

01168  
8  
201



**DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO**  
**Facultad de Ingeniería**

**DISEÑO DE RUTAS DE DISTRIBUCION Y RECOLECCION EN REGIONES DE  
DIFERENTES FORMAS BAJO RESTRICCIONES DE CAPACIDAD DE LOS VEHICULOS**

**ANGELICA DEL ROCIO LOZANO CUEVAS**

**T E S I S**

**Presentada a la División de Estudios de Posgrado de la  
Facultad de Ingeniería  
de la**

**Universidad Nacional Autónoma de México  
como requisito para obtener  
el grado de**

**MAESTRA EN INGENIERIA  
(INVESTIGACION DE OPERACIONES)**

**CIUDAD UNIVERSITARIA  
Marzo de 1993**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

	Página
<b>INTRODUCCION</b>	<b>1</b>
<b>1. DISTRIBUCION FISICA DE MERCANCIAS</b>	<b>4</b>
1.1 IMPORTANCIA DE LA DISTRIBUCION FISICA	5
1.2 TIPOS DE PROBLEMAS DE DISTRIBUCION FISICA EN AREAS METROPOLITANAS	7
1.3 METODOS CLASICOS PARA EL PROBLEMA DE DISTRIBUCION	13
1.4 METODOLOGIA INNOVADORA PARA EL DISEÑO DE RUTAS DE DISTRIBUCION	19
<b>2. DISEÑO DE RUTAS DE DISTRIBUCION O RECOLECCION PARA REGIONES DE DIFERENTES FORMAS</b>	<b>22</b>
2.1 DISEÑO DE RUTAS PARA UN SOLO VEHICULO	22
2.1.1 Recorrido en banda	22
2.1.2 Longitud de la Ruta	26
2.2 DISEÑO DE RUTAS PARA MULTIPLES VEHICULOS	28
2.2.1 Recorrido Local	28
2.2.2 Mejoramiento del Recorrido Local	33
2.2.3 Rutas Sobre una Red de Anillo Radial	34
2.2.4 Orientación de las Zonas para Diferentes Métricas	41
2.2.5 Configuración de Diferentes Geometrías de Zonas	48
<b>3. DISEÑO DE RUTAS DE DISTRIBUCION Y RECOLECCION PARA REGIONES DE DIFERENTES FORMAS</b>	<b>53</b>
3.1 RESTRICCIONES DE CAPACIDAD SOBRE LA DISTRIBUCION	54
3.1.1 Distancia Recorrida por Punto	54
3.1.2 Distribución y Recolección con Pocas Rutas	55
3.1.3 Distribución y Recolección con Muchas Rutas	58
3.2 RESTRICCIONES DE CAPACIDAD TANTO AL DISTRIBUIR COMO AL RECOLECTAR	63
3.2.1 La Distribución Primero, la Recolección Después	63
3.2.2 Distribución y Recolección Mezcladas: Uso del Método MDR	66

<b>4. APLICACION PRACTICA</b>	<b>74</b>
4.1 DEFINICION DEL PROBLEMA	74
4.2 SOLUCION DEL PROBLEMA	77
4.2.1 Justificación del Uso del Método	78
4.2.2 Determinación de los Contornos	79
4.2.3 Zonificación y Determinación de Rutas	81
4.2.4 Estimación del Recorrido Total	85
4.3 EVALUACION DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS	86
<b>CONCLUSIONES</b>	<b>89</b>
<b>NOMENCLATURA</b>	<b>91</b>
<b>GLOSARIO</b>	<b>94</b>
<b>REFERENCIAS</b>	<b>96</b>
<b>APENDICE A (ANALISIS DE PROBLEMAS REALES DE DISTRIBUCION-RECOLECCION)</b>	<b>100</b>
<b>APENDICE B (SOFTWARE PARA EL PROBLEMA DE DISEÑO DE RUTAS)</b>	<b>107</b>
<b>APENCICE C (INVESTIGACION BIBLIOGRAFICA EXTENSA)</b>	<b>111</b>

## INTRODUCCION

El presente trabajo tiene el propósito de analizar, desarrollar y aplicar nuevas estrategias para resolver el "problema de diseño de rutas de distribución y recolección, en regiones de diferentes formas" (PRDyR). La intención consiste en investigar el problema señalado cuando existen restricciones de capacidad en los vehículos, las cuales condicionan simultáneamente los procesos de distribución y recolección de mercancías.

La metodología aquí tratada se caracteriza por originar soluciones razonables (subóptimas), con información mínima, obtenidas muy rápidamente y de una manera sencilla. Este tipo de solución es muy valiosa para la toma de decisiones cuando el tiempo es esencial o cuando no se conocen las posiciones exactas de los puntos de distribución y/o recolección, lo cual ocurre si se presenta alguna de las situaciones siguientes:

- Cuando sea más conveniente encontrar en poco tiempo una solución subóptima, que obtener una solución exacta en mayor tiempo. Dicho de otra manera: cuando sea más importante para la empresa conservar su imagen de puntualidad ante los clientes, que tener costo de transporte un poco menor, esto es, si resolver rápidamente el problema permite brindar a los clientes el nivel de servicio propuesto por el departamento de mercadotecnia.
- Cuando el diseño de rutas debe ser realizado en un intervalo muy corto, esto es, existe pequeña diferencia entre la hora de cerrar los pedidos y la de mandar los vehículos a sus zonas de distribución.
- Cuando la distribución-recolección es en lugares no registrados, esto es, las posiciones exactas de los puntos no se conocen sino hasta muy poco antes de comenzar a distribuir y/o recolectar.
- Cuando los puntos de distribución-recolección varían continuamente, es decir, sus posiciones son diferentes cada vez que se pretende dar solución al problema.

Como esta metodología es muy fácil de aplicar, su uso reduce los gastos en personal y equipo asignados para el diseño de rutas, reduciendo así el costo del producto y aumentando la competitividad del mismo.

Varios autores han hecho estudios similares sobre problemas afines al objeto de estudio de esta tesis: PRDyR con

restricciones de capacidad en los vehículos al distribuir y al recolectar. Entre ellos destacan: Daganzo (1984 a y b), que estudia el problema de distribución para una sola zona; Newell y Daganzo (1986 a y b), que analizan el problema de distribución o recolección para regiones con múltiples zonas de servicio; y Daganzo y Hall (1990), que estudian el problema de distribución y recolección, con restricciones de capacidad en los vehículos únicamente al distribuir.

Aunque existen algoritmos heurísticos para el diseño de rutas (para problemas grandes), bajo las mismas condiciones aquí tratadas, éstos son sensibles a las soluciones iniciales, porque para ser eficientes requieren que tales soluciones sean buenas. La metodología que se analiza ofrece buenas soluciones iniciales a esos algoritmos heurísticos.

Para cumplir el objetivo de esta tesis, primero se señala la importancia de tener un buen sistema de distribución de mercancías, y se indican las ventajas de solucionar el problema por un método no clásico; posteriormente se hace una revisión de métodos similares para problemas semejantes al de interés en esta tesis; después se proponen algunas estrategias para resolver el problema en cuestión, basadas en métodos parecidos; y finalmente se aplican estas estrategias para dar solución a un problema de características reales.

El trabajo se ha dividido, por lo dicho hasta aquí, como se muestra a continuación:

En el Capítulo 1 se señala la importancia de los sistemas de distribución física para la toma de decisiones; se describen los diferentes problemas de distribución que existen en áreas metropolitanas; se mencionan algunos de los principales métodos clásicos para el diseño de rutas de distribución, y se presentan las características fundamentales de la metodología que será analizada a lo largo de esta tesis.

En el Capítulo 2 se hace una revisión de la metodología de Daganzo (1984b) y de Newell y Daganzo (1986 a y b) para el diseño de rutas de distribución o recolección, para uno o varios vehículos. Aquí se plantea cómo una región con numerosos puntos aleatorios, uniforme e independientemente distribuidos pueden ser atendidos por las rutas de los vehículos, partiendo desde una sola fuente. Además se proporcionan las fórmulas para estimar la distancia recorrida en estas rutas.

En la primera parte del Capítulo 3 se revisa la metodología de Daganzo y Hall (1990) para el PRDyR, bajo restricciones de capacidad en los vehículos sólo sobre la distribución. También se dice la manera de hacer las visitas a los puntos y se dan las fórmulas para estimar la distancia recorrida.

Con base en lo expuesto en los capítulos anteriores, en la segunda parte del Capítulo 3 se proponen técnicas para resolver el PRDyR con restricciones de capacidad en los vehículos, tanto al distribuir como al recolectar. Esto se hace para dos situaciones: cuando las distribuciones deben hacerse antes que las recolecciones, y cuando ambas pueden realizarse indistintamente. Para esta última situación se propone el método de distribución y recolección mezcladas (DRM) para diseñar las rutas y para estimar el recorrido de las mismas. Sin embargo, debido a la complejidad del problema, sólo se dan fórmulas de estimación del recorrido para los dos casos siguientes: cuando el total de las distribuciones excede, tanto en tamaño como en cantidad, al de las recolecciones, y el caso inverso.

En el Capítulo 4 se hace una aplicación práctica del método DRM. El problema que se soluciona es: "El Super en Su Casa", el cual se ajusta a un PRDyR, con restricciones de capacidad en los vehículos, tanto al distribuir como al recolectar.

Finalmente el lector encontrará la Nomenclatura y el Glosario específicos de este estudio, que resumen los principales símbolos y términos usados a lo largo de este trabajo; y se incluyen tres apéndices con información sobre problemas de diseño de rutas y sus soluciones.

En el Apéndice A se presentan los resultados de la investigación de campo sobre el proceso de distribución en empresas reales del área metropolitana de la Ciudad de México.

En el Apéndice B se resumen los datos sobre los paquetes de cómputo que existen en el mercado para solucionar diferentes problemas de distribución.

En el Apéndice C se listan las principales publicaciones existentes sobre estudios y métodos para resolver diferentes modalidades del problema de distribución.

En general, en esta tesis se presenta una forma alternativa de resolver un problema complejo con un método simple.

## CAPITULO 1

### DISTRIBUCION FISICA DE MERCANCIAS

La efectividad en la distribución física, considerada como el proceso de transporte de la mercancía desde el centro de producción a los centros de consumo, condiciona la competitividad de cualquier producto. Un buen sistema de distribución contribuirá a que un artículo llegue a más mercado y lo haga más oportunamente.

La competitividad entre productos sustitutos, productos equivalentes en características y calidad, está en función de:

- el precio del producto, y
- la oportunidad de tiempo y lugar (que el producto esté en el lugar y momento justos donde sea demandado).

Si estos factores son al menos como los del competidor, el producto tendrá mercado, pero lo compartirá.

Para hacer el producto más competitivo y ganar el mercado, es necesario mejorar esos factores, lo cual podría lograrse si se redujeran los costos de producción sin eliminar la calidad de la mercancía; se disminuyeran los costos logísticos, costos de planear cómo transportar el producto, sin descuidar la oportunidad de tiempo y lugar; o se mejorara esta oportunidad en sí.

Si se opta por ahorrar en logística, entonces es necesario emplear métodos que funcionen con menos recursos tales como tiempo, datos, personal, equipo de cómputo y procesos matemáticos, pero que indiquen la forma de hacer llegar la mercancía donde y cuando ocurra la demanda.

Si se desea mejorar la oportunidad de tiempo y lugar, se deben emplear métodos que aunque no proporcionen una solución óptima que minimice el costo de transporte de la mercancía, sí produzcan rápidamente una solución que permita satisfacer la demanda más oportunamente, siempre y cuando los beneficios obtenidos por incrementar el mercado del producto, al ser éste más oportuno, supere al gasto extra por transporte no óptimo.

En este capítulo se pretende entender mejor el papel de un buen sistema de distribución física obtenido a través de un método simple y rápido, para resolver problemas de distribución-recolección en áreas urbanas. Para ello se hace lo siguiente:

- Se explica la importancia de la distribución física para que el producto llegue oportunamente y a costo mínimo a manos del consumidor.

- Se clasifican los problemas de distribución física que existen en áreas metropolitanas, donde éstos son más complejos y variables que en zonas rurales.

- Se describen algunos métodos "clásicos" para resolver problemas de distribución, los cuales, en su mayoría, requieren conocer las posiciones exactas de los puntos.

- Se mencionan las características principales de algunos métodos que no necesitan demasiados recursos (por ejemplo conocer las posiciones exactas de los puntos), lo que reduce considerablemente los costos logísticos, y sí proporcionan rápidamente buenas soluciones al problema de diseño de rutas.

### 1.1 IMPORTANCIA DE LA DISTRIBUCION FISICA

Ante el Tratado de Libre Comercio entre México, Estados Unidos y Canadá, muchas compañías están en peligro de salir del mercado debido al bajo precio de las importaciones, sin embargo pueden salir avantes y aun prosperar, usando un arma competitiva de importancia creciente: la logística de alta calidad.

En la década de los 80's, las compañías se comenzaron a dar cuenta que no sólo importaba el precio del producto (mercancía), sino la calidad; entonces se enfocaron en mejorar la calidad y la productividad.

En la década de los 90's, la existencia de múltiples productos sustitutos, equivalentes en características y calidad, hace que los clientes contemplen el servicio para sus decisiones. Para los clientes, los defectos en los servicios logísticos son tan críticos como los defectos en el mismo producto.

Las decisiones de las compañías están siendo dirigidas no sólo por el precio y la calidad, sino también por el servicio. Las empresas que realcen la importancia de los servicios logísticos, como parte de su estrategia de competencia, tendrán crecimiento de mercado y mejor desarrollo financiero.

Desafortunadamente algunas compañías conceden poca importancia a la logística, en comparación con las ventas, la mercadotecnia, el diseño y la fabricación; ya que sólo representa el 10% o menos del costo total del producto. Sin embargo, el costo de un mal servicio puede igualar o exceder el

precio real del producto. Si los envíos llegan tarde, los clientes tienen que mantener exceso de inventario y ordenar anticipadamente. Un envío muy retardado puede detener una línea de producción.

En contraste, un buen servicio produce expansión de mercado y mejor desarrollo financiero, por las razones siguientes:

- Existe crecimiento en la base de clientes; disminuye el costo de adquisición de nuevos clientes, y a la larga se incrementan las ventas.
- Se obtiene prestigio por buena logística.
- Los clientes pueden pagar más precio por mejor servicio.
- Se gasta menos tiempo y dinero en corregir órdenes faltantes.

El objetivo de la Logística es poner a disposición del consumidor una determinada cantidad de un producto, en el momento que éste sea demandado, y al mínimo costo.

Cualquier producto pasa por varios procesos antes de llegar al consumidor. Durante los procesos de aprovisionamiento de materiales, de producción y de distribución, el producto sufre desplazamientos. La logística estudia cómo realizar tales desplazamientos del producto, en formas efectivas en cuanto a costo.

La parte de la Logística que es de interés en este trabajo, es la distribución física. El objetivo al resolver un problema de distribución física es conocer la manera de hacer llegar los productos o mercancías desde los depósitos a los centros de consumo, satisfaciendo la demanda al mínimo costo.

Un buen sistema de distribución física retribuye en la disminución de los costos y el incremento de la rapidez de entrega, en el incremento en la variedad de productos y en el mejoramiento del manejo de existencias. Esto es, un buen sistema de distribución brindará al cliente un producto con mejor servicio y menor costo a la vez, haciendo que se incremente el mercado de éste. De aquí que, el estudio y solución del problema de distribución es indispensable.

El problema de distribución puede presentarse tanto en zonas urbanas como en zonas rurales, y no es igual en ambas.

## 1.2 TIPOS DE PROBLEMAS DE DISTRIBUCION FISICA EN AREAS METROPOLITANAS

Los problemas de distribución que existen en áreas rurales y metropolitanas son muy diferentes entre sí; mientras que para los primeros hay uno o muy pocos caminos para llegar de un punto a otro, en los segundos los puntos se encuentran sobre redes muy complejas de calles, lo que hace más difícil la determinación de un buen sistema de distribución. Además en áreas metropolitanas hay mucho más puntos de distribución, los cuales demandan un sinnúmero de productos que deben ser distribuidos de maneras distintas y bajo diferentes condiciones, dependiendo de las características del producto y del tipo de servicio, lo cual da origen a múltiples variantes del problema.

Los problemas de distribución en áreas metropolitanas pueden ser clasificados de acuerdo a:

- 1). Los servicios que se brinden: distribución y/o recolección.
- 2). La cantidad de vehículos (uno o varios).
- 3). La existencia de lugares registrados.
- 4). La forma de recorrer los puntos.
- 5). Las restricciones de tiempo.
- 6). La cantidad de productos (uno o varios).
- 7). El tipo de entrega (definida o no definida).
- 8). Las restricciones de capacidad.

### 1). DISTRIBUCION Y/O RECOLECCION

Los problemas de distribución pueden ser : de distribución o/y recolección. En el primer caso únicamente se trata de transportar los productos del o de los centros generales de distribución a los centros de consumo, o inversamente; mientras que en el segundo caso, además de distribuir se debe hacer la recolección de los productos ya caducados o defectuosos, o de los envases reutilizables, o bien de otros productos para llevarlos de los centros de consumo hacia el o los centros generales de distribución. En este último caso, los vehículos pueden o no regresar vacíos.

Como ejemplo del primer caso se puede citar el problema de distribución de flores. La florería manda los arreglos y no hace recolección en los destinos.

Un ejemplo del segundo caso es el problema de distribución y recolección que realizan las empresas de alimentos perecederos, donde existen dos flujos de mercancías: uno que va de los centros de distribución a los centros de consumo, llevando productos en buen estado, y otro que va de los centros

de consumo a los centros de distribución, con los productos caducados.

## 2). LA CANTIDAD DE VEHICULOS

En los problemas de distribución pueden estar involucrados uno o varios vehículos. Si se trata de un solo vehículo el problema se conoce como problema del agente viajero, y si se trata de varios vehículos con cierta capacidad de carga, se conoce como problema de rutas.

Un ejemplo del problema del agente viajero es el problema de distribución de las tiendas de materiales para construcción donde, por lo general, sólo existe un vehículo que debe repartir los materiales en diferentes puntos.

El problema de distribución de gas estacionario es un ejemplo de un problema de rutas, en el cual una zona de consumo es cubierta por varios vehículos en rutas diferentes.

## 3). LA EXISTENCIA DE LUGARES REGISTRADOS

Los problemas de distribución pueden dividirse en problemas en los que la distribución de productos es sólo a aquellos lugares que se tienen en registro (lugares fijos); en problemas en los que la distribución es a lugares no registrados, y en problemas que son una combinación de los dos anteriores.

Como ejemplo del primer caso es posible retomar el problema de distribución de gas estacionario, donde la compañía de gas sólo distribuye a domicilios con los cuales tiene contrato.

En el segundo caso se tiene como ejemplo el problema de distribución de mercancías que realizan las cadenas de almacenes comerciales, en las que sus destinos no están definidos hasta el momento en que se realiza la compra.

Un ejemplo del tercer caso es el problema de la distribución de refrescos, en donde la distribución se hace a lugares registrados (como pueden ser tiendas, restaurantes o domicilios particulares) y a lugares que no se tienen definidos (nuevos clientes conseguidos en el proceso de la distribución).

## 4). LA FORMA DE RECORRER LOS PUNTOS

Considerando los problemas de distribución con lugares registrados, éstos a su vez pueden ser divididos de acuerdo a

la forma como recorran los puntos de consumo, en : problemas de distribución en los que siempre se tocan todos los puntos registrados, y problemas en los que no siempre se tocan todos los puntos.

El ejemplo de las compañías refresqueras es un caso en el que siempre se tocan todos los puntos registrados, independientemente de dejar o no mercancía.

El ejemplo de la compañía de gas estacionario es un caso en el que no siempre se tocan todos los puntos registrados, es decir, hay ocasiones en las que estando sobre una ruta un vehículo no recorre un punto si sabe que no está programado el consumo en ese punto.

### 5). LAS RESTRICCIONES DE TIEMPO

Dentro del problema de distribución pueden tenerse restricciones de tiempo. Estas pueden ser en cuanto a:

- El horario de distribución y/o
- la vida del producto.

La restricción del horario de distribución o entrega se refiere tanto a la duración del servicio de transporte, como al plazo de distribución de mercancías, y al horario de recepción.

La restricción de la vida del producto consiste en el establecimiento de un horario de distribución dentro del cual el producto se conserve en buen estado.

Un ejemplo de un problema de distribución con restricción del tiempo en la duración del servicio de transporte es el problema de distribución de mercancías de las cadenas de almacenes comerciales. En este problema el horario límite de reparto de mercancías es fijado por la propia compañía, dejando para el día siguiente la mercancía no distribuida el día anterior dentro del horario permitido (horario de transporte).

Para el problema de distribución con restricción del tiempo en cuanto al horario de recepción se tiene como ejemplo el problema de mensajería, en el cual diversas compañías garantizan la distribución para antes de las 12:00 a.m.

Como ejemplo de un problema de distribución con restricción de tiempo en cuanto a la vida del producto (en el que su distribución debe ser antes de que su vida termine) y en cuanto al plazo de distribución, se tiene el caso de la distribución de pizzas. Estas deben ser entregadas antes de que se enfríen y antes de que transcurra media hora desde el momento del pedido.

#### 6). LA CANTIDAD DE PRODUCTOS

Es posible tener distribución de un solo producto o de múltiples productos. En el caso de múltiples productos se arma un "mix" (mezcla de productos) para cada destino, ya sea en el centro de distribución o en el centro de consumo.

Un ejemplo de un problema de distribución de un sólo producto es el de reparto de gas estacionario.

El problema de la distribución de botanas es un ejemplo de un problema de múltiples productos donde el "mix" se arma en el centro de consumo.

El problema de la distribución de vehículos de las compañías automotrices es un ejemplo de un problema de múltiples productos donde el "mix" se arma en el centro de distribución, de acuerdo al pedido anticipado de las concesionarias.

#### 7). TIPO DE ENTREGA

La entrega en un problema de distribución puede ser definida o no definida. Se entiende por definida cuando se hace un pedido anticipado al centro de distribución, y por no definida cuando el pedido se hace en el centro de consumo.

Un ejemplo de un problema de distribución con entrega definida es el problema de distribución de las compañías automotrices, mencionada anteriormente.

La distribución de botanas es un ejemplo de un problema de distribución con entregas no definidas, donde en cada centro de consumo se entrega lo necesario en ese momento (sin pedido previo).

#### 8). LA RESTRICCIÓN DE CAPACIDAD

Los problemas de distribución pueden ser divididos en problemas con límite de capacidad y problemas sin límite de capacidad. Entendiéndose como problemas con límite de capacidad aquellos cuya unidad ó tamaño del lote del producto sea una fracción significativa de la capacidad de carga.

Un ejemplo de un problema de distribución con límite de capacidad es el de la distribución de calzado, donde el tamaño del lote de entrega es significativo en comparación con la capacidad del vehículo.

El problema de mensajería es un ejemplo de un problema de distribución sin límite de capacidad, ya que el tamaño de los paquetes es insignificante con respecto al tamaño del vehículo.

De acuerdo con la clasificación realizada anteriormente, es posible obtener la Figura 1.1, de la cual se pueden extraer la mayoría de los problemas de distribución.

La determinación de un problema de distribución a través de la Figura A.1 se hace comenzando desde el nivel 1, pasando por los arcos hacia los nodos de un nivel cada vez mayor ó igual, hasta llegar al nivel 8. Esto significa que en el recorrido del nivel 1 al 8 no habrá circuitos.

El problema de distribución de pizzas puede ser representado por la cadena

	a	-	b	-	c	-	a	-	b	-	a	-	a	-	a
nivel	1		2		3		5		5		6		7		8

ya que es un problema de distribución con múltiples vehículos; con repartición a lugares no registrados; con restricción de tiempo en cuanto al horario de distribución y en cuanto a la vida del producto; con un solo producto, con entrega definida y con límite de capacidad sobre los vehículos.

La distribución de productos lácteos es un ejemplo de un problema de distribución - recolección que puede ser representado por la cadena

	b	-	b	-	b	-	a	-	a	-	b	-	b	-	b	-	a
nivel	1		2		3		4		5		5		6		7		8.

El servicio de correo normal es un ejemplo de un problema de distribución que puede ser representado por la siguiente cadena

	a	-	b	-	c	-	a	-	b	-	a	-	a
nivel	1		2		3		5		6		7		8.

Como último ejemplo se tiene el problema de distribución de refrescos, el cual puede ser representado como sigue:

	b	-	b	-	b	-	a	-	a	-	b	-	b	-	a
nivel	1		2		3		4		5		6		7		8.

Niveles de clasificación

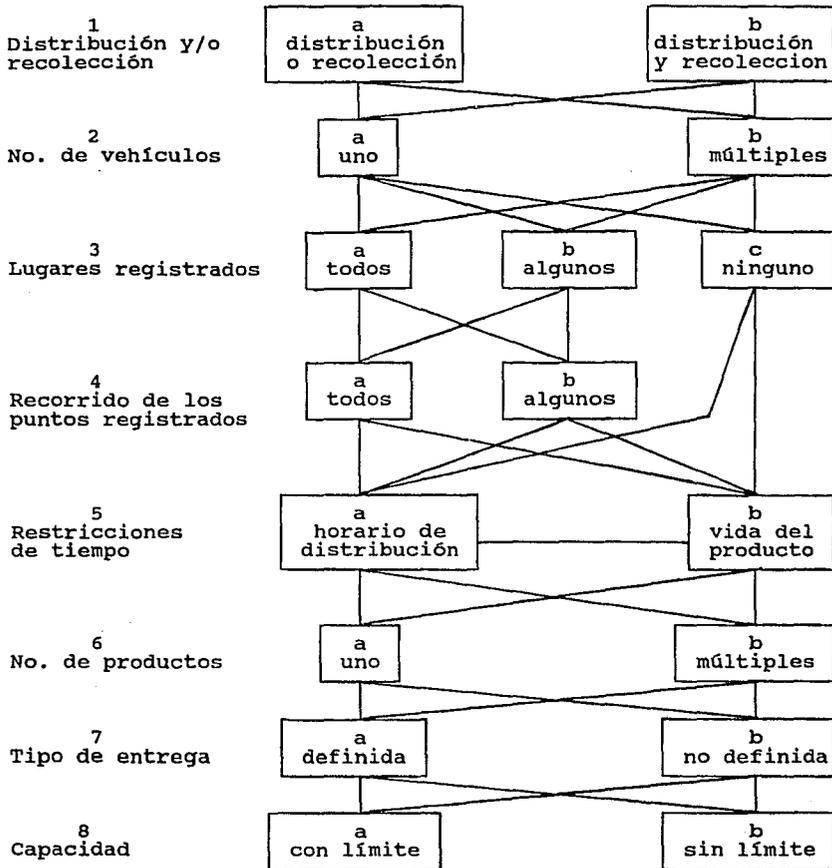


FIGURA 1.1.

Cada problema de distribución tiene sus propias características que condicionan la forma de solucionarlo, sin embargo para determinar el sistema de distribución óptimo, es necesario conocer entre otras cosas: el número de vehículos que se han de utilizar, así como su capacidad y las rutas que éstos deben recorrer para servir a los consumidores dispersos geográficamente.

Los Problemas de Distribución Física han sido estudiados desde el final de la Segunda Guerra Mundial por medio de diferentes métodos de la Investigación de Operaciones, que van desde la Programación Lineal hasta la Programación Heurística, pasando por Teoría de Redes.

### 1.3 METODOS CLASICOS PARA EL PROBLEMA DE DISTRIBUCION

El problema de distribución puede presentarse de distintas formas. Puede referirse: ya sea a la selección del mejor modo (medio) de transporte; al establecimiento del tamaño óptimo de la flota de vehículos; o a la determinación del sistema óptimo de rutas de entrega para los vehículos.

Este último caso consiste en determinar las rutas de costo mínimo de los vehículos bajo ciertas restricciones; éstas pueden ser sobre la satisfacción de la demanda, la capacidad de carga de los vehículos, el tiempo de servicio, o la distancia (o tiempo) total recorrida(o) por cada vehículo.

Cuando el número de vehículos es fijo, el problema se orienta a diseñar las rutas de distribución que cumplan con las restricciones al mínimo costo. Este es el caso que será especialmente estudiado en este trabajo.

Un problema de este tipo es el conocido como Problema de Transporte, el cual se plantea como sigue:

Sea  $x_{ij}$  = Número de unidades del producto que deben enviarse del origen  $i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) al destino  $j$  ( $j = 1, \dots, n$ ).

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, n$$

donde  $x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j,$$

$m$  es el número de orígenes,  
 $n$  es el número de destinos,  
 $a_i$  es la oferta (en unidades de producto) del origen  $i$ ,  
 $b_j$  es la demanda (en unidades de producto) del destino  $j$   
 $y^j c_{ij}$  es el costo de enviar una unidad del origen  $i$  al destino  $j$ .

El problema consiste en determinar el número de unidades de producto que deben ser transportadas en cada ruta, a un costo mínimo, de tal forma que sea satisfecha la demanda de los centros de consumo de acuerdo a la oferta de los orígenes. Este problema incluye varias rutas, cada una va de un origen  $i$  a un destino  $j$ , sin pasar por puntos intermedios.

El Problema de Transporte puede resolverse por Programación Lineal (Método Simplex) pero, de acuerdo a su estructura especial, es más eficiente usar otro tipo de métodos. Entre los métodos más usados se encuentran el Método Húngaro y el Método Stepping Stone (o Método Simplex de Transporte); este último usa a su vez el Método del Extremo Noroccidental o el Método de Vogel para obtener una solución inicial factible.

Otro problema de Diseño de Rutas se presenta cuando una ruta puede tocar uno o más destinos. El ejemplo más simple (de una sola ruta) de este problema es el del Agente Viajero (PAV). Este problema consiste en determinar la ruta más corta (en cuanto a que minimiza el tiempo, la distancia, el costo, o algún otro criterio) que un vendedor puede seguir partiendo de una ciudad origen, visitando cada una de las ciudades destino una y sólo una vez, y regresando a la ciudad origen.

Aun cuando el problema es conocido como PAV, su estructura matemática específica hace que una gran variedad de problemas con la misma estructura, Problemas de Determinación de la Secuencia Optima, puedan ser tratados como PAV's.

El PAV puede ser planteado en forma similar a un Problema de Asignación, originando una matriz de costos o distancias, simétrica o asimétrica, con  $\infty$  en la diagonal principal. El Problema de Asignación es un problema lineal que puede ser considerado un caso especial del Problema de Transporte, donde

la oferta en cada origen y la demanda en cada destino son de una unidad cada una.

Este problema puede ser resuelto usando el Método Simplex de Transporte pero, aprovechando su estructura, es más eficiente usar el Método Húngaro (König y Egervary) para problemas de asignación.

