

003623



**Universidad Nacional Autónoma de México**

Facultad de Ciencias

División de Estudios de Postgrado

Localización y deslocalización  
de ensembles de matrices en banda

**T E S I S**

Que para obtener el grado académico de:

**MAESTRO EN CIENCIAS**

(Física)

P r e s e n t a :

**Francisco Javier Quezada Andrade**

Director de Tesis: Dr. Thomas Henry Seligman Schurch

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE DE CONTENIDO

INTRODUCCION . . . . .	2
CAPITULO I. TEORIA DE MATRICES ALEATORIAS	
1.1 Ensemble gaussiano ortogonal . . . . .	5
1.2 Modelo de matrices en banda . . . . .	7
1.3 Propiedades estadísticas de los ensembles . . . . .	10
CAPITULO II. DESCRIPCION ANALITICA DE LOS ENSEMBLES BRM	
2.1 Rotor pateado . . . . .	13
2.2 Resultados analíticos y numéricos . . . . .	17
CAPITULO III. ANALISIS NUMERICO DE LOS ENSEMBLES BRM	
3.1 Estudio numérico de las BRM . . . . .	20
CONCLUSIONES . . . . .	24
REFERENCIAS . . . . .	26
GRAFICAS . . . . .	28

# LOCALIZACION Y DESLOCALIZACION DE ENSEMBLES DE MATRICES EN BANDA

## INTRODUCCION

En los últimos años se ha despertado un gran interés en los sistemas caóticos. Esto es debido, en parte, al gran avance que han tenido las computadoras y por ende se han podido aumentar de manera asombrosa las simulaciones numéricas, pudiendo llegar a zonas que antes parecían inaccesibles.

Una de las cuestiones fundamentales de interés actual en física es encontrar las características de un problema cuántico definido por un Hamiltoniano  $H$  que muestra una solución caótica, a nivel clásico. En la última década se han dedicado grandes esfuerzos al entendimiento de las diferentes estadísticas del espectro de un problema cuántico que esté correlacionado con la transición entre comportamientos clásicos integrables y caóticos<sup>1</sup>.

La idea básica de Berry es que la repulsión de los niveles correspondan a la caoticidad, mientras que la integrabilidad corresponde a una estadística de Poisson<sup>2</sup>. La validez de estas suposiciones están sustentadas con evidencias muy convincentes presentadas por Bohigas, Giannoni y Schmit<sup>3</sup>, seguida de claras pruebas dadas por otros autores<sup>4</sup>. Bohigas, Giannoni y Schmit estudiaron el biliar de Sinai cuántico y los modelos de estadios, los cuales son conocidos clásicamente como sistemas  $K$ . Estos modelos están descritos por Hamiltonianos independientes del tiempo. Su principal hallazgo fue que el espectro de  $H$  tiene una distribución de niveles de energía que corresponde al ensemble gaussiano ortogonal (GOE), estudiado éste de una manera extensa en la teoría de matrices aleatorias. Este tipo de estadística de niveles se usa extensamente para describir de una manera exitosa el espectro de núcleos complicados, átomos y sistemas moleculares<sup>2</sup>.

El estudio de Hamiltonianos polinomiales, en cuyo espacio fase se encuentran regiones caóticas y periódicas, muestra numéricamente que el espectro de  $H$  tiene una estadística de GOE asociada a la región caótica y una estadística de Poisson asociada a la zona donde es periódica<sup>5</sup>. Además existen evidencias de que los Hamiltonianos que no son invariantes ante la inversión temporal tienen un espectro que corresponde a la estadística del ensemble gaussiano unitario<sup>6</sup>.

Bajo condiciones específicas, la estadística de los niveles de energía en sistemas caóticos parece ser universal. Berry mostró que la función de dos puntos a grandes distancias corresponde al GOE en el límite semiclásico<sup>7</sup>.

Berry y Tabor en 1977 estudiaron la estadística espectral de sistemas cuánticos integrables en dos dimensiones mostrando que las fluctuaciones del espectro de energía en el límite semiclásico deberían ser las de un conjunto de números aleatorios, es decir, obedecen a una estadística de Poisson. Esto resultó ser una propiedad universal de los sistemas regulares, con excepción del oscilador armónico. Al igual que los sistemas caóticos la universalidad está sujeta a ciertas limitaciones<sup>5,8</sup>.

La siguiente cuestión es preguntarnos si estas conjeturas tienen algún significado para problemas cuánticos dependientes del tiempo. Se concentró un gran esfuerzo por parte de la comunidad para estudiar el modelo del rotor pateado. Este modelo fue estudiado extensamente para el caso clásico y su comportamiento es considerado como prototipo para problemas no lineales con un grado de libertad<sup>9</sup>; dicho modelo tiene regiones en el espacio fase que son caóticas y otras que son regulares; se pueden variar estas zonas cambiando un parámetro de acoplamiento.

El modelo cuántico correspondiente fue introducido por Casati<sup>10</sup>. Otros trabajos relevantes fueron realizados por Fishman, Grepel y Prange<sup>11</sup>, que realizando una transformación clave, pudieron reescribir el rotor pateado en términos del modelo de Anderson. En particular se conoce que el modelo de Anderson tiene espectro aleatorio, es decir, obedece la estadística de Poisson<sup>12</sup>.

El grupo de Novosibirsk<sup>13</sup> comprobó hace mucho tiempo que este sistema se mapea sobre un problema de matrices aleatorias en banda (BRM) y por consecuencia hay localización de Anderson en el espacio de energía. Por otro lado, Jorge José<sup>14</sup> y sus colaboradores vieron en sus estudios numéricos que en el oscilador de Fermi no ocurre tal localización. Finalmente, el grupo de Cuernavaca mostró recientemente que genéricamente, los sistemas pateados no deben mostrar localización si el potencial no es suave<sup>15</sup>.

El conjunto de estas observaciones despertó interés en revisar lo que se sabe sobre matrices en banda. En este sentido destaca el trabajo analítico del grupo de St.Petersburgo<sup>16</sup>, el cual obtuvo resultados explícitos sobre la razón de participación inversa y la entropía de

las eigenfunciones de las matrices en banda con decaimiento exponencial o más rápido. También demuestran que estas eigenfunciones siempre están localizadas. Formalmente sus resultados se pueden aplicar a matrices con bandas de decaimiento en leyes de potencias, pero hay serios problemas de convergencia. Para poder hacer estudios en este caso se requiere de cálculos numéricos que corroboren y suplementen las consideraciones analíticas.

El objetivo de esta tesis es investigar los ensembles de matrices  $H$  definidos por los elementos

$$H_{ij} = G_{ij}|i - j|^{-\alpha}(1 - \delta_{ij})$$

donde  $G$  es una matriz miembro de un ensemble ortogonal Gaussiano (GOE)<sup>17</sup>. Corriendo  $G$  sobre el GOE,  $H$  forma un ensemble de matrices en banda en forma de ley de potencia, con potencia  $\alpha$ . Los cálculos llegan a matrices de  $3500 \times 3500$  y se centran en tres cantidades básicas: el coeficiente de participación inversa, como el objeto presentado en los estudios analíticos, el coeficiente de participación y la entropía; para éstos se calcularon el promedio y la varianza.

Los promedios no sólo se han tomado sobre los ensembles sino también sobre estados en el centro y las orillas del espectro de energía. El último punto es un poco delicado debido a que las BRM no tienen un comportamiento ergódico en comparación con el GOE. Un gran número de trabajos numéricos muestran que un amplio rango de estados en el centro de la banda tienen las mismas características estadísticas<sup>6</sup>. El tamaño de la ventana en el centro fue elegida después de asegurar que ninguna variación sistemática y grande de las cantidades que pedimos ocurra dentro de éstas. También se muestra el comportamiento promedio en los bordes de las bandas a pesar de no ser posible ninguna predicción analítica.

# CAPITULO I

## TEORIA DE MATRICES ALEATORIAS

### 1.1 ENSEMBLE GAUSIANO ORTOGONAL

En el estudio de matrices aleatorias se proponen algunos criterios para que el ensemble de matrices pueda describir adecuadamente al sistema<sup>18</sup>.

1. Conexión con la dinámica: La definición del ensemble deberá basarse en la dinámica de los sistemas.

2. Significado de los parámetros no estocásticos: Algunos parámetros en la definición del ensemble, pueden ser conectados con las propiedades no estadísticas de los sistemas.

3. Ergodicidad: El promedio de energía sobre un miembro del ensemble, debe ser igual al promedio sobre el ensemble. De esta forma, los miembros individuales estarán caracterizados por las propiedades generales del ensemble.

4. Relevancia física: El ensemble debe reproducir las propiedades estadísticas observadas experimentalmente.

5. Tratabilidad matemática: Esto sería necesario para poder obtener resultados analíticos, y posteriormente contrastarlos con los experimentos.

Los puntos (1), (2) y (3) son necesarios para tener un ensemble físicamente razonable, aunque para el punto (3) las propiedades en las orillas del espectro no cumplirán en general con este postulado, pero si se cumple en un intervalo grande en el centro del espectro será suficiente; el punto (4) significa que será exitoso. El punto (5) no es absolutamente necesario porque siempre se podrá recurrir a los cálculos de Monte Carlo.

El *Ensemble Gaussiano Ortogonal*, es el más relevante en la práctica de los ensembles clásicos clasificados por Cartan<sup>18</sup>.

El Ensemble Gaussiano Ortogonal se define<sup>19</sup> en el espacio de matrices reales y simétricas por dos requerimientos:

1. El ensemble es invariante ante cualquier transformación

$$H \rightarrow W^T H W$$

donde  $W$  es una matriz real ortogonal arbitraria.

En otras palabras, se cumple la propiedad de que la probabilidad  $P(H) dH$  de que un sistema pertenezca al elemento de volumen

$$dH = \prod_{k \leq j} dH_{kj}$$

es invariante bajo transformaciones ortogonales:

$$P(H^*) dH^* = P(H) dH$$

donde  $H^* = W^T H W$  y  $W^T W = W W^T = 1$ .

2. Los elementos linealmente independientes,  $H_{ij}$  con  $i \leq j$ , son también estadísticamente independientes.

Notemos que el GOE tiene solamente dos parámetros fijos, un factor de escala trivial, y la dimensionalidad, la cual es difícil de conectar con el experimento, por consecuencia muchas veces se usa el límite  $N \rightarrow \infty$ .

El significado de este ensemble se manifiesta en los análisis hechos por Balian<sup>20</sup> en 1968, en donde, empleando argumentos de mínima información, se deducen las formas y propiedades del GOE. Este autor, después de definir la cantidad de información y postular una métrica en el espacio, expone la idea de representar un sistema con el ensemble de matrices, que de todos los que satisfagan sus propiedades conocidas, minimice la cantidad de información.



## 1.2 MODELO DE MATRICES EN BANDA

Los ensemble de matrices aleatorias en banda se definen, como un conjunto grande de matrices  $H$  de  $(N \times N)$  con elementos

$$H_{ij} = G_{ij} a(|i-j|)$$

donde la matriz  $G$  corre sobre un  $GOE$  y  $a(r)$  es alguna función que satisface la condición

$$\lim_{r \rightarrow \infty} a(r) = 0$$

La función  $a(r)$  determina la forma de la banda; alguna de las formas más usuales para  $a(r)$  son:

$$a = \left( \frac{(i-j)}{\sigma} \right)^2$$
$$a = |i-j|^{-\alpha}$$

Esta última es la empleada en este trabajo.

Las matrices aleatorias en banda pueden ser consideradas como buenos modelos para sistemas cuánticos con un rango de interacción finito entre los estados no perturbados. Desde este punto de vista, las BRM pueden usarse para describir las propiedades estadísticas de sistemas cuánticos reales, tales como átomos, núcleos y modelos de estado sólido.

El ejemplo más obvio de  $BRM$  es un conjunto de matrices reales simétricas  $N \times N$  con elementos aleatorios  $A_{ij}$  para  $|i-j| < b$  y  $A_{ij} = 0$  fuera de la banda de tamaño  $b$ . Entonces,  $b = 1$  implica matrices diagonales,  $b = 2$  matrices tridiagonales y  $b = N$  un  $GOE$ . Debido a la simetría de las matrices, el número de elementos independientes en un  $BRM$  de este tipo está dado por  $F = b(2N - b + 1)/2$ . Se supone que todos los elementos libres de la matriz son números aleatorios independientes con promedio igual a cero y que la densidad de probabilidad para una matriz  $A$  en el ensemble se define como

$$\rho(A) = e^{-\omega \text{Tr} A^2} = \prod_{i=1}^N e^{-\omega \lambda_i^2} \prod_{i < j}^N e^{-2\omega \lambda_i \lambda_j}$$

Desde esta expresión se puede calcular fácilmente el promedio  $\langle \text{Tr} A^2 \rangle = F/2\omega$ , quien determina la varianza de los elementos de la matriz. Se puede ver que el ensemble está

completamente caracterizado por los parámetros  $N$ ,  $b$  y  $\omega$ . Este último no debe afectar las propiedades estadísticas del espectro y los eigenvalores, sino que solo debe cambiar la escala para todos los niveles de energía.

En experimentos numéricos el parámetro  $\omega$  se especifica mediante la relación  $\langle \text{Tr} A^2 \rangle = N$ , que en el caso límite del GOE ( $b = N$ ), determina el rango  $(-2, +2)$  para la distribución de los eigenvalores.

Es bien sabido que esta distribución adquiere una dependencia semicircular para GOE. La apariencia de una ley semicircular en el caso de BRM (en el límite de  $b \gg 1$  y  $N \gg 1$ ) está lejos de ser trivial, aunque parece ser una característica general de matrices aleatorias.

