0.302732 | 0.00570 | 0.302030 | -537.38 |
| 0.1 | 0.236938 | 0.264742 | 0.026343 | 0.238398 | 0.00592 | 0.237629 | -709.28 |
| 0.05 | 0.215809 | 0.246300 | 0.028603 | 0.217696 | 0.00598 | 0.216939 | -792.89 |
| 0.0 | 0.204427 | 0.236540 | 0.029932 | 0.206607 | 0.00601 | 0.205872 | -846.68 |

$Ja=0.02$

| $a_{num}$ | $a_{aut}$ | $a_0$ | $a_1 Ja$ | $a=a_0+a_1 Ja$ | $\tau^*$ | $a_0+a_1 Ja+$ $+a_2 Ja^2$ | $\frac{da}{d\tau^*}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.9 | 0.936071 | 0.937994 | 0.001916 | 0.936073 | 0.00153 | 0.935983 | -85.07 |
| 0.8 | 0.851916 | 0.856592 | 0.004662 | 0.851929 | 0.00339 | 0.851698 | -93.35 |
| 0.7 | 0.763796 | 0.771699 | 0.004185 | 0.763837 | 0.00515 | 0.763418 | -103.97 |
| 0.6 | 0.673158 | 0.684887 | 0.006655 | 0.673259 | 0.00676 | 0.672593 | -117.61 |
| 0.5 | 0.582305 | 0.598606 | 0.001607 | 0.582527 | 0.00817 | 0.581539 | -136.11 |
| 0.4 | 0.492760 | 0.514652 | 0.021426 | 0.493226 | 0.00936 | 0.491822 | -161.06 |
| 0.3 | 0.406390 | 0.435280 | 0.027931 | 0.407349 | 0.01032 | 0.405431 | -196.44 |
| 0.2 | 0.326987 | 0.364582 | 0.035674 | 0.328908 | 0.01104 | 0.326434 | -247.56 |
| 0.1 | 0.263999 | 0.311114 | 0.043547 | 0.267567 | 0.0115 | 0.264071 | -313.02 |
| 0.05 | 0.248206 | 0.298224 | 0.045824 | 0.252400 | 0.0116 | 0.249422 | -335.15 |
| 0.0 | 0.231336 | 0.284752 | 0.048405 | 0.236346 | 0.0117 | 0.233301 | -362.28 |

De las dos tablas anteriores se pueden ver los resultados obtenidos por el autor [1], comparados con la solución numérica y con los obtenidos en los diferentes órdenes de perturbación. Cómo se puede apreciar en el segundo orden la corrección es mejor que la del autor hasta la tercera cifra, pero a medida que se acerca al valor crítico dicho valor aumenta y no es mejor que el del autor; sin embargo , en términos generales, los resultados son aceptables.

Después de haber calculado el primer orden se pensó en la posibilidad de que la corrección del segundo orden sería suficiente para alcanzar a los valores que ofrece la numérica. Sin embargo, al revisar el algebra se descubrió que existe una divergencia en la temperatura en el primer orden, también aparece en el segundo y no obstante el hecho de que no introduzca singularidades en la evolución del radio de la gota, provoca que la solución no esté completa para el perfil de temperatura, en virtud de que no se satisface la condición cuando $x \to \infty$ .

Debido a que el esquema de perturbación regular es insuficiente se recomienda alguna teoría más sofisticada como el método de escalas múltiples, que tome en cuenta las no uniformidades en las soluciones desarrolladas con ayuda de un esquema de perturbación convencional como el aquí desarrollado.

*BIBLIOGRAFIA*

1. A.D. Okhotsimskii, The thermal regime of vapour bubble collapse at different Jacob numbers, *Int. J. Heat and Mass Transfer* 31, 1569-1576, (1988).

2. R.I. Nigmatulin,N.S. Khabeev and F.B. Nagiev ,Dynamics, heat and mass transfer of vapour-gas bubbles in a liquid, *Int. J. Heat and Mass Transfer* 24, 1033-1044 (1981).

3. Sjoerd Van Stralen, *Boiling Phenomena*. Hemisphere (1979).

4. Arthur P. Fraas, *Heat Exchanger Design*. John Wiley & Sons, Inc. Second Edition (1989).

5. Frank P. Incropera and David P. De Witt, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, John Wiley & Sons Inc. Third Edition (1990).

