

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

TEORIA DE BUSQUEDA Y
DETECCION

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
MAESTRO DE INGENIERIA
P R E S E N T A .

JOSE ANTONIO RIVERA COLMENERO

CIUDAD UNIVERSITARIA 1 9 9 3.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

TEORIA DE BUSQUEDA Y DETECCION

TEMA	PAGINA
INTRODUCCION	1
Objetivo y Alcance	1
Marco de Referencia	1
Las Operaciones Navales	1
CAPITULO 1	
DERROTA DE BUSQUEDA OPTIMA	
Conceptos Básicos	3
Detección de un Blanco	4
Hechos Básicos que se Consideran en Todo Tipo de Búsqueda	4
Procedimientos Básicos Para la Detección	5
1.1. BUSQUEDA EXHAUSTIVA EN UNA REGION	6
1.2. EL PROBLEMA DE AREAS CIRCULARES	8
1.3. PATRULLAJE DE UN CANAL	14
1.4. CIRCULO DE COMPENSACION DE PROBABILIDADES	19
1.5. ATRAPE CON CIRCULOS Y ESPIRALES	23
1.6. EL EFECTO DE LA CONTRA DETECCION	25

CAPITULO 2

MODELOS BASADOS EN LA TASA DE DETECCION

2.1. DESARROLLO GENERAL	28
2.2. BUSQUEDA ALEATORIA VS. EXHAUSTIVA, EN UNA REGION FIJA	30
2.3. AUMENTO DEL AREA DE BUSQUEDA DEBIDO A UN EVASOR	35
2.4. LEY INVERSA DEL CUBO	37
2.5. JUEGOS DE BUSQUEDA	41

CAPITULO 3

MODELOS AVANZADOS DE DETECCION

3.1. MODELOS DE DETECCION BASADOS EN LA ECUACION RADAR/SONAR ..	43
---	----

CAPITULO 4

CURVAS DE ALCANCE LATERAL / ANCHO DE BARRIDO

4.1. CURVAS DE ALCANCE LATERAL	50
4.2. ANCHO DE BARRIDO	51

CAPITULO 5

ANCHO DE BARRIDO

5.1. BARRIDOS SEPARADOS	53
5.2. BARRIDOS SEPARADOS EN UN MEDIO CONSTANTE	59
5.3. BARRIDO CONTINUO	59
5.4. BARRIDO CONTINUO EN UN MEDIO INVARIABLE	63
5.5. LA DETECCION EN FUNCION DEL ALCANCE	63
5.6. LEY DE DETECCION INVERSAMENTE PROPORCIONAL AL CUBO	65

CAPITULO 6

CURVAS DE ALCANCE LATERAL

6.1. ALCANCE LATERAL	70
6.2. CURVA DE ALCANCE LATERAL	71

6.3.	DETECCION DE BLANCOS DISTRIBUIDOS ALEATORIAMENTE	72
6.4.	ANCHO DE BARRIDO	74
6.5.	BUSQUEDA Y PATRULLAJE	77
6.6.	BUSQUEDA ALEATORIA	78
6.7.	BUSQUEDA ALEATORIA UNIFORME	83
6.8.	BARRIDOS PARALELOS	85
6.9.	APLICACION DE LA LEY DE DETECCION INVERSAMENTE PROPORCIONAL AL CUBO	90
6.10.	BUSQUEDA RECTANGULAR	92
6.11.	BUSQUEDA DE EXPANSION CUADRADA	93
6.12.	ESPIRAL HACIA ADENTRO	94

CAPITULO 7

PROBLEMAS DE DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES Y BLANCOS ESTACIONARIOS

7.1.	EL TEOREMA DE EVERETT	97
7.2.	EL CASO GENERAL	98
7.3.	BUSQUEDA POR MEDIO DE UNA NORMALIZACION APRIORI	108
7.4.	BUSQUEDA MIOPICA CON OBSERVACIONES DISCRETAS	115

CAPITULO 8

MOVIMIENTO ALEATORIO DE LOS BLANCOS

8.1.	MEJORAMIENTO DINAMICO	121
8.2.	MOVIMIENTO MARKOVIANO-BUSQUEDA MIOPICA	123
8.3.	MOVIMIENTO MARKOVIANO-BUSQUEDA OPTIMA	126

CAPITULO 9

LOCALIZACION Y RASTREO

9.1.	REGIONES DE CONFIANZA	131
9.2.	ESTIMACION PUNTUAL POR MINIMOS CUADRADOS	134
9.3.	ERROR ELIPTICO NORMAL	137
9.4.	DERROTA	142

CAPITULO 10

FALSA ALARMA Y FALSO BLANCO

Búsqueda Optima Ante la Presencia de Blancos Falsos	144
EL PROCESO DE LA PLANEACION DE LA BUSQUEDA: ENFOQUES ACTUALES Y PROBLEMAS EXISTENTES	150
1. Perfil de las Tareas de la Investigación de Operaciones	152
2. Distribución Previa de la Ubicación de un Objetivo	152
Ejemplo	154
Método Monte Carlo	158
Areas Problemáticas	160
3. Estimando la Capacidad de los Sensores	162
Areas Problemáticas	166
4. Determinando la Función de Detección	166
Areas Problemáticas	172
5. Desarrollar un Plan de Búsqueda	174
Planeamiento Rectangular	175
Areas Problemáticas	181
6. Actualización para la Realimentación de la Búsqueda	181
Mapas Posteriores	182
Planes de Incremento	184
Blancos Falsos	184
Areas Problemáticas	186
7. Estimación de la Efectividad de la Investigación	187
Ningún Blanco Falso	187
Blancos Falsos	188
Areas Problemáticas	189
8. Conclusión	190
REFERENCIAS	191

INTRODUCCION

OBJETIVO Y ALCANCE.

El objetivo y alcance de este documento es muy modesto, contiene algunas de las principales técnicas empleadas en la búsqueda y detección naval. Puesto que la elaboración de un documento que cubra todas las técnicas, además de ser un trabajo muy extenso, llevaría mucho más tiempo realizarlo.

MARCO DE REFERENCIA.

Una operación de búsqueda y detección se lleva a cabo por unidades de superficie y/o aeronavales de la Armada de México, en el momento en que se tiene conocimiento de un percance sufrido por una embarcación que navegue en aguas nacionales, bien por haberse recibido una llamada de auxilio o por haber recibido un reporte de personas allegadas o interesadas en la embarcación de referencia. Dentro de las operaciones tácticas, la búsqueda se inscribe dentro de las operaciones de exploración, junto con la patrulla y el reconocimiento. Se considera que la ejecución de la búsqueda es responsabilidad del mando operativo que reciba la orden de la operación.

LAS OPERACIONES NAVALES.

Las operaciones navales han llegado a ser, hoy en día, tan complejas como el propio equipo utilizado. En otras épocas, el marino consideraba únicamente la navegabilidad de sus barcos, la experiencia de su tripulación y el estado de la mar, como su caudal de conocimientos. La bóveda celeste era su guía y el horizonte marcaba el límite de sus observaciones. Estaba imposibilitado para detectar cualquier objeto que se hallara más allá del horizonte.

En la actual generación naval, la búsqueda y detección de una embarcación ha pasado a ser, no solamente una de las funciones más importantes de cualquier operación naval que ha alcanzado la importancia de una ciencia, con lo cual se debe estar familiarizado.

La situación económica por la que atraviesa el país, repercute seriamente en la Armada de México. La obsolescencia del material, la escasez de recursos humanos, materiales y la infraestructura logística insuficiente, así como los efectos de la inflación han agravado la dependencia tecnológica del extranjero. Todo esto nos obliga a enfrentar el reto de hacer mucho con poco, haciendo rendir al máximo los recursos asignados por medio de un empleo racionalizado y la subsecuente optimización de las operaciones navales.

La teoría de búsqueda o teoría de encontrar las cosas, es una herramienta básica en la Investigación de Operaciones. Por esta razón este documento muestra los aspectos básicos así como algunas de las técnicas utilizadas.

CAPITULO 1

DERROTA DE BUSQUEDA OPTIMA

CONCEPTOS BASICOS.

Este documento proporciona las definiciones generales, así como la metodología matemática precisa para una mejor comprensión del problema de búsqueda y detección. Los principios tratados y las razones que avalan estos son fundamentales para entender este campo de las operaciones navales.

El problema de búsqueda y detección, depende principalmente de dos factores:

1. La derrota y la localización de las unidades de exploración (también llamados observadores) con relación a la posición prevista y movimiento del blanco (objeto de la búsqueda).
2. La dirección de despliegue de las fuerzas navales, de acuerdo con las necesidades, para efectuar la búsqueda en forma eficaz, esto es, obtener el mejor resultado posible con las fuerzas de que se dispone.

La búsqueda y detección como una rama de la táctica naval, busca soluciones a los problemas de localización de buques extraviados o a la deriva. Esta táctica alcanza su objetivo a través de la aplicación de conocimientos de la ingeniería, la física, las matemáticas y la estadística. Sus conclusiones se establecen en términos de probabilidad (probabilidad de que el objeto sea encontrado dentro de la zona de búsqueda).

Se prestará considerable atención a los aspectos matemáticos necesarios, en la solución de los problemas analizados. Un mejor entendimiento de los problemas esenciales facilitará el desarrollo y eficacia de la exploración y patrullaje utilizados en este tipo de operaciones navales.

DETECCION DE UN BLANCO.

Se considera **descubierto** un blanco cuando nos **apercebimos** de su presencia y conocemos su posible posición. Notemos que esta definición no considera el descubrimiento de objetos que no interesan al explorador. La adquisición de información subsecuente en relación a la localización del blanco, es considerada como **seguimiento**.

Si uno desea información relativa a la ausencia o presencia de un objeto o blanco, tiene que existir una transferencia de **energía** entre el objeto motivo de la búsqueda y el que realiza la exploración. Y es que, sencillamente, la naturaleza no tiene otro medio que el de transferir **energía**, gracias a la cual puede adquirirse la información a una distancia determinada. Es por esta razón por lo que cualquier discusión sobre la búsqueda, sea radar, sonar o visual, debe implicar una transferencia de **energía**.

HECHOS BASICOS QUE SE CONSIDERAN EN TODO TIPO DE BUSQUEDA.

1. Deben darse ciertos requisitos físicos antes de que pueda tener lugar una detección y que si se dan, en efecto, harán posible la búsqueda. Así los blancos no deben estar demasiado lejos y la línea visual, desde el observador, no debe estar completamente obstruída, para que pueda ser visto. El radar no revelará la presencia de blancos si son adversas las condiciones atmosféricas o el medio ambiente en que se reciben los ecos.
2. Aún cuando las condiciones físicas hagan posible la detección, no debe esperarse ésta, inevitablemente. La detección es un acontecimiento que, bajo condiciones apropiadas, tiene una probabilidad de ocurrencia positiva, cuyo valor numérico puede ser cero, uno o cualquier valor entre estos límites.

Así, cuando el blanco apenas empieza a satisfacer las condiciones físicas de su posible detección, su probabilidad de ocurrencia estará muy cerca de cero (al menos cuando el tiempo de observación es limitado). A medida que estas condiciones mejoran, la probabilidad de la detección aumenta y puede llegar a ser prácticamente cierta, sin embargo, la experiencia demuestra que, un objeto perfectamente visible puede no ser

encontrado. Aviones en misiones de observación y reconocimiento en días claros y soleados han pasado cerca de barcos grandes y, sin embargo, no los descubrieron. Debe tenerse en cuenta constantemente que, todo instrumento de detección se basa en una última consideración: la del ser humano.

Sus éxitos dependen de su entrenamiento, estado de atención y cansancio. Lo que es más, aún en condiciones físicas fijas y constantes pueden tener lugar innumerables fluctuaciones. Un eco radar cambia su aspecto de un momento a otro con el cabeceo y balanceo constante del barco. Como resultado, un blanco que no es detectado en cierto instante, puede serlo un momento más tarde. El observador que trata de localizar un blanco por medios visuales, radar, sonar, etc., estará utilizando uno de los dos procedimientos básicos siguientes:

PROCEDIMIENTOS BASICOS PARA LA DETECCION.

1. El observador dirige una sucesión de vistazos rápidos. Un caso típico es el del eca del radar, el cual, en cada barrido proporciona un vistazo, en un intervalo específico.
2. Este caso surge cuando el observador está continuamente mirando como cuando mira fijamente en un campo donde puede estar situado el blanco. El caso del radar es intermedio, ya que su exploración es rotatoria, pertenecería al primer caso, pero si esta exploración rotatoria es lo suficientemente rápida y hay una persistencia de imagen en la pantalla, puede ser de vista continua.

Muy a menudo la clasificación del método de búsqueda depende simplemente, del que proporcione la más cercana y conveniente aproximación.

Es natural esperar que un tema llamado **Teoría de Búsqueda y Detección**, esté principalmente enfocado a valorar las consecuencias de seguir una derrota de búsqueda particular de una embarcación y en encontrar las derrotas que son óptimas para el explorador. Sin embargo esto no es así, ya que tales problemas no son tan comunes en la **Teoría de Búsqueda y Detección**, por lo que sólo son considerados en este capítulo. Existen al respecto dos buenas razones para ello: la primera es que la mayor parte de los

exploradores no resultan beneficiados si conocen la derrota óptima, a menos que sea una trayectoria fácil de seguir; y la segunda, es que una derrota no es un elemento matemático conveniente en la mayoría de los casos. El objeto realmente de interés, es la manera en que se logra una distribución eficiente de esfuerzos. No obstante resulta apropiado comenzar con algunos ejemplos clásicos de problemas de derrotas que se han resuelto; por lo que este capítulo presenta simplemente una recolección de algunos de ellos.

En todos los siguientes ejemplos, se tiene un tipo de alcance definido, lo que significa que existe un alcance de detección fijo R , cada vez que el blanco sea detectado cada vez que la distancia al explorador sea menor que R . Esta suposición se hace con la idea de simplificar el análisis. Aunque, realmente la razón para enfatizar en los problemas de distribución de esfuerzos, es que éstos tienden a ser más simples que los problemas relativos a derrotas.

1.1. BUSQUEDA EXHAUSTIVA EN UNA REGION.

Considere un explorador con un ancho de barrido W , lo que significa que el explorador puede observar hasta una distancia $W/2$ de su posición y nada más allá de ésta. Por otra parte, si el explorador tiene una velocidad V , entonces VW es la rapidez con la cual se cubre el área. En la búsqueda exhaustiva, se supone que no hay ningún traslape entre una derrota y otra, de tal forma que en una región de área A , será patrullada en su totalidad en el tiempo:

$$T = \frac{A}{VW}$$

Además, si T es el tiempo en el cual el blanco estacionario es detectado por primera vez y existe la misma probabilidad de que el blanco se encuentre en cualquier parte de la región, entonces T es una variable aleatoria uniforme sobre el intervalo $[0, A/VW]$, y el valor esperado de T , es:

$$E(T) = \frac{1}{2} \left(\frac{A}{VW} \right)$$

Existen diferentes formas para realizar una búsqueda exhaustiva, por ejemplo, tenemos el que se muestra en la figura 1-1. Entre otros están: el rectangular, el de expansión

cuadrada, el de espiral hacia adentro, el de espiral hacia afuera. Dada la suposición de que el blanco es estacionario e igualmente probable de estar en cualquier sitio, todos los métodos son equivalentes. Sin embargo, se puede decir, que el método rectangular es la más sencilla de las navegaciones. El método de la espiral hacia afuera presenta algunas ventajas, si el blanco tiene mayor probabilidad de estar en el centro de la espiral que en cualquier otro lugar, y el método de la espiral hacia adentro, es capaz de interceptar un blanco que se mueva lentamente tratando de evitar la detección.

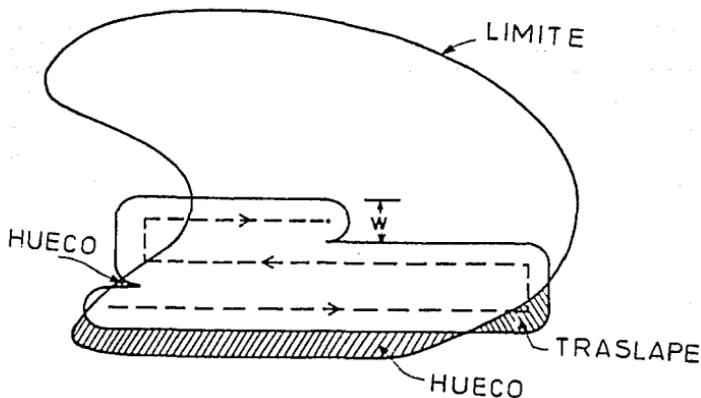


FIGURA 1-1. BUSQUEDA EXHAUSTIVA EN UNA REGION.

La búsqueda exhaustiva debe considerarse como una cota superior sobre la efectividad de la búsqueda en una región. Una de las razones para afirmar esto se muestra en la figura 1-1, la cual ilustra el hecho de que la continuidad de la trayectoria, obliga a que existan huecos y/o traslapes en la exploración. Existen dos preguntas geométricas interesantes, que se pueden plantear acerca de la búsqueda, en una región dada:

1. ¿Cuál es la longitud mínima de la derrota necesaria para cubrir totalmente la región?
2. ¿Cuál es la máxima longitud de la derrota que puede estar contenida dentro de la región, sin que exista traslape?

Ambas preguntas no son fáciles de contestar con exactitud, sin embargo, la respuesta en una búsqueda exhaustiva ,es:

$$L \left(\frac{A}{W} \right)$$

La cual es aproximadamente correcta e indica que el radio de curvatura es grande comparado con W. Esta respuesta, es optimista en el sentido de que resulta pequeña para la primera pregunta y grande para la segunda.

1.2. EL PROBLEMA DE AREAS CIRCULARES.

Suponga que la búsqueda se lleva a cabo por medio de una serie de observaciones, cada una de las cuales cubre un círculo de radio R. Los círculos que describen las observaciones pueden colocarse en cualquier sitio, pero en un número finito. Puesto que un plano no puede cubrirse con círculos que no se traslapen, entonces necesariamente hay un intercambio entre la eficiencia en la búsqueda y el área realmente cubierta en la exploración.

La figura 1-2, muestra la forma en que se puede cubrir un plano con áreas circulares de radio R. Dentro de la red de círculos aparece un triángulo, en la cual se cubren todas las áreas excepto las pequeñas áreas sombreadas. El triángulo equilátero que aparece en la figura 1-2, es un elemento que se repite, de manera que el porcentaje del plano cubierto es igual al porcentaje cubierto por el triángulo. Si el área total del triángulo equilátero es $bh/2$, tenemos de la figura 1-2:

$$\frac{1}{2} b = R \cos \phi$$

Sustituyendo expresión, en la ecuación siguiente:

$$h = \frac{1}{2} b \sqrt{3}$$

Resulta que,

$$h = \sqrt{3} (R \cos \phi)$$

(1.1)

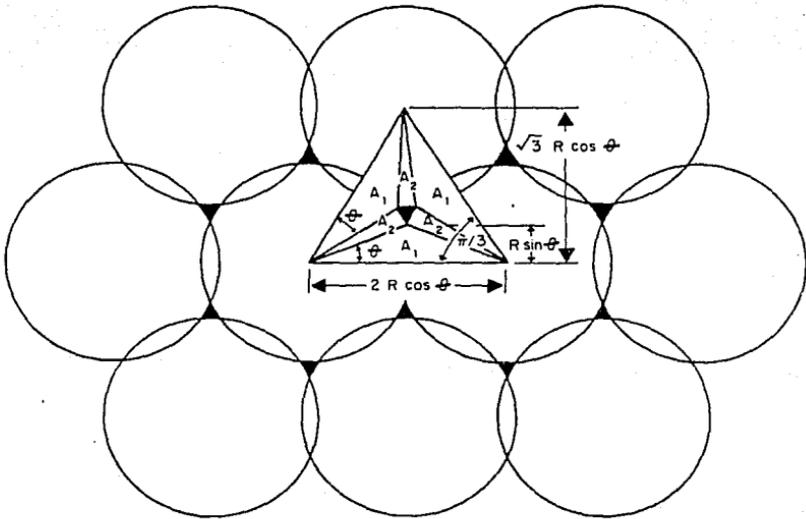


FIGURA 1-2. EL PROBLEMA DE AREAS CIRCULARES.

y sustituyendo en:

$$b = \frac{2}{3} h \sqrt{3}$$

Se tiene,

$$b = \frac{2}{3} \sqrt{3} \sqrt{3} (R \cos \phi)$$

y simplificando:

$$b = 2 R \cos \phi \quad (1.2)$$

El área total del triángulo equilátero es:

$$A_t = \frac{1}{2} (bh) \quad (1.3)$$

Sustituyendo (1.1) y (1.2) en (1.3):

$$A_t = \frac{1}{2} (2 R \cos \phi) [\sqrt{3} R \cos \phi] = \sqrt{3} [R^2 \cos^2 \phi] \quad (1.4)$$

De la figura 1-3, se puede observar que el área cubierta del triángulo es:

$$3(A_1 + A_2)$$

donde:

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{Area de un triángulo} = \frac{1}{2} (b h_1) \\ &= \frac{1}{2} (2 R \cos \phi) (R \operatorname{sen} \phi) = R^2 \cos \phi \operatorname{sen} \phi \end{aligned}$$

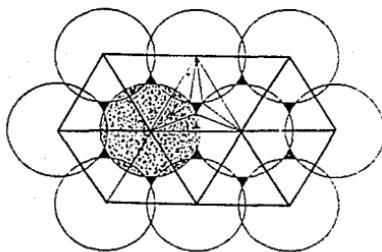
$$A_2 = \text{Area de un sector circular} = \frac{n^\circ}{360^\circ} (\pi R^2)$$

En la figura 1-3, además se observa que los ángulos interiores del triángulo equilátero son iguales a 60° , es decir, $\pi/3$. Puesto que necesitamos el área del sector A_2 , el ángulo

de este sector (n°), es igual a: $\left(\frac{\pi}{3} - 2\phi\right)$, por consiguiente el área de este sector, es:

$$A_2 = \left(\frac{\frac{\pi}{3} - 2\phi}{2\pi}\right) (\pi R^2) = \frac{R^2 \left(\frac{\pi}{3} - 2\phi\right)}{2}$$

Por consiguiente, el área cubierta del triángulo equilátero, sin considerar las áreas sombreadas de la figura 1-3, resulta:



TRIANGULO EQUILATERO AMPLIADO

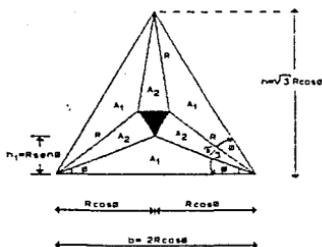


FIGURA 1-3. BUSQUEDA POR MEDIO DE AREAS CIRCULARES.

$$\begin{aligned}
 3(A_1 + A_2) &= 3 \left\{ [R^2 \cos \phi \operatorname{sen} \phi] \left[\frac{R^2 \left(\frac{\pi}{3} - 2 \phi \right)}{2} \right] \right\} \\
 &= 3 R^2 \left\{ (\cos \phi \operatorname{sen} \phi) \left(\frac{\pi - 6 \phi}{6} \right) \right\}
 \end{aligned}
 \tag{1.5}$$

Por lo que el porcentaje cubierto del triángulo, está dado por:

$$P = \frac{3 (A_1 + A_2)}{A_t}$$

Y sustituyendo (1.4) y (1.5), en la expresión anterior, resulta:

$$P = \frac{3 R^2 \left\{ (\cos \phi \operatorname{sen} \phi) + \left(\frac{\pi - 6 \phi}{6} \right) \right\}}{\sqrt{3} (R^2 \cos^2 \phi)} = \frac{3 \left\{ (\cos \phi \operatorname{sen} \phi) + \left(\frac{\pi}{6} - \phi \right) \right\}}{\sqrt{3} (\cos^2 \phi)}$$

de donde,

$$P = \frac{\frac{\pi}{2} + 3 (\cos \phi \operatorname{sen} \phi - \phi)}{\sqrt{3} \cos^2 \phi} \tag{1.6}$$

$$\text{mientras } 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6}$$

Si se piensa explorar una región grande, pero finita, con un modelo con un ángulo característico ϕ , entonces, el número de círculos requerido será:

$$n = \frac{A}{(2 \sqrt{3} \cos^2 \phi)} \tag{1.7}$$

Si se ignoran los efectos de borde, ya que el área de dos triángulos equivale a la de un círculo, como puede verse en la figura 1-3. Por otro lado, si "n" es conocido, podemos resolver para un ángulo ϕ , mientras que "n" tenga un valor entre los límites siguientes:

$$\frac{A}{2 \sqrt{3} R^2 \cos^2 (0)} \leq n \leq \frac{A}{2 \sqrt{3} R^2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{6} \right)}$$

Los círculos no se traslapan si n es menor que el límite inferior y la cobertura es total si n

excede el límite superior. Si los círculos no se traslapan, entonces, el porcentaje de la región cubierta es:

$$P = \frac{n\pi R^2}{A} \quad (1.8)$$

La figura 1-4, muestra a P como una función de $n\pi R^2/A$. Por lo que la aproximación a la búsqueda exhaustiva resulta:

$$P = \min \left(1, \frac{n\pi R^2}{A} \right) \quad (1.9)$$

Que para la mayoría de los propósitos es adecuada.

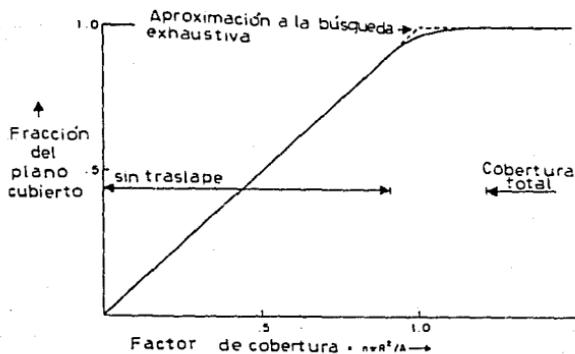


FIGURA 1-4. EFICIENCIA DE LAS AREAS CIRCULARES.

1.3. PATRULLAJE DE UN CANAL.

Suponga que un cierto número de blancos, se desplazan aguas abajo en un canal extremadamente grande a una velocidad U , y un explorador se desplaza a una velocidad V a lo largo de una curva cerrada a su propia elección. Si el ancho de barrido (dos veces el alcance de detección) del explorador es W , entonces, ¿cuál es la mejor curva cerrada y cual es el porcentaje resultante de blancos detectados?

Puesto que, únicamente el movimiento relativo es importante, uno se puede imaginar que los blancos se encuentran fijos, es decir, conservan su distancia relativa entre ellos y el explorador está sujeto a una corriente de magnitud U , aguas abajo del canal, adicional a su propia velocidad V (haciendo semejanza con un nadador que se encuentra en la corriente). La figura 1-5 muestra las partes de un canal, donde el explorador tiene un alcance $W/2$ y se mueve siguiendo un arco de circunferencia, de tal forma que la orilla del canal se encuentra, precisamente dentro del intervalo de retorno. Cabe hacer notar, que no se cubre todo el canal. El porcentaje del canal que no se cubre, es el precisamente la área sombreada, de la figura 1-5, referente al área rectangular LD . Este porcentaje puede determinarse geoméricamente y el segmento vertical de la cuerda de arco de la circunferencia varía hasta un máximo, que es el porcentaje del canal que se ha cubierto.

Además, por supuesto, existen otros patrones de cuerda de arco, algunos de los cuales hacen que se traslapen los extremos del canal, que deben considerarse, si se tiene que determinar el radio de cobertura máxima. Sin embargo, este tipo de modelos de cuerda de arco, suministran porcentajes de cobertura cercanos a una cota superior que se derivará enseguida. A continuación, se describe el desarrollo matemático del modelo que se ilustra en la figura 1-5. Sea, $V \cos \phi (t)$, la componente de la velocidad del explorador en la misma dirección que la de los blancos, de tal manera que la velocidad relativa del explorador, respecto a cualquier blanco tiene componentes:

$$V \cos \phi (t) - U,$$

en el sentido de la corriente, y

$$V \text{ sen } \phi (t),$$

transversal al flujo del agua.

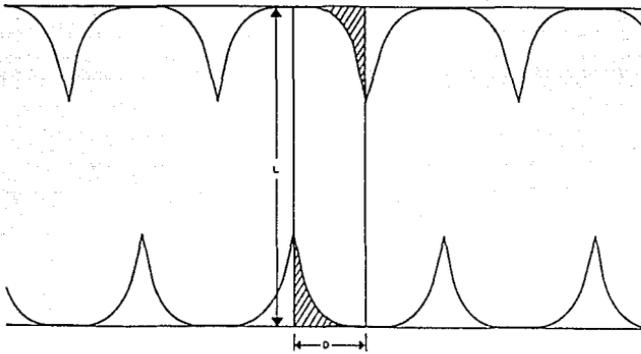


FIGURA 1-5. COBERTURA DE UN CANAL POR UN EXPLORADOR A LA DERIVA.

La velocidad $W(t)$ relativa del explorador, respecto a cualquier blanco, es por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 W(t) &= \sqrt{(V \cos \phi(t) - U)^2 + (V \operatorname{sen} \phi(t))^2} \\
 &= \sqrt{V^2 \cos^2 \phi(t) - 2UV \cos \phi(t) + U^2 + V^2 \operatorname{sen}^2 \phi(t)} \\
 &= \sqrt{V^2 (\cos^2 \phi(t) + \operatorname{sen}^2 \phi(t)) - 2UV \cos \phi(t) + U^2}
 \end{aligned}$$

siendo:

$$\cos^2 \phi (t) + \sin^2 \phi (t) = 1$$

resulta:

$$W(t) = \sqrt{U^2 + V^2 - 2 UV \cos \phi (t)} \quad (1.10)$$

La máxima tasa posible con la cual un explorador puede cubrir un área, en coordenadas con origen en la posición del blanco, es: $2R W(t)$. La tasa será menor, si alguna parte del área ha sido ya explorada o si el buscador explora hacia afuera del canal. Entonces, la cantidad de área cubierta A , en el intervalo de tiempo $[0, T]$, no excede a:

$$2 R \int_0^T W(t) dt \quad (1.11)$$

Si se supone que el explorador tiene la misma posición en el tiempo T que en el tiempo inicial 0 , de acuerdo con la idea de que el explorador supuestamente, se mueve alrededor de una curva cerrada. Si la posición del explorador no ha cambiado y puesto que la componente de la velocidad aguas abajo, es: $V \cos \phi (t)$, debe cumplirse que,

$$\int_0^T \cos \phi (t) dt = 0 \quad (1.12)$$

Ahora, es fácil comprobar que:

$$W(t) \leq \sqrt{U^2 + V^2} - \frac{UV^2}{\sqrt{U^2 + V^2}} \cos \phi (t) \quad (1.13)$$

Se observa, que la parte derecha es no negativa, esto se comprueba elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación (1.13).

DEMOSTRACION:

Se demostrará que si:

$$W(t) = \sqrt{U^2 + V^2 - 2 UV \cos \phi (t)}$$

Entonces, se cumple la ecuación (1.13). Puesto que:

$$W(t) \leq \sqrt{U^2 + V^2} - \frac{UV}{\sqrt{U^2 + V^2}} \cos \phi(t)$$

Como:

$$W(t) = \sqrt{U^2 + V^2 - 2 UV \cos \phi(t)} \quad (i)$$

Siendo: U = Velocidad del blanco.

V = Velocidad del explorador.

$V \cos \phi(t)$ = Componente horizontal del buscador (≥ 0).

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación (i), tenemos:

$$W^2(t) = U^2 + V^2 - 2 UV \cos \phi(t) \quad (ii)$$

Sumando $UV \cos \phi(t)$, a ambos miembros de la ecuación (ii):

$$\begin{aligned} W^2(t) + UV \cos \phi(t) &= U^2 + V^2 - 2 UV \cos \phi(t) + UV \cos \phi(t) \\ &= U^2 + V^2 - UV \cos \phi(t) \end{aligned} \quad (iii)$$

Multiplicando por: $1/\sqrt{U^2 + V^2}$, ambos miembros de la ecuación (iii):

$$\begin{aligned} \frac{W^2(t) + UV \cos \phi(t)}{\sqrt{U^2 + V^2}} &= \frac{U^2 + V^2 - UV \cos \phi(t)}{\sqrt{U^2 + V^2}} \\ &= \frac{U^2 + V^2}{\sqrt{U^2 + V^2}} - \frac{UV \cos \phi(t)}{\sqrt{U^2 + V^2}} \\ &= \sqrt{U^2 + V^2} - \frac{UV \cos \phi(t)}{\sqrt{U^2 + V^2}} \end{aligned} \quad (iv)$$

Descomponiendo el primer miembro de la ecuación (iv):

$$\frac{W^2(t) + UV \cos \phi(t)}{\sqrt{U^2 + V^2}} = \frac{W^2(t)}{\sqrt{U^2 + V^2}} + \frac{UV \cos \phi(t)}{\sqrt{U^2 + V^2}} \quad (v)$$

Como: $V \cos \phi (t)$, es la componente de la velocidad del explorador, esta es mayor o

igual a cero. Por lo que: $UV \cos \phi (t) \geq 0$, de donde se obtiene que:

$$\frac{UV \cos \phi (t)}{\sqrt{U^2 + V^2}} \geq 0$$

Por consiguiente:

$$\frac{W^2 (t)}{\sqrt{U^2 + V^2}} + \frac{UV \cos \phi (t)}{\sqrt{U^2 + V^2}} \geq \frac{W^2 (t)}{\sqrt{U^2 + V^2}} \quad (\text{vi})$$

Sustituyendo en (v):

$$\frac{W^2 (t) + UV \cos \phi (t)}{\sqrt{U^2 + V^2}} \geq \frac{W^2 (t)}{\sqrt{U^2 + V^2}} \quad (\text{vii})$$

Y al sustituir en (iv):

$$\sqrt{U^2 + V^2} - \frac{UV \cos \phi (t)}{\sqrt{U^2 + V^2}} \geq \frac{W^2 (t)}{\sqrt{U^2 + V^2}} \quad (\text{viii})$$

Del segundo miembro de la ecuación (vii), tenemos:

$$\frac{W^2 (t)}{\sqrt{U^2 + V^2}} = \frac{W(t) W(t)}{\sqrt{U^2 + V^2}} = \frac{W(t) \sqrt{U^2 + V^2 - 2 UV \cos \phi (t)}}{\sqrt{U^2 + V^2}}$$

Como $V \cos \phi (t) \geq 0$, se tiene:

$$2 UV \cos \phi (t) \leq 0$$

Considerando esto, resulta:

$$\frac{\sqrt{U^2 + V^2 - 2 UV \cos \phi (t)}}{\sqrt{U^2 + V^2}} > 1$$

Debe cumplirse:

$$\frac{W^2 (t)}{\sqrt{U^2 + V^2}} \geq W (t)$$

De (viii), tenemos:

$$W(t) \leq \frac{W^2(t)}{\sqrt{U^2 + V^2}} \leq \sqrt{U^2 + V^2} - \frac{UV \cos \phi(t)}{\sqrt{U^2 + V^2}}$$

Que es lo que quería demostrarse.

La integral de la velocidad relativa del explorador $W(t)$, en el intervalo 0 a T , es:

$$\int_0^T W(t) dt \leq T [U^2 + V^2] \quad (1.14)$$

Además.

$$A \leq 2 RT [U^2 + V^2] \quad (1.15)$$

Por otra parte, el explorador barre una área A en un tiempo T y la probabilidad de detección P , debe ser menor al intervalo dado a continuación:

$$P \leq \min \left\{ 1, \left(\frac{2R}{L} \right) \left[1 + \left(\frac{V}{U} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (1.16)$$

Este es el límite superior de la probabilidad de detección. Por lo que el lado derecho es una buena aproximación.