Para el caso general de las BRM, Fyodorov y Mirlin, mostraron que es posible una reducción de las BRM al modelo  $\sigma^{16}$  -el cual es unidimensional, no-lineal y supersimétrico- y que esta reducción será exacta en el límite  $b \rightarrow \infty$  ( $b$  es el ancho de la banda efectiva). De este análisis se pudo concluir que todas las propiedades de correlación de los espectros de las BRM podrán ser determinadas con el parámetro de escalamiento  $x$ , el cual es igual a la razón de la longitud de localización entre el tamaño de la matriz  $x = \frac{l_{loc}}{N} \propto \frac{b^2}{N}$ . Este resultado explica el comportamiento del escalamiento observado en simulaciones numéricas<sup>21</sup>.

Existen varios tipos de matrices en banda, un caso particular de éstas (llamado "bordered matrices") fueron consideradas por Wigner. En este modelo, los elementos diagonales de la matriz están definidos por enteros  $-2, -2, 0, 1, 2, \dots$  y para los elementos que forman la banda de ancho  $b$  por  $\pm h$ , el signo de  $h$  se elige aleatoriamente.

El modelo tiene una solución analítica en el caso tridiagonal, con una distribución semicircular de los eigenvalores en el límite  $b$  y  $h \gg 1$ , con  $h^2/b$  finito.

Uno de los modelos que más intensamente se han estudiado desde el punto de vista numérico<sup>22,23</sup> es el SVZ el cual se define por los elementos de matriz<sup>5</sup>

$$H_{ij} = G_{ij} e^{-\left(\frac{i-j}{\sigma}\right)^2}$$

en donde  $G$  es una matriz que pertenece al GOE.

Este modelo contiene un parámetro continuo  $\sigma$  (ancho de la banda). Para diferentes valores de  $\sigma$  se interpola entre un ensemble con dinámica Poissoniana ( $\sigma = 0$ ) y uno con dinámica de GOE ( $\sigma = \infty$ ).

El modelo empleado en este trabajo es el caso de estructuras en banda, las cuales suponen un decaimiento suave en los elementos de la diagonal cuando se mueven a lo largo de ésta; definamos el ensemble de matrices  $H$  por los elementos

$$H_{ij} = G_{ij} |i - j|^{-\alpha} (1 - \delta_{ij}) \quad (1.2.1)$$

donde  $G$  es una matriz miembro de un GOE y el término  $(1 - \delta_{ij})$  se utiliza para eliminar la singularidad, pero es irrelevante en los cálculos.

La forma de la banda es determinada por la función

$$a(|i - j|) = |i - j|^{-\alpha} (1 - \delta_{ij})$$

cumpliendo con la condición

$$\lim_{r \rightarrow \infty} a(r) = 0.$$

### 1.3 PROPIEDADES ESTADÍSTICAS DE LOS ENSEMBLES

El estudio de las propiedades estadísticas de secuencias de puntos discretos, ya sea en la recta real o en el círculo unitario, se pueden realizar mediante diferentes técnicas.

Nos enfocaremos a puntos (niveles) cuya separación promedio varíe suavemente según la región del espectro que se esté considerando. Dicho cambio no es de naturaleza aleatoria y depende de las propiedades microscópicas con significado físico o matemático.

Con el fin de comparar la parte fluctuante de espectros de diversa índole, se normaliza a uno la densidad media de niveles mediante el procedimiento conocido como *desdoblamiento*. Existen diversas formas de llevarlo a cabo, la más común se realiza efectuando el desdoblamiento mediante la transformación

$$x_i = \int^{e_i} \rho_{av}(s) ds,$$

la cual relaciona los niveles del espectro, sin desdoblar  $e_i$ , con los nuevos niveles  $x_i$ , donde  $\rho_{av}$  es una función suave que representa el promedio de la densidad de niveles en el espectro. La forma de calcular esta función depende del tipo de espectro que se trata de analizar. Se debe tener cuidado al elegir  $\rho_{av}$ , puesto que una mala elección traería como consecuencia la falsificación en las medidas de fluctuación. Una vez realizado el desdoblamiento, las medidas de fluctuación quedan expresadas en unidades de la separación promedio.

La siguiente cuestión es como se pueden caracterizar las fluctuaciones (desviaciones del comportamiento promedio) de un espectro. Una forma eficaz de lograrlo es mediante el estudio de la densidad de distribución  $P(s)$  de los espaciamientos entre niveles adyacentes que nos da la información sobre cómo se correlacionan los espaciamientos con sus vecinos cercanos.

Una de las medidas de uso frecuente en la literatura introducida por Dyson<sup>24</sup>, es la llamada estadística  $\Delta_3$  que, dado un intervalo  $[\alpha, \alpha + L]$ , toma el valor de la mínima desviación cuadrática de la recta que mejor ajusta en dicho intervalo a la función de acumulación de niveles  $N(E)$ . Su fórmula es

$$\Delta_3(\alpha; L) = \frac{1}{L} \min_{A, B} \int_{\alpha}^{\alpha+L} (N(E) - A - BE)^2 dE$$

El significado de esta medida es evaluar el grado de irregularidad de la serie de niveles. Por ejemplo, para el conjunto de números naturales en la recta real, calificado como un espectro absolutamente rígido en el sentido de que no posee ninguna desviación de la uniformidad, el valor de  $\Delta_3$  será constante e igual a  $1/12$ . En cambio, en un espectro en el cual no hay ninguna correlación entre sus distintas regiones su valor será mayor (y todavía más grande para casos degenerados), sin importar la forma de  $P(s)^{25}$ . Debido a que  $N(E)$  es una función escalón, el valor de  $\Delta_3$  tiende a  $L/15$  para valores de  $L$  pequeños, sin importar cuál fue la distribución  $N(E)$ . Por tanto, esta medida no da ninguna información acerca de la estructura fina del espectro. Su utilidad radica en medir las correlaciones de largo alcance para tramos mayores que un espaciamiento<sup>26</sup>.

La varianza  $(\langle N(L)^2 \rangle - \langle N(L) \rangle^2)$  del número de niveles en un intervalo de longitud  $L > 1$  está dada por

$$\Sigma^2(L) \cong \left(\frac{2}{\pi^2}\right) \ln L + 0.44.$$

La estadística  $\Sigma^2$  también determina la rigidez del espectro, ya que en un espectro rígido la varianza de  $N(L)$  será pequeña, es decir, en la mayoría de los casos el número de niveles encontrados en un intervalo de longitud  $L$  diferirá solo ligeramente de  $L$ .

Algunas de las cantidades que dan información referente a la localización del sistema<sup>27,13</sup> son el coeficiente de participación inverso, la entropía y el coeficiente de participación.

Si  $a_{ij}$  es la  $j$ -ésima componente de la eigenfunción  $i$ , las cantidades serán definidas de la siguiente forma:

1. El coeficiente de participación inverso ( $P^{-1}$ ), el cual se define por

$$P_i^{-1} = \sum_j a_{ij}^4 \tag{1.3.1}$$

siendo proporcional al número inverso de sitios que contribuyen significativamente en la normalización de un eigenvector. Esta cantidad representa una característica útil de una localización.

2. La entropía de información ( $S$ ), definida por

$$S_i = - \sum_{j=1}^N a_{ij}^2 \ln a_{ij}^2. \tag{1.3.2}.$$

$S_i$  es esencialmente el logaritmo del número de sitios significativos poblados por el eigenestado  $\psi(\varepsilon)$ . Si todos los sitios estuvieran igualmente poblados, entonces  $S_i$  sería  $\ln i$ .

3. El coeficiente de participación  $P$  se define de la siguiente manera:

$$P_i = \frac{1}{\sum_j a_{ij}^2}. \quad (1.3.3)$$

Se debe notar que el promedio inverso del coeficiente de participación no será igual a la inversa del coeficiente de participación promediado.

## CAPITULO II

### DESCRIPCION ANALITICA DE LOS ENSEMBLES BRM.

#### 2.1 ROTOR PATEADO

El modelo clásico original para el rotor pateado es  $H = \frac{P^2}{2I} + \epsilon_0 \cos \theta \delta(t)$  y cuya versión cuántica es

$$\hat{H} = - \left( \frac{\hbar^2}{2I} \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \epsilon_0 \cos \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (2.1.1)$$

donde  $\hbar^2$  es la constante de Planck y  $\epsilon_0$  la fuerza de la perturbación. El movimiento del rotor pateado cuántico esta gobernado mediante la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \left( \frac{\hbar^2}{2I} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + V(\theta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \psi, \quad V(\theta) = \epsilon_0 \cos \theta \quad (2.1.2)$$

que es mucho más difícil de analizar numéricamente que el mapeo clásico estandar (solución del modelo clásico)

$$P_{t+1} = P_t + K \sin \theta_t, \quad \theta_{t+1} = \{\theta_t + P_{t+1}\} \quad (2.1.3)$$

Sin embargo, la forma específica de la perturbación dada por golpes periódicos instantáneos, como en el caso clásico, se usan para simplificar la investigación, reduciendo (2.1.2) a un mapeo para la función de onda

$$\psi(\theta, t + T) = \hat{U} \psi(\theta, t) \quad (2.1.4)$$

$$\hat{U} = \exp \left( i \frac{T\hbar}{4I} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \exp \left( -i \frac{\epsilon_0}{\hbar} \cos \theta \right) \exp \left( i \frac{T\hbar}{4I} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)$$

Aquí el valor de la función  $\psi$  se determina justo a la mitad de la rotación entre dos golpes sucesivos. Actualmente, esta expresión corresponde a la solución formal de la ecuación de Schrödinger (2.1.2) sobre un período de la perturbación. Gracias a la acción instantánea de la perturbación, el operador de evolución  $\hat{U}$  del sistema en un período puede escribirse

como el producto de tres operadores unitarios no conmutativos (pero sin ordenamiento temporal en el mapeo), el primero de éstos corresponde a la rotación libre durante medio período,

$$\hat{G}(j/2) = \exp\left(i\frac{j}{4}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right), \quad j \equiv \frac{\hbar T}{I}; \quad (2.1.5)$$

el segundo describe el golpe

$$\hat{B}(k) = \exp(-ik \cos \theta), \quad k \equiv \frac{\epsilon_0}{\hbar}; \quad (2.1.6)$$

y el tercero tiene el mismo significado que el primero (2.1.5).

De (2.1.4) se puede ver que a diferencia del modelo clásico, el comportamiento del modelo cuántico depende esencialmente de dos parámetros:  $k$  y  $j$  (en lo siguiente  $I = 1$ ). Este hecho refleja la apariencia de un parámetro cuántico puro en adición al clásico,  $K = k\tau = \epsilon_0 T$ . Como nuevo parámetro independiente se puede elegir, por ejemplo, la fuerza de la perturbación  $K$ , que da el número efectivo de estados no perturbados cubiertos por una patada de la perturbación. La transición a la mecánica clásica se describe mediante el límite  $k \rightarrow \infty$ ,  $j \rightarrow 0$  y  $K = cte$ .

Dado que sin perturbación ( $k = 0$ ) el hamiltoniano (2.1.1) es independiente del tiempo, la solución  $\psi(\theta, t)$  de (2.1.2) se representa convenientemente en la forma de una expansión de eigenfunciones del momento angular

$$\psi(\theta, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(t) e^{in\theta} \quad (2.1.7)$$

donde los coeficientes  $A_n(t)$  son esencialmente los coeficientes de Fourier de la función de onda dependiente del tiempo  $\psi(\theta, t)$ . Es fácil obtener en la representación de momento el operador de rotación libre  $\hat{G}$ , el cual tiene una forma diagonal, cuyos elementos de matriz son:

$$G_{ll'}(j/2) = \exp[i(j/4)l^2] \delta_{ll'} \quad (2.1.8)$$

Para los elementos de matriz de cambio instantaneo  $\hat{B}$  tenemos

$$B_{nm}(k) = i^{n-m} J_{n-m}(k) \quad (2.1.9)$$

donde  $J_\nu(k)$  es una función de Bessel. Por lo tanto, el operador total  $\hat{U}$  en un período  $T$  está dado por

$$\hat{U}_{nm} = G_{nn'}(j/2) B_{n'm'}(k) G_{m'm}(j/2) \quad (2.1.10)$$



Como resultado, el mapeo para los coeficientes de Fourier de  $\psi$  es

$$A_n(t+T) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} U_{nm} A_m(t) = i^n e^{i(j/4)n^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^{-m} J_{n-m}(k) e^{i(j/4)m^2} A_m(t) \quad (2.1.11)$$

Por lo tanto, para seguir la dinámica del sistema (2.1.1) se tiene que iterar numéricamente el mapeo para una distribución inicial dada  $A_m(0)$  (como en el modelo clásico, en lo siguiente, el tiempo se mide en el número de golpes:  $t = \bar{t}T$  con  $\bar{t} = 1, 2, \dots$  siendo el número de iteraciones).

Una de las peculiaridades de cualquier experimento numérico con (2.1.11) es el truncamiento artificial de la base no perturbada en algún tamaño finito  $|m| \leq N$ . Hay que tomar en cuenta la posible influencia de tal truncamiento en el resultado final. Para este propósito se puede usar la condición de normalización para la función de onda.

Existe el problema adicional del cómputo correcto de la función de Bessel con índices grandes ( $|n-m| \gg 1$ ). Por otra parte, la base del momento angular, en la que los elementos de matriz del operador de evolución se expresan por funciones de Bessel, tiene algunas ventajas. Desde luego, los valores de las funciones de Bessel decrecen muy rápidamente con el incremento de la diferencia entre índices y argumentos (para  $|n-m| > k$ ). Esto significa que la matriz unitaria  $U_{nm}$  tiene la forma de una matriz en banda con elementos de matriz insignificantes fuera de la banda de tamaño  $\approx 2k$ . Entonces es posible poner  $U_{nm} = 0$  para elementos fuera de la banda, digamos para  $|n-m| > 2k$ .