6. R. Byron Bird, Warren E. Stewart and E.N. Lightfoot, *Fenómenos de transporte* . Ed. Reverté (1978).

7. M. Necati Ozisik, *Heat conduction*. John Wiley & Sons, Inc. (1980).

8. Milton Abramowitz, *Handbook of Mathematical Functions*. Washington, U.S. Nat. Bureau of Standards Applied Mathematical Series. (U.S. Gov. Printoff 1964).

9. Carl M. Bender and Steven A. Orzag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, Mc Graw Hill Inc. (1978).

## A P E N D I C E   A

### A.I. ADIMENSIONALIZACION DE LA ECUACION (2.6)

Se aplica la regla de la cadena tomando en consideración que la tmperatura $\theta$ es función de $x$ y $\tau$ y que a su vez $x$ es función de $\tau$, entonces: en otra forma

$\theta(x(\tau),\tau)$

$$\frac{\partial}{\partial t} T = \frac{\partial}{\partial t}\left[\theta\Delta T + To\right] = \Delta T\frac{\partial}{\partial t}\theta = \Delta T\left[\frac{\partial}{\partial \tau}\theta\left[\frac{\partial}{\partial t}\tau\right] + \frac{\partial}{\partial x}\theta\left[\frac{\partial}{\partial \tau}x\right]\frac{\partial}{\partial t}\tau\right] \quad (A.1)$$

a su vez se calculan las derivadas

$$\frac{\partial}{\partial \tau}x = \frac{\partial}{\partial \tau}\left[r - \frac{R}{Ro}\right] = -\frac{1}{Ro}\frac{d}{d\tau}R = -\frac{d}{d\tau}a \quad (A.1\text{-}1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\tau = \frac{\alpha}{Ro^2} \quad (A.1\text{-}2)$$

Simplemente puede demostrarse que:

$$\frac{d}{dt}R = \frac{\partial}{d\tau}R\left[\frac{\partial}{\partial t}\tau\right] = \frac{d}{d\tau}R\left[\frac{\alpha}{Ro^2}\right] = \frac{\alpha}{Ro}\frac{d}{d\tau}a \qquad (A.2)$$

Con ayuda de (A.1-2) ahora se calcula la derivada para la temperatura respecto al radio

$$\frac{\partial}{\partial r}T = \frac{\partial}{\partial r}\left[To + \Delta T\theta\right] = \Delta T\frac{\partial}{\partial x}\theta\left[\frac{\partial}{\partial r}x\right] \qquad (A.3)$$

se genera otra derivada que a continuación se calcula

$$\frac{\partial}{\partial r}x = \frac{1}{Ro} \qquad (A.3-1)$$

la segunda derivada de la temperatura con respecto al radio es

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\Delta T}{Ro}\frac{\partial}{\partial x}\theta\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\Delta T}{Ro}\frac{\partial}{\partial x}\theta\right]\frac{\partial}{\partial r}x = \frac{\Delta T}{Ro^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \qquad (A.4)$$

$$\frac{R^2}{r^2} = \left[\frac{a}{a+x}\right]^2 \qquad (A.4-1)$$

al sustituír en la ecuación (2.6), todas las ecuaciones anteriores

$$\frac{\Delta T\alpha}{Ro^2}\left[\frac{\partial\theta}{\partial\tau} - \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{da}{d\tau}\right] + \frac{\Delta T\alpha}{Ro^2}\left[\frac{a}{a+x}\right]^2\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{da}{d\tau} = \frac{\Delta T\alpha}{Ro^2}\left[\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{2}{a+x}\frac{\partial\theta}{\partial x}\right] \qquad (A.5)$$

como el factor $\Delta T\alpha/Ro^2$ es común se elimina y se despeja $\partial\theta/\partial\tau$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial\theta}{\partial x}\left\{\frac{da}{d\tau}\left[1 - \left[\frac{a}{a+x}\right]^2\right] + \frac{2}{a+x}\right\} \qquad (A.6)$$

A.II. ADIMENSIONALIZACION DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO

De la ecuación (2.8)

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\alpha}{Ro}\frac{da}{d\tau} = \frac{C\rho l\alpha}{h\rho v}\frac{\partial T}{\partial r}\bigg]_{r=R} \qquad R(0) = Ro \qquad (A.7)$$

Al despejar $da/d\tau$ y sustituír (A.3) y (A.3-1)