1.4. CIRCULO DE COMPENSACION DE PROBABILIDADES.

Sean X e Y variables aleatorias normales independientes cada una con media cero y desviación estándar σ . La función de densidad de probabilidad conjunta de (X, Y) , es entonces:

$$f(X, Y) = \frac{1}{2\pi\sigma} e^{-\frac{(X^2 + Y^2)}{2\sigma^2}}$$

Frecuentemente, resulta que la variable aleatoria $R = \sqrt{(X - h)^2 + Y^2}$, es de gran importancia, donde h es una constante. Por ejemplo:

- Si (X, Y) representa la posición aleatoria de un blanco relativa a un objetivo fijo, si h es la distancia del objetivo fijo a un sensor, entonces R es la distancia del sensor al blanco.
- Suponga que un blanco tiene una posición inicial (X, Y) relativa a un objetivo fijo, y entonces se mueve a una distancia h en una dirección uniformemente aleatoria. Entonces, R representa la distancia final del blanco al objetivo fijo, siendo la marcación del objetivo uniformemente aleatoria. La fórmula para R considera al blanco moviéndose una cantidad $(-h, 0)$, pero esto no es una restricción, ya que la dirección del movimiento es irrelevante hasta el alcance R .

Sea $F_R(x) = P(R \leq x)$ la función de distribución acumulada de R . El evento $R \leq x$

ocurre si y solamente si, $(X-h, Y)$ se encuentra dentro de un círculo c de radio r , alrededor del objetivo fijo.

$$F_R(x) = \int_c \int_c \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\left[\frac{(x+h)^2 + Y^2}{2\sigma^2}\right]} dx dy$$

Cambiando a coordenadas polares, haciendo:

$$X = Z \sigma \cos \theta$$

$$Y = Z \sigma \sin \theta$$

$$F_R(x) = \int_0^{\frac{x}{\sigma}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ - \frac{\left[Z^2 + \left(\frac{h}{\sigma}\right)^2 + 2 Z \left(\frac{h}{\sigma}\right) \cos \theta \right]}{2} \right\} Z dZ d\theta \quad (A)$$

Sea $a=x/\sigma$ y $b=h/\sigma$. La integral de la ecuación A no puede evaluarse a menos que $b=0$, sin embargo, es igual a $1-Q(a,b)$, donde la función del círculo de compensación $Q(a,b)$ se puede encontrar tabulada en: **Offset Circle Probabilities, Report R-234, The Rand Corporation, Santa Mónica, Ca. (1952).**

Cuando no existe compensación, $Q(a,b) = \exp(-a^2/2)$; esta fórmula elemental simplifica los cálculos para varias exploraciones independientes en la búsqueda de un blanco. La función de densidad $f_R(r)$ puede obtenerse por la diferenciación de la ecuación A. El resultado es:

$$\sigma f_R(r) = a \exp \left[-\frac{(a^2 + b^2)}{2} \right] \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{(ab \cos \theta)} d\theta \right]$$

o bien,

$$\sigma f_R(r) = a e^{-\frac{a^2 + b^2}{2}} I_0(ab),$$

Donde I_0 es una función de Bessel.

Ahora consideremos el siguiente problema, donde $h = Ut$, siendo U la velocidad del blanco y t el tiempo en el arriba un explorador al escenario. El explorador estará interesado en la función de densidad bi-dimensional de la posición final del blanco, puesto que los picos de esta función corresponden a los picos de mayor probabilidad de búsqueda. Debido a que la marcación del blanco al objetivo fijo es aleatoria, esta función de densidad depende únicamente de la distancia al origen r y es igual a:

$$\frac{f_R(r)}{2\pi r}$$

La figura 1-6 muestra que la función de densidad tiene un máximo alrededor de $r = Ut$, cuando t es grande. Cuando t es más pequeña que σ/U , la densidad de probabilidad es mayor en el origen. Un explorador con velocidad V ($V > U$), el cual explora de tal manera que su alcance al objetivo fijo es siempre Ut , seguirá una trayectoria que es una espiral logarítmica.

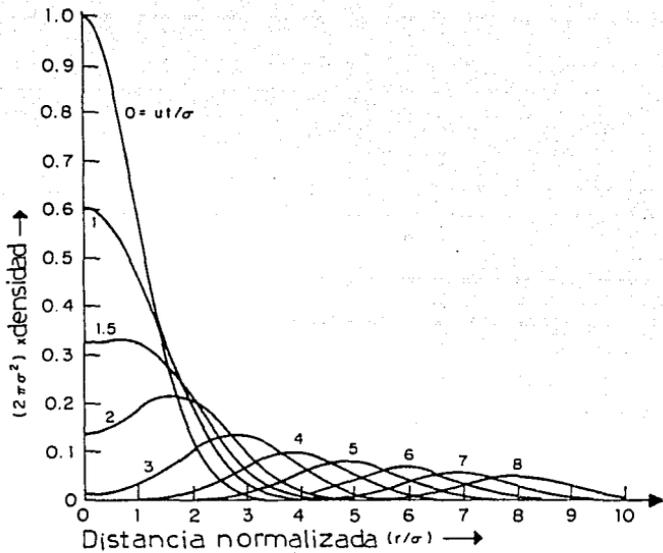


FIGURA 1-6.

1.5. ATRAPE CON CIRCULOS Y ESPIRALES.

Si el blanco es un evasor que quiere evitar la detección, para lo cual cuenta con un gran alcance de contradetección. Entonces, el explorador puede elegir la estrategia de barrer varias veces una región, de manera que no sea factible que el blanco evite los movimientos de intercepción, debido a que el evasor se encuentra inicialmente dentro del área de búsqueda. Si el evasor sale del área de exploración, entonces, se creará otra área de exploración y así sucesivamente. Si el explorador se mueve dentro de un círculo de radio X , entonces, el tiempo que transcurre para volver a barrerlo será $2\pi X/V$, donde V es su velocidad. La mayor distancia que un evasor con velocidad U puede recorrer en este tiempo, es:

$$\left(\frac{2\pi X}{V}\right) \quad (1.17)$$

Si esta distancia es más pequeña que el ancho de barrido $2R$, entonces, X es un radio de círculo factible para la intercepción. Evidentemente que el mayor radio posible, es:

$$R \left(\frac{V}{\pi U}\right) = X_{\max} \quad (1.18)$$

Cualquier círculo más pequeño que éste, puede ser barrido gradualmente con espirales hacia adentro, hasta que sea cubierta toda el área. Para dar una idea de cuantas veces se requiere ejecutar una intercepción, sea $X(t)$ el radio de la espiral en el tiempo t . La cantidad de tiempo requerido para que el buscador efectúe una revolución completa en el tiempo t , es aproximadamente:

$$\frac{2\pi X(t)}{V} \quad (1.19)$$

Esa cantidad, es también un poco grande porque $X(t)$ decrece constantemente, pero, es una buena aproximación mientras que $X(t)$ esté cerca de X_{\max} . Durante este tiempo, el cambio máximo en la posición relativa del radio no debe exceder a $2R$, si se desea que el evasor no tenga oportunidad de escapar. Puesto que la velocidad relativa radial máxima es:

$$U - \frac{d}{dt} X(t) \quad (1.20)$$

Esta ecuación es característica de una espiral que no sea capaz de interceptar al blanco, lo que matemáticamente, se representa como:

$$2R = \left(U - \frac{d}{dt} X(t) \right) \left(\frac{2\pi X(t)}{V} \right) \quad (1.21)$$

Esta es una ecuación diferencial de primer orden. La solución es sencilla, si se mide el tiempo hacia atrás a partir del final de la espiral. Si designamos a este tiempo de reversa por τ , tenemos:

$$R = \left(U + \frac{d}{d\tau} X(\tau) \right) \left(\frac{\pi X(\tau)}{V} \right) \quad (1.22)$$

Y también $X(\tau=0) = R$, ya que la espiral termina cuando se llega al origen. La solución de la expresión anterior, es:

$$U_{\tau} = ZR \operatorname{Ln} \left(\frac{ZR-R}{ZR-X(\tau)} \right) - X(\tau) + R \quad (1.23)$$

donde, $Z=V/\pi U$

EJEMPLO:

Suponga que, $V=10 \pi$, $U=1$ y $R=1$.

Cuando: $X(\tau) = 5$, $\tau = 10 \operatorname{Ln}(9/5) - 5 + 1 = 2$.

Cuando: $X(\tau) = 9$, $\tau = 14$.

Cuando: $X(\tau) = 9.9$, $\tau = 36$.

La cantidad de tiempo requerido para llevar a cabo la interceptación, obviamente, es una función del tamaño de la región explorada, en este caso el tamaño de la región es, $X_{\max} = 10$; el cual es el radio máximo de la espiral.

1.6. EL EFECTO DE LA CONTRA DETECCION.

Consideremos ahora un explorador con un ancho de barrido $2R$ y velocidad V y un blanco que tiene una velocidad U y un alcance S . En este caso el blanco trata de evitar la intercepción. Además, $R < S$ y $V > U$. Se supone que estas dos desigualdades así como el curso del blanco son constantes. Esta última consideración, algunas veces no se cumple si el explorador elige a su criterio un curso sinuoso aleatoriamente, sólo en el caso que el explorador fuera remolcado el curso sería constante. El problema en sí, es determinar un ancho de barrido equivalente bajo estas consideraciones.

Es conveniente adoptar un sistema de referencia con origen en la posición del explorador, en cuyo caso la velocidad de deriva de magnitud V del explorador debe suponerse relativo al movimiento del blanco. Si la velocidad del blanco tiene un ángulo ϕ con respecto al curso del explorador, las dos componentes de la velocidad relativa del blanco con respecto al explorador son:

$$V - U \cos \phi, \quad \text{horizontalmente y} \quad (1.24)$$

$$U \operatorname{sen} \phi, \quad \text{verticalmente.} \quad (1.25)$$

La derrota resultante del blanco será tal que:

$$\tan \phi = \frac{U \operatorname{sen} \phi}{V - U \cos \phi} = \frac{\rho \operatorname{sen} \phi}{1 - \rho \cos \phi} \quad (1.26)$$

donde:

$$\rho = \frac{U}{V} < 1 \quad (1.27)$$

El blanco desea hacer a ϕ tan grande como sea posible. Sea ϕ^* el máximo valor posible de ϕ . Se puede demostrar por diferenciación que el máximo ángulo ϕ^* , es tal que:

$$\cos \phi^* = \rho \quad \text{cuando} \quad \operatorname{sen} \phi^* = \rho$$

El punto de máxima aproximación del blanco al explorador, es:

$$S \operatorname{sen} (\psi + \phi^*)$$

entonces, el blanco será detectado sí y solamente sí:

$$S \operatorname{sen} (\psi + \phi^*) \leq R$$

El máximo ángulo ψ^* para el cual se cumple esta desigualdad, puede obtenerse a partir de:

$$\operatorname{sen} (\psi^* + \phi^*) = \frac{R}{S}$$

mientras que $\rho < \frac{R}{S}$. El blanco será detectado si se encuentra inicialmente a un alcance: $S \operatorname{sen} \psi^*$

de la derrota del explorador, de tal forma que el ancho de barrido equivalente W_e , es:

$W_e = 2S \operatorname{sen} \psi^*$. El ancho de barrido equivalente W_e , nunca será mayor que $2R$, y

será igual a cero si $\rho \geq \frac{R}{S}$. El blanco puede escaparse siempre, si se encuentra más allá

del máximo alcance de detección.

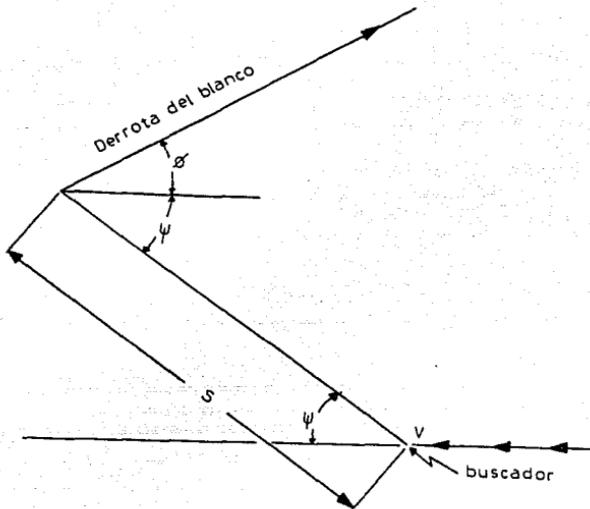


FIGURA 1-7. DERROTA RELATIVA DEL BLANCO CON RESPECTO AL EXPLORADOR.

EJEMPLO:

Sean: $R=1, S=2, V=10, U=2$.

El ancho de barrido equivalente se obtiene, resolviendo $\text{sen } \psi^* = \rho$, entonces:

$$\psi^* = \text{ang sen } (\rho) = \text{ang sen } \left(\frac{U}{V} \right) = \text{ang sen } \left(\frac{2}{10} \right) = 11.5^\circ.$$

Y a partir de la expresión: $\text{sen } (\psi^* + \phi^*) = R/S$, se tiene,

$$\psi^* = \text{ang sen } \left(\frac{R}{S} \right) - \phi^* = \text{ang sen } \left(\frac{1}{2} \right) - 11.5^\circ = 18.5^\circ.$$

Finalmente:

$$W_e = 2S \text{ sen } \psi^* = 2(2) \text{ sen } (18.5^\circ) = 1.27$$

Observe que W_e es considerablemente menor que $2R$, el efecto de velocidades pequeñas de U constantes, es importante.

CAPITULO 2

MODELOS BASADOS EN LA TASA DE DETECCION

Los modelos vistos en el capítulo 1, algunas veces decepcionan en la práctica, particularmente cuando predicen grandes probabilidades de detección. Existen varias razones para hacer esta afirmación, a continuación se listan algunas.

- A. Todos los modelos usan la técnica de detección "cookie cutter", en el caso donde no existe una región definida y donde la detección sea probable dentro de la región e imposible fuera de ella.
- B. En el mundo real la navegación no es perfecta. La planeación y ejecución de un modelo de búsqueda particular, puede ser substancialmente errático. Esto es particularmente cierto, si participan varios exploradores.
- B. El blanco puede a propósito o inadvertidamente, frustrar los planes del explorador, con sólo moverse a su alrededor. Mientras que el explorador se sale del área de búsqueda, el blanco permanece dentro de ella.

El enfoque de la tasa de detección para calcular las probabilidades de detección, ha probado ser más consistente que los modelos geométricos vistos en el capítulo anterior, esto queda remarcado en los incisos A, B y C, vistos anteriormente. La idea es reemplazar consideraciones específicas con respecto a la ubicación del esfuerzo de búsqueda por una suposición probabilística de independencia.

2.1. DESARROLLO GENERAL.

Suponemos que para todo tiempo u hay una tasa de detección $\gamma(u)$ con las siguientes

propiedades:

- A). $\Delta \gamma(u)$, es la probabilidad de una detección en un pequeño intervalo de tiempo de tamaño Δt , que incluye a u .
- B). Los eventos de detección en intervalos de tiempo sin traslape son todos independientes.

Los incisos A) y B) determinan la probabilidad $p(t)$ de que la detección pueda ocurrir en cualquier momento dentro del intervalo de tiempo $[0, t)$. Para demostrar esto, sea:

$$q(t) = 1 - p(t)$$

entonces;

$$q(t + \Delta t) = q(t) [1 - \gamma(t) \Delta t], \quad (2.1)$$

puesto que los eventos de no detección sobre los intervalos $[0, t)$ y $[t, t + \Delta t)$ son independientes, por la suposición del inciso B). Por consiguiente,

$$\frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t} = -q(t) \gamma(t) \quad (2.2)$$

Tomando el límite cuando Δt tienda a cero, obtenemos:

$$\frac{d}{dt} q(t) = -q(t) \gamma(t) \quad (2.3)$$

La solución de esta ecuación diferencial es;

$$q(t) = \exp[-n(t)]$$

donde,

$$n(t) = \int_0^t \gamma(u) du \quad (2.4)$$

La cual es una interpretación muy conveniente de $n(t)$.

Normalmente, se supone que el proceso de detección termina cuando se efectúa la

primera detección, si hay alguna en el intervalo de tiempo $[0, t)$. Considere un experimento, no obstante, donde el explorador continúa repentinamente detectando el blanco (no hay diferencia entre las detecciones por alarma y sin alarma en nuestro modelo) y sea $N(t)$ un número aleatorio que indica el número de veces que ocurre la detección después del tiempo t . Entonces la media de $N(t)$ es precisamente $n(t)$, lo cual justifica el uso del término de la tasa de detección para $\gamma(u)$. En efecto, $N(t)$ es una variable aleatoria de Poisson con la ley de probabilidad:

$$P\{N(t) = k\} = \frac{[n(t)]^k}{k!} \exp[-n(t)]$$

y $q(t)$ es exactamente $P\{N(t) = 0\}$. Si el proceso de búsqueda termina en la primera detección, entonces podemos distinguir únicamente los eventos:

$$N(t) = 0 \quad \text{y} \quad N(t) \geq 1,$$

pero a pesar de esto es conveniente recordar que $n(t)$ en la ecuación (2.4), es precisamente la media de $N(t)$. Una variable aleatoria que frecuentemente es de interés es el tiempo T hasta que ocurre la detección. Puesto que $q(t) = P\{T > t\}$, la Función de Distribución Acumulada (FDA) de T , es $1 - q(t)$. Para variables aleatorias positivas tal como T , la media $E(T)$ es el área bajo la curva de la distribución, así:

$$E(t) = \int_0^{\infty} q(t) dt \tag{2.5}$$

El lector habrá notado que en la obtención de las fórmulas (2.4) y (2.5), no se da el tiempo en que deben darse las instrucciones para llevar a cabo la búsqueda o incluso se hace la pregunta ¿hay alguna derrota de búsqueda tal como la hecha en la suposición del inciso B?, considerada anteriormente. La verdadera justificación para usar las fórmulas (2.4) y (2.5) es empírica y de hecho estas fórmulas proporcionan buenas aproximaciones en una gran variedad de circunstancias.

2.2. BÚSQUEDA ALEATORIA Vs. EXHAUSTIVA, EN UNA REGION FIJA.

Considere una búsqueda aleatoria por un explorador tipo cookie cutter con un ancho de

barrido W , en una región que tiene una área A . Si el explorador tiene una velocidad V , entonces en el tiempo Δt puede explorar una área de tamaño $VW \Delta t$, así la probabilidad de detección será:

$$\text{Probabilidad de detección} = \frac{VW \Delta t}{A}$$

por ejemplo,

$$\gamma(u) = \frac{VW}{A}$$

de la ecuación (2.4);

$$n(t) = \int_0^t \frac{VW}{A} dt = \frac{VWt}{A}$$

puesto que

$$q(t) = \exp[-n(t)] = \exp\left[-\frac{VWt}{A}\right]$$

La función resultante es:

$$1 - q(t) = 1 - \exp\left(-\frac{VWt}{A}\right)$$

La cual está representada por la curva inferior de la figura 2-1, en donde:

$$z = \frac{VWt}{A}$$

En este caso el tiempo de detección T es una variable aleatoria exponencial con media A/VW . Puesto que T es exponencial, el tiempo restante hasta que ocurre la primera detección tiene la misma distribución exponencial la cual no toma en cuenta el número de fracasos del buscador. La espera para la primera detección en una búsqueda aleatoria es, en este sentido equivalente a esperar un águila en una serie de lanzamientos de una moneda. Esta falta de memoria, es lo que realmente caracteriza a la búsqueda aleatoria.

La figura 2-1, también muestra la probabilidad de detección contra el tiempo, en una búsqueda exhaustiva (sección 1.10. Mientras que el caso de la ley inversa del cubo se verá en la sección 2.4. Por el momento, observe que únicamente la búsqueda exhaustiva es considerablemente más efectiva que la búsqueda aleatoria. En la búsqueda exhaustiva, el blanco será detectado exactamente una vez en el intervalo de tiempo $[0, A/VW]$, así que nunca será necesario buscar más tiempo que el necesario A/VW . Esto no se cumple en la búsqueda aleatoria.

Aquí tenemos otra comparación de los dos tipos de búsqueda. Sea A el área a ser cubierta y sea $A' = VWt$ el área que puede cubrirse. La búsqueda exhaustiva coloca a A' dentro de A y cubre un porcentaje A'/A , de otro modo es 1.0 si $A' > A$. En efecto, el buscador aleatorio divide a A' en "n" particiones y las distribuye en forma aleatoria sobre A . Para probar que es realmente es el porcentaje cubierto, sean n particiones, cada una localizada independientemente en forma aleatoria dentro de A . La probabilidad de que en cualquiera de las particiones falle la detección, al cubrir el área A , es:

$$1 - \frac{A'}{nA}$$

La probabilidad de que ninguna de las n particiones cubran el área donde se encuentra el blanco es,

$$\left(1 - \frac{A'}{nA}\right)^n$$

que se aproxima por medio de una distribución exponencial:

$$e^{-\frac{A'}{A}}$$

cuando n es grande. Así, la búsqueda aleatoria es efectivamente una distribución de la partición y proporciona una menor probabilidad de detección que la búsqueda exhaustiva porque hay traslapes entre una partición y otra. La completa falta de organización inherente al esfuerzo para una búsqueda debido a la disposición de las particiones, hace que la búsqueda aleatoria sea tratada frecuentemente como una cota inferior en los cálculos de la probabilidad de detección.

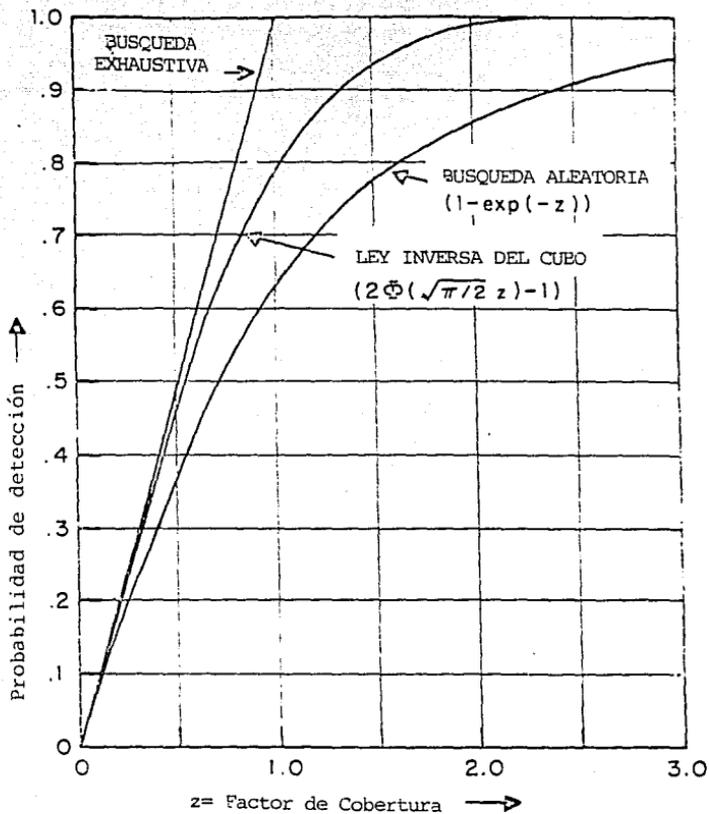


FIGURA 2-1. COMPARACION DE LOS TRES MODELOS DE BUSQUEDA.

La búsqueda aleatoria evidentemente no es el objetivo del explorador, la idea de ensayar con derrotas desorganizadas es completamente absurdo. Es un error realizar deliberadamente una derrota aleatoria en la forma de realizar una búsqueda aleatoria frecuentemente proporciona respuestas exactas. Considere, por ejemplo el siguiente experimento.

Un evasor se coloca de manera aleatoria y uniforme dentro de un cuadrado de lado L y subsecuentemente se mueve alrededor en forma aleatoria (el movimiento exacto se hace sobre el evasor) a una velocidad U dentro del cuadrado. Un explorador mucho más veloz ($U/V = 0.2$) también parte de un punto uniformemente aleatorio, elegido independientemente del de la posición inicial del evasor y busca aleatoriamente al evasor a una velocidad V , donde V es tal que $L/V = 15.42$ segundos. La búsqueda termina cuando el explorador se encuentra a una distancia $W/2$ del evasor, donde $W/L = 0.0572$. ¿Qué podemos decir acerca del tiempo que transcurre hasta que se efectúa la detección?. Podemos considerar dos respuestas:

- a). El blanco se encuentra estacionario, puesto que U es pequeña comparada con V . El explorador deberá realizar una búsqueda exhaustiva y el tiempo medio de detección, es aproximadamente:

$$\frac{0.5L^2}{WV} = \frac{(0.5)(15.42 \text{ seg})}{0.0572} = 135 \text{ seg.}$$

- b). La velocidad del blanco, aunque es pequeña, es lo suficientemente grande para poder aplicar un modelo exhaustivo, puesto que es en efecto una búsqueda aleatoria. De hecho, cualquier método que utilice el perseguidor para efectuar la búsqueda, el tiempo medio de detección debe estar próxima a:

$$\frac{L^2}{WV} = 270 \text{ seg.}$$

La figura 2-2 muestra los resultados de llevar a cabo en forma consecutiva el experimento 30 veces en un juego electrónico, donde cada jugador tiene su propio monitor y su control (JOYSTICK). La distribución acumulada experimental del tiempo de detección se compara con las correspondientes distribuciones teóricas:

- a). La búsqueda exhaustiva y
 b). La búsqueda aleatoria.

Los resultados se explican mejor en b) que en a). Como habíamos mencionado anteriormente en la sección 2.1 otros fenómenos que pueden terminar en búsquedas exhaustivas dentro de las búsquedas aleatorias; son la navegación imperfecta y la regla de detección cookie cutter.

La fórmula generalizada de búsqueda aleatoria más fácil para situaciones donde se tienen múltiples exploradores y blancos. Por ejemplo, si la tasa de detección es γ cuando se tiene un explorador, entonces es $n\gamma$, cuando se tienen n exploradores. Es cierto también que el sensor no necesita ser del tipo cookie cutter, si el ancho de barrido se define como en el capítulo 4. Por estas razones, mientras que la exactitud fundamental de la independencia en intervalos supuestos en muchas situaciones, la fórmula de búsqueda aleatoria juega un papel importante en la teoría de búsqueda.

2.3. AUMENTO DEL AREA DE BUSQUEDA DEBIDO A UN EVASOR.

Algunas veces sucede que un perseguidor tiene la posición exacta de un evasor en un momento dado, cuando está cercano a la posición del evasor, cuando ha pasado un tiempo τ , el evasor ya no se encuentra ahí. Se distinguen dos posibles casos para el análisis:

- El evasor se mueve en un tipo de derrota aleatoria. En este caso su posición en el tiempo τ se puede describir como una variable aleatoria normal bidimensional.
- Cuando el evasor sabe que fue visto en el tiempo 0 y maniobra a una velocidad U de tal manera que pueda evitar la detección.

En el caso b) que se analiza aquí. En el tiempo u después de que llega el explorador, el evasor se encontrará en alguna parte dentro de un círculo de radio $U(\tau+u)$. Si el perseguidor se mueve a una velocidad V con un ancho de barrido W , entonces la tasa de cobertura de una área es VW y el porcentaje de ésta para aumentar el área de búsqueda es:

$$\gamma(u) = \frac{VW}{\pi U^2(\tau + u)^2} \quad (2.6)$$

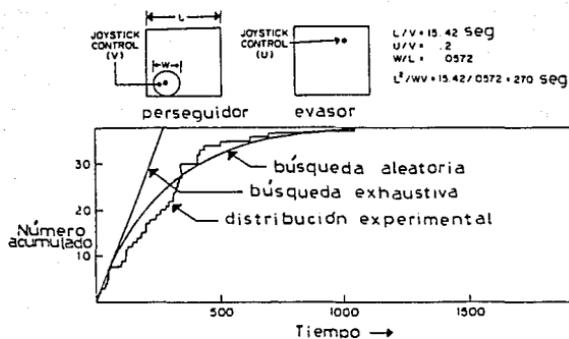


FIGURA 2-2. BUSQUEDA ALEATORIA Vs. EXHAUSTIVA

Aplicando (2.4) y haciendo la sustitución de (2.6), obtenemos:

$$n(\tau) = \int_0^{\tau} \gamma(u) du = \int_0^{\tau} \frac{VW}{\pi U^2 (\tau + u)^2} du$$

De donde:

$$n(\tau) = \frac{VW}{\pi U^2} \int_0^{\tau} \frac{du}{(\tau + u)^2}$$

Resolviendo la integral:

$$\int_0^{\tau} (\tau + u)^{-2} du = -(\tau + u)^{-1} \Big|_0^{\tau} = -\frac{1}{\tau + \tau} + \frac{1}{\tau}$$

Sustituyendo en la expresión de n(t):

$$n(t) = \frac{VW}{\pi U^2} \left[\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau+t} \right] \quad (2.7)$$

y

$$q(t) = e^{-n(t)}$$

Una característica interesante en este caso, es que:

$$n(\infty) = \frac{VW}{\pi U^2 \tau}$$

el cual es finito; así $q(\infty) > 0$ y de (2.5), $E(T) = \infty$.

Aún si el explorador busca siempre, la probabilidad de detección es menor que 1. La razón, por supuesto, es que la cantidad de área cubierta aumenta en forma lineal con el tiempo, mientras que el área de la región aumenta con el cuadrado del tiempo. Si la detección no se efectúa tempranamente, no se efectuará en todo el periodo de búsqueda.

La figura 2-3 muestra los resultados de un juego de búsqueda llevado a cabo 295 veces con distintos oficiales militares coordinando al perseguidor y al evasor. El tiempo límite máximo fue de 60 segundos. La concordancia de la teoría con el resultado experimental es bastante buena.

2.4. LEY INVERSA DEL CUBO.

Para la detección óptica donde se puede despreciar la absorción atmosférica, es razonable suponer que $\gamma(u)$ es proporcional al ángulo sólido subtendido por el blanco. Para un alcance r del sensor con área aparente A , el ángulo sólido es A/r^2 . Si el blanco es una mancha de tinta bidimensional con área A y si el sensor está a una distancia r , además, se encuentra a una altura h sobre el plano de la mancha de tinta. Entonces el área aparente de la mancha de tinta es Ah/r para $h < r$, por consiguiente el ángulo sólido es Ah/r^3 . Esta mancha de tinta o modelo de la ley inversa del cubo se propuso en la Segunda Guerra Mundial, para saber cual era el alcance al cual la estela de una embarcación podía

detectarse.

Puesto que la dependencia de γ sobre el alcance es conocida, la probabilidad de detección para cualquier rumbo del buscador relativo al blanco se puede calcular o simular. El tiempo inicial se eligió arbitrariamente en la sección 2.1, así podemos reemplazar (2.4), con:

$$q(t_1, t_2) = e^{-n(t_1, t_2)},$$

Donde

$$n(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \gamma(u) du \quad (2.8)$$

y donde: $1-q(t_1, t_2)$, es la probabilidad de detección dentro del intervalo $[t_1, t_2]$. En particular, si $\gamma(u) = KA_h/r^3$ y si el buscador pasa cerca del blanco (o viceversa) a una velocidad V sobre una línea recta infinita, a una distancia x del blanco, entonces:

$$n(-\infty, \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{kAh}{(h^2 + x^2 + V^2u^2)^{\frac{3}{2}}} du = \frac{2m}{h^2 + x^2} \quad (2.9)$$

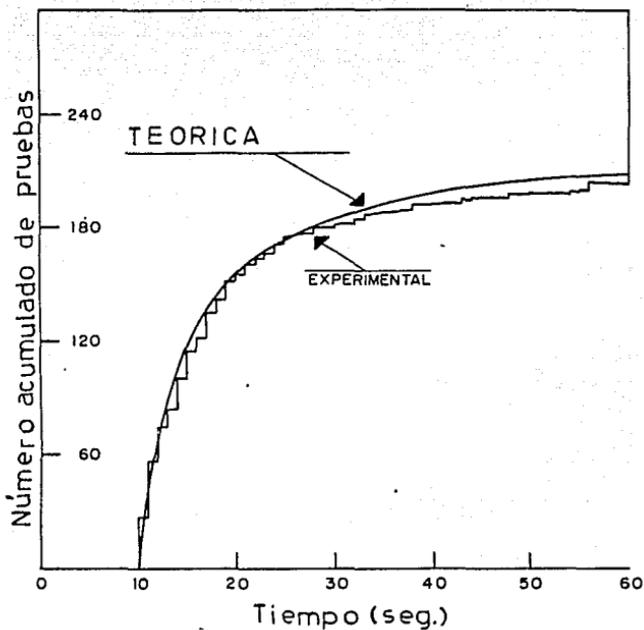
Donde $m = kAh/V$. La constante k considera todos los factores ambientales relacionados con el blanco, la calidad del equipo de detección, etc. Para sensores de gran alcance, la cantidad h^2 puede despreciarse en el denominador de (2.9). La probabilidad de que ocurra la detección en un punto a lo largo de la línea, es entonces:

$$p(x) = 1 - q(-\infty, \infty) = 1 - e^{-n(-\infty, \infty)} = 1 - e^{-\frac{2m}{x^2}} \quad (2.10)$$

La función $p(x)$ es una curva de alcance lateral. El ancho de barrido W asociado con (2.10), es:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = \sqrt{8\pi m} = \sqrt{8\pi kAh/V} \quad (2.11)$$

Observe que la altitud h debe cuadruplicarse para que se duplique el ancho de barrido y que W decrece conforme aumenta V .



V = Velocidad del perseguidor = 0.192 unidades/seg.
 U = Velocidad del evasor = 0.024 unidades/seg.
 W = Ancho de barrido = 0.14 unidades.
 τ = Tiempo esperado = 10 segundos.

FIGURA 2-3. TEORIA VS. EXPERIMENTACION EN UNA EXPANSION DEL AREA DE BUSQUEDA.

Con un sensor cookie cutter, si una región es barrida de tal manera que las derrotas paralelas están separadas por un ancho de barrido, entonces la detección se lleva a cabo. Esto no se cumple en el caso de la ley inversa del cubo. Si el espaciamiento entre derrotas es S , la probabilidad de detección siempre se incrementará si S disminuye. Siendo más precisos, sea el alcance lateral del blanco, con respecto a la i -ésima derrota, $x - iS$ para $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ y suponemos que los eventos de detección en las distintas derrotas son independientes. Entonces la probabilidad de que no se efectúe la detección en la derrota i es:

$$e^{-\frac{2m}{(x-iS)^2}}$$

y la probabilidad de que no se efectúe la detección en cualquier derrota es:

$$q(x, S) = e^{-N(x, S)} \quad (2.12)$$

donde:

$$\begin{aligned} n(x, S) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{2m}{(x-iS)^2} \\ &= \left(\frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{W}{S}\right)^2 \operatorname{csc}^2\left(\frac{\pi x}{S}\right) \end{aligned}$$

debido a que los exponentes se suman, se toman como un producto de exponenciales. La ecuación (2.12) muestra de una manera precisa como se incrementa la probabilidad de detección si disminuye S y cuando se conoce la posición del blanco. En la circunstancia más común, donde el blanco se localiza uniformemente de manera aleatoria con respecto a las derrotas, la probabilidad de detección es $p(W/S)$:

$$p(W/S) = 1 - \frac{1}{S} \int_0^S q(x, S) dx = 2\phi\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{W}{S}\right) - 1 \quad (2.13)$$

donde ϕ , es la función normal acumulada. Puesto que W/S se puede interpretar como un factor de cobertura, es razonable comparar (2.13) con los resultados que se obtienen en la búsqueda exhaustiva y aleatoria. La curva de enmedio en la figura 2-1, es la fórmula (2.13). Si un buscador con un sensor de ley inversa del cubo fuera a efectuar una búsqueda aleatoria, precisamente como la de un buscador con un sensor cookie cutter.