Dado que el PAV puede ser formulado como un Problema de Asignación, entonces puede considerarse un Problema de Programación Entera (P.P.E.) 0-1. La solución a un P.P.E. puede obtenerse utilizando alguno de los métodos de Planos de Corte, o de Ramificación y Acotamiento.

Tanto los métodos para Problemas de Asignación como los métodos de Programación Entera sólo son útiles para resolver problemas muy pequeños en forma óptima, tal vez de hasta  $m=15$  ciudades. La causa de esta desventaja es que para la formulación de los problemas como Problemas Enteros o como Problemas de Asignación, se requieren muchas variables y restricciones, en relación con el tamaño de  $m$ .

Otra forma de resolver el PAV, la cual es más eficiente y veloz, es por medio de la Teoría de Redes, ya que los problemas de transporte son un caso especial de flujo en redes. El problema puede plantearse en forma matemática como un Problema Lineal de Redes con Enteros 0-1, es decir, como un Problema de Flujo a Costo Mínimo en Redes. Este puede ser resuelto por el Algoritmo Out-of-Kilter de Ford y Fulkerson (algoritmo fuera de orden o de desviaciones), que es una ampliación del Algoritmo de Etiquetas.

Esta forma de solución sólo es práctica para problemas de tamaño pequeño. Los problemas de tamaño real (con 40 o más ciudades) tienen que resolverse en forma aproximada, empleando métodos heurísticos.

Si un modelo matemático de un problema es tan complicado, que es difícil o quizá imposible encontrar una solución, y no puede ser simplificado adecuadamente, entonces es recomendable usar un algoritmo heurístico, ya que éste produce con eficiencia buenas soluciones aproximadas para el problema. Un procedimiento heurístico recurre a la intuición, pero puede garantizar sus resultados (si los hay) estadísticamente o dentro de ciertos márgenes de incertidumbre. Existen algoritmos heurísticos para determinación de rutas, bajo restricciones de tiempo o de capacidad, cumpliendo con la demanda. Algunos de los más conocidos son:

- S. Lin y B. Kernighan (1973): Algoritmo para el PAV.
- N. Christofides (1980): Algoritmo exacto para el problema de

rutas de vehículos.

- J. P. Norback y R. F. Love (1977): Aproximación geométrica para resolver el PAV.
- Busacker y Gowen: Algoritmo para problemas de flujo a costo mínimo.

El PAV se complica al ampliarse la región de distribución; lo que genera el problema múltiple del agente viajero (M-PAV). El M-PAV consiste en encontrar el sistema de rutas de mínimo recorrido para los M-agentes viajeros quienes salen y regresan a una ciudad base, de tal forma que cada ciudad cliente sea visitada exactamente una vez por exactamente un agente. Los métodos de solución (analíticos y heurísticos) para este problema se comparan en la siguiente tabla:

Técnica de Solución	Ramificación y Acotamiento	Mejoramiento Heurístico de la Ruta	División Heurística de la Ruta	Algoritmo de planos de corte	Algoritmo de relajación Lagrangeana
Autor(es)	Svestka y Huckfeldt	Russell	Frederickson	Laporte y Norbert	Gavish y Srikanth
Año	1973	1977	1978	1980	1986
Tipo de Resultado	Exacto	Aproximado	Aproximado	Exacto	Aproximado
Tamaño del Problema	Rango de 10-60 cds.	Más de 159 ciudades	Desconocido	Más de 100 ciudades	Más de 500 ciudades
Tiempo Teórico de corrida (seg)	$\exp[0.074n]$ donde	$n^{2.3}$ n = número de	$n^3$ ciudades	Desconocido	$n^4$
Tipo de Problema	M-PAV simétrico	M-PAV simétrico - con restricciones de carga, distancia, tiempo, o secuencia	1.M-PAV simétrico 2.Problema del cartero chino	M-PAV simétrico euclidiano o no euclidiano, y asimétrico	M-PAV simétrico euclidiano y no euclidiano

Estos métodos están limitados en cuanto al tamaño del problema, y además no consideran restricciones de capacidad.

Si se incorporan restricciones de capacidad, surge el Problema Múltiple de Rutas de Vehículos (M-PRV). El M-PRV consiste en el diseño de un sistema de rutas de mínimo costo (distancia o tiempo) de la fuente a un número dado de

consumidores de localización conocida, bajo restricciones de capacidad de los vehículos o de la longitud de las rutas. El M-PRV considera sólo distribución o recolección, pero no combinaciones de ambas.

Existen métodos exactos para resolver el M-PRV, especialmente de ramificación y acotamiento, pero sólo son convenientes para problemas pequeños.

Los métodos heurísticos para el M-PRV, que se caracterizan por su mayor eficiencia computacional, son:

#### i). Métodos de "Ahorro Heurístico"

-Clarke y Wright (1964): Pone más énfasis en la minimización de la distancia recorrida que en el llenado de los vehículos a su capacidad.

-Schruben y Clifton (1968): Para distribución y recolección con vehículos de diferentes capacidades.

-O'Neil y Whybark (1972): Enfatiza el factor tiempo en la determinación del mejor itinerario del vehículo.

-Beltrami y Bodin (1974): Considera restricciones de capacidad y tiempo, minimizando el recorrido total y el número necesario de vehículos.

-Benton y Srikar (1985): Válido para el M-PRV sin restricciones adicionales.

#### ii). Métodos de "Descomposición Heurística"

-Orloff (1974): Reduce el tamaño del problema y permite más flexibilidad en su formulación y solución, pero tiene que resolver muchos subproblemas.

-Raft (1982): Liga cinco subproblemas resueltos separadamente, por un proceso iterativo.

#### iii). Métodos de "Mejoramiento Heurístico de la Ruta"

-Turner y Hougland (1975): Consiste de un procedimiento de construcción de rutas de penalización y de un algoritmo de eliminación de subrutas. No considera restricciones de capacidad.

iv). Métodos heurísticos "Determinación de rutas primero, agrupación después"

-Golden, Assad, Levy y Gheysens (1984): Considera sólo el problema de distribución.

v). Algoritmos de "Relajación Lagrangeana"

-Christofides, Mingozzi y Toth (1981): Considera vehículos de la misma capacidad. Se basa en dos diferentes relajaciones.

-Fisher, Greenfield, Jaikumar y Kedia (1982): Tiene formulación de P.E. mixta. No puede ser generalizado.

-Akabay (1983): Funciona para problemas muy pequeños, de un depósito y simétricos.

-Stewart y Golden (1984): Consiste en cambiar el M-VRP al M-PAV, dualizando las restricciones de capacidad y entonces resolviendo el M-PAV. Converge rápidamente.

vi). Métodos de "Ramificación y Acotamiento"

-O'Neil y Whybark (1975): Es un método exacto para problemas muy pequeños.

-Hill y Whybark (1976): Reduce el tiempo de cómputo del método anterior, pero no es muy bueno para problemas grandes.

Algunos de estos métodos son la base de los paquetes comerciales de diseño de rutas (ver Apéndice B). Sus desventajas son: 1) para una mejor solución es necesario combinar varios de los métodos y 2) requieren almacenamiento de mucha información.

Todos los métodos mencionados anteriormente trabajan con distancia euclídeanas y requieren conocer las posiciones exactas de los puntos. Para algunos problemas esto es difícil de cumplir. Por ejemplo, para un problema de distribución de mensajería en el área metropolitana, las distancias se manejan con la métrica de Manhattan, no con la métrica Euclídeana, y los puntos de distribución varían constantemente, así que no es posible conocer la posición exacta de los mismos, a la hora de diseñar la ruta; entonces es necesario usar otro tipo de métodos, de éstos el que propone Daganzo C. F. (1984b) y que

después continúan desarrollando Newell y Daganzo (1986 a y b) y Daganzo y Hall (1990), es uno de los más eficientes.

#### 1.4 METODOLOGIA INNOVADORA PARA EL DISEÑO DE RUTAS DE DISTRIBUCION

La forma de resolver un problema depende de su naturaleza y de la magnitud de recursos disponibles para solucionarlo. Si se tiene un problema de diseño de rutas, muy complejo o muy grande, y además se cuenta con poco tiempo para resolverlo; o si se desea encontrar rápidamente una buena solución inicial para un método heurístico de diseño de rutas (muchos métodos heurísticos para el diseño de rutas requieren de una solución inicial, la cual van mejorando paso a paso, si esta solución es buena, la eficiencia del método se incrementa considerablemente), lo ideal es usar algún método basado en las técnicas propuestas por: Newell y Daganzo (1986a), y Daganzo y Hall (1990). Por simplicidad, de ahora en adelante, a los métodos que toman como base estas técnicas se les llamará MD.

Para los MD sólo es necesario conocer la densidad de clientes, más no su localización exacta; así que se elimina la necesidad de especificar una red y el evaluar arreglos detallados de rutas. Además, su análisis usa muy pocos parámetros con el fin de darle rapidez a la obtención de respuestas, y la solución que se obtiene es una buena solución, aproximada a la óptima.

De esta manera, los MD mejoran la eficiencia del proceso de decisiones en la planeación y operación de la distribución, lo que es muy bueno dada la importancia creciente de las consideraciones de servicio al cliente, y el incremento correspondiente en el número y complejidad de las restricciones dentro de las operaciones de distribución.

Los MD resuelven, de una manera nueva y distinta, el problema de conocer la forma de visitar un conjunto de puntos, con cierto número de vehículos disponibles, bajo restricciones de capacidad o de tiempo, minimizando el recorrido total de los vehículos, sobre regiones con diferentes geometrías.

Como los MD se basan en la estrategia "agrupar primero, determinar rutas después", entonces constan de dos fases: zonificación y determinación de rutas.

La zonificación consiste en particionar los clientes en grupos; esto es, partir la región en zonas, cada una asignada a un vehículo. Aquí se determina la forma y la orientación de las zonas, de tal manera que sea minimizado el recorrido en línea total (recorrido de la fuente a la zona o de la zona a la fuente) de los vehículos. Para la zonificación se toman en

cuenta la rapidez del vehículo y la lejanía de la fuente, por medio del uso de contornos de recorrido. Existe un paquete de cómputo, llamado PLANI-ZONE, que lleva a cabo la zonificación de una región de forma irregular, basándose en los MD. Este paquete es descrito en el Apéndice B.

La determinación de rutas consiste en conocer el orden de recorrido de los puntos dentro de cada zona, minimizando el recorrido local. En cada zona existe un Problema Simple del Agente Viajero (PAV), porque se debe partir de un origen, recorrer una serie de puntos y regresar al mismo origen.

Como no se conoce la posición exacta de los puntos, el PAV es "estocástico", y entonces en vez de minimizar la longitud de la ruta, se minimiza el valor esperado de esta longitud. De aquí que, es formulada una estrategia subóptima de construcción de rutas, para todos los niveles de densidad de puntos. Para los MD, el recorrido de los puntos debe ser a través de una banda de ancho w.

Por lo tanto, los MD formulan un modelo analítico aproximado para el M-PRV estocástico (cuya naturaleza es altamente combinatoria), permitiendo una respuesta rápida y fácil a problemas donde los puntos varían continuamente y a problemas que involucran diferentes métricas.

Los MD pueden ser aplicados a problemas donde la rapidez de respuesta sea muy importante, como es el problema de distribución de mercancías no almacenables: fruta, periódico, servicios postales extraordinarios, etc.; también a problemas donde los datos de las posiciones de los puntos sean difíciles de obtener y de mantener actualizados, como es el problema de distribución en áreas metropolitanas, en el que las distancias o tiempos entre clientes son difíciles de obtener, y cualquier factor externo, tal como una manifestación o un accidente sobre alguna avenida, puede disminuir significativamente la validez de los datos.

En este capítulo se ha mostrado el papel de la distribución en el incremento del mercado del producto; también se ha visto que existen varios tipos de problemas de distribución y múltiples métodos clásicos para resolverlos, pero que tales métodos resultan costosos en logística; así que cuando el beneficio por ahorro en logística supere al costo adicional por no tener la solución óptima, es conveniente emplear un método MD, el cual produce fácilmente una buena solución usando pocos recursos tales como tiempo, datos, equipo de cómputo, personal y procesos matemáticos.

En el siguiente capítulo se analiza un MD para el problema de distribución o recolección, desarrollado por Newell y Daganzo (1986 a y b), para el cual no es necesario conocer las

posiciones exactas de los puntos, involucra una sola fuente y uno o varios vehículos que visitan puntos sobre una red compleja de calles en regiones de diferentes formas. El análisis se hace principalemnete para la métrica de Manhattan, que es la más indicada para zonas metropolitanas.

## CAPITULO 2

### DISEÑO DE RUTAS DE DISTRIBUCION O RECOLECCION PARA REGIONES DE DIFERENTES FORMAS

En este capítulo se hace un análisis de la metodología de Daganzo (1984 a y b) y de Newell y Daganzo (1986 a y b), para el diseño de rutas de distribución o recolección en regiones de diferentes formas; se indica cómo determinar una ruta dentro de una sola zona, y se muestra la manera de hacer la zonificación de la región, esto es, se indica cómo encontrar el tamaño, forma y orientación de las zonas dentro de regiones de diferentes formas.

Esta metodología para el diseño de rutas (zonificación y determinación de rutas) es de fácil uso y proporciona una solución rápida y buena, aunque no siempre óptima. Su objetivo es diseñar las rutas que minimicen (aproximadamente) el costo de distribución o recolección. Este costo puede estar en función de la distancia o del tiempo de recorrido.

La distribución o recolección se planea dividiendo el territorio en zonas que se asignan a cada vehículo, y resolviendo un Problema Estocástico del Agente Viajero para cada una de ellas. A fin de determinar el conjunto de rutas (subóptimas) se considera la forma de la región, así como el número de puntos a visitar, sin importar la localización exacta de éstos.

#### 2.1 DISEÑO DE RUTAS PARA UN SOLO VEHICULO

Si se tiene un solo vehículo, entonces existe una sola zona de distribución, y por ende una sola ruta. Así que, el método sólo se aplica en su segunda fase. En esta sección se estudia el desarrollo de una fórmula aproximada para la longitud esperada de la ruta, dentro de una zona de forma irregular.

##### 2.1.1 Recorrido en banda

Sea una región del plano con área compacta y convexa  $A$ , sobre la cual están distribuidos aleatoria y uniformemente  $N$  puntos, y donde las distancias están dadas por la métrica Euclídeana (M.E.) o por la de Manhattan (M.M.). En base a esto, Larson y Odoni (1981) determinan la longitud esperada de la ruta como:

$$L_n^* = k \sqrt{AN},$$

donde  $k$  es estimado como 0.765 para la M.E. y 0.97 para la M.M., sin embargo esta fórmula no relaciona la longitud de la ruta con la forma de la zona, ni define la manera de obtener la ruta óptima.

Para evitar este inconveniente, Daganzo C. (1984b) propone cubrir la zona con una banda de ancho  $w$ , dentro de la cual los puntos sean visitados en orden longitudinal y sin retroceso, como se muestra en la Fig. 2.1.

La longitud total esperada de una trayectoria que contiene  $N$  puntos es:

$$D = Nd_w, \quad (2.1)$$

donde  $d_w$  es la distancia esperada entre dos puntos consecutivos. Esta última distancia está dada por:

$$d_w = E_{XY} (X + Y), \quad \text{para la M.M., o} \quad (2.2a)$$

$$d_w = E_{XY} ( (X^2 + Y^2)^{\frac{1}{2}} ), \quad \text{para la M.E.;} \quad (2.2b)$$

donde  $X$  y  $Y$  representan la distancia aleatoria entre dos puntos consecutivos;  $X$  a través del ancho de la banda, y  $Y$  a través de lo largo de la banda.

Como  $X$  tiene la misma distribución que la distancia entre dos puntos aleatorios sobre el segmento de longitud  $w$ , entonces

$$\Pr \{ X > x \} = 1 - F_X(x) = [ 1 - (x/w) ]^2, \quad 0 \leq x \leq w,$$

de donde,

$$F_X(x) = x ( 2/w - x/w^2 ),$$

$$f_X(x) = (2/w) [ 1 - (x/w) ], \quad 0 \leq x \leq w,$$

$$y \quad E(X) = w/3. \quad (2.3)$$

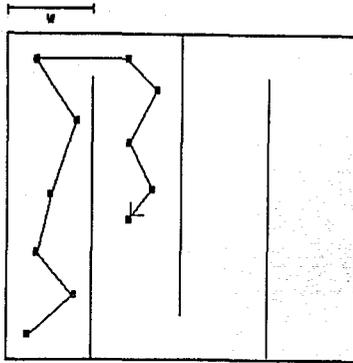
Por otro lado, dado que los puntos están distribuidos uniforme, independiente y aleatoriamente a lo largo de la banda, sus posiciones a través de lo largo de ésta, forman (localmente) un Proceso Poisson con media  $\delta w$ , donde  $\delta$  es la densidad de puntos por unidad de área. Entonces,

$$\Pr \{ Y > y \} = \exp[- \delta wy], \quad y \geq 0,$$

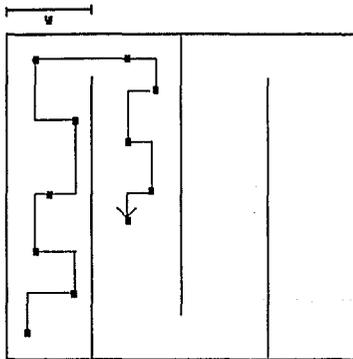
de donde,

$$F_Y(y) = 1 - \exp[- \delta wy],$$

$$f_Y(y) = \delta w \exp[- \delta wy], \quad y \geq 0,$$



a). Distancias Euclidianas



b). Distancias de Manhattan

FIGURA 2.1. Viajes unidireccionales en una banda de ancho  $w$ .

$$Y \quad E(Y) = (\delta w)^{-1}. \quad (2.4)$$

De las ecs. (2.2a), (2.3) y (2.4), se tiene:

$$dw = E(X) + E(Y) = w/3 + 1/(\delta w), \quad (2.5a)$$

para la M.M., y con la ec. (2.2b) se usa la siguiente aproximación:

$$dw \approx w/3 + [1/(\delta w)] \Omega(\delta w^2), \quad (2.5b)$$

para la M.E., con  $\Omega(x) = (2/x^2)[(1+x)\ln(1+x)-x]$ .

Esta aproximación se obtiene como sigue:

$$E((X^2+Y^2)^{\frac{1}{2}}) = E_X [E_{Y/X} (X^2+Y^2)^{\frac{1}{2}}] = E_X [E_Y (X^2+Y^2)^{\frac{1}{2}}],$$

donde,

$$E_Y ((X^2+Y^2)^{\frac{1}{2}}) = \int_0^{\infty} (X^2+Y^2)^{\frac{1}{2}} f_Y(y) dy$$

(Haciendo  $r = \delta w y$ .)

$$= \int_0^{\infty} X [1 + (r/(\delta w X))^2]^{\frac{1}{2}} e^{-r} dr$$

(Reemplazando la raíz cuadrada por  $\{ [r/(\delta w X)] + \exp[-r/(\delta w X)] \}$ , con 5% de diferencia.)

$$\approx \int_0^{\infty} X \left[ \frac{r}{\delta w X} + \exp\left(-\frac{r}{\delta w X}\right) \right] e^{-r} dr$$

$$= \frac{1}{\delta w} + \frac{\delta w X^2}{\delta w X + 1} = \frac{1}{\delta w} \left[ \delta w X + \frac{1}{\delta w X + 1} \right]$$

entonces,

$$E((X^2+Y^2)^{\frac{1}{2}}) \approx E_X \left\{ \frac{1}{\delta w} \left[ \delta w X + \frac{1}{\delta w X + 1} \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{\delta w} \left\{ \delta w E(X) + E \left[ \frac{1}{\delta w X + 1} \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{\delta w} \left\{ \frac{\delta w^2}{3} + \int_0^w \frac{f_x(x) dx}{(\delta wx+1)} \right\}$$

$$= \frac{1}{\delta w} \left\{ \frac{\delta w^2}{3} + \Omega(\delta w^2) \right\} = \frac{w}{3} + \frac{\Omega(\delta w^2)}{\delta w},$$

con,

$$\Omega(\delta w^2) = \int_0^w \frac{1}{\delta wx+1} f_x(x) dx = \int_0^w \frac{2}{w} \left[ 1 - \left( \frac{x}{w} \right) \right] \frac{dx}{\delta wx+1}$$

$$= \frac{2}{w} \left[ \frac{1}{\delta w} \ln(\delta w^2+1) - \frac{1}{w} \left\{ \frac{\ln(\delta w^2+1)}{\delta} - \frac{[(\delta w^2+1)\ln(\delta w^2+1) - \delta w^2]}{\delta^2 w^2} \right\} \right]$$

$$= \frac{2}{w} \left\{ \frac{(\delta w^2+1) \ln(\delta w^2+1)}{\delta^2 w^3} - \frac{1}{\delta w} \right\}$$

$$= \frac{2}{\delta w^2} \frac{(\delta w^2+1) \ln(\delta w^2+1) - \delta w^2}{\delta w^2}.$$

### 2.1.2 Longitud de la ruta

Considérese una tira de ancho aproximado  $w$ , cubriendo toda la zona. La tira puede cubrir la zona en diferentes formas. Si se ignoran las vueltas de la tira, entonces la distancia entre puntos consecutivos es  $d_w$ , y la longitud esperada de la ruta es dada por la ec. (2.1).

El ancho  $w$  debe ser seleccionado de tal forma que minimice  $d_w$ . Si  $w$  es muy pequeño,  $d_w$  será grande debido a que  $\delta w$  (densidad de puntos a través de la tira) es pequeña; y si  $w$  es muy grande, las desviaciones en zigzag a lo largo de la tira serán grandes. Minimizando las ecs. (2.5a) y (2.5b) se obtiene:

$$w^* = \sqrt{3/\delta}, \quad \text{para la M.M., y} \quad (2.6a)$$

$$w^* = \sqrt{2.95/\delta}, \quad \text{para la M.E.} \quad (2.6b)$$

De aquí que  $\delta w^{*2} \approx 3$ , lo que significa que en un cuadrado de lado  $w^*$  existen 3 puntos en promedio.

Si se toma una tira de ancho  $w^*$ , la distancia esperada entre puntos vecinos para la ruta resultante, se obtiene sustituyendo la ec.(2.6) en la (2.5). Entonces, para la M.M. y la M.E., respectivamente, resulta:

$$d_w^* = 2/(3\delta)^{1/2} = 1.15\delta^{-1/2}, \quad y \quad (2.7a)$$

$$d_w^* = (1/3)(1.72/\delta^{1/2}) + [\Omega(2.95) / (\delta^{1/2}(1.72))] = 0.90 \delta^{-1/2}, \quad (2.7b)$$

Las ecs. (2.7) son válidas si es posible construir una tira de ancho  $w$  que cubra la zona; pero si  $w^*$  es mayor que el ancho de la zona, debe emplearse un  $w < w^*$ , lo cual origina que  $d_w > d_w^*$ .

Considérese que la zona es rectangular con lados  $L$  y  $l_a$ ,  $l_a \leq L$ . Si  $w^* < (l_a/2)$ , entonces la ec. (2.7) es válida; en caso contrario, se aplica la ec. (2.5) con  $w = l_a/2$  (considerando  $\delta w^2 \approx 3$ ). Esto es,

$$d_w^* = \begin{cases} 1.15\delta^{-1/2} & \text{si } \delta l_a^2 \geq 12 \\ l_a/6 + 2/(\delta l_a) & \text{si } \delta l_a^2 < 12 \end{cases} \quad (2.8a)$$

$$\text{si } \delta l_a^2 < 12 \quad (2.8b)$$

para la M.M., y

$$d_w^* = \begin{cases} 0.90\delta^{-1/2} & \text{si } \delta l_a^2 \geq 12 \\ l_a/6 + [2/(\delta l_a)] \Omega(\delta l_a^2/4) & \text{si } \delta l_a^2 < 12 \end{cases} \quad (2.8c)$$

$$\text{si } \delta l_a^2 < 12 \quad (2.8d)$$

para la M.E., (cuando la tira tiene las coordenadas de la red).

El valor de  $d_w^*$  cuando  $\delta l_a^2=12$  para la ec. (2.8b) es igual al valor de  $d_w^*$  para la ec. (2.8a), como es posible observar a continuación:

$$d_w^* = \frac{l_a}{6} + \frac{2}{\delta l_a} = \left\{ \frac{\delta^{1/2} l_a}{6} + \frac{2}{\delta^{1/2} l_a} \right\} \delta^{-1/2} = \Phi_1(\delta l_a^2) \delta^{-1/2} \\ = \{ (\sqrt{12}/6) + (2/\sqrt{12}) \} \delta^{-1/2} = 1.15 \delta^{-1/2}. \quad (2.8e)$$

De igual forma,  $d_w^*$  con  $\delta l_a^2=12$  para la ec. (2.8d) es igual a  $d_w^*$  para la ec. (2.8c):

$$d_w^* = \frac{l_a}{6} + \frac{2}{\delta l_a} \Omega\left(\frac{\delta l_a^2}{4}\right) = \left\{ \frac{\delta^{1/2} l_a}{6} + \frac{2}{\delta^{1/2} l_a} \Omega\left(\frac{\delta l_a^2}{4}\right) \right\} \delta^{-1/2} \quad (2.8f)$$

$$= \Phi_2(\delta l_a^2) \delta^{-1/2} = \{(\sqrt{12}/6) + (2/\sqrt{12}) \Omega(3)\} \delta^{-1/2} = 0.90 \delta^{-1/2}.$$

Esto significa que las ecs. (2.8b) y (2.8d) alcanzan un mínimo en  $\delta l_a^2 = 12$ . Por lo tanto, la longitud total de la ruta es:

$$D \approx d_w^* N = \Phi(\delta l_a^2) \delta^{-1/2} N = \Phi(\delta l_a^2) (N/A)^{-1/2} N = \Phi(\delta l_a^2) \sqrt{AN}, \quad (2.9)$$

donde, para la M.M. y la M.E., respectivamente:

$$\Phi(\delta l_a^2) = \begin{cases} 1.15 & \text{y} & 0.90 & \text{si } \delta l_a^2 \geq 12, \\ \Phi_1(\delta l_a^2) & \text{y} & \Phi_2(\delta l_a^2) & \text{si } \delta l_a^2 < 12. \end{cases}$$

Esta solución puede ser tomada como aproximación a la solución óptima, o como solución inicial para la construcción de algoritmos de rutas más complejos. La estrategia aquí descrita puede ser tomada como base para la solución del problema de rutas con restricciones adicionales.

## 2.2 DISEÑO DE RUTAS PARA MÚLTIPLES VEHICULOS

La estrategia de la banda se usa también para el problema de rutas con múltiples vehículos, donde se incluye la restricción sobre la capacidad de éstos, y se asume que cada vehículo parte de un sólo depósito y regresa al mismo. El problema puede ser: distribuir desde una sola fuente (depósito, bodega, terminal) a muchos destinos; o bien, recolectar en varios orígenes y llevar a un solo depósito. El objetivo al resolver el problema es encontrar las rutas que minimicen la longitud total recorrida por todos los vehículos.

### 2.2.1 Recorrido Local

Supóngase que:

- Se cuenta con una flota de vehículos idénticos con capacidad individual de carga de  $C$  ( $C \gg 1$ ) artículos (unidades de volumen o de peso) por día; se entiende que un artículo se entregará en cada punto de distribución o se recojerá en cada punto de recolección, según sea el caso.

- Existen muchas rutas ( $N \gg C$ ).

- Los  $N$  puntos están distribuidos en forma (aproximadamente) aleatoria sobre la región (con densidad  $\delta$ ), la cual es una red muy cerrada de calles (el espacio entre éstas es pequeño en comparación con  $\delta^{-1/2}$ ).

- Existen otras vías más rápidas, pero el espacio entre éstas es grande en comparación con las dimensiones de una sola zona de distribución. Estas vías pueden ser usadas para llegar a las zonas, pero se usan muy poco para hacer el recorrido local, el cual se ejecuta básicamente sobre la red cerrada.

Considérese que el costo está en función de la distancia o el tiempo de recorrido por cada vehículo. Este costo se cuenta desde que el vehículo sale de la fuente hasta que regresa a la misma.

La métrica Euclideana casi no se empleará en el resto de este capítulo porque no es muy realista en la situación que es requerida (para el área metropolitana), además de que no es muy fácil de analizar (como lo pueden confirmar los cálculos de la sección 2.1).

La estrategia para distribuir los artículos a los  $N$  puntos de una región, incluye el particionarla en subregiones o zonas de distribución, cada una con aproximadamente  $C$  puntos.

Cada vehículo realiza dos tipos de recorrido para distribuir los artículos, estos son: recorrido local y recorrido en línea. El recorrido local es aquel que se hace dentro de una zona de distribución para visitar todos los puntos en la misma; mientras que el recorrido en línea es aquel que se efectúa, sin paradas (es decir, sin distribuir ni recolectar), desde la fuente a la zona de distribución, y de ésta a la fuente. El recorrido en línea es de cero para aquellas zonas que tocan la fuente.

A fin de minimizar la distancia en línea, es conveniente: comenzar y terminar el recorrido local en el punto más cercano a la fuente (la distancia recorrida localmente es independiente del punto de inicio y fin del recorrido); y determinar la forma óptima de la zona de tal manera que esta última quede dirigida hacia la fuente, tanto como sea posible.

Newell y Daganzo (1986a) proponen que las zonas tengan forma aproximadamente rectangular y estén dirigidas hacia la fuente. Si es así, pueden ocurrir dos casos: que la zona contenga siempre exactamente  $C$  puntos, lo cual podría hacer que el tamaño de los rectángulos varíe un poco día a día; o que el tamaño de cada rectángulo permanezca fijo con esperanza de  $C$  puntos, suponiendo que el vehículo tenga capacidad flexible para repartir a todos los puntos del rectángulo. De una u otra manera, serían seleccionadas una forma y una orientación fijas de los rectángulos, tal que minimicen la esperanza del tiempo total de distribución (suponiendo que los puntos están distribuidos independiente y uniformemente en cada rectángulo).