Un experimento numérico típico consiste en el cómputo iterativo de las componentes  $A_m(t)$  de la función de onda de acuerdo a (2.1.11) comenzando desde un estado inicial dado  $\psi(\theta, 0)$ . Después, la dependencia temporal de cualquier variable promediada puede ser encontrada y comparada con su contraparte clásica. Por ejemplo, para la energía del rotor tenemos

$$E(t) = \sum_{n=-N}^N |A_n(t)|^2 \hbar^2 n^2 / 2 \quad (2.1.12)$$

donde  $|A_n(t)|^2$  es una distribución de probabilidad en el espacio de momentos después de  $t$  golpes de la perturbación.

El primer dato numérico<sup>10</sup> para el modelo (2.1.1) muestra un comportamiento bastante extraño. Se esperaba que para  $K \gg 1$  en la región semiclásica profunda ( $k \gg 1$ ), la energía

creciente correspondiera a la del modelo clásico

$$\Delta E_{cl}(\tilde{t}) = E_{cl}(\tilde{t}) - E_{cl}(0) \approx 1/2 D_p \tilde{t} \approx 1/4 \epsilon_0^2 \tilde{t}$$

por conveniencia, en lo subsecuente se usa una energía normalizada,  $\tilde{E} \equiv \frac{E}{\hbar^2}$ ; por lo tanto, para  $E(t)$  la expectación es

$$\tilde{E}(t) = \tilde{E}(0) + 1/2 D_n(t)t, \quad D_n \equiv \langle (\Delta n)^2 \rangle / t = D_p / \hbar^2 \quad (2.1.13)$$

donde  $D_n$  describe una difusión clásica en los  $n$  niveles no perturbados:  $D_n \approx k^2/2 \approx \epsilon_0^2/2\hbar^2$  para  $K \gg 1$ . Sin embargo se observa que tal correspondencia tiene lugar en alguna escala de tiempo finito  $t^*$  después del cual se observa una considerable desviación desde (2.1.13) con un decrecimiento de la razón de difusión

Tal comportamiento del modelo cuántico en la región del caos clásico (fuerte) fue llamada *la supresión cuántica del caos clásico*<sup>10</sup>.

## 2.2 RESULTADOS ANALÍTICOS Y NUMÉRICOS

Como se mencionó en la sección anterior, clásicamente el rotor pateado exhibe una difusión ilimitada en el espacio de momento angular, cuando la fuerza de las patadas  $k$  excede algún valor crítico. Fue observado, sin embargo, que en el régimen semiclásico los efectos cuánticos suprimen la difusión clásica, en analogía con la localización de Anderson de una partícula cuántica en un potencial aleatorio.

Consideremos el operador de evolución  $\hat{U}$  que relaciona los valores de la función de onda en un período de perturbación:  $\psi(\theta, t + T) = \hat{U}\psi(\theta, t)$ , es natural considerar la base no perturbada de las eigenfunciones del operador de momento angular

$$\hat{l} : |l\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \exp in\theta, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Los elementos de matriz  $\langle m | \hat{U} | n \rangle$  tienden a cero cuando  $|m - n| \rightarrow \infty$ . En el caso popular  $V(\theta) = k \cos \theta$ , este decaimiento es exponencial cuando  $|n - m|$  excede  $b \approx k/\hbar$ , mientras que dentro de la banda de ancho efectivo  $b$ , los elementos de la matriz prueban ser pseudoaleatorios.

Todas estas observaciones atrajeron la atención de las propiedades estadísticas del ensemble BRM como una forma aceptable de obtener información para entender las propiedades dinámicas del rotor pateado. Sin embargo existe un problema fuerte de simetría que consiste en la falta de invarianza rotacional para ensembles de BRM bajo transformaciones ortogonales, a diferencia de la teoría común para matrices aleatorias.

Nótese sin embargo, que el decaimiento rápido de  $\langle m | \hat{U} | n \rangle$  en el ejemplo arriba mencionado se debe a la diferenciabilidad infinita de  $V(\theta) = k \cos \theta$ . Si tomamos una función  $V(\theta)$  que tenga una discontinuidad en una derivada del mismo orden que los elementos correspondientes al operador de la matriz de evolución que podían decaer en forma de ley de potencias cuando  $|n - m| \rightarrow \infty$ .

De hecho, hay un ejemplo interesante de un sistema manejado periódicamente, el cual se denomina oscilador de Fermi, donde los elementos de matriz del operador evolución decaen como una ley de potencias. Este sistema no muestra efectos de localización dinámica en el espacio de energías, típicas del rotor pateado.

Uno esperaría entender estas diferencias en el comportamiento estudiando las propiedades de BRM con un decaimiento en leyes de potencias.

Después de muchos estudios numéricos en los años recientes, han habido progresos en la descripción analítica de los ensembles de BRM con una función  $a(r)$  (en ley exponencial) que decrecen rápidamente cuando  $r$  excede el ancho de la banda  $b^{16}$ . En particular, fue mostrado que para  $N \rightarrow \infty$  los estados están localizados, y la escala de longitud correspondiente para un punto  $E$  dado del espectro es

$$\gamma = \frac{B_2(2B_0 - E^2)}{8B_0^2} \propto b^2 ; \quad B_k = \sum_{r=-\infty}^{\infty} a^2(r)r^k \quad (2.2.1)$$

donde  $b$  es el ancho característico de la banda y se supone que  $b \gg 1$ . Para propiedades estadísticas finitas de los eigenvalores y eigenestados se mostró que dependen del parámetro individual de escalamiento  $x = \frac{N}{4\gamma}$ . Cuando  $x$  aumenta, el paso ocurre desde un comportamiento cercano al GOE ( $x \ll 1$ ) a la localización fuerte de los eigenestados ( $x \gg 1$ ).

Consideremos el caso de ley de potencia para la formación de banda ec1.2.1.

$$a(r) = r^{-\alpha} ; \quad \alpha \geq 0 \quad (2.2.2)$$

La derivación analítica realizada por Fyodorov y Mirlin no se puede considerar rigurosa bajo estas condiciones, porque los coeficientes en la expansión de momentos de la acción efectiva del modelo diverge para  $N \rightarrow \infty^{16}$ . Veremos que los resultados analíticos dan una excelente descripción cualitativa y una buena descripción cuantitativa de un ensemble BRM con una ley de potencias que decae como una función de la forma  $a(r)$ .

Para ésto se usa la razón de participación inversa como el objeto presentado en los estudios analíticos, mientras que en los estudios numéricos puede considerarse cualquier cantidad. Esto incluye la entropía, la razón de participación, la razón de participación inversa así como la varianza de estas cantidades.

Para comparar los resultados de las simulaciones numéricas con las predicciones analíticas se usan las siguientes expresiones para la razón de participación inversa promediada<sup>16</sup>:

$$\overline{P^{-1}} = \frac{3}{N} + \frac{1}{4\gamma} ; \quad \gamma = \frac{B_2}{4B_0} = \frac{\sum_{r=1}^{N/2} r^{2-2\alpha}}{4 \sum_{r=1}^{N/2} r^{-2\alpha}} \quad (2.2.3)$$

donde  $E = 0$  (centro de la banda) y se elige un medio del tamaño de la matriz como un corte natural de la sumatoria. También se conoce una expresión analítica para la entropía promedio en dos casos límites<sup>16</sup>:

$$\exp \bar{S} = \begin{cases} 4\gamma \exp(1 + C) & ; \text{ si } N \gg \gamma \\ N \left\{ 1 - \frac{N}{24\gamma} + \frac{N^2}{640\gamma^2} + \dots \right\} & ; \text{ si } N \ll \gamma. \end{cases} \quad (2.2.4)$$

donde  $C = 0.577 \dots$  es la constante de Euler.

Las simulaciones numéricas realizadas para este caso muestran el comportamiento predicho por la teoría, tanto para  $N \gg \gamma$  como  $N \ll \gamma$ . Debido a estos requisitos se observa esto para matrices de dimensión grande ( $N > 100$ ).

Analicemos ahora la ec. (2.2.3); encontramos que siguiendo el comportamiento de la "Longitud de localización"  $\gamma$  en  $N \rightarrow \infty$ :

$$\gamma \propto \begin{cases} N^{3-2\alpha} & ; \text{ si } 1/2 < \alpha < 3/2 \\ \ln N & ; \text{ si } \alpha = 1 \\ 1 & ; \text{ si } \alpha > 3/2. \end{cases} \quad (2.2.5)$$

Esto nos permite distinguir tres regiones para  $\alpha$

i)  $\alpha < 1$ . Deslocalización completa, para  $N \rightarrow \infty$ :

$$\gamma \gg N ; P^{-1} \approx 3/N$$

ii)  $1 \leq \alpha \leq 3/2$ . Región intermedia:

$$1 \ll \gamma \ll N ; P^{-1} \approx \frac{1}{4\gamma} \propto N^{2\alpha-3}$$

iii)  $\alpha > 3/2$ . Completamente localizada, para  $N \rightarrow \infty$ :

$$\gamma \sim 1 ; P^{-1} \sim 1$$

Simulando estas tres regiones para el centro del espectro, observamos que la ec. (2.2.3) reproduce el comportamiento para la zonas deslocalizada y localizada, para la zona intermedia se nota una diferencia significativa con las predicciones teóricas.

Por lo tanto, en el caso del decaimiento en leyes de potencias de la función  $a(r)$ , el paso de un régimen localizado ( $P^{-1} \sim 1$ ) a uno deslocalizado ( $P^{-1} \sim 1/N$ ) no tiene lugar directamente, si no a través de una región intermedia  $1 < \alpha < 3/2$ , donde la "escala de localización efectiva"  $\gamma$  aumenta con  $N$  pero más lentamente que la  $N$  misma.

# CAPITULO III

## ANALISIS NUMERICO DE LOS ENSEMBLES BRM.

### 3.1 ESTUDIO NUMERICO DE LAS BRM

Las simulaciones numéricas que se realizaron en este trabajo tuvieron como objetivo principal, el efectuar un análisis de algunas propiedades de las BRM, con forma de banda  $|i - j|^{-\alpha}$ . El estudio se llevó a cabo para ensemble de BRM, generado por los elementos de matriz ec. (1.2.1)

$$H_{ij} = G_{ij} \left( \frac{1}{|i - j|^\alpha} (1 - \delta_{ij}) \right)$$

donde  $G$  pertenece a un  $GOE$ . La matriz  $G$  se genera asignando a sus elementos los resultados del sorteo de variables pseudoaleatorias con distribución gaussiana y tomando en cuenta la simetría.

La forma de la banda se determina por el parámetro  $\alpha$ , que al variarlo modifica las propiedades del sistema; los valores del parámetro  $\alpha$  utilizados en este trabajo van desde cero hasta dos (se pudo haber tomado cualquier valor ( $\alpha > 3/2$ ) para la zona localizada). Al variar  $\alpha$  se observaron básicamente tres regiones: la deslocalizada ( $\alpha < 1$ ), la intermedia ( $\alpha \in [1, 3/2]$ ) y la localizada ( $\alpha > 3/2$ ).

Para poder analizar las propiedades de localización, es necesario calcular a partir de la matriz  $H$  algunas cantidades que sean representativas en este contexto. Se calcularon los promedios de la entropía ( $\bar{S}$ ), del coeficiente de participación inverso ( $\overline{P^{-1}}$ ), y del coeficiente de participación ( $\overline{P}$ ), así como sus respectivas varianzas.

Para poder calcular estas cantidades es necesario primero, diagonalizar las matrices  $H$  del ensemble; con esto encontramos los eigenvalores y sus eigenfunciones. Para este fin fue empleada una subrutina que diagonaliza matrices reales y simétricas<sup>28</sup>.

Para el tamaño de las matrices se escogió una amplia gama de valores de  $N$ , desde  $N = 50$  hasta  $N = 3500$  para algunos casos, con el objetivo de calcular una estadística confiable. El tamaño de los ensembles varió desde 1000 para matrices pequeñas, hasta 20 para matrices grandes.

Los promedios y las varianzas fueron calculados sobre el ensamble y sobre dos zonas distintas del espectro: en el centro, donde se espera que exista ergodicidad y en el borde, donde se observó que no obstante la falta de ergodicidad, el comportamiento de las propiedades no es muy diferente al del centro, lo cual indica que la falta de ergodicidad en esta zona no es relevante para estas propiedades.

El valor numérico para el promedio y la varianza de las tres propiedades, depende de la dimensión y de  $\alpha$ . Se estudió la dependencia de estas cantidades con respecto a ambos parámetros.

Empezamos por estudiar el coeficiente de participación inversa (CPI) porque para esta medida tenemos una información analítica más amplia. Los resultados numéricos del promedio de CPI como función de la dimensión, muestran un comportamiento diferente dependiendo del parámetro  $\alpha$ : para el régimen deslocalizado ( $\alpha < 1$ ) se observa una disminución del promedio proporcional a  $1/N$ . En la zona intermedia esta tendencia se suaviza, hasta llegar a la zona de localización en la cual el promedio es constante (fig.1). La dependencia de  $\alpha$  nos muestra para dos dimensiones distintas los diferentes comportamientos para CPI:  $\overline{P^{-1}} \sim 1/N$  a  $\overline{P^{-1}} \sim 1$ , lo cual implica una región de transición (fig.2).