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{C\rho l}{h\rho v}\Delta T\frac{\partial\theta}{\partial x}\bigg]_{x=0} = J_a\frac{\partial\theta}{\partial x}\bigg]_{x=0} \qquad a(0) = 1 \qquad (A.8)$$

De igual manera para $\theta$, para el tiempo $\tau$ y para $x$

$$T(R,t)=To+\Delta T=To+\Delta T\theta(0,\tau) \rightarrow \theta(0,\tau)=1 \qquad (A.9)$$

$$T(r,0)=T(\infty,t)=To=To+\Delta T\theta(x,0)=To+\Delta T\theta(\infty,\tau) \qquad (A.10)$$

Al despejar $\theta$ en ambos casos

$$\theta(x,0)=\theta(\infty,\tau)=0 \qquad (A.11)$$

## A P E N D I C E   B

### B.1. REDUCCION DE TERMINOS DE LA ECUACION (3.4)

$$Ja\left[\frac{\partial}{\partial\sigma}\theta_0 + Ja\frac{\partial}{\partial\sigma}\theta_1 + Ja^2\frac{\partial}{\partial\sigma}\theta_2\right] = \frac{\partial^2\theta_0}{\partial x^2} + Ja\frac{\partial^2\theta_1}{\partial x^2} + Ja^2\frac{\partial^2\theta_2}{\partial x^2} + \left[\frac{\partial}{\partial x}\theta_0 +\right.$$

$$\left. Ja\frac{\partial}{\partial x}\theta_1 + Ja^2\frac{\partial}{\partial x}\theta_2\right]\left\{Ja\left[\frac{d}{d\sigma}a_0 + Ja\frac{d}{d\sigma}a_1 + Ja^2\frac{d}{d\sigma}a_2\right]\left[1 -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{(a_0 + a_1Ja + a_2Ja^2)^2}{(x+a_0 + a_1Ja + a_2Ja^2)^2} + \frac{2}{(x+a_0 + a_1Ja + a_2Ja^2)^2}\right]\right\} \qquad (B.1)$$

Como no se puede determinar fácilmente el orden de los términos al final de la ecuación se retienen términos de orden $Ja^2$, y como $Ja\to 0$ por el binomio de Newton que $(1 + b)^n \cong (1 + nb)$ si $b\to 0$, entonces.

$$(a_0+a_1Ja+a_2Ja^2)^2 = a_0\left[1+\frac{a_1}{a_0}Ja\right]^2\left[1+\frac{a_2Ja^2}{a_0+a_1Ja}\right] =$$

$$= a_0^2\left[1+\frac{2a_1Ja}{a_0}\right]\left[1+\frac{2a_2Ja^2}{a_0}\right] \qquad (B.1-1)$$

$$1/(x+a_0+a_1J\alpha+a_2J\alpha^2)^2 = 1/(x+a_0)^2 \left[1-\frac{2a_1J\alpha}{x+a_0}\right]\left[1-\frac{2a_2J\alpha^2}{x+a_0}\left(1-\frac{a_1J\alpha}{x+a_0}\right)\right]$$

(B.1-2)

Al multiplicar (B.1-1) y (B.1-2) se tiene

$$a_0^2/(x+a_0)^2\left[1-\frac{2a_1J\alpha}{x+a_0}-\frac{4a_1^2J\alpha^2}{a_0(x+a_0)}+\frac{2a_1J\alpha}{a_0}\right] \qquad (B.1-3)$$

$$2/(x+a_0+a_1J\alpha+a_2J\alpha^2)=2/(x+a_0)\left(1-\frac{a_2J\alpha^2}{x+a_0}-\frac{a_1J\alpha}{x+a_0}\right) \qquad (B.1-4)$$

Al llevar (B.1-3) y (B.1-4) a (B.1)

$$J\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\theta_0+J\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\theta_1+J\alpha^2\frac{\partial}{\partial\alpha}\theta_2\right)=\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x^2}+J\alpha\frac{\partial^2\theta_1}{\partial x^2}+J\alpha^2\frac{\partial^2\theta_2}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial}{\partial x}\theta_0+\right.$$

$$\left.J\alpha\frac{\partial}{\partial x}\theta_1+J\alpha^2\frac{\partial}{\partial x}\theta_2\right)\left\{J\alpha\left(\frac{d}{d\alpha}a_0+J\alpha\frac{d}{d\alpha}a_1+J\alpha^2\frac{d}{d\alpha}a_2\right)\left[1-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{a_0^2}{(x+a_0)^2}\left[1-\frac{2a_1J\alpha}{x+a_0}-\frac{4a_1^2J\alpha^2}{a_0(x+a_0)}+\frac{2a_1J\alpha}{a_0}\right]+2/(x+a_0)\left(1-\frac{a_2J\alpha^2}{x+a_0}-\frac{a_1J\alpha}{x+a_0}\right)\right]\right\}$$