Para una red de anillo radial, las zonas de distribución están dentro de anillos concéntricos (ver Fig. 2.2), y tienen forma proximadamente rectangular con ancho  $2w$  y largo  $L$  (ver Fig. 2.3); excepto aquellas zonas cerca del origen, que tienen forma de cuña. Así, el número de puntos en el rectángulo, si el vehículo va lleno, es:

$$2wL\delta \approx C. \quad (2.10)$$

Para estimar la longitud de una ruta en función de  $w$ , Newell y Daganzo (1986a) proponen hacer el recorrido como lo muestra la Figura 2.3. En una red de anillo radial, las zonas quedan en la dirección radial; esto hace que la distancia total recorrida pueda ser separada en distancia longitudinal (recorrido en dirección radial), más distancia trasversa (recorrido sobre algún anillo). Para  $C \gg 1$ , se consideran nulas: la distancia extra recorrida para dar vuelta al final del rectángulo, y la distancia que se ahorra por no llegar al final de la zona, sino sólo al punto más alejado dentro de la misma. El recorrido trasverso promedio por punto es  $w/3$  (como en la sección 2.1), y el recorrido longitudinal total dentro del rectángulo es  $2L$ , o  $2L/C$  por punto.

Si se reinterpreta el recorrido en línea como la distancia desde la fuente al centro de la zona, en vez de al punto más cercano a la fuente; y la distancia local recorrida, como el recorrido adicional necesario para visitar todos los puntos de la zona; entonces, la distancia total recorrida en la región depende de  $w$ , pero sólo a través de la distancia local. La distancia total en línea es ahora aproximadamente dos veces la suma de las distancias de todos los puntos a la fuente, sobre  $C$ . Para cada zona que toca la fuente, la distancia en línea es aproximadamente su longitud (de la zona).

El recorrido longitudinal local necesario para atravesar la zona, es entonces sólo la distancia del centro al fin de la zona, de ida y de vuelta; tal recorrido, por punto, se obtiene de (2.10):

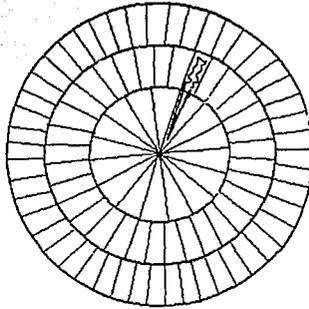


FIGURA 2.2. Posible zonificación para una red de anillo radial.

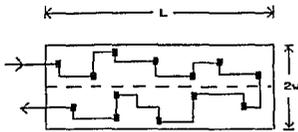


FIGURA 2.3. Una ruta de distribución dentro de una zona.

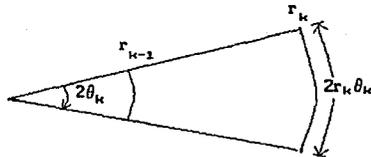


FIGURA 2.4. Una zona en forma de cuña.

$$L / C \approx 1 / (2w\delta).$$

Por lo tanto, la distancia promedio local recorrida por punto dentro del rectángulo, es

$$d_{lo} = E(X) + E(Y) = w/3 + 1/(2w\delta), \quad (2.11)$$

ya que la otra mitad del recorrido longitudinal se integró al recorrido en línea. Minimizando la ec. (2.11), se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta w^{*2} &= 3/2 \\ \implies w^* &= \sqrt{3/(2\delta)}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

La distancia local óptima por punto, que se obtiene sustituyendo  $w^*$  en la ec. (2.11), y que es independiente a la distancia en línea, es

$$d_{lo}^* = \sqrt{2/(3\delta)}. \quad (2.13)$$

El recorrido en línea promedio por punto es mucho mayor que el recorrido local promedio por punto, cuando la región es grande en relación a  $L^*$  ( $L^* = C/(2w^*\delta) = C / \sqrt{6\delta}$ ).

Si  $C$  no es grande, pueden considerarse importantes algunos efectos que no se han tomados en cuenta hasta ahora. Si existe una trayectoria directa desde la fuente al primer punto y desde el último punto a la fuente, entonces sólo hay  $C-2$  desplazamientos transversos con distancia promedio  $w/3$ , pero también existe un desplazamiento para dar vuelta al final de la zona, cuyo promedio es  $w$ . Entonces el desplazamiento transverso total en la zona es  $(C-2)w/3 + w = (C+1)w/3$  (el desplazamiento transverso promedio por punto es:  $[C+1]w/(3C)$ ). Dado que no es necesario llegar al final de la zona, sino al punto más lejano, la distancia longitudinal promedio disminuye a:  $L/(C+1) = C / [2w\delta(C+1)]$ . Por lo tanto, la distancia local promedio por punto, bajo los efectos antes mencionados, se transforma en:

$$d_{lo} = \frac{w(C+1)}{3C} + \frac{C}{2w\delta(C+1)}.$$

Así que, el ancho  $w$  que proporciona el valor óptimo (mínimo) a  $d_{lo}$ , es

$$w^* = \sqrt{3/(2\delta)} [1 / (1 + 1/C)].$$

Sin embargo, estas correcciones no tienen influencia en la distancia mínima

$$d_{lo}^* = \sqrt{2/(3\delta)}.$$

### 2.2.2 Mejoramiento de la Distribución Local

Una vez constituidas las rutas, es posible reducir su longitud total, usando algunas estrategias de mejoramiento que Newell y Daganzo (1986a) han clasificado en tres tipos:

- Permitir a una ruta cruzar el límite de la tira para visitar a uno, dos o más puntos en la tira adyacente. El ahorro para esta estrategia puede ser de 4% (aproximadamente) en el desplazamiento combinado transverso y longitudinal, por punto.
- Permitir el retroceso longitudinal (en vez de visitar los puntos en orden creciente) a lo largo de la tira para visitar otros puntos que, formando un grupo de más de dos puntos, estén a poca distancia longitudinal. La reducción en la longitud total de la ruta puede ser de 4% aproximadamente, usando esta estrategia.
- Cambiar el patrón completo de recorrido de la región. Si la misma zona es recorrida de dos formas diferentes, es como si se recorriera tomando dos conjuntos diferentes de puntos aleatorios. La Varianza del desplazamiento transverso por punto es:

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \int_0^w x^2 \left[ \frac{2}{w} (1 - (x/w)) \right] dx - (w/3)^2 \\ &= (w^2/6) - (w^2/9) = w^2/18,\end{aligned}$$

el Coeficiente de Variación es:

$$\text{CV}(X) = \sigma_x / E(X) = (w/\sqrt{18}) / (w/3) = 2^{-1/2},$$

y el Coeficiente de Variación de la suma de  $n$  desplazamientos transversos independientes, es:

$$\text{CV}(\Sigma X) = \sqrt{[\Sigma \text{Var}(X)]} / [E(\Sigma X)] = \sqrt{[n w^2/18]} / (nw/3) = (2n)^{-1/2};$$

este último coeficiente es comparable a la diferencia porcentual en el recorrido transverso para visitar  $n$  puntos de dos formas completamente diferentes. Por ejemplo, para  $n=50$  esa diferencia sería del 10%.

El empleo de cualquiera de estas estrategias sólo afecta a la distancia local, así que el mejoramiento porcentual alcanzado en la distancia total, al aplicar tales estrategias, es demasiado pequeño.

### 2.2.3 Rutas sobre una Red de Anillo Radial

Considérese una red de anillo radial, es decir, una red muy densa de calles dentro de una región circular, sobre la que se forman anillos concéntricos. En esta sección se determinarán las zonas de distribución de tal manera que minimicen la distancia total recorrida sobre esta red, para una distribución aleatoria de puntos. Se asume que los puntos tienen densidad  $\delta(r)$  (en coordenadas polares  $r$  y  $\theta$ ), la cual varía con  $r$  y es independiente de  $\theta$ . Si el radio de la región es  $R$  entonces, como en la Figura 2.2, las zonas forman anillos concéntricos con radios  $r_1, r_2, \dots, R$ . El problema es determinar los valores óptimos de  $r_j$  y el número de anillos.

Si una zona tiene forma de cuña, como en la Fig. 2.4, con ángulo  $2\theta_k$  al origen, y tiene límites radiales en  $r_{k-1}$  y  $r_k$  para el anillo  $k$ ,  $k=1,2,\dots$  con  $r_0=0$ , la esperanza del número total de puntos en el anillo  $k$  es:

$$\int_{r_{k-1}}^{r_k} (2r\pi)\delta(r) dr = 2\pi \int_{r_{k-1}}^{r_k} \delta(r) r dr.$$

Dividiendo por  $C$  (número de artículos que lleva cada vehículo), se obtiene el número aproximado de zonas,  $N_k$ , en el anillo  $k$ :

$$N_k = \pi/\theta_k = \frac{2\pi}{C} \int_{r_{k-1}}^{r_k} \delta(r) r dr, \quad (2.14)$$

con  $r_k$  tal que el número de puntos en el anillo sea múltiplo de  $C$ , o que  $N_k$  sea entero<sup>(\*)</sup>. La función objetivo es insensible a pequeños cambios en  $r_k$  y  $N_k$ , siempre y cuando estos parámetros estén cerca de sus valores óptimos; así que se puede ajustar  $N_k$  a su mejor entero adyacente, sin gran efecto en la función objetivo.

Si se olvida el ahorro por no llegar al final de la zona, sino al punto más alejado, y no se consideran los efectos de corrección de la sección 2.2.1, la distancia recorrida para visitar algún punto en un radio  $r$  puede expresarse como:

---

(\*)  $N_k$  deberá ser suficientemente grande para poder tratar a  $r_k$  como variable continua.

$$\frac{2r}{c} + \frac{2(r_k - r)}{c} = \begin{array}{l} \text{distancia} \\ \text{radial} \\ \text{por punto} \end{array} + \begin{array}{l} \text{distancia extra recorrida} \\ \text{porque la zona tiene} \\ \text{largo diferente de 0.} \end{array}$$

La distancia radial total recorrida en todas las zonas es:

$$2\pi \int_0^{\infty} \frac{2r}{c} \delta(r) r dr + \sum_k 2\pi \int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{2(r_k - r)}{c} \delta(r) r dr =$$

$$\frac{4\pi}{c} \int_0^{\infty} \delta(r) r^2 dr + \sum_k \frac{4\pi}{c} \int_{r_{k-1}}^{r_k} \delta(r) (r_k - r) r dr,$$

que es la distancia total en línea, más la distancia longitudinal (radial) extra recorrida en el interior de todas las zonas en todos los anillos (k).

El desplazamiento transversal promedio desde un punto en el radio r y el punto siguiente (o anterior), como en la sección 2.2.1, es  $w/3 = (\text{arco}/2)(1/3) = r\theta_k/3$ . La distancia transversal total es aproximadamente

$$\sum_k 2\pi \int_{r_{k-1}}^{r_k} (r\theta_k/3) \delta(r) r dr = \sum_k 2\pi \int_{r_{k-1}}^{r_k} \delta(r) (\theta_k/3) r^2 dr.$$

Y la distancia total recorrida para visitar todos los puntos, suma de la distancia radial total más la distancia longitudinal total, es

$$D = \frac{4\pi}{c} \int_0^{\infty} \delta(r) r^2 dr + \sum_k 2\pi \int_{r_{k-1}}^{r_k} \delta(r) \left\{ \frac{2(r_k - r)}{c} + \frac{\theta_k r}{3} \right\} r dr \quad (2.15)$$

con  $r_{k-1}$ ,  $r_k$  y  $\theta_k$  relacionados por la ec. (2.14).

Para simplificar (2.15) se asume que  $\delta(r)$  es aproximadamente constante sobre cada intervalo  $r_{k-1}$  a  $r_k$ , para algún radio finito máximo R. Entonces, es posible aproximar  $\delta(r)$  a  $\delta(r_k)$  con  $r_k^* = (r_k + r_{k-1})/2$  para el intervalo k. De (2.14) se tiene:

$$e_k = C / \left[ 2 \int_{r_{k-1}}^{r_k} \delta(r) r dr \right], \quad \text{que en forma aproximada es:}$$

$$e_k \approx C / \left[ 2 \int_{r_{k-1}}^{r_k} \delta(r_k^*) r dr \right] = \frac{C}{\delta(r_k^*) (r_k^2 - r_{k-1}^2)},$$

y de (2.15) se tiene:

$$\begin{aligned} D &\approx \frac{4\pi}{C} \int_0^{\infty} \delta(r) r^2 dr + \frac{2\pi}{C} \sum_{k=1}^K \left\{ \delta(r_k^*) \int_{r_{k-1}}^{r_k} 2(r_k - r) r dr \right. \\ &\quad \left. + \int_{r_{k-1}}^{r_k} C \delta(r_k^*) \frac{C}{\delta(r_k^*) (r_k^2 - r_{k-1}^2)} \frac{r^2}{3} dr \right\} \\ &= \frac{4\pi}{C} \int_0^R \delta(r) r^2 dr + \frac{2\pi}{C} \sum_{k=1}^K \left\{ \delta(r_k^*) \frac{(r_k^3 - 3r_k r_{k-1}^2 + 2r_{k-1}^3)}{3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{C^2}{3(r_k^2 - r_{k-1}^2)} \frac{(r_k^3 - r_{k-1}^3)}{3} \right\} \\ &= \frac{4\pi}{C} \int_0^R \delta(r) r^2 dr + \frac{2\pi}{C} \sum_{k=1}^K \left\{ \delta(r_k^*) (r_k - r_{k-1})^2 \frac{(r_k + 2r_{k-1})}{3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{C^2 (r_k^2 + r_k r_{k-1} + r_{k-1}^2)}{9(r_k + r_{k-1})} \right\}, \quad (2.16) \end{aligned}$$

con  $r_0 = 0$ ,  $r_K = R$  y  $K$  aún no determinado.

Si R es suficientemente grande tal que  $K \gg 1$ , las zonas con forma de cuña para  $k > 2$  o 3 deben ser casi rectangulares, de tal manera que la longitud radial óptima en las zonas,  $(r_k - r_{k-1})$ , debe ser aproximadamente igual a la L óptima de la sección 2.2.1 ( $L = C / (2w\delta)$ ),

$$L = C / [2w^* \delta(r_k^*)] = C / [6 \delta(r_k^*)]^{1/2}.$$

Este resultado se obtiene también de la ec. (2.16). Si se olvidan las diferencias entre  $r_k$ ,  $r_{k-1}$ , y  $r_k^*$  excepto en  $(r_k - r_{k-1})^2$ , se puede aproximar el segundo término a:

$$\frac{2\pi}{C} \sum_{k=1}^K \left\{ \delta(r_k^*) (r_k - r_{k-1}) + \frac{C^2}{6(r_k - r_{k-1})} \right\} (r_k - r_{k-1}) r_k^* \quad (2.17)$$

Para  $K \gg 1$  es posible interpretar la suma como una aproximación a la integral

$$\sum_{k=1}^K \{ \cdot \} (r_k - r_{k-1}) r_k^* \approx \int_0^R \{ \cdot \} r dr.$$

El valor  $\{ \cdot \}$  puede interpretarse como la distancia local promedio recorrida por punto. Derivando  $\{ \cdot \}$  con respecto a la longitud radial,  $(r_k - r_{k-1})$ , e igualando a cero, se obtiene que  $\{ \cdot \}$  toma su valor mínimo cuando:

$$(r_k - r_{k-1}) \approx C / [6 \delta(r_k^*)]^{1/2} \quad (2.18)$$

para  $K \gg 1$  y  $k \geq 2$  o 3. Por lo tanto,  $(r_k - r_{k-1}) = L$ .

Como  $\delta(r)$  puede variar suavemente para algún radio finito R (aunque es considerada constante sobre cada intervalo), los anillos se deberán empezar a construir desde R hacia adentro ( $r_k, r_{k-1}, \dots$ ). Este procedimiento es bueno porque la ec. (2.18) es más aproximada para los valores más grandes de k, y porque los anillos más grandes tienen más zonas de distribución, y por ende contribuyen más a D. Aplicando la ec. (2.18) secuencialmente para evaluar  $r_{k-1}, r_{k-2}, \dots, r_1$ , se obtiene el radio menor  $r_1$  ( $> 0$ ), que no necesariamente está cerca de su valor óptimo. Si K es grande, el primer anillo contribuirá muy poco a D, así que no es muy importante que  $r_1$  sea incorrecto. Para obtener un valor mejor para  $r_1$  es necesario reajustar los  $r_k$ . Como D es insensible a pequeñas desviaciones de  $(r_k - r_{k-1})$  de sus valores óptimos, para  $k \geq 2$ , entonces conviene distribuir el cambio en  $r_1$  sobre varios anillos con  $k \geq 2$ .

Si  $K=2$ , la aproximación (2.17) no es muy buena para el primer anillo. Así que, con la ec. (2.16) se obtiene  $D$  para  $K=1$  y  $K=2$ ,  $D_1$  y  $D_2$ , si  $\delta(r)=\delta$  es constante:

$$D_1 \approx \frac{4\pi}{C} \int_0^{z_1 R} \delta r^2 dr + \frac{2\pi}{C} \left\{ \frac{\delta (z_1 R)^2 (z_1 R)}{3} + \frac{C^2 (z_1 R)^2}{9 z_1 R} \right\}$$

$$= \frac{4\pi \delta R^3}{3C} + \frac{2\pi}{C} \left[ \frac{\delta R^3}{3} + \frac{C^2 R}{9} \right] = \frac{\pi \delta R^3}{3C} \left[ 6 + \frac{2C^2}{3\delta R^2} \right],$$

$$D_2 \approx \frac{4\pi}{C} \int_0^{r_2} \delta r^2 dr + \frac{2\pi}{C} \left\{ \frac{\delta r_1^3}{3} + \frac{C^2 r_1}{9} + \frac{\delta (r_2 - r_1)^2 (r_2 + 2r_1)}{3} \right.$$

$$\left. + \frac{C^2 (r_2^2 + r_2 r_1 + r_1^2)}{9 (r_2 + r_1)} \right\}$$

$$= \frac{4\pi}{3C} \delta R^3 + \frac{2\pi}{3C} \delta R^3 \left\{ z_1^3 + \frac{C^2 z_1}{3R^2 \delta} + (1 - z_1)^2 (1 + 2z_1) + \frac{C^2 (1 + z_1 + z_1^2)}{3\delta R^2 (1 + z_1)} \right\}$$

$$= \frac{\pi \delta R^3}{3} \left[ 6 - 6z_1^2 (1 - z_1) + \frac{2C^2 (1 + 2z_1 + 2z_1^2)}{3R^2 \delta (1 + z_1)} \right],$$

donde  $z_1 = r_1/R$  ( $0 < z_1 < 1$ ) determina el límite del primer anillo para  $K=2$ . La diferencia entre  $D_1$  y  $D_2$  es:

$$D_2 - D_1 = \frac{\pi \delta R^3}{3C} \left[ -6z_1^2 (1 - z_1) + \frac{2C^2}{3R^2 \delta} \frac{z_1 (1 + 2z_1)}{(1 + z_1)} \right] \quad (2.19)$$

El primer término indica la diferencia en el recorrido transversal y el segundo indica la diferencia en el recorrido longitudinal. Si  $z_1 = 0$  entonces  $D_2 - D_1 = 0$  (porque  $r_1 = 0$  con  $K=2$  es equivalente a  $K=1$ ). Si  $z_1$  fuera suficientemente pequeño, se cumpliría que  $D_2 - D_1 > 0$  (ya que el primer término de (2.19) sería proporcional a  $z_1^2$  y el segundo término a  $z_1$ ). Entonces no convendría tener un primer anillo arbitrariamente pequeño.

La Figura 2.5 muestra las gráficas de  $6z_1^2(1-z_1)$  y  $z_1$  en función de  $u = z_1(1+2z_1)/(1+z_1)$ . Estas gráficas fueron construidas considerándolas funciones de  $z_1$ , pero tomando a  $u$  como la variable independiente. Esto fue hecho así porque es fácil dibujar  $[2C^2/(3R^2\delta)]u$ , para cualquier  $u$ .

Si la línea de pendiente  $[2C^2/(3R^2\delta)]$  es menor que  $6z_1^2(1-z_1)$  para algún  $z_1$ , entonces conviene tener un primer anillo con  $z_1$ , ya que  $D_2-D_1 < 0$ .

Una línea que parte del origen es tangente a la curva  $6z_1^2(1-z_1)$  cuando su pendiente, pendiente crítica, es 1.13; lo que se muestra con la línea de guiones. Entonces  $[2C^2/(3R^2\delta)] \approx 1.13$ , de lo cual

$$R_c \approx [2C^2 / (3\delta(1.13))]^{1/2} = C(1.88) / (6\delta)^{1/2},$$

donde  $R_c$  es el  $R$  crítico. A esta pendiente corresponden también los valores de los parámetros críticos siguientes:  $u_c \approx 0.6$ ,  $z_c \approx 0.46$  y  $r_c \approx R_c z_c = C(0.86) / (6\delta)^{1/2}$ . Cuando  $z_1 = z_c$ ,  $D_2-D_1=0$ .

Si  $R < R_c$ , no se usa un segundo anillo.

Si  $R > R_c$ , existe una línea  $[2C^2/(3R^2\delta)]u$  (por ejemplo, la línea de puntos) con pendiente menor que la línea tangente, y un rango de valores de  $u$  tales que  $D_2-D_1 < 0$ . Debido a que  $-(D_2 - D_1)$  es proporcional a la distancia vertical entre  $6z_1^2(1-z_1)$  y la línea recta, el punto donde esta distancia es mayor (el punto donde una línea paralela a la línea de puntos es tangente a  $6z_1^2(1-z_1)$ ) indica el valor de la  $u$  o la  $z_1$  óptimas. De aquí que, el valor de la  $z_1$  óptima depende de la pendiente,  $[2C^2/(3R^2\delta)]$ , que tenga la línea recta; esto es, la  $z_1$  óptima está en función de  $R$ . Por lo tanto, nunca habrá un óptimo  $z_1 < z_c$ , ya que si así fuera,  $D_2-D_1 > 0$ ; tampoco habrá un primer anillo de radio  $r_1 < r_c$ , para  $K = 2$ , y el  $r_1$  óptimo deberá estar entre  $r_c$  y  $R_c$ , es decir

$$0.86 < r_1(6\delta)^{1/2} / C < 1.88. \quad (2.20)$$

Si  $r_1$  fuera mayor que el límite superior, se renombraría a  $r_1$  como  $r_2$  y se insertaría otro anillo  $r_1 > 0$ .

Para obtener el valor de  $z_1$  en forma más exacta, es mejor comparar las derivadas de los dos términos de (2.19). Entonces la  $z_1$  óptima debe cumplir:

$$6z_1(2-3z_1) = \frac{2C^2}{3R^2\delta} \frac{(2z_1^2 + 4z_1 + 1)}{(1+z_1)^2}$$

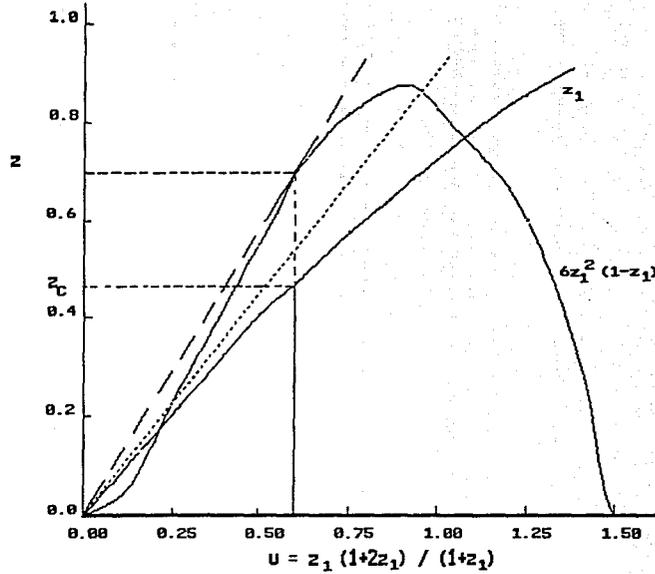


FIGURA 2.5. Representación gráfica de (2.19).

$$\implies \frac{6\delta}{C^2} \frac{3R^2 z_1}{2} \frac{(2-3z_1)(1+z_1)^2}{(2z_1^2+4z_1+1)} = 1,$$

(Sustituyendo  $z_1$  por  $r_1/R$ .)

$$\implies \frac{6\delta}{C^2} \frac{3}{2} \frac{(2r_1^3 R^3 + r_1^2 R^2 - 4r_1^3 R - 3r_1^4)}{(2r_1^2 + 4r_1 R + R^2)} = 1,$$

(Sustituyendo  $r_1$  por  $Cr_1'/(6\delta)^{1/2}$ ,  $R(6\delta)^{1/2}/C$  por  $R'$ , y simplificando.)

$$\implies \frac{3(2r_1'^3 R'^3 + r_1'^2 R'^2 - 4r_1'^3 R' - 3r_1'^4)}{2(2r_1'^2 + 4r_1' R' + R'^2)} = 1$$

$$\implies 9r_1'^4 + 12R'r_1'^3 + (4-3R'^2)r_1'^2 + 2R'(4-3R'^2)r_1' + 2R'^2 = 0.$$

Esta última ecuación proporciona los valores de  $r_1'$  en función de  $R'$ . La gráfica de los valores óptimos de  $r_1 = z_1 R$ , en unidades de  $C/(6\delta)^{1/2}$ , y de los valores de  $r_2 - r_1$ , como una función de  $r_2$  (o  $R$ ) se muestran en la fig. 2.6. Aunque los cálculos fueron hechos para  $K = 2$  ( $r_2 = R$ ), son válidos también para  $K > 2$  con  $r_2 =$  radio del segundo de más de dos anillos. Las curvas fueron graficadas sólo para  $r_2(6\delta)^{1/2}/C$  entre 1.88 y 3.1, ya que en este rango  $r_1$  satisface la ec. (2.20). El valor de  $(r_2 - r_1)(6\delta)^{1/2}/C$  va de 1.02 a 1.22. Como la pendiente de la curva para  $r_1$  es aproximadamente 4 veces que la de  $(r_2 - r_1)$ , significa que la mayor parte (4/5) de un cambio en  $r_2$  (o  $R$ ) la toma  $r_1$ .

#### 2.2.4 Orientación de las Zonas para Diferentes Métricas

La red de anillo radial analizada en la sección anterior es, por supuesto, completamente artificial. Fue usada porque proporciona fórmulas mucho más simples que con cualquier otra geometría. En esta sección y en la 2.2.5 se analizarán algunas geometrías viales más realistas.

Considérese un sistema vial formado por:

- varias redes compuestas por calles locales, cada red con forma aproximadamente rectangular y de dimensión aproximada a la de cualquier zona de distribución; y posiblemente también,

- una red más abierta y superimpuesta a las primeras redes, de vías de alta velocidad.

Se asume que el espacio entre calles locales es pequeño comparado con  $\delta^h$ , lo cual permite idealizar esta red por una métrica continua; y que el espacio entre vías rápidas es grande comparado con  $\delta^h$ . Esta idealización aún no es muy buena, pero permite ilustrar nuevas características y estrategias.

El primer paso para determinar las zonas y rutas óptimas que minimicen el tiempo o costo de recorrido total, sin importar la geometría vial en cuestión, es construir una familia de contornos equi-tiempo de recorrido desde la fuente, a través de las vías más rápidas. Esto permitirá mostrar los efectos de las avenidas rápidas y la dirección de recorrido local preferida para llegar a cualquier punto desde la fuente. En la sección 2.2.3, caso de la red de anillo radial, los contornos eran círculos y la dirección local preferida era la dirección radial, porque todas las vías tenían la misma velocidad. Para una geometría vial general, con dirección de recorrido oblicua a las líneas de contorno, la orientación de las zonas no es obvia.

La diferencia entre esta sección y la anterior es que ahora el tiempo de recorrido se toma a través de los caminos más rápidos; así, el tiempo de recorrido a cada punto puede ser evaluado directamente de las líneas de contorno equi-tiempo de recorrido.

Para determinar la dirección que deben tener las zonas, es necesario evaluar el tiempo esperado de recorrido para visitar  $C$  puntos en un rectángulo, cuyos ejes no tienen las mismas direcciones de la red, sino que están a algún ángulo  $\theta$  de estas últimas (ver Fig. 2.7). Para esta evaluación se emplea la estrategia de visitar los puntos longitudinalmente a través de la banda: en forma creciente en la primera etapa, y decreciente en la segunda etapa (como en las secciones anteriores, cuando  $\theta = 0$ ). La Fig. 2.7 muestra las trayectorias más cortas desde el punto  $(x_1, y_1)$  a un punto  $(x_2, y_2)$  con  $y_2 > y_1$ . Para puntos en las regiones (1) y (3) hay retroceso, esto es, "y" algunas veces decrecerá en parte de la ruta.

Si los puntos de distribución definen un proceso Poisson en el espacio bidimensional con densidad  $\delta$ , un punto aleatorio  $(x_1, y_1)$  en el rectángulo tendrá una distribución uniforme para  $x_1$  en  $(0, w)$ . El siguiente punto  $(x_2, y_2)$  también tendrá una distribución uniforme para  $x_2$ , pero una distribución exponencial para  $(y_2 - y_1)$ , con media  $(w\delta)^{-1}$ . La esperanza de la distancia entre  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ , en base a las distribuciones de  $x_1$ ,  $x_2$  y  $y_2 - y_1$ , según Newell y Daganzo (1986b), es:

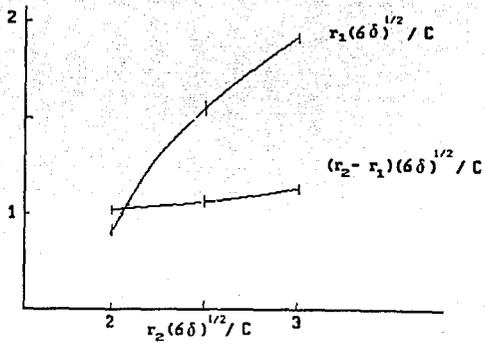


FIGURA 2.6. Radio óptimo  $r_1$  para varios valores de  $r_2$ .

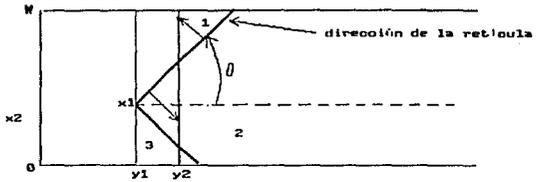


FIGURA 2.7. Zona orientada a un ángulo  $\theta$  de las direcciones de la retícula.

$$d = \frac{w}{3} (\operatorname{sen}\theta + \operatorname{cos}\theta) + \frac{2w\operatorname{cos}\theta}{(w^2\delta)^3 \tan^2\theta} [w^2\delta \tan\theta - 1 + \exp(-w^2\delta \tan\theta)]$$

$$+ \frac{2w\operatorname{sen}\theta}{(w^2\delta)^3 \operatorname{ctg}^2\theta} [w^2\delta \operatorname{ctg}\theta - 1 + \exp(-w^2\delta \operatorname{ctg}\theta)], \quad (2.21)$$

para  $\pi/2 > \theta > 0$ .