Comparando los resultados numéricos con los obtenidos de la ec.(2.2.3), observamos que tanto la zona deslocalizada como la localizada concuerdan con los resultados analíticos, es decir tienen la misma pendiente asintótica y por lo tanto obedecen la misma ley de decaimiento (fig. 3,5). El problema se presenta cuando nos encontramos en la región intermedia (fig.4). Al cotejar los dos resultados (analíticos y teóricos), nos encontramos que no tienen la misma pendiente, dicho de otra forma, al ajustar los puntos mediante una línea (gráfica log.log) estas no son paralelas. Para asegurarnos de la diferencia encontrada para  $\alpha = 1.25$ , modificamos los  $\overline{P_{num}^{-1}}$  restándoles el término deslocalizado  $3/N$  (Fig.6). Notemos que las pendientes de la curva original y de la ajustada tienden a coincidir para  $N$  grandes, pero la ajustada es más recta, confirmando la existencia de una ley de potencias. Comparamos nuevamente y calculamos las respectivas pendientes, para la teórica  $m = 0.5$  y para la numérica  $m = 0.2$  sin el término  $3/N$  (fig 7.).

Si comparamos la dependencia de  $\alpha$  en la curva numérica y teórica, vemos que son ligeramente mayores que los teóricos en la zona deslocalizada, al pasar por la zona intermedia

el comportamiento cambia igualándose los valores, y en la zona localizada se invierte el comportamiento volviéndose significativamente más grandes los teóricos que los numéricos. Esto se ilustra para dos dimensiones distintas en las figuras 8 y 9.

Para la varianza de  $P^{-1}$  notamos un comportamiento similar al del promedio: a medida que pasan de la zona deslocalizada a la localizada los valores para la varianza convergen hacia el mismo valor independientemente de la dimensión (fig.10). En esta transición se nota un cambio en la zona intermedia, que se hace más abrupto conforme aumenta la dimensión. La dependencia con la dimensión nos muestra para la región deslocalizada una disminución en la varianza conforme aumenta la dimensión, en la zona intermedia esta disminución se suaviza para hacer constante en la zona localizada (fig.11).

Las predicciones teóricas para el promedio de la entropía están dadas por la ec. (2.2.4), ésta es válida solo para los casos en que  $\gamma \gg N$  y  $\gamma \ll N$ , esto implica la región deslocalizada y la localizada. Los resultados numéricos concuerdan bien con los teóricos para la zona localizada (fig. 12), para la zona deslocalizada se encontró un corrimiento de los teóricos con respecto a los numéricos (fig.13), pero éste es constante por lo cual se puede decir que la teoría describe satisfactoriamente el promedio de la entropía.

Las simulaciones numéricas realizadas para la varianza de la entropía en función de la dimensión, nos muestran dos comportamientos diferentes. El primero se da en la zona deslocalizada: observamos que los valores tienden asintóticamente a cero conforme aumenta la dimensión; el segundo comportamiento se observa tanto para la región intermedia como para la localizada: los valores de la entropía tienden a hacerse constantes a medida que la dimensión aumenta, esto se ilustra en la figura 14.

Para el promedio del coeficiente de participación no existe ninguna teoría, no obstante se tomó en cuenta debido a su fácil interpretación (indica el número de estados que participan en un eigenestado).

Al igual que el  $\overline{P^{-1}}$  se simuló  $\overline{P}$  con dependencia en  $\alpha$  y a la dimensión, todo lo referente al manejo de estas dependencias se explicó anteriormente, debemos notar que  $1/P = P^{-1}$  pero no sus promedios, esto es  $1/\overline{P} \leq \overline{P^{-1}}$  (fig. 15).

La información obtenida en el centro del espectro refleja el comportamiento típico de cada zona. Para la zona deslocalizada los valores de  $\overline{P}$  crecen conforme aumenta la dimensión



como una ley de potencias, al pasar a la zona intermedia el comportamiento cambia creciendo más lentamente, debemos notar que en esta zona la forma es semejante a la del  $\overline{P^{-1}}$ , en la zona localizada los valores son constantes e independientes de la dimensión (fig. 16). Este comportamiento se observa mejor en la dependencia de  $\alpha$ ; los valores para diferentes dimensiones convergen a un mismo valor conforme se pasa a la zona localizada (fig. 17).

Notar que para el CP la varianza tiene un comportamiento muy típico en la zona de transición, se observa un cambio significativo al pasar de la zona deslocalizada a la localizada: en la primera región ( $\alpha < 1$ ) las varianzas aumentan hasta llegar a una zona intermedia ( $1 < \alpha < 3/2$ ) donde alcanza su máximo (hay un pico) y luego empiezan a disminuir (región localizada ( $\alpha > 3/2$ )) hasta converger a un valor (fig.18), este último comportamiento se observa en la dependencia con la dimensión, para la zona localizada los valores de la varianza se vuelven constantes (fig. 19). También aquí es significativo el cambio que sufren las varianzas al pasar por la zona intermedia.

Por último observemos los comportamientos en el borde del espectro para el CPI, notando que no difieren significativamente de los obtenidos en el centro, esto se muestra en las figuras 20 y 21.

## CONCLUSIONES

El rotor pateado ha sido uno de los paradigmas en caos cuántico.

Las contradicciones encontradas entre el grupo de Novosibirsk, donde aseguran que en el rotor pateado se da la localización, y el grupo de Cuernavaca, el cual mostró genéricamente que para sistemas pateados no se debe mostrar localización (para potenciales no suaves), sumándose los resultados de J. José, donde vieron que en el oscilador de Fermi no hay tal localización, fueron la motivación física de este trabajo.

Este resultado es muy alentador ya que J. José menciona que el oscilador de Fermi se mapea sobre un tight binding model con decrecimiento de  $1/r$  en los elementos de matriz. Pero esto es una realización pseudoaleatoria de nuestras matrices en banda con  $\alpha = 1$  que es el punto en el cual ya esperamos deslocalización completa.

Los estudios realizados muestran una transición de estados deslocalizados a localizados en la zona  $1 \leq \alpha \leq 3/2$ . Este comportamiento cualitativo es consistente con la teoría desarrollada por el grupo de San Petersburgo fuera de su rango de aplicabilidad.

La cantidad relevante para este estudio fue  $P^{-1}$ , tanto su promedio como la varianza muestran un comportamiento típico de cada región; para el caso del promedio el decaimiento en la zona deslocalizada va como  $1/N$ , como lo predice la teoría, mientras que en la zona intermedia decae más lentamente que la misma  $N$ , encontrándose una diferencia significativa con la teoría ( $\overline{P_{teo}^{-1}} \sim N^{-1/2}$ ;  $P_{num}^{-1} \sim N^{-1/3}$ ), para la zona localizada las predicciones teóricas son consistentes con los resultados numéricos ( $P^{-1} \sim 1$ ).

En la zona intermedia aumentan las fluctuaciones de las cantidades consideradas. Esto se ve claramente para la  $var P(\alpha \cong 1)$  donde existe un pico para  $\alpha = 1$ .

El comportamiento presentado por todas las cantidades en un entorno de  $\alpha = 1$ , nos indujo a pensar que existe algo más en esta zona que puede ser de gran importancia para completar la teoría.

Haciendo una recapitulación de los los resultados obtenidos, vemos que son consistentes con los trabajos realizados anteriormente, por ejemplo para el rotor patcado se da la localización para  $\alpha \geq 2$  y para el oscilador de Fermi la deslocalización en  $\alpha = 1$ .

## REFERENCIAS

1. G.Zaslavsky, Phys. Rep. 80,157 (1981).
2. T.A.Brody *et al.*, Rev. Mod. Phys. 53, 385 (1981).
3. O.Bohigas, M. J. Giannoni, y C. Schmit, Phys. Rev. Lett. 52,1 (1984).
4. M. V. Berry y M. Tabor, Proc. Roy. Soc. London A 356, C375 (1977); S. W. McDonald y A. N. Kaufman, Phys. Rev. Lett. 42, 1189 (1979); G. Casati *et al.*, Nuovo Cimento Lett. 28, 279 (1980); M. V. Berry, Ann. Phys. (N.Y) 131, 163 (1981).
5. T. H. Seligman, J.J. Versbaarschot, y M. R. Zirnbauer, Phys. Rev. Lett. 53, 215 (1984); E. Heller, H. Koppel, y L. S. Cerderbaum, Phys. Rev. Lett. 52, 1665 (1984).
6. T. H. Seligman y J.J. Versbaarschot, Phys. Lett. 108, 183 (1985), y J. Phys. A 18, 2751 (1985).
7. M. Berry, J.Phys A 19, 2201 (1986).
8. M. Berry. Proc.R.Soc. Lond. A 400, 229 (1985).
9. B. V. Chirikov, Phys. Rep. 52, 263 (1979); J. Green, J. Math. Phys. 20, 1183 (1979).
10. G. Casati, B. V. Chirikov, F. M. Izrailev, y J. Ford, en *Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems*, editado por G. Casati y J. Ford, Lectures Notes in Physics Vol. 93 (Springer, New York, 1979), p. 334.
11. S. Fishman, D. R. Grempel, y R. E. Prange, Phys. Rev. Lett. 49, 509 (1982); D. R. Grempel y R. E. Prange y S. Fishman, Phys. Rev. A 29, 1639 (1984).
12. A. Molcanov, Commun. Math. Phys. 78, 429 (1981).
13. F. M. Izrailev, Phys. Rep. 196, 301 (1990).
14. J. V. Jose, y R. Cordery, Phys. Rev. Lett. 56, 290 (1986).
15. T. H. Seligman, y F. Leyvraz, Phys. Lett. A 168, 348 (1992).

16. Y. V. Fyodorov, y A. D. Mirlin, Phys. Rev. Lett. 67, 2405 (1991) v. 67, 2405 (1992) v. 69, 1093 (1992), y A. D. Mirlin, Y. V. Fyodorov, J. Phys. A (1993) sera publicado.
17. Y. V. Fyodorov, A. D. Mirlin, T. H. Seligman, y J. Quezada. "A cross-over from localised to extended eigenstates in random band matrices with powerlaw band shape" por publicarse.
18. T. A. Brody, J. Flores, J. B. French, P. A. Mello, A. Pandey, S. S. M. Wong Rev. Mod. Phys. 53, 3 (1981).
19. M. L. Mehta "Random matrices and the statical theory of energy levels", Academic Press N. Y. (1967).
20. R. Balian. Nuovo Cimento. 57, 1983 (1968).
21. G. Casati, L. Molinari, y F. Israilev, Phys. Rev. Lett. 64, 1851 (1990); S. N. Evangelou y E. N. Economou, Phys. Lett. A 151, 345 (1990).
22. F. Leyvraz, J. Quezada, T. H. Seligman, y M. Lombardi. Phys. Rev. Lett. 67, 2921 (1991).
23. C. Roman. Tesis U.N.A.M. Mexico (1987).
24. F. J. Dyson, y M. L. Mehta, J. Math. Phys. 4, 701 (1963).
25. O. Bohigas y M. J. Giannoni. Lect. Notes in Phys (Springer-Verlag, N.Y.) 209 (1984).
26. M. V. Berry, Proc. R. Soc. Lond. A 400, 229 (1985).
27. S. Fishman, D. R. Grempel, R. E. Prange. Phys. Rev. Lett. 49, 509 (1982).
28. C. F. Bunge, A. V. Bunge y M. Berrondo. Comp. Chem. 10(1986)

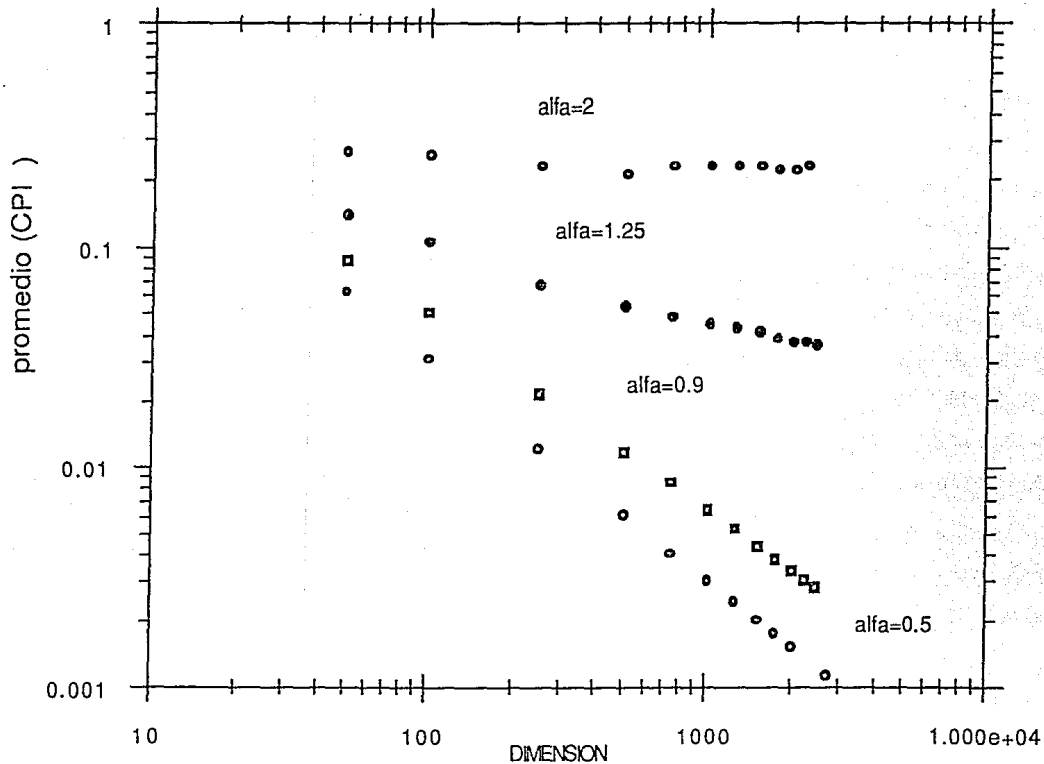


Fig 1. Valores para el logaritmo del CPI promediado en el centro del espectro, en las tres zonas.