Dada una búsqueda aleatoria, la única propiedad importante de un sensor es su ancho de barrido. Las fórmulas (2.9), (2.11), (2.12) y (2.13) cada una comprende la evaluación de una suma infinita o de una integral. Estas cuatro expresiones se evalúan en forma cerrada.

2.5. JUEGOS DE BUSQUEDA.

Los problemas de búsqueda, donde el blanco toma acciones evasivas basado en la posición del perseguidor muy rara vez son analizados. Un método de distribución con tales situaciones es el de la simulación, como el visto en las secciones 2.2 y 2.3. El perseguidor y el evasor cada uno usa un joystick para manejar la posición de un punto luminoso sobre un tubo de rayos catódicos (cada jugador tiene su propio tubo) y el juego termina electrónicamente cuando las condiciones para la detección se han cumplido. El juego se repite varias veces, las suficientes para obtener estadísticamente el tiempo que se requiere para la detección. Considere, por ejemplo, un juego donde el evasor siempre conoce la dirección del perseguidor y donde el juego es similar al juego discutido en la sección 2.2, el evasor es mucho más lento que el perseguidor y permanece dentro de una caja de lado L y ambos jugadores se ponen en marcha en localizaciones uniformemente aleatorias dentro de la caja. La figura 2-4 muestra la distribución experimental del tiempo de detección para 131 repeticiones del juego anterior. En donde se suponen dos cosas:

- a). El tiempo medio de detección (367 segundos) es considerablemente mayor que cuando el evasor se mueve en círculo en forma aleatoria (265 segundos en la figura 2-2).
- b). La distribución experimental se ajusta a una distribución exponencial, la cual es equivalente a decir que la tasa de detección es constante.

Conclusión a). Simplemente verifica cuantitativamente lo que se dijo al principio: un evasor informado de la posición del buscador puede evitar la detección más fácilmente que uno que se mueve a ciegas. La naturaleza cuantitativa del resultado, es de utilidad solamente en aplicaciones donde los parámetros involucrados, son versiones escalares de aquellos que se utilizaron en el experimento. Sin la ayuda de la teoría adecuada para generar la ocurrencia de eventos en el juego, no se puede decir nada acerca de que puede suceder si la velocidad cambia de 0.2 a 0.3 por ciento, por ejemplo.

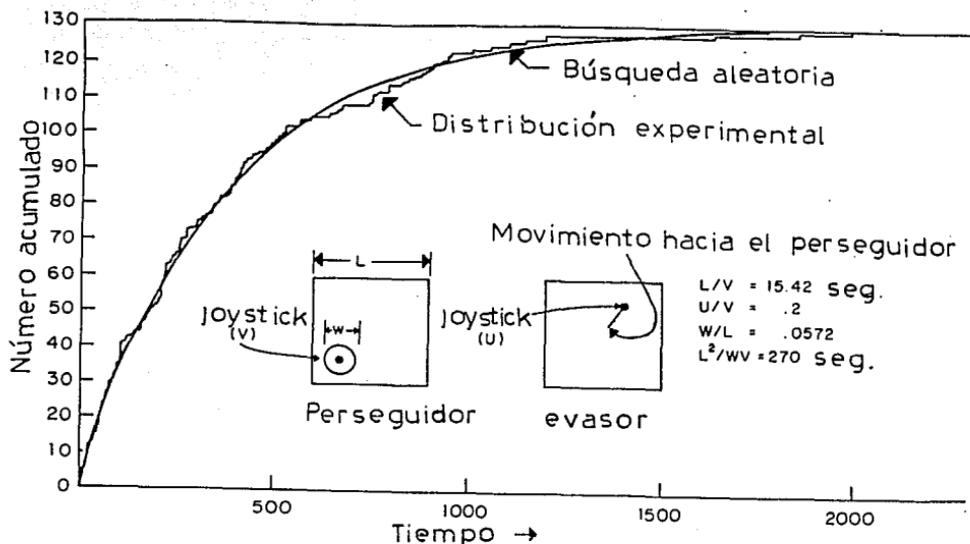


FIGURA 2-4. EXPERIMENTO DONDE EL EVASOR CONOCE LA DIRECCION DEL PERSEGUIDOR.

Conclusión b). Parece ser que la característica de los juegos de búsqueda, es que se llevan a cabo dentro de una área restringida. Por ejemplo, en un experimento diferente el evasor conoce la dirección y el alcance del perseguidor, los parámetros se conservan con el mismo valor. El tiempo medio de detección se incrementa a 407 segundos, pero la tasa de detección, permanece constante. Esta tendencia de la tasa de detección a ser constante puede ser de gran utilidad, en casos donde la experimentación es costosa, puesto que es fácil estimar un parámetro (comunmente el tiempo medio de detección) de una distribución.

Puesto que hay, frecuentemente problemas de búsqueda donde la tasa de detección no es constante. La expansión del área de búsqueda en la sección 2.3 es un ejemplo.

CAPITULO 3

MODELOS AVANZADOS DE DETECCION

3.1. MODELOS DE DETECCION BASADOS EN LA ECUACION RADAR/SONAR.

En muchas situaciones, las detecciones se llevan a cabo por medio de la propagación de las ondas de presión (sonar) o electromagnéticas (radar), emitidas o reflejadas por el blanco. En ambos casos, existen modelos físicos que predicen la señal excedente (e), si se conocen las posiciones relativas del sensor y del blanco.

$$e \equiv 10 \operatorname{Log}_{10} \left(\frac{S}{R} \right) - 10 \operatorname{Log}_{10} \left(\frac{S}{R} \right)_{req} \quad (3.1)$$

En la ecuación (3.1), S/R es el porcentaje entre la señal (S) y la potencia del ruido (R) en el receptor y $(S/R)_{req}$ es la razón mínima requerida entre la señal (S) y el ruido (r), para que se efectúe la detección. Las unidades de "e" son los decibels (db). Si $e = 10$ db, 3 db, 0 db, -3 db ó -10 db, entonces, la razón entre la señal (S) y el ruido (R), es: 10, 2, 1, 0.5 y 0.1, respectivamente para que haya detección. Esto lo podemos calcular tomando en cuenta la ecuación (3.1), de la siguiente manera:

$$\frac{e}{10} \equiv \operatorname{Log}_{10} \left(\frac{S}{R} \right) - \operatorname{Log}_{10} \left(\frac{S}{R} \right)_{req} \equiv \operatorname{Log}_{10} \left[\frac{\left(\frac{S}{R} \right)}{\left(\frac{S}{R} \right)_{req}} \right]$$

Por medio de antilogaritmos simplificamos la expresión anterior:

$$10^{\left(\frac{e}{10} \right)} \equiv \left[\frac{\left(\frac{S}{R} \right)}{\left(\frac{S}{R} \right)_{req}} \right]$$

Con un simple despeje:

$$\left(\frac{S}{R} \right) \equiv 10^{\left(\frac{e}{10} \right)} \left(\frac{S}{R} \right)_{req} \quad (3.1a)$$

CASO 1: $e = 10$ db.

$$\left(\frac{S}{R}\right) \cong 10^{\left(\frac{e}{10}\right)} \left(\frac{S}{R}\right)_{req} \cong 10^{\frac{10}{10}} \left(\frac{S}{R}\right)_{req} \cong 10 \left(\frac{S}{R}\right)_{req}$$

CASO 2: $e = 3$ db.

$$\left(\frac{S}{R}\right) \cong 10^{\left(\frac{e}{10}\right)} \left(\frac{S}{R}\right)_{req} \cong 10^{\frac{3}{10}} \left(\frac{S}{R}\right)_{req} \cong 2 \left(\frac{S}{R}\right)_{req}$$

CASO 3: $e = 0$ db.

$$\left(\frac{S}{R}\right) \cong 10^{\left(\frac{e}{10}\right)} \left(\frac{S}{R}\right)_{req} \cong 10^{\frac{0}{10}} \left(\frac{S}{R}\right)_{req} \cong \left(\frac{S}{R}\right)_{req}$$

CASO 4: $e = -3$ db.

$$\left(\frac{S}{R}\right) \cong 10^{\left(\frac{e}{10}\right)} \left(\frac{S}{R}\right)_{req} \cong 10^{\frac{-3}{10}} \left(\frac{S}{R}\right)_{req} \cong 0.5 \left(\frac{S}{R}\right)_{req}$$

CASO 5: $e = -10$ db.

$$\left(\frac{S}{R}\right) \cong 10^{\left(\frac{e}{10}\right)} \left(\frac{S}{R}\right)_{req} \cong 10^{\frac{-10}{10}} \left(\frac{S}{R}\right)_{req} \cong 0.1 \left(\frac{S}{R}\right)_{req}$$

La razón por la cual, la potencia de la señal y la potencia del ruido, están relacionadas se debe a que las señales débiles se pueden amplificar hasta donde sea más conveniente, por lo tanto, el valor absoluto de la señal no es importante. Sin embargo, la amplificación hace que también aumente el ruido y la señal puede presentarse muy débil. Debido a esto, el ruido puede hacer que se confunda la señal e incluso eliminarla cuando la amplificación de la señal es muy grande. De esta manera, la pregunta que viene al caso, al decidir si algún fenómeno físico puede ser el mecanismo base para la detección y no: ¿Qué tan grande debe ser la amplificación, pero en cambio podemos hacer la siguiente pregunta: ¿Qué tan fuerte es relativamente respecto al ruido, con el cual debe compararse?. El ruido en (3.1), se puede deber a: la distancia del blanco, la disipación de la señal, al calentamiento de alguna resistencia, emisión de ruido provocada deliberadamente por un evasor (perturbación con interferencias) u otros fenómenos. Sea la fuente que fuere, el ruido siempre constituye el último elemento que se determina en la detección.

No es nuestra intención discutir los modelos físicos comúnmente usados aplicando (3.1) con mayor detalle. Sin embargo, los modelos se aproximan bastante y la detección no se puede considerar como sinónimo de una señal en exceso positiva "E", la cual es una variable aleatoria distribuida normalmente con media "e" y variancia σ^2 . La probabilidad de detección es:

$$P(E > 0) = \bar{\Phi}\left(\frac{e}{\sigma}\right)$$

donde $\bar{\Phi}$ representa la distribución normal acumulada y σ es cualquier número de decibels que hagan que la teoría y la práctica sean semejantes. La mayoría de los operadores usan un valor de σ entre 3 y 9 decibels, para la detección en mar abierto; puesto que a 3 decibels le corresponde un factor de 2 y a 9 decibels un factor de 8. El proceso para simular las detecciones con un programa de computadora, por ejemplo, resulta sencillo al utilizar este modelo: para esto, primero se elige el modelo físico adecuado para predecir "e", y a continuación se deduce "X", la cual es una variable con distribución normal con media 0 y variancia σ^2 , para obtener el valor de "E" y entonces se efectúa la detección sí y solamente sí "E > 0".

La idea de introducir una desviación estándar σ que esencialmente represente la discrepancia de la ecuación del radar o del sonar puede ser muy útil, cuando se calcula la incertidumbre del mundo real. Sin embargo, debe aplicarse con sumo cuidado. Considere, por ejemplo, un sonar activo que intenta detectar los blancos por medio de la emisión de pulsos de onda corta, cada uno de los cuales se espera sean reflejados por un blanco con la suficiente intensidad, para que se reciba la señal. Si $e = -3$ db y $\sigma = 6$ db, la probabilidad de detección, es:

$$P(E > 0) = \bar{\Phi}\left(\frac{e}{\sigma}\right) = \bar{\Phi}\left(\frac{-3}{6}\right) = \bar{\Phi}(-0.5) = 0.31 \quad \text{para cualquier pulso.}$$

La velocidad del sonido en el agua de mar es aproximadamente 1500 metros/segundo; así, un sonar con un alcance máximo de 6,000 metros deberá emitir pulsos cada:

$$t = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}} = \frac{[(2) (6,000 \text{ metros})]}{(1,500 \text{ metros/segundo})} = 8 \text{ segundos.}$$

con pulsos más cercanos se pueden obtener alcances ambiguos. En un minuto, habrá por lo tanto, alrededor de 7 pulsos emitidos. Si los 7 pulsos fueron estadísticamente independientes, la probabilidad de que los 7 pulsos fallen en la detección del blanco, será:

$$(1 - 0.31)^7 = (0.69)^7 = 0.07$$

con una probabilidad resultante de detección igual a 0.93.

Sin embargo, la suposición de independencia es vital y no debería hacerse por casualidad. Suponga, por ejemplo, que la razón principal de porqué la detección no es predecible, incluso cuando "e" es conocida, es la suposición de una sola velocidad del sonido contra el perfil de fondo, en cualquier punto entre el sensor y el blanco. La suposición frecuentemente no es correcta, por consiguiente se necesita suponer un valor de σ .

Ahora, la escala del tiempo sobre la cual se mide la velocidad del sonido en el océano es variable, se mide en horas; así dos pulsos con espaciamientos menores a un minuto, ambos detectarán el blanco o ambos fallarán en la detección del blanco. En otras palabras, los pulsos sucesivos no son estadísticamente independientes y la probabilidad de detección, en nuestro ejemplo de los 7 pulsos puede ser un poco mayor a 0.93, que es la probabilidad de detección con un solo pulso, algo así como 0.97.

Un método común para tratar con el problema de correlación del tiempo de retorno es, que $X(t)$ sea un proceso estocástico con media 0 y definir $E(t) = e(t) - X(t)$ como un tiempo independiente del exceso de señal. La probabilidad de detección, es entonces, la probabilidad de transición inicial para $E(t)$ a través del nivel 0, el cual no es fácil de calcular, ya que depende del valor que tome $X(t)$. El caso más simple es cuando $X(t)$ es constante en cada intervalo (un proceso de estado), siendo seleccionado de una distribución normal independiente con media 0 y varianza σ^2 en cada intervalo. Si todos los intervalos tienen

la misma longitud, el modelo se conoce con el nombre de "modelo del tiempo de relajación". En este caso, la probabilidad de que no ocurra la detección en el i-ésimo

intervalo es:

$$q_i = 1 - \bar{\Phi} \left[\frac{e(t_i)}{\sigma} \right]$$

donde por definición el máximo valor de $e(t)$ en el i -ésimo intervalo ocurre en t_i . La probabilidad de detección es entonces: $1 - \pi_i q_i$, donde el producto se extiende sobre

cualquier intervalo o fracción de intervalo que se considere en el periodo de interés. Una crítica del modelo del tiempo de relajación, es que los resultados son sensibles a una definición arbitraria del tiempo inicial, ya que dicha definición influye en los tiempos t_i . El modelo

(λ, σ) elimina este problema, mientras que se conserve $X(t)$ como un proceso de estados, siendo en los puntos extremos de los intervalos un proceso de Poisson con parámetro λ . Sea $[t_1, t_2]$, un intervalo sobre el cual $e(t)$ es unimodal (un solo pico) y considere el siguiente método para construir el proceso $X(t)$:

1. Sea $X(t')$ una muestra normal, donde t' es el valor máximo de $e(t)$ (el símbolo \otimes en la figura 3-1).
2. Seleccione los puntos extremos T_i , de los intervalos como un proceso de Poisson.
3. En cada punto extremo T_i , sea $X(T_i)$ una muestra normal independiente (los 0's en la figura 3-1).
4. Dibuje la forma de la función $X(t)$ a través de los 0's y el símbolo \otimes , comenzando en el símbolo \otimes y terminando en los extremos.

No habrá detección si $X(t) > e(t)$ para toda t en el intervalo $[t_1, t_2]$. Puesto que $e(t)$ es unimodal, esto es equivalente a que estén todos los 0's y el \otimes sobre $e(t')$.

Sea, $p(t) = \bar{\Phi} [e(t)/\sigma]$ la probabilidad de que una muestra normal se encuentre por debajo de $e(t)$. La probabilidad de que \otimes esté sobre $e(t')$ es entonces $1-p(t')$. Sea N el

número aleatorio de los 0's abajo de $e(t)$ en el intervalo $[t_1, t_2]$. Puesto que la probabilidad de encontrar un 0 abajo de $e(t)$ en el intervalo $[u, u + du]$ es, $\lambda p(u) du$, y:

$$E(N) = \int_{t_1}^{t_2} \lambda p(u) du$$

usando la ecuación (2.4):

$$P(N=0) = \exp \left[-\lambda \int_{t_1}^{t_2} p(u) du \right]$$

No habrá detección en el intervalo $[t_1, t_2]$ si no se efectúa la detección en t^* y $N=0$, así la probabilidad de una detección dentro del intervalo $[t_1, t_2]$, es:

$$P_{DET} = 1 - [1 - p(t^*)] \exp \left[-\lambda \int_{t_1}^{t_2} p(u) du \right] \quad (3.2)$$

Observe que: $P_{DET} = P(t^*)$, cuando $\lambda=0$; si $X(t)$ nunca cambia, P_{DET} depende de $e(t)$ únicamente hasta que se alcanza el máximo $e(t^*)$. La simulación en 4 pasos, descrita anteriormente es una guía para la obtención de (3.2). Si $e(t)$ no fuese unimodal, no obstante, la simulación puede ser una buena alternativa para el cálculo, puesto que fórmulas tan sencillas como (3.2) no son tan fáciles de obtener.

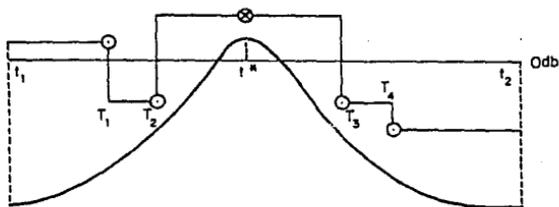


FIGURA 3-1. REPRESENTACION DE LA NO DETECCION EN EL MODELO (λ, σ)

$X(t)$ puede ser, por ejemplo, un proceso de Gauss-Markov con una muestra de derrotas continuas. $X(t)$ también puede ser un proceso de superposición con cada una de sus componentes correspondientes a una fuente particular de incertidumbre, de la ecuación de sonar/radar. Una gran parte de los modelos que han sido probados, se han encontrado aspectos convenientes así como también deficiencias. Por lo regular no se puede elegir un modelo que satisfaga todas las consideraciones, por ejemplo, costo, tiempo, disponibilidad de datos y proporcione resultados.

CAPITULO 4

CURVAS DE ALCANCE LATERAL/ANCHO DE BARRIDO

4.1. CURVAS DE ALCANCE LATERAL.

Una curva de alcance lateral es la representación gráfica de la función $p(x)$, donde $p(x)$ se define como la probabilidad de que el blanco sea detectado si su rumbo relativo con respecto al explorador es una línea recta infinita en ambas direcciones. El punto más cercano entre el blanco y el explorador se designa con el nombre de Punto de Máximo Acercamiento (PMA), denotado por X . Por infinita, se entiende una línea de gran tamaño, donde la probabilidad de detección no se incrementa si ésta se hace mayor. Observe, que la pregunta ¿dónde ocurre la detección? no ha sido considerada. Las detecciones después del PMA, se tratan de igual manera que las detecciones antes del PMA. En este sentido, las curvas de alcance lateral son más exactas en el cálculo de la probabilidad de detección, que algunos modelos geométricos de detección. Una curva de alcance lateral se puede obtener a partir de un modelo de detección. En la sección 2.4, por ejemplo, se incluye la obtención de las curvas de alcance lateral por medio de un sensor con ley inversa del cubo. Las curvas de alcance lateral también se pueden obtener experimentalmente por medio de una generación de líneas rectas encontradas, para cada una de las cuales se registra el alcance lateral y la detección o no detección. En este caso la clase de curvas:

$$P(x) = 1 - \exp\left(-\left|\frac{X_0}{X}\right|^b\right) \quad (4.1)$$

debe ser una clase razonable dentro de los cuales se observa un mejor ajuste dentro de la máxima probabilidad justificable, siendo X_0 y b dos parámetros libres. En esta clase de curvas se incluye la ley inversa del cubo ($b=2$) y la ley del alcance definido ($b = \alpha$), como casos especiales. Para $b > 1$, el ancho de barrido, es:

$$W = 2 X_0 \Gamma\left(1 - \frac{1}{b}\right) \quad (4.2)$$

Donde Γ , es la función Gamma. El ancho de barrido es infinito cuando $b \leq 1$. Un uso muy importante de las curvas de alcance es en la investigación de los efectos de espaciamiento entre obstáculos o en el barrido de una área. Si x el alcance lateral de un sensor y S es el ancho de barrido, entonces los alcances laterales a los otros sensores son $X \pm S$, $X \pm 2S$, etc. Observe que algunos de estos alcances laterales pueden ser negativos; es conveniente permitir este abuso de la palabra alcance. Sea $\beta(x)$ la probabilidad de que al menos un sensor detecte al blanco y suponiendo independencia entre los diferentes eventos de detección, tenemos:

$$\beta(x) = 1 - \prod_i (1 - p(x \pm iS)) \quad (4.3)$$

donde el producto se extiende sobre cualquier conjunto de valores positivos y negativos para un i apropiado. Observe que esto dejará un producto de exponenciales convenientes para la clase de curvas (4.1). En este caso de la ley inversa del cubo y una línea infinita de sensores, se tiene una expresión de la forma cerrada para $\beta(x)$ (sección 2.4).

4.2. ANCHO DE BARRIDO.

El ancho de barrido W , se define como el área bajo la curva de alcance lateral:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx \quad (4.4)$$

Donde W tiene unidades de longitud y el ancho de barrido de un sensor tipo cookie cutter con un alcance definido R , es $W = 2R$. Se supone frecuentemente que un sensor con ancho de barrido W es equivalente a un sensor cookie cutter con alcance definido $R = W/2$. Suponga que un sensor tiene una serie de encuentros con un blanco, cada uno de los cuales se caracteriza por un alcance lateral aleatorio con una función de densidad de probabilidad $f(x)$. Entonces, la probabilidad de detección en una exploración, es:

$$P_d = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) f(x) dx$$

Si el alcance lateral es grande comparado con la capacidad de detección del sensor, entonces, es razonable suponer que $f(x)$ es aproximadamente constante (designado por f_0) sobre el intervalo $[-L, L]$, que comprende casi toda el área bajo la curva $p(x)$. Este será el caso, por ejemplo, si un explorador busca de manera aleatoria un blanco en una región cuyas dimensiones son demasiado grandes comparadas con el ancho de barrido. La probabilidad de detección para un encuentro, es aproximadamente:

$$P_d = \int_{-L}^L p(x) f(x) dx \approx f_0 \int_{-L}^L p(x) dx = f_0 W \quad (4.5)$$

Si queremos determinar la probabilidad de detección sobre un periodo específico de tiempo, trataremos con la frecuencia de encuentros, la magnitud de f_0 , etc, pero el punto importante, es que podemos ver que todas las curvas de alcance lateral con el mismo ancho de barrido, nos dan la misma respuesta. En particular, no hay un prejuicio en reemplazar conceptualmente el sensor actual con otro en problemas donde la suposición anterior sea razonable.

CAPITULO 5

ANCHO DE BARRIDO

5.1 BARRIDOS SEPARADOS.

Consideremos que se lleva a cabo una exploración encaminada a detectar el blanco, empleando una sucesión de barridos breves, tal como se observa en la figura 5-1. Este capítulo estará dedicado al desarrollo de modelos que representan cantidades, tales como: la probabilidad de que tenga lugar la detección en un número determinado de barridos; la probabilidad de que ocurra la detección en un barrido determinado; y el número esperado de barridos necesarios para detectar el blanco.

El parámetro que se utilizará es el de la probabilidad de barrido, g_i , el cual da la probabilidad de detección del blanco en un barrido particular. Esta probabilidad generalmente varía de barrido a barrido con algunas condiciones físicas, tales como: alcance, velocidad, iluminación, condiciones meteorológicas, etc. El subíndice i denota el i -ésimo barrido. Se supondrá que el valor de cada g_i , para $i = 1, 2, 3, \dots, n$ se conoce o se ha estimado.

Supongamos que cada barrido sucesivo se numera desde el principio de la búsqueda. Sea la variable aleatoria N , el barrido en el cual se detecta el blanco. N es entonces una variable aleatoria de valor discreto. Definamos:

1. $P(n) = P\{N = n\}$:

Es la probabilidad de que el blanco sea detectado en el n -ésimo barrido.

2. $F(n) = P\{N \leq n\}$:

Es la probabilidad de que el blanco sea detectado en el n -ésimo barrido o en los precedentes, esto es, la probabilidad de que la detección tenga lugar en los primeros n barridos.

3. $E\{N\}$:

Es el número esperado de barridos necesarios para detectar el blanco.

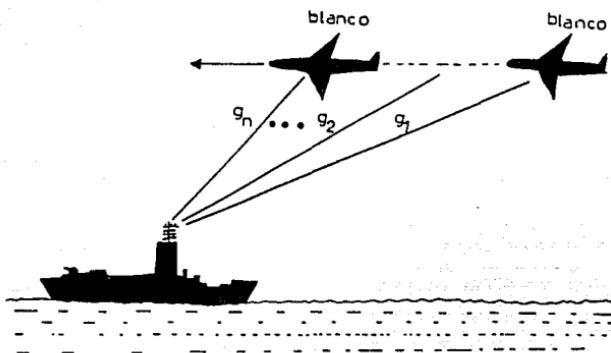


FIGURA 5-1. BARRIDOS SEPARADOS.

El parámetro g_i se define como la probabilidad de detectar el blanco en el i -ésimo barrido, presumiendo que no se ha detectado anteriormente.

Para cualquier valor particular de i , digamos n , esta probabilidad de barrido puede ser definida en símbolos como:

$$g_i = P \{ N=n \mid N > n-1 \} \quad (5.1)$$

Expresiones para las que $P(n)$, $F(n)$ y $E\{n\}$ pueden obtenerse después de calcular la probabilidad $P\{N > n\}$, de que el blanco no sea detectado en los n primeros barridos. Sea

D_i el evento el blanco es detectado en el i -ésimo barrido y \bar{D}_i su complemento, es decir,

el blanco no es detectado en el i -ésimo. Entonces:

$$\begin{aligned}
 P(N > n) &= P\left(\bigcap_{i=1}^n \bar{D}_i\right) \\
 &= P(\text{La detección no tiene lugar en ninguno de los } n \text{ primeros barridos}) \\
 &= P(\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 \cap \bar{D}_3 \cap \dots \cap \bar{D}_n) \\
 &= P(\bar{D}_1) P(\bar{D}_2 | \bar{D}_1) P(\bar{D}_3 | \bar{D}_1 \cap \bar{D}_2) \dots P(\bar{D}_n | \bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 \cap \dots \cap \bar{D}_{n-1})
 \end{aligned}$$

En donde | significa dada la ocurrencia del evento. Pero,

$$\begin{aligned}
 g_1 &= P(D_1) \\
 g_2 &= P(D_2 | \bar{D}_1) \\
 g_3 &= P(D_3 | \bar{D}_1 \cap \bar{D}_2) \\
 &\vdots \\
 g_n &= P(D_n | \bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 \cap \dots \cap \bar{D}_{n-1})
 \end{aligned}$$

De aquí:

$$\begin{aligned}
 1 - g_1 &= P(\bar{D}_1) \\
 1 - g_2 &= P(\bar{D}_2 | \bar{D}_1) \\
 1 - g_3 &= P(\bar{D}_3 | \bar{D}_1 \cap \bar{D}_2) \\
 &\vdots \\
 1 - g_n &= P(\bar{D}_n | \bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 \cap \dots \cap \bar{D}_{n-1})
 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$P(N > n) = (1 - g_1) (1 - g_2) (1 - g_3) \dots (1 - g_n)$$

Igual a:

$$P(N > n) = \prod_{i=1}^n (1 - g_i) \quad (5.2)$$

La probabilidad $F(n)$, de detección del blanco en los primeros n barridos puede ahora encontrarse fácilmente por medio de:

$$F(n) = P(N \leq n) = 1 - P(N > n)$$

Que utilizando la ecuación (5.2), resulta:

$$F(n) = 1 - \prod_{i=1}^n (1-g_i) \quad (5.3)$$

Para encontrar $p(n)$, que representa la probabilidad de la primera detección del blanco en el n -ésimo barrido.

$$\begin{aligned} p(n) &= P(N=n), \quad \text{y puesto que } \{(N=n) \subset N(N>n-1)\} \\ &= P(\text{falló la detección del blanco en los primeros } n-1 \text{ barridos}) \\ &\quad \cap (\text{detección del blanco en el } n\text{-ésimo barrido}) \\ &= P(N>n-1) \cap (N=n) \\ &= (N>n-1) P(N=n) | (N>n-1) \end{aligned}$$

Considerando la ecuación (5.1):

$$p(n) = P(N>n-1) g_n$$

Y de la ecuación (5.2):

$$p(n) = g_n \prod_{i=1}^{n-1} (1-g_i) \quad (5.4)$$

Por otro lado, la relación entre $p(n)$ y $F(n)$ establece que:

$$\begin{aligned} F(n) &= P(N \leq n) \\ &= P(N=1) + P(N=2) + \dots + P(N=n) \\ &= P(1) + P(2) + \dots + P(n) \end{aligned}$$

$$F(n) = \sum_{i=1}^n p(i) \quad (5.5)$$

Las cantidades $p(n)$ y $F(n)$ satisfacen las necesidades de una función de probabilidad y de una función de distribución acumulada, respectivamente. Admitiendo que $F(\infty) = 1$. Si esto es o no cierto, se determinará por la naturaleza del problema de detección y en particular por las mismas g_i . Si en un caso particular, $F(\infty) = 1$, el número esperado de barridos necesarios para la detección puede hallarse por comparación con los valores esperados de N , esto es:

$$E(N) = \sum_{\text{todo } n} n p(n)$$

Cuando se explora un blanco, el objetivo normal es aumentar la probabilidad de detección tanto como sea posible. En otros caso puede ser más importante la detección en el menor número de barridos posible. Por lo tanto ya sea $F(n)$ ó $E\{N\}$ pueden servir como medida de efectividad, dependiendo del objetivo concreto.

EJEMPLO:

Supongamos que un observador se acerca a un blanco. Los valores g_i se dan en la siguiente tabla:

i	1	2	3	4	5
g_i	1/5	2/5	3/5	4/5	5/5

Entonces, obtendremos, con la ecuación 5.3 la probabilidad de detección en los primeros n barridos:

$$F(n) = 1 - \prod_{i=1}^n (1-g_i)$$

$$F(1) = 1 - \prod_{i=1}^1 (1-g_i) = 1 - (1-1/5) = 1/5$$

$$F(2) = 1 - \prod_{i=1}^2 (1-g_i) = 1 - (1-g_1) (1-g_2) = 13/25$$

$$F(3) = 1 - \prod_{i=1}^3 (1-g_i) = 1 - (1-g_1) (1-g_2) (1-g_3) = 101/125$$

$$F(4) = 1 - \prod_{i=1}^4 (1-g_i) = 1 - (1-g_1) (1-g_2) (1-g_3) (1-g_4) = 601/625$$

$$F(5) = 1 - \prod_{i=1}^5 (1-g_i) = 1 - (1-g_1) (1-g_2) (1-g_3) (1-g_4) (1-g_5) = 1$$

Lo cual se resume en la siguiente tabla:

n	1	2	3	4	5
$F(n)$	1/5	13/25	101/125	601/625	1

Para encontrar el número promedio de barridos necesarios para la detección, la probabilidad de que ocurra una detección inicial en el n -ésimo barrido, $p(n)$, debe obtenerse en primer lugar por la ecuación (5.4):

$$p(n) = g_n \prod_{i=1}^{n-1} (1-g_i)$$

$$p(1) = g_1 \prod_{i=1}^0 (1-g_i) = g_1 = 1/5$$

$$p(2) = g_2 \prod_{i=1}^1 (1-g_i) = g_2 (1-g_1) = 8/25$$

$$p(3) = g_3 \prod_{i=1}^2 (1-g_i) = g_3 (1-g_1) (1-g_2) = 36/125$$

$$p(4) = g_4 \prod_{i=1}^3 (1-g_i) = g_4 (1-g_1) (1-g_2) (1-g_3) = 96/625$$

$$p(5) = g_5 \prod_{i=1}^4 (1-g_i) = g_5 (1-g_1) (1-g_2) (1-g_3) (1-g_4) = 24/625$$

Lo cual se resume en la siguiente tabla:

n	1	2	3	4	5
p(n)	1/5	8/25	36/125	96/625	24/625

En este caso, $p(n)$ y $F(n)$ cumplen los requisitos para una función de densidad de probabilidad y una función de distribución acumulada, respectivamente. Por lo tanto podemos obtener $E\{N\}$.

$$E\{N\} = \sum_{\text{cada } n} n p(n) = \sum_{n=1}^5 n p(n)$$

$$= 1(1/5) + 2(8/25) + 3(36/125) + 4(96/625) + 5(24/625) = 2.!$$

5.2 BARRIDOS SEPARADOS EN UN MEDIO CONSTANTE.

En el caso especial en que no cambien las condiciones durante la exploración, cada probabilidad de barrido, g , tiene el mismo valor; por lo que se denota por g . La probabilidad de detección en los n primeros barridos, de la ecuación (5.3), se convierte en:

$$F(n) = 1 - \prod_{i=1}^n (1-g) = 1 - (1-g)^n$$

Y la probabilidad de detección en el n -ésimo barrido, de la ecuación (5.4), se convierte en:

$$p(n) = g \prod_{i=1}^{n-1} (1-g) = g(1-g)^{n-1}$$

Puede verse que $F(\infty) = 1$, si g es diferente de cero, de tal manera que, $p(n)$ y $F(n)$ son la función de densidad de probabilidad y la función de distribución, respectivamente. $p(n)$ es de la misma forma que la función de densidad de probabilidad para la distribución geométrica. El número esperado de barridos necesarios para la detección será, por lo tanto:

$$E(N) = \frac{1}{g}$$

En este caso, de condiciones constantes, la probabilidad de detección $F(n)$ puede ser tan grande como se quiera, incrementando el número de barridos. Esto será cierto siempre que se admita que $g > 0$.

5.3 BARRIDO CONTINUO.

Cuando se utiliza un detector de naturaleza continua, la información también se recibe de manera continua y, por lo tanto, la detección será posible en cualquier instante durante la exploración. En este caso, la probabilidad de que la detección tenga lugar en un instante determinado tiene que ser cero y, por lo tanto, no es útil describir la manera en que la detección varía durante la búsqueda. Sea la variable aleatoria Y el tiempo requerido para detectar un blanco, donde la detección, significa el contacto inicial. T es una variable aleatoria continua desde cero a infinito y $p(T=t) = 0$, como cualquier distribución continua. Entonces, ¿qué parámetro podríamos utilizar para representar la probabilidad de

detección de un blanco en función del tiempo?. El parámetro que emplearemos se denomina tasa de detección instantánea y lo representaremos por el símbolo $\gamma(t)$. Si hay presentes varios blancos, entonces la tasa de detección, que se expresa con el número de blancos detectados por unidad de tiempo, tiene un significado intuitivo. Es más difícil explicar lo que significa la tasa de detección con respecto a un solo blanco, aunque este es el caso de interés de este punto.

Para medir la capacidad de un detector continuo se han desarrollado los siguientes modelos:

- A. $F(t) = P(T \leq t)$: La probabilidad de que un blanco sea detectado en una búsqueda que dure un tiempo t .
- B. $E\{T\}$: El tiempo en que se espera la detección.

Sea X una variable aleatoria que representa el número de detecciones en un intervalo de tiempo t . Este tipo de situación puede aproximarse a la distribución de Poisson. En este caso la función de probabilidad para X es:

$$p(x) = P(X=x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

Donde μ es el valor medio ó número esperado de detección en el tiempo t . el producto de la tasa promedio de detección $\bar{\gamma}$ y el tiempo t : $(\bar{\gamma})(t)$, produce el valor de μ .