La Fig. 2.8 muestra algunas gráficas de  $d(3\delta)^{1/3}$  contra  $\theta$ , para varios valores de  $w^2\delta/3$  y  $0 < \theta < \pi/4$ . Para cualquier  $w$ , se obtiene un mínimo en  $\theta = 0$  y un máximo en  $\theta = \pi/4$  (porque  $d$  es simétrica cuando cambia de  $\theta$  a  $-\theta$  o de  $\pi/4 - \theta$  a  $\pi/4 + \theta$ ).

Para la curva con  $(w^2\delta/3) = 1$ , el valor de  $d$  para  $\theta = \pi/4$  es sólo 3% (aproximadamente) mayor que para  $\theta = 0$  (este último es el caso descrito en la sección 2.1 para la ruta del PAV). Podría esperarse que esta diferencia en  $d$  (del 3%) fuera mucho mayor, debido al retroceso realizado al recorrer una secuencia de puntos cuando  $\theta = \pi/4$ , tal como se muestra en la Fig. 2.9 a); sin embargo, con  $\theta = \pi/4$  hay más oportunidades de visitar un punto 2 sobre la vía de 1 a 3 sin incrementar la distancia recorrida, como se muestra en la Fig. 2.9 b), lo cual compensa el primer efecto.

El resultado para  $d$ , obtenido de la fórmula, es sólo un resultado inicial para puntos de distribución en lugares ya específicos, que puede mejorarse permitiendo a las rutas cruzar los límites de la tira, retroceder, etc.

Un experimento que fue realizado por Newell y Daganzo (1986b), consistente en construir rutas a través de 240 puntos sobre papel de 6x10 pulgadas y una geometría de tira (forma en que es cubierta un área con una tira de ancho  $w = \sqrt{3/7\delta}$ ) cualquiera, dio como resultado que con  $\theta = \pi/4$  y después de aplicar estrategias de mejoramiento local, el valor de  $d$  fue sólo 2% mayor que el promedio de  $d$  (obtenido de todas las geometrías de tira) con  $\theta = 0$ . La desviación estándar muestral de los valores de  $d$  para  $\theta = 0$ , fue aproximadamente del 4% de  $d$ . Esto significa que la diferencia en  $d$  para estrategias con  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi/4$  es muy pequeña, sin embargo algunas veces se necesitará construir rutas con  $\theta$  diferente de cero.

Para el caso de la sección 2.2.1, con  $\theta = 0$ , se obtuvo que  $w^* = \sqrt{3/(2\delta)}$  ( $w^2\delta/3 = 1/2$ ). La Fig. 2.8 muestra que para ese caso, la diferencia en  $d$  para  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi/4$  es (aprox.) del 7.5%. Entonces, conforme  $w \rightarrow 0$  la distancia promedio entre puntos para  $\theta = \pi/4$  es cada vez mayor que para  $\theta = 0$ .

Ahora, para minimizar el tiempo de recorrido en línea más el tiempo de recorrido local, se define el primero como el

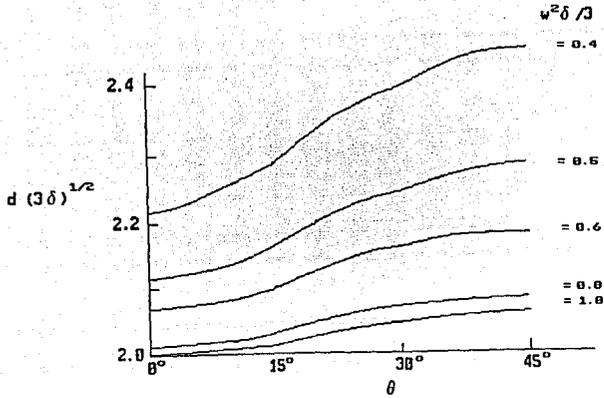


FIGURA 2.8. Distancia recorrida por punto,  $d$ , en función de la orientación de la zona,  $\theta$ , para varios valores de  $w$  (ancho de la zona).

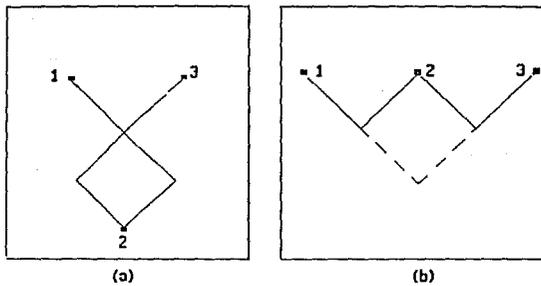


FIGURA 2.9. Rutas entre puntos si la zona está orientada a un ángulo  $\theta$  de las direcciones de la retícula.

recorrido al centro de la zona, en vez de a los puntos más cercanos a la fuente. Así que el tiempo de recorrido total en línea, en la región, es independiente del ancho y de la orientación de las zonas. Entonces el recorrido local es d.C, menos el ahorro en el recorrido en línea. Este último es dos veces el recorrido entre el contorno del límite final y el contorno del centro del rectángulo (ver Figura 2.10 a)).

El ángulo  $\phi$  (o  $(\pi/2)-\phi$ ), que hacen las líneas de contorno con la dirección de la retícula, depende de la trayectoria más corta entre la zona y la fuente, y es influido por el uso de alguna vía rápida en cualquier parte de la trayectoria. Si no pasan vías rápidas cerca de la zona, la única forma de ir entre las líneas de contorno, (aproximadamente rectas y paralelas) es a través de alguna de las direcciones de la retícula. Entonces, el tiempo de recorrido entre los contornos será igual a su separación a lo largo de la dirección de la retícula orientada más favorablemente (la dirección vertical en la Fig. 2.10 a)).

Si el ahorro en el recorrido en línea (para la zona) es d'C (ver Fig. 2.10 b)), éste puede expresarse en términos de  $\phi$  y  $\theta$ . Así, el ahorro en la distancia recorrida por punto es:

$$d' = d1' + d2' = \frac{(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta \tan\phi)}{2w\delta} = \frac{1}{2w\delta} \frac{\cos(\theta-\phi)}{\cos\phi}, \quad (2.22)$$

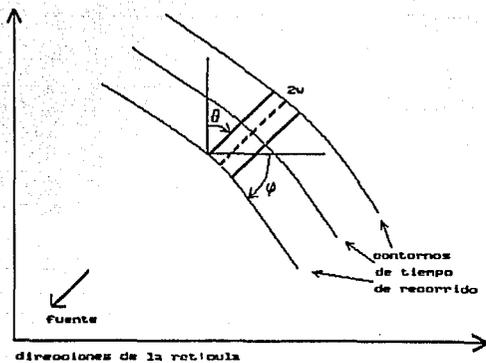
donde  $0 < \theta < \pi/2$  y  $0 < \phi < \pi/4$  ( $\phi$  es el ángulo entre los contornos y la dirección más favorable de la retícula).

El objetivo ahora es determinar la orientación  $\theta$  y el ancho  $w$  de los rectángulos tal que minimicen el exceso en la distancia recorrida promedio por punto,  $d-d'$ , que está en función de  $\phi$ ,  $\theta$  y  $w\delta$ . Entonces la orientación y el ancho óptimos están sólo en función de  $\phi$ .

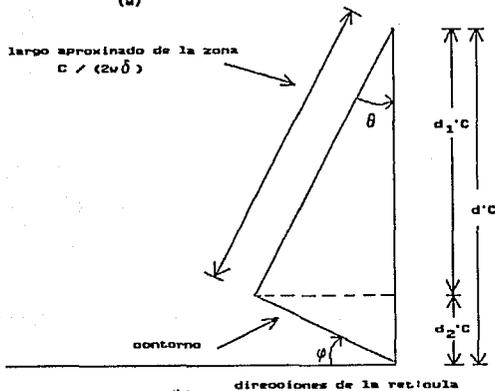
Para el caso de un rectángulo y la métrica Euclideana,  $d$  es independiente de  $\theta$ , y al minimizar  $d-d'$  se maximiza  $d'$  con respecto a  $\theta$ . La  $d'$  máxima ocurre cuando  $\theta = \phi$  (de ec. (2.22),  $d'_{\max} = 1/(2w\delta \cos\phi)$ ), y significa que los rectángulos deben estar orientados con el eje y ortogonal a los contornos de tiempo.

Para un caso general,  $d$  depende de  $\theta$ . Dado que  $d$  crece con  $\theta$  cuando  $0 < \phi < \theta < \pi/4$  (ver Fig. 2.10 b)), y tiene un máximo en  $\theta=\phi$ , entonces el ángulo  $\theta_0(w,\phi)$  que minimiza  $d-d'$  para  $w$  fija, debe estar en el rango  $(0, \phi)$ , es decir, entre la dirección de la retícula y la línea ortogonal a las líneas de contorno.

Si la red es rectangular, uniforme y sin vías rápidas, los contornos son cuadrados concéntricos orientados a  $45^\circ$  de las



(a)



(b)

FIGURA 2.10. Ahorro en el recorrido en línea con una zona a un ángulo  $\theta$  de las direcciones de la redicula y contornos de equi-tiempo de recorrido a un ángulo  $\psi$  de las direcciones de la redicula.

líneas de la retícula (esto es,  $\phi = \pi/4$ ) y con centro en la fuente, como en la figura 2.12a). Entonces  $d$  y  $d'$  tienen un máximo en  $\theta = \pi/4$ , por lo que  $d-d'$  tiene un máximo o mínimo local en  $\theta = \pi/4$ , independientemente de  $w$ . Así que, la orientación óptima de las zonas (rectangulares) es a  $45^\circ$  de las direcciones de la retícula, y es perpendicular a las líneas de contorno. Como es posible apreciar en la Fig. 2.11, el valor óptimo de  $w^2\delta/3$  para  $\theta = \phi = \pi/4$  es aprox. 0.62. Este es un poco mayor que el óptimo con  $\theta = 0$ , que es  $1/2$ . El valor mínimo de  $d-d'$  para  $\theta = \pi/4$  (1.267) es menor que para  $\theta = 0$  ( $\sqrt{2}$ ), por cerca del 10%.

La existencia de vías rápidas que pasen cerca de la fuente, produce que  $\phi$  se reduzca de  $45^\circ$  a menos de  $30^\circ$ ; hace que el  $\theta$  óptimo disminuya a la mitad de entre 0 y  $\phi$ , y que el  $w^2\delta/3$  óptimo se aproxime a  $1/2$ .

### 2.2.5 Configuración de Diferentes Geometrías de Zonas

Para una red rectangular uniforme, los contornos de equi-tiempo y las direcciones de recorrido se muestran en la parte izquierda de la Fig. 2.12a). Las zonas tienen aproximadamente el mismo ancho (si  $\delta$  es constante) y no están dirigidas hacia la fuente en el sentido Euclideo, sino que apuntan a ésta a través de las líneas N-S y E-W. La geometría de zonas es similar a la mostrada en la parte derecha de la Fig. 2.12a).

Un problema en la construcción de zonas es que a lo largo de cualquier tira a  $45^\circ$ , debe haber un número entero de zonas. Para solucionar el problema (excepto cerca de A) se calcula el número de puntos a todo lo largo de la tira (de  $45^\circ$  y ancho óptimo), se divide por  $C$ , y el resultado se redondea al entero más próximo; o se compara la distancia promedio recorrida por punto para el entero mayor y para el entero menor, más cercanos. Entonces  $w$  se ajusta de tal manera que contenga este entero, así que el error queda distribuido igualmente entre todas las zonas de la tira. Si el número de zonas es grande, el ajuste tiene un efecto pequeño sobre la distancia promedio recorrida por punto en la tira. La Fig. 2.12a) muestra como máximo 3 zonas en una tira.

Otro problema es la determinación de zonas cerca de A. Para solucionarlo, se construyen zonas en forma de cuña (ver líneas punteadas de la Fig. 2.12a)); y se distorsiona la forma de algunas pocas tiras vecinas, para así mejorar la forma de las zonas cercanas a A.

Para una red (de velocidad 1) con dos vías rápidas superimpuestas, N-S y E-W (de velocidad 2), los contornos de equi-tiempo de recorrido son como los que se muestran en la parte izquierda de la Fig. 2.12b). La orientación de las zonas

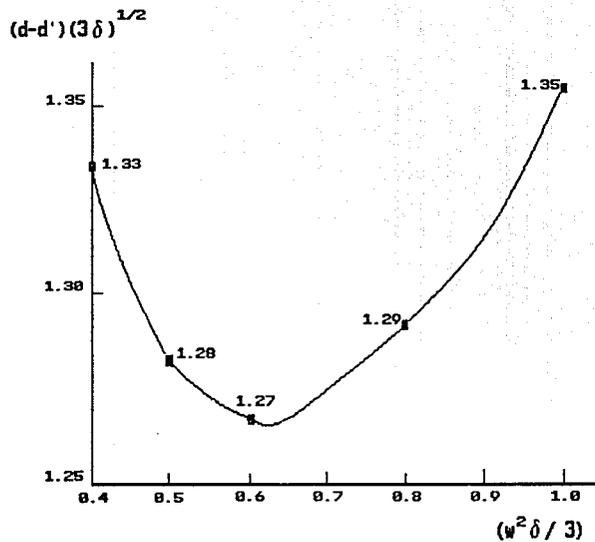


FIGURA 2.11. Exceso en la distancia recorrida promedio por punto,  $d-d'$ , en función del ancho de la zona, para  $\theta = \varphi = 45^\circ$ .

es a un ángulo entre la normal a las líneas de contorno, y la dirección más cercana de la retícula; y están dirigidas (las zonas) hacia la vía rápida más cercana (indirectamente hacia la fuente). En este caso existe otro problema, éste es que cerca de la fuente no es posible construir zonas con la orientación deseada. Contra esto, se usan rutas del agente viajero que visiten  $C$  puntos, con la restricción de que empiecen y terminen en una vía rápida.

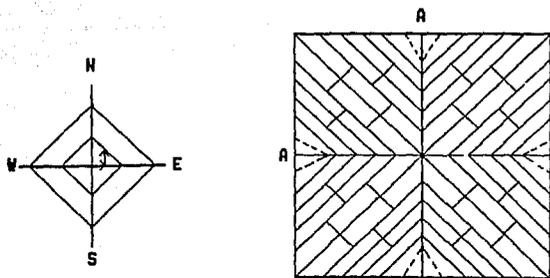
Si se tiene una red de anillo radial con dos vías rápidas (de N-S y de E-W) a través de la fuente, los contornos tienen discontinuidad en la inclinación, porque da lo mismo viajar radialmente sobre una vía lenta, que viajar sobre una vía rápida y luego sobre un anillo. Entonces algunas zonas, lejanas a la fuente, quedan en la dirección radial y otras quedan aproximadamente en la dirección del anillo (ver Fig. 2.12c)).

Una red real que incluya una red más abierta de avenidas rápidas podría tener líneas de contorno y geometrías de zonas, de una gran variedad de formas. Sin embargo, el objetivo de analizar redes idealizadas fue ilustrar algunos métodos de aproximación y algunas estrategias que pueden ser generalizadas a redes más realistas (siempre y cuando cumplan con los supuestos), para las cuales tal análisis sería muy tedioso.

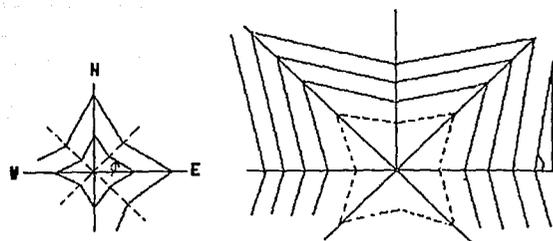
En este capítulo se ha hecho un análisis de un método MD para el diseño de rutas de distribución o recolección, en regiones de diferentes formas, bajo restricciones de capacidad en los vehículos. Además de que se han estudiado las estrategias para dividir la región en zonas y para hacer el recorrido de los puntos en cada una de ellas, se ha estimado la longitud del sistema subóptimo de rutas y el número de vehículos requeridos (uno por zona de distribución).

El método consta básicamente de los siguientes pasos, que pueden ser realizados fácil y rápidamente:

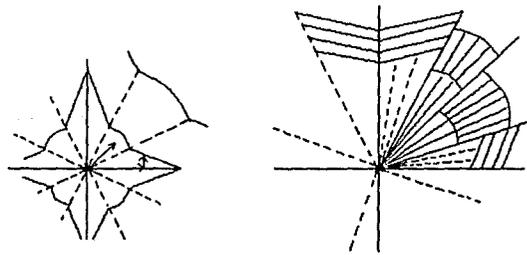
- a). verificar que se cumplan los supuestos,
- b). trazar los contornos de equi-tiempo de recorrido,
- c). determinar el tamaño óptimo de las zonas (de ancho  $2w^*$  y largo  $L^*$ ) y el número de zonas (vehículos),
- d). dividir la región en zonas,
- e). establecer el orden de recorrido de los puntos dentro de cada zona (en orden longitudinal en una banda de ancho  $w^*$ ),
- f). y estimar la longitud recorrida por todos los vehículos en toda la región.



(a)



(b)



(c)

FIGURA 2.12. Contornos de equi-tiempo de recorrido y geometrías de zonas para algunas redes idealizadas.

Dado que un gran porcentaje de empresas distribuidoras también tiene servicio de recolección, la integración de ambos servicios dentro de un mismo modelo es indispensable. En el capítulo siguiente se estudia este problema para los casos que a continuación se mencionan:

- Cuando se involucran restricciones de capacidad en los vehículos, sólo al distribuir.
- Cuando se incluyen restricciones de capacidad en los vehículos tanto al distribuir como al recolectar, y las distribuciones deben ser hechas antes que las recolecciones.
- Cuando existen restricciones de capacidad al distribuir y recolectar, pero los puntos de distribución y recolección se mezclan en el recorrido.

### CAPITULO 3

#### DISEÑO DE RUTAS DE DISTRIBUCION Y RECOLECCION PARA REGIONES DE DIFERENTES FORMAS

El problema de distribución y recolección es un tipo de problema de distribución donde los artículos fluyen en dos direcciones: la primera es de la fuente a los puntos de distribución, y la segunda es de los puntos de recolección al depósito o fuente.

Para este problema los vehículos tienen cierto límite en el número de artículos de distribución y/o recolección que pueden cargar y, dependiendo de las características propias del problema, un vehículo puede salir de la fuente o regresar a la misma: lleno, con carga regular o con carga pequeña, pero no vacío.

En la primera parte de este capítulo se analiza el método MD para el diseño de rutas de distribución y recolección, bajo restricciones de capacidad en los vehículos, únicamente al distribuir, desarrollado por Daganzo y Hall (1990). Aquí, además de proporcionar estrategias de recorrido de los puntos, se dan fórmulas para estimar el recorrido total de los vehículos en la región, cuando existen pocas y muchas rutas.

Para el mismo problema, pero con restricciones en la capacidad de los vehículos tanto al distribuir como al recolectar, en la segunda parte de este capítulo se sugiere lo siguiente:

- Se propone aplicar el método de Daganzo y Hall (1990) cuando las distribuciones deben hacerse antes que las recolecciones: tal cual, si el número de rutas de recolección necesarias por unidad de área es menor al de las de distribución; o en forma "invertida", para el caso contrario.
- Se propone un método MD, el método DRM (método para distribución y recolección mezcladas), el cual resuelve el problema cuando se visitan los puntos de distribución y los de recolección indistintamente, esto es, cuando estos puntos se mezclan en las rutas. Además de que se proponen estrategias de distribución-recolección, se propone la forma de estimar el recorrido total de los vehículos en la región.

En general, en este capítulo se pretende entender mejor los factores y condiciones que favorecen diferentes patrones de rutas, para así determinar las rutas que minimicen la distancia total recorrida por los vehículos, cubriendo una región de servicio desde una sola fuente.

La determinación de las rutas depende de dos parámetros adimensionales: el tamaño del área de servicio, en relación al área de distribución cubierta por un vehículo, y el número de recolecciones en relación al número de distribuciones.

### 3.1 RESTRICCIONES DE CAPACIDAD SOBRE LA DISTRIBUCION

Asúmase que los puntos de distribución y de recolección están distribuidos aleatoria, uniforme e independientemente, dentro de la región. No se necesita conocer información detallada sobre estos puntos. Asúmase también que: i) cada vehículo debe hacer primero las distribuciones y después las recolecciones; ii) los vehículos no regresan a la fuente entre la distribución y la recolección; y iii) cada vehículo puede hacer a lo más C distribuciones, pero un número ilimitado de recolecciones.

#### 3.1.1 Distancia Recorrida por Punto

En la sección 2.2.1 se obtuvo para la métrica de Manhattan (M.M.) y para zonas orientadas hacia la fuente, que la distancia local óptima recorrida por punto está dada por:

$$d_{to}^* = \sqrt{2/(3\delta)}.$$

Generalizando este resultado a cualquier métrica, se obtiene:

$$d_{to}^* = k / \sqrt{\delta},$$

donde k es una constante que depende de la métrica en cuestión (  $k = \sqrt{2/3}$  ) para la M.M. y  $k \approx 0.57$  para la M.E.).

Dado que la distancia total en línea es aproximadamente dos veces la suma de las distancias de todos los puntos a la fuente, sobre C; entonces ésta se puede considerar como  $2r_m N/C$ , donde  $r_m$  representa la distancia promedio de un punto a la fuente. Por lo tanto, la distancia total recorrida por punto,  $d_{tp}$ , es:

$$d_{tp} \approx \frac{2r_m}{C} + \frac{k}{\sqrt{\delta}}. \quad (3.1)$$

La relación entre las dimensiones de la región de servicio y L, determina la existencia de pocas o de muchas rutas. Por ejemplo, si se tiene una región circular con radio R y fuente en el centro, entonces se define el parámetro adimensional  $\alpha$  como:

$$\alpha = R/L = R \sqrt{6\delta} / C. \quad (3.2)$$

Si  $\alpha \gg 1$ , se tiene el caso ya analizado en la sección 2.2, donde: existen muchas rutas; las zonas son como las que se muestran en la Fig. 3.1a), y  $d_{tp}$  está dada por la ec. (3.1).

Si  $\alpha < 1$ , existen pocas rutas; las zonas son tan largas como el tamaño de la región lo permite, y son del ancho que posibilita llenar los vehículos a su capacidad. Esto produce zonas más cortas que  $L$  y más anchas que  $w$ , con forma de cuña (abarcando desde la fuente hasta el perímetro de la región). En consecuencia, las rutas serpentean de ida y vuelta dentro de las zonas, como en la Fig. 3.1b), y al igual que para el PAV de la sección 2.1,

$$d_{tp} \approx k' / \sqrt{\delta} , \quad (3.3)$$

donde  $k'$  es una constante ( $k' \approx 1.15$  para la M.M.).

Dado que parte del recorrido local en la ec. (3.1) está incluido en el recorrido en línea, entonces  $k' > k$  para cualquier métrica. Esto también es válido: para regiones no circulares con fuentes internas, donde se define  $R$  como la distancia promedio de la fuente al perímetro de la región; y cuando la fuente es externa a la región, donde se reinterpreta  $\alpha$  como el número de zonas que caben dentro de la región en dirección a la fuente.

### 3.1.2 Distribución y Recolección con Pocas Rutas

Si existen pocas rutas ( $\alpha < 1$  o  $R < L$ ), se presentan dos casos: cuando el número de rutas de distribución es mucho mayor que el número de recolecciones, y cuando no es así.

Si existen pocas recolecciones:

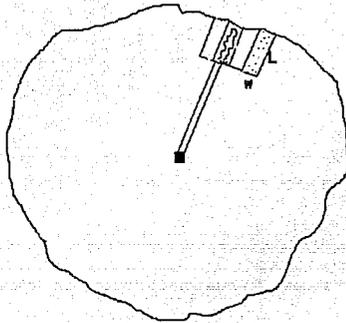
$$\delta_2 A \ll [\delta_1 A / C] , \quad (3.4)$$

donde  $\delta_1$  es la densidad de las distribuciones,  $\delta_2$  es la densidad de las recolecciones, y  $A$  es el área de la región. Lo que también puede escribirse como:

$$\beta = \delta_2 / \delta_1 \ll 1/C , \quad (3.5)$$

donde  $\beta$  es un parámetro adimensional que representa la proporción de la densidad de la recolección con respecto a la densidad de la distribución.

Aquí, las rutas deben diseñarse como si no existieran recolecciones. Estas últimas se sirven posteriormente, con el mínimo recorrido adicional posible (el cual es pequeño porque hay pocas recolecciones). Cada distribución suma al recorrido un promedio de  $k' / \sqrt{\delta_1}$  unidades de distancia. Dado que las rutas



a). Para  $\alpha \gg 1$ .



b). Para  $\alpha < 1$ .

FIGURA 3.1. Patrones de ruteo para el problema de rutas de vehiculos.

serpentean dentro de las zonas, debe haber pequeña diferencia la longitud de las rutas, si éstas terminan en un punto de recolección (cuando éste existe en la zona) en vez de en la fuente. Después de recolectar, cada vehículo debe ir directamente al depósito o fuente. Esta última distancia representa la distancia adicional por recolección, que es el promedio de la distancia de los puntos de recolección a la fuente. Entonces, la distancia adicional por punto de recolección es  $r_m$  y la distancia total recorrida por unidad de área es:

$$D_A = k' \sqrt{\delta_1} + \delta_2 r_m. \quad (3.6)$$

Esta distancia puede mejorar si se permite a los vehículos recolectar en rutas fuera de sus zonas de distribución.

Si se usara solamente una ruta de recolección para hacer todas las recolecciones, cada una de ellas sumaría a la ruta una distancia similar a la separación promedio entre puntos de recolección vecinos.

Si el número de recolecciones se incrementara, la distancia por recolección se aproximaría a la dada por la ec. (3.3) con una densidad  $\delta_2$ . Así que, la distancia por unidad de área se transformaría en:

$$D_A = k' [ \sqrt{\delta_1} + \sqrt{\delta_2} ]. \quad (3.7)$$

Esta expresión es la misma que para dos PAV's, y es independiente de C.

La longitud de la ruta puede ser reducida si en la misma ruta de distribución se recolecta. Cuando dos rutas de distribución pueden finalizar cerca de un eslabón de la recolección, éste puede ser eliminado dividiendo la ruta de recolección en dos partes, e integrando cada una de éstas a una de las dos rutas de distribución originales. Esto puede hacerse todas las veces que sea posible, pero el ahorro no es muy grande cuando hay muchas recolecciones por ruta de distribución. La distancia adicional por recolección, para este caso, es aproximadamente  $k' / \sqrt{\delta_2}$ . Así que cuando  $\beta \geq 1$  (existen muchos puntos de recolección), la distancia esperada por unidad de área es la de la ec. (3.7).

Si se permite que se mezclen las distribuciones y las recolecciones, la distancia por punto es  $k'(\delta_1 + \delta_2)^{1/2}$  (como la dada por un PAV simple). Esta distancia es mejor que antes porque al hacer la mezcla, la distancia entre puntos vecinos se reduce.

### 3.1.3 Distribución y Recolección con muchas rutas

Si existen muchas rutas ( $\alpha \gg 1$  o  $R \gg L$ ), existen múltiples filas de zonas de distribución. Supóngase que las rutas de distribución se diseñan independientemente de las recolecciones, y que estas últimas se hacen hasta que se termina con la última distribución, entonces la distancia adicional por las recolecciones es significativamente menor que si éstas se hicieran en forma separada (con distancia adicional  $k'/\sqrt{\delta_2}$  por cada una).

Defínase rayo como el recorrido realizado por un vehículo de regreso a la fuente (sin recolectar). Si todas las recolecciones (excepto quizá las de las zonas en la fila más exterior) se realizan a través de los rayos, asignando cada una al rayo más cercano, entonces cada recolección interna suma una distancia proporcional a la separación promedio entre rayos. Ésta a su vez se aproxima al área de la región dividida por la longitud total de los rayos dentro de la misma, pero esta última longitud es el producto del número de rutas de distribución y su recorrido promedio a la fuente. Entonces,

$$\begin{array}{l} \text{separación} \\ \text{promedio} \\ \text{entre rayos} \end{array} \approx \frac{\text{área}}{\text{long. total}} \approx \frac{A}{(\delta_1 A/C) A^h} = \frac{C}{\delta_1 A^h} \quad (3.8)$$

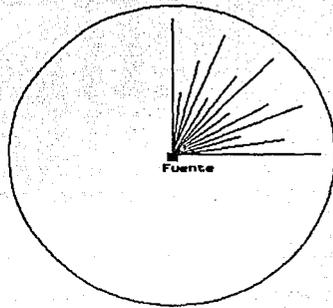
Però no todas las recolecciones suman la misma distancia; las recolecciones más cercanas a la fuente suman mucho menos distancia que las lejanas, dado que los rayos tienen separación menor cerca de la fuente, como se muestra en las figuras 3.2a) y 3.2b). Para estas figuras, los contornos de equi-tiempo de recorrido son: círculos concéntricos y líneas paralelas a la vía rápida, respectivamente.

Identifíquese un contorno por su distancia  $x$ , al punto más alejado en la región de servicio, en vez de por su distancia a la fuente. Defínase  $x' = x/R$ ,  $x' \in (0,1)$ . La longitud de los contornos para los casos a) y b) de la Fig. 3.2, son respectivamente:

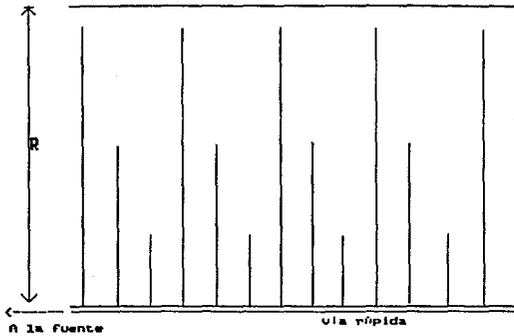
$$\begin{array}{l} 2\pi R(1-x') = 2(1-x')(\pi A)^{1/2} \quad (\text{con } R=(A/\pi)^{1/2}) \\ \text{Y} \\ \text{lado de la región} = A^{1/2}. \end{array}$$

El número de rayos es aproximadamente igual al área entre el límite de la región y la línea de contorno, multiplicada por el número de zonas de distribución por unidad de área ( $\delta_1/C$ ). Así que, el número aproximado de rayos es:

$$\begin{array}{l} \text{Y} \\ Ax'(2-x')(\delta_1/C) = [2x'-x'^2](\delta_1 A/C) \quad \text{para el caso a)} \\ x'A(\delta_1/C) = x'(\delta_1 A/C) \quad \text{para el caso b).} \end{array}$$



a). Región circular con un depósito en el centro.



b). Región cuadrada cercana a una vía rápida.

FIGURA 3.2. Patrones de rayos para regiones con diferentes geometrías.