Escala log-log.

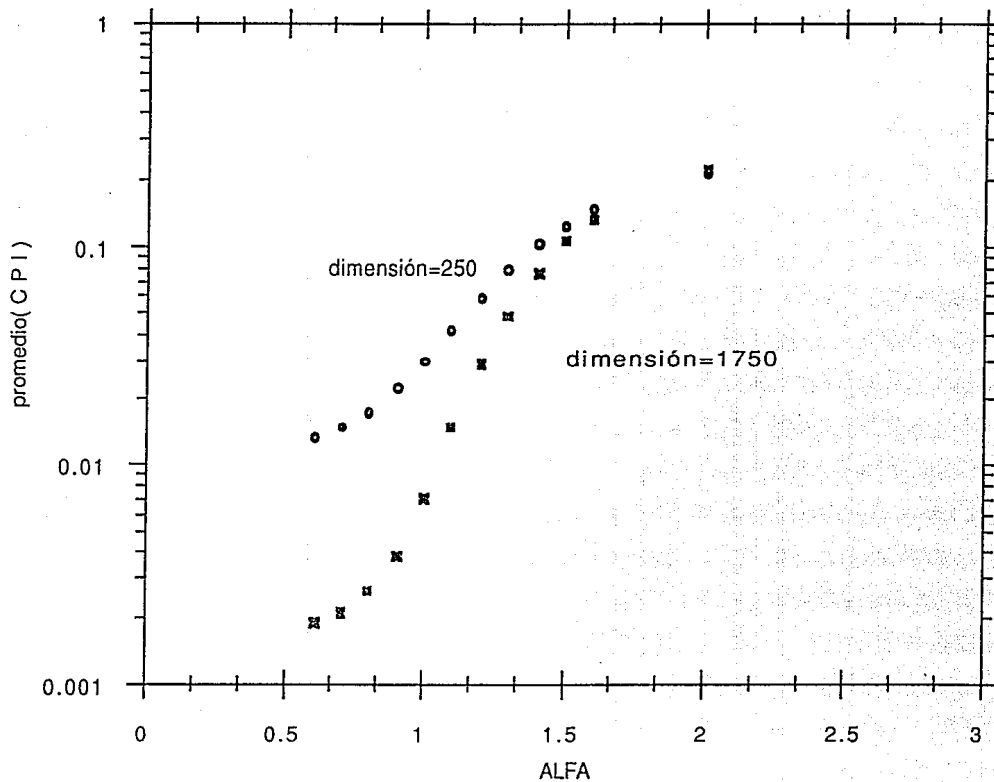


Fig 2.

Comparación en el centro del espectro para los logaritmos de los CPI promediado, contra el parámetro alfa, para dimensiones diferentes.

Escala semi-log.

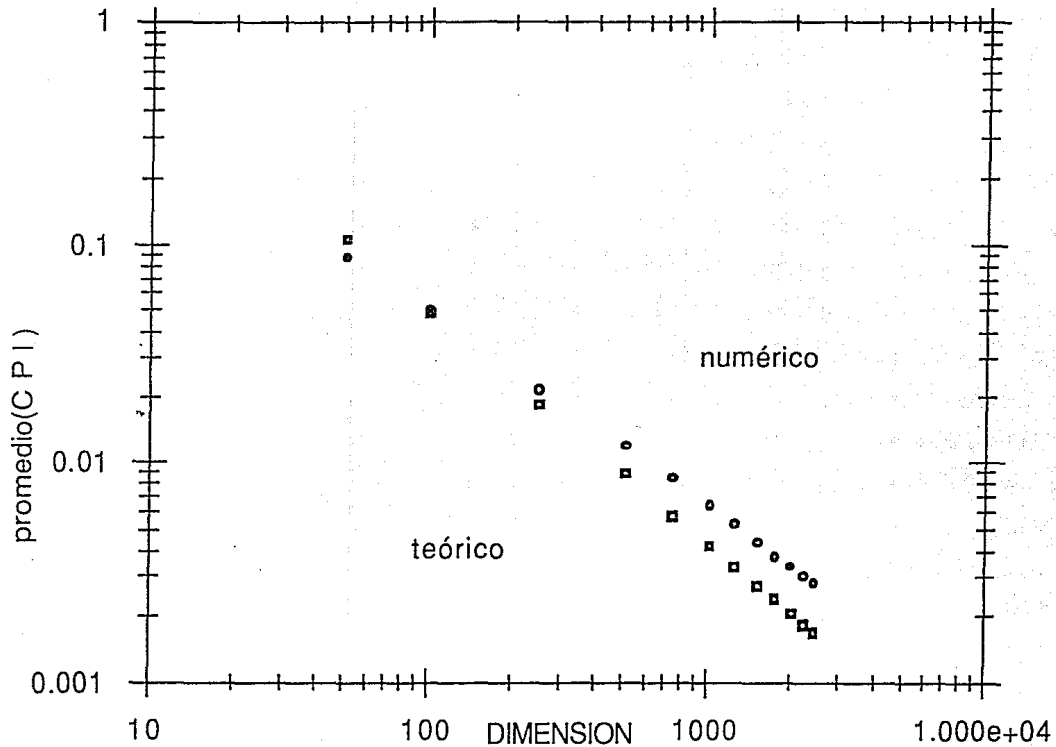


Fig. 3 Comparación entre los coeficientes de participación inverso promediado, obtenidos mediante simulación numérica contra los teóricos obtenidos de la ecuación (2.2.3), para la zona deslocalizada,  $\alpha=0.9$   
Escala log-log.



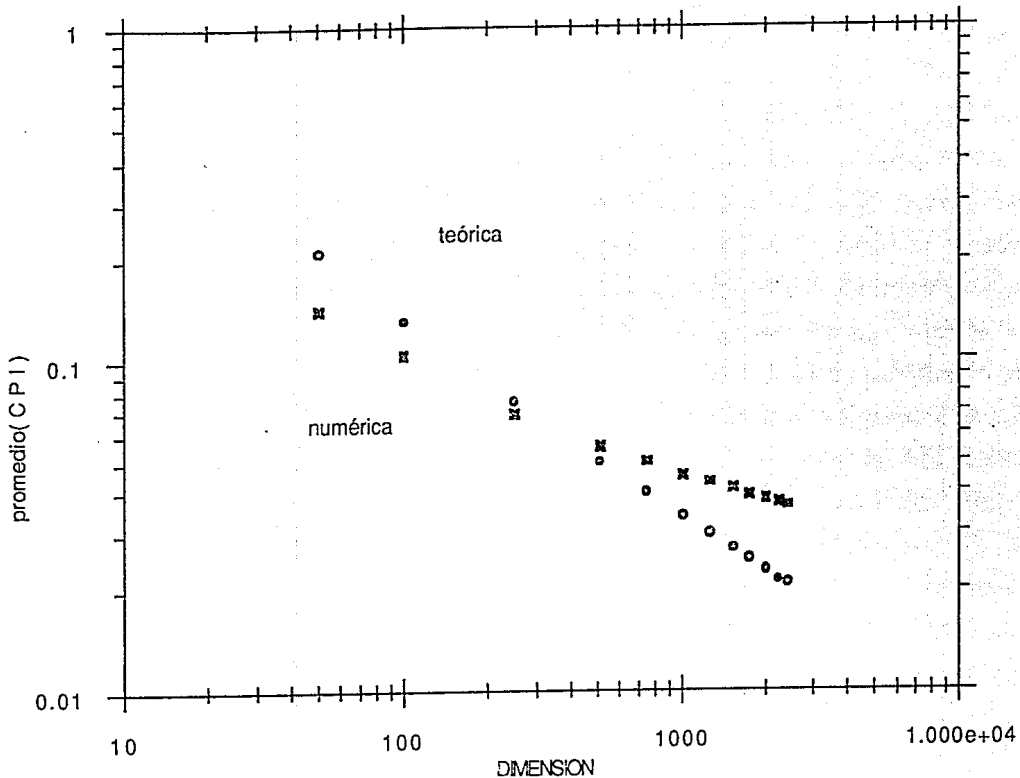


Fig 4. Comparación entre los CPI promediados, obtenidos mediante simulaciones numéricas y los teóricos generados de la ec.(2.2.3), para  $\alpha=1.25$ . Escala log-log.

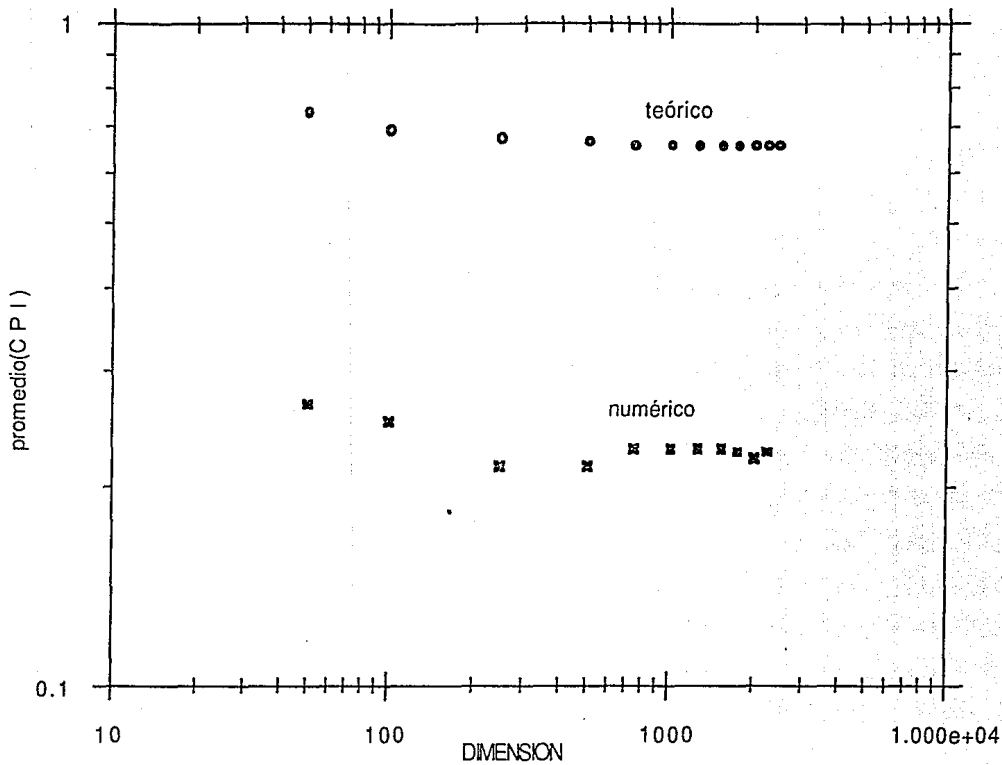


Fig 5. Comparación entre los promedios para los CPI, obtenidos mediante simulaciones numéricas y por los teóricos obtenidos de la ec. (2.2.3), para alfa=2. Escala log-log.

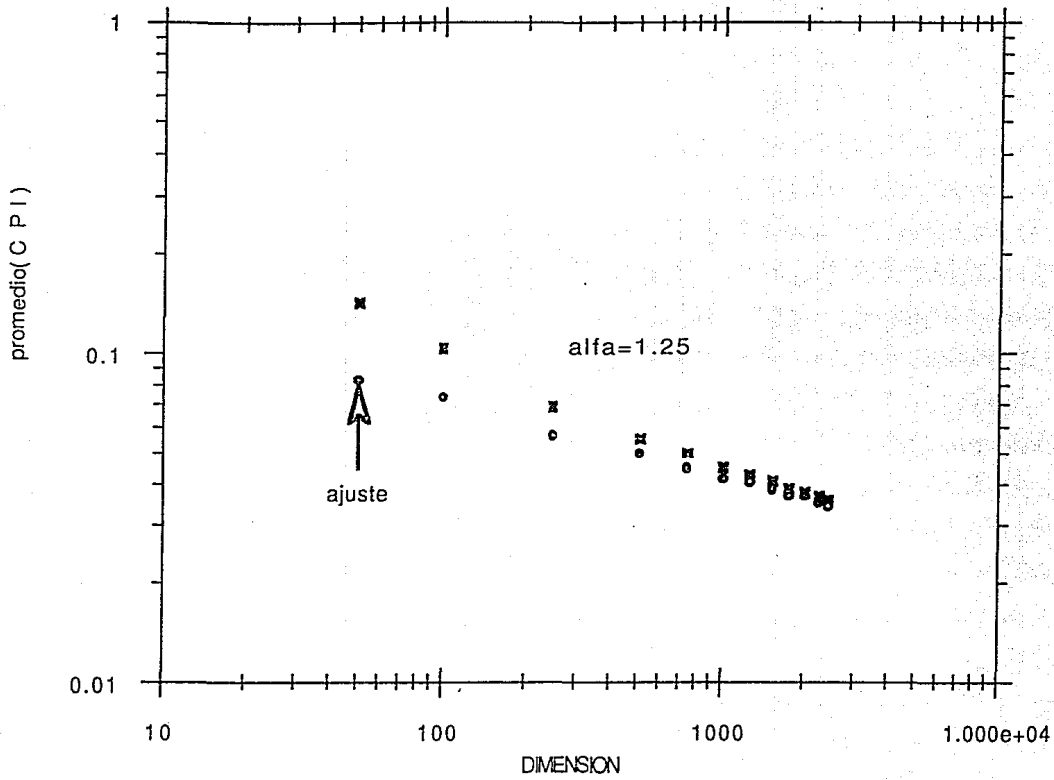


Fig 6. Comparación entre el logaritmo del promedio del CPI y el logaritmo del promedio del CPI menos  $3/N$ , calculada en el centro del espectro para  $\alpha=1.25$   
Escala log-log.