(B.2)

# A P E N D I C E   C

## C.1. SOLUCION DE LA ECUACION (3.7) PARA $\theta_1$ Y $a_1$

$$\frac{\partial \theta_o}{\partial \sigma} = \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta_o}{\partial x}\frac{d\, a_o}{d\sigma}\left[1-\left(\frac{a_o}{x+a_o}\right)\right] + \frac{\partial \theta_o}{\partial x}\left(\frac{2a_1}{(x+a_o)^2}\right) + \frac{2}{x+a_o}\frac{\partial \theta_1}{\partial x} \qquad (C.1)$$

Donde

$$\frac{\partial \theta_o}{\partial x} = \frac{-a_o}{(x+a_o)^2} \quad (C.1\text{-}1) \qquad \text{y} \qquad \frac{d\, a_o}{d\sigma} = -\frac{1}{a_o} \quad (C.1\text{-}2)$$

Que al sustituirlas en (C.1)

$$-\frac{x}{a_o(x+a_o)^2} = \frac{1}{(x+a_o)^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[(x+a_o)^2\frac{\partial \theta_1}{\partial x}\right] + \frac{1}{(x+a_o)^2}\left[1-\frac{a_o^2}{(x+a_o)^2}\right] +$$

$$+\frac{2a_o a_1}{(x+a_o)^4} \qquad (C.2)$$

al reagrupar (C.2)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(x+a_o)^2\frac{\partial\,\theta_1}{\partial x}\right] = -\left[1-\frac{a_o^2}{(x+a_o)^2}\right] - \frac{x}{a_o(x+a_o)^2} - \frac{2a_oa_1}{(x+a_o)^2} \qquad (C.2\text{-}1)$$

Al integrar dos veces

$$\theta_1 = \frac{a_o^2-2a_oa_1}{2(x+a_o)^2} - \frac{1}{2a_o}\left[-\frac{x^2}{x+a_o} + 2(x+a_o) - 2a_o\ln(x+a_o)\right] + \frac{x}{x+a_o} -$$

$$-\ln(x+a_o) - \frac{F_3(\sigma)}{x+a_o} + F_4(\sigma) \qquad (C.3)$$

Al reagrupar

$$\theta_1 = \frac{a_o-2a_oa_1}{2(x+a_o)^2} + \frac{x^2}{2a_o(x+a_o)} - \frac{x+a_o}{a_o} + \frac{x}{x+a_o} - \frac{F_3(\sigma)}{x+a_o} + F_4(\sigma)$$

$$(C.4)$$

al evaluar con las condiciones de contorno

$F_3(\sigma) = a_o/2 + a_1$ ; $F_4(\sigma) = 0$

C.2. CALCULO DEL RADIO DE LA BURBUJA (a)

Al resolver $\theta_1$ esta se deriva respecto a x y se evalúa en x=0 de donde se obtiene una ecuación diferencial de primer orden para $a_1$ en $\sigma$ que se resuelve mediante el factor integrante.

$$\left.\frac{\partial \theta_1}{\partial x}\right]_{x=o} = \frac{d\, a_1}{d\sigma} = -\frac{3}{2ao} + \frac{a_1}{ao^2} \qquad (C.5)$$

por medio de la fórmula del factor integrante y para este caso

$$\frac{d\,\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial}{\partial a_1} N - \frac{\partial}{\partial \sigma} N}{N} \qquad (C.5\text{-}1)$$

$$\left(\frac{3}{2ao} - \frac{a_1}{ao^2}\right)d\sigma + da_1 = 0 \qquad (C.5\text{-}2)$$

donde M y N son los coeficientes

$$M = \left(\frac{3}{2ao} - \frac{a_1}{ao^2}\right) \qquad y \qquad N = 1 \qquad (C.5\text{-}3)$$

Al derivar y sustituir en (C.5-1)