Entonces la separación promedio entre rayos a una distancia  $x'$ , es la longitud del contorno en esa distancia dividida por el número de rayos correspondientes a  $x'$ , y puede expresarse como:

$$[C / (\delta, A^h)] (1/x') \{ 2\sqrt{\pi} (1-x') / (2-x') \} \quad (3.9a)$$

$$Y \quad [C / (\delta, A^h)] (1/x'), \quad (3.9b)$$

para los casos a) y b), respectivamente. La única diferencia entre las ecs. (3.9a) y (3.9b) es el factor entre llaves. Éste, como era de esperarse, es mayor que 1 para  $x'$  cercana a cero (lo cual indica mayor separación entre rayos), y es menor que 1 para  $x'$  cercana a 1 (lo cual indica separación menor).

La separación promedio puede ser generalizada a otras geometrías, expresándola como:

$$[C / (\delta, A^h)] \Omega(x'), \quad (3.9c)$$

donde  $\Omega$  es una función monótona decreciente.

Las ecs. (3.9) no son buenas aproximaciones cerca del límite de la región, porque en la fila más externa de zonas de distribución no hay rayos para las recolecciones. Como las recolecciones en la fila externa se efectúan de todas maneras, por ejemplo partiendo desde la punta final del rayo más cercano, la distancia promedio por punto es:

$$d_1 \approx L = C / (6\delta)^{1/2} \quad (\text{para la M.M.}) \quad (3.10)$$

Así que la ec. (3.10) se usa en vez de la ec. (3.9c), para puntos en la fila exterior, o equivalentemente, cuando  $x' < \alpha^{-1}$ .

Otra forma de recolectar en las filas externas de la región de servicio es cubrir esa área con una banda, y usar rutas del PAV que inicien y terminen en la punta final de los rayos dentro de tal banda. A ésta, que puede incluir más de una fila de zonas, se le denomina fleco; y al resto de la región se le llama interior. Entonces, la distancia por recolección en el fleco está dada por la ec. (3.3):

$$d_f \approx 2 / (3\delta_2)^{1/2} \quad (\text{para la M.M.}) \quad (3.11)$$

De las ecs. (3.10) y (3.11) se obtiene  $\beta = (8/C^2)(d^2/d_f^2)$ . De aquí que, la distancia dada por la ec. (3.11) es aproximadamente menor o igual que la dada por la ec. (3.10), excepto cuando  $\beta \ll (8/C^2)$ . Pero en ese caso, no es muy importante la forma en que se hacen esas pocas recolecciones;

de tal manera que, por simplicidad, se usará en lo sucesivo la ec. (3.11).

Para un lugar  $x'$  dentro del área del interior, la distancia por recolección es aproximadamente (1/3) de la expresión (3.9c). Para el lugar donde se obtiene el ancho óptimo del fleco,  $x_0'$ , la distancia dada por un tercio de la ec. (3.9c) es similar a la dada por la ec. (3.11). Entonces la distancia por recolección para un lugar  $x'$  es:

$$\min \{ [C / (\delta_1 A^h)] (1/3) \Omega(x'); \quad 2/(3\delta_2)^h \} \quad (3.12a)$$

y  $x_0'$  es la solución de

$$[C / (\delta_1 A^h)] (1/3) \Omega(x') = 2/(3\delta_2)^h, \quad (3.12b)$$

con  $x_0' > \alpha^{-1}$ , que asegura que el fleco incluya la fila más externa.

De (3.12b) se obtiene:

$$\Omega(x') \approx 12^h \delta_1 A^h / (C \delta_2^h) = 12^h \beta^{-h} A^h / (L \delta^h)$$

$$\implies \Omega(x') \approx 12^h [ (\beta^h / \alpha) (6R^2/A)^h ]^{-1}.$$

Para el caso b) de la Fig. 3.2,  $\Omega(x') = x'^{-1}$ ,  $x_0'$  es:

$$x_0' \approx (1/12^h) [ (\beta^h / \alpha) (6R^2/A)^h ],$$

de lo que se observa que  $x_0'$  es una función creciente de  $(\beta^h / \alpha)$  y lo es también de  $C\delta_2^h / (\delta_1 A^h)$ . Pero como para este caso  $A=R^2$ , entonces

$$x_0' \approx (1/12^h) C\delta_2^h / (\delta_1 A^h) = (\beta/2)^h / \alpha.$$

Sean  $f_x$  y  $F_x$  la función de densidad de probabilidad (f.d.p.) y la función de distribución de probabilidad (F.D.P.), de la distancia  $X'$  del punto de recolección al límite de la región de servicio, respectivamente. La distancia promedio por punto de recolección, obtenida de la ec. (3.12), es:

$$d_p \approx \frac{2 F_x(x_0')}{(3\delta_2)^h} + \frac{1}{3} \frac{C}{\delta_1 A^h} \int_{x_0'}^1 \Omega(w) f_x(w) dw.$$

Si los puntos de recolección están distribuidos uniformemente,  $X'$  tiene una distribución uniforme en (0,1). Entonces, para el caso de la Fig 3.2b) se obtiene (con  $x_0' < 1$  dado que  $\alpha \gg 1$ ):

$$\begin{aligned}
d_p &\approx \frac{2 x_{o'}}{(3\delta_2)^{1/2}} + \frac{1}{3} \frac{C}{\delta_1 A^{1/2}} \int_{x_{o'}}^1 (1/w) dw \\
\implies &\approx \frac{2}{(3\delta_2)^{1/2}} \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{C \delta_2^{1/2}}{\delta_1 A^{1/2}} + \frac{1}{3} \frac{C}{\delta_1 A^{1/2}} \int_{(B/2)^{1/2}/\alpha}^1 \frac{dw}{w} \\
&= \frac{C}{3\delta_1 A^{1/2}} + \frac{1}{3} \frac{C}{\delta_1 A^{1/2}} [\ln 1 - \ln ((B/2)^{1/2}/\alpha)] \\
&= \frac{C}{\delta_1 A^{1/2}} \frac{1}{6} [2 + 2\ln(\alpha) - \ln (B/2)] \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Aunque son más difíciles de obtener, relaciones similares entre  $d_p$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  se mantienen para regiones con otras formas y métricas, cuando  $\alpha \rightarrow \infty$ .

La mayor parte de la distancia por recolección se genera cerca del fleco de la región.

Cuando  $\alpha$  es grande, la distancia total recorrida en la región se constituye en su mayor parte por la distancia en línea,

$$\begin{aligned}
D_{li} &= (\text{no. de distribuciones}) (\text{distancia en línea por distrib.}) \\
&= (\delta_1 A) (2 r_m / C),
\end{aligned}$$

en menor grado por la distancia local por la distribución,

$$\begin{aligned}
D_d &= (\text{no. de distribuciones}) (\text{distancia local por distrib.}) \\
&= (\delta_1 A) (k / \sqrt{\delta_1}) = kA\sqrt{\delta_1},
\end{aligned}$$

y en grado aún menor por la distancia sumada por las recolecciones,

$$\begin{aligned}
D_p &= (\text{no. de recolecciones}) (\text{distancia promedio por recolección}) \\
&\approx (\delta_2 A) (C / (\delta_1 A^{1/2})) = BC\sqrt{A}.
\end{aligned}$$

Como  $\alpha = R/L = \sqrt{6}(\delta_1 A)^{1/2} / C$  y  $r_m = A^{1/2}$ , entonces:

$$D_{li} = 2\delta_1 A^{3/2} / C = k_1 (C^2 \delta_1^{-1/2} \alpha^3),$$

$$D_d = \delta_1 A k / \delta_1^{\frac{1}{2}} = k_2 ( C^2 \delta_1^{-\frac{1}{2}} \alpha^2 ), \text{ y}$$

$$D_p \approx \delta_2 C \sqrt{A} / \delta_1 = k_3 ( C^2 \delta_1^{-\frac{1}{2}} \alpha ) \quad (\text{para } \alpha \text{ grande}),$$

donde  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$  son constantes.

Incrementar  $\alpha$  es equivalente a expandir la región de servicio (A), dejando a  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  y C constantes. Cuando esto ocurre, la distancia en línea por distribución crece; la distancia local por distribución, no cambia; y la distancia sumada por recolección, disminuye.

Si las recolecciones y las distribuciones fueran consideradas indistintas, habría  $C' = C(1+\beta)$  paradas por ruta, la densidad sería  $\delta = \delta_1 + \delta_2$ , la distancia en línea no cambiaría (porque habría el mismo número de rutas y vehículos), la distancia local sería proporcional a  $(\delta_1 + \delta_2)^{\frac{1}{2}}$  y tendría un exceso en relación al problema original, de  $k_A [ (\delta_1 + \delta_2)^{\frac{1}{2}} - \delta_1^{\frac{1}{2}} ]$ . Como la distancia sumada por las recolecciones,  $D_p'$  sería menor que ese exceso ( para  $\alpha$  grande,  $\alpha^2 > \beta \sqrt{6} / \{k [(1+\beta)^{\frac{1}{2}} - 1]\}$  ), entonces la distancia total para este caso se incrementaría.

### 3.2 RESTRICCIONES DE CAPACIDAD TANTO AL DISTRIBUIR COMO AL RECOLECTAR

Considérese que el número de recolecciones permitidas está restringido con respecto a la capacidad del vehículo. El número necesario de rutas para la recolección puede ser mayor, igual o menor al requerido para la distribución.

Si se distribuye primero y después se recolecta, el método de solución de la sección 3.1 es adaptable con relativa facilidad al nuevo problema; sin embargo, si se mezclan las distribuciones y las recolecciones, el método de solución cambia bastante y es necesario usar nuevas estrategias.

#### 3.2.1 La Distribución primero, la Recolección después

Asúmase que las distribuciones se hacen antes que las recolecciones, y que  $C'$  es el máximo número de recolecciones permitidas.

El número máximo aproximado de recolecciones hechas por un vehículo está dado por  $\beta C$ .

Si  $C' \geq \beta C$ , entonces las estrategias dadas en la primera parte de este capítulo son factibles.

En caso contrario, significa que en el vehículo no cabe la recolección de la ruta, esto es, el número de rutas de

recolección necesarias por unidad de área supera al de las de distribución ( $\delta_1/C < \delta_2/C'$ ); entonces el número máximo total de rutas (en este caso igual al de rutas de recolección), es  $N_2/C'$ , y es necesario reestructurar el sistema de rutas. De aquí que es posible aplicar las estrategias presentadas en el punto 3.1, pero en forma "invertida". Para esto existen dos casos: cuando hay pocas y cuando hay muchas rutas.

Para el primer caso ( $\alpha < 1$ ), puede ocurrir que el número de rutas de recolección sea mucho mayor que el número de distribuciones, o que no lo sea.

Si el número de distribuciones es pequeño, entonces  $\delta_1 A/C' \gg \delta_1 A$  (o  $\beta \gg C'$ ) y las rutas deben diseñarse en forma inversa a la descrita en la sección 3.1.2. Esto es, ir de la fuente a un punto de distribución (si existe), de éste a la recolección más cercana, de la cual partir para hacer el recorrido por los otros puntos de recolección, como si no existiera la distribución, y terminar en la fuente. Aquí la distancia por recolección es  $k'/\sqrt{\delta_2}$ , y la distancia por distribución es aproximadamente  $r_m$ , así que la distancia total recorrida por unidad de área es:

$$D_A = k'\sqrt{\delta_2} + \delta_1 r_m. \quad (3.14)$$

Si el número de distribuciones se incrementa, la distancia adicional por distribución se aproxima a  $k'/\sqrt{\delta_1}$ , y la distancia total recorrida por unidad de área es la dada por la ec. (3.7), que equivale a tener dos PAV's.

Para el segundo caso, suponiendo que las rutas de recolección se diseñan independientemente de las distribuciones y que estas últimas se realizan a través de los rayos, entonces la distancia por distribución interna es proporcional a la separación promedio entre rayos (considerando rayo al recorrido hecho por un vehículo, de la fuente a la zona de distribución), la cual es:

$$\begin{array}{l} \text{separación} \\ \text{promedio} \\ \text{entre rayos} \end{array} \approx \frac{\text{área}}{\text{long. total} \\ \text{de los rayos}} \approx \frac{A}{(N_2/C') A^{\frac{1}{2}}} = \frac{C'}{\delta_2 A^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.15)$$

O en términos de contornos, por un proceso semejante al de la sección 3.1.3, se obtiene:

$$\begin{array}{l} \text{separación} \\ \text{promedio} \\ \text{entre rayos} \end{array} = \frac{C'}{\delta_2 A^{\frac{1}{2}}} \Omega(x'), \quad (3.16)$$

donde  $\Omega$  es una función monótona decreciente. Para distribuciones en filas externas, es posible cubrir el fleco (área exterior) con una banda y usar rutas del PAV que inicien y terminen en la punta final de los rayos dentro de tal banda. Entonces, la distancia por distribución en el fleco está dada por:

$$d_f \approx 2 / (3\delta_1)^{1/2} \quad (\text{para la M.M.}). \quad (3.17)$$

Así que, la distancia por distribución para un lugar  $x'$  es:

$$\min \{ [C' / (\delta_2 A^{1/2})] (1/3) \Omega(x'); \quad 2 / (3\delta_1)^{1/2} \} \quad (3.18a)$$

y  $x_0'$  es la solución de

$$[C' / (\delta_2 A^{1/2})] (1/3) \Omega(x') = 2 / (3\delta_1)^{1/2}, \quad (3.18b)$$

de lo que resulta que:

$$\Omega(x') \approx 12^{1/2} \delta_2 A^{1/2} / (C' \delta_1^{1/2}) = (2BA)^{1/2} / L = (2B)^{1/2} \alpha$$

con  $L = C' / (6\delta_2)^{1/2}$ . Si  $\Omega(x') = x'^{-1}$ , entonces

$$x_0' \approx (1/\sqrt{12}) C' \delta_1^{1/2} / (\delta_2 A^{1/2}) = (2B)^{-1/2} / \alpha.$$

La distancia promedio por punto de distribución obtenida de la ec. (3.18), para el caso donde  $\Omega(x') = x'^{-1}$ , es:

$$\begin{aligned} d_d &\approx \frac{2 x_0'}{(3\delta_1)^{1/2}} + \frac{1}{3} \frac{C'}{\delta_2 A^{1/2}} \int_{x_0'}^1 (1/w) dw \\ &\approx \frac{2}{(3\delta_1)^{1/2}} \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{C' \delta_1^{1/2}}{\delta_2 A^{1/2}} + \frac{1}{3} \frac{C'}{\delta_2 A^{1/2}} \int_{(2B)^{-1/2}/\alpha}^1 \frac{dw}{w} \\ &= \frac{C'}{3\delta_2 A^{1/2}} + \frac{1}{3} \frac{C'}{\delta_2 A^{1/2}} [ -\ln [ (2B)^{-1/2} / \alpha ] ] \\ &= \frac{C'}{\delta_2 A^{1/2}} \frac{1}{6} [ 2 + 2\ln(\alpha) + \ln(2B) ]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Entonces, la distancia en línea es:

$D_{li}$  = (no. de recolecciones) (distancia en línea por recolec.)

$$= (\delta_2 A) (2 r_m / C') = 2\delta_2 A^{3/2} / C' = k4 (C'^2 \delta_2^{-1/2} \alpha^3),$$

la distancia local por la recolección es:

$D_p$  = (no. de recolecciones) (distancia local por recolec.)

$$= (\delta_2 A) (k / \sqrt{\delta_2}) = kA\sqrt{\delta_2} = k5 (C'^2 \delta_2^{-1/2} \alpha^2),$$

y la distancia por la distribución es:

$D_d$  = (no. de distribuciones) (distancia media por distribución)

$$\approx (\delta_1 A) (C' / (\delta_2 A^{1/2})) = C' A^{1/2} / \beta = k6 (C'^2 \delta_2^{-1/2} \alpha),$$

donde  $k4$ ,  $k5$  y  $k6$  son constantes.

Así que cuando  $\alpha$  es grande, la distancia total recorrida en la región está compuesta principalmente por la distancia en línea, en menor grado por la de recolección, y en grado aún menor por la de distribución.

### 3.2.2 Distribución y Recolección Mezcladas: Uso del Método DRM

El método de distribución y recolección mezcladas (método DRM) se distingue de los otros MD, en las estrategias de recorrido de los puntos cuando el vehículo se llena en el transcurso de una ruta. Este método se expone a continuación.

Asúmase que en cada punto de distribución se deja una unidad de carga (en volumen o peso)  $u_1$ , y de cada punto de recolección se toma una unidad de carga  $u_2$ .

Si las distribuciones y las recolecciones se realizan indistintamente, entonces la densidad de puntos por unidad de área es  $(\delta_1 + \delta_2)$  y la distancia entre puntos vecinos es múltiplo de  $(\delta_1 + \delta_2)^{-1/2}$ . Así que la distancia total recorrida cuando no hay restricción de capacidad sobre la recolección, se modifica tal como se describe en la parte final de las secciones 3.1.2 y 3.1.3, para pocas y muchas rutas respectivamente. Sin embargo, cuando existe la restricción de capacidad sobre la distribución y sobre la recolección, hay mayor modificación en la distancia total recorrida, en base a los valores de los parámetros  $\beta$  y  $\Gamma$ , con  $\beta = \delta_2 / \delta_1$  y  $\Gamma = u_2 / u_1$  = unidad de carga de recolección / unidad de carga de distribución. Entonces se presentan nueve casos:

	$\Gamma \ll 1$	$\Gamma \approx 1$	$\Gamma \gg 1$
$\beta \ll 1$	caso 1	caso 5	caso 8
$\beta \approx 1$	caso 3	caso 7	caso 4
$\beta \gg 1$	caso 9	caso 6	caso 2

#### CASO 1:

Si  $u_1 \approx 0$ , entonces prácticamente no existe restricción de capacidad sobre la recolección y se tiene la situación analizada en la sección 3.1. Sin embargo, aquí se considera que  $\Gamma > 0$ .

El vehículo inicia cargado a su capacidad ( $C u_1$ ) y regresa con una carga muy pequeña, ya que  $\delta_2$  y  $u_2$  son pequeñas. El proceso de distribución-recolección es como sigue: el vehículo recorre los puntos, en banda; pero cuando no le es posible hacer una o varias recolecciones, porque no hay cupo, debe ir al o a los siguientes puntos de distribución hasta que exista espacio suficiente para todas las recolecciones saltadas; cuando esto ocurra debe regresar a hacerlas (originando un recorrido adicional), y posteriormente continuar con la ruta.

Si el espacio entre puntos vecinos es 'd' y existen  $C+C\beta$  puntos por ruta, entonces  $(C+C\beta)d$  es la distancia local recorrida por zona, siempre y cuando no se considere la restricción de capacidad sobre la recolección. En caso de que ésta exista, al recorrido anterior se suma el recorrido adicional por regresar a hacer las recolecciones saltadas. En el peor de los casos, cuando tales recolecciones y la distribución están aproximadamente en la misma línea vertical, la distancia adicional es  $2j_1 d$ , donde  $j_1$  es el número de recolecciones saltadas.

Dado que el vehículo inicia lleno, no le es posible hacer recolecciones hasta que no haya hecho primero una distribución. Una vez que ha distribuido, puede hacer todas las recolecciones de la ruta, ya que estas últimas son relativamente pocas y de volumen o peso pequeño. La probabilidad de que después de una distribución existan tantas recolecciones tal que no sea posible hacerlas todas, se considera nula para este caso.

Entonces sólo se supone importante la probabilidad de que existan recolecciones antes de la primera distribución.

Sea  $f_{Z_1}(1)$  la probabilidad de obtener una distribución (éxito) en  $i$  puntos recorridos (intentos), en una zona con  $C+CB$  puntos,  $C$  de los cuales son de distribución. Entonces la variable aleatoria  $Z_1$ , que indica el número de distribuciones obtenidas, tiene una distribución hipergeométrica, esto es,  $Z_1 \sim H [ C+CB, C, i ]$ . Siendo así,  $f_{Z_1}(1) / i$  es la probabilidad de obtener la primera distribución en el  $i$ -ésimo punto recorrido, en una zona con  $C$  puntos de distribución y  $CB$  puntos de recolección. Esta última probabilidad puede ser diferente de cero sólo para  $i = 1, 2, \dots, C+CB$ .

Por lo tanto el valor esperado de la distancia adicional máxima por zona,  $E(da)$ , es:

$$E(da) = \sum_{i=1}^{C+CB} \left[ \frac{f_{Z_1}(1)}{i} \cdot 2(i-1)d \right] \quad (3.20)$$

$$= 2d \sum_{i=1}^{C+CB} \frac{i-1}{i} f_{Z_1}(1) = 2dQ_1,$$

$$\text{con } Z_1 \sim H [ C+CB, C, i ].$$

De aquí que,  $[ (C+CB) + 2Q_1 ] d$  es el recorrido esperado por zona y  $[ 1 + 2Q_1 / (C+CB) ] d$  es la distancia esperada local por punto. Entonces, la distancia total recorrida por punto es:

$$d_{tp} \approx \begin{cases} \left[ 1 + \frac{2Q_1}{C+CB} \right] \frac{k'}{(\delta_1 + \delta_2)^{1/2}} & \text{para pocas rutas,} \quad (3.21a) \\ \frac{2r_m}{C} + \left[ 1 + \frac{2Q_1}{C+CB} \right] \frac{k}{(\delta_1 + \delta_2)^{1/2}} & \text{para muchas rutas,} \quad (3.21b) \end{cases}$$

donde  $k'$  y  $k$  son constantes.

CASO 2:

CASO 2:

Este caso es de alguna manera inverso al caso anterior. El vehículo sale de la fuente con muy poca carga, porque  $\delta_1$  y  $u_1$  son pequeñas, pero al final regresa lleno ( $C' u_1$ ). Existen  $C'$  recolecciones y  $C'/\beta$  distribuciones por zona. El proceso de distribución-recolección se realiza de la misma forma que para el caso 1.

La probabilidad de que no haya cupo para alguna recolección es considerada nula, debido a que  $\delta_1$  y  $u_1$  son pequeñas, excepto para la última. Como con ésta se completa la carga del vehículo, entonces no es posible hacerla si no se han hecho antes todas las distribuciones.

La distancia adicional por regresarse a hacer la última recolección, en el peor de los casos, es  $2j_2d$ , donde  $j_2$  es el número de distribuciones después de la última recolección.

Sea  $f_{Z_2}(C'-1)$  la probabilidad de que existan ( $C'-1$ ) recolecciones e ( $i-C'$ ) distribuciones hasta el ( $i-1$ )-ésimo punto recorrido, en una zona con  $C'$  recolecciones y  $C'/\beta$  distribuciones. Entonces  $Z_2$ , que es la variable aleatoria que indica el número de recolecciones hasta el ( $i-1$ )-ésimo punto, tiene una distribución hipergeométrica,  $Z_2 \sim H[C'+C'/\beta, C', i-1]$ , y

$$f_{Z_2}(C'-1) = \frac{\begin{bmatrix} C' \\ C'-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C'/\beta \\ i-C' \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} C'+C'/\beta \\ i-1 \end{bmatrix}} \quad \text{para } i = C', \dots, C'+C'/\beta.$$

La probabilidad de que la última recolección, la recolección  $C'$ , ocurra en el  $i$ -ésimo punto, dado que existen ( $C'-1$ ) recolecciones hasta el punto  $i-1$ , es:  $1 / (C'+C'/\beta - i + 1)$ .

Entonces la probabilidad de que la última recolección ocurra en el  $i$ -ésimo punto recorrido es:

$$\frac{f_{Z_2}(C'-1)}{C'+C'/\beta - i + 1}, \quad \text{con } Z_2 \sim H(C'+C'/\beta, C', i-1),$$

que en forma más simple puede expresarse como:

$$g_{Z3}(i-C') = \frac{\begin{bmatrix} i-1 \\ i-C' \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} C'+C'/\beta \\ C' \end{bmatrix}}, \text{ donde } Z3 \text{ indica el número de distribuciones antes de la última recolección.}$$

Por lo tanto, la esperanza de la distancia adicional máxima por zona es:

$$\sum_{i=C'}^{C'+C'/\beta} g_{Z3}(i-C') 2 [ C' + C'/\beta - i ] d = 2dQ_2. \quad (3.22)$$

De aquí que,  $[ C'+C'/\beta + 2Q_2 ] d$  es el recorrido esperado por zona, y  $[ 1 + 2Q_2 / (C'+C'/\beta) ] d$  es la distancia esperada local por punto. Entonces la distancia total recorrida por punto es:

$$d_{tp} \approx \begin{cases} \left[ 1 + \frac{2Q_2}{C'+C'/\beta} \right] \frac{k'}{(\delta_1 + \delta_2)^{1/2}} & \text{para pocas rutas,} \\ \frac{2r_m}{C'} + \left[ 1 + \frac{2Q_2}{C'+C'/\beta} \right] \frac{k}{(\delta_1 + \delta_2)^{1/2}} & \text{para muchas rutas,} \end{cases} \quad (3.23a) \quad (3.23b)$$

donde  $k'$  y  $k$  son constantes.

### CASO 3:

Existen  $C$  distribuciones y  $\beta C$  recolecciones por zona. El vehículo inicia cargado a su capacidad ( $u, C$ ) y finaliza el trayecto con una carga de tamaño regular, aunque no lleno; esto es porque aunque  $u$  es pequeña, hay un número importante de puntos de recolección en la zona.

El proceso de distribución-recolección es como en los casos anteriores, sólo que aquí puede existir recorrido adicional al principio de la ruta, como en el caso 1, y en partes intermedias de la misma. Sean  $i_d$  e  $i_r$  el número de distribuciones y el de recolecciones 'hasta' el punto  $i$ , respectivamente. Entonces hay recorrido adicional cuando en el  $i$ -ésimo punto se cumple:

$$i_r u_2 > i_d u_1$$

=====>

$$\Gamma > i_d / i_r.$$

(3.24)

CASO 4:

Este caso es inverso al caso 3. Existen C'/B distribuciones y C' recolecciones. El vehículo inicia con una carga de tamaño regular, porque a pesar de que  $u_1$  es pequeña, hay muchos puntos de distribución, y regresa a la fuente cargado a su capacidad ( $u_2$  C').

El proceso de distribución-recolección es semejante al de los casos anteriores, con la particularidad de que aquí puede existir recorrido adicional al final de la ruta, como en el caso 2, y además en partes intermedias de la misma. El espacio inicial vacío en el vehículo es:  $C'u_2 - (C'/B)u_1$ . Entonces el recorrido adicional se produce cuando no hay cupo en el vehículo para recolectar en el punto  $i$ , esto es, cuando se cumple:

$$i_r u_2 > [ i_d u_1 + [ C'u_2 - (C'/B)u_1 ] ]$$

=====>

$$\Gamma > [ (C'/B) - i_d ] / (C' - i_r).$$

(3.25)

CASO 5:

Este caso es muy similar al caso 3. Existen C distribuciones y CB recolecciones por zona. El vehículo inicia lleno ( $u, C$ ) y finaliza con una carga mediana. Esto se debe, en contraste con el caso 3, a que hay pocos puntos de recolección en la zona, pero con  $u_2$  aproximadamente igual a  $u_1$ .

La forma de la distribución-recolección es como la del caso 3, porque puede existir recorrido adicional al principio y en partes intermedias de la ruta. Entonces, se produce recorrido adicional cuando en el punto  $i$  se cumple que:

$$i_r > i_d.$$

(3.26)

CASO 6:

Este caso es parecido al caso 4 e inverso al 5. El vehículo inicia con una carga mediana, porque  $\delta_1$  es pequeña y  $u_1$  es comparable a  $u_2$ , y regresa a la fuente completamente lleno ( $C' u_2$ ). Existen C' recolecciones y C'/B distribuciones en la zona.

El recorrido adicional puede ocurrir tanto en la parte final de la ruta, como en partes intermedias. Entonces, este recorrido se origina si para el  $i$ -ésimo punto visitado ocurre que:

$$C' - i_r > C'/B - i_d. \quad (3.27)$$

#### CASO 7:

Existen  $C$  puntos de distribución y  $CB$  puntos de recolección por zona. El vehículo inicia y termina el recorrido, lleno. Esto se debe a que existen aproximadamente el mismo número de distribuciones que de recolecciones y éstas tienen igual unidad de carga.

La distribución-recolección se hace como en los casos anteriores, pero puede originarse recorrido adicional al principio, al final o en las partes intermedias de la ruta, esto es, existe recorrido adicional cuando se cumple (3.26).

#### CASO 8:

Aquí existen muchas distribuciones con unidad de carga pequeña y pocas recolecciones con unidad de carga grande, lo que produce que el vehículo salga lleno de la fuente y regrese de la misma manera. Existen  $C$  puntos de distribución y  $CB$  puntos de recolección por zona, y puede originarse recorrido adicional al principio, al final o en las partes intermedias de la ruta donde se cumpla (3.24).

#### CASO 9:

Existen  $C$  puntos de distribución y  $CB$  puntos de recolección por zona. El vehículo inicia cargado a su capacidad ( $u_1, C$  o  $u_2, C'$ ) y regresa de la misma manera, lo que ocurre porque hay pocas distribuciones con unidad de carga grande, y muchas recolecciones con unidad de carga pequeña. La distribución-recolección se hace como en los Casos 7 y 8, produciéndose recorrido adicional al principio, al final o en las partes intermedias de la ruta donde se cumpla (3.24).

Para los casos del 3 al 9, no se obtiene el recorrido adicional esperado por regresar a hacer las recolecciones saltadas. La probabilidad de que este recorrido exista es mayor que la de los casos 1 o 2, sin embargo es mucho más difícil de determinar.

En este capítulo se ha analizado el Método de Daganzo y Hall (1990), que se compone de los mismos pasos que el Método de Newell y Daganzo (1986 a y b), pero que presenta estrategias distintas para el diseño de rutas. Estas estrategias, en su forma original (e "invertida") son:

- Si hay pocas rutas y pocas recolecciones (distribuciones) las rutas se diseñan como si no existieran recolecciones (distribuciones), las cuales se hacen después (antes) de todas las distribuciones (recolecciones) y antes de regresar a (después de salir de) la fuente.
- Si hay pocas rutas y muchas recolecciones (distribuciones), todas las recolecciones (distribuciones) de la zona se hacen en una sola ruta, que puede ser la misma de la distribución (recolección).
- Si hay muchas rutas, las rutas de distribución (recolección) se diseñan independientemente de las recolecciones (distribuciones), las cuales si están en el interior de la región se hacen a través de los rayos, y si están en el fleco se hacen a través de rutas que inicien y terminen en la punta final de los rayos dentro de una banda.