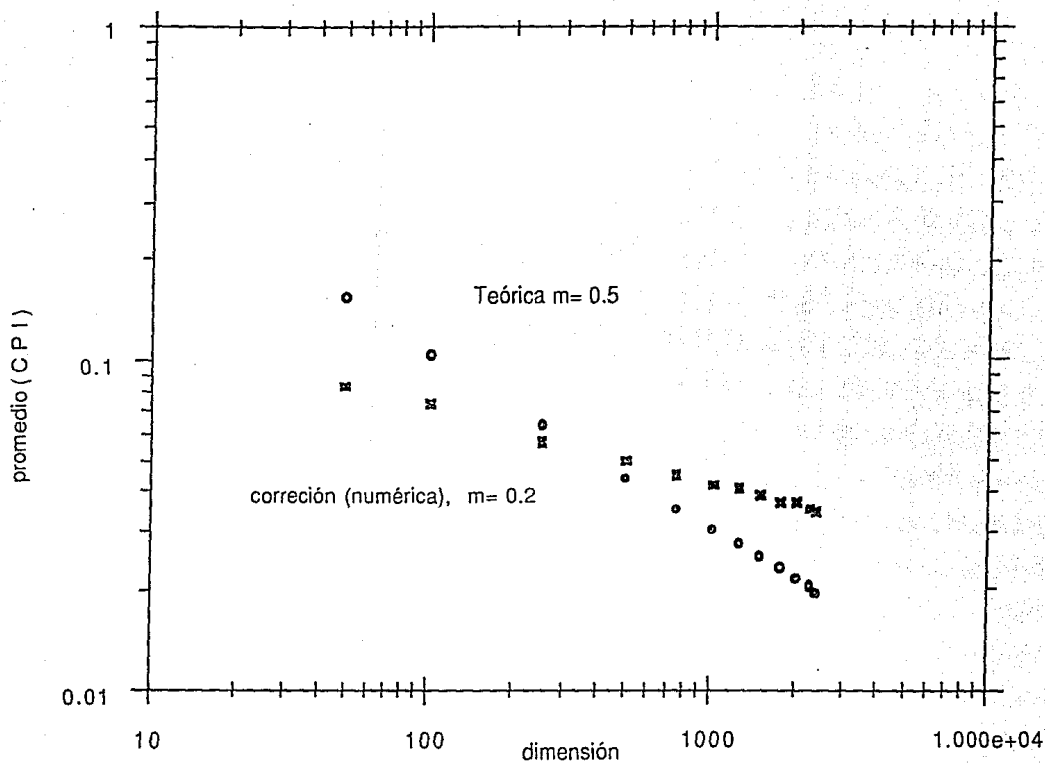


Fig. 7 Comparación entre los valores teóricos obtenidos de la ec. (2.2.3) restandoles  $3/N$ , y los numéricos modificados al restarseles  $3/N$ , para  $\alpha = 1.25$   
Escala log-log.

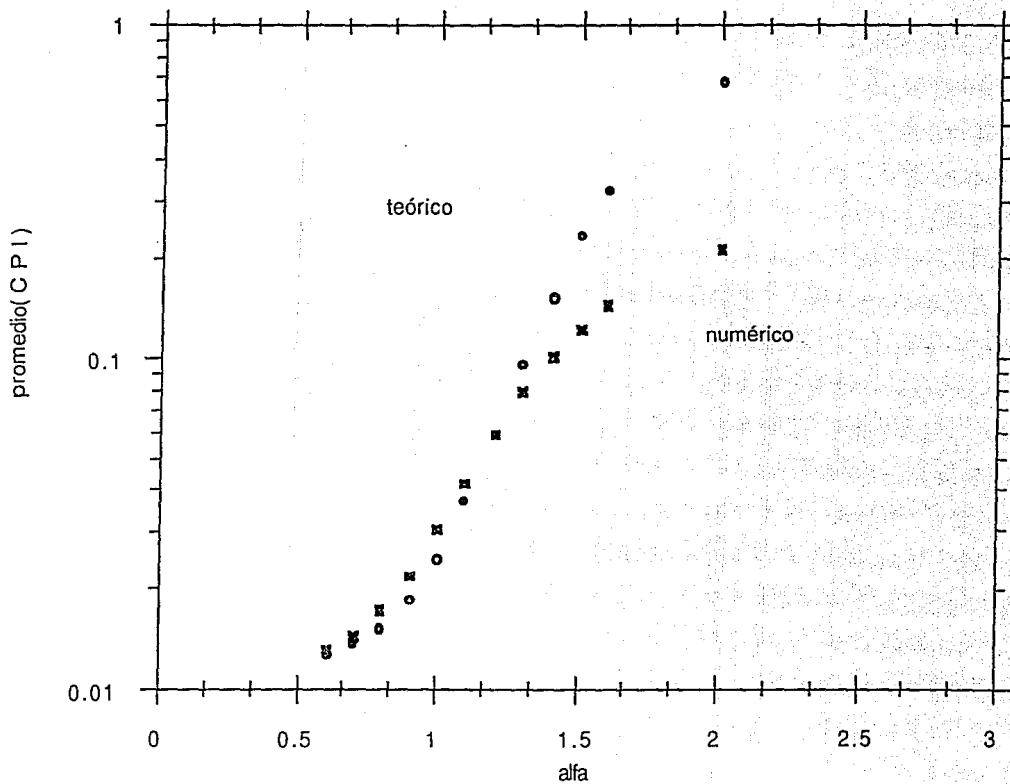


Fig 8. Comparación entre los promedios para los CPI numérico calculados en el centro del espectro, y el teórico obtenido de la ec. (2.2.3), para  $N=250$ . Escala semi-log.

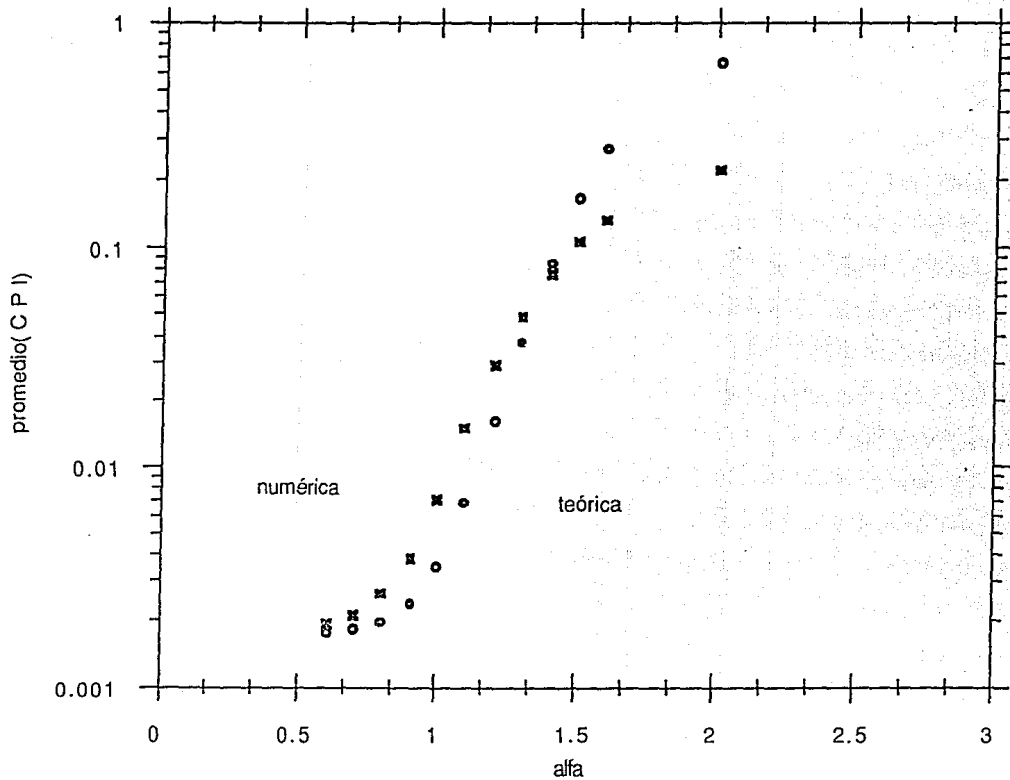


fig 9. Comparación entre los promedios de los CPI numéricos en el centro del espectro y los teóricos obtenidos de la ecuación (2.2.3), para  $N=1750$ . Escala semi-log.

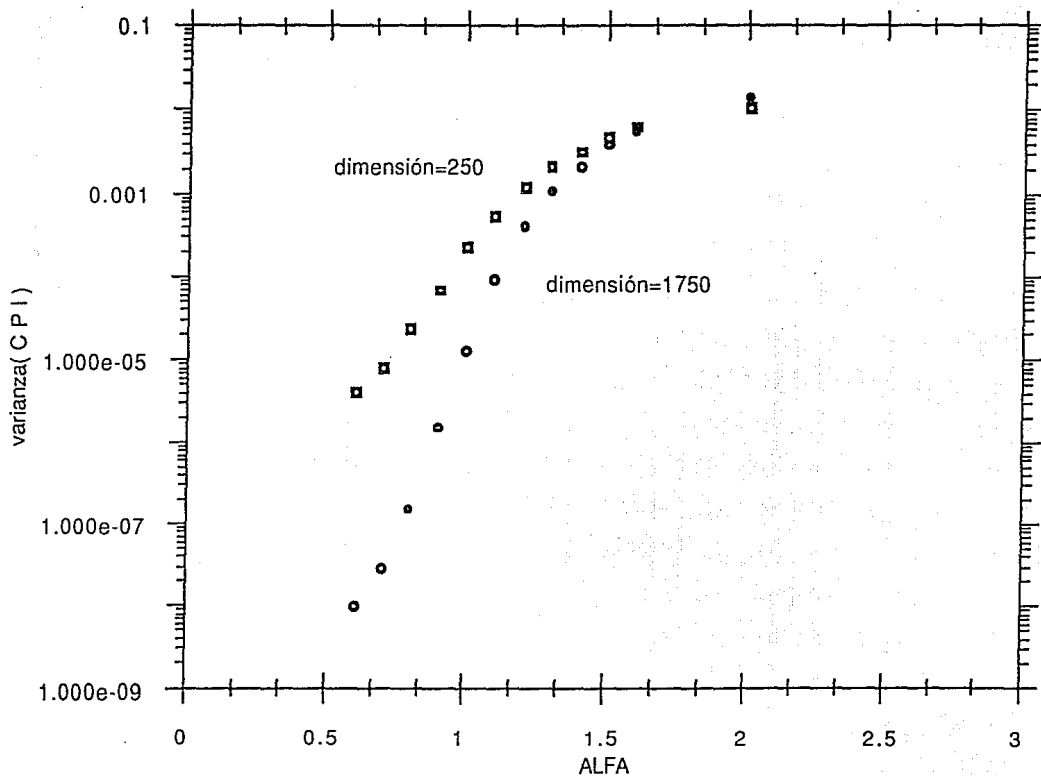


Fig 10. Comparación entre la varianza de los CPI calculadas en el centro del espectro, para dos dimensiones diferentes. Escala semi-log.

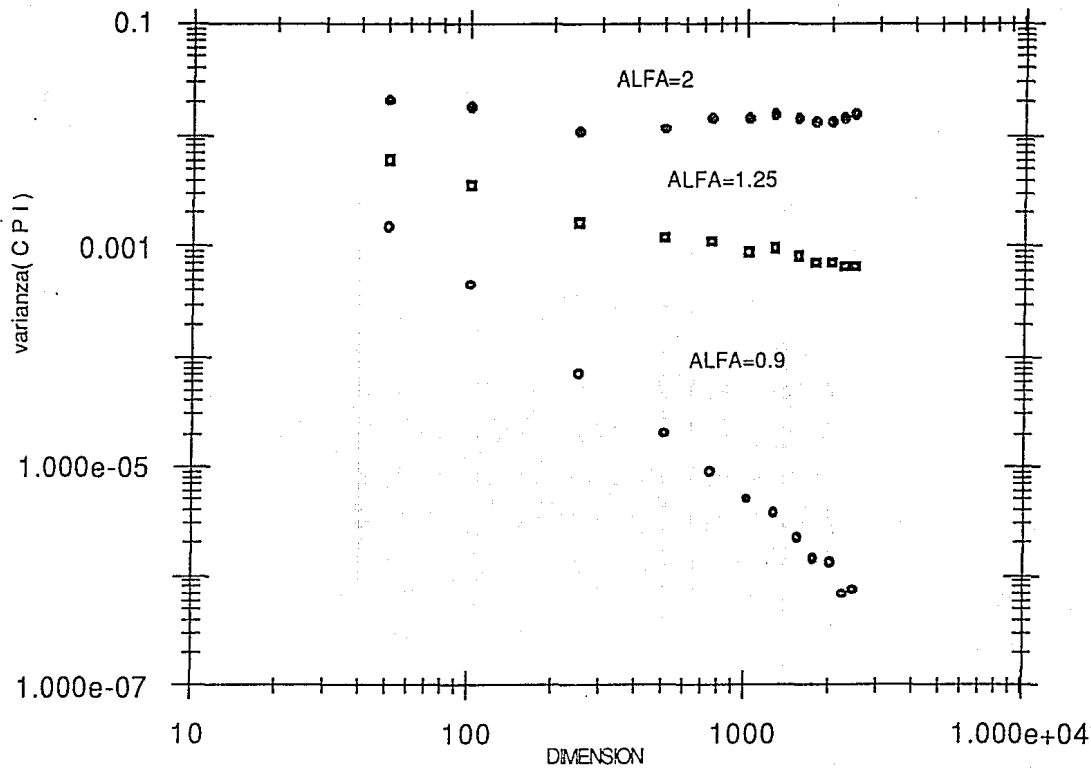


Fig 11. Comparación entre las varianzas de los diferentes CPI calculados en el centro del espectro para las tres zonas. Escala log-log.



ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

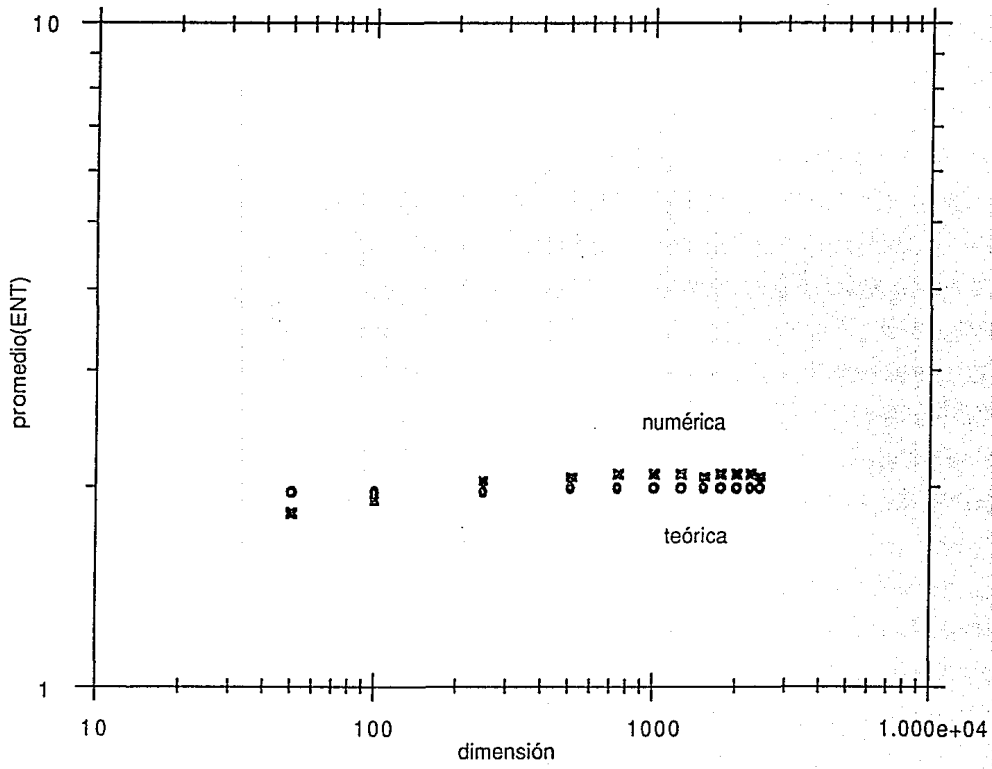


Fig. 12

Comparación entre los promedios de S numérica y teórica obtenida de la ec.(2.2.4), para alfa=2.

Escala log-log.

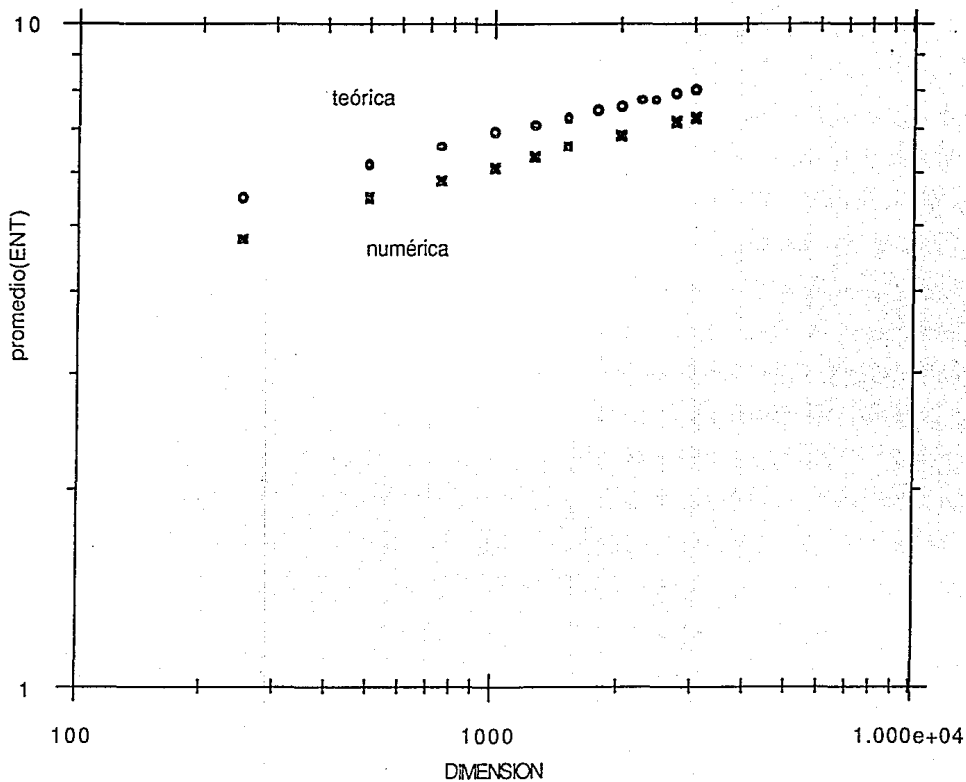


Fig. 13

Comparación entre el logaritmo de la entropía promediada y la teórica obtenida de la ec. (2.2.4), para  $\alpha=0.5$

Escala log-log.

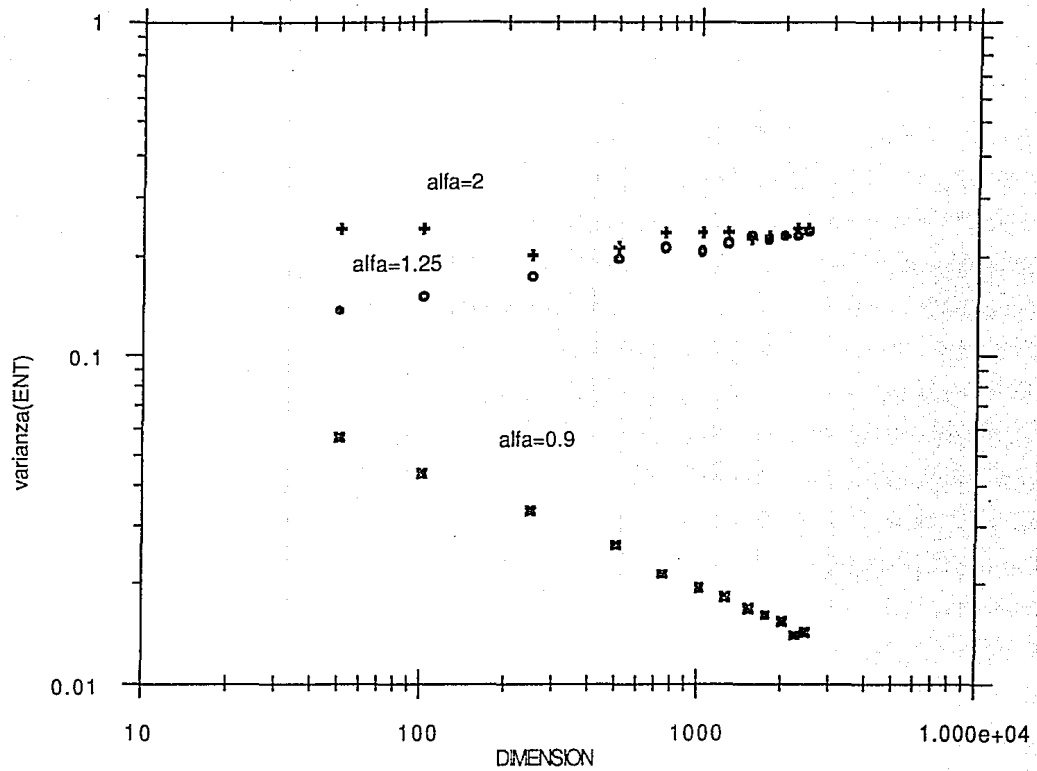


Fig. 14 Comparación entre las varianzas de la entropía calculadas en el centro del espectro para tres zonas distintas. Escala log-log.

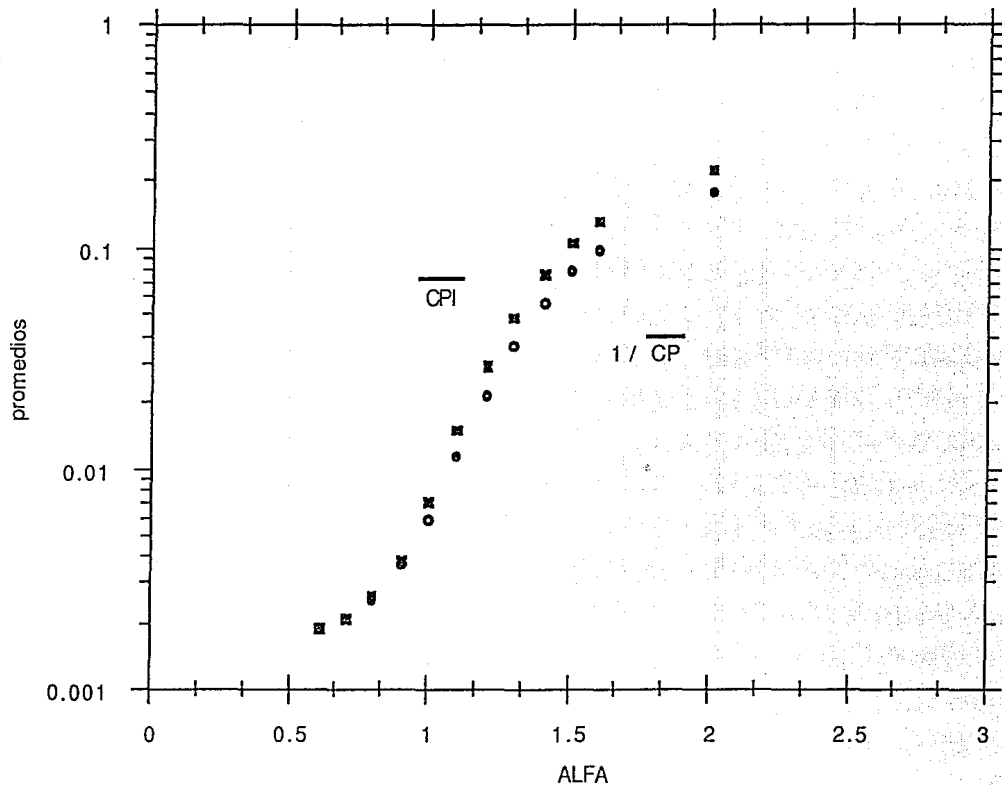


Fig 15. Comparación entre el inverso del promedio aritmético del CP y el inverso del promedio armónico del CPI, en función de alfa, para N=1750. Escala semi-log.

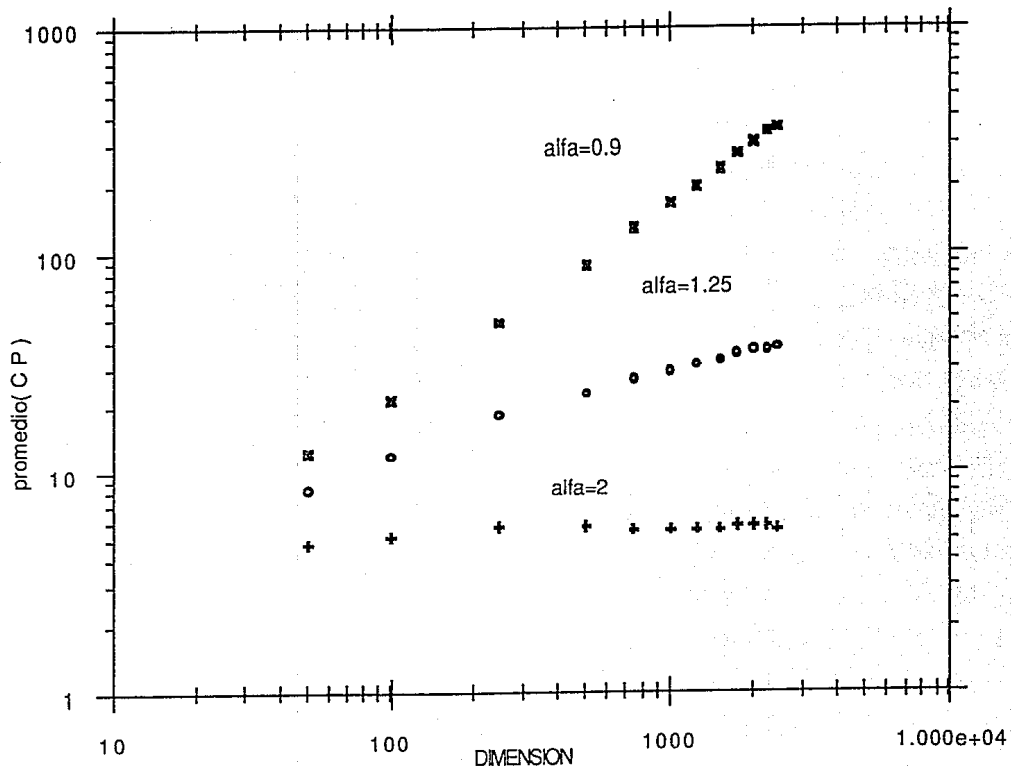


Fig 16. Resultados numéricos para el promedio del CP calculado en el centro del espectro, para las tres zonas en función de la dimensión. Escala log-log.