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{1}{ao^2} - 0}{1} = -\frac{1}{ao^2}d\sigma \qquad \text{(C.5-4)}$$

como $ao^2 = 1-2\sigma$

se integra directamente

$$\ln\mu = \ln(1-2\sigma)^{1/2} = \ln ao \;\Rightarrow\; \mu = ao \qquad \text{(C.5-5)}$$

Al multiplicar el factor integrante $\mu$ por la ecuación (C.5-2)

$$\left(\frac{3}{2} - \frac{a_1}{ao}\right)d\sigma + ao\,da_1 = 0 \qquad \text{(C.5-6)}$$

Como ahora se tienen diferenciales exactas se puede tomar cualquiera de los coeficientes e integrarlo respecto a su diferencial, derivarlo respecto a la otra variable e igualarlo al otro coeficiente.

En este caso se toma el de la izquierda y se integra respecto a $\sigma$

$$\phi\sigma = \frac{3}{2} - \frac{a_1}{a_0} = \frac{3}{2} - \frac{a_1}{(1-2\sigma)^{1/2}} \qquad (C.6)$$

$$\phi = \frac{3}{2}\sigma + a_1(1-2\sigma)^{1/2} + F(a_1) = C_1 \qquad (C.6-1)$$

Al derivar (C.6-1) con respecto a $a_1$ se tiene

$$\phi_{a_1} = (1-2\sigma)^{1/2} + F'(a_1) = (1-2\sigma)^{1/2} \qquad (C.6-2)$$

Por lo tanto $F'(a_1)=0$ esto implica que $F(a_1) = C_2$

Si $\phi=0$, entonces $\sigma=0$ , se pueden colapsar $C_1$ y $C_2$ en una sola C que en las condiciones anteriores es cero por lo tanto $a_1$ es

$$a_1 = - \frac{3\sigma}{2(1-2\sigma)^{1/2}} \qquad (C.7)$$

## C.3. DERIVADA DE LA ECUACION (4.14) EVALUADA EN $\tau_c^*$

$$\left.\frac{d\,a}{d\tau^*}\right]_{\tau^*=\tau_c^*} = \frac{-\pi/(2Ja)}{2\left[1-\pi\tau_c^*/(2Ja)\right]^{1/2}} - \frac{3\pi}{8}\left\{\frac{\left[1-\pi\tau_c^*/(2Ja)\right]^{1/2}-\tau_c^*\left[\dfrac{-\pi/(2Ja)}{2\left[1-\pi\tau_c^*/(2Ja)\right]^{1/2}}\right]}{1-\dfrac{\tau_c^*}{2Ja}}\right\} \tag{C.8}$$

Al simplificar con (4.14-1)

$$\left.\frac{d\,a}{d\tau^*}\right]_{\tau^*=\tau_c^*} = -\frac{\pi(1+.75Ja)^{1/2}}{4Ja(1+.75Ja)^{1/2}}\left[1+(1+.75Ja)^{1/2}\right] \tag{C.8-1}$$

## A P E N D I C E  D

### D.1. SOLUCION PARA EL SEGUNDO ORDEN

De la ecuación (3.8)

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial\sigma} = \frac{\partial^2\theta_2}{\partial x^2} + \left[\frac{-2a_o^2 a_1}{(x+a_o)^3} - \frac{2a_1 a_o}{(x+a_o)^2}\right]\frac{\partial\theta_o}{\partial x}\frac{d a_o}{d\sigma} + \left[\frac{d a_o}{d\sigma} - \frac{a_o^2}{(x+a_o)^2}\frac{d a_o}{d\sigma}\right]\frac{\partial\theta_1}{\partial x} - \frac{2a_2}{(x+a_o)^2}\frac{\partial\theta_o}{\partial x} - \frac{2a_1}{(x+a_o)^2}\frac{\partial\theta_1}{\partial x} + \frac{2}{(x+a_o)}\frac{\partial\theta_2}{\partial x} + \frac{\partial\theta_o}{\partial x}\frac{d a_o}{d\sigma} - \frac{a_o^2}{(x+a_o)^2}\frac{\partial\theta_o}{\partial x}\frac{d a_1}{d\sigma} \qquad (D.1)$$

Tomando en cuenta que

$$a_o' = \frac{d\, a_o}{d\sigma} = -\frac{1}{a_o} \quad ; \quad a_1' = \frac{d\, a_1}{d\sigma} = -\frac{3}{2} a_o \quad \frac{a_1}{a_o^2}$$