En la parte final de este capítulo se ha propuesto el método DRM para el problema donde las distribuciones y las recolecciones se realizan indistintamente y hay restricciones de capacidad en los vehículos para ambos servicios. Este método también es similar al método presentado en el Capítulo 2, excepto en que:

- el vehículo recorre la ruta recolectando y distribuyendo, pero si en un momento dado no tiene cupo suficiente para continuar recolectando, debe saltarse el o los puntos de recolección que le correspondía visitar a continuación, para ir a el o los puntos de distribución siguientes hasta que tenga espacio suficiente para hacer todas las recolecciones saltadas, y posteriormente debe continuar con la ruta;
- y el tamaño óptimo de las zonas se determina con base en el valor de  $\delta$ ,  $\delta = \delta_1 + \delta_2$ .

En el siguiente capítulo se resuelve un problema de diseño de rutas, usando el método DRM. Esta aplicación del método ilustra la bondad del mismo, en cuanto a que es de fácil uso, necesita pocos recursos para funcionar y origina una buena solución.

## CAPITULO 4

### APLICACION PRACTICA

En este capítulo se explica y se da solución a un problema de distribución-recolección sobre la región central-poniente del área metropolitana de la Ciudad de México.

Se propone un problema que existe en la realidad, aunque se cambia su región de servicio. Así que se trata un problema ficticio, pero de características reales.

Primero se define el problema, "el Super en Su Casa", cuyas características (región irregular, fuente externa, posiciones no conocidas de los puntos, entre otras), lo hacen difícil de resolver por métodos clásicos.

Posteriormente se justifica el uso de un método MD, el método DRM; se determinan los contornos de equi-tiempo de recorrido; se diseñan las rutas (se hace la zonificación y la determinación de las rutas); y se estima el recorrido total, usando los resultados de la sección 3.2.2, ya que el problema puede clasificarse como: Problema de diseño de rutas de distribución y recolección, con restricciones de capacidad en los vehículos sobre ambos servicios, y cuando éstos se realizan en forma mezclada, sobre una región de forma irregular.

Finalmente, se hace la evaluación de los resultados obtenidos.

#### 4.1 DEFINICION DEL PROBLEMA: EL SUPER EN SU CASA

Debido al desmesurado crecimiento de la Cd. de México y a los problemas de tráfico y contaminación que éste acarrea, aunados al hecho de que la gente de la Ciudad cada vez tiene menos tiempo libre y aún menos tiempo para ir de compras, ha surgido un servicio que pretende atenuar un poco este problema: el servicio de Super en su Casa.

Este servicio consiste en lo siguiente:

- Distribuye productos de consumo cotidiano, tales como abarrotes, frutas, legumbres, artículos de perfumería, vinos, utensilios domésticos, juguetes y artículos de papelería, entre otros; o la ropa que ya esté lista en la tintorería.
- Recolecta ropa para llevarla a la tintorería.
- El pago por el servicio puede ser en efectivo o con tarjeta

de crédito.

- Los pedidos se hacen por teléfono: de 7:00 a 10:00 horas, de lunes a viernes, o de 8:00 a 11:00 horas, el sábado, si se requieren para ese mismo día; o después de estas horas, si se necesitan para el día siguiente.
- Los telefonistas toman los pedidos e informan a los clientes sobre las características de los productos que están en venta, como son: marca, presentación, precio, etc.
- Las distribuciones y las recolecciones se realizan de 11:00 a 14:30 horas, de lunes a viernes, y de 12:00 a 15:30 horas, el sábado.

El servicio de Super en su Casa funciona ya, en la realidad, en una porción bastante pequeña de la Cd. de México, pero debido al notable éxito que ha tenido, se pretende expandir la región atendida.

Entonces, el problema se presenta como sigue:

- Se desea atender la región que tiene como límites: Río Churubusco, al sur; el Eje Central, al oriente; el Periférico, al poniente; y Ejército Nacional, el Circuito Interior y San Cosme, al norte. Esta región incluye parte de las delegaciones: Benito Juárez, Cuauhtémoc y Miguel Hidalgo.
- En la región se encuentran múltiples avenidas y calles, donde es posible circular a diferentes velocidades.
- Una parte del Bosque de Chapultepec está incluida en la región. En esa gran área verde no hay viviendas en donde distribuir o recolectar.
- En términos generales, la región comprende un área aproximada de 40 kms<sup>2</sup>, presenta una red muy compleja de calles y avenidas, y es de una forma irregular. Ésta se muestra en la Figura 4.1.
- Se estima que de las 177,600 viviendas que existen en la región<sup>(\*)</sup>, a lo más el 2.5% hará uso semanal de este servicio. Diariamente se espera atender a lo más a 740 viviendas, considerando que la demanda sea uniforme; de éstas, se estima que aproximadamente el 85% requerirá servicio de distribución y el 15% servicio de recolección.

---

(\*) Dato obtenido del XI Censo General de Población y Vivienda, 1990, del INEGI.

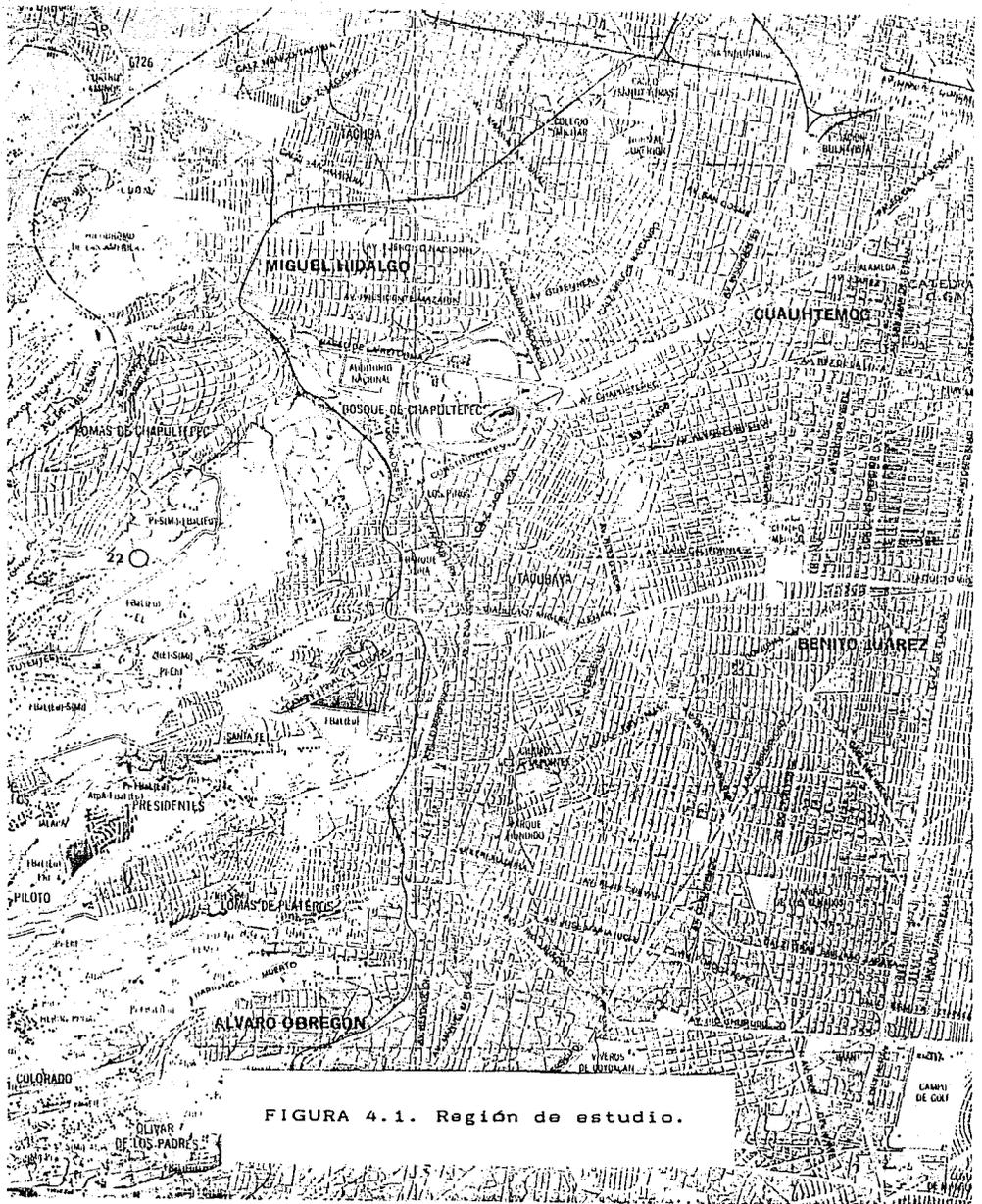


FIGURA 4.1. Región de estudio.

- Para la distribución-recolección se usan combis panel que consumen gas y pueden circular todos los días. Cada una tiene dos estantes divididos en 20 compartimentos de 0.17mts<sup>3</sup>. (0.70mts. x 0.55 mts. x 0.45 mts.), cada uno. El compartimento más cercano a la puerta lateral puede transformarse en 5 armarios para depositar la ropa adecuadamente. Así que, las unidades de carga de la distribución y la recolección son: 0.17 mts<sup>3</sup>. y 0.03 mts<sup>3</sup>., respectivamente.
- Por lo general, un pedido para una vivienda cabe en un solo compartimento. Cuando esto no es así, el pedido se considera como si fueran varios, según el número de compartimentos que requiera.
- La fuente o almacén desde donde se envían todos los pedidos de distribución-recolección, se encuentra ubicada en la zona industrial de Naucalpan, muy cerca de El Toreo. La fuente está fuera de la región.

Este problema puede ser representado, según la Figura 1.1 del Capítulo 1, como:

	b	-	b	-	c	-	a	-	b	-	b	-	b
nivel	1		2		3		5		6		7		8

ya que el problema es de distribución y recolección, con múltiples vehículos, sin lugares de distribución-recolección registrados, con restricciones en el horario de distribución, con múltiples productos de entrega definida y con límites o restricciones de capacidad en los vehículos.

El objetivo es encontrar el conjunto de rutas para cada uno de los vehículos, con la menor distancia recorrida total.

#### 4.2 SOLUCION DEL PROBLEMA: EL SUPER EN SU CASA

La solución del problema consta de cuatro partes principales:

- Primero se verifica que sean satisfechos los supuestos descritos en la sección 2.2.
- Después se determinan los contornos de equi-tiempo de recorrido sobre la región.
- En tercer lugar, se diseñan las rutas. Aquí se hace la zonificación de la región y la determinación de las rutas en cada zona.
- Finalmente, se estima el recorrido total dentro de la región.

#### 4.2.1 Justificación del Uso del Método

El problema tiene algunas características primordiales que lo hacen difícil de resolver por métodos clásicos. Estas características son:

- La región es de forma irregular, tiene calles y avenidas con distintas velocidades y la fuente está fuera de la misma.
- No se conoce el número de puntos a visitar, ni la posición exacta de éstos, sino hasta las 10:00 hrs. Las posiciones de los puntos varían fuertemente día a día, pero es posible considerar que éstos se distribuyen uniformemente sobre la región.
- El problema es "grande" y el tiempo para plantearlo y darle solución es muy limitado. Los pedidos se terminan de recibir a las 10:00 hrs. y a las 10:25 hrs., aproximadamente, se comienzan a cargar los vehículos, para que alrededor de las 11:00 hrs. ya estén distribuyendo-recolectando en la zona que les corresponde. Así que a lo más en 25 minutos se debe encontrar la mejor solución posible para el problema.

Problemas de este tipo son muy comunes en el área metropolitana. En el Apéndice A se describen algunos de ellos junto con la forma en que son solucionados. De esa investigación se obtuvo que, por lo general, las empresas distribuidoras resuelven el problema empíricamente, sólo ayudados por la experiencia. Esto hasta cierto punto puede resultar bueno, pero sería mejor que se combinara con técnicas matemáticas para obtener una solución más cercana a la óptima, sobre todo en casos, como el que se trata en esta sección, donde la experiencia previa para distribución-recolección es limitada, porque el problema es de reciente aparición, y la red en cuestión es muy compleja.

Así que lo más conveniente, para este caso, es emplear un MD, particularmente el método DRM, para hacer la zonificación y la determinación de rutas y para estimar el recorrido total aproximadamente mínimo de los vehículos, ya que existen restricciones de capacidad en los vehículos, tanto al distribuir como al recolectar y los puntos de distribución y recolección se visitan indistintamente en la ruta.

Los supuestos para poder usar esta metodología son:

- Existe una flota de vehículos idénticos con capacidad de C artículos.
- Existen muchas rutas ( $N \gg C$ ,  $N$ =número de puntos a visitar).

- Los puntos se distribuyen aleatoriamente, con densidad  $\delta$ , sobre la región.
- La red de calles es muy cerrada. El espacio entre éstas es pequeño comparado con  $\delta^{-1/2}$ .
- Se tienen vías rápidas, pero el espacio entre éstas es grande comparado con las dimensiones de una sola zona.
- El costo está en función del recorrido por cada vehículo.

Estos supuestos se satisfacen perfectamente para este problema, porque:

- Se tiene una flota de combis panel con capacidad de 20 pedidos de distribución por día.
- Se espera tener muchas rutas ( $N = 740 \gg C = 20$ ).
- Los puntos se distribuyen aleatoriamente, con densidad  $\delta = N/A = 18.5$  puntos por  $\text{km}^2$ .
- La red de calles es muy cerrada. El espacio promedio entre éstas, que es de 150 mts., es menor que  $\delta^{-1/2}$ .
- Las vías rápidas están muy separadas. Esto se muestra en la Figura 4.2.
- Se desea minimizar la distancia recorrida por los vehículos, porque esto indirectamente minimiza el costo de recorrido.

Por lo tanto, resolver el problema de la manera descrita anteriormente proporcionará una solución, que aunque podrá no ser óptima, será una buena solución y se obtendrá rápidamente.

#### 4.2.2 Determinación de los Contornos

El paso que precede a la zonificación consiste en la construcción de una familia de contornos de equi-tiempo de recorrido desde la fuente, a través de las vías más rápidas.

Estos contornos se hacen con el fin de mostrar los efectos de las vías rápidas y la dirección de recorrido local preferida para llegar a cualquier punto.

Para simplificar un poco el problema, se considera que sobre la región sólo existen tres tipos diferentes de vías, como se muestra en la Figura 4.2:

- las calles locales,
- las vías rápidas y

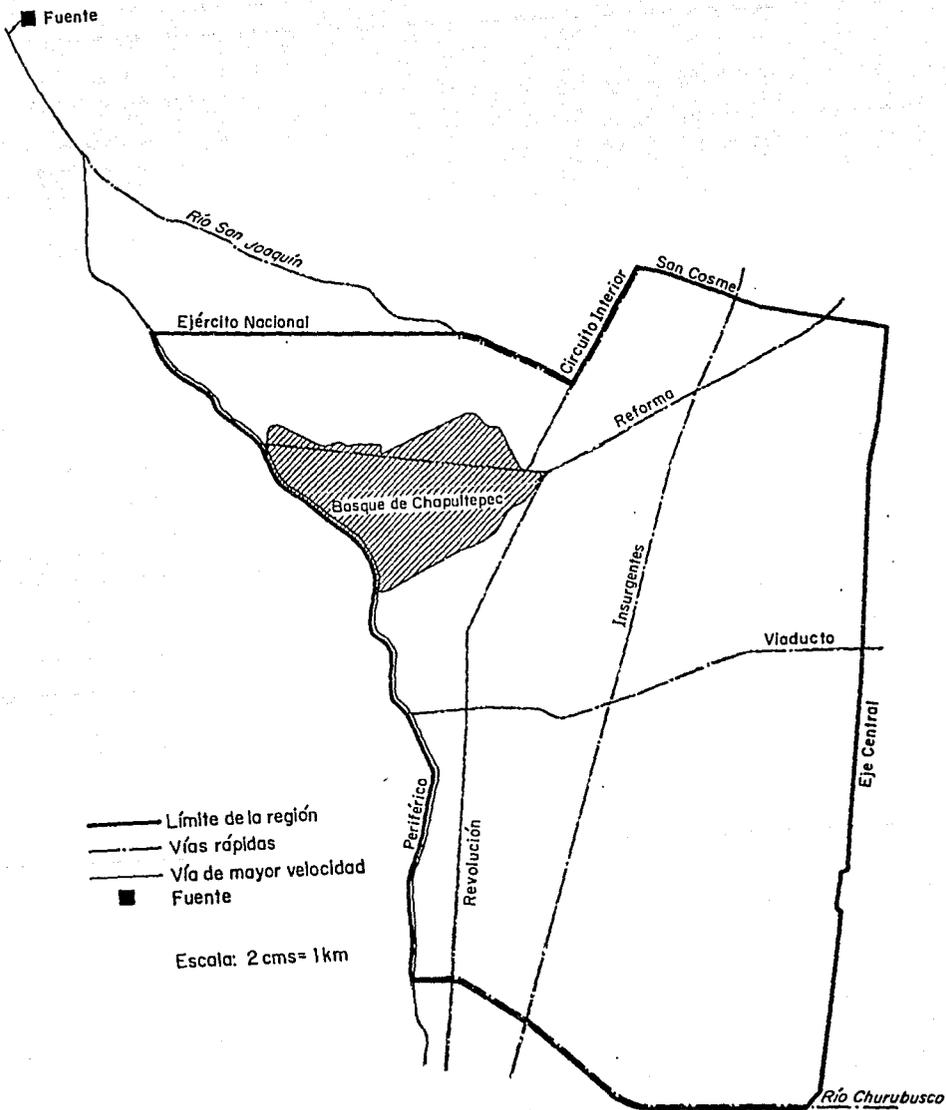


Fig 4.2. Diferentes vías dentro de la región

- la vía de máxima velocidad.

Sobre las calles locales es posible circular, lentamente, con velocidad  $v_1 \approx 20$  kms/hr. Estas calles forman una red muy cerrada dentro de la región, ya que entre ellas hay una separación promedio de 150 mts. No están representadas en la Figura 4.2 (a excepción de las que sirven para delimitar la región).

Se considera que existen algunas vías rápidas donde es posible circular a velocidad  $v_2 = 2v_1$  y están mucho más separadas entre sí que las calles locales. Para este problema, las vías rápidas que se han tomado en cuenta son las avenidas Insurgentes, Revolución, Circuito Interior, Paseo de la Reforma, Viaducto, Río Churubusco y Río San Joaquín.

En cuanto a las vías de máxima velocidad, se considera que sólo existe una y ésta es el Anillo Periférico. La velocidad de circulación que se le atribuye es  $v_3 = 2v_2$ .

Una vez que se han clasificado las vías, se procede al trazo de las líneas de contorno. Cada línea unirá las partes hasta donde es posible llegar desde la fuente, a través de las vías más rápidas o de mayor preferencia, en un mismo tiempo dado. Los contornos son de utilidad para determinar la orientación de las zonas de distribución.

En la Figura 4.3 aparecen varias líneas de contorno equi-tiempo de recorrido sobre la región de interés. Estos contornos han sido construidos considerando que el tráfico presenta condiciones normales. Para una situación extraordinaria los contornos deben ser modificados considerablemente.

La determinación de los contornos puede realizarse una vez que sea conocida la región en cuestión, aún antes de conocer el número de puntos a visitar dentro de la misma.

#### **4.2.3 Zonificación y Determinación de Rutas**

El problema de interés presenta restricciones en la capacidad de los vehículos, tanto al distribuir como al recolectar.

Las distribuciones y las recolecciones se realizan indistintamente, pero el vehículo tiene capacidad para hacer 20 distribuciones; y una vez que se desocupe un compartimento, tiene capacidad para hacer 5 recolecciones. De aquí que,  $C=20$  y  $C'=5$ .

Si en un día determinado se tienen 736 puntos: 640 de distribución y 96 de recolección, entonces  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  (densidad de

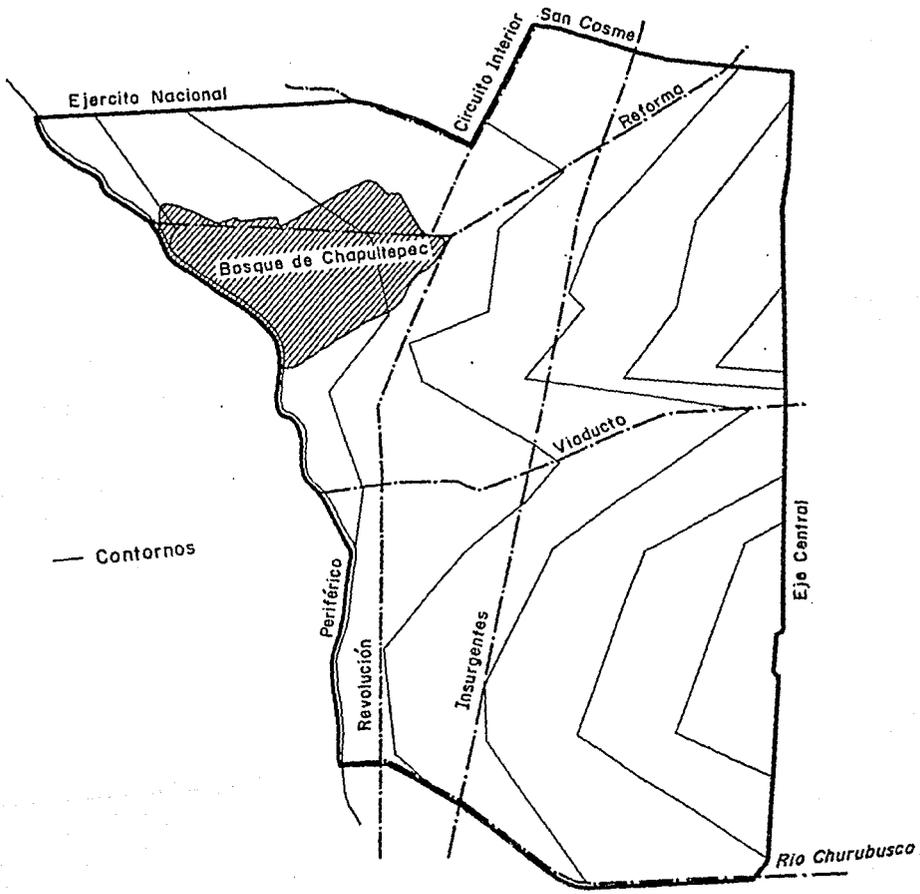


Fig 4.3 Contornos de equi-tiempo de recorrido

puntos de distribución y de recolección, respectivamente) y  $\beta$ , serán:

$$\delta_1 = N_1 / A = 16 \text{ puntos por km}^2, \text{ y}$$

$$\delta_2 = N_2 / A = 2.4 \text{ puntos por km}^2, \text{ y}$$

$$\beta = \delta_2 / \delta_1 = 0.15.$$

Como  $C' \geq \beta C$ , entonces el tamaño de las zonas debe ser calculado en base a los datos de la distribución (porque la recolección es pequeña en relación a la distribución). Así que, el ancho de la banda (obtenido de la ec. 2.12) y el largo de la zona, óptimos, son:

$$w^* = [ 3 / (2\delta_1) ]^{1/2} \approx 306 \text{ mts. y}$$

$$L^* = C / (2w^*\delta_1) \approx 2,041 \text{ mts.}$$

Por lo tanto, la región debe ser dividida en zonas aproximadamente rectangulares de ancho 612 mts. ( $2w^*$ ) y largo 2,041 mts. ( $L^*$ ).

Las zonas no tendrán las mismas direcciones de la retícula de calles locales, pero su orientación será a un ángulo entre la normal a las líneas de contorno y la dirección más cercana de la retícula, y estarán dirigidas hacia la vía rápida más próxima, como quedó establecido en la sección 2.2.4.

El número de zonas en la región es  $N_1 / C = 32$ . Así que se requerirán 32 vehículos.

Al proceso anterior, de obtener el tamaño y la orientación óptimos de las zonas y de dividir la región en éstas, se le conoce como zonificación. El resultado de la zonificación de la región del problema de interés de este capítulo, se presenta en la Figura 4.4.

La determinación de rutas, que es el conocer el orden de recorrido de los puntos dentro de cada zona, se obtiene muy fácilmente. El recorrido de los puntos debe ser en orden longitudinal dentro de una banda de ancho  $w^*$ , como en la Figura 2.3. Este recorrido puede mejorar cuando ya se conozcan las posiciones exactas de los puntos.

La zonificación y la determinación de rutas, proporcionan un sistema de rutas que minimiza (aproximadamente) la distancia total recorrida por todos los vehículos dentro de la región.

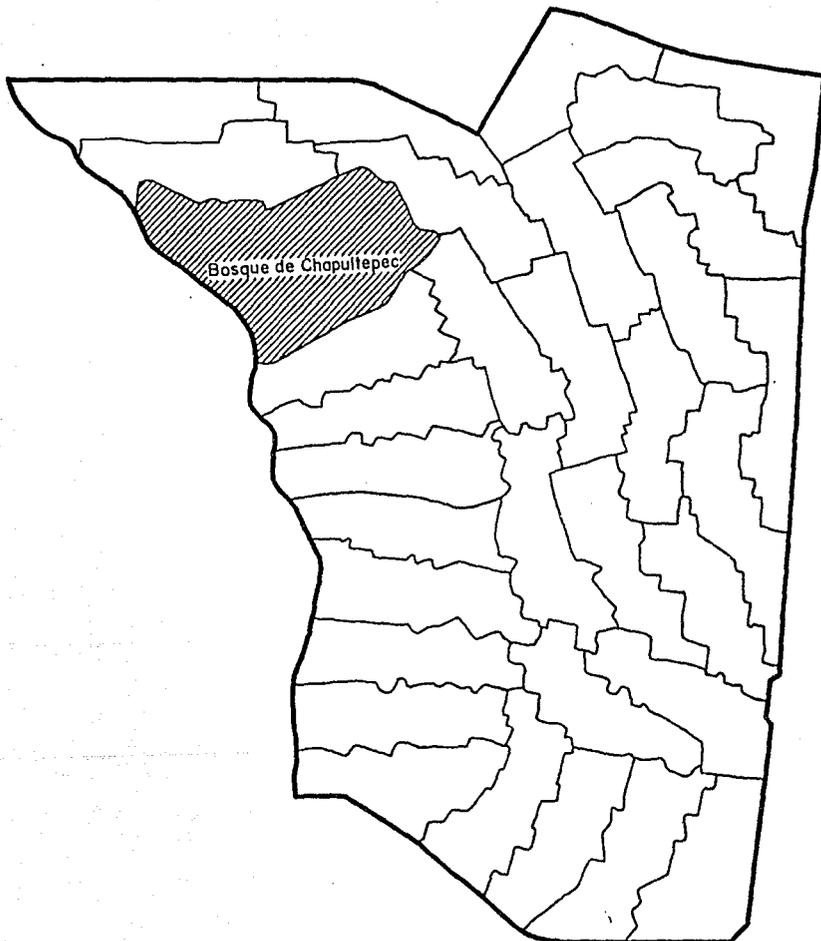


Fig 4.4. Zonificación de la región

#### 4.2.4 Estimación del Recorrido Total

Se estima que la distancia promedio de los puntos a la fuente,  $r_m$ , es de 14 kms.

Se sabe que las unidades de carga, para la distribución y para la recolección son:  $u_1 = 0.17$  mts., y  $u_2 = 0.03$  mts., de lo cual  $\Gamma = u_2 / u_1 \approx 0.2$ , y también se sabe que  $\beta = 0.15$ . Entonces dado que  $\beta \ll 1$  y  $\Gamma \ll 1$ , se presenta el Caso 1 de los mencionados en la sección 3.2.2.

El vehículo inicia lleno, con una carga de 20 pedidos, y regresa con una carga muy pequeña. Éste va recorriendo los puntos a lo largo de la banda, pero cuando existen en primer término una o varias recolecciones, no las puede hacer porque no tiene cupo. Entonces las tiene que saltar; después debe ir al punto de distribución más próximo, y posteriormente regresar a hacer las recolecciones saltadas.

La distancia esperada total recorrida por punto, en el peor de los casos (cuando las recolecciones y la distribución están aproximadamente sobre la misma línea vertical), se obtiene sustituyendo los datos del problema en la ecuación 3.21b, la cual se muestra a continuación:

$$d_{tp} \approx \frac{2r_m}{C} + \left[ 1 + \frac{2Q_1}{C+CB} \right] \frac{k}{(\delta_1 + \delta_2)^{1/2}}$$

donde  $Q_1 = \sum_{i=1}^{CB+1} \frac{i-1}{i} f_{z1}(1)$  con  $z1 \sim H [ C+CB, C, i ],$  y

$k$  es constante.

Los datos del problema son:

$k = \sqrt{2/3}$  (para la Métrica de Manhattan),

$\delta_1 + \delta_2 = 18.4$  (puntos por  $\text{km}^2$ ),

$C = 20$  distribuciones,

$C + CB = 23$  puntos, y

$r_m = 14$  kms.

En primer lugar se calculan los  $f_{z1}(1)$  (probabilidad de tener un punto de distribución en  $i$  puntos recorridos, en una zona con  $C$  distribuciones y  $CB$  recolecciones) para  $i = 1, \dots, (CB+1)$ .

$$\text{Si } f_{z_1}(1) = \frac{\begin{bmatrix} C \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CB \\ i-1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} C+CB \\ i \end{bmatrix}}, \text{ entonces se obtiene:}$$

i	1	2	3	4
$f_{z_1}(1)$	0.8696	0.2371	0.0339	0.0023

De aquí que,  $Q_1 = 0.2371/2 + 2(0.0339)/3 + 3(0.0023)/4 = 0.1429$ .

Entonces,

$$d_{tp} \approx 1.4 + (1.0062)(0.1903) = 1.5915 \text{ kms.}$$

Por lo tanto:

- La distancia total esperada (máxima) por punto es aproximadamente 1.59 kms.
- La distancia total esperada (máxima) por zona, o por vehículo, es  $d_{tp}(C+CB) = 36.60$  kms.
- La distancia esperada de recorrido (máximo) total por todos los vehículos es  $d_{tp}(N_1+N_2) = 1,171$  kms.

La solución a este problema minimiza, aproximadamente, el recorrido total de los vehículos, aunque aquí la estimación obtenida de este recorrido está en su cota superior.

El problema puede ser solucionado diariamente, una vez que se ha conocido el número de puntos a visitar; o bien puede ser resuelto sólo una vez de esta forma y tomarse el resultado como una solución inicial para algún método heurístico.

#### 4.3 EVALUACION DE LOS RESULTADOS

La solución (subóptima) obtenida para el problema "El Super en Su Casa", indicó que:

- i). la región debe ser dividida en 32 zonas, aproximadamente rectangulares, tal como se muestra en la Figura 4.4;
- ii). se requieren 32 vehículos; y
- iii). el recorrido esperado total es de 171 kms. por día.