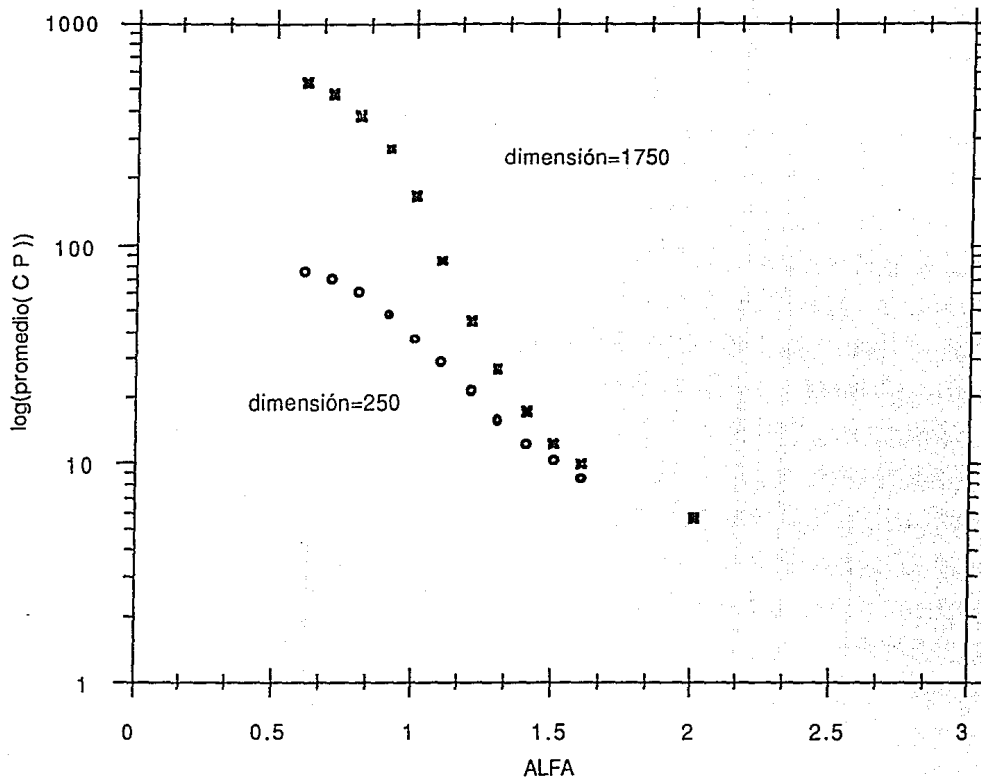


Fig 17. Comparación entre los promedios de los CP calculados en el centro del espectro, para dos dimensiones diferentes.

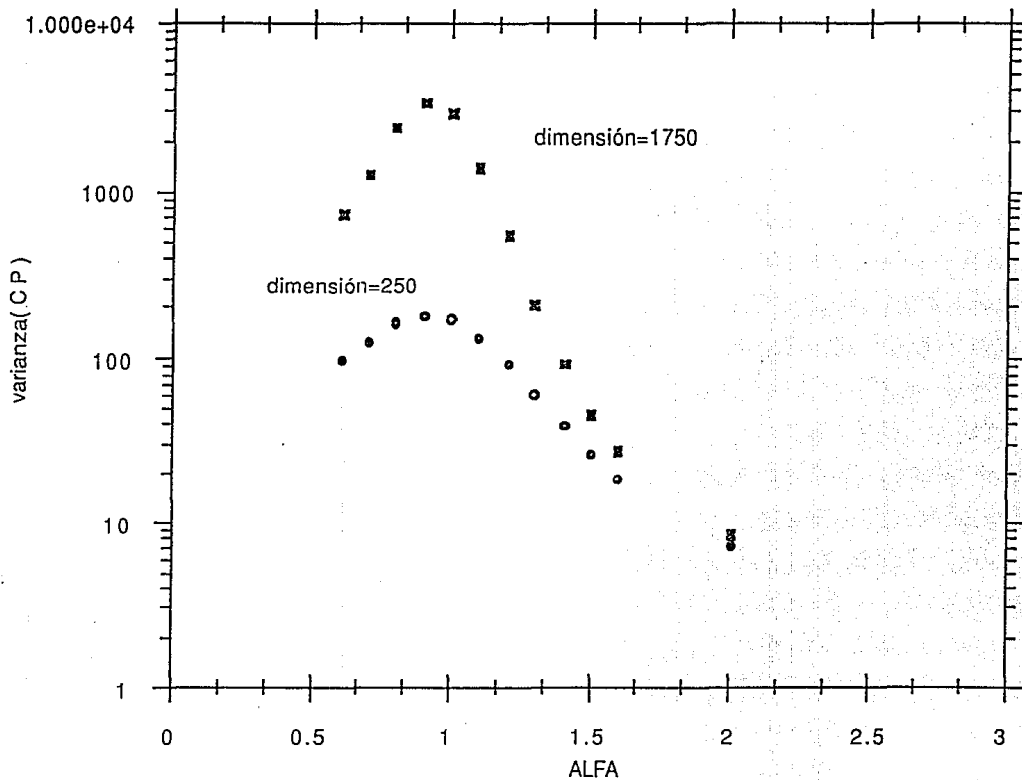


Fig 18. Comparación entre las varianzas del CP calculadas en el centro del espectro para dos dimensiones diferentes, en función de alfa. Escala semi-log.

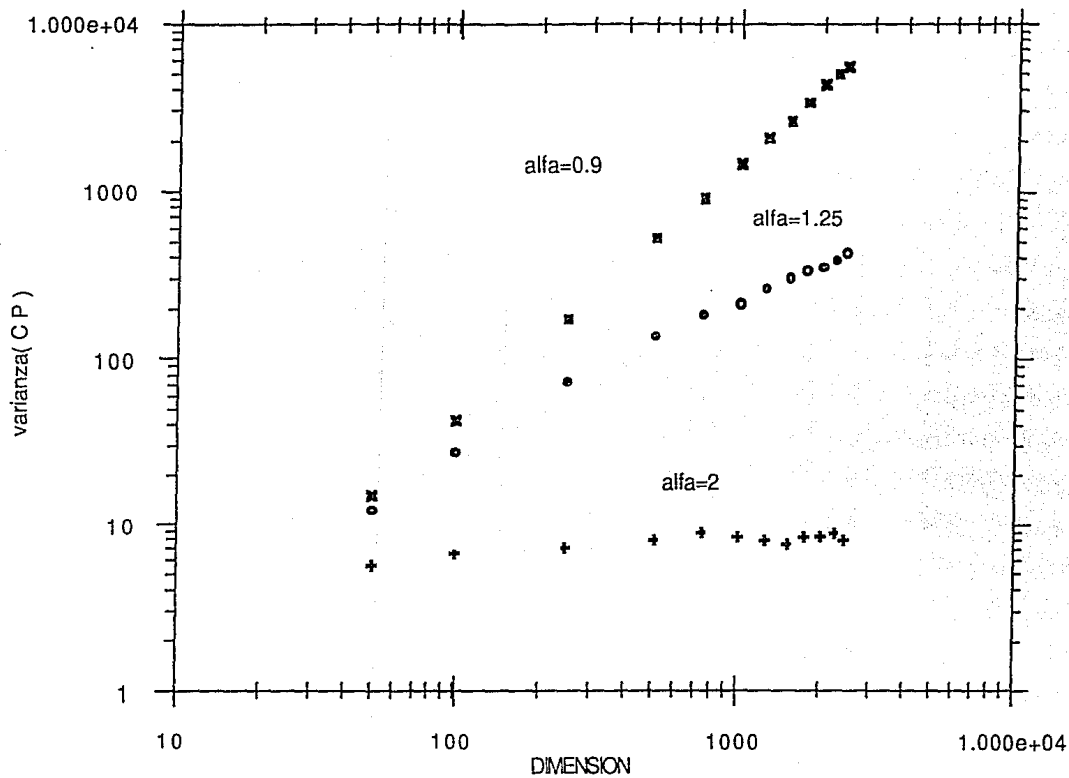


Fig 19. Comparación entre las distintas varianzas calculadas en el centro del espectro, para las tres zonas.  
Escala log-log.



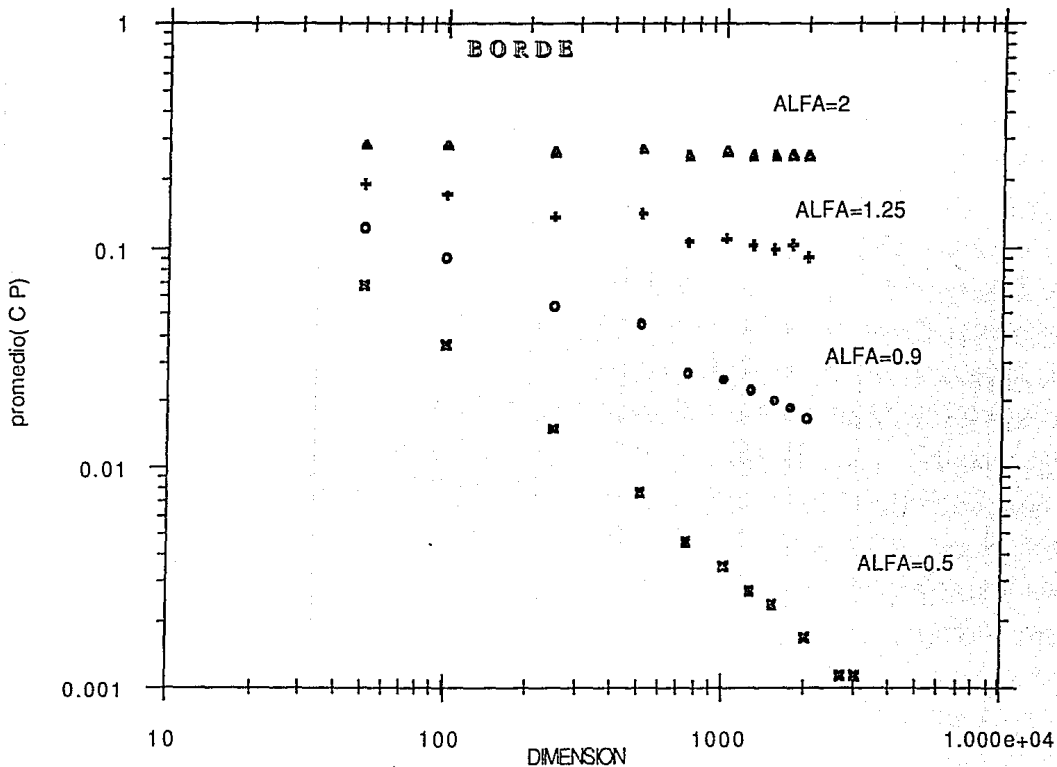


Fig 20. Comparación de los promedios para los CPI calculados en el borde del espectro.  
Escala log-log.

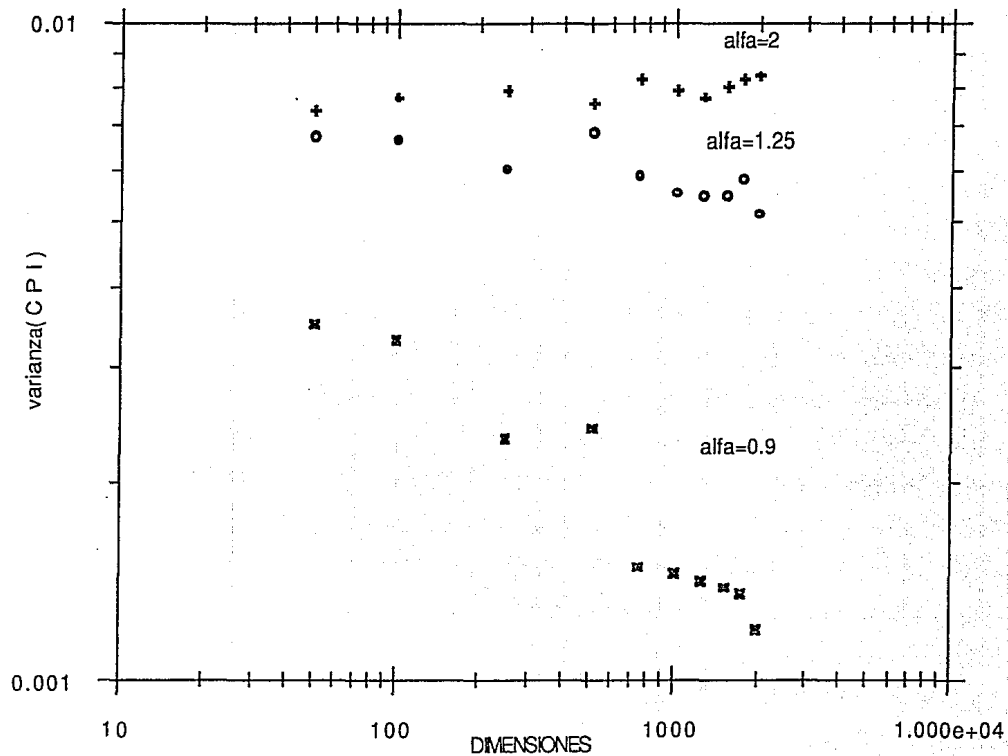


Fig 21. Comparación de las varianzas para los CPI calculados en el borde del espectro, para las tres zonas. Escala log-log.

## RECONOCIMIENTOS

Quiero agradecer a mi esposa y compañera su apoyo, sacrificio y valentía, que me han servido de ejemplo y motivación para terminar este trabajo. A mis maestros Dr. Seligman y Dr. Leyvraz, que con su ejemplo, comprensión e inteligencia, han ayudado a mi formación académica.