Ya que, el evento de que el blanco no sea detectado hasta después de t , ($T > t$), equivale al evento en que las detecciones no ocurran en el tiempo t , ($X=0$), entonces:

$$p(T > t) = p(X=0) = p(0) = \frac{\mu^0 e^{-\mu}}{0!} = e^{-\mu}$$

$$F(t) = p(T \leq t) = 1 - p(T > t) = 1 - e^{-\mu}$$

Para encontrar μ , use por ejemplo la figura 5-2, donde $\gamma(t)$ está en función del tiempo. La curva de la figura 5-2 da, en cualquier instante, un valor que representa la tasa

de detección en ese instante. La tasa promedio de detección $\bar{\gamma}$ en la primera hora es aproximadamente de siete detecciones por hora y en la tercera de cinco. El número esperado de detecciones en tres horas es aproximadamente de dieciocho. Si los intervalos de tiempo escogidos fuesen más pequeños la aproximación sería mayor:

$$\mu(t) = \int_0^t \gamma dt$$

luego,

$$F(t) = 1 - e^{-\int_0^t \gamma(t) dt} \quad (5.6)$$

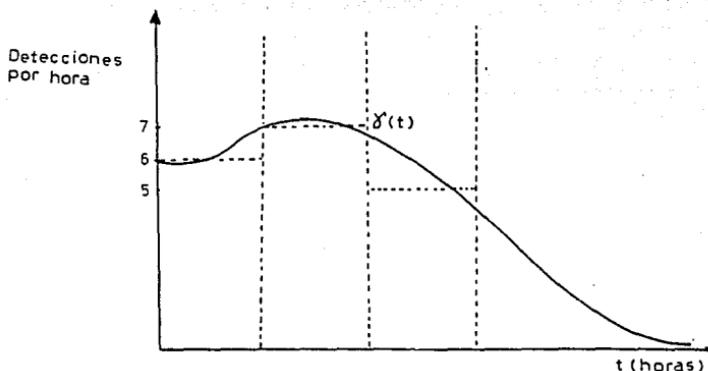


FIGURA 5-2. DETECCIONES POR HORA

$F(t)$ es la probabilidad de detección de un blanco en una búsqueda de duración t . Es una función de distribución acumulada, pues $F(\infty) \sim 1$,

$$\int_0^t \gamma(t) dt \rightarrow \infty \quad \text{para } t \rightarrow \infty$$

Esto puede o no ser el caso, dependiendo de $\gamma(t)$. Si así fuese, entonces el tiempo medio de detección, $E\{T\}$, puede hallarse empleando la función de probabilidad, $f(t)$ y la relación general:

$$E\{T\} = \int_{\text{para todo } t} t f(t) dt$$

Una expresión de $f(t)$ puede encontrarse hallando la derivada de la distribución acumulada:

$$f(t) = \gamma(t) e^{-\int_0^t \gamma(t) dt} \quad (5.7)$$

Por otra parte una expresión para $E\{T\}$ sería:

$$E\{T\} = \int_0^{\infty} t \gamma(t) e^{-\int_0^t \gamma(t) dt} dt \quad (5.8)$$

Esta expresión puede calcularse, si se conoce el valor de $\gamma(t)$.

Debe recordarse que la medida de efectividad de detección debe depender del objetivo de la misión. Se han obtenido dos valores, $F(t)$ y $E\{T\}$, en el barrido continuo para medir la probabilidad de detección y el tiempo esperado. Pueden ser importantes en algunas ocasiones otros valores, tal como, la probabilidad de detectar un blanco antes de ser detectado por él. Como ejemplo, supongamos que $\gamma(t) = t/100$. Entonces, de la ecuación (5.6) la probabilidad de detección para un tiempo t sería:

$$F(t) = 1 - e^{-\int_0^t \frac{t}{100} dt} = 1 - e^{-\frac{t^2}{200}}$$

Esta es una función de distribución acumulada, ya que $f(\infty) \rightarrow 1$. Por lo tanto:

$$f(t) = \frac{d}{dt} F(t) = \frac{t e^{-\frac{t^2}{200}}}{100}$$

Y se tiene que:

$$E\{T\} = \int_0^{\infty} \frac{t^2 e^{-\frac{t^2}{200}}}{100} dt$$

la cual cuando es evaluada da:

$$E(T) = \sqrt{50\pi}$$

5.4 BARRIDO CONTINUO EN UN MEDIO INVARIABLE.

En el caso especial en que $\gamma(t)$ no cambia en el tiempo, sino que, por el contrario, permanece constante γ , la ecuación (5.6), resulta:

$$F(t) = 1 - e^{-\gamma t} \quad (5.9)$$

La función de distribución acumulada para todos los valores de $\gamma > 0$. La función de densidad de probabilidad $f(t)$, es $(\gamma e^{-\gamma t})$. El tiempo esperado de detección será, por consiguiente:

$$E(T) = \int_0^{\infty} t \gamma e^{-\gamma t} dt = \frac{1}{\gamma} \quad (5.10)$$

5.5 LA DETECCION EN FUNCION DEL ALCANCE.

Las cantidades g , y $\gamma(t)$ dependen, como se ha indicado anteriormente de las condiciones físicas. El valor de $\gamma(t)$, por ejemplo, ordinariamente varía con el tiempo de búsqueda a causa de cambios en las condiciones físicas. En la exploración visual afectan al valor de la tasa de detección, $\gamma(t)$, la distancia al blanco, la iluminación, la difuminación, el contraste del blanco con el medio que le rodea y otras condiciones físicas. Una de las condiciones que afectan la capacidad de cualquier aparato de detección es la distancia al blanco, siendo ésta una de las condiciones que varían durante la exploración. En muchos casos, la distancia puede ser la principal responsable de un cambio en el valor

de la tasa de detección y γ se puede considerar exclusivamente, como una función de la distancia. Cuando así ocurre, la tasa de detección instantánea se expresará por $\gamma(r)$, que representa el número de detecciones por unidad de tiempo cuando la distancia al blanco sea r . Se podrá emplear este método, bien cuando todas las condiciones, excepto la distancia, permanecen prácticamente invariables durante la operación considerada o bien cuando las otras condiciones no influyen en los resultados hasta el extremo de hacerlos inaceptables.

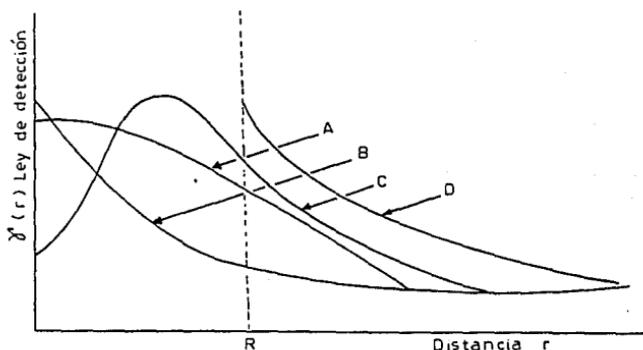


FIGURA 5-3. LEY DE DETECCION.

En general, la tasa de detección instantánea y las probabilidades de detección de cada barrido, tienden a ser menores cuando la distancia es grande y a ser mayores cuando la distancia decrece. En la figura 5-3 se muestran gráficas de $\gamma(r)$ para diferentes tasas de detección instantánea.

El caso A tiene lugar cuando el valor de la tasa de detección instantánea alcanza un máximo finito, para una distancia cero. En el caso B este máximo es infinito. El caso C puede indicar que los ecos del mar en el radar disminuyen la probabilidad de detección a medida que el blanco se acerca al detector. En el caso D, la tasa de detección instantánea llega a ser infinito para una distancia determinada $R > 0$.

En el caso D puede verse que, siempre que un blanco se encuentre dentro del alcance R, el valor de detección es infinito y de aquí que el exponente en la ecuación (5.6) es infinito y por lo tanto, la probabilidad de detección es 1. El caso D, frecuentemente, es el más normal en una situación operacional. Algunas veces se supone, como una aproximación posterior, que $\gamma(t)$ es cero para distancias mayores que R. El caso D, junto con esta presunción, ofrece una simplificación útil de algunos problemas de detección.

5.6 LEY DE DETECCION INVERSAMENTE PROPORCIONAL AL CUBO.

Un ejemplo puede aclarar la evaluación de $\gamma(x)$, en el caso de que sean razonables los siguientes supuestos:

- El observador está a una altura h, sobre el nivel del mar, donde se desplaza el blanco.
- El observador detecta el blanco a través de su estela. Para un observador aéreo la estela de un blanco en movimiento es ordinariamente más detectable que el propio blanco.
- La tasa de detección instantánea, γ , es proporcional al ángulo sólido subtendido por la estela en el punto de la observación.

El ángulo sólido subtendido, mostrado en la figura 5-4, se puede calcular para una extensión de océano de longitud "a" hacia el observador y de anchura "b" perpendicular a la dirección del observador (perpendicular a la página en la figura 5-4(a)).

El ángulo sólido infinitesimal es el producto del ángulo α , subtendido por "a" y el ángulo β , subtendido por "b". La medida, en radianes de α , es:

$$\alpha = \frac{a}{S} \tag{5.11}$$

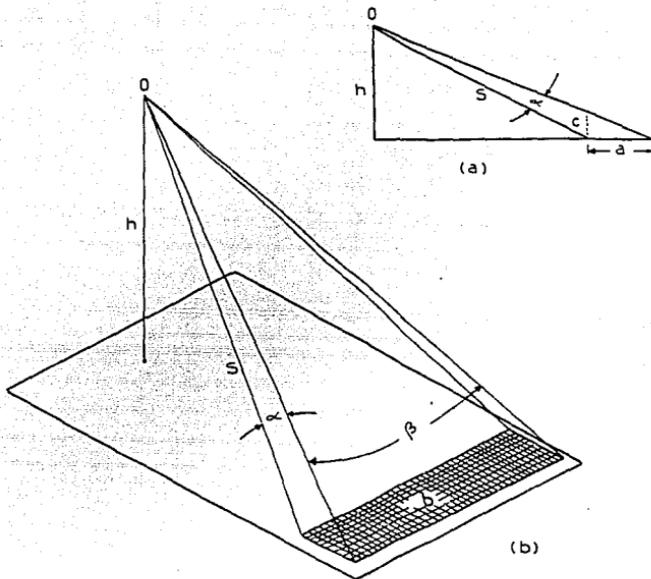


FIGURA 5-4. LEY DE DETECCION INVERSAMENTE PROPORCIONAL AL CUBO.

Para obtener el valor de "c", vamos a considerar dos casos:

A. Cuando "h" es pequeña.

Refiriéndonos a la figura 5-4 y por medio de triángulos semejantes, tenemos:

$$\frac{c}{a} = \frac{h}{r}$$

puesto que "h" es pequeña, "r" se aproxima a "S", es decir $r \approx S$ y por lo tanto:

$$\frac{c}{a} = \frac{h}{S}$$

(5.12)

2. Cuando "h" es grande.

Por medio de relaciones trigonométricas, obtenemos:

$$\theta = \frac{h}{r + a} \quad (5.13)$$

y

$$\theta = \frac{c}{a} \quad (5.14)$$

Igualando (5.13) y (5.14):

$$\frac{c}{a} = \frac{h}{r + a} \quad (5.15)$$

puesto que en este caso "h" es grande, "r + a" se aproxima a S. Entonces:

$$\frac{c}{a} = \frac{h}{S}$$

Que es equivalente a la ecuación (5-12), por consiguiente, podemos considerar el valor de "c", como:

$$c = \frac{ah}{S} \quad (5.16)$$

sustituyendo (5.16) en (5.11):

$$\alpha = \frac{ah}{S^2} \quad (5.17)$$

y la medida en radianes es:

$$\alpha = \gamma S \quad (5.18)$$

el ángulo sólido β , subtendido por "b, es:

$$\beta = \frac{b}{S} \quad (5.19)$$

De aquí que el ángulo:

$$\alpha \beta = \left[\frac{ah}{S^2} \right] \left[\frac{b}{S} \right] = \frac{abh}{S^3} = \frac{Ah}{S^3} \quad (5.20)$$

Donde: "A" es el área del rectángulo formado por la estela del barco.

El área "A", de la estela del blanco, no es rectangular, sino que, debe ser considerada como formada de un gran número de rectángulos como se representa en la figura 5-4 (b), siendo el ángulo sólido total la suma de los correspondientes ángulos sólidos parciales. De aquí que, cuando las dimensiones de "A" sean menores, en comparación con "h", "r" y "S", tenemos; de la figura 5-4 (b):

$$S = \sqrt{h^2 + r^2} \quad (5.21)$$

y sustituyendo (5.21) en (5.20):

$$\alpha \beta = \frac{Ah}{[\sqrt{h^2 + r^2}]^3} = \frac{Ah}{[h^2 + r^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (5.22)$$

El que se supone proporcional al ángulo sólido.

$$\gamma(r) = \frac{Kh}{S^3} = \frac{Kh}{[h^2 + r^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (5.23)$$

Donde la constante K depende de todos los factores considerados fijos y que han sido explícitamente introducidos, tales como, contraste de la estela sobre el océano, condiciones meteorológicas, etc.; por supuesto K contiene a A como un factor. Dimensionalmente, K es igual al área por unidad de tiempo. En la mayor parte de los casos, r es mucho mayor que h y la ecuación (5.23) puede reemplazarse, con satisfactoria aproximación, por:

$$\alpha(r) = \frac{Kh}{r^3} \quad , \text{pues } r \gg h \quad (5.24)$$

Las ecuaciones (5.23) y (5.24) conducen a los casos A y B, respectivamente, de la figura 5-3. La propiedad de detección que expresan se denomina **ley inversamente proporcional al cubo**. En un estudio más detallado de detección visual se ha encontrado que tienen que hacerse muchos cambios en esta ley para obtener un mayor grado de aproximación, por

la gran variedad de condiciones en que se practica; sin embargo, la ley inversamente proporcional al cubo es un modelo substancialmente útil para predecir la probabilidad de detección como se verá en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO.

Aquí se muestra como puede determinarse la probabilidad de detección cuando γ es una función de la distancia, empleando los principios desarrollados al comienzo de este capítulo.

Suponga que para un tiempo $t=0$, un radar informa la presencia de un misil enemigo a 500 millas náuticas y que se está acercando a una plataforma antimisil a una velocidad de 10,000 nudos. Para contra-atacarlo, debe ser alcanzado por la planta antimisil antes de que llegue a una distancia de 200 millas. Si la tasa de detección de la plataforma antimisil sigue la ley inversamente proporcional al cubo, $Kh = 10^9$, entonces:

$$\gamma(r) = \frac{Kh}{r^3} = \frac{10^9}{r^3}$$

En detecciones por hora a la distancia r . ¿Cuál es la probabilidad de controlar el misil con tiempo suficiente para contra-atacarlo? En función del tiempo, la distancia será:

$$r = 500 - 10,000 t$$

donde t está en horas.

$$\gamma(t) = \frac{10^9}{[500 - 10,000 t]^3}$$

y la probabilidad de ser alcanzado a las 200 millas equivale a la probabilidad de ser requerido para las 0.03 horas. Esta probabilidad puede calcularse por la ecuación (5.6), como sigue:

$$\begin{aligned} F[0, 0.03 \text{ hrs}] &= 1 - e^{-\int_0^{0.03} \frac{10^9}{[500 - 10,000 t]^3} dt} \\ &= 1 - e^{-1.05} = 0.650 \end{aligned}$$

CAPITULO 6

CURVAS DE ALCANCE LATERAL

6.1 ALCANCE LATERAL.

En la búsqueda de blancos, con los distintos equipos de detección, se tendrá siempre que el blanco, el equipo o ambos a la vez, estarán en movimiento. La detección será posible siempre que el movimiento relativo entre el blanco y el detector los acerque lo suficientemente, para que el blanco pase a través de la zona de posible detección.

El movimiento relativo del blanco rara vez estará orientado directamente hacia el detector. Generalmente el blanco se moverá a lo largo de una línea que atraviesa la zona de posible detección del detector. La Distancia, Mínima del Blanco (DMB) al equipo se ha definido como alcance lateral y también se utiliza para definir la posición de una línea particular del movimiento relativo del blanco, con respecto a un equipo de detección. El alcance lateral es un parámetro físico, normalmente representado por X . La región o zona de posible detección, es la interior a un círculo centrado sobre el equipo de detección y que tiene un radio igual a la máxima distancia posible de detección R_m . Una representación gráfica del movimiento se muestra en la figura 6-1.

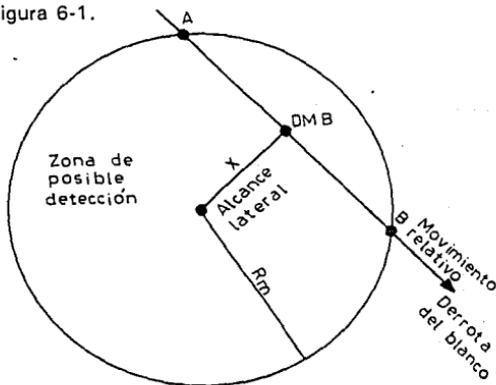


FIGURA 6-1. ALCANCE LATERAL

6.2 CURVA DE ALCANCE LATERAL.

Supongamos que un blanco se mueve a lo largo de una línea que pasa a un alcance lateral, dentro de una zona de detección. Para un conjunto fijo de detecciones ambientales, la probabilidad acumulada de detección del blanco se incrementa a partir del tiempo en que el blanco entra a la zona de detección. En la figura 6-1 aparece desde que entra por A hasta que sale por B. En este momento, toda probabilidad de detectar el blanco ha desaparecido. Esta probabilidad acumulada se le expresa por $\bar{P}(x)$. A la representación gráfica de $\bar{P}(x)$, para todos los valores de x , se le conoce como **curva de alcance lateral**. Una interpretación propia de $\bar{P}(x)$ es la probabilidad de detección incondicional dado que el alcance al blanco en DMB es x . Una curva de alcance lateral típica se representa en la figura 6-2.

Debe tenerse en cuenta un punto importante, cuando se dispone de una curva de alcance lateral. Esta curva representa la probabilidad acumulada de detección para un blanco particular, bajo un conjunto particular de circunstancias ambientales, con un equipo de detección determinado. Cualquier cambio de las condiciones supondrá una curva de alcance lateral diferente, por lo tanto, cada equipo de detección tendrá una familia de curvas de alcance lateral, cada una de las cuales corresponderá a un tipo de blanco y a una variedad de condiciones ambientales. El problema de desarrollar y mantener al día un número casi infinito de curvas de alcance lateral, para cada uno de los numerosos equipos de detección de la flota, incluyendo el ojo humano, exploración visual, está resuelto, agrupando los blancos en tipos básicos, tales como pequeños, medios y grandes; y las condiciones ambientales en categorías básicas, tales como mar llana, marejadilla, gruesa, etc., y así se obtienen curvas de alcance lateral para condiciones medias de cada uno de los grupos.

Se verá en el siguiente punto que es posible aún hacer más sencillo el problema de la tabulación de todas esas curvas de alcance lateral, eligiendo cuidadosamente, una expresión más sencilla que represente una curva de alcance lateral completa, haciendo innecesario la tabulación de las curvas en sí mismas.

La curva de alcance lateral, generalmente, se representa por una curva simétrica centrada sobre el equipo de detección, que va desde el máximo alcance, por un lado, al máximo alcance por el otro. Como en la figurs 6-2. Se puede pensar en una plataforma de detección moviéndose a través de un área que contiene blancos potenciales. En este sentido, la plataforma está barriendo esa área. Este concepto se puede aplicar incluso cuando la plataforma es estacionaria y son los blancos los que se mueven, o cuando ambos, blancos y plataformas, son móviles como es el caso general en las operaciones navales.

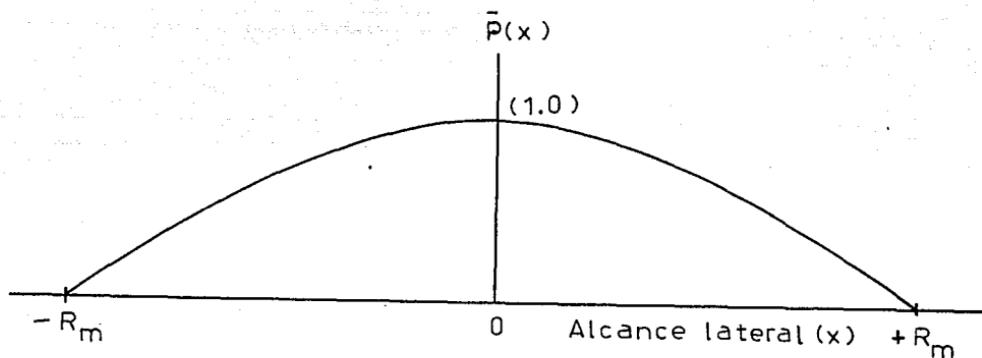


FIGURA 6-2. CURVA DE ALCANCE LATERAL.

6.3. DETECCION DE BLANCOS DISTRIBUIDOS ALEATORIAMENTE.

Considerese el caso de la búsqueda de un blanco, que se supone está situado aleatoriamente, en un área que el aparato de detección está barriendo. Esta suposición es generalmente válida ya que la localización del blanco ordinariamente no se conoce, y su movimiento, en el mejor de los casos, se estima. Consideremos que este blanco tiene alguna probabilidad de ser detectado, esto es, su alcance lateral tiene un valor entre $-R_m$

y +Rm. Este blanco probablemente siga una línea de derrota relativa a través de la zona de detección, a una distancia lateral dada, como a cualquier otro alcance lateral. Matemáticamente, esto significa que si la variable aleatoria se define como el alcance lateral al blanco, entonces X tiene una distribución uniforme de probabilidad, para todos los valores comprendidos entre -Rm y +Rm. Por la teoría básica de probabilidades se obtiene: que la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria X, es:

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{2 Rm} & \text{si, } -Rm < X < +Rm \\ 0 & \text{si, } |X| > Rm \end{cases} \quad (6.1)$$

Ahora, recordando que la función $\bar{P}(X)$, indica la probabilidad de detectar un blanco que pasa a un alcance lateral específico, X. La probabilidad de detectar un blanco, cuya distancia de alcance lateral se desconoce, es el valor esperado de $\bar{P}(X)$, donde X puede tomar todos los valores posibles de alcance lateral.

$$E[\bar{P}(X)] = \int_{\text{cada } X} P(X) f(X) dX \quad (6.2)$$

En este caso, puesto que X está uniformemente distribuída, entre -Rm y +Rm, el valor esperado resulta:

$$E[\bar{P}(X)] = \frac{1}{2 Rm} \int_{-Rm}^{Rm} P(X) dX \quad (6.3)$$

Esto proporciona la probabilidad media esperada de detección de un blanco que atraviesa aleatoriamente, la zona de posible detección. En la figura 6-3, se representa un caso general.

En este caso, varias unidades exploradoras llevan a cabo un plan de exploración separadas una cierta distancia S, separación entre derrotas, de tal modo que no existen zonas traslapadas de detección, por lo tanto, $S > 2 Rm$. Si el blanco está situado dentro del área que se explora, ¿cuál sería la probabilidad de detectarlos si pasa a través de la línea de exploradores?. Llamemos X a la distancia del blanco al explorador más cercano, entonces,

el valor de X está uniformemente distribuido entre $-S/2$ y $+S/2$, y $f(X)$ tiene el valor de $1/S$. La probabilidad de detección esperada por un explorador sería considerando (6.2):

$$E[\bar{P}(X)] = \frac{1}{S} \int_{-R_m}^{R_m} P(X) dX \quad (6.4)$$

Puesto que $P(X) = 0$ para toda X fuera de estos límites.

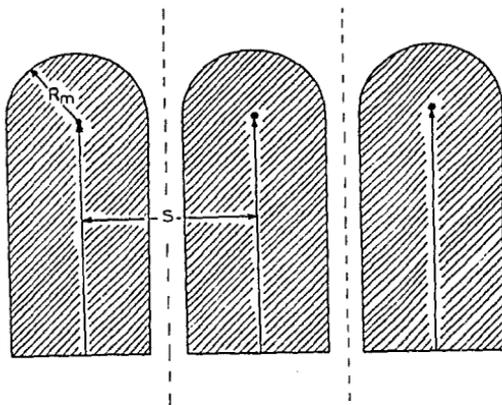


FIGURA 6-3. ZONA DE POSIBLE DETECCION.

6.4. ANCHO DE BARRIDO.

Se puede observar que aparece la necesidad de un parámetro que permita medir la capacidad de detección de un sensor en términos de distancia, este concepto es conocido como ancho de barrido y se representa por W . Este concepto establece que cada equipo de detección que rastrea a través de una área, efectivamente barre una anchura. Sería deseable, siempre que fuera posible, designar a cada equipo de detección (radar, sonar, ojo mágico, etc.) con alguna cantidad que sea físicamente significativa. Esta cantidad podría ser el alcance efectivo de detección. Otra podría ser el alcance para el 50% de

probabilidad de detección; y aún otra podría ser el alcance más allá del cual son detectados tantos blancos como los no detectados a alcances menores. Tal cantidad sería útil, por ejemplo, a la hora de decidir con que separación deben estacionarse los exploradores para mantener una exploración efectiva. Cualquiera que sea la cantidad empleada, ésta tiene que ser definida y comprendida, precisamente por aquellos que la utilizan. Un concepto ampliamente usado para medir la capacidad del sensor en relación a la distancia, es el ancho de barrido. Este concepto presupone, ya que un equipo de detección explora para localizar blancos en un área que éste barra, efectivamente, una extensión de cierta anchura. El problema es detectar blancos que pasen a una distancia menor de $S/2$ por cualquier lado del equipo. En la figura 6-4, se muestra solamente, una unidad de exploración, ya que la situación es la misma para las demás.

Si todos los blancos, dentro del ancho de barrido, fuesen detectados y no lo fuesen los que se encuentren fuera, entonces, la probabilidad de detección de un solo blanco sería precisamente, la fracción de todos los blancos dentro del ancho de barrido, para este caso particular es:

$$\bar{P}(\text{Detección}) = \frac{\text{Ancho de barrido}}{S} \quad (6.5)$$

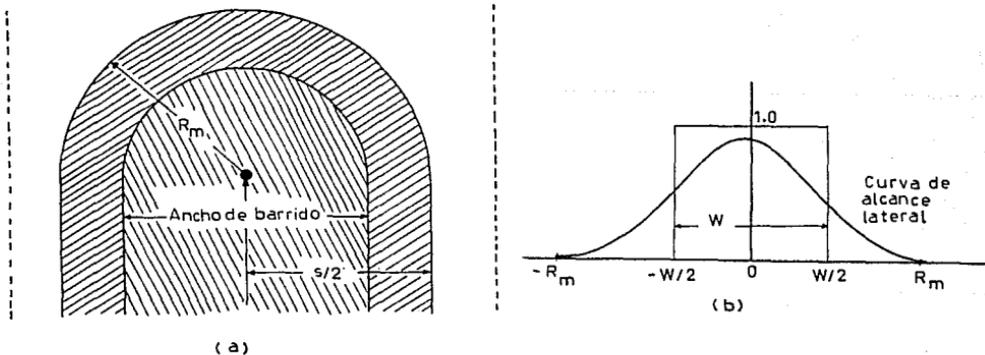


FIGURA 6-4. ANCHO DE BARRIDO.

Sin embargo, de la ecuación (6.5) puede observarse que ésta probabilidad de detección es:

$$E[\bar{P}(X)] = \frac{\int_{-R_m}^{R_m} P(X) dX}{S} \quad (6.6)$$

Notemos en este ejemplo que, si solamente fuese conocida el área bajo la curva de alcance lateral, la probabilidad de detección se podría determinar sin hacer referencia a la curva de alcance lateral. La exploración de blancos, que pueden considerarse ubicados en posiciones aleatorias, es una situación operacional común y nos permite trabajar con solo una cantidad: el área bajo una curva de alcance lateral. Esta cantidad, representada por W , es:

$$W = \int_{-R_m}^{R_m} P(X) dX \quad (6.7)$$

A la hora de medir la eficacia de un equipo de detección, es muy importante conocer la probabilidad de detección. En la ecuación (6.5) puede verse que, para una exploración no traslapada, la probabilidad de detección es directamente proporcional al área W , bajo la curva de alcance lateral. De aquí que el área W , es tan buena medida de la capacidad de detección como la probabilidad de detección en sí misma. Por lo tanto, para ser consistente, el ancho de barrido se debe definir en magnitud, al igual que el área, W de la curva de alcance lateral. El símbolo W representa entonces, físicamente, el ancho efectivo de la zona de detección del sensor. Su valor se halla calculando el área bajo la curva de alcance lateral. La probabilidad promedio de detección de un blanco distribuido aleatoriamente por medio de sensores, cuyas zonas de detección no están traslapadas, es:

$$\bar{P}(\text{Detección}) = \frac{W}{S} \quad (6.8)$$

En la práctica, los valores de ancho de barrido, W , se calculan y se tabulan por medio de varios equipos de detección, contra diferentes clases de blancos y en diferentes condiciones ambientales, sin traslape en las zonas de detección.

6.5. BUSQUEDA Y PATRULLAJE.

El éxito de una búsqueda depende, o es afectado, por uno o varios de los siguientes factores:

- * Naturaleza del blanco (el blanco puede ser cualquier tipo de unidad).
- * Condiciones ambientales.
- * Equipo de detección de que se dispone.
- * Táctica empleada.

Las condiciones ambientales, consideradas, en este tipo de operaciones navales, están representadas no sólo por las condiciones oceanográficas - estado de la mar; condiciones de agua referidas a presión, temperatura, salinidad, etc.; fondo rocoso o aplacerado - sino también, por las condiciones climatológicas, iluminación dentro y fuera del agua, formación de nubes y muchos otros.

Para superar cualquier cambio en las condiciones ambientales existentes y del blanco, se agrupan los blancos en los siguientes tipos básicos:

- * Buques Grandes.
- * Buques Medianos.
- * Buques Pequeños.

Y las condiciones ambientales en:

- * Mar Gruesa.
- * Marejada.
- * Calma.

Las características de los equipos disponibles juegan un importante papel en la búsqueda y detección. Cuánto más poderoso y sensible sea el equipo, mayores serán las probabilidades de llevar a cabo tales misiones. Cuánto mayor sea la confiabilidad y efectividad de los equipos, mayores serán las posibilidades de reducir las consecuencias de una acción.

Las alternativas en algunas operaciones pueden incluir el tener que recurrir a un nuevo o a un sistema diferente, más hombres y barcos, etc. En otros casos, la opción quedará limitada a las diferentes tácticas de búsqueda y a la disposición de las fuerzas disponibles.

Se debe comprender claramente el razonamiento empleado en estas aplicaciones, de tal modo que pueda aplicar los mismos principios en otras posibles situaciones reales que pudieran surgir. Estos principios permitirán hacer uso posterior de los planes de búsqueda operacional y patrullaje, con un mayor grado de efectividad.

6.6. BUSQUEDA ALEATORIA.

En la actualidad, la detección ha llegado a ser no solamente una de las más importantes funciones de cualquier operación naval sino que ha adquirido la importancia de una ciencia con la cual se debe estar familiarizado. El problema de la detección es dependiente de tres aspectos principales:

1. Las características físicas del aparato de detección y del blanco.
2. El rumbo y localización de la unidad de búsqueda relativa a la supuesta posición y movimiento del blanco.
3. De la dirección y despliegue de las fuerzas navales.

La búsqueda de un blanco supone que éste se localiza en una posición aleatoria en un área marítima. Este supuesto es frecuentemente válido ya que la situación de un blanco no es usualmente conocida y el movimiento del blanco es a lo más estimado. Considerando, además que este blanco tiene alguna posibilidad de ser detectado.

Se considera como un supuesto: que tenemos un área geográfica marítima A, un buque como blanco dentro de esa área, asimismo que el blanco tiene la misma probabilidad de estar en cualquier punto del área y que el sensor de la unidad desarrolla una ruta aleatoria dentro de esa área. Supóngase, también, que el observador explora el área sin seguir un plan sistemático o metódico. En esta búsqueda aleatoria, ¿cuál es la probabilidad de que la detección tenga lugar en el tiempo en que el observador navega L millas, dentro de esta área ?

Sea $P(X)$, la curva de alcance lateral del observador, correspondiente al ambiente existente y a un blanco particular. Dividamos la derrota del observador en N segmentos de igual longitud L/N , que tenga una forma aproximada a la línea recta, como se muestra en la figura 6-5. Para que la detección ocurra en el primer segmento deben tener lugar dos circunstancias. Sea B , el caso en que el blanco está dentro del área de longitud L/N y anchura $2 R_m$ (esta área la designaremos por A_N) de tal modo que exista alguna probabilidad de detección, y sea C , el caso en que el blanco se detecta. Entonces, de la teoría clásica de probabilidad:

$$P(B) = \frac{A_N}{A} = \frac{(2 R_m) \frac{L}{N}}{A} = \frac{2 R_m L}{NA} \quad (6.9)$$

Por otra parte la probabilidad condicional de que el blanco sea detectado dado que se encuentra dentro del área de longitud L/N , es:

$$P(C|B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)}$$

$$P(C \cap B) = P(B) P(C|B)$$

De la teoría de conjuntos:

$$P(C \cap B) = P(C); \quad \text{si el evento } C \text{ está contenido en } B.$$

Por lo tanto:

$$P(C) = P(B) P(C|B)$$

$P(C|B)$: Es el valor esperado o valor medio de la probabilidad de detección de un blanco distribuido aleatoriamente. Y de la ecuación (6.3), obtenemos:

$$E[\bar{P}(X)] = P(C|B) = \frac{1}{2 R_m} \int_{-R_m}^{R_m} P(X) dx \quad (6.10)$$

Por lo tanto, la probabilidad de detección, $P(C)$, está dada por $P(C \cap B)$, puesto que $C \subset B$. Esto es, el blanco no puede ser detectado cuando no está dentro del máximo alcance de detección; de otro modo:

$$P(\text{Detección}) = P(B) P(C|B)$$

Luego,

$$\begin{aligned} P(\text{Detección}) &= \frac{2 Rm \frac{L}{N}}{A} \frac{1}{2 Rm} \int_{-Rm}^{Rm} P(X) dX \\ &= \frac{L}{NA} \int_{-Rm}^{Rm} P(X) d(X) \end{aligned} \quad (6.11)$$

como:
$$W = \int_{-Rm}^{Rm} P(X) dX$$

Es el área bajo la curva de alcance lateral. La ecuación (6.11) puede expresarse de la siguiente manera:

$$P(C) = P(\text{Detección en cualquier segmento}) = \frac{WL}{NA} \quad (6.12)$$

En general el n-ésimo segmento de búsqueda:

$$P(\text{La detección ocurre en el } i\text{-ésimo segmento} \mid \text{no ha habido detección}) \geq \frac{WL}{NA}$$

Puesto que el área restante donde se puede localizar el blanco es $\leq A$, durante los segmentos subsecuentes.

$$P(\text{Falla la detección en el } i\text{-ésimo segmento} \mid \text{no ha habido detección}) \leq 1 - \frac{WL}{NA}$$

Así, $(1 - WL/NA)$ es una cota superior para la falla en el i-ésimo segmento. Usando la regla de la cadena de las probabilidades condicionales, una cota superior para:

$$P(\text{no hay detección}) = \prod_{i=1}^N \left(1 - \frac{WL}{NA}\right) = \left[1 - \left(\frac{WL}{NA}\right)\right]^N \quad (6.13)$$

Para toda la búsqueda.