(D.1-1) ; (D.1-2)

y al sustituir (D.1-1) y (D.1-2) en (D.1)

$$\frac{\partial\, \theta_1}{\partial \sigma} = \frac{1}{(x+a_o)^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[(x+a_o)^2 \frac{\partial\, \theta_2}{\partial x}\right] + \left[\frac{-2a_o a_1}{(x+a_o)^3} - \frac{2a_1}{(x+a_o)^2} - \frac{a_1}{(x+a_o)^2} +\right.$$

$$\left. + \frac{3a_o}{2(x+a_o)^2} + \frac{1}{a_o}\left[\frac{a_1}{a_o} - \frac{3}{2}\right]\right]\frac{\partial\, \theta_o}{\partial x} - \frac{2a_2}{(x+a_o)^2}\frac{\partial\, \theta_o}{\partial x} + \left[\frac{-1}{a_o} + \frac{a_o}{(x+a_o)^2}\right]\frac{\partial\, \theta_1}{\partial x}$$

$$- \frac{2a_1}{(x+a_o)^2}\frac{\partial\, \theta_1}{\partial x} \qquad \text{(D.2)}$$

Ahora se calcularán las derivadas de $\theta_1$ en x y $\sigma$ ya que se conoce la solución de $\theta_1$. para el caso de $\theta_o$ solo se deriva la ecuación (4.3) respecto a $\sigma$ ya que se conoce (C.1-1)

$$\frac{\partial \theta_o}{\partial \sigma} = \frac{(x+a_o)a_o' - a_o a_o'}{(x+a_o)^2} \qquad (D.2-1)$$

De la ecuación (4.10), se deriva respecto a $\sigma$ y se arregla así. La derivada de $\partial\theta_1/\partial\sigma$, multiplicada por el factor $(x+a_o)^2$ es

$$(x+a_o)^2\frac{\partial \theta_1}{\partial \sigma} = a_o a_o' - 2a_o' a_1 - a_o x - \frac{(a_o^2 - 2a_o a_1)a_o}{(x+a_o)} + \frac{(x+a_o)^2 a_o' x}{a_o^2} -$$

$$-x a_o' - \frac{x^2}{2a_o}\left[2a_o a_o' + x a_o'\right] + \frac{x(a_o' + 2a_1') + 2a_o a_1' 2a_o' a_1}{2} \qquad (D.2-2)$$

Ahora la derivada respecto a x de $\theta_1$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial x} = -\frac{2x(x+a_o)^{1/2}}{4(x+a_o)^2} - \frac{1}{a_o} + \frac{(x+a_o) - x(x+a_o)}{(x+a_o)^2} \qquad (D.2-3)$$

Al integrar la ecuación (D.2-2) con respecto a x se tiene

$$\int (x+a_0)^2 \frac{\partial \theta_1}{\partial \sigma} = \left[a_0 a_0' - 2a_0' a_1\right] x - \left[a_0' - 2a_1\right] \frac{x^2}{4} + \frac{a_0' x^2}{a_0^2 8} + \frac{a_0' x^3}{a_0 \, 3} + -$$

$$- \left[a_0^2 - 2a_0 a_1\right] a_0' \ln(x+a_0) + \frac{a_0' x^2}{2} \qquad (D.2\text{-}4)$$

La ecuación anterior es la integral del lado izquierdo de la ecuación (D.2), ahora al sustituír en el lado derecho de (D.2), (D.2-1), y (D.2-3) e integrando con respecto a x se tiene

$$= (x+a_0)^2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} - \left[\frac{2a_0 a_1}{x+a_0} - a_1 - \frac{3}{2} a_0 + 2a_2\right] \frac{a_0}{x+a_0} - \left[\frac{a_1}{a_0^2} - \frac{3}{2a_0}\right] a_0 x +$$

$$+ \left[a_0 - 2a_1\right] \left[\frac{a_0^2 - 2a_0 a_1}{2(x+a_0)^2} + \frac{x^2}{2(x+a_0)a_0} - \frac{x+a_0}{a_0} + \frac{x}{x+a_0} + \frac{a_0 + 2a_1}{2(x+a_0)}\right] +$$

$$+ \frac{(a_0^2 - 2a_0 a_1)\ln(x+a_0)}{a_0} + \frac{x^2}{2a_0} + \frac{x^3}{6a_0} - \frac{F_s(\sigma)}{a_0} x + \frac{a_0 a_1^2}{(x+a_0)^2} + F_s(\sigma)$$