Seguramente si se realiza el diseño de rutas tal como fue señalado en la sección anterior, el recorrido total real será mucho menor a los 171 kms. diarios estimados. Esto se debe a que se tomó en cuenta el máximo recorrido que podían hacer los vehículos para regresar a los puntos de recolección saltados.

La solución fue muy fácil de obtener y se encontró rápidamente. Esto fue posible gracias a las cualidades del método DRM, mismas que comparte con los MD.

El hecho de que la región tuviera forma irregular, que hubiera calles de distintas velocidades y que la fuente fuera externa, pudo ser atacado por medio del empleo de los contornos de equi-tiempo de recorrido. Al trazar éstos, se incluyen indirectamente estas características de la región.

El que no se conociera la posición exacta de los puntos (sino sólo que se distribuían uniformemente), se atacó dividiendo la región en zonas, cada una con esperanza de C+CB puntos.

Así, al solucionar el problema se cumplió con lo planeado: minimizar en lo posible el recorrido total de los vehículos, y hacerlo en muy poco tiempo y con escasa información.

Este método es ideal para resolver problemas donde, como en el que se presenta en este capítulo, el tiempo es esencial y no se dispone de información detallada sobre la red de puntos de distribución-recolección, porque al mismo tiempo ahorra en logística y mejora la oportunidad de tiempo y lugar.

El método produce ahorro en logística debido a que no requiere demasiados recursos. Para que el método se aplique se necesita poco tiempo, pocos datos sobre la red de distribución y sobre los puntos dispuestos en la misma, y además pocos y sencillos cálculos matemáticos; así que no se gasta demasiado en la obtención de datos y en el personal y equipo necesarios para determinar un buen sistema de rutas.

Por otra parte, la solución que se produce es buena pero tal vez no óptima, así que es posible que ésta sea más costosa. Pero para este problema esto no es tan importante, ya que lo principal es llevar el producto al consumidor en el momento y tiempo justos. Entonces, si rápidamente se encuentra una buena

solución, un poco más costosa que la óptima, es más conveniente utilizar ésta que esperar a obtener una solución exacta, con costo mínimo, pero que no esté a tiempo para satisfacer oportunamente la demanda.

Por tanto, el empleo de este método hace que se brinde al cliente un producto con mejor servicio y menor costo a la vez, haciendo este último más competitivo.

## CONCLUSIONES

En esta tesis se ha propuesto el empleo de métodos sencillos para resolver un problema complejo: el problema de diseño de rutas de distribución y recolección, en regiones de diferentes formas, con restricciones en la cantidad de artículos que un vehículo puede distribuir y recolectar.

En vez de determinar la solución óptima con base en datos detallados y consumir tiempo en análisis numérico, se obtiene una solución razonable usando muy poca información.

Hasta ahora, el problema de interés se ha venido resolviendo por medio de la experiencia; o el uso de métodos heurísticos o de optimización, los cuales son complejos y tardados.

Aunque existen métodos de la misma familia que los que aquí se analizan, no los hay para el problema de diseño de rutas de distribución y recolección con restricciones de capacidad de los vehículos en ambos servicios. Es por ello que en esta tesis se proponen formas simples de resolver este problema, con los resultados siguientes:

- En la situación donde las distribuciones deben ser realizadas antes que las recolecciones, las fórmulas para estimar el recorrido en las rutas (subóptimas) resultaron ser muy parecidas, en forma, a las obtenidas cuando sólo hay restricciones de capacidad en la distribución.

-- Para la situación donde las distribuciones y las recolecciones pueden hacerse indistintamente, se propuso el método DRM (distribución y recolección mezcladas) y resultaron nueve casos. Para los dos casos más simples, las fórmulas para estimar el recorrido incluyen una variable cuya distribución es hipergeométrica.

La aplicación del método DRM al problema de distribución y recolección sobre una parte de la Ciudad de México, reveló la utilidad del método y sus ventajas con respecto a formas alternas de solución.

El método es muy sencillo, rápido y además permite diseñar las rutas y estimar los costos aún antes de conocer las posiciones exactas de los puntos de distribución y de recolección. Es muy útil porque permite

realizar decisiones rápidas y buenas, en un mundo cambiante.

Las técnicas aquí analizadas tienen un amplio campo de aplicación; pueden servir en muchos problemas reales con características tales como:

- Que el problema presente una red compleja. Este tipo de red es típico en áreas metropolitanas.
- Que no se disponga de suficiente información sobre la red.
- Que se requiera rapidez en la solución.
- Que se quieran disminuir los costos de diseño de rutas de distribución y recolección.

Si se tiene poco tiempo para encontrar una solución o no se tiene suficiente información sobre la red de puntos, es recomendable usar las estrategias de diseño de rutas aquí dadas para encontrar una solución subóptima. Pero en el caso de que el tiempo y la información estén disponibles, otro tipo de métodos pueden proporcionar mejores soluciones; la solución subóptima puede servir como solución inicial de estos métodos.

Investigaciones posteriores podrían concentrarse en buscar fórmulas de aproximación para el recorrido de las rutas, para los siete casos más complejos del mismo problema, mencionados en la sección 3.2.2.

Gracias a esta investigación ha sido posible darse cuenta que otros problemas más complejos pueden ser tratados en forma similar. Por ejemplo sería muy interesante desarrollar nuevas estrategias, con base a lo expuesto aquí, para problemas donde existan además de restricciones de capacidad, restricciones de tiempo. En el Apéndice C se mencionan algunos documentos referentes a este y otros problemas de diseño de rutas.

## NOMENCLATURA

N	número de puntos de distribución-recolección,
A	área de la región,
$d_w, d$	distancia esperada entre dos puntos consecutivos,
w	ancho de la banda,
X	distancia a lo ancho de la banda entre dos puntos aleatorios consecutivos,
Y	distancia a lo largo de la banda entre dos puntos aleatorios consecutivos,
$\delta$	densidad de puntos (de distribución-recolección) por unidad de área,
$l_a$	longitud del lado menor de la zona,
L	longitud del lado mayor de la zona,
C	cantidad de artículos para distribuir que caben en un vehículo,
$d_{to}$	distancia local promedio recorrida por punto dentro de la zona,
D	longitud total de las rutas que visitan todos los puntos de distribución,
$\theta_k$	mitad del ángulo de la zona en forma de cuña en el anillo K,
R	radio de la región,
$r_j$	radio del anillo j,
K	número de anillos,
$N_k$	número esperado de zonas en el anillo k,
$z_1$	límite del primer anillo para $K=2$ ( $r_1/R$ ),
$\theta$	ángulo que forman los ejes de la zona con las direcciones de la retícula,
$\phi$	ángulo entre los contornos y la dirección orientada más favorablemente de la retícula,

$d'$	ahorro en la distancia recorrida por punto,
$d_{tp}$	distancia total recorrida por punto,
$r_m$	distancia promedio de un punto a la fuente,
$\alpha$	relación entre el tamaño del área de servicio con respecto al área de distribución cubierta por un vehículo,
$B$	relación entre el número de recolecciones con respecto al número de distribuciones,
$\delta_1$	densidad de puntos de distribución por unidad de área,
$\delta_2$	densidad de puntos de recolección por unidad de área,
$D_A$	distancia recorrida por unidad de área,
$x$	distancia de un contorno al punto más alejado dentro de la región de servicio,
$d_L$	distancia recorrida promedio por punto,
$d_f$	distancia recorrida por punto de distribución o de recolección en el fleco,
$d_d$	distancia recorrida promedio por punto de distribución,
$d_p$	distancia recorrida promedio por punto de recolección,
$C'$	cantidad de artículos por recolectar que caben en el vehículo,
$N_1$	número de puntos de distribución,
$N_2$	número de puntos de recolección,
$u_1$	unidad de carga de la distribución,
$u_2$	unidad de carga de la recolección,
$\Gamma$	relación entre la unidad de carga de la recolección con respecto a la de la distribución,
$j_1$	número de recolecciones saltadas en la ruta,
$j_2$	número de distribuciones después de la última recolección,

- Z1 número de distribuciones obtenidas al recorrer  $i$  puntos de una zona,
- Z2 número de recolecciones hechas hasta el  $(i-1)$ -ésimo punto recorrido en la zona,
- Z3 número de distribuciones hechas antes de la última recolección,
- $d_a$  distancia adicional por regresar a hacer las recolecciones saltadas,
- $d_{tp}$  distancia total recorrida por punto,
- $i$  número de distribuciones hasta el punto  $i$ ,
- $i_r$  número de recolecciones hasta el punto  $i$ .

## GLOSARIO

- LOGISTICA.** Ciencia que estudia cómo transportar artículos desde el centro de producción al centro de consumo, en formas efectivas en cuanto a costo.
- DISTRIBUCION.** Transporte de los productos desde los depósitos a los centros de consumo.
- RECOLECCION.** Transporte de los artículos desde varios orígenes a la fuente.
- DISTRIBUCION FISICA.** Distribución o recolección.
- RUTA.** Forma en que un vehículo hace el recorrido en una zona.
- REGION.** Area donde se encuentran los puntos de distribución-recolección que requieren servicio.
- ZONA.** Cada una de las partes en que se divide la región de servicio y que es atendida por un solo vehículo.
- SISTEMA DE RUTAS.** Conjunto de rutas para todas las zonas de la región.
- ARTICULO.** Producto consistente en una unidad de volumen o de peso.
- FUENTE.** Depósito o bodega.
- LUGARES REGISTRADOS.** Puntos de distribución-recolección fijos, a los que se debe necesariamente visitar.
- PROBLEMA DE DISEÑO DE RUTAS.** Problema que consiste en encontrar el sistema óptimo de rutas.
- PROBLEMA DEL AGENTE VIAJERO (PAV).** Problema que consiste en determinar la mejor ruta que un vendedor puede seguir partiendo de una ciudad origen, visitando cada ciudad destino una y sólo una vez, y regresando a la misma ciudad origen.
- PROBLEMA MULTIPLE DEL AGENTE VIAJERO (M-PAV).** Problema consistente en encontrar el mejor sistema de rutas para los M-agentes viajeros quienes salen y regresan a una ciudad base, de tal forma que cada ciudad cliente sea visitada exactamente una vez por exactamente un agente.
- PROBLEMA MULTIPLE DE RUTAS DE VEHICULOS (M-PRV).** Problema que consiste en el diseño de un sistema de rutas de mínimo

costo de la fuente a un número determinado de destinos, bajo restricciones de capacidad en los vehículos o de la longitud de las rutas.

**ALGORITMO HEURISTICO.** Algoritmo que proporciona "con eficiencia" buenas soluciones aproximadas para un problema dado.

**MD.** Métodos para el diseño de rutas, que se basan en las técnicas propuestas por Newell y Daganzo (1986a) y Daganzo y Hall (1990).

**ZONIFICACION.** Parte del diseño de rutas que consiste en particionar la región en zonas, asignando cada una a un vehículo.

**DETERMINACION DE RUTAS.** Establecimiento del orden de recorrido de los puntos dentro de cada zona.

**METRICA.** Sistema de medida.

**BANDA.** Tira a lo largo de la cual un vehículo hace el recorrido de una zona.

**DISTANCIA O RECORRIDO EN LINEA.** Recorrido de un vehículo de la fuente a una zona o de una zona a la fuente, sin distribuir ni recolectar.

**DISTANCIA O RECORRIDO LOCAL.** Recorrido dentro de una zona para visitar todos los puntos de la misma.

**CONTORNO EQUI-TIEMPO DE RECORRIDO.** Línea que une los lugares hasta donde es posible llegar desde la fuente por el camino preferido, en un mismo tiempo dado.

**RETICULA.** Red de calles y avenidas dentro de la región.

**RAYO.** Recorrido hecho por un vehículo de regreso a la fuente sin recolectar, o de la fuente a la zona, sin distribuir.

**FLECO.** Filas de zonas en la parte externa de la región.

**INTERIOR.** Todas las filas de zonas de la región, excepto el fleco.

**METODO DRM.** Método de diseño de rutas, de tipo MD, para el problema de distribuir y recolectar en forma mezclada, bajo restricciones en la capacidad de los vehículos, que condicionan simultáneamente los procesos de distribución y recolección.

**DISTANCIA ADICIONAL.** Recorrido extra por regresar a hacer las recolecciones saltadas.

## REFERENCIAS

- 1) ANTUN Juan Pablo, (1986): "Una Revisión del Concepto de Logística en la Empresa". Organó de difusión de las investigaciones realizadas en la Facultad de Contaduría y Administración, U.N.A.M., No.140, pp 37-83.
- 2) ANTUN Juan Pablo, (1991): "Cadenas Logísticas de Transporte". Informe de Actividades Relevantes del Sector Comunicaciones y Transportes de la Economía, 6o. núm.esp.,pp 26-39.
- 3) ANTUN Juan Pablo, Lozano Angélica y Alanís Alejandra, (1991): "Logística de Distribución de Mercancías en Areas Metropolitanas". XX Seminario de Ingeniería de Tránsito y Transporte. Asociación Mexicana de Caminos, A. C., México D. F.
- 4) ASHFORD Norman y Fathers Steve, (1989): "An Approach to Level of Service Design of Air Freight Terminals for Small Express Parcels". Transportation Planning and Technology, Vol. 14, pp 171-180.
- 5) BAZAARA Mokhtar y Jarvis John, (1989): "Programación Lineal y Flujo en Redes". Ed. Limusa, 540 pp.
- 6) DAGANZO Carlos F., (1984a): "The Distance Traveled to Visit N Point with a Maximun of C Stops per Vehicle". Transportation Science vol. 18, pp 331-350.
- 7) DAGANZO Carlos F., (1984b): "The Length of Tours in Zones of Different Shapes". Transportation Research Vol.18B No.2, pp. 135-145.
- 8) DAGANZO Carlos F., (1985): "Supplying a Single Location from Heterogeneous Sources". Transportation Research Vol. 19 B, No. 5, pp 409-419.
- 9) DAGANZO Carlos F., (1988): "Shipment Composition Enhancement at a Consolidation Center". Transportation Research Vol. 22 B, No. 2, pp 103-124.
- 10) DAGANZO Carlos F., (1991): "Logistics Systems Analysis". Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Ed. Springer-Verlag, Alemania, 320 pp.
- 11) DAGANZO Carlos F. y Hall Randolph W., (1990): "A Routing Model for Pickups and Deliveries: No Capacity Restrictions on the Secondary Items". Institute of Transportation Studies, University of California at Berkeley, Research report UCB-ITS-RR-90-3, pp 1-30.

- 12) DAGANZO Carlos F. y Newell G. F., (1985): "Physical Distribution from a Warehouse: Vehicle coverage and inventory levels". Transportation Research Vol 19 B, No. 5, pp 397-407.
- 13) DASKIN Mark S., (1985): "Logistics: An overview of the state of the art and perspectives on future research". Transportation Research Vol. 19 A, No. 5/6, pp 383-398.
- 14) DEJAX Pierre y Kieffer Jean-Paul, (1989): "Logistique et Gestion de la Production: Complémentarité, Interface y Recouvrement". 4es. Journées francophones sur la Logistique et les Transports, AFCET. Paris.
- 15) GOLDEN Bruce L. y Baker Edward K., (1985): "Future Directions in Logistics Research". Transportation Research Vol 19 A, No. 5/6, pp 405-409.
- 16) HALL Randolph W., (1989a): "Configuration of an Overnight Package air Network". Transportation Research Vol 23 A, No. 2, pp 139-149.
- 17) HALL Randolph W., (1989b): "Vehicle Packing". Transportation Research Vol. 23B, No. 2, pp 103-121.
- 18) HALL Randolph W., (1989c): "Dispatching Regular and Express Shipments between a Supplier and Manufacturer". Transportation Research Vol. 23B, No. 3, pp 195-211.
- 19) HAN Anthony Fu-Wha, (1985): "One - to - Many Distribution of Nonstorable Items. Approximate Analytic Models". Doctoral Dissertation, University of California, Berkeley.
- 20) LANGEVIN André, (1989): "Un Outil Interactif- graphique de Planification de Zones de Livraison". 4es. Journées francophones sur la logistique et les transports, AFCET. Paris.
- 21) LANGEVIN André y Saint-Mleux Yves, (1991): "A Decision Support System for Physical Distribution Planning". Centre de Recherche sur les Transports. Université de Montréal, Publication No. 764, pp 1-16.
- 22) LAPORTE G., Chapleau Suzanne, Landry Philippe y Mercure Helene, (1989): "An Algorithm for the Design of Mailbox Collection Routes in Urban Areas". Transportation Research Vol 23 B, No. 4, pp. 271-280.

- 23) LARDINOIS Christian, Crainic T. G. y Gendreau M., (1989): "Simulation, formation et expérimentation en planification/gestion du transport routier". 4<sup>e</sup> Journées francophones sur la Logistique et les Transports, AFCET. Paris.
- 24) LARSON, R. C. y Odoni A. R., (1981): "Urban Operations Research", Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- 25) MIN Hokey, (1987): "The Vehicle Routing Problem with Product/Spatial Consolidation and Backhauling". Doctoral Dissertation, The Ohio State University.
- 26) MIN Hokey, (1989): "The Multiple Vehicle Routing Problem with Simultaneous Delivery and Pick-up Points". Transportation Research Vol. 23 A, No.5, pp 377-386.
- 27) NEWELL Gordon F. y Daganzo C. F., (1986a): "Design of Multiple Vehicle delivery tours I. A Ring-radial Network". Transportation Research Vol 20B No. 5, pp. 345-363.
- 28) NEWELL Gordon F. y Daganzo C. F., (1986b): "Design of Multiple Vehicle Delivery Tours II. Other Metrics". Transportation Research Vol 20B. No. 5. pp 365-376.
- 29) NEWELL Gordon F., (1986): "Design of Multiple - vehicle Delivery Tours III. Valuable goods". Transportation Research Vol. 20B, No. 5, pp 377-390.
- 30) NOVICH Neil S., (1990): "Leading - Edge Distribution Strategies". The Journal of Business Strategy, pp 48-53, November/December.
- 31) RHEE Jong-Ho, (1987): "Vehicle Routing and Scheduling Strategies for Demand Responsive Transportation Systems". Doctoral Dissertation, University of Delaware.
- 32) ROBUSTÉ Francesc, Daganzo C. F. y Souleyrette II Reginald R., (1990): "Implementing Vehicle Routing Models". Transportation Research Vol. 24 B, No. 4, pp 263-286.
- 33) SAVY Michel y Laterrasse Jean, (1989): "Production Industrielle et Organisation des Transport Industrial". 4<sup>e</sup> Journées francophones sur la Logistique et les Transports, AFCET. Paris.
- 34) SHEFFI Yosef, (1985): "Some Analytical Problems in Logistics Research". Transportation Research Vol 19, No. 5/6, pp 402-405.

- 35) TAYLOR Keith, (1991): "Computer Systems in Logistics and Distribution. A Guide to Implementation and Applications". Ed. Kogan Page Limited, London , 185 pp.
- 36) TURNQUIST Mark A., (1985): "Research Opportunities in Transportation System Characteristics and Operations". Transportation Research Vol 19 A, No. 5, pp 357-366.
- 37) "The Transport and Planning Software Guide (1991)". PTRC Education and Research Services Limited, Glenthorne House, Hammersmith Grove, Londres, sept. 1991.

## APENDICE A

### ANALISIS DE PROBLEMAS REALES DE DISTRIBUCION-RECOLECCION

Con el propósito de conocer el proceso real de distribución-recolección de las empresas del área metropolitana de la Ciudad de México, se realizó una investigación de campo que incluyó los siguientes aspectos:

- Políticas de distribución,
- Area de distribución,
- Prácticas de distribución,
- Diseño de Rutas y
- Restricciones a la distribución.

Esta investigación de campo sobre empresas reales permitió conocer que:

- i). El proceso de distribución es tan variado como diferentes son las empresas, aunque depende en parte del tipo de producto en cuestión.
- ii). La política de la empresa determina en gran medida la forma de realizar la distribución.
- iii). A pesar de las marcadas diferencias de los procesos de distribución-recolección de las empresas, tienen en común las siguientes características:
  - a). No usan paquetes de cómputo ni modelos matemáticos para el diseño de rutas, diseñan éstas en forma manual basándose principalmente en la experiencia.
  - b). Tienen rutas definidas, aunque los puntos de distribución-recolección cambien continuamente (diariamente).
  - c). Dividen la región en subzonas.
  - d). No minimizan el costo de distribución, ni maximizan el uso de la capacidad del vehículo. Sólo distribuyen cumpliendo con las restricciones.

La síntesis de algunos de los principales casos reales analizados, se presenta a continuación.

**1. MARZAM: Empresa distribuidora de productos farmacéuticos de laboratorios a farmacias.**

**POLITICAS DE DISTRIBUCION:**

- Vender el servicio.
- Llegar con el pedido lo más pronto posible.
- Tener un solo depósito (pero próximamente será abierto otro).

**AREAS DE DISTRIBUCION:**

- Zona Metropolitana de la Cd. de México e interior del país.
- Cada vehículo cubre una subzona de distribución.

**PRACTICAS DE DISTRIBUCION:**

- Los vendedores hacen el pedido desde cada farmacia por medio de una computadora TP20, o bien los propios clientes lo hacen por teléfono.
- La facturación se hace con paquetería de cómputo.
- Los pedidos son surtidos con ayuda de bandas, antes de las 6:00 a.m..
- Los vehículos salen a distribuir a las 6:00 a.m..
- La distribución es por medio de camionetas alimentadas con gas.
- La flota de vehículos es propia.

**DISEÑO DE RUTAS:**

- El Gerente de Distribución diseñó las rutas con ayuda de mapas y recorriendo el 90% de las mismas.
- No usan paquetería de cómputo ni modelos matemáticos para el diseño de rutas.
- El recorrido de una ruta se hace de acuerdo a los horarios de las farmacias y a la distancia entre las mismas.
- Cada vehículo parte del depósito hacia su zona de distribución; hace su recorrido de farmacias en base al diseño de la ruta y a la propia decisión del operador; y regresa al depósito por una vía que puede ser diferente a la de llegada.

**RESTRICCIONES A LA DISTRIBUCION:**

- No pueden circular en el centro a ciertas horas.
- Si el pedido llega tarde, es cancelado.
- Hay rutas peligrosas. Para seguridad llevan perros de ataque, o policías.

**2. MARPROA: Empresa Transportista al servicio de Autrey, distribuidor de productos para farmacias.**

**POLITICAS DE DISTRIBUCION:**

- Vender el servicio.
- Las salidas de los vehículos están programadas, aunque no se llene el vehículo.
- Tienen un solo depósito.

**AREA DE DISTRIBUCION:**

- Todo el país.
- La distribución es 90% foránea y 10% urbana.

**PRACTICAS DE DISTRIBUCION:**

- La carga es efectuada con ayuda de montacargas, rieles y patinetas.
- Para el acondicionamiento de la carga usan remolques enfriadores y extractores de aire en algunas camionetas.
- Cuentan con 35 trailers, 10 camiones rabones y 15 camionetas pick-up.
- La flota de vehículos es propia.
- La facturación de la mercancía que transportan, la realizan ellos mismos.

**DISEÑO DE RUTAS:**

- Tienen 8 rutas en el área metropolitana de la Cd. de México definidas por los propios operadores.
- No emplean paquetes de cómputo y/o modelos matemáticos para el diseño de rutas.

**3. SABRITAS: Empresa productora y distribuidora de productos alimenticios.**

**POLITICAS DE DISTRIBUCION-RECOLECCION:**

- Maximización de la calidad de servicio y del número de clientes.
- Cada establecimiento es visitado tres veces por semana, cada tercer día.
- Cuenta con varios depósitos o sucursales que cubren, cada uno, la distribución de una parte del área metropolitana.

- Los productos tienen un código de caducidad, y deben ser recogidos (cambiados) antes de que dé vencimiento esta fecha.
- Los vendedores ganan la confianza de sus clientes.
- Los vendedores no tienen sueldo fijo, sino sólo comisiones por lo que carguen en su vehículo.

#### AREA DE DISTRIBUCION:

- Todo el país.
- Cada vehículo cubre una subzona de distribución integrada por varias rutas. (La ruta varía según el día.)

#### PRACTICAS DE DISTRIBUCION:

- Los vendedores llevan un registro de las ventas a cada uno de sus clientes que les sirve para estimar la demanda de los mismos.
- Por la mañana, los vehículos son cargados con el pedido que previamente hace el operador, de acuerdo a la demanda esperada.
- El cliente hace su pedido en el momento que el vendedor llega a su establecimiento.
- El pago (en efectivo) y la facturación se realizan en el momento de la entrega de la mercancía.
- Los vendedores no pueden regresar antes de las 4:00 p.m.. Esto es con el propósito de que busquen más clientes y las ventas crezcan (a veces ampliando la ruta).
- La revisión de las ventas es semanal.
- La flota es propia, y está compuesta principalmente por vanettes, combis y motos.

#### DISEÑO DE RUTAS:

- El vendedor reparte según su propio criterio.
- Cuando una ruta está muy saturada en clientes se realiza una reestructuración de rutas.
- Existen rutas dentro de una superficie muy grande, pero con pocos clientes; y rutas con muchos clientes en una superficie pequeña.
- El tiempo que consumen los vendedores con cada cliente es aproximadamente de 10 mins.
- No usan paquetería ni modelos matemáticos para el diseño de rutas.

#### RESTRICCIONES A LA DISTRIBUCION:

- Las vanettes no circulan en el centro a ciertas horas.
- Hay muchos puntos de acceso difícil (para los cuales usan motos).

#### 4. ESTAFETA: Empresa de paquetería.

##### POLITICAS DE DISTRIBUCION-RECOLECCION:

- Vender el servicio de distribución.
- Entregar los paquetes antes de las 11:30 a.m., del día siguiente a su envío.
- El proceso de recolección se realiza en las tardes; mientras que el de distribución, en las mañanas.
- Existe un depósito único en el área metropolitana de la Cd. de México.

##### AREAS DE DISTRIBUCION-RECOLECCION:

- Toda la República Mexicana.
- El área metropolitana de la Cd. de México es dividida en cuatro sectores con un determinado número de rutas, donde un solo vehículo cubre una sola ruta.

##### PRACTICAS DE DISTRIBUCION-RECOLECCION:

- Los vehículos (sedanes o combis) llegan al depósito (centro operativo) cargados con los paquetes procedentes de las bases flotantes (oficinas), aproximadamente a las 6:00 p.m. todos los días.
- El pago y la facturación del servicio puede ser hecho en las oficinas (bases flotantes) o en los domicilios de los propios clientes.
- La flota de vehículos es propia.
- Usan camiones para transportar la paquetería de un centro operativo a otro.

##### DISEÑO DE RUTAS:

- El diseño de rutas es hecho principalmente con base en códigos postales y colonias.
- Cada uno de los supervisores de sector diseña las rutas de su propio sector.
- Por ahora no usan paquetería de cómputo para el diseño de rutas, pero están en pláticas con una compañía que les proporcione los planos de la ciudad de México por computadora.
- Tienen rutas definidas (no cambian diariamente).
- Los puntos de distribución y / o recolección no varían considerablemente con el tiempo.
- Dependiendo del volumen de los paquetes para distribución y/o

- recolección, son usados caminantes, ciclistas, motos, sedanes o combis.
- Dependiendo de la zona en que se encuentre la ruta, van de uno a tres operadores por vehículo.

#### RESTRICCIONES A LA DISTRIBUCION-RECOLECCION:

- El programa "hoy no circula".

5. **BIMBO:** Empresa productora y distribuidora de productos de panificación ( pan de caja, pan de dulce, pastelitos ), botanas ( frituras ) y dulces.

#### POLITICAS DE DISTRIBUCION:

- Hay aproximadamente 10 agencias de distribución por cada marca de productos (BIMBO, MARINELA, BARCEL, etc.)
- No hay clientes con prioridades (no importa el tamaño del consumo del cliente).
- Se recolecta el producto maltratado o caducado, y se vende como pan frío o barredura para animales.
- Hay un concurso de seguridad vial entre los choferes.
- No cuentan con seguro de vehiculos.
- En caso de emergencia los clientes son atendidos con unidades suplentes o emergentes.

#### AREA DE DISTRIBUCION:

- Toda la República.
- Hay 60 agencias en la zona metropolitana de la Cd. de México, con un número de vehículos que varía entre 35 y 110 cada una.
- Aproximadamente atienden a 115 mil puntos en el área metropolitana de la Cd. de México.

#### PRACTICAS DE DISTRIBUCION:

- Tienen 2500 vehículos (Vanette y Nissan) de distribución en el área metropolitana de la Ciudad de México. Los vehículos son de 3.5 y 1.0 toneladas.
- Las agencias no manejan inventario, son surtidas diariamente ( antes de las 6:00 a.m. ), por medio de traileres, desde las fábricas.
- El tiempo de carga de los vehículos de distribución es de 20 mins. aproximadamente.
- El tiempo de distribución es de 8 hrs., comenzando desde las

6:30 a.m.

- La revisión de las ventas se realiza diariamente.
- Los vehículos de distribución son cargados a más de la mitad de su capacidad.
- La venta promedio diaria por cliente es de N\$45.
- La mercancía se coloca en jaulas con carriles para las charolas.
- Se arma el "mix" (mezcla de productos solicitados) en el sitio donde está el cliente.
- Los vendedores facturan y cobran.
- En las agencias llevan una estadística del volumen de producto diario que sale de ellas, con la cual estiman la demanda.
- El tiempo de comida de los vendedores está incluido en su horario de distribución, y puede ser variable.

#### DISEÑO DE RUTAS:

- Existen rutas fijas.
- La distribución es en forma radial.
- Cada vehículo distribuye a 45 puntos diarios, aproximadamente.
- Dependiendo del tipo de producto, es definida la frecuencia de su distribución.
- La distancia recorrida por semana por vehículo es en promedio 200Kms.
- El vehículo tarda menos de 30 mins. en ir desde la agencia a su zona de distribución.
- El tiempo de parada con cada cliente es aproximadamente de 10 mins.
- Las velocidades promedio son 40 Kms/hr. en la ciudad y 80 Kms/hr en carretera.
- Las rutas permanecen, si es que son costeables.
- La rectificación de rutas se realiza para mejorar el servicio cuando una ruta tiene muchos clientes, o cuando alguna ruta no es costeable.
- Hay un itinerario en la forma de reparto, que los operadores determinan.
- No hay cambios estacionales significativos en el nivel de servicio.
- No usan paquetería de cómputo ni modelos matemáticos, para el diseño de rutas.

#### RESTRICCIONES A LA DISTRIBUCION:

- Programa "hoy no circula".
- No pueden usar cualquier tipo de vehículo (los que requieren no están en venta).
- Algunos de sus vehículos no pueden entrar a determinadas horas al centro de la Cd. de México.