Admitiendo independencia, una cota inferior para la probabilidad de detección que mide la efectividad de esta exploración es:

$$P(\text{Detección}) = 1 - \left(1 - \frac{WL}{NA} \right)^N \quad (6.14)$$

Un refinamiento posterior se emplea normalmente en este modelo. Si hacemos:

$$\left(1 - \frac{WL}{NA} \right) = e^{N L_N \left(1 - \frac{WL}{NA} \right)} \quad (6.15)$$

Si WL/NA es muy pequeña, tenemos que:

$$L_N \left(1 - \frac{WL}{NA} \right) = - \frac{WL}{NA} \quad (6.16)$$

Efectuando la sustitución de la ecuación (6.16) en (6.15), y considerando la ecuación (6.14), obtenemos:

$$P(\text{Detección}) = 1 - \left[1 - \frac{WL}{NA} \right]^N = 1 - e^{-\frac{NWL}{NA}} = 1 - e^{-\frac{WL}{A}} \quad (6.17)$$

Con tal que la fracción cubierta del área efectiva de cada segmento WL/NA sea pequeña. La expresión (6.17) expresada en términos del ancho de barrido, resulta:

$$P(\text{Detección}) = 1 - e^{-\frac{W}{S}} \quad (6.18)$$

A la cantidad W/S , se le conoce con el nombre de factor de barrido. La fórmula final de la probabilidad de detección de una búsqueda aleatoria de un buque, considerando la expresión (6.17), es:

$$P(\text{Detección}) = 1 - e^{-\frac{WVt}{A}} \quad (6.19)$$

Al analizar la fórmula final de la probabilidad de detección, se observa que la probabilidad de detectar un blanco está en función del ancho de barrido W , la velocidad de la plataforma V que monta al sensor y del tiempo t empleado en la búsqueda considerando un área A determinada.

Debe ser claro que el desarrollo anterior se basó en las siguientes premisas:

1. La posición del blanco está aleatoriamente distribuida en A.
2. La exploración se realiza de una forma aleatoria, de tal modo que, sus segmentos individuales pueden ser considerados independientes.
3. $2 R_m$ es pequeño comparado con L/N , de tal forma que pueden despreciarse las áreas no barridas y las traslapadas de cada segmento.

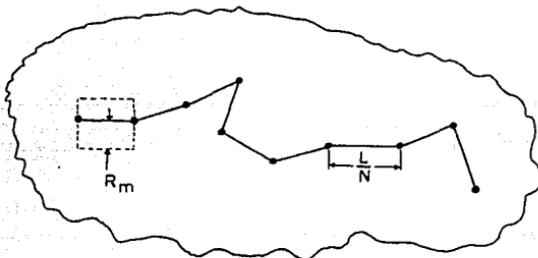


FIGURA 6-5. BUSQUEDA ALEATORIA.

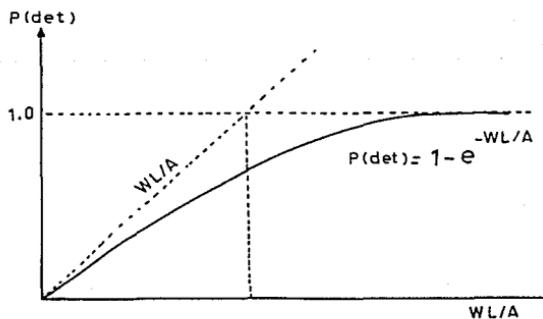


FIGURA 6-6. FACTOR DE COBERTURA.

La importancia de este modelo no es que represente un tipo particular de exploración operacional, sino que representa una exploración teórica, en la cuál se tiene la mínima información del blanco y no se emplea una exploración sistemática. De aquí que, en el caso en que se sepa algo más sobre el blanco y se emplee una exploración sistemática, deberá producir una mayor probabilidad de detección más alta.

A la cantidad W/LA se le llama factor de cobertura. (Este es la proporción del área de barrido, es decir, el área que cubre el ancho de barrido respecto al área total). Este factor de cobertura mide el esfuerzo empleado en la búsqueda y puede tener valores de uno en adelante, en una búsqueda donde es necesaria una alta probabilidad de detección.

La figura 6-6 muestra la forma en que la probabilidad de detección, en una búsqueda aleatoria, se incrementa con el factor de cobertura. Se puede ver que cuando el factor de cobertura es pequeño, la probabilidad de detección es aproximadamente igual a su factor de cobertura; cuando el factor de cobertura es grande, la probabilidad se acerca a la unidad, mostrando un efecto de saturación debido, en parte, al incremento en el traslape de las áreas de barrido.

6.7. BUSQUEDA ALEATORIA UNIFORME.

Es útil estudiar otro caso de búsqueda aleatoria, con el fin de ver un nuevo aspecto del factor de cobertura. Supongamos que el área de búsqueda está dividida en n zonas de anchura S y longitud b , tal que; $A = nSb$. La figura 6-7 muestra gráficamente el área de búsqueda.

Supongamos que el explorador trata de cubrir el área de una forma más uniforme, realizando una búsqueda aleatoria en cada una de las zonas pequeñas. Una cobertura equivalente del área se obtendrá utilizando n exploradores para cubrir dicha área. En esta exploración, que consideraremos en el siguiente punto, cada observador navegaría una distancia b y el camino total en el área exploradora sería nb .

Para que sean comparables los esfuerzos totales de búsqueda, hagamos nb la extensión total de búsqueda, para esta exploración aleatoria uniforme. Si el observador emplea igual tiempo en cada franja, la extensión explorada en cada una sería b , pero conducida en una

derrota aleatoria, como se muestra en la figura 6-7. Ahora, $L = nb$ y $A = nSb$, de tal modo que el factor de cobertura es:

$$\frac{WL}{a} = \frac{Wnb}{nSb} = \frac{W}{S}$$

y de la ecuación (6.17), para una búsqueda aleatoria uniforme, obtenemos:

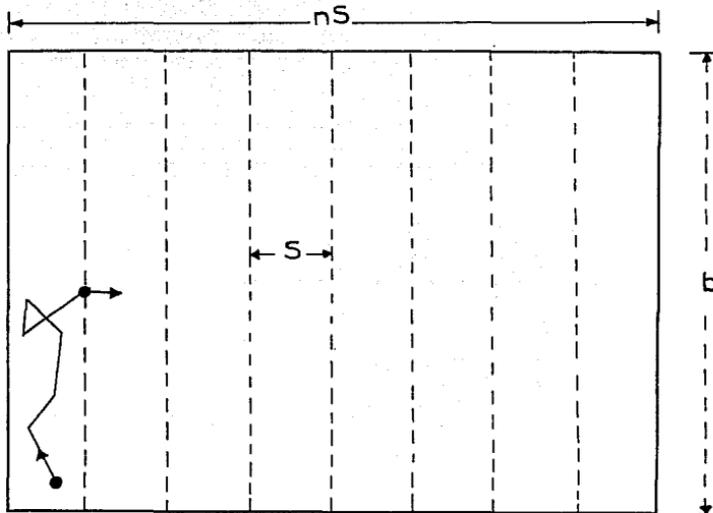


FIGURA 6-7. BUSQUEDA ALEATORIA UNIFORME.

$$P(\text{Detección}) = 1 - e^{-\frac{W}{S}} \quad (6.20)$$

Este modelo de búsqueda aleatoria uniforme proporciona un método de obtención de la probabilidad de detección de un blanco, basándose en el modelo de búsqueda aleatoria con igual esfuerzo de búsqueda. Este plan uniforme causa un menor traslape en su ejecución, en consecuencia de esto, la probabilidad de detección es mayor.

6.8. BARRIDOS PARALELOS.

Supongamos que se sabe que un blanco está localizado en un área concreta del océano y es tan probable que esté en una parte como en cualquier otra, de la mencionada área. El método, comunmente empleado en tal caso, para sistematizar la cobertura del área, se conoce con el nombre de barridos paralelos. Tal búsqueda se lleva a cabo por varios observadores, explorando zonas paralelas a lo largo del área, con distancias comunes de separación entre derrotas, de valor S , millas. El objeto ahora es proporcionar un método de obtención de la probabilidad de detección, conociendo la curva de alcance lateral.

Se considera que la curva de alcance lateral, para cada observador se da por la figura 6-8(a), y que se emplean varios observadores simultáneamente para explorar el área de la figura 6-7. Cada observador cubre su franja, de ancho S sin salirse de su línea central. La probabilidad de detección, cuando las curvas de alcance lateral de observadores adyacentes no se traslapan, está dada por la ecuación:

$$\bar{P}(\text{Detección}) = \frac{W}{S}$$

Si el espaciamiento entre derrotas fuera menor que $2 R_m$, más de un observador podría detectar el blanco. Considere la detección potencial entre cualquiera dos observadores, cuando las condiciones incluyen igual espaciamiento y es igualmente probable que el blanco pase entre cualquiera de los dos, también es igualmente probable en cualquier punto entre los dos. Si las curvas de alcance lateral de los sensores son idénticas en la parte donde se traslapan; entonces la probabilidad de detectar un blanco que pase entre cualquiera de los dos, es la misma que la probabilidad de detección de barrido.

Convencionalmente, haciendo cero el alcance lateral en uno de los sensores y el alcance lateral igual a S en el otro (ver figura 5-8b), la fórmula para esta probabilidad puede ser:

$$E[P(X)] = \int_0^S P(X) \left(\frac{1}{S}\right) dX$$

Las curvas individuales de alcance lateral que son factores en $E[P(X)]$ entre 0 y S , son el lado derecho de \bar{P}_1 y el lado izquierdo de \bar{P}_2 , sin embargo; dichas curvas

originalmente se definen a partir de un alcance cero. De esta manera, mientras $\bar{P}_1(X)$ es un dato de entrada, $\bar{P}_2(X)$ debe transformarse como $\bar{P}_2(X-S)$. Más aún, existen discontinuidades en la función compuesta de $P(X)$, específicamente en $S-R_2$ y en R_1 , donde R_1 y R_2 son los máximos alcances respectivos del sensor 1 y 2. Por lo tanto, la integral está compuesta de las partes continuas, esto es:

$$E[P(X)] = \frac{1}{S} \left\{ \int_0^{S-R_2} \bar{P}_1(X) dX + \int_{R_1}^S \bar{P}_2(X-S) dX + \int_{S-R_2}^{R_1} [\bar{P}_1(X) \cup \bar{P}_2(X-S)] dX \right\}$$

Para el caso en que el espaciamiento de las derrotas es menor de R_m , el blanco puede ser detectado por más de dos observadores. Por ejemplo, si S es de 60 millas de forma que los traslapes de las curvas de alcance lateral son como se muestran en la figura 6-9. Ahí, las derrotas para los diferentes observadores, se numeran en forma arbitraria y la número 1 se emplea como referencia.

Notemos que, aunque los observadores están situados a 60 millas de separación, el modelo se repite cada 30 millas ya que un blanco 20 millas a la derecha de la derrota 1 tiene la misma probabilidad de detección que un blanco situado 20 millas a la izquierda de la derrota 2, etc. En este caso, cada blanco pasará dentro de las 30 millas del observador más próximo.

Consideremos primeramente un blanco cuyo alcance lateral, X , esté entre 0 y 30 millas a la derecha del observador de la derrota 1. Tal blanco podría detectarse por alguno, o por todos, los observadores de las derrotas 1, 2 y 3.

Sea $\bar{P}_i(X)$, la probabilidad de que este blanco sea detectado por el observador de la derrota i -ésima. Ya que X representa la medida del alcance lateral, con respecto a la primera derrota, tiene que hacerse una transformación para relacionar todas las curvas de alcance lateral a esta referencia común. Lo que antecede se puede verificar en el siguiente ejemplo:

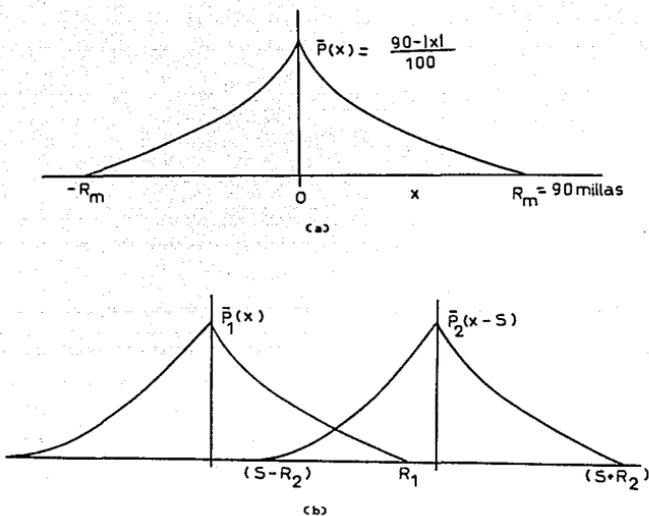


FIGURA 6-8.

$$\bar{P}_1(X) = \bar{P}(X) = \left(\frac{90 - X}{100} \right)^2$$

$$\bar{P}_2(X) = \bar{P}(S - X) = \left(\frac{90 - (60 - X)}{100} \right)^2$$

$$\bar{P}_3(X) = \bar{P}(S + X) = \left(\frac{90 - (60 + X)}{100} \right)^2$$

Si $P(X)$, es la probabilidad de que un blanco, que está pasando a X millas a la derecha del observador uno, sea detectado. Para $0 \leq X \leq 30$ esta probabilidad es 1 menos la probabilidad es 1 menos la probabilidad de que falle la detección de las tres derrotas. Presuponiendo independencia, esta es:

$$P(X) = 1 - [1 - \bar{P}_1(X)] [1 - \bar{P}_2(X)] [1 - \bar{P}_3(X)] \quad (6.21)$$

Cuando los diferentes $P_i(X)$, del ejemplo, se sustituyen en la ecuación (6.21), se tiene:

$$P(X) = 0.843 - [1.49 (10)^{-2}] X + [1.24 (10)^{-4}] X^2 + [3.92 (10)^{-6}] X^3 - [2.37 (10)^{-8}] X^4 - [1.8 (10)^{-10}] X^5 + 10^{-12} X^6$$

La probabilidad media de detección de esta búsqueda puede darse tomando el valor esperado de $P(X)$, esto es:

$$E [P(X)] = \int_{\text{toda } x} P(X) f(x) dx$$

Para $f(x) = 1/30$, ya que X está uniformemente distribuido, entre 0 y 30. Por lo tanto:

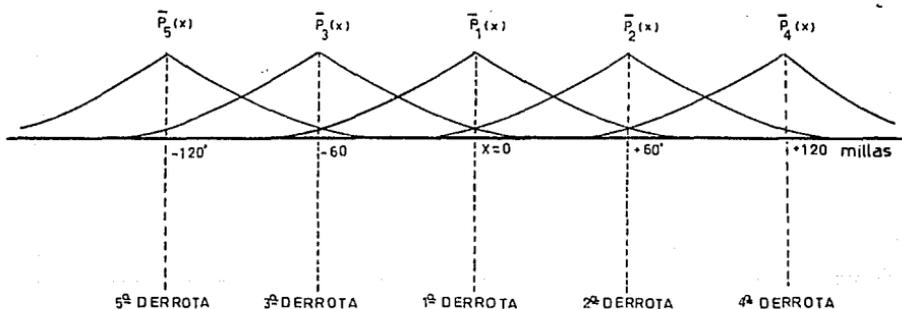


FIGURA. 6-9

$$E [P(X)] = \int_0^{30} P(X) \left(\frac{1}{30} \right) dx$$

Cuando se emplea $P(X)$ obtenido de la ecuación (6.21) y se efectúa la integración, el resultado es 0.6785. El mismo resultado se obtendría si el blanco hubiese estado de 0 a

30 millas a la izquierda o a la derecha de cualquier derrota, excepto las extremas. Para una curva de alcance lateral dada, esta probabilidad media de detección de un blanco depende solamente, de la distancia entre derrotas y de aquí que se llame $\bar{P}(S)$. En este ejemplo

empleando $X = 60$ y la curva de alcance lateral dada: $\bar{P}(S) = 0.6785$. El resultado se puede comparar con el que se obtuvo previamente en el modelo de búsqueda aleatorio, calculando el ancho de barrido para la curva de alcance lateral en la figura 6-8a.

$$\bar{P}(X) \int_{-90}^{90} \left[\frac{90 - |X|}{100} \right]^2 dX = 2 \int_0^{90} \left[\frac{90 - |X|}{100} \right] dX = 48.6 \text{ millas}$$

El factor de cobertura W/S , sería entonces:

$$\frac{W}{S} = \frac{48.6}{60} = 0.81$$

Y para un esfuerzo de búsqueda equivalente, una búsqueda aleatoria uniforme produciría una probabilidad mínima de detección de :

$$1 - e^{-\frac{W}{S}} = 1 - e^{-0.81} = 0.5551$$

que es menor que 0.6785 para la cobertura sistemática dada para barridos paralelos. El método de barrido paralelo, supone suficientes observadores en línea de frente para cubrir toda el área, barriéndola de una sola vez. Nada se supone sobre la situación del blanco, o de su derrota, excepto que permanece en el área a lo largo de toda la búsqueda, esto puede verse como si el blanco fuera supuestamente estacionario, entonces un solo observador podría hacer barridos paralelos sucesivos en toda el área a una distancia S de separación y llegaríamos al mismo resultado. Otra situación equivalente ocurriría si se colocasen varios observadores a lo largo de un canal, a una distancia S de separación, con el fin de detectar blancos en tránsito. Muchos otros tipos de búsquedas y patrullajes no son más que adaptaciones de las estudiadas, a una situación particular.

El modelo estudiado en esta sección ha conducido al cálculo de la probabilidad media de detección de un blanco. Mientras ésta sirve como medida útil de efectividad en muchos problemas, en otros es más útil la probabilidad mínima de detección. Si por ejemplo, un

blanco tuviera la capacidad de seguir a los observadores, podría maniobrar colocándose en las posiciones más ventajosas para evitar la detección, y sería mejor medida de efectividad, para la búsqueda, la probabilidad mínima de detección. Esta situación está ordinariamente pero no siempre, localizada en medio de observadores adyacentes. La probabilidad que tiene lugar en aquel alcance que produce el valor mínimo de $P(X)$ que se obtiene de la ecuación (6.21).

6.9. APLICACION DE LA LEY DE DETECCION INVERSAMENTE PROPORCIONAL AL CUBO.

En las secciones precedentes ha sido expuesto un método para hallar el valor de probabilidad de detección por medio de barridos paralelos. En el ejemplo, empleando una curva determinada de alcance lateral, la probabilidad de detección $\bar{P}(S)$, tiene un valor de 0.6785, para una distancia entre derrotas S , de 60 millas. Se puede ver que para otras curvas de alcance lateral y diferentes distancias entre derrotas, el método sería aplicable, aunque para realizar todos los cálculos podrían ser necesarias aproximaciones gráficas o el uso de la computadora. Una pregunta que surge es: ¿ la forma de las curvas de alcance lateral, influye substancialmente en el resultado ?. Por ejemplo, para una búsqueda con una curva de alcance lateral de diferente forma pero cuyos anchos de barrido son los mismos, ¿ sería también $P(60) = 0.6785$? La respuesta, para curvas de alcance lateral típicas, es que, el resultado no diferirá significativamente. Esto hace posible predecir, con cierta certeza, la probabilidad de detección, empleando un factor de cobertura, sin conocer exactamente la forma de la curva de alcance lateral de donde se calcula el ancho de barrido. Se ha desarrollado un modelo a través de la aplicación de la ley de detección de la inversa del cubo, que resulta de un valor particular en la predicción de la probabilidad de detección para barridos paralelos, donde se conoce el factor de cobertura. La derivación está más allá del enfoque de este documento. Por lo que sólo se da la expresión y para su cálculo únicamente se requieren las tablas de la distribución normal.

$$P(S) = 2 \int_0^z f(t) dt$$

donde $f(t)$ es la distribución normal estándar con media cero y varianza uno, y

$$Z = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{W}{S} \right) = 1.253 \left(\frac{W}{S} \right)$$

Si se emplea este modelo para calcular la probabilidad de detección, en el ejemplo de la sección precedente donde $W = 48.6$, $S = 60$, tendríamos:

$$Z = 1.253 \left(\frac{W}{S} \right) = 1.015$$

$$P(60) = 2 \int_0^{1.015} f(t) dt = 2(0.3444) = 0.6888$$

de las tablas normales.

Que está de acuerdo, muy aproximadamente, con el valor previamente calculado de 0.6785. La figura 6-10 resume los modelos discutidos hasta ahora. El factor de cobertura, en sí mismo, da una buena estimación de la probabilidad de detección cuando su valor es pequeño o cuando no hay traslape entre posibles zonas de detección. Los modelos de búsqueda aleatoria calculan la probabilidad de detección cuando:

- A. Se sabe poco acerca del blanco.
- B. No se utiliza un método sistemático de detección.
- C. No tienen lugar traslapes de barridos adyacentes.

La ley inversa del cubo es un modelo que está de acuerdo, muy aproximadamente, con el modelo de barrido en paralelo y es, quizás, el mejor predictor teórico de resultados reales. En situaciones operacionales, un factor de cobertura determinado debe proporcionar una probabilidad de detección media entre los valores calculados por los sistemas anteriores.

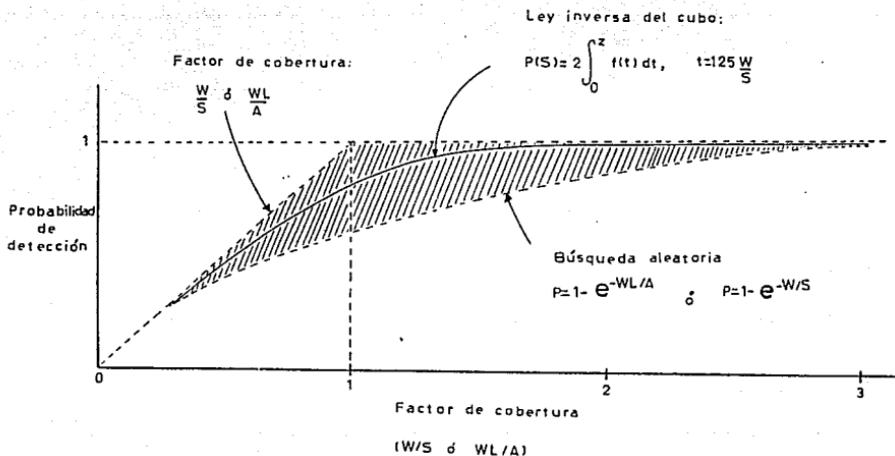
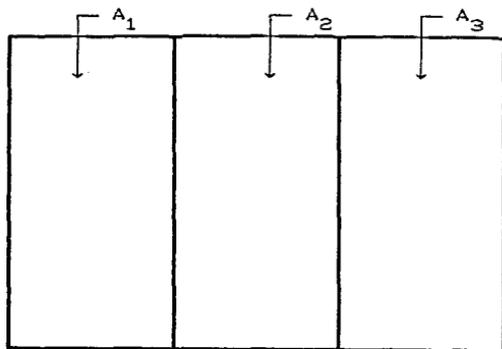


FIGURA 6-10.

6.10. BUSQUEDA RECTANGULAR.

La búsqueda rectangular es un tipo de búsqueda económica y tiene la ventaja de que los exploradores pueden mantener sus posiciones relativas con poca dificultad. En esta búsqueda las derrotas de exploración son paralelas. Si está presente más de un explorador de superficie, la línea de exploración es perpendicular a las derrotas de exploración. Si se tienen unidades de superficie y aéreas, el sistema asigna un área a cada unidad de manera que a todas las unidades participantes les lleve el mismo tiempo en barrer su respectiva área y dá asimismo el espaciamiento entre derrotas de manera que la probabilidad de detección sea la misma para todas las unidades.

Como el área probable de localización del objeto es cuadrada (o casi cuadrada), es preferible asignar a cada unidad una área rectangular en la forma mostrada en la siguiente figura:



Esto tiene la ventaja de que las dificultades para mantener las derrotas son menores, facilitando la navegación. Al asignar áreas de responsabilidad, se puede, asimismo provocar competencia entre las unidades participantes con lo cual se les obligaría a esmerarse en su vigilancia. La alternativa a esta asignación es sumar las áreas de las unidades de superficie y ordenar una exploración por la línea de frente y hacer lo mismo con las unidades aéreas.

6.11. BUSQUEDA DE EXPANSION CUADRADA.

La búsqueda de expansión cuadrada, tiene la gran ventaja de que cubre primero el área donde la probabilidad de localización del objeto es mayor, haciéndolo posteriormente con las áreas exteriores donde es menor la probabilidad de que el objeto se encuentre en ellas.

Sus desventajas son : es empleada principalmente (aunque no exclusivamente) por aviones; debido a la dificultad representada por los cambios de rumbo, su eficacia es menor que la rectangular; además, es más apropiada para un uso explorador por la dificultad de coordinar las actividades de varios exploradores. Si suponemos que tenemos un solo explorador, el sistema nos da la separación entre derrotas S . Con este dato, la búsqueda se inicia en el centro del área a barrer que es la posición, más probable de localización del

Entonces el tiempo que llevará al explorador recorrer la circunferencia de radio máximo, al que llamaremos:

$$2\pi \left(\frac{X_{\max}}{v} \right)$$

Este tiempo multiplicado por la velocidad del objeto será la distancia que se desplaza este último, en lo que el explorador recorre la circunferencia máxima exterior de la espiral. Como para poder atrapar al objeto, la distancia que recorre éste debe ser menor que el ancho de barrido del explorador, tenemos que:

$$W = u \left(\frac{2\pi X_{\max}}{v} \right)$$

Luego el radio máximo de la espiral hacia adentro para atrapar a un objeto será:

$$X_{\max} = \frac{Wv}{2\pi u}$$

De manera que cuando el ancho de barrido y/o la velocidad del explorador sean grandes comparadas con la velocidad del objeto a buscar y aquél tenga un sistema de navegación lo suficientemente preciso como para que no le represente problemas de posicionamiento y/o arrumbamiento, la espiral hacia adentro es un patrón que garantiza, dentro de lo razonable, la detección del objeto buscado.

CAPITULO 7

PROBLEMAS DE DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES Y BLANCOS ESTACIONARIOS

Suponga que se conoce la posición del blanco en una de las n regiones, las cuales no necesariamente son idénticas, siendo P_i la probabilidad de que se encuentre el blanco en la i -ésima región. El número P_i cuantifica el juicio de algún experto o grupo de expertos en cuestiones de probabilidad. Parte de la razón por la cual se desconoce la región exacta, se debe al movimiento aleatorio en todo momento por parte del blanco, pero aún así, el blanco se supone estacionario (es decir, permanece en una región) durante la búsqueda. En cualquier caso, tomamos la distribución conocida $P_1 \dots P_n$, de probabilidades.

El problema es dividir una cantidad de tiempo total t en una cantidad de tiempos parciales para cada región, de tal manera que se maximice la probabilidad de detección. Si el tamaño de cada región es grande comparada con el ancho de barrido del sensor en esa región, es razonable suponer que la fórmula de búsqueda aleatoria se conserva en cada región. En este caso, la probabilidad de detección del blanco, debido a que se encuentra en la región i , es:

$$P(\text{De detección} \mid \text{se está en la región } i) = 1 - e^{\left(\frac{-t_i}{\tau_i}\right)}$$

siendo: $\tau_i = \frac{A_i}{V_i W_i}$, el tiempo medio de detección, de donde:

A_i = Es el área de la región i .

V_i = Es la velocidad del explorador.

W_i = Es el ancho de barrido del sensor.

La probabilidad incondicional de detección P , es entonces:

$$P(\text{De detección}) = P = \sum_{i=1}^n p_i \left(1 - e^{-\frac{t_i}{T_i}}\right)$$

Por lo tanto, el problema es resolver:

$$\text{Maximizar } P = \sum_{i=1}^n p_i \left(1 - e^{-\frac{t_i}{T_i}}\right)$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^n t_i = t, \quad t_i \geq 0.$$

(7.1)

Este es un problema de optimización no lineal con restricciones, el cual no se puede resolver por medio de la derivación de t_i e igualar a cero. En su lugar, usaremos el teorema de Everett.

7.1. EL TEOREMA DE EVERETT.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones definidas en un mismo conjunto y suponga que la función de Lagrange:

$$L(x) = f(x) - \lambda g(x)$$

(7.2)

tiene un máximo en x^* , con $\lambda \geq 0$. Entonces el valor que maximiza a $f(x)$, sujeto a:

$$g(x) \leq g(x^*), \text{ es } f(x^*).$$

DEMOSTRACION:

La demostración se hace por contradicción. Suponga que:

$$f(x') > f(x^*) \quad \text{y} \quad g(x') \leq g(x^*)$$

entonces,

$$f(x') - \lambda g(x') > f(x^*) - \lambda g(x^*)$$

Lo cual contradice la hipótesis de x^* maximiza $L(x)$.

En la práctica, el teorema de Everett se aplica a problemas donde la maximización del Lagrangiano es tan simple, que sólo se necesita encontrar el valor de λ , para el cual $g(x^*)$ es igual a algún valor esperado. Puede pensarse en $g(x)$ como un recurso y λ como el precio del recurso. Si λ es grande, se invertirán menos recursos de los que se tienen disponibles, o bien, si λ es pequeño se invertirá una cantidad mayor de recursos de los que se tienen disponibles. Si se obtiene exactamente el valor de λ , entonces, el teorema de Everett establece que se ha resuelto el problema de optimización con restricciones.

7.2. EL CASO GENERAL.

Para aplicar el teorema de Everett al problema planteado anteriormente, consideremos un vector x no-negativo (t_1, t_2, \dots, t_n) y las funciones:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n p_i \left[1 - e\left(-\frac{t_i}{r_i}\right) \right]$$

y

$$g(x) = \sum_{i=1}^n t_i, \quad \text{con } t_i \geq 0.$$

La función de Lagrange es, entonces:

$$\sum_{i=1}^n f_i(t_i)$$

Aplicando (7.2), se obtiene la nueva función:

$$f_i(t_i) = p_i \left(1 - e^{\left(\frac{-t_i}{\tau_i}\right)} \right) - \lambda t_i$$

Para resolver (7.2), para cada i , se debe maximizar $f_i(t_i)$ sujeto a $t_i \geq 0$. Derivando

la ecuación de $f_i(t_i)$ respecto a t e igualando a cero, obtenemos el valor de t_i .

$$f_i'(t_i) = p_i \left[0 + \frac{1}{\tau_i} e^{-\left(\frac{t_i}{\tau_i}\right)} \right] - \lambda = 0$$

de donde:

$$\begin{aligned} \left(\frac{p_i}{\tau_i} \right) e^{-\left(\frac{t_i}{\tau_i}\right)} &= \lambda \\ e^{-\left(\frac{t_i}{\tau_i}\right)} &= \frac{\lambda \tau_i}{p_i} \end{aligned}$$

Aplicando logaritmos naturales en ambos miembros de la expresión anterior:

$$-\frac{t_i}{\tau_i} = \text{Ln} \left(\frac{\lambda \tau_i}{p_i} \right)$$

Despejando t_i :

$$t_i = -\tau_i \text{Ln} \left(\frac{\lambda \tau_i}{p_i} \right) = \tau_i \text{Ln} \left(\frac{p_i}{\lambda \tau_i} \right) \quad (7.3)$$

Para demostrar que $f_i(t_i)$ es una función cóncava, basta con saber si la función tiene un máximo. por lo cual procedemos de la siguiente manera. Sea la función de Lagrange:

$$f_i(t_i) = p_i \left[1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\tau_i}\right)} \right] - \lambda t_i$$

Como primer paso, calculamos la primera derivada con respecto a t_i , y la igualamos a cero:

$$f_i'(t_i) = \frac{p_i}{\tau_i} e^{-\left(\frac{t_i}{\tau_i}\right)} - \lambda = 0$$

De donde, como ya se vió se obtiene (7.3):

$$t_i = \tau_i \operatorname{Ln} \left(\frac{p_i}{\lambda \tau_i} \right)$$

Como segundo paso se obtiene la segunda derivada de $f_i(t)$:

$$f_i''(t_i) = \left[\frac{p_i}{\tau_i} e^{-\left(\frac{t_i}{\tau_i}\right)} \right] \left(-\frac{1}{\tau_i} \right) = -\frac{p_i}{\tau_i^2} e^{-\left(\frac{t_i}{\tau_i}\right)}$$

Sustituyendo el valor de t_i , en la segunda derivada, podremos saber si la función de Lagrange tiene un mínimo o un máximo. Si la función tiene un mínimo, es convexa y si tiene un máximo, la función es cóncava, entonces:

$$f_i'' \left[\tau_i \operatorname{Ln} \left(\frac{p_i}{\lambda \tau_i} \right) \right] = -\frac{p_i}{\tau_i^2} e^{-\left[\frac{\tau_i \operatorname{Ln} \left(\frac{p_i}{\lambda \tau_i} \right)}{\tau_i} \right]} = -\frac{p_i}{\tau_i^2} e^{-\left[\operatorname{Ln} \left(\frac{p_i}{\lambda \tau_i} \right) \right]}$$

Simplificando:

$$f_i'' \left[\tau_i \operatorname{Ln} \left(\frac{p_i}{\lambda \tau_i} \right) \right] = -\frac{p_i}{\tau_i^2} e^{\left[\operatorname{Ln} \left(\frac{\lambda \tau_i}{p_i} \right) \right]} = \left[-\frac{p_i}{\tau_i^2} \right] \left[\frac{\lambda \tau_i}{p_i} \right] = -\frac{\lambda}{\tau_i}$$

como:

$$f_i'' \left[\tau_i \operatorname{Ln} \left(\frac{p_i}{\lambda \tau_i} \right) \right] < 0$$

$f_i(t)$ tiene un máximo en $\tau_i \operatorname{Ln} (p_i/\lambda \tau_i)$ y se concluye que la función de Lagrange es cóncava. Puesto que $f_i(t)$ es una función cóncava, es óptima mientras sea positiva; de otra manera sería $t_i=0$. De modo que la solución óptima es:

$$\begin{cases} \text{si } \lambda \tau_i \leq p_i, & t_i = \tau_i \ln(p_i / \lambda \tau_i) \text{ y } f_i(t_i) = p_i - \lambda \tau_i \\ \text{si } \lambda \tau_i > p_i, & t_i = 0 \text{ y } f_i(t_i) = 0 \end{cases} \quad (7.5)$$

El único problema que resta es encontrar el valor de λ para el cual:

$$\sum_{i=1}^n t_i = t$$

Esto puede hacerse por prueba y error, incrementando λ , si: $\sum_{i=1}^n t_i$ es grande y así

sucesivamente. La forma de utilizar este método se muestra en el siguiente diagrama de flujo, donde ambas sumas están sobre el conjunto de subíndices i , para el cual $t_i > 0$

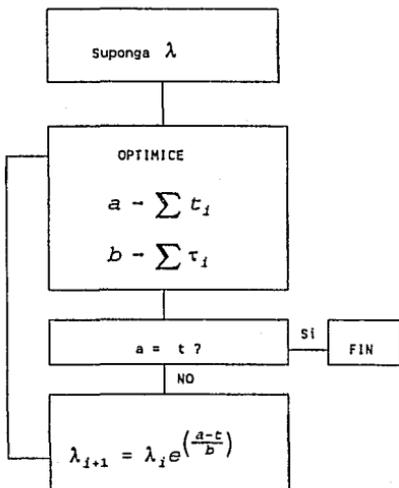


FIGURA 7-1. DIAGRAMA DE FLUJO PARA LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES.

Observe que el último paso de la figura 7-1, tiene el efecto de incrementar λ si se considera ($a > t$) varias veces de cualquier otra forma se disminuye λ . La característica importante de este modelo es, el número de iteraciones no será mayor a $n+2$, mientras que el valor supuesto de λ sea lo suficientemente pequeño, para que por lo menos se obtenga un t_i positivo. La figura 7-1 muestra la secuencia de los cálculos.

EJEMPLO. Considere el caso en que: $n=10$, $t=5$, $p_i = 0.1$ y $\tau_i = i$. El valor inicial supuesto para $\lambda = 0.0001$.

SECUENCIA DE LOS CALCULOS:

Para un valor supuesto de $\lambda_i = 0.0001$.

$$a = \sum_{i=1}^{10} t_i = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 + t_8 + t_9 + t_{10}$$

$$= 6.9 + 12.4 + 17.4 + 22.1 + 26.5 + 30.7 + 34.7 + 38.6 + 42.4 +$$

$$b = \sum_{i=1}^{10} \tau_i = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 + \tau_5 + \tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9 + \tau_{10}$$

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55.$$

Puesto que no se cumple la condición de $a=t$:

$$a = 278 > t = 5$$

Se debe calcular una nueva lambda:

$$\lambda_{i+1} = \lambda_i e^{\left(\frac{a-t}{b}\right)}$$

Entonces la nueva lambda es:

$$\lambda_2 = \lambda_1 e^{\left(\frac{a-t}{b}\right)} = (0.0001) e^{\left(\frac{278-5}{55}\right)} = 0.0143$$

El nuevo valor de $\lambda_2 = 0.0143$ Cálculo de los nuevos t_i , por medio de:

$$t_i = \tau_i \operatorname{Ln} \left(\frac{p_i}{\lambda_{i+1} \tau_i} \right)$$

Luego, los respectivos t_i , son:

$$\begin{aligned} t_1 &= \tau_1 \operatorname{Ln}(p_1/\lambda_2 \tau_1) = 1 \operatorname{Ln}[0.1/(0.0143)(1)] = 2.0 \\ t_2 &= \tau_2 \operatorname{Ln}(p_2/\lambda_2 \tau_2) = 2 \operatorname{Ln}[0.1/(0.0143)(2)] = 2.5 \\ t_3 &= \tau_3 \operatorname{Ln}(p_3/\lambda_2 \tau_3) = 3 \operatorname{Ln}[0.1/(0.0143)(3)] = 2.6 \\ t_4 &= \tau_4 \operatorname{Ln}(p_4/\lambda_2 \tau_4) = 4 \operatorname{Ln}[0.1/(0.0143)(4)] = 2.2 \\ t_5 &= \tau_5 \operatorname{Ln}(p_5/\lambda_2 \tau_5) = 5 \operatorname{Ln}[0.1/(0.0143)(5)] = 1.7 \\ t_6 &= \tau_6 \operatorname{Ln}(p_6/\lambda_2 \tau_6) = 6 \operatorname{Ln}[0.1/(0.0143)(6)] = 0.9 \\ t_7 &= \tau_7 \operatorname{Ln}(p_7/\lambda_2 \tau_7) = 7 \operatorname{Ln}[0.1/(0.0143)(7)] = 0.01 \\ t_8 &= \tau_8 \operatorname{Ln}(p_8/\lambda_2 \tau_8) = 8 \operatorname{Ln}[0.1/(0.0143)(8)] = 0.00 \\ t_9 &= \tau_9 \operatorname{Ln}(p_9/\lambda_2 \tau_9) = 9 \operatorname{Ln}[0.1/(0.0143)(9)] = 0.00 \\ t_{10} &= \tau_{10} \operatorname{Ln}(p_{10}/\lambda_2 \tau_{10}) = 10 \operatorname{Ln}[0.1/(0.0143)(10)] = 0.00 \end{aligned}$$

Evaluando nuevamente a y b:

$$\begin{aligned} a &= \sum_{i=1}^{10} t_i = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 + t_8 + t_9 + t_{10} \\ &= 2.0 + 2.5 + 2.6 + 2.2 + 1.7 + 0.9 + 0.01 + 0.0 + 0.0 + 0.0 = 11.9 \end{aligned}$$

Para calcular el valor de b, se deben considerar únicamente todos los τ_i don de los t_i sean distintos de cero.

$$\begin{aligned} b &= \sum_{i=1}^{10} \tau_i = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 + \tau_5 + \tau_6 + \tau_7 \\ &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28 \end{aligned}$$

Puesto que no se cumple la condición de $a = t$:

$$a = 11.9 > t = 5$$

Se debe considerar otro valor de lambda y así obtener los nuevos t_i , entonces:

$$\lambda_3 = \lambda_2 e^{\left(\frac{a-t}{b}\right)} = (0.0143) e^{\left(\frac{11.9 - 5}{28}\right)} = 0.0183$$

Para el nuevo valor $\lambda_3 = 0.0183$ los t_i , resultan:

$$\begin{aligned} t_1 &= \tau_1 \text{Ln}(p_1/\lambda_3 \tau_1) = 1 \text{Ln}[0.1/(0.0183)(1)] = 1.7 \\ t_2 &= \tau_2 \text{Ln}(p_2/\lambda_3 \tau_2) = 2 \text{Ln}[0.1/(0.0183)(2)] = 2.0 \\ t_3 &= \tau_3 \text{Ln}(p_3/\lambda_3 \tau_3) = 3 \text{Ln}[0.1/(0.0183)(3)] = 1.8 \\ t_4 &= \tau_4 \text{Ln}(p_4/\lambda_3 \tau_4) = 4 \text{Ln}[0.1/(0.0183)(4)] = 1.3 \\ t_5 &= \tau_5 \text{Ln}(p_5/\lambda_3 \tau_5) = 5 \text{Ln}[0.1/(0.0183)(5)] = 0.5 \\ t_6 &= \tau_6 \text{Ln}(p_6/\lambda_3 \tau_6) = 6 \text{Ln}[0.1/(0.0183)(6)] = 0.0 \\ t_7 &= \tau_7 \text{Ln}(p_7/\lambda_3 \tau_7) = 7 \text{Ln}[0.1/(0.0183)(7)] = 0.0 \\ t_8 &= \tau_8 \text{Ln}(p_8/\lambda_3 \tau_8) = 8 \text{Ln}[0.1/(0.0183)(8)] = 0.0 \\ t_9 &= \tau_9 \text{Ln}(p_9/\lambda_3 \tau_9) = 9 \text{Ln}[0.1/(0.0183)(9)] = 0.0 \\ t_{10} &= \tau_{10} \text{Ln}(p_{10}/\lambda_3 \tau_{10}) = 10 \text{Ln}[0.1/(0.0183)(10)] = 0.0 \end{aligned}$$

Evaluando nuevamente a y b :

$$\begin{aligned} a &= \sum_{i=1}^{10} t_i = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 + t_8 + t_9 + t_{10} \\ &= 1.7 + 2.0 + 1.8 + 1.3 + 0.5 + 0.0 + 0.0 + 0.0 + 0.0 + 0.0 = 7.3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \sum_{i=1}^{10} \tau_i = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 + \tau_5 \\ &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 \end{aligned}$$

puesto que no se cumple la condición $a = t$:

$$a = 7.3 > t = 5$$

Por lo tanto se debe considerar una nueva lambda, para el cálculo de los tiempos:

$$\lambda_4 = \lambda_3 e^{\left(\frac{a-t}{b}\right)} = (0.0183) e^{\left(\frac{7.3 - 5}{15}\right)} = 0.0213$$

Para este valor de lambda los tiempos, serán:

$$\begin{aligned}t_1 &= \tau_1 \operatorname{Ln}(p_1/\lambda_4 \tau_1) = 1 \operatorname{Ln}[0.1/(0.0213)(1)] = 1.6 \\t_2 &= \tau_2 \operatorname{Ln}(p_2/\lambda_4 \tau_2) = 2 \operatorname{Ln}[0.1/(0.0213)(2)] = 1.7 \\t_3 &= \tau_3 \operatorname{Ln}(p_3/\lambda_4 \tau_3) = 3 \operatorname{Ln}[0.1/(0.0213)(3)] = 1.4 \\t_4 &= \tau_4 \operatorname{Ln}(p_4/\lambda_4 \tau_4) = 4 \operatorname{Ln}[0.1/(0.0213)(4)] = 0.6 \\t_5 &= \tau_5 \operatorname{Ln}(p_5/\lambda_4 \tau_5) = 5 \operatorname{Ln}[0.1/(0.0213)(5)] = 0.0 \\t_6 &= \tau_6 \operatorname{Ln}(p_6/\lambda_4 \tau_6) = 6 \operatorname{Ln}[0.1/(0.0213)(6)] = 0.0 \\t_7 &= \tau_7 \operatorname{Ln}(p_7/\lambda_4 \tau_7) = 7 \operatorname{Ln}[0.1/(0.0213)(7)] = 0.0 \\t_8 &= \tau_8 \operatorname{Ln}(p_8/\lambda_4 \tau_8) = 8 \operatorname{Ln}[0.1/(0.0213)(8)] = 0.0 \\t_9 &= \tau_9 \operatorname{Ln}(p_9/\lambda_4 \tau_9) = 9 \operatorname{Ln}[0.1/(0.0213)(9)] = 0.0 \\t_{10} &= \tau_{10} \operatorname{Ln}(p_{10}/\lambda_4 \tau_{10}) = 10 \operatorname{Ln}[0.1/(0.0213)(10)] = 0.0\end{aligned}$$

Evaluando nuevamente a y b:

$$\begin{aligned}a &= \sum_{i=1}^{10} t_i = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 + t_8 + t_9 + t_{10} \\&= 1.6 + 1.7 + 1.4 + 0.6 + 0.0 + 0.0 + 0.0 + 0.0 + 0.0 + 0.0 = 5.3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b &= \sum_{i=1}^{10} \tau_i = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 \\&= 1 + 2 + 3 + 4 = 10\end{aligned}$$

Puesto que no se cumple la condición de $a = t$:

$$a = 5.3 > t = 5$$

Se debe considerar otra lambda y así obtener los nuevos t_i .

$$\lambda_5 = \lambda_4 e^{\left(\frac{a-t}{b}\right)} = (0.0213) e^{\left(\frac{5.3-5}{10}\right)} = 0.0218$$

Para este nuevo valor de lambda se calculan los t_i :

$$\begin{aligned}t_1 &= \tau_1 \operatorname{Ln}(p_1/\lambda_5 \tau_1) = 1 \operatorname{Ln}[0.1/(0.0218)(1)] = 1.5 \\t_2 &= \tau_2 \operatorname{Ln}(p_2/\lambda_5 \tau_2) = 2 \operatorname{Ln}[0.1/(0.0218)(2)] = 1.7 \\t_3 &= \tau_3 \operatorname{Ln}(p_3/\lambda_5 \tau_3) = 3 \operatorname{Ln}[0.1/(0.0218)(3)] = 1.3 \\t_4 &= \tau_4 \operatorname{Ln}(p_4/\lambda_5 \tau_4) = 4 \operatorname{Ln}[0.1/(0.0218)(4)] = 0.5 \\t_5 &= \tau_5 \operatorname{Ln}(p_5/\lambda_5 \tau_5) = 5 \operatorname{Ln}[0.1/(0.0218)(5)] = 0.0 \\t_6 &= \tau_6 \operatorname{Ln}(p_6/\lambda_5 \tau_6) = 6 \operatorname{Ln}[0.1/(0.0218)(6)] = 0.0 \\t_7 &= \tau_7 \operatorname{Ln}(p_7/\lambda_5 \tau_7) = 7 \operatorname{Ln}[0.1/(0.0218)(7)] = 0.0 \\t_8 &= \tau_8 \operatorname{Ln}(p_8/\lambda_5 \tau_8) = 8 \operatorname{Ln}[0.1/(0.0218)(8)] = 0.0 \\t_9 &= \tau_9 \operatorname{Ln}(p_9/\lambda_5 \tau_9) = 9 \operatorname{Ln}[0.1/(0.0218)(9)] = 0.0 \\t_{10} &= \tau_{10} \operatorname{Ln}(p_{10}/\lambda_5 \tau_{10}) = 10 \operatorname{Ln}[0.1/(0.0218)(10)] = 0.0\end{aligned}$$

Evaluando nuevamente a y b:

$$\begin{aligned}a &= \sum_{i=1}^{10} t_i = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 + t_8 + t_9 + t_{10} \\&= 1.5 + 1.7 + 1.3 + 0.5 + 0.0 + 0.0 + 0.0 + 0.0 + 0.0 + 0.0 = 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b &= \sum_{i=1}^{10} \tau_i = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 \\&= 1 + 2 + 3 + 4 = 10\end{aligned}$$

Puesto que se cumple la condición $a = t$, termina el procedimiento iterativo.

λ	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}	t_{12}
0.0001	6.9	12.4	17.4	22.1	26.5	30.7	34.7	38.6	42.4	46.1	278	55
0.0163	2.0	2.5	2.6	2.2	1.7	0.9	0.01	0.0	0.0	0.0	11.9	28
0.0183	1.7	2.0	1.8	1.3	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	7.3	15
0.0213	1.6	1.7	1.4	0.6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	5.3	10
0.0218	1.5	1.7	1.3	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	5.0	10

FIGURA 7-2. ILUSTRACION DE LA CONVERGENCIA EN CINCO PASOS.

De (7.5) la probabilidad de detección en la última línea de la figura 7-2 es $p_i - \lambda b = 10/4 - 0.0218(1+2+3+4) = 0.182$. Es interesante ver que la región 2 es la de

mayor probabilidad de detección (1.7) que la de cualquier otra región. τ_5 es tan grande que no permite asignar ningún esfuerzo a la región 5. Observe que el procedimiento de cálculo proporciona un análisis de sensibilidad automático, a partir de la distribución óptima de esfuerzos cuando $t = 5.3, 7.3, 11.9$ y 278 , tanto cuando se genera $t = 5$.

En la práctica, cualquier información debe darse de tal forma que la probabilidad, al proporcionarse una lambda inicial grande no permita la asignación de una mayor probabilidad cuando $a = b = 0$. La solución más simple, es volver a definir b de tal forma que sea igual a $t/3$ en el caso que $\lambda' = \lambda e^{-3} = 0.05\lambda$.

7.3. BUSQUEDA POR MEDIO DE UNA NORMALIZACION APRIORI.

A menudo sucede que la distribución de la posición de los blancos es una normal bivariada con función de densidad de de probabilidad (f.d.p), $f(x,y)$ con desviaciones estándar σ_x y σ_y en un sistema de coordenadas (x,y) , es:

$$f(x,y) = \exp \left[-\frac{\frac{1}{2} \left(\left(\frac{x}{\sigma_x} \right)^2 + \left(\frac{y}{\sigma_y} \right)^2 \right)}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \right]$$

Suponiendo que el ancho de barrido W es tal que $\sigma_x \gg W$ y $\sigma_y \gg W$, será posible dividir el plano en celdas de tal forma que:

- A. La f.d.p. es aproximadamente constante dentro de cada celda.
- B. W es pequeña con respecto a la dimensión de la celda.

Nuestro propósito en esta sección es efectuar una aproximación analítica a la probabilidad de detección que será obtenida en este caso. Para simplificar los cálculos suponemos

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma ; \text{ sin embargo, todos nuestros resultados son correctos si } \sqrt{\sigma_x \sigma_y} \text{ se}$$

sustituye por σ . En lugar de tratar con celdas, introducimos la función $d(x,y)$, la cual se define como la cantidad de tiempo invertido por unidad de área de búsqueda, en la vecindad de (x,y) . Sea A_i , el área de la celda que incluye a (x,y) . Entonces el tiempo t_i invertido en la búsqueda en la celda i es $d(x,y)A_i$. Si V y W son la velocidad y ancho de barrido respectivamente del explorador (se considera la misma en todas las celdas), entonces:

$$\frac{VWt_i}{A_i} = VW d(x,y)$$

y la probabilidad de detección del blanco dado que se localiza en (x,y) , es:

$$1 - e^{-VW d(x,y)}$$

y tomando el promedio sobre (x,y) , obtenemos la probabilidad de detección p :

$$p = \iint F(x,y) [1 - e^{-VW d(x,y)}] dx dy \quad (7.6)$$

Para maximizar p , debemos elegir $d(x,y)$, tal que:

$$\iint d(x,y) dx dy = t, \quad y \quad d(x,y) \geq 0$$

Este es un problema de optimización con restricciones, al cual le podemos aplicar el **teorema de Everett**. Es conveniente, en este caso, hacer:

$$\lambda = VW e^{-\left[\frac{r_0^2}{2\sigma^2} \right]}$$

donde r_0 todavía no se especifica. La función de Lagrange es, en este caso:

(7.7)

$$L(d) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \iint \left[e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} (1 - e^{-VW d(x,y)}) - VW e^{-\frac{r_0^2}{2\sigma^2}} d(x,y) \right] dx dy$$

E I

lagrangiano $L(d)$ se maximiza si $d(x,y)$ hace máxima la integral en todos los puntos (x,y) . Podemos resolver este problema igualando a cero la derivada del integrando con respecto a $d(x,y)$, entonces se verifica que el resultado sea positivo. La función óptima $d(x,y)$, es:

$$d(x,y) \begin{cases} \frac{r_0^2 - X^2 - Y^2}{2 VW\sigma^2}, & \text{para } X^2 + Y^2 \leq r_0^2 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases} \quad (7.8)$$

Para obtener el valor apropiado de r_0 , escribimos la restricción, en coordenadas polares:

$$t = \iint d(x,y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \left(\frac{r_0^2 - r^2}{2 VW\sigma^2} \right) r dr d\theta = \left(\frac{2\pi}{2 VW\sigma^2} \right) \left(\frac{r_0^4}{2} - \frac{r_0^2}{4} \right)$$

Obteniéndose:

$$r_0 = \sigma (8Z)^{\frac{1}{4}} \quad (7.9)$$

donde:

$$Z = \frac{VWt}{2\pi\sigma^2} \quad (7.9a)$$

PARA EL CASO ELIPTICO:

$$d(x,y) = \frac{\left(\frac{r_0^2}{\sigma_x \sigma_y} - \frac{x^2}{\sigma_x^2} - \frac{y^2}{\sigma_y^2} \right)}{2VW}; \quad Z = \frac{VWt}{2\pi\sigma_x \sigma_y} \quad (7.9b)$$

Ahora conocemos la función óptima $d(x,y)$. La probabilidad de detección es cero, si el blanco se encuentra fuera del círculo de radio r_0 , así escribiendo (7.6), en coordenadas polares:

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} e^{-\left(\frac{r^2}{2\pi\sigma^2}\right)} \left[1 - e^{-\left(\frac{r_0^2 - r^2}{2\sigma^2}\right)} \right] r \, dr \, d\theta \\
 &= \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{r_0} \left[e^{-\left(\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)} - e^{-\left(\frac{r_0^2}{\sigma^2}\right)} \right] r \, dr \\
 &= \left[1 - e^{-\left(\frac{r_0^2}{2\sigma^2}\right)} \right] - \left[\frac{r_0^2}{2\sigma^2} e^{-\left(\frac{r_0^2}{2\sigma^2}\right)} \right]
 \end{aligned}$$

puesto que:

$$\frac{r_0^2}{2\sigma^2} = \sqrt{2Z}$$

se tiene:

$$p = 1 - (1 + \sqrt{2Z}) e^{-\sqrt{2Z}} \quad (7.10)$$

La formula (7.10), muestra como la probabilidad de detección depende del tiempo disponible, cuando el esfuerzo de la búsqueda es localmente aleatorio (ver figura 7-3). La distribución óptima de esfuerzos es cero fuera del círculo de radio r_0 , siendo mayor en los puntos cercanos al centro del círculo de (7.8). La versión acumulativa de (7.8), es algunas veces más útil como una herramienta para diseñar búsquedas aproximadamente óptimas. Sea $F(u)$, el porcentaje total exploraciones dentro de una distancia (ur_0) del origen, así que $F(1) = 1$. Entonces, entonces, de (7.8) con $v = r/r_0$:

$$F(u) = \frac{1}{2\sqrt{Wt}\sigma^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{ur_0} (r_0^2 - r^2) r \, dr \, d\theta = (cte.) \int_0^u (1-v^2) v \, dv = 2u^2 - u^4.$$

Debido a que $F(1) = 1$.

Por ejemplo, el explorador invirtió 7/16 de su tiempo dentro de un círculo de radio $r_0/2$, mientras que debería haber empleado 1/4 de su tiempo, si éste se hubiera movido uniformemente dentro del círculo.

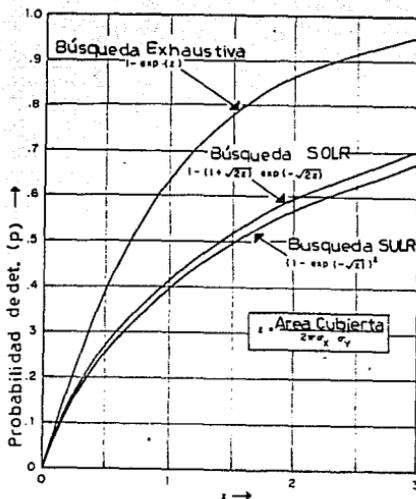


FIGURA 7-3. TRES TIPOS DE BUSQUEDA BASADOS EN UNA DENSIDAD NORMAL.

Aunque hemos obtenido este resultado, haciendo la suposición de que se tiene un sensor con movimiento continuo. Observamos que el numerador de Z en la figura 7-3, es precisamente la cantidad total del área que puede barrerse. Si actualmente existe un gran número de observaciones discretas, cada una de las cuales cubre una área A , entonces se puede simplemente reemplazar VWt por nA , en la definición de Z . $F(u)$ es entonces, el porcentaje de observaciones dentro de u_0 en el origen, etc.

Hasta ahora hemos tratado con una búsqueda que puede ser llamada Estratégicamente Óptima pero Localmente Aleatoria (SOLR = Strategically Optimal but Locally Random). Es interesante comparar la fórmula (7.10) con el resultado que se obtiene en una búsqueda que es

estratégicamente óptima. Tal búsqueda es la que hemos llamado anteriormente **exhaustiva**. La región de búsqueda exhaustiva, debe ser un círculo con área:

$$A = VWt$$

donde:

- V Velocidad del explorador.
- W Ancho de barrido del explorador.
- t Tiempo que dura la búsqueda.

Y la probabilidad de detección, es simplemente la probabilidad de que se encuentre el blanco dentro del círculo. El radio del círculo es:

$$p = \left(\frac{VWt}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}}$$

así, la probabilidad de que el blanco se encuentre dentro del círculo es:

$$p = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^p e^{-\left(\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)} r dr d\theta = 1 - e^{-\left(\frac{p^2}{2\sigma^2}\right)} = 1 - e^{-Z}$$

Donde Z está definida en (7.9a). Esta fórmula también se muestra en la figura 7-3. Naturalmente, da una probabilidad de detección mayor que (7.10). En algunas circunstancias, puede ser problemático llevar a cabo una búsqueda SOLR (Strategically Optimal but Locally Random) ante las necesidades del tipo de búsqueda que se hace utilizando diferentes tiempos en distintas regiones de búsqueda. Una búsqueda más simple que se hace, es elegir un círculo y buscar uniformemente de manera aleatoria dentro de él. Si en el círculo se elige para maximizar la probabilidad de detección, ésta es la búsqueda **estratégicamente uniforme pero localmente aleatoria** (SULR, Strategically Uniform but Locally Random). Ahora bien, sea p el radio del círculo. La probabilidad de que el blanco esté dentro del círculo, es:

$$1 = e^{-\left(\frac{p^2}{2\sigma^2}\right)}$$

Puesto que, la densidad del esfuerzo de búsqueda, dentro del círculo es: $t/(\pi\rho^2)$; la probabilidad de detección dado que el blanco se encuentra dentro del círculo es:

$$1 - e^{-\left(\frac{VWt}{\pi\rho^2}\right)}$$

El radio del círculo ρ debe elegirse de manera que maximice el producto:

$$\left[1 - e^{-\left(\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right)}\right] \left[1 - e^{-\left(\frac{VWt}{\pi\rho^2}\right)}\right]$$

Donde el valor óptimo de $\rho^2/(2\sigma^2)$, es \sqrt{Z} , y que la probabilidad de detección resultante para la búsqueda Estratégicamente Uniforme pero Localmente Aleatoria (SULR, Strategically Uniform but Locally Random), es:

$$P = [1 - e^{-\sqrt{Z}}]^2 \quad (7.13)$$

Donde Z está definida en (7.9). Esto también se muestra en la figura (7-3), donde la curva inferior representa el caso SULR. La expresión (7.13) difiere muy poco de (7.10). Si una búsqueda es localmente aleatoria, no es necesario que sea estratégicamente óptima. Cada una de las tres curvas en la figura (7-3), tiene un tiempo medio de detección $E[T]$, donde T es un tiempo aleatorio para que ocurra la detección. Utilizando:

$$E[T] = \int_0^{\infty} q(t) dt$$

y haciendo $\tau = 2\pi\sigma^2/VW$, los tiempos medios de detección pueden expresarse como:

τ , 3τ y 3.5τ ; en los casos exhaustivos en las búsquedas SOLR y SULR.

7.4. BUSQUEDA MIOPICA CON OBSERVACIONES DISCRETAS.

En este tipo de búsquedas, las observaciones se efectúan en forma discreta, en lugar de efectuarse de manera continua. Para lo cual existen dos grandes razones:

1. En algunos casos se presentarán regiones que ya no admitirán particionarse, debido a que son de poca extensión. Por ello, bastará una sola observación para barrer toda el área de búsqueda.
2. El modelo de asignación óptimo del número de observaciones que se pueden hacer en cada celda o región, es particularmente simple, si las observaciones se asignan de manera secuencial.

El algoritmo de búsqueda miópica, parte del siguiente supuesto: asigna un número K_i de periodos (horas, días, etc) a las celdas antes mencionadas. El algoritmo responde a la pregunta ¿dónde asignar las unidades en los siguientes periodos?. También, se supone que

- B_i : Es el evento de que el blanco se ha detectado en la celda i .
- A_i : Es el evento de que el blanco se encuentra ahí.
- p_i : Es una probabilidad obtenida estadísticamente denominada razón de inspección y que consiste en la relación existente entre el número de embarcaciones inspeccionadas en toda una área de interdicción. Las embarcaciones de interés pueden ser aquellas que tienen menos de 250 pies de eslora. Para nuestros propósitos p_i representa la probabilidad de que el blanco se encuentre en la i -ésima región o celda.
- q_i : Es la probabilidad de no detectar al infractor en la celda i . Es decir, suponemos que las observaciones sucesivas en la i -ésima celda cada una tiene una probabilidad q_i de que no se detecte el blanco, independientemente de todas las otras observaciones.

Si K_i es el número de observaciones en la i -ésima celda, entonces la probabilidad de detección es:

$$P = \sum_{i=1}^n p_i (1 - q_i^{K_i})$$

y el objetivo es maximizar P sujeto a: $K_i \geq 0$, con la restricción: $\sum_{i=1}^n K_i$, donde n es el

número de regiones o celdas. Pueden aplicarse métodos Lagrangianos, para la solución de este problema exactamente igual como se hace para el caso continuo. Sin embargo, nuestra intención es aplicar una técnica diferente que depende principalmente de la naturaleza discreta de las observaciones.

Suponga que el problema de asignación para las K_i observaciones, se ha resuelto de algún modo, considerando la concesión óptima siendo K_1, K_2, \dots, K_n y que el problema es asignar K_{i+1} observaciones. Un método para efectuar esto, es agregar la $K + \text{ésima}$ observación a la celda con la mayor probabilidad de detección. Sea:

$$q_i \times q_i \times q_i \times \dots \times q_i = q_i^{K_i} \quad \text{si se navegan } K_i \text{ periodos.}$$

La probabilidad de detectar a ese buque infractor será:

$$1 - q_i^{K_i} \quad \text{después de navegar } K_i \text{ periodos.}$$

Ahora, la probabilidad total de detectarlo dado que se encuentra ahí, es:

$$P_i(1 - q_i^{K_i}) \quad (7.14)$$

El incremento en la probabilidad viene dado por la diferencia entre la probabilidad total de detectarlo después de asignarle $(K_i + 1)$ periodos de navegación y la probabilidad total de detectarlo después de asignarle K_i periodos.

El cálculo es el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{INCREMENTO} &= P_i(1 - q_i^{K_i+1}) - P_i(1 - q_i^{K_i}) \\ &= P_i(1 - q_i^{K_i+1} - 1 + q_i^{K_i}) \\ &= P_i(q_i^{K_i} - q_i^{K_i+1}) \\ &= P_i(1 - q_i)q_i^{K_i} \end{aligned}$$

Si esta nueva asignación es óptima para las $(K_i + 1)$ observaciones, entonces, tenemos las bases para un procedimiento inductivo, a partir de que es trivial encontrar una asignación óptima cuando $K=0$. Este procedimiento se conoce con el nombre de algoritmo greedy, donde a cada observación se le asigna un tiempo y dichas observaciones se efectuarán en la celda que tenga la mayor probabilidad de detección. El algoritmo greedy, encontrará asignaciones óptimas en cada problema, puesto que: $P_i(1 - q_i^{K_i})$, es una función cóncava de K_i .

EJEMPLO:

Considere la siguiente exploración para el caso en que:

$$n = 3$$

$$p_1 = 0.5 \quad q_1 = 0.5$$

$$p_2 = 0.4 \quad q_2 = 0.8$$

$$p_3 = 0.3 \quad q_3 = 0.0$$

Los cálculos aritméticos son muy simples:

1. Se calculan los primeros tres números (0.25, 0.08, 0.10), directamente de (P_1, P_2, P_3) , (q_1, q_2, q_3) y con $K_i = 0$.
2. Aquella celda que tenga la mayor probabilidad de detección, será la buscada (en este ejemplo, resulta ser la celda número 1).
3. Para $K_i = 1$, permanecen constantes las probabilidades que fueron menores en el primer cálculo y solo se obtiene la probabilidad de la celda que resultó con probabilidad de detección mayor en el cálculo anterior (en este caso se hizo el cálculo de la probabilidad de la primera celda).

Los pasos 2 y 3 se repiten hasta terminar con el número de observaciones requerido.

NUMERO K_i	NUMERO DE REGION			REGION EXPLORADA i
	1	2	3	
	$P_1(1-q_1)q_1^{K_i}$	$P_2(1-q_2)q_2^{K_i}$	$P_3(1-q_3)q_3^{K_i}$	
0	$P_1(1-q_1)q_1^0 = 0.25$	$P_2(1-q_2)q_2^0 = 0.08$	$P_3(1-q_3)q_3^0 = 0$	1
1	$P_1(1-q_1)q_1^1 = 0.12$	0.08	0.10	1
2	$P_1(1-q_1)q_1^2 = 0.06$	0.08	0.10	3
3	0.0625	0.08	$P_3(1-q_3)q_3^3 = 0$	2
4	0.0625	$P_2(1-q_2)q_2^4 = 0.06$	0.00	2
5	0.0625	$P_2(1-q_2)q_2^5 = 0.05$	0.00	1

FIGURA 7-4.

La figura 7-4, muestra la forma como opera este algoritmo. Si el objetivo en ese ejemplo, es maximizar observaciones, entonces la única forma de hacerlo es que se hagan 3 observaciones en la primera región, 2 en la segunda y 1 en la primera. Estas no tienen que efectuarse necesariamente en el orden en que fueron calculadas, es decir: 1, 1, 3, 2, 2, 1. Esta observación puede ser importante, si no se tiene un orden para moverse de celda a celda. Sin embargo, un explorador que quiera maximizar el número promedio de observaciones requeridas para encontrar el blanco, deberá hacerlas en el mismo orden como fueron calculadas. De hecho, cuando se efectúan las observaciones en el mismo orden como se fueron obteniendo, éste método se conoce con el nombre de plan uniforme óptimo, porque maximiza la probabilidad de detección para toda K , y además minimiza el tiempo esperado para encontrar el blanco, si la búsqueda se lleva a cabo hasta que se localiza el blanco.

Existe una interpretación probabilística de los cálculos de la figura 7-4. Sean,

C_i : El evento, el blanco se encuentra actualmente en la región i .

D_k : El evento, no existe detección en ninguna de las K observaciones.

En términos de éstos eventos, tenemos que: $P_i = P(C_i)$. Si K_i es el número de observaciones fuera de K , en la región i :

$$Q_i^{K_i} = P\left(\frac{D_K}{C_i}\right)$$

Además:

$$P_i(D_K) = \sum P\left(\frac{D_K}{C_i}\right) P_i(C_i) = \sum P_i Q_i^{K_i} \quad (7.15)$$

En este ejemplo:

$$P(D_5) = 0.0625$$

$$P(D_5) = \frac{0.0625}{1-q_1} + \frac{0.0512}{1-q_2} + \frac{0}{1-q_3} = 0.125 + 0.256 = 0.381$$

Así la probabilidad de detección después de 5 observaciones, es:

$$1 - 0.381 = 0.619$$

En general, la probabilidad de detección después de k observaciones, puede determinarse a partir de la línea K (la K+ésima línea) en la tabla 7-4. También:

$$P(C_1|D_k) = \frac{P(D_k|C_1) P(C_1)}{P(D_k)} = \frac{p_1 q_1^{k-1}}{P(D_k)} \quad (7.16)$$

Así, las probabilidades de que el blanco esté en cada una de las celdas, dado que en la observación anterior no se detectó ningún blanco, se obtiene fácilmente del renglón K. Por ejemplo, la probabilidad de que el blanco se encuentre en la celda 2 dado que se efectuaron 5 búsquedas sin éxito, es:

$$\frac{0.256}{0.381} = 0.672$$

La política de búsqueda anterior sigue la regla de explorar siempre en la región donde la probabilidad de detección del blanco en la siguiente observación sea mayor. Nos referimos a ella como la regla miópica, puesto que lo importante es que se encuentre el blanco en la siguiente exploración, sin importar las exploraciones futuras. La regla miópica es uniformemente óptima para los casos en los cuales el blanco es estacionario, es decir, permanece en una región.

CAPITULO 8

MOVIMIENTO ALEATORIO DE LOS BLANCOS

Algunos blancos, tales como excursionistas perdidos y náufragos en botes salvavidas, pueden desplazarse distancias considerables desde el punto donde fueron vistos por última vez. Este movimiento, en algunas ocasiones puede favorecer al explorador cuando realiza una búsqueda en una pequeña región, debido a que su velocidad relativa se incrementa; pero en el caso en que el área de búsqueda aumenta de tamaño, resulta perjudicial; debido a que el esfuerzo del explorador es cada vez mayor. Para nuestros propósitos supondremos, que el movimiento del blanco es independiente del movimiento del explorador y el blanco, además, no pretende evadir la detección.

8.1. MEJORAMIENTO DINAMICO.

Considere la siguiente situación: Un buscador y un blanco donde cada uno se mueve independientemente y aleatoriamente con velocidades V y U , respectivamente, en una región A . Se quiere saber cual es el tiempo aleatorio T que toma al explorador para estar a una distancia $W/2$ del blanco. Basados en la experiencia con problemas similares, es natural esperar que T sea exponencial y que:

$$E(T) = \frac{A}{VW} \quad (8.1)$$

cuando la velocidad U del blanco es pequeña. En forma más general, la esperanza se expresa de la siguiente manera:

$$E(T) = \frac{A}{\bar{V}W} \quad (8.2)$$

donde \bar{V} es una velocidad equivalente que depende de U y V de tal manera que $\bar{V} = V$,

cuando $U=0$. Puesto que es verdad lo anterior, debe cumplirse también que $\vec{V}=U$, cuando $V=0$. La razón de esto, se debe a que el blanco o el explorador pueden estar observando inadvertidamente, sin percatarse de que están cerca el uno del otro. Tanto el blanco como el explorador siguen una trayectoria aleatoria, pero no necesariamente la misma. Así, \vec{V} debe ser una función simétrica de V y de U . La velocidad relativa del explorador respecto al blanco, es:

$$\sqrt{U^2+V^2-2UV \cos \theta} \quad (8.3)$$

Donde θ , es el ángulo entre los vectores de velocidad U y V . Puesto que θ es un ángulo aleatorio, podemos esperar que \vec{V} sea el promedio de esta velocidad relativa con respecto a la distribución uniforme sobre θ :

$$\vec{V} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (U^2+V^2-2UV \cos \theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \quad (8.4)$$

Después de algunas manipulaciones trigonométricas, se llega a:

$$\vec{V}=2(V+U) \frac{E(K)}{\pi} \quad (8.6)$$

y

$$E(K) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-K^2 \operatorname{sen}^2 \phi)^{\frac{1}{2}} d\phi \quad (8.7)$$

La integral en (8.7) no puede evaluarse explícitamente, siendo una integral total elíptica de segundo orden. $E(K)$ es una función decreciente de K , con $E(0) = \frac{\pi}{2}$ y $E(1) = 1$. K

es siempre un número entre 0 y 1. Cuando:

$$U/V = 0.200, 0.500 \text{ ó } 1.00$$

$$K = 0.745, 0.942 \text{ ó } 1.00$$

$$E(K) = 1.320, 1.110 \text{ ó } 1.00$$

$$\bar{V}/V = 1.010, 1.060 \text{ ó } 1.27$$

\bar{V} es siempre mayor que el valor más grande de U y V , en efecto, \bar{V} se aproxima al mayor valor de U y V cuando U y V son considerablemente diferentes. El fenómeno contenido en las ecuaciones (8.5) y (8.7), se conocen como de mejoramiento dinámico, puesto que el explorador desarrolla una velocidad que efectivamente es mejorada debido a la velocidad que lleva el blanco. Observe que la velocidad óptima del blanco para que evite la detección es cero, suponiendo que el explorador se mueve aleatoriamente. Un blanco que desea evitar la detección puede elegir desplazarse en círculo a una velocidad $U = 0.2 V$, con tal de que el movimiento sea suficiente para evitar una búsqueda exhaustiva, sin que se incremente la velocidad equivalente del explorador ni siquiera un 1%.

El explorador puede alcanzar una velocidad relativa $(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}$, la cual es mayor que \bar{V} , si su velocidad es siempre perpendicular a la del blanco. Esto se presenta principalmente cuando se patrulla un canal. Esta estrategia no es factible aquí, debido a que el explorador no conoce la dirección ni velocidad del blanco.

8.2. MOVIMIENTO MARKOVIANO - BUSQUEDA MIOPICA.

La teoría de mejoramiento dinámico de la sección 8.1 no es aplicable a problemas, donde la posición del blanco en el tiempo, es aproximadamente conocida. En tales problemas, el principal efecto del movimiento del blanco es probable que sea de expansión continua, en la región dentro de la cual es probable que se encuentre el blanco, con una consecuente disminución del esfuerzo de búsqueda conforme va pasando el tiempo. Para manipular tales

problemas, generalizamos el concepto de celda o región de la sección 7.4 agregando la probabilidad de que el blanco pueda moverse de región en región conforme avanza la búsqueda por medio de la ayuda de la computadora. Sea C un conjunto de celdas dentro de las cuales el blanco se supone que se mueve de acuerdo a la regla de transición de Markov.

$$\Gamma(x, y, t) = \text{Probabilidad de que el blanco que se encuentra en la celda } x, \\ \text{en el tiempo } t \text{ pase a la siguiente celda } y. \\ x \in C, y \in C, t = 1, 2, \dots \quad (8.8)$$

Por ejemplo, sea C una malla discretizada en dos dimensiones y $\Gamma(x, y, t) = 0.25$ si y solamente es una de las cuatro celdas próximas a x , la cual corresponde a una trayectoria aleatoria bidimensional. O podemos tener $\Gamma(x, y, t) = 1$ y solamente si $y = x$, lo que significa que el blanco permanece en la misma celda. Sea $P(x, t)$, la probabilidad de que el blanco llegue a la celda x en el tiempo t , sin ser detectado por alguno de los exploradores en los tiempos $1, 2, \dots, t-1$. Suponemos que $P(x, 1)$ está dado para toda x ; esto es, la distribución a priori para la posición del blanco, así:

$$\sum_{x \in C} P(x, 1) = 1 \quad (8.9)$$

Si $q(x, t)$, es la probabilidad de que el blanco no sea detectado en la posición x y en el tiempo t , entonces:

$$P(x, t) = q(x, t) \quad (8.10)$$

Es la probabilidad de que el blanco llegue a la celda x en el tiempo t , sin haber sido detectado por alguno de los exploradores en los tiempos $1, 2, \dots, t$. Las cantidades $q(x, t)$ son las variables de decisión en este problema. Si $q(x, t)$ se selecciona para minimizar:

$$\sum_{x \in C} P(x, t) = q(x, t) \quad (8.11)$$

En cada t y sujeto a las restricciones impuestas en la búsqueda. Entonces, se dice que la búsqueda es miópica. Este término es razonable porque seleccionando $q(x,t)$ de esta manera equivale a maximizar la probabilidad de detección en la t -ésima búsqueda, dado que no se tiene éxito en las $t-1$ búsquedas, sin importar la probabilidad de detección en los tiempos $t+1$, $t+2$, etc. Este tipo de búsqueda es conocida con el nombre de búsqueda óptima para un blanco estacionario (sección 7.4). Si $q(x,t)$ es miópica o no, tenemos:

$$P(y, t+1) = \sum_{x \in C} P(x, t) q(x, t) \Gamma(x, y, t), \quad y \in C, \quad t \geq 1 \quad (8.12)$$

La fórmula (8.12) anterior es cierta porque, si un blanco está en y en $t+1$, y no es detectado, entonces debió ser detectado en la región x en el tiempo t , al cambiar de x a y . Puesto que $P(x,1)$ es conocido para toda x , la expresión (8.11) puede utilizarse para determinar $P(x,2)$ para toda x , luego $P(x,3)$ para toda x , etc. Puesto que:

$$S_m = \sum_{x \in C} P(x, m) q(x, m)$$

Es la probabilidad de que no se detecte el blanco en cualquier tiempo anterior a m . Podemos establecer nosotros mismos la tarea de elegir $q(x,t)$ para minimizar S_m según la m que corresponda al tiempo de búsqueda disponible. En particular, con la búsqueda miópica no se obtiene un tiempo mínimo de detección. Veamos el siguiente ejemplo:

Sea $C = \{1,2,3\}$ y la regla de movimiento en un paso, de que el blanco vaya a la celda 2 si se encuentra actualmente en la celda 1, o a la celda 3 si se encuentra en la celda 2, o en dado caso, permanece en la celda 3 si ya se encuentra en ella. El explorador puede examinar cualquiera de las celdas; la 1 o la 2 en cada oportunidad y detectar al blanco si se encuentra en alguna de estas celdas, pero, fracasaría en caso de no encontrarlo. También se conocen las siguientes probabilidades: $P(1,1) = 0.51$, $P(2,1) = 0.49$ y $P(3,1) = 0.0$. Siendo:

- $P(1,1)$: La probabilidad de que el blanco se encuentre en la celda 1, en el tiempo 1.
 $P(2,1)$: La probabilidad de que el blanco se encuentre en la celda 2, en el tiempo 1.
 $P(3,1)$: La probabilidad de que el blanco se encuentre en la celda 3, en el tiempo 1.

La estrategia miópica realiza la búsqueda en la región o celda 1 primero, puesto que $0.51 > 0.49$. En este caso un blanco inicialmente en la celda 2 se moverá a la celda 3, después de lo cual será imposible la detección. Así la estrategia miópica lleva a 0.51 la probabilidad de detección después de una observación o después de un número mayor de observaciones. Sin embargo, la estrategia de siempre observar en la celda 2 tiene una probabilidad de detección de 1.0 después de dos observaciones. Además, la estrategia óptima no es siempre óptima para el problema de maximización de la probabilidad de detección después de un número fijo de observaciones.

8.3. MOVIMIENTO MARKOVIANO - BUSQUEDA OPTIMA.

Adicionalmente a las funciones definidas en la sección 8.2, definiremos la función $Q(x,t)$ como la probabilidad de que un blanco no sea detectado en la celda x en el tiempo t por alguno de los exploradores en los tiempos $t+1, t+2, \dots, m$; dado que no fue detectado en los tiempos $1, \dots, t$; con $Q(x,m) = 1$ para toda x . Tenemos:

$$S_m = \sum_{x \in C} P(x, t) q(x, t) Q(x, t), \quad \text{para toda } t \quad (8.13)$$

La fórmula (8.13) es cierta porque un blanco que nunca ha sido detectado en x , debe pasar a través de algún punto de x en el tiempo t . Por consiguiente, el blanco no es detectado en el tiempo t , ni antes de t , ni después de t ; así que los tres términos: antes, en o después de t en (8.13) corresponden a no ser detectado en el pasado, presente o futuro. El lado derecho de (8.13) aparece como una función de t , pero es en realidad una constante (la probabilidad de nunca detectar el blanco). Ya que el movimiento es markoviano y la posición del blanco se obtiene calculando $Q(x,t)$, la condición de que no hay detección en $1, \dots, t$ en la definición de $Q(x,t)$, es en realidad vacía. Por lo tanto, para toda x y t mayor o igual a 2.

$$Q(x, t-1) = \sum_{y \in C} \Gamma(x, y, t-1) q(y, t) Q(y, t) \quad (8.14)$$

La ecuación (8.14) es cierta porque si un blanco estando en x en $t-1$ no es detectado en t, \dots, m ; entonces debió moverse a algún punto en y en el tiempo t , además no se detecta en y en el tiempo t . Por consecuencia, no será detectado en $t+1, \dots, m$ al moverse a y .

Observamos que la forma más sencilla para calcular $Q(x,t)$ es por el método hacia atrás; por ejemplo $Q(x,m) = 1$ es conocida para toda x , así (8.14) puede usarse para determinar $Q(x,m-1)$ para toda x , etc., hasta evaluar finalmente $Q(x,1)$. Esto es opuesto a la forma normal de calcular $P(x,t)$ de (8.12), donde se comienza con $P(x,t)$ y termina con $P(x,m)$.

La función de búsqueda $q(x,t)$ determina $P(x,t)$ y $Q(x,t)$. $P(x,t)$ depende de $q(y,u)$ para toda y y $u < t$ y $Q(x,t)$ depende de $q(y,u)$, para toda y , y $u > t$. Observe que ni $P(x,t)$ ni $Q(x,t)$ dependen de $q(y,t)$ para cualquier y . Por lo tanto la definición de $q(y,t)$ puede ser cambiada a un tiempo arbitrario t sin afectar $P(x,t)$ o $Q(x,t)$. En particular, sea f la función de búsqueda factible que minimiza:

$$\sum_{x \in C} P(x,t) f(x) Q(x,t) \quad (8.15)$$

dentro de las restricciones que sean impuestas. Entonces la función de búsqueda q' es tan buena como q , donde:

$$q'(y,u) = \begin{cases} q(y,u), & \text{si } u \neq t \\ f(y), & \text{si } u = t \end{cases}$$

De este modo, la capacidad para resolver problemas de búsqueda estacionarios (los cuales consisten en la determinación de la cantidad f) están en función directa a la capacidad para efectuar mejoramientos graduales. Dada cualquier función de búsqueda q , una simple observación en un tiempo t , en el cual q es inferior f , obtenemos la función de búsqueda mejorada q' sustituyendo f para q en ese tiempo. El proceso puede repetirse utilizando las expresiones (8.12) y (8.14) para calcular $P'(x,t)$ y $Q'(x,t)$ correspondiente a q' después de cada estado.

Una estrategia que no puede mejorarse con la técnica anterior es la llamada crítica. Evidentemente lo crítico es una condición necesaria para la optimidad. En algunas circunstancias, lo crítico es también suficiente para la optimización. Los siguientes dos ejemplos ilustran las posibilidades.

EJEMPLO 1.

Sea C el conjunto de los primeros 67 enteros con el blanco inicialmente en el número 34. El blanco se mueve en una difusión discreta; de los puntos interiores hacia la izquierda o no se mueve o se mueve hacia la derecha con probabilidades 0.3, 0.4, 0.3, respectivamente. En cualquiera de las dos posiciones finales, el blanco permanece donde está o se mueve más cercanamente al punto interior con probabilidades 0.4, 0.6 respectivamente. En cada una de las 80 oportunidades, el explorador busca en cada uno de los 67 enteros; si el blanco está actualmente en ese entero, la probabilidad de que no sea detectado es 0.875 o de otra manera es 1.0. Si el explorador estuviera eligiendo un entero aleatoriamente en cada oportunidad, la probabilidad de no detección será $(1 - 0.125/67)^{80} = 0.8612$.

La estrategia miópica para este ejemplo tiene una probabilidad de no detección de 0.3664. Para mejoramientos sucesivos de acuerdo con (8.15), una estrategia crítica con probabilidad de no detección 0.3625 fue establecida por Washburn. También encontró una estrategia crítica diferente con una probabilidad de no detección 0.3623; así, lo crítico no es suficiente para la optimización en este problema. La estrategia miópica y la primera estrategia crítica se muestran en la figura 8-1. Observe que la estrategia crítica se dispersa más hacia afuera que la estrategia miópica. Las figuras 8-2 y 8-3 muestran las funciones $P(x,t)$ y $Q(x,t)$ correspondientes a la primera estrategia crítica.

EJEMPLO 2.

Igual que en el ejemplo 1, excepto que el explorador no tiene la restricción de observar en una sola región en cada uno de los tiempos. Específicamente tiene 100 unidades de esfuerzo y la probabilidad de no detección si Z unidades de esfuerzo se utilizan en una sola región, es: $e^{-0.1335 Z}$. Si todas las 100 unidades se utilizan en una sola región, la probabilidad de no detección, es: $e^{-0.1335 Z} = 0.875$ como en el ejemplo 1, pero el esfuerzo puede distribuirse sobre las regiones de alguna manera. En este caso, se conoce [1,3,4] que las

estrategias críticas son óptimas. Desafortunadamente, la técnica iterativa basada en (8.15) produce una secuencia de estrategias que nunca son absolutamente críticas, de manera que el procedimiento iterativo debe eventualmente detenerse. La estrategia miópica en este ejemplo tiene una probabilidad de no detección de 0.3576. Después de varias iteraciones, la estrategia resultante ligeramente subcrítica tiene una probabilidad de detección de 0.3544. La probabilidad de detección para la estrategia de búsqueda óptima no puede exceder a $0.3544 + 0.0026 = 0.3570$.

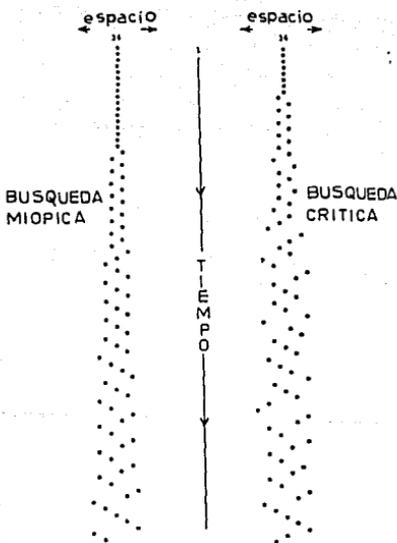


FIGURA 8-1. BUSQUEDAS MIOPICA Y CRITICA

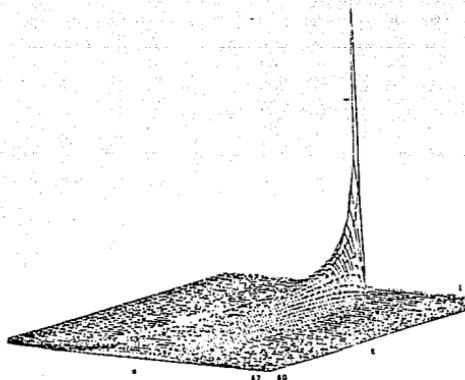


FIGURA 8-2. LA FUNCION $P(x,t)$

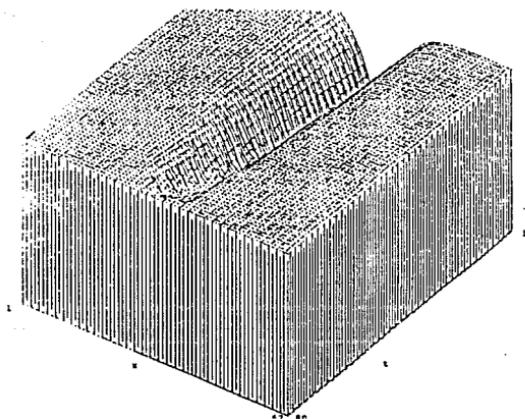


FIGURA 8-3. LA FUNCION $Q(x,t)$

CAPITULO 9

LOCALIZACION Y RASTREO

Buscar es siempre ir con la idea de tomar decisiones subsiguientes y la forma en que se suceden estas decisiones, usualmente, depende en saber con cierta aproximación la posición del blanco. En este capítulo veremos detalladamente como se determina la posición del blanco por medio de múltiples marcaciones.

DEFINICION:

Marcación.

Es la recta buque-objeto, es decir, esa línea que une el buque con un punto del horizonte. O bien, es el ángulo que forma la línea buque-punto del horizonte, con el norte de O_0 a 360_0 .

9.1. REGIONES DE CONFIANZA.

Dos Líneas De Marcación (LDM), siempre se intersectan en un único punto fijo (a menos que sean paralelas). Cuando existen tres líneas LDM los errores en la medición impiden que las tres líneas de marcación se intersecten en un punto y por consecuencia resulta una área en forma de triángulo llamada zona de marcación, la cual queda limitada por estas líneas de marcación (líneas sólidas en la figura 9-2).

Sin embargo, hasta la tercera línea se tendrá que hacer una estimación más aproximada, la presencia de esta tercera línea de marcación nos puede llevar a una confusión, puesto que no es tan obvio visualizar el espacio entre estas líneas. Consideraremos por el momento que el blanco se encuentra probablemente en la zona de marcación aleatoria y que esta zona contiene al blanco estacionario. En la figura 9-1, se presenta el caso donde el blanco está a la derecha de cada una de las tres LDM a, b y c; se muestra con líneas sólidas (el caso DDD). Las líneas discontinuas representan el caso DID donde el blanco se encuentra a la izquierda (I) de la línea b, pero, a la derecha (D) de las líneas a y c. En

el caso DDD, el blanco está en la zona de marcación, pero no en el caso DID.

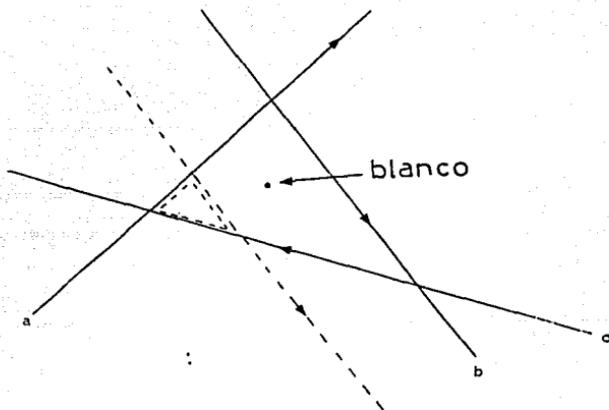


FIGURA 9-1. FORMACION DE UNA MARCACION ALEATORIA RESPECTO A UN BLANCO FIJO.

Se tienen ocho casos, de los cuales solamente en dos (DDD, III) el blanco se encuentra dentro de la zona de marcación (esto es cierto si ninguna de las tres líneas son paralelas). Estos casos son los siguientes:

1. DDD (Derecha-Derecha-Derecha).
2. DDI (Derecha-Derecha-Izquierda).
3. DID (Derecha-Izquierda-Derecha).
4. IDD (Izquierda-Derecha-Derecha).
5. III (Izquierda-Izquierda-Izquierda).
6. IID (Izquierda-Izquierda-Derecha).
7. IDI (Izquierda-Derecha-Izquierda).
8. DII (Derecha-Izquierda-Izquierda).

El cambio en la dirección de alguna de las líneas modificará el nombre de los dos principales casos (DDD, III), estando dos líneas fijas. Si cada una de las dos líneas tiene la misma probabilidad de pasar a la derecha o a la izquierda del blanco, entonces, es evidente que solamente 2/8 de toda la zona de marcación contiene al blanco. Cuando se tienen solamente tres LDM la zona de marcación no es una zona de gran confianza (probabilidad). Con tres LDM, la zona de marcación generalmente es el mayor polígono cerrado que tiene la mayor probabilidad de contener al blanco.

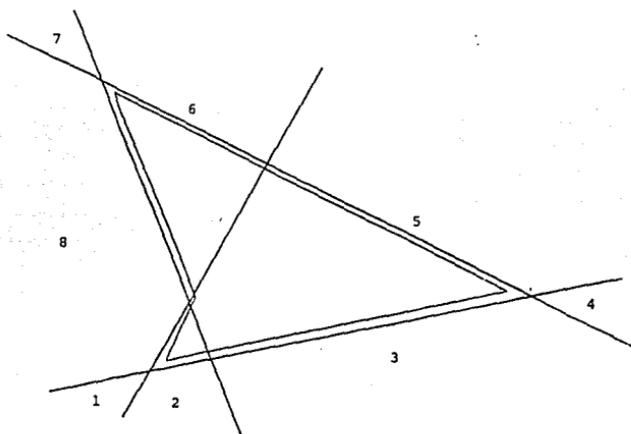


FIGURA 9-2. ZONA DELIMITADA POR CUATRO LINEAS DE MARCACION.

La figura 9-2 muestra el caso de cuatro LDM, donde se tienen ocho segmentos de un polígono que se prolongan hasta el infinito y tres de ellas tienen un límite. La zona de marcación es la unión de las tres líneas que no se extienden hasta el infinito. Daniels da la siguiente fórmula:

$$1 - \frac{n}{2^{n-1}}$$

Esta fórmula proporciona la fracción de la zona de marcación que puede contener al blanco cuando se tienen n LDM; esta fracción de área de la zona de marcación es 0.5, cuando n=4. Lo cual se puede comprobar fácilmente:

$$1 - \frac{4}{2^{4-1}} = 1 - \frac{4}{8} = 0.5$$

Debe hacerse una importante distinción, al analizar el cálculo anterior en donde la fracción de la zona de marcación que encierra al blanco, nos da la misma probabilidad para todas las líneas de marcación, de estar a un lado del blanco. Si se conoce el error a priori en las distribuciones debido a la posición de las líneas de marcación, entonces, la probabilidad de que una zona de marcación determinada que contenga al blanco puede calcularse fácilmente al corregir estos errores.

9.2. ESTIMACION PUNTUAL POR MINIMOS CUADRADOS.

En un sistema de coordenadas fijo x-y, cada línea de marcación, se caracteriza por dos parámetros θ y d , siendo θ el ángulo medido en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj, entre el eje x y la línea de marcación y $|d|$ es la distancia mínima del punto (x,y) al origen. La distancia d es positiva si el origen se encuentra a la derecha del observador que pasa moviéndose en la dirección θ , de otra manera, es negativa. La figura 9-3 ilustra el caso donde: $(\theta, d) = (\pi/4, 1)$ ó $(\pi+\pi/4, -1)$.

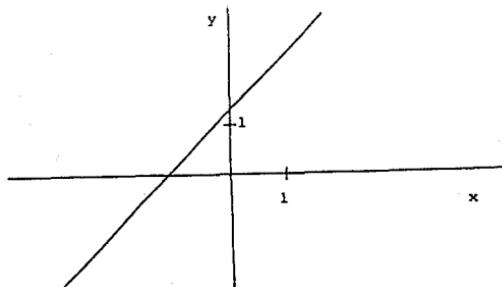


FIGURA 9-3. SISTEMA DE COORDENADAS X-Y CON LA LDM $(\pi/4, 1)$.

La distancia al cuadrado de un punto arbitrario (x,y) a la línea (θ, d) es $(X \operatorname{sen}\theta - y \operatorname{cos}\theta + d)^2$. Si se tienen n líneas de marcación con parámetros θ_j y d_j , entonces el mínimo cuadrado estimado o fijo es el punto (x,y) que minimiza la función de penalización $L(x,y)$:

$$L(x,y) = \frac{\sum_{j=1}^n (X \operatorname{sen} \theta_j - Y \operatorname{cos} \theta_j + d_j)^2}{\sigma_j^2} \quad (9.1)$$

Excepto para los parámetros σ_j , $L(x,y)$ es precisamente la suma de todos los errores de las distancias al cuadrado. El parámetro σ_j puede usarse para incrementar o disminuir el efecto de una línea particular; si la línea 2 es conocida será una medida exacta y σ_2 será más pequeña que las otras. Igualando las dos derivadas parciales con respecto a x e y , a cero, se puede demostrar que el punto de minimización (x,y) , es:

$$\frac{\partial [L(x,y)]}{\partial x} = \frac{\partial \left[\sum_{j=1}^n (X \operatorname{sen} \theta_j - y \operatorname{cos} \theta_j + d_j)^2 / \sigma_j^2 \right]}{\partial y} = 0$$

$$\sum_{j=1}^n 2 (x \operatorname{sen} \theta_j - y \operatorname{cos} \theta_j + d_j) (\operatorname{sen} \theta_j) / \sigma_j^2 = 0$$

Dividiendo todo por 2 y efectuando el producto:

$$\sum_{j=1}^n (x \operatorname{sen}^2 \theta_j - y \operatorname{sen} \theta_j \operatorname{cos} \theta_j + d_j \operatorname{sen} \theta_j) / \sigma_j^2 = 0$$

Desarrollando esta expresión, se obtiene:

$$x \sum_{j=1}^n \operatorname{sen}^2 \theta_j / \sigma_j^2 - y \sum_{j=1}^n \operatorname{sen} \theta_j \operatorname{cos} \theta_j / \sigma_j^2 = - \sum_{j=1}^n d_j \operatorname{sen} \theta_j / \sigma_j^2 \quad (\text{EC. A})$$

De igual forma, se efectúa la derivada parcial con respecto a y , y se iguala a cero.

$$\frac{\partial [L(x, y)]}{\partial x} = \frac{\partial \left[\sum_{j=1}^n (x \operatorname{sen} \theta_j - y \operatorname{cos} \theta_j + d_j)^2 / \sigma_j^2 \right]}{\partial y} = 0$$

$$\sum_{j=1}^n 2 (x \operatorname{sen} \theta_j - y \operatorname{cos} \theta_j + d_j) (-\operatorname{cos} \theta_j) / \sigma_j^2 = 0$$

Dividiendo todo por 2 y efectuando el producto:

$$\sum_{j=1}^n (-x \operatorname{sen} \theta_j \operatorname{cos} \theta_j + y \operatorname{cos}^2 \theta_j - d_j \operatorname{cos} \theta_j) / \sigma_j^2 = 0$$

La cual se puede expresar de la siguiente manera:

$$-x \sum_{j=1}^n \operatorname{sen} \theta_j \operatorname{cos} \theta_j / \sigma_j^2 + y \sum_{j=1}^n \operatorname{cos}^2 \theta_j / \sigma_j^2 = \sum_{j=1}^n d_j \operatorname{cos} \theta_j / \sigma_j^2$$

(ECUACION B)

La solución de las ecuaciones A y B, equivale a resolver, el sistema de ecuaciones:

$$ax + hy = f$$

$$hy + by = g$$

donde,

$$a = \sum_{j=1}^n \operatorname{sen}^2 \theta_j / \sigma_j^2$$

$$b = \sum_{j=1}^n \operatorname{cos}^2 \theta_j / \sigma_j^2$$

$$h = - \sum_{j=1}^n \operatorname{sen} \theta_j \operatorname{cos} \theta_j / \sigma_j^2 \tag{9.2}$$

$$f = - \sum_{j=1}^n d_j \operatorname{sen} \theta_j / \sigma_j^2$$

$$g = \sum_{j=1}^n d_j \cos \theta_j / \sigma_j^2$$

Es importante hacer notar que las cinco constantes a , b , h , f y g que están involucradas en el par de ecuaciones simultáneas para (x,y) son todas sumatorias. Cuando se quiere agregar nuevas líneas de marcación, deben actualizarse los cinco números y no deben calcularse en base a los valores iniciales otra vez. El punto (x,y) puede considerarse el que tiene la mayor probabilidad de la posición del blanco. La figura 9-2 nos da una interpretación de esta probabilidad.

9.3. ERROR ELIPTICO NORMAL.

Sea (x,y) la posición actual del blanco, suponiendo que se tiene una función de densidad bidimensional que se encuentra en un plano a priori sobre una gran área y además inicialmente no se tiene ni la remota idea de la posición del blanco. Suponemos que la línea a través de (x,y) , en la dirección de θ_j se desplaza de la j -ésima línea de marcación, con error normal con media cero y variancia σ_j^2 , siendo todos los errores de las n líneas de marcación independientes. Entonces, la función de densidad de (x,y) , nos da la información de las n líneas de marcación. Esta función es normal con media (x,y) y matriz de covariancia inversa:

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} a & h \\ h & b \end{bmatrix}$$

siendo x , y , a , b y h las mismas de la ecuación (9.2). Esto es consecuencia del Teorema de Bayes y nos da una interpretación de a , b y h las cuales evidentemente influyen en la estimación de (x,y) . Esta relación se ve más claramente en un sistema de coordenadas rotado, relativo a un sistema de coordenadas con origen en (x,y) con variancias

S_1^2 y S_2^2 en las direcciones rotadas x e y , siendo independientes las dos

componentes nos proporcionan las n líneas de marcación. Las fórmulas para

θ , S_1^2 y S_2^2 , son:

$$S_1^2 = \left\{ \left(\frac{a+b}{2} \right) - \sqrt{\left(\frac{a-b}{2} \right)^2 + h^2} \right\}^{-1}$$

$$S_2^2 = \left\{ \left(\frac{a+b}{2} \right) + \sqrt{\left(\frac{a-b}{2} \right)^2 + h^2} \right\}^{-1}$$

(9.3)

$$\theta = \begin{cases} \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2h}{a-b} \right), & \text{si } a < b \\ \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2h}{a-b} \right) + \frac{\pi}{2}, & \text{si } a > b \\ \frac{\pi}{4}, & \text{si } a=b \text{ y } h < 0 \\ -\frac{\pi}{4}, & \text{si } a=b \text{ y } h > 0 \\ \text{arbitrariamente,} & \text{si } a=b \text{ y } h=0 \end{cases}$$

Observe que si $S_1 \geq S_2$, en todos los casos, así que la dirección rotada del eje mayor x , es la familia de elipses con igual probabilidad.

POR EJEMPLO:

Suponga que $n=3$, con:

$$\begin{aligned} (\theta_1, d_1) &= (\pi/4, 3) \\ (\theta_2, d_2) &= (0, 3) \\ (\theta_3, d_3) &= (\pi, -1) \end{aligned}$$

Como se muestra en la figura 9-4. Además, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1$. Entonces de (9.2),

calculamos:

$$\begin{aligned} a &= \sum_{j=1}^n \text{sen}^2 \theta_j / \sigma_j^2 = \sum_{j=1}^3 \text{sen}^2 \theta_j / \sigma_j^2 \\ &= \text{sen}^2 \theta_1 / \sigma_1^2 + \text{sen}^2 \theta_2 / \sigma_2^2 + \text{sen}^2 \theta_3 / \sigma_3^2 \\ &= \text{sen}^2(\pi/4) / 1^2 + \text{sen}^2(0) / 1^2 + \text{sen}^2(\pi) / 1^2 = 0.5 \end{aligned}$$

$$b = \sum_{j=1}^n \cos^2 \theta_j / \sigma_j^2 = \sum_{j=1}^3 \cos^2 \theta_j / \sigma_j^2$$

$$= \cos^2 \theta_1 / \sigma_1^2 + \cos^2 \theta_2 / \sigma_2^2 + \cos^2 \theta_3 / \sigma_3^2$$

$$= \cos^2(\pi/4) / 1^2 + \cos^2(0) / 1^2 + \cos^2(\pi) / 1^2 = 0.5 + 1 + 1 = 2.5$$

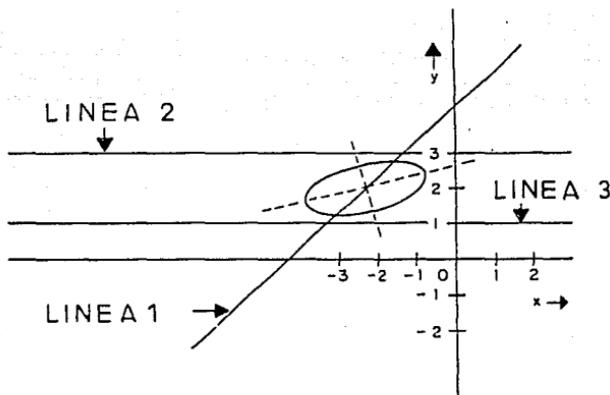


FIGURA 9-4. LOCALIZACION CON TRES MARCACIONES.

$$h = - \sum_{j=1}^n \text{sen } \theta_j \cos \theta_j / \sigma_j^2 = - \sum_{j=1}^3 \text{sen } \theta_j \cos \theta_j / \sigma_j^2 = -0.5$$

$$f = - \sum_{j=1}^n d_j \text{sen } \theta_j / \sigma_j^2 = - \sum_{j=1}^3 d_j \text{sen } \theta_j / \sigma_j^2 = -2.12$$

$$g = \sum_{j=1}^n d_j \cos \theta_j / \sigma_j^2 = \sum_{j=1}^3 d_j \cos \theta_j / \sigma_j^2 = 6.12$$

L u e g o , $S_1^2 = 2.6178$, por consiguiente $S_1 = \sqrt{2.6178} = 1.62$.

$S_2^2 = 0.3819$, de donde $S_2 = \sqrt{0.3819} = 0.62$. Resolviendo el par de ecuaciones simultáneas siguiente, por determinantes:

$$ax + hy = f$$

$$hx + by = g$$

Obtenemos:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} f & h \\ g & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix}} = \frac{fb-hg}{ab-h^2} = -2.24$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a & f \\ h & g \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix}} = \frac{ag-hf}{ab-h^2} = 2.00$$

Puesto que en este caso $a < b$, calculamos θ de la expresión:

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{2h}{a-b}\right) = 13.3 \text{ grados.}$$

Resumiendo:

$$a = 0.5$$

$$b = 2.5$$

$$h = -0.5$$

$$f = -2.12$$

$$g = 6.12$$

$$x = -2.24$$

$$y = 2.00$$

$$S_1 = 1.62$$

$$S_2 = 0.62$$

$$\theta = 13.3 \text{ grados}$$

Las líneas discontinuas de la figura 9-4 se intersectan en $(x,y) = (-2.24, 2.00)$ y el eje mayor de la elipse está inclinado en $\theta = 13.3$ grados. La elipse mostrada, es una elipse del tipo uno-sigma, donde el mayor diámetro medio es S_1 y el menor diámetro medio es S_2 . Por la integración de las dos funciones bidimensionales de densidades normales, se puede demostrar (ver fórmula 8.11) que una elipse k-sigma contiene el blanco con probabilidad $P = 1 - \exp(-K^2/2)$. Cuando $K = 1$, $P = 0.393$, así la elipse mostrada en la figura

9-4, contiene al blanco con probabilidad de 0.393. Es más convencional dibujar una elipse 2-sigma (donde todas las dimensiones se duplican), en cuyo caso la probabilidad de contener el blanco es 0.865. No importa de que tamaño sea la elipse, siempre existe la probabilidad de que el blanco quede fuera de ella; la elipse es simplemente una forma gráfica convencional para relacionar los cinco parámetros (a, b, h, f, g) ó (x, y, θ , S_1 , S_2) que caracterizan a la distribución normal bidimensional. El área dentro de una elipse K-sigma es:

$$A = \pi K^2 S_1 S_2$$

Si resolvemos para K_2 y sustituímos dentro de la expresión para P, obtenemos:

$$P = 1 - e^{-\left(\frac{A}{2\pi S_1 S_2}\right)} \quad (9.4)$$

La fórmula (9.4) es idéntica a la fórmula (8.12). El producto $S_1 S_2$ es exactamente:

$1/\sqrt{ab-h^2}$, y puede calcularse directamente usando:

$$ab - h^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \text{sen}^2 (\theta_i - \theta_j) / (\sigma_i^2 \sigma_j^2) \quad (9.5)$$

La cantidad σ_j ha sido definida como la desviación estándar de la línea de marcación a lo largo de θ_j . En la práctica, θ_j es una medida aleatoria y la línea de marcación efectuada por el explorador se considera como la única medida verdadera. Sea W_j la desviación estándar de error angular cometido por el j-ésimo observador en radianes y r_j el alcance aproximado del j-ésimo observador al blanco. Entonces, los cálculos anteriores son aproximados si $\sigma_j = W_j r_j$, siendo W_j un valor mínimo en grados. Si alguno de los números W_j son grandes, la función de densidad de (x,y) no es normal y no se pueden aplicar los cálculos anteriores. El origen de las coordenadas es arbitrario en todos los cálculos anteriores, pero por razones numéricas se recomienda colocar el origen donde se crea que se encuentra el blanco, de otra manera, los valores de W_j serán muy grandes. En resumen, podemos decir que toda la información de las n líneas de marcación se

reduce a cinco parámetros. Estos números como se ha visto son: a , b , h , f , g y facilitan los cálculos, ya que cada parámetro es una simple suma. Los cinco números se interpretan más fácilmente si se hace la conversión a: x , y , θ , S_1 , S_2 , respectivamente cuya elipse se bosqueja con cierta incertidumbre.

9.4. DERROTA.

Si se sabe que el blanco es estacionario, entonces hay diferencia entre la derrota del blanco y su posición. El valor estimado de la posición del blanco es independiente del orden en el cual se hicieron las diferentes medidas y el intervalo de tiempo entre dichas medidas no es de interés para el análisis. Sin embargo, el problema cambia si se presenta una componente, que no se había considerado respecto al movimiento del blanco. Intuitivamente, las medidas más recientes tienen mayor peso que las primeras medidas. La forma más pura de aleatoriedad en un movimiento continuo es el movimiento Browniano o de difusión. Tal movimiento se caracteriza por una difusión constante D que tiene dimensiones de área por tiempo unitario. En cualquier intervalo de tiempo de longitud t , el blanco que se mueve en dos dimensiones sufre un cambio en su posición que es independiente de todas las posiciones anteriores y cada componente de este movimiento es independiente y se distribuye como una normal con media cero y variancia Dt . La ventaja analítica es considerar que la posición del blanco antes de cambiar de posición es normal. Más exactamente, si Σ y Σ' son las matrices de covariancia de la posición del blanco antes y después de cambiar de posición, entonces:

$$\Sigma' = \Sigma + Dt I \quad (9.6)$$

Por ejemplo, el efecto del cambio de posición es agregar Dt a los elementos de la diagonal de Σ . Gráficamente, al ir transcurriendo el tiempo, tiene el efecto de ampliar y redondear cualquier error elíptico dado, sin que cambie el centro u orientación. Puesto que las LDM se calculan más fácilmente por medio de los valores de a , b , h , f , g del sistema, es necesario mostrar ahora como se obtienen las cantidades principales (después del incremento), a partir de las cantidades no principales. Debido a que:

$$\left(\sum \right)^{-1} = \begin{bmatrix} A' & h' \\ h' & b' \end{bmatrix}$$

Las tres primeras cantidades pueden obtenerse de (9.6). A partir de que tenemos $(x', y') = (x, y)$, es claro que de (9.2):

$$f' = a'x + h'y$$

$$g' = h'x + b'y$$

Por ejemplo, suponga que asociado a la figura (9-4), se tiene el siguiente dato $Dt = 2$. Primeramente tenemos: $(a, b, h) = (0.5, 2.5, -0.5)$, así:

$$\begin{bmatrix} a' & h' \\ h' & b' \end{bmatrix}^{-1} = \sum^{-1} = \sum + 2I = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 2.5 \end{bmatrix}^{-1} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.5 & 0.5 \\ 0.5 & 2.5 \end{bmatrix}$$

de donde :

$$(a', b', h') = -(0.227, 0.409, -0.045),$$

puesto que:

$$(x, y) = (-2.24, 2.00)$$

$$(f', g') = (-0.60, 0.92)$$

Los números principales corresponden a una elipse con la misma posición e inclinación como la de la figura (9-4), pero con:

$$S'_1 = \sqrt{S_1^2 + 2} = 2.15$$

$$S'_2 = \sqrt{S_2^2 + 2} = 1.54$$

Ahora debe obtenerse un nuevo (θ, d, σ) de la línea de marcación y tendremos

actualizado (a', b', h', f', g') agregando $\text{sen}^2 \theta / \sigma^2$ a a' , $\text{cos}^2 \theta / \sigma^2$ a b' , etc., en

la forma de (9.2). Estos números deben corresponder, sin embargo, a otra elipse y así sucesivamente se sigue el procedimiento. En todo momento la elipse reúne toda la información acerca de la posición del blanco. A medida que transcurre el tiempo aumenta el error elíptico.

CAPITULO 10

FALSA ALARMA Y BLANCO FALSO

BUSQUEDA OPTIMA ANTE LA PRESENCIA DE BLANCOS FALSOS.

En esta sección consideraremos problemas de distribución de esfuerzos del tipo vistos en la sección 7.2, excepto que la celda i ahora tiene δ_i blancos falsos en ella, en promedio.

Los blancos falsos se suponen como objetos físicos que deben ser clasificados inmediatamente en el momento en que se descubren, después del cual cada uno es marcado hasta que los repetidos exámenes de los mismos blancos ya no sean necesarios. En efecto, podemos definir un ancho de barrido equivalente.

El problema natural de optimización a considerar será maximizar la probabilidad de detección del blanco verdadero, antes de un tiempo previamente fijado. Declinamos a considerar este problema en tierra donde es más difícil de resolver. El descubrimiento de un blanco falso también nos proporciona información, pero no termina ahí la búsqueda. Por ejemplo, maximizaremos la probabilidad de detección sujeta a una restricción del tiempo promedio destinado a la búsqueda y a la clasificación de los blancos falsos, pero no se incluye el tiempo requerido para clasificar los blancos verdaderos. Esta clase de plan de búsqueda se le conoce con el nombre de no adaptable. Un plan no adaptable, es simplemente un vector $\underline{x} = (t_1, \dots, t_n)$, donde t_i es el tiempo destinado a la búsqueda en la celda i sin importar en cuantos blancos falsos se hayan descubierto ahí.

El tiempo total de búsqueda $t = \sum t_i$, es determinístico y la cantidad total del tiempo

destinado en el que se detectan blancos falsos, es aleatorio. Si el promedio de esta última cantidad es u , entonces \underline{x} debe ser tal que $t+u$ es una restricción. Dentro de la restricción: la probabilidad de detección del verdadero blanco será minimizada.

A continuación se definen los siguientes conceptos:

n = Número de celdas o regiones.

δ_i = Número de blancos falsos en promedio que se encuentran en celda i .

τ_i = Tiempo promedio de detección para un blanco falso que se halle en la celda i .

p_i = Probabilidad de que el blanco verdadero se encuentre en la celda i .

t_i = Tiempo invertido en la búsqueda en la celda i (positivo).

$b_i(t_i)$ = Probabilidad de detectar algún blanco en la celda i .

$f(\underline{X})$ = Probabilidad de detección = $\sum p_i b_i(t_i)$.

t = Tiempo total invertido en la búsqueda = $\sum t_i$

u = Tiempo promedio de detección de los blancos falsos = $\sum \delta_i \tau_i(t_i)$.

$g(\underline{X})$ = Tiempo promedio total. = $t + u$.

Nuestro objetivo es maximizar $f(\underline{X})$ sujeto a una restricción en $g(\underline{X})$. Con la intención de aplicar el teorema de Everett, maximizamos el lagrangiano $f(\underline{X}) - \lambda g(\underline{X})$ es equivalente al problema relativo de realizar n únicas maximizaciones de las variables; el desplazamiento de las celdas se corrige empleando el lagrangiano. Definimos a $t_i(\lambda)$,como sigue:

$$t_i(\lambda) \text{ MAXIMIZAR } p_i b_i(t_i) - \lambda(t_i + \delta_i \tau_i b_i(t_i)) \quad (10.1)$$

Sujeto a: $t_i \geq 0$.

El máximo valor de $t_i(\lambda)$ en 11.4 será un valor característico, pero no necesariamente el único y en cualquier caso puede ser tomado como una función finita decreciente de λ , para $\lambda > 0$. Sea $\underline{X}(\lambda) = [t_1(\lambda), \dots, t_n(\lambda)]$. El teorema de Everett establece que el máximo valor de $f(\underline{X})$, sujeto a la restricción $g(\underline{X}) \leq g(\underline{X}(\lambda))$, es $f(\underline{X}(\lambda))$. La maximización puede llevarse a cabo por la derivada parcial de la ecuación:

$$p_i b_i(t_i) - \lambda(t_i + \delta_i \tau_i b_i(t_i)) \quad (10.2)$$

Es igualándola a 0 y resolviendo para $t_i(\lambda)$, excepto para el caso en que $t_i(\lambda)$, es igual a cero, si los cálculos resultan negativos. Es decir, si consideramos la ecuación (10.2), tenemos:

$$F(\lambda) = p_i b_i(t_i) - \lambda(t_i + \delta_i \tau_i b_i(t_i))$$

donde:

$$b_i(t_i) = 1 - e^{-(\alpha_i t_i)}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= p_i \{1 - e^{-(\alpha_i t_i)}\} - \lambda \{t_i + \delta_i \tau_i [1 - e^{-(\alpha_i t_i)}]\} \\ &= p_i \{1 - e^{-(\alpha_i t_i)}\} - \lambda t_i - \lambda \delta_i \tau_i [1 - e^{-(\alpha_i t_i)}] \\ &= p_i - p_i e^{-(\alpha_i t_i)} - \lambda t_i - \lambda \delta_i \tau_i + \lambda \delta_i \tau_i e^{-(\alpha_i t_i)} \end{aligned}$$

Y obteniendo la derivada parcial de $F(\lambda)$ con respecto a t_i , e igualándola a cero, se tiene:

$$\frac{\partial F(\lambda)}{\partial t_i} = -\alpha_i [-p_i e^{-(\alpha_i t_i)}] - \lambda - \alpha_i [\lambda \delta_i \tau_i e^{-(\alpha_i t_i)}] = 0$$

$$\frac{\partial F(\lambda)}{\partial t_i} = \alpha_i p_i e^{-(\alpha_i t_i)} - \lambda - \alpha_i \lambda \delta_i \tau_i e^{-(\alpha_i t_i)} = 0$$

Despejando τ_i :

$$\lambda = e^{-(\alpha_i t_i)} [\alpha_i p_i - \alpha_i \lambda \delta_i \tau_i]$$

$$e^{-(\alpha_i t_i)} = \frac{\delta}{\alpha_i p_i - \alpha_i \lambda \delta_i \tau_i}$$

Haciendo positivo el exponencial, se tiene:

$$\frac{1}{e^{\alpha_i t_i}} = \frac{\lambda}{\alpha_i P_i - \alpha_i \lambda \delta_i \tau_i}$$

de donde:

$$e^{\alpha_i t_i} = \frac{\alpha_i P_i - \alpha_i \lambda \delta_i \tau_i}{\lambda} = \frac{\alpha_i P_i}{\lambda} - \alpha_i \delta_i \tau_i$$

Ahora bien, aplicando logaritmos naturales en ambos miembros:

$$\alpha_i t_i = \text{Ln} \left\{ \frac{\alpha_i P_i}{\lambda} - \alpha_i \delta_i \tau_i \right\}^+ \quad (10.3)$$

El superíndice + significa que siempre $t_i(\lambda) \geq 0$.

EJEMPLO:

$$P_i = (P_1, P_2, P_3) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

$$\delta_i = (\delta_1, \delta_2, \delta_3) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 2 \right)$$

$$\tau_i = (\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1 \right)$$

$$\alpha_i = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 2, 3)$$

$$\text{siendo } b_i(t_i) = 1 - e^{\alpha_i t_i}$$

INICIO DE LOS CALCULOS:

Se considera una λ_1 inicial. En este caso consideraremos que $\lambda_1 = 0.01$.

$$t_1(\lambda_1) = \left\{ \frac{1}{\alpha_1} \text{Ln} \left(\frac{\alpha_1 P_1}{\lambda_1} - \alpha_1 \delta_1 \tau_1 \right) \right\} = 3.47.$$

$$t_2(\lambda_1) = \left\{ \frac{1}{\alpha_2} \text{Ln} \left(\frac{\alpha_2 P_2}{\lambda_1} - \alpha_2 \delta_2 \tau_2 \right) \right\} = 2.09$$

$$t_3(\lambda_1) = \left\{ \frac{1}{\alpha_3} \text{Ln} \left(\frac{\alpha_3 P_3}{\lambda_1} - \alpha_3 \delta_3 \tau_3 \right) \right\} = 1.52$$

Entonces, el tiempo total invertido en la búsqueda, es:

$$t = \sum_{i=1}^3 t_i = t_1 + t_2 + t_3 = 3.47 + 2.09 + 1.52 = 7.08$$

El tiempo promedio de detección de blancos falsos:

$$u = \sum_{i=1}^3 \delta_i \tau_i b_i(t_i) = \sum_{i=1}^3 \delta_i \tau_i [1 - e^{-(\alpha_i t_i)}] = 0.97 + 0.98 + 1.98 = 3.93$$

Ahora calculamos la probabilidad de detección $f(X)$:

$$f(X) = \sum_{i=1}^3 p_i b_i(t_i) = \sum_{i=1}^3 p_i [1 - e^{-(\alpha_i t_i)}] = 0.32 + 0.33 + 0.33 = 0.98$$

$$g(X) = t + u = 7.08 + 3.93 = 11.01$$

El siguiente paso es suponer un nuevo valor de lambda (por ejemplo, $\lambda_2 = 0.1$) y se efectúan los mismos cálculos. Se continua probando sucesivamente con distintos valores de lambda hasta completar el cuadro a continuación:

λ	t_1	t_2	t_3	t	u	$f(X)$
0.01	3.47	2.09	1.52	7.08	3.93	0.98
0.1	0.85	0.87	0.69	2.41	3.14	0.47
0.2	0.00	0.42	0.37	0.79	1.90	0.41
0.3	0.00	0.10	0.10	0.20	0.68	0.21
0.3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

DISTRIBUCION DE ESFUERZOS Y PROBABILIDADES DE DETECCION PARA
DISTINTOS LAMBDA.

En el cuarto renglón del cuadro anterior podemos ver , que se tienen $0.20 + 0.68 = 0.88$ unidades de tiempo disponibles para la búsqueda y clasificación de blancos falsos, si se desea un plan de búsqueda no-adaptable es ignorar la primera celda y buscar con 0.10 unidades de tiempo en cada una de las otras celdas. En promedio se requieren 0.68 unidades de tiempo para clasificar todos los blancos falsos encontrados y la probabilidad de detección de blancos verdaderos es 0.21. Observe que probabilidades de detección mayores requieren de un tiempo mayor de búsqueda, pero este tiempo nunca es mayor a:

$$\sum \delta_i \tau_i = \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{2}{3}\right) + (2) (1) = 4$$

tiempo unitario para cualquier λ

EL PROCESO DE LA PLANEACION DE LA BUSQUEDA: ENFOQUES ACTUALES Y PROBLEMAS EXISTENTES

Este documento proporciona un enfoque a la planeación de la búsqueda, en el cuál el planeador combina métodos subjetivos y objetivos y genera planes que relacionan la optimización teórica y la factibilidad operacional.

Como se concibió originalmente, la investigación de operaciones intentó aplicar los principios científicos a los problemas operativos. En los Estados Unidos, la primera aplicación en la Investigación de Operaciones se realizó en Operaciones Navales durante la Segunda Guerra Mundial. El reporte elaborado por Morse y Kimball [1946], documenta varias de las técnicas desarrolladas por el grupo de Investigación de Operaciones de la Armada de los Estados Unidos durante la Segunda Guerra Mundial. El análisis de operaciones de búsqueda fué objeto de un esfuerzo intensivo por parte de este grupo cuyos resultados aparecieron en la publicación, llamada "Búsquedas y Cortinas" por B.O. Koopman [1946], el cual escribió una versión extensa y actualizada de este reporte (Koopman [1980]).

Las operaciones de búsqueda son todavía una parte extensa de las operaciones navales. Las operaciones de búsqueda y rescate marítimo son unas de las mayores responsabilidades de la Guardia Costera de los Estados Unidos. La Fuerza Aérea tiene la responsabilidad de coordinar la BUSQUEDA y rescate en tierra para aviones que cayeron y para encontrar y seguir satélites espaciales. Las técnicas de la teoría de búsqueda han sido aplicadas a problemas de pesca (Paloheimo [1971], Mangel y Clark [1982]), análisis de patrullaje policiaco (Larson [1972]), exploración petrolera (Allais [1957], Cozzolino [1972], Harbaugh y otros [1977]), selección de pacientes (Gorry y otros [1973]). Las búsquedas son planeadas y ejecutadas diariamente.

El propósito de este documento es presentar un enfoque a la planeación de la búsqueda. Nos proponemos hacer esto para llevar al lector paso a paso a través de las tareas que comprenden la planeación y análisis de un problema de búsqueda. En el proceso, estableceremos principios que proporcionan una guía para dar cumplimiento a estas tareas y luego ilustrar estos principios con ejemplos.

Este enfoque abarca tanto métodos objetivos como subjetivos y proporciona las bases para balancear los planes óptimos teóricos con los factibles desde el punto de vista operacional. Bajo este enfoque, el análisis proporciona el marco de trabajo en el cual se elaboran las recomendaciones para la búsqueda.

Las técnicas de planeación de búsqueda que se tratan en este documento se basan en el trabajo de Koopman [1946], pero van más allá, ya que representan un desarrollo considerable de trabajo, particularmente en el uso de computadoras para la planeación de la búsqueda. Estas técnicas se han desarrollado en el transcurso de muchos años de operaciones de búsqueda incluyendo la búsqueda de la bomba H (1966), perdida cerca de Palomares, España; la búsqueda del submarino nuclear de los Estados Unidos, el Escorpión en 1968 (Richardson y Stone [1971]); el desarrollo del sistema de planeación de búsqueda auxiliado por computadora (CASP) para la Guardia Costera de los Estados Unidos (Richardson y Discenza [1980]); la limpieza de explosivos del Canal de Suez en 1974 (Richardson y otros [1975]), así como numerosas operaciones submarinas de búsqueda para la Armada de los Estados Unidos. Como resultado de la búsqueda del Escorpión, Richardson y otros [1971], prepararon un manual para el análisis de operaciones de búsqueda en el fondo marino para la Armada de los Estados Unidos.

1. PERFIL DE LAS TAREAS DE LA INVESTIGACION DE OPERACIONES.

La primera tarea para el analista es el de identificar el tipo de problema de búsqueda. ¿Es la meta la detección, la vigilancia o la exploración?. A fin de ser más específicos, deberemos considerar una búsqueda para detectar. Esta es el tipo de búsqueda mas común y de la que más sabemos.

Las tareas del analista son las siguientes:

1. Calcular una distribución probabilística previa de la ubicación del objetivo (y su movimiento).
2. Obtener una buena estimación de capacidades de los sensores.
3. Determinar una función de detección.
4. Desarrollar un plan de búsqueda y estimar su probabilidad de éxito.
5. Actualización para la retroalimentación de la búsqueda.
6. Estimar la efectividad de la búsqueda.

2. DISTRIBUCION PREVIA DE LA UBICACION DE UN OBJETIVO.

El obtener la distribución previa requiere de evaluaciones objetivas y subjetivas. Primero las guías y posibles explicaciones para la ubicación del objetivo están agrupadas en escenarios, cada uno de los cuales es lógicamente consistente por sí mismo y proporciona una descripción probabilística de la localización del objetivo. El planeador de la búsqueda debe cuantificar las incertidumbres en cada escenario. Algunas veces esto se puede hacer usando datos estadísticos o por el conocimiento del diseño del sistema que proporciona la información de la ubicación. Por ejemplo, si se reporta una posición en el mar por medio de LORAN, entonces examinando las inexactitudes en el sistema LORAN para esa ubicación se determinará un error de distribución para la posición reportada. Si esto no puede hacerse objetivamente,

entonces tendrá que hacerse subjetivamente hablando con la gente familiarizada con el sistema de que se trata y pidiendo sus opiniones. Un ejemplo de esto último puede ocurrir cuando un pesquero sin equipo de navegación está en problemas y reporta su mejor posición estimada. Uno puede preguntar a otro pesquero que opera en la misma área como determinan estos su posición: ¿ Hay marcas en tierra o boyas que se usan para la navegación ?, ¿ Que tan bien pueden ellos estimar su posición ?. Basado en toda esta información, el planeador de la búsqueda estimaría la incertidumbre de la posición y la incorporación dentro de una distribución de probabilidades para la ubicación del objetivo.

Cuando hay escenarios múltiples, uno debe asignar probabilidades o créditos a cada escenario. Aunque cada escenario corresponde a una distribución de probabilidad, la distribución resultante de la ubicación del blanco es una mezcla ponderada de los escenarios por las probabilidades de cada escenario. Las probabilidades del escenario son normalmente determinadas subjetivamente y la Guardia Costera recomienda que los escenarios y las ponderaciones sean determinadas en grupo y no por una sola persona (Richardson y Discenza). Estos sugieren que los miembros del grupo deberían de considerar todos los escenarios posibles y enfatizan que ninguno deberá descartarse completamente. Después de que todos los escenarios se han listado, cada miembro del grupo deberá asignar sus ponderaciones subjetivas de probabilidad independientemente de los otros miembros del grupo. Las ponderaciones resultantes son luego comparadas y las ponderaciones finales se determinan por promedio o por consenso.

El proceso de diseñar rápidamente una distribución de probabilidades va más allá de un método científico directo o analítico. En lugar de esto, es una mezcla de insumos objetivos y subjetivos cuantificados. Uno no puede decir si el resultado es el correcto o el incorrecto en el sentido científico tradicional. Sin embargo, la distribución resultante proporciona el fundamento para la planeación racional basado en la mejor comprensión del planeador de la búsqueda, tanto subjetivamente como objetivamente

del problema. Además, no hay ningún buen sustituto para este enfoque objetivo/subjetivo. El no tomar en cuenta la información subjetiva significa desperdiciar valiosa información porque no hay ninguna manera singular o científica de cuantificarla.

Un ejemplo ayudará para ilustrar este punto. Un barco en problemas reporta su posición y se inicia una búsqueda. Una avioneta que oyó sobre la búsqueda reporta el haber visto el mismo barco 100 millas más lejos de la posición reportada 1 hora después de reportado el problema. La diferencia de 100 millas no puede ser ocasionada por el movimiento del barco o el error nominal en la navegación, ya sea del barco o del avión. ¿Vió el avión al barco en cuestión o a otro?. ¿Reportó el barco su posición correctamente?. ¿Estaba funcionando mal el equipo de navegación?. Obviamente, sería imprudente el descartar cualquier pieza de la información (esto es, un escenario). En su lugar, el planeador de la búsqueda debe elaborar estimaciones subjetivas de la confianza relativa de las dos posiciones y formar escenarios ponderados en conformidad. Es importante el comprender, que el descartar una de las piezas de información está en efecto haciendo que un juicio subjetivo sea de cero y el otro de uno.

EJEMPLO:

Ahora se presenta un ejemplo de como se produce una distribución de probabilidades para un escenario.

Considérese un caso donde un barco al garete reporta su posición estimada como: 30 ° N, 130 ° W . Revisando el Manual Nacional de Búsqueda y Rescate (de la Guardia Costera de los Estados Unidos), uno encuentra que el sistema de navegación del barco tiene un Probable Error Circular (PEC) de 10 millas. Esto corresponde a una

distribución normal circular del error con desviación estándar = 8.5 millas en cualquier dirección. En este caso, la distribución inicial de la posición es una circular normal con media en la posición reportada.

Suponga que se creó que el barco se encuentra a la deriva y que no se reciben reportes adicionales de su posición. Consultando los archivos de la Guardia Costera de los Estados Unidos sobre la corriente y el viento, se puede obtener la media de la corriente marítima y la dirección del viento para la ubicación del barco junto con distribuciones de la variación de la media. El movimiento del barco es una combinación de su deriva debida a la corriente marítima total (geostrófica, más la corriente producida por viento) y el movimiento debido al viento y su efecto sobre el francobordo del barco. Supóngase que, bajo una aproximación razonable, el efecto del viento y el total de la corriente tienen una distribución normal bidimensional. (Esto es frecuente, pero no siempre verdadero). La velocidad resultante es la suma de dos variables aleatorias distribuidas normalmente y de aquí que sea normal. Supóngase que la distribución resultante tiene:

- * Velocidad media de 2 nudos, con desviación estándar de un nudo.
- * Rumbo medio 180° con desviación estándar de 20° .

Para obtener la distribución de probabilidades de la ubicación del blanco en el tiempo T , después de haberse reportado la posición, modelamos cada componente de la velocidad del blanco como un proceso estacionario Gauss Markov con autocorrelación $\rho(t) = e^{-\lambda t}$ para $t \geq 0$. Este proceso es también llamado el proceso Ornstein-Uhlenbeck (ver Feller [1971]). La autocorrelación refleja el hecho de que las corrientes marítimas cambian con el tiempo, pero estos cambios no son completamente independientes del pasado. Para completar la descripción del proceso,

especificamos que λ , es el parámetro que controla la velocidad a la cual las corrientes marítimas se separan o se hacen independientes. Elegimos $\lambda = 1/4$ de hora. El proceso estocástico que describe la posición del blanco se obtiene integrando las velocidades aleatorias del proceso Ornstein-Uhlenbeck. El proceso resultante se llama proceso Integrado Ornstein-Uhlenbeck o OUI. Se puede usar el método descrito en Richardson [1979] para calcular la distribución de probabilidades de este proceso y la posición del blanco al tiempo T.

Suponemos que la búsqueda se inicia 10 horas después de que se reportó la última posición. La figura 1 representa la distribución del blanco en el tiempo en que se reportó su última posición y la figura 2, muestra la distribución en el tiempo en que se inicia la búsqueda. Para propósitos gráficos estas distribuciones son representadas por elipses centradas en la media de la distribución y orientada a lo largo de los ejes mayor y menor de la distribución. Estas elipses son contornos de igual densidad de probabilidad y contienen un 86% de la masa de la probabilidad. Los números del 1 al 9 indican las densidades relativas de la probabilidad. El asterisco (*), indica la celda con la densidad más alta. En muchas operaciones de búsqueda, uno despliega la distribución de la ubicación del blanco especificando una cuadrícula de celdas y calculando la probabilidad de que el blanco esté en cada celda de la cuadrícula.

Este ejemplo demuestra los pasos básicos para desarrollar una distribución de probabilidades para cada escenario, es decir:

- i) Especificar la distribución inicial del objetivo.
- ii) Especificar un modelo de movimiento del objetivo, y
- iii) Actualizar la distribución de la ubicación al tiempo de la Búsqueda.

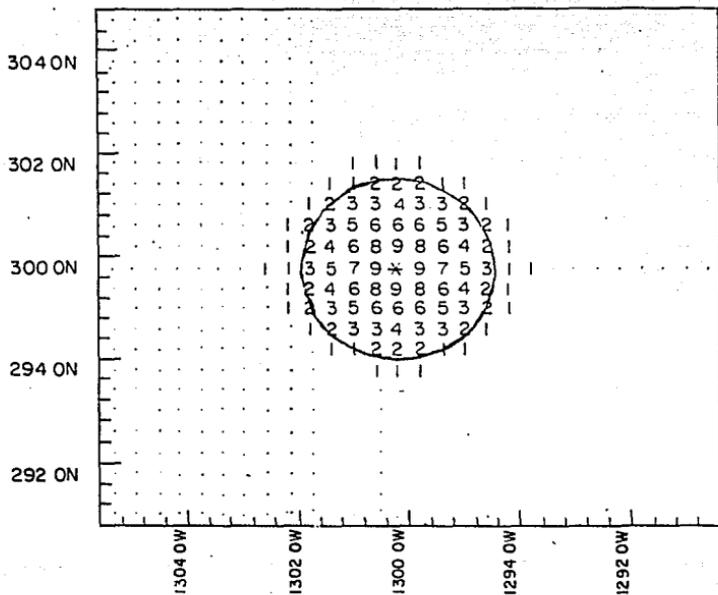


FIGURA 1. MAPA DE LA POSICION DEL BLANCO EN EL TIEMPO INICIAL DEL PROBLEMA.

METODOS MONTE-CARLO.

En el ejemplo anterior, obtuvimos la distribución del objetivo por métodos puramente analíticos. Las distribuciones para problemas más complicados son usualmente derivados por los métodos Monte-Carlo ejemplificados por los utilizados por el sistema CASP de la Guardia Costera (Richardson y Discenza).

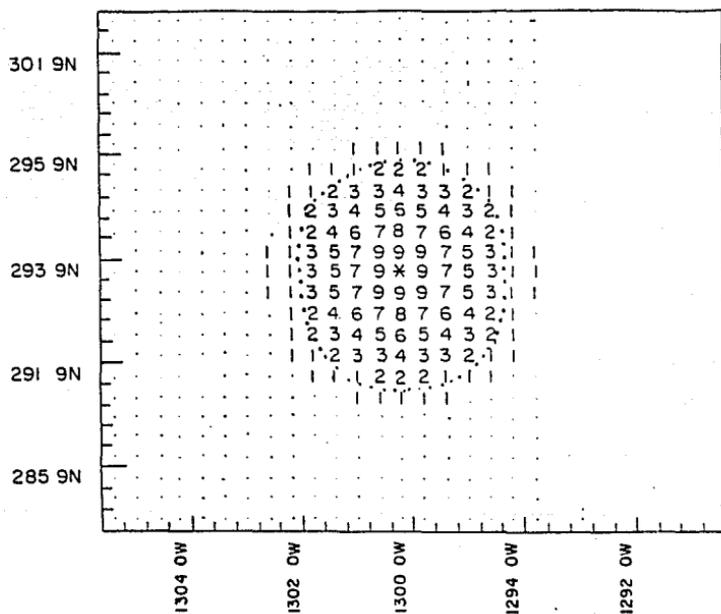


FIGURA 2.

MAPA DE LA POSICION DEL BLANCO AL INICIO DE LA BÚSQUEDA (T = 10 HORAS).

El sistema CASP desarrolla las distribuciones de probabilidad usando un enfoque de multiescenarios. Los escenarios pueden ser escogidos de entre tres tipos. Dentro de cada tipo, el escenario es determinado especificando los valores de los parámetros requeridos para ese escenario. Los escenarios pueden ser ponderados y combinados para producir el mapa de probabilidades final.

Sistemas como el CASP, típicamente generan un gran número de puntos del blanco (por ejemplo, 10,000). La distribución del blanco se representa por J puntos y el j -ésimo punto del blanco es el vector.

$$(X_j, Y_j, U_j, V_j, T_j, w_j, n_j)$$

donde:

X_j = Latitud del punto j .

Y_j = Longitud del punto j .

U_j = Velocidad Norte-Sur del punto j .

V_j = Velocidad Este-Oeste del punto j .

T_j = Tiempo asociado con la posición (X_j, Y_j) y la velocidad

(U_j, V_j)

w_j = Peso o probabilidad de que el punto j represente la posición real del blanco.

n_j = Escenario del cual se toma el punto j .

Cada punto representa una posible posición del blanco. Si hay N escenarios y el n -ésimo escenario tiene probabilidad q_n donde la suma de las q 's es igual a 1, es decir:

$$\sum_{n=1}^N q_n = 1$$

entonces $q_n J$ puntos se toman del escenario n . La posición inicial de estos puntos se generan a la moda del Método Montecarlo de la distribución de la posición inicial del blanco para el escenario n . Cuando las posiciones de estos puntos se actualizan debido al movimiento, sus velocidades se escogen de la distribución del movimiento del blanco para el escenario n . Inicialmente $w_j = 1/J$ para $j = 1, \dots, J$. Los pesos son modificados para búsquedas sin éxito en la forma descrita en la Sección 6.

Para obtener un mapa de probabilidades al tiempo T , los métodos mueven el blanco a la posición que ocupa a dicho tiempo y modifican sus pesos para sopesar las búsquedas sin éxito. Se elige una cuadrícula de celdas. Para cada celda los pesos de los puntos que caen en dicha celda se suman para obtener la probabilidad de que el blanco esté en dicha celda.

AREAS PROBLEMATICAS.

Una de las mayores dificultades para generar mapas de probabilidad previa es la falta de técnicas sistemáticas y probadas para recabar información subjetiva para los escenarios de búsqueda. Varios investigadores han estudiado métodos para recabar dichas probabilidades. Sin embargo, su trabajo no ha sido aplicado a problemas de

búsqueda. Además para obtener probabilidades subjetivas, tenemos también el problema de obtener estimaciones subjetivas de incertidumbre, tiempos y otras informaciones cuantitativas necesarias para formar los escenarios. Por ejemplo, ¿ tienden los pescadores a sobrestimar o subestimar la precisión de su navegación, y de ser así por cuanto ?.

Muchos sistemas computarizados de planeamiento de la búsqueda desarrollan mapas de probabilidad usando la simulación Monte Carlo. Existe evidencia (Weisinger [1978]) de que el suavizamiento para reducir el ruido en el muestreo Monte Carlo mejoraría el planeamiento de la búsqueda basado en los mapas, pero no ha sido desarrollado un método de suavizamiento consistente y satisfactorio.

Existen numerosos problemas relacionados al modelaje del movimiento del blanco, aún para problemas de búsqueda comunes tales como los problemas de búsqueda y rescate de la Guardia Costera Americana. Uno de los mayores obstáculos es la obtención de un modelo que tome en cuenta las variaciones en espacio y tiempo de las corrientes oceánicas. El modelo usado para generar el modelo anterior es esencialmente el de un campo gaussiano aleatorio con una función estacionaria de autocorrelación. Sin embargo, este modelo no ha sido probado debido a la escasez de información. No tenemos buenas estimaciones de los parámetros tales como: la velocidad de relajación λ , ni siquiera sabemos si este es un modelo razonable.

Enfrentamos un problema similar en el desarrollo de modelos de movimientos de los submarinos en búsquedas navales. La respuesta a estos problemas es recolectar y analizar la información necesaria para desarrollar y probar los modelos, sin embargo, ésta área no a generado mucha investigación.

3. ESTIMANDO LA CAPACIDAD DE LOS SENSORES.

El mapa de probabilidad identifica la localización de las celdas de más alta probabilidad. La primera reacción natural es buscar en la celda con más alta probabilidad. Esto es frecuentemente (pero no siempre) razonable. Aún cuando es una buena estrategia empezar la búsqueda en la celda con la más alta probabilidad, un plan de búsqueda debe determinar que tanto tiempo se ha de buscar en dicha celda, en cual celda buscar enseguida y por cuanto tiempo y así sucesivamente. Idealmente, el plan escogido debería maximizar la probabilidad de detección dentro de los límites de los recursos asignados a la búsqueda. Para desarrollar un plan de búsqueda debemos tener primero, una estimación de la capacidad de nuestros sensores.

Para problemas de búsqueda, caracterizamos al sensor por su función de alcance lateral. Siguiendo a Koopman, consideramos a un sensor de búsqueda que se aproxima a un blanco estacionario a velocidad constante a lo largo de una línea recta como se muestra en la figura 3. Suponemos que su derrota empieza bastante más lejos que el alcance máximo de detección y continúa más allá del blanco a un punto bastante más alejado que su alcance máximo de detección. Definimos el alcance lateral del sensor como su alcance r , en el punto de máximo acercamiento al blanco y tomamos éste como una cantidad positiva o negativa, indicando los valores negativos que el blanco está a la izquierda de la