$$(D.2\text{-}5)$$

Al igualar (D.2-4) y (D.2-5) y pasando del lado derecho el factor

$(x+a_0)^2$, y al sustituir (D.1-1) se tiene

$$\left(-1+\frac{2a_1}{a_0}\right)\frac{x}{(x+a_0)^2}+\frac{a_1\cdot x^2}{2(x+a_0)^2}-\frac{x^4}{8a_0^3(x+a_0)^2}=\frac{\partial\,\theta_2}{\partial x}+\left(a_1+\frac{3}{2}a_0-\right.$$

$$\left.-2a_2\right)\frac{a_0}{(x+a_0)^2}-\frac{a_0^2a_1}{(x+a_0)^4}-\left(\frac{a_0}{a_1}-\frac{3}{2}\right)\frac{x}{(x+a_0)^2}+\frac{3x^2}{4a_0(x+a_0)^2}+\frac{x^3}{2a_0^2(x+a_0)^2}+$$

$$+\frac{(a_0+a_1)x}{2a_0(x+a_0)^2}+\frac{F_5(\sigma)}{(x+a_0)^2}+\frac{a_1^2a_0}{(x+a_0)^4}+$$

$$+\left(a_0-2a_1\right)\left[\frac{a_0^2-2a_0a_1}{2(x+a_0)^4}+\frac{x^2}{2a_0(x+a_0)^3}-\frac{1}{(x+a_0)a_0}+\frac{x}{(x+a_0)^3}+\frac{a_0+2a_1}{2(x+a_0)^3}\right]$$

(D.3)

Al despejar $\partial\theta_2/\partial x$ e integrar

$$\theta_2 = \left[-3 + 2\frac{a_1}{a_0}\right]\left[\frac{a_0}{x+a_0} + \ln(x+a_0)\right] + \left[x+a_0 - 2a_0\ln(x+a_0) - \frac{a_0^2}{x+a_0}\right] -$$

$$- \frac{1}{4a_0^2}\left\{\frac{x^3}{x+a_0} - 3a_0\left[x+a_0 - 2a_0\ln(x+a_0) - \frac{a_0^2}{x+a_0}\right]\right\} - \frac{1}{24a_0^2}\left\{\frac{x^4}{x+a_0} -\right.$$

$$\left. - 2a_0\left[\frac{x^3}{x+a_0} - 3a_0\left[x+a_0 - 2a_0\ln(x+a_0) - \frac{a_0^2}{x+a_0}\right]\right]\right\} + \left[1 - 2\frac{a_1}{a_0}\right]\ln(x+a_0) +$$

$$+ \frac{F_5(\sigma)}{x+a_0} - \frac{1}{2(x+a_0)^2}\left[2a_1^2 - 2a_0^2 - a_0a_1 + 2a_0a_2\right] - \frac{a_0}{3(x+a_0)^3}\left[5a_0a_1 - a_0^2 -\right.$$

$$\left. - 3a_1^2\right] - \left[\frac{1}{2} - \frac{a_1}{a_0}\right]\left[\ln(x+a_0) + \frac{2a_0}{x+a_0} - \frac{a_0^2}{2(x+a_0)^2}\right] - \left[a_0 - 2a_1\right]\left[\frac{a_0}{2(x+a_0)^2} -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{x+a_0}\right] + F_6(\sigma) \qquad \text{(D.4)}$$

Al evaluar con las condiciones de contorno se llega a

$$F_{\sigma}(\sigma)=0 \qquad (D.4\text{-}1)$$

$$F_5(\sigma)=\frac{31}{12}a_0-\frac{10}{3}a_1+(a_1-2a_1)\ln a_0-\frac{3a_1^2}{2a_0^2}+a_2 \qquad (D.4\text{-}2)$$

Al evaluar la condición de contorno (3.12)

$$\left.\frac{\partial\,\theta_2}{\partial x}\right]_{x=0}=\frac{d\ a_2}{d\sigma}=-\frac{10}{3a_0}\left(1-\frac{a_1}{a_0}\right)+\frac{1}{a_0}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2+\frac{a_2}{a_0}\right] \qquad (D.4\text{-}3)$$

de donde se obtiene una ecuación diferencial, que se resuelve por método del factor integrante.