## APENDICE B

### SOFTWARE PARA EL PROBLEMA DE DISEÑO DE RUTAS

Existen varios paquetes de cómputo referentes a diversas operaciones de transporte, entre ellas el diseño de rutas de vehículos. Los sistemas son muy variados en sofisticación y costo, pero pueden ser satisfactorios dependiendo de las necesidades de la empresa. Hay desde sistemas que sólo sugieren la ruta óptima entre uno o más puntos; hasta aquellos que optimizan el uso de la flota de vehículos, involucrando todo tipo de restricciones.

Independientemente del grado de sofisticación, todos los sistemas usan una base de datos que contiene información detallada sobre la región de distribución, así como sobre las carreteras o calles, y puntos, dentro de la misma región. Esta información es de utilidad para estimar los tiempos y las distancias de recorrido. Obviamente, la base de datos debe ser actualizada constantemente.

InfoGuía Roji es una base de datos de este tipo, disponible en México para las principales ciudades de la República, que funciona en una computadora PC y es actualizada anualmente.

El desarrollo de un sistema de diseño de rutas para una sola empresa resulta muy difícil y costoso, ya que además de requerir de la base de datos, necesita de amplia programación matemática especializada. De aquí la importancia de conocer los paquetes comerciales existentes.

Los sistemas de rutas de vehículos pueden ser usados de tres modos distintos:

- Estratégico .- Considera las implicaciones de cambios en el número o localización de depósitos, en el tamaño de la flota de vehículos, etc.
- Táctico .- Para la revisión periódica de grupos de rutas para un conjunto de puntos aproximadamente constante.
- Operacional .- Determina la ruta diaria para un conjunto variable de puntos.

La desventaja de los sistemas comerciales es que requieren gran cantidad de datos de entrada: la referencia de la fuente en la retícula, la referencia de cada uno de los puntos, detalles sobre la flota de vehículos (peso, volumen), velocidad

permitida en cada clase de vía, tiempos de carga y descarga del vehículo, etc.

La corrida de un sistema produce la determinación de la carga para cada vehículo, considerando restricciones de volumen, peso o tiempo. Generalmente el objetivo es repartir los pedidos disponibles usando el menor número posible de vehículos, o distribuir a tantos puntos como sea posible con los vehículos disponibles. Muchos paquetes manejan también prioridades.

Quando se introduce un paquete de cómputo para rutas, se recomienda checar cuidadosamente las rutas que éste origine, con el fin de estabilizar el sistema, lo que a su vez mejorará las rutas obtenidas. Según estudios realizados por Taylor Keith (1991), el incremento en la productividad del vehículo, alcanzado por mejores rutas, puede alcanzar más del 20%.

Algunos de los paquetes más comunmente usados para el diseño de rutas, son:

- ALTO.- Desarrollado por el C. R. T. (Centre for Research on Transportation), de la Universidad de Montreal, Canadá. Es un sistema de diseño de algoritmos para la construcción de rutas e itinerarios de vehículos. Es usado para el desarrollo de nuevos métodos heurísticos para la determinación de rutas.
- AUTOTRACK.- Desarrollado por Savoy Computing Limited. Es un paquete que permite modelar el movimiento de vehículos en áreas restringidas. Corre en IBM PC y compatibles.
- COMPU.MAP.- Desarrollado por Logistics Systems. Corre en computadoras HP series 200, 300.
- CONTRACK.- Desarrollado por Fir Tree Computer Systems. Es un paquete para la calendarización de la distribución de carga, que optimiza el sistema de rutas (sobre Europa). Corre en PC's y mainframes.
- DAYLOAD.- Fabricado por Synergy Distribution Services of Loughborough. Corre en una amplia variedad de hardware. Es usado por Avon Tyres, Camerons Brewery, y Macreadys, entre otras compañías.
- EMME/2.- Desarrollado por el C. R. T. de la Universidad de Montreal, Canadá. Es una avanzada herramienta interactiva-gráfica, para la planeación y evaluación de sistemas de transporte urbano. Ha sido instalado en cerca de 200 organizaciones en Canadá, U.S.A., Europa, Australia, China, Israel, etc. Corre en

mainframes, minicomputadoras y PC's.

- MILEMAKER.- Fabricado por Rand Mc Nally. Está disponible en México para el diseño de rutas en carreteras de toda la República. Sugiere rutas óptimas en base sólo a la distancia. Corre en computadoras PC.
- PARAGON2.- Desarrollado por PA Consulting Group. Corre en una amplia variedad de hardware, y es usado por organizaciones de muy diferentes tipos (Federal Express, Spillers, etc.).
- ROADSEARCH-PLUS.- Desarrollado por Columbia Software. Corre en Apple II, IBM PC y compatibles.
- ROUTEFINDER.- Desarrollado por SIA Limited. Es un paquete de fácil uso para la planificación de rutas. Corre en IBM PC y compatibles, y en mainframes.
- ROUTEMASTER.- Desarrollado por Analytical Systems Ltd. (ASL). Es uno de los primeros paquetes para el diseño de rutas, que es ampliamente usado en varias naciones europeas. Corre en IBM PC y compatibles, y en IBM mainframes.
- SIMTRUCK.- Desarrollado por el C.R.T. de la Universidad de Montreal, Canadá. Es un simulador de transporte de mercancías, bajo la forma de un juego de planificación/gestión, para la formación y experimentación. Involucra restricciones de varios tipos. Corre en IBM PC y compatibles.
- TNET88.- El Transportation Problem Network System fue desarrollado por Eastern Software Products, Inc. Corre en IBM PC y compatibles.
- TRADOS.- Desarrollado por P-E Inbucon of Egham, Surrey. Corre en IBM PC y compatibles, y en IBM mainframes.
- VISIT.- Desarrollado por Istel Ltd. Ha sido usado con mucho éxito por Manns & Norwich Brewery Company, de la Gran Bretaña. Corre en hardware variado, incluyendo IBM PC's e IBM mainframes.

Otros paquetes existentes son: Autoroute, Interroute, Mover, Pathway, Transport/Routegraph y Wichway.

Además del software anteriormente mencionado, existe otro tipo de software con las mismas ventajas que el primero, pero sin necesidad de una gran base de datos. Sistemas de este tipo proporcionan la zonificación de la región y el tiempo o distancia mínimos esperados de recorrido total de distribución,

sin necesidad de conocer la posición exacta de los puntos. Esto es muy útil cuando la variación de los puntos es continua (por ejemplo, diaria) o cuando hay necesidad de tener una solución inicial para algún algoritmo heurístico (estos algoritmos son muy susceptibles a la solución inicial).

Sistemas de este último tipo están aún en etapa de desarrollo o de prueba. El más avanzado en este sentido es PLANI-ZONE, que tiene las características siguientes:

- Diseñado por el C.R.T. de la Universidad de Montreal, Canadá.
- Es una herramienta interactiva-gráfica de planificación de zonas de distribución física de mercancías en un medio urbano. No diseña rutas, sólo zonas de distribución. Para esto se basa en la teoría de Daganzo y Newell, para la zonificación de una región, pero toma en cuenta consideraciones humanas, que el mismo usuario aporta. La división de la región es en base a los códigos postales.
- Es muy útil cuando existe variación diaria de los clientes, ya que no importa la posición exacta de estos, sólo su distribución sobre la región.
- Contempla principalmente restricciones de tiempo.
- Corre en IBM PC y compatibles.

Sistemas similares para distribución y recolección conjuntas, no existen todavía ni siquiera en etapa de desarrollo.

## APENDICE C

### INVESTIGACION BIBLIOGRAFICA EXTENSA

El área de investigación sobre problemas de distribución física de mercancías es muy amplia, diversos factores se combinan para generar múltiples problemas. Estos factores son: el número de vehículos (uno o varios), el número de depósitos (uno o múltiples), el tipo de demanda (constante o variable), el tipo de clientes (homogéneos o no homogéneos), la presencia de prioridades, la existencia de restricciones (en el recorrido, en la capacidad de los vehículos y en el tiempo), entre otros.

Existen publicaciones que tratan cada clase de problema de distribución física, ya sea mediante el análisis de algún algoritmo (heurístico o de optimización), o simplemente dando sugerencias útiles para el mejoramiento en la planeación de la distribución. En seguida se listan las principales publicaciones.

- 1) ALLEN W. Bruce, Mahmoud Mohamed M. y McNeil Douglas. "The Importance of Time in Transit and Its Reliability for Shippers, Receivers, and Carriers". Transportation Research Vol. 19B, No. 5, pp 447-456, 1985.
- 2) ANDERSSON Ake E. y Batten David F. "Creative nodes, logical networks, and the future of the metropolis". Transportation, Vol. 14, pp. 281-293, 1988.
- 3) ANTUN Juan Pablo. "Cadenas Logísticas de Transporte". Informe de Actividades Relevantes del Sector Comunicaciones y Transportes de la Economía, 6o. núm. esp., pp 26-39, 1991.
- 4) ANTUN Juan Pablo. "Una Revisión del Concepto de Logística en la Empresa". Organó de difusión de las investigaciones realizadas en la Fac. de Contaduría y Admón. U.N.A.M., No.140, pp 37-83, 1986.
- 5) ARDEKANI Siamak y Herman Robert. "Urban Network-Wide Traffic Variables and Their Relations". Transportation Science, Vol. 21, No. 1, pp. 1-16, 1987.
- 6) ASHFORD Norman y Fathers Steve. "An Approach to Level of Service Design of Air Freight Terminals for Small Express Parcels". Transportation Planning and Technology, Vol. 14, pp 171-180, 1989.
- 7) ASHTAKALA B. "Generalized Power Model for Trip Distribution". Transportation Research Vol. 21 B, No. 1, pp 59-67, 1987.

- 8) AUBURN Jill Shore. "Decentralizing The Distribution of Fresh Agricultural Produce". Transportation Research Vol. 22 A, No. 2, pp 109-119, 1988.
- 9) BALAKRISHNAN Anantaram, Chien T. William y Wong Richard T. "Selecting Aircraft Routes for Long-haul Operations: A formulation and solution method". Transportation Research Vol. 24 B, no. 1, pp 57-72, 1990.
- 10) BANAI-KASHANI Reza. "Discrete mode-choice analysis of urban travel demand by the Analytic Hierarchy Process". Transportation, Vol. 16, pp 81-96, 1989.
- 11) BENJAMIN Julian. "An Analysis of Mode Choice for Shippers in a Constrained Network for just-in-time Inventory". Transportation Research Vol. 24B, No. 3, pp 229-245, 1990.
- 12) BERMAN Oded y Simchi-Levi David. "Finding the Optimal a Priori Tour and Location of a Traveling Salesman with Non homogeneous Customers". Transportation Science, Vol 22, No. 2, pp. 148-198, 1988.
- 13) BERMAN Oded y Simchi-Levi David. "The Traveling Salesman Location Problem on Stochastic Network". Transportation Science, Vol. 23, pp. 54-57, 1989.
- 14) BLUMENFELD Dennis E., Burns L. D., Diltz J. D. y Daganzo C. F. "Analyzing Trade-offs between Transportation, Inventory and Production Costs on Freight Networks". Transportation Research Vol. 19 B, No. 5, pp 361-380, 1985.
- 15) BRENNINGER-GOTHE Maud, Jornsten Kurt O. y Lundgren Jan T. "Estimation of Origen-destination Matrices from Traffic Counts Using Multiobjective Programming". Transportation Research Vol. 23B, No. 4, pp 257-269, 1989.
- 16) COOPER James, Browne Michel y Peters Melvyn. "European Logistics; distribution strategies for the 1990's". ISBN:0631173471, Gran Bretaña, 1991.
- 17) CURRENT John R., Revelle Charles S. y Cohon Jared L. "The Median Shortest Path Problem: A Multipleobjective Approach to Analyze Cost vs. Accessibility". Transportation Science, Vol. 21, No. 3, pp. 188-197, 1987.
- 18) DAGANZO Carlos F. "A Comparison of In-vehicle and Out-of-vehicle Freight Consolidation Strategies". Transportation Research Vol. 22 B, No. 3, pp 173-180, 1988.
- 19) DAGANZO Carlos F. "Increasing Model Precision Can Reduce Accuracy". Transportation Science, Vol. 21, No. 2, pp 100-105, 1987.

- 20) DAGANZO Carlos F. "Logistics Systems Analysis". Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Ed. Springer-Verlag, Alemania, 1991. 320 pp.
- 21) DAGANZO Carlos F. "Modeling Distribution Problems with Time Windows. Part II: Two Customer Types". Transportation Science, Vol. 21, No. 3, pp 180-187, 1987.
- 22) DAGANZO Carlos F. "Modeling Distribution Problems with Time Windows: Part I". Transportation Science, Vol. 21, No. 3, pp 171-179, 1987.
- 23) DAGANZO Carlos F. "Shipment Composition Enhancement at a Consolidation Center". Transportation Research Vol. 22 B, No. 2, pp 103-124, 1988
- 24) DAGANZO Carlos F. "Supplying a Single Location from Heterogeneous Sources". Transportation Research Vol 19 B, No. 5, pp 409-419, 1985.
- 25) DAGANZO Carlos F. "The Crane Scheduling Problem". Transportation Research Vol. 23 B, No. 3, pp 159-175, 1989.
- 26) DAGANZO Carlos F. "The Distance Traveled to Visit N Point with a Maximun of C Stops per Vehicle". Transportation Science vol 18, pp 331-350, 1984.
- 27) DAGANZO Carlos F. "The Length of Tours in Zones of Different Shapes". Transportation Research Vol. 18B No.2, pp. 135-145, 1984.
- 28) DAGANZO Carlos F. y Hall Randolph W. "A Routing Model for Pickups and Deliveries: No Capacity Restrictions on the Secondary Items". Institute of Transportation Studies, University of California at Berkeley, Research report UCB-ITS-RR-90-3, pp 1-30.
- 29) DAGANZO Carlos F. y Newell G. F. "Physical Distribution from a Warehouse: Vehicle coverage and inventory levels". Transportation Research Vol 19 B, No. 5, pp 397-407, 1985.
- 30) DASKIN Mark S. "Logistics: An overview of the state of the art and perspectives on future research". Transportation Research Vol. 19 A, No. 5/6, pp 383-398, 1985.
- 31) DAVIES Richard B. y Pickles Andrew R. "A Joint Trip Timing Store-Type Choice Model for Grocery Shopping, Including Inventory Effects". Transportation Research Vol. 21 A, No. 4/5, pp 345-361, 1987.

- 32) DEJAX Pierre y Kieffer Jean-Paul. "Logistique et Gestion de la Production: Complémentarité, Interface y Recouvrement". 4es. Journées francophones sur la Logistique et les Transports. AFCET. Paris, 1989.
- 33) DROR Moshe, Laporte Gilbert y Trudeau Pierre. "Vehicle Routing with Stochastic Demands: Properties and Solution Frameworks". Transportation Science, Vol. 23, No. 3, pp 166-176, 1989.
- 34) FISK Caroline S. "A Conceptual Framework for Optimal Transportation Systems Planning with Supply and Demand Models". Transportation Science, Vol 20, No. 1, pp 37-47, 1986.
- 35) GARTNER Nathan H. "Demand-Responsive Traffic Signal Control Research". Transportation Research Vol. 19A, No. 5/6, pp 369-373, 1985.
- 36) GLICKMAN Theodore S. y Sherali Hanif D. "Large-scale Network Distribution of Pooled Empty Freight Cars over Time". Transportation Research Vol. 19 B, No. 2, pp 85-94, 1985.
- 37) GOLDEN Bruce L. y Baker Edward K. "Future Directions in Logistics Research". Transportation Research Vol 19 A, No. 5/6, pp 405-409, 1985.
- 38) GONZALEZ Velarde José Luis. "Mathematical Models for Hitch Assignments in Intermodal Transportation". Doctoral Dissertation, University of Texas at Austin, 1990. 166 pp.
- 39) HALL Randolph W. "Configuration of an Overnight Package air Network". Transportation Research Vol 23 A, No. 2, pp 139-149, 1989.
- 40) HALL Randolph W. "Determining Vehicle Dispatch Frequency when Shipping Frequency Differs among Suppliers". Transportation Research Vol. 19 b, No. 5, pp 421-431, 1985.
- 41) HALL Randolph W. "Dispatching Regular and Express Shipments between a Supplier and Manufacturer". Transportation Research Vol. 23B, No. 3, pp 195-211, 1989.
- 42) HALL Randolph W. "Graphical Interpretation of the Transportation Problem". Transportation Science, Vol. 23, No. 1, pp 37-45, 1989.
- 43) HALL Randolph W. "Route choice on freight network with concave cost and exclusive arcs". Transportation Research Vol 23B, No. 3, pp 177-194, 1989.
- 44) HALL Randolph W. "Vehicle Packing". Transportation Research Vol. 23B, No. 2, pp 103-121, 1989.

- 45) HAN Anthony Fu-Wha. "One-to-Many Distribution of Nonstorable Items. Approximate Analytic Models". Doctoral Dissertation, University of California, Berkeley, 1985.
- 46) HARKER Patrick T. y Friesz Terry L. "The Use of Equilibrium Network Models in Logistics Management". Transportation Research Vol. 19 B, No. 5, pp 457-470, 1985.
- 47) HARVEY Greig. "Research Directions in Travel Demand Analysis". Transportation Research Vol. 19A, No. 5/6, pp 455-459, 1985.
- 48) HENDRICKSON Chris. "Foreword: Logistics and Transportation Research". Transportation Research Vol. 19B, No. 5, pp 359-360, 1985.
- 49) HENDRICKSON Chris. "Research in Transportation System Characteristics and Operations". Transportation Research Vol. 19A, No. 5/6, pp 367-369, 1985.
- 50) HIRSH Moshe, Prashkea Joseph N. y Ben-Akiva Moshe. "Dynamic Model of Weekly Activity Pattern". Transportation Science, Vol. 20, No. 1, pp 24-36, 1986.
- 51) HOROWITZ Abraham D. y Daganzo C. F. "Extrapolating Automobile Usage Data to Long Time Periods". Transportation Science, Vol. 20, No. 1, pp 48-51, 1986.
- 52) HOROWITZ Joel L. "Travel and Location Behavior: State of the art and research opportunities". Transportation Research Vol. 19A, No. 5/6, pp 441-453, 1985.
- 53) JARA-DIAZ Sergio R. "Multioutput Analysis of Trucking Operations Using Spatially Dissaggregated Flows". Transportation Research Vol. 22 B, No. 3, pp 159-171, 1988.
- 54) KWANG Sukstith Chitrapong. "Scheduling Algorithm por Demand Responsive. Transportation System with Trip Requests Known in Advance". Doctoral Dissertation, Lamar University, 1979.
- 55) KYTE Michel, Stoner James y Cryer Jonathan. "A Time-Series Analysis of Public Transit Ridership in Portland, Oregon, 1971-1982". Transportation Research Vol. 22 A, No. 5, pp 345-359, 1988.
- 56) LANGEVIN André . "Un Outil Interactif-graphique de Planification de Zones de Livraison". 4es. Journées francophones sur la logistique et les transports. AFCET. Paris 1989.

- 57) LANGEVIN André y Saint-Mleux Yves. "A Decision Support System for Physical Distribution Planning". Centre de Recherche sur les Transports. Université de Montréal Publication No. 764, pp 1-16, 1991.
- 58) LANGEVIN André y Soumis Francois. "Design of Multiple-vehicle Delivery Tours Satisfying Time Constraints". Transportation Research Vol 23 B, No. 2, pp 123-138, 1989.
- 59) LAPORTE G., Chapleau Suzanne, Landry Philippe y Mercure Helene. "An Algorithm for the Design of Mailbox Collection Routes in Urban Areas". Transportation Research Vol 23 B, No. 4, pp. 271-280, 1989.
- 60) LAPORTE G., Nobert Yves y Taillefer Serge. "Solving a Family of Multi-Depot Vehicle Routing and Location-Routing Problems". Transportation Science, Vol. 22, No. 3, pp 161-172, 1988.
- 61) LARDINOIS Christian, Crainic T. G. y Gendreau M. "Simulation, formation et expérimentation en planification/gestion du transport routier". 4<sup>e</sup> Journées francophones sur la Logistique et les Transports, AFCET Paris, 1989.
- 62) LARSON Richard C. "Transporting Sludge to the 106Mile Site: An Inventory/Routing Modelor Logistics System Design". Transportation Science, Vol. 22, No. 3, pp 186-198, 1988.
- 63) LEWIS Robert L. "Information Technology in Physical Distribution Management". Ed. Gower Pub. Co., Inglaterra, 1986. 250 pp.
- 64) MAHMASSANI Hani S. y Chang Gang-Len. "On Boundedly Rational User Equilibrium in Transportation Systems". Transportation Science, Vol. 21, No. 2, pp. 89-99, 1987.
- 65) MANNERING Fred L. "Poisson Analysis of Commuter Flexibility in Changing Routes and Departure Times". Transportation Research Vol. 23 B, No. 1, pp 53-60, 1989.
- 66) Mc KINNON Alan C. "Physical Distribution Systems". Ed. Routledge, Chapman & Hall, Inc., USA, 1986. 316 pp.
- 67) MIN Hokey. "The Vehicle Routing Problem with Product/Spatial Consolidation and Backhauling". Doctoral Dissertation, The Ohio State University, 1987.
- 68) MIN Hokey. "The Multiple Vehicle Routing Problem with Simultaneous Delivery and Pick-up Points". Transportation Research Vol. 23 A, No.5, pp 377-386, 1989.

- 57) LANGEVIN André y Saint-Mleux Yves. "A Decision Support System for Physical Distribution Planning". Centre de Recherche sur les Transports. Université de Montréal Publication No. 764, pp 1-16, 1991.
- 58) LANGEVIN André y Soumis Francois. "Design of Multiple-vehicle Delivery Tours Satisfying Time Constraints". Transportation Research Vol 23 B, No. 2, pp 123-138, 1989.
- 59) LAPORTE G., Chapleau Suzanne, Landry Philippe y Mercure Helene. "An Algorithm for the Design of Mailbox Collection Routes in Urban Areas". Transportation Research Vol 23 B, No. 4, pp. 271-280, 1989.
- 60) LAPORTE G., Nobert Yves y Taillefer Serge. "Solving a Family of Multi-Depot Vehicle Routing and Location-Routing Problems". Transportation Science, Vol. 22, No. 3, pp 161-172, 1988.
- 61) LARDINOIS Christian, Crainic T. G. y Gendreau M. "Simulation, formation et expérimentation en planification/gestion du transport routier". 4<sup>e</sup> Journées francophones sur la Logistique et les Transports, AFCT Paris, 1989.
- 62) LARSON Richard C. "Transporting Sludge to the 106Mile Site: An Inventory/Routing Modelor Logistics System Design". Transportation Science, Vol. 22, No. 3, pp 186-198, 1988.
- 63) LEWIS Robert L. "Information Technology in Physical Distribution Management". Ed. Gower Pub. Co., Inglaterra, 1986. 250 pp.
- 64) MAHMASSANI Hani S. y Chang Gang-Len. "On Boundedly Rational User Equilibrium in Transportation Systems". Transportation Science, Vol. 21, No. 2, pp. 89-99, 1987.
- 65) MANNERING Fred L. "Poisson Analysis of Commuter Flexibility in Changing Routes and Departure Times". Transportation Research Vol. 23 B, No. 1, pp 53-60, 1989.
- 66) Mc KINNON Alan C. "Physical Distribution Systems". Ed. Routledge, Chapman & Hall, Inc., USA, 1986. 316 pp.
- 67) MIN Hokey. "The Vehicle Routing Problem with Product/Spatial Consolidation and Backhauling". Doctoral Dissertation, The Ohio State University, 1987.
- 68) MIN Hokey. "The Multiple Vehicle Routing Problem with Simultaneous Delivery and Pick-up Points". Transportation Research Vol. 23 A, No.5, pp 377-386, 1989.

69) MOORE Anthony y Jovanis Paul P. "Modelling Media Choices in Business Organizations: Implications for Analyzing Transportation Interactions". Transportation Research Vol. 22 A, No. 4, pp 257-273, 1988.

70) NEWELL Gordon F. "Design of Multiple-vehicle Delivery Tours III. Valuable goods". Transportation Research Vol. 20B, No. 5, pp 377-390, 1986.

71) NEWELL Gordon F. y Daganzo C. F. "Design of Multiple Vehicle Delivery Tours II . Other Metrics". Transportation Research Vol 20B. No. 5. pp 365-376, 1986.

72) NEWELL Gordon F. y Daganzo C. F. "Design of Multiple-Vehicle delivery tours I . A Ring-radial Network". Transportation Research Vol 20B No. 5, pp. 345-363, 1986.

73) NOVICH Neil S. "Leading-Edge Distribution Strategies". The Journal of Business Strategy, pp 48-53, November/December, 1990.

74) O'NEIL Brian F. & Bromer Michael R. W. "Analysis of Alternative Distribution Strategies". Logistics and Transportation Review, vol. 24, pp 237, 1988.

75) PAPAGEORGIU Markos. "Dynamic Modeling, Assignment, and Route Guidance in Traffic Networks". Transportation Research Vol. 24B, No. 6, pp 471-495, 1990.

76) PAS Eric I. "State of the Art and Research Opportunities in Travel Demand: Another Perspective". Transportation Research Vol. 19A, No. 5/6, pp 460-464, 1985.

77) PERL Jossef y Daskin Mark S. "A Warehouse Location-Routing Problem". Transportation Research Vol 19 B, No. 5, pp 381-396, 1985.

78) PETERKOFKY Roy I. y Daganzo C. F. "A Branch and Bound Solution Method for the Crane Scheduling Problem". Transportation Research Vol. 24 B, No. 3, pp 159-172, 1990.

79) POWELL Warren B. "Marginal Cost Pricing of Truckload Services: A comparison of two approaches". Transportation Research Vol. 19B, No. 5, pp 433-445, 1985.

80) RHEE Jong-Ho. "Vehicle Routing and Scheduling Strategies for Demand Responsive Transportation Systems". Doctoral Dissertation, University of Delaware, 1987.

81) ROBUSTÉ Francesc, Daganzo C. F. y Souleyrette II Reginald R. "Implementing Vehicle Routing Models". Transportation Research Vol. 24 B, No. 4, pp 263-286, 1990.

- 82) SABRIA Federico y Daganzo Carlos F. "Approx. Expressions for Queueing Systems with Scheduled Arrivals and Established Service Order". Transportation Science, Vol.23, No. 3, pp 159-165, 1989.
- 83) SAVY Michel y Laterrasse Jean. "Production Industrielle et Organisation des Transport Industrial". 4<sup>e</sup> Journées francophones sur la Logistique et les Transports, AFCET Paris, 1989.
- 84) SHEFFI Yosef. "Some Analytical Problems in Logistics Research". Transportation Research Vol 19 , No. 5/6, pp 402-405, 1985.
- 85) SHIBATA Masao. "Development of a Road/Automobile Communication System". Transportation Research Vol. 23 A, No. 1, pp 63-71, 1989.
- 86) SOLOMON Marius M. y Desrosiers Jacques. "Time Window Constrained Routing and Scheduling Problems". Transportation Science, Vol. 22, No. 1, pp 1-13, 1988.
- 87) TAYLOR Keith. "Computer Systems in Logistics and Distribution. A Guide to Implementation and Applications". Ed. Kogan Page Limited, London 1991. 185 pp.
- 88) TAYLOR M. A. P., Young W. y Newton P. W. "PC-based sketch planning methods for transport and urban applications". Transportation, Vol. 14, pp. 361-375, 1988.
- 89) TURNQUIST Mark A. "Research Opportunities in Transportation System Characteristics and Operations". Transportation Research Vol 19 A, No. 5, pp 357-366, 1985.
- 90) WHITE J. A. "Progress in Material Handling & Logistics, Vol. 2". Ed. Springer-Verlag, 1991. 580 pp.
- 91) WIGAN M. R. "Changes in the Relationships between Transport, Communications and Urban Form". Transportation, Vol. 14, pp. 395-417, 1988.
- 92) ZOGRAFOS Konstantinos G. y Martínez Washington. "Improving the Performance of a Port System Through Service Demand Reallocation". Transportation Research Vol. 24 B, No. 2, pp 79-97, 1990.
- 93) The Transport and Planning Software Guide. Londres, Septiembre, 1991.

- 69) MOORE Anthony y Jovanis Paul P. "Modelling Media Choices in Business Organizations: Implications for Analyzing Transportation Interactions". Transportation Research Vol. 22 A, No. 4, pp 257-273, 1988.
- 70) NEWELL Gordon F. "Design of Multiple-vehicle Delivery Tours III. Valuable goods". Transportation Research Vol. 20B, No. 5, pp 377-390, 1986.
- 71) NEWELL Gordon F. y Daganzo C. F. "Design of Multiple Vehicle Delivery Tours II . Other Metrics". Transportation Research Vol 20B. No. 5. pp 365-376, 1986.
- 72) NEWELL Gordon F. y Daganzo C. F. "Design of Multiple-Vehicle delivery tours I . A Ring-radial Network". Transportation Research Vol 20B No. 5, pp. 345-363, 1986.
- 73) NOVICH Neil S. "Leading-Edge Distribution Strategies". The Journal of Business Strategy, pp 48-53, November/December, 1990.
- 74) O'NEIL Brian F. & Bromer Michael R. W. "Analysis of Alternative Distribution Strategies". Logistics and Transportation Review, vol. 24, pp 237, 1988.
- 75) PAPAGEORGIOU Markos. "Dynamic Modeling, Assignment, and Route Guidance in Traffic Networks". Transportation Research Vol. 24B, No. 6, pp 471-495, 1990.
- 76) PAS Eric I. "State of the Art and Research Opportunities in Travel Demand: Another Perspective". Transportation Research Vol. 19A, No. 5/6, pp 460-464, 1985.
- 77) PERL Jossef y Daskin Mark S. "A Warehouse Location-Routing Problem". Transportation Research Vol 19 B, No. 5, pp 381-396, 1985.
- 78) PETERKOFISKY Roy I. y Daganzo C. F. "A Branch and Bound Solution Method for the Crane Scheduling Problem". Transportation Research Vol. 24 B, No. 3, pp 159-172, 1990.
- 79) POWELL Warren B. "Marginal Cost Pricing of Truckload Services: A comparison of two approaches". Transportation Research Vol. 19B, No. 5, pp 433-445, 1985.
- 80) RHEE Jong-Ho. "Vehicle Routing and Scheduling Strategies for Demand Responsive Transportation Systems". Doctoral Dissertation, University of Delaware, 1987.
- 81) ROBUSTÉ Francesc, Daganzo C. F. y Souleyrette II Reginald R. "Implementing Vehicle Routing Models". Transportation Research Vol. 24 B, No. 4, pp 263-286, 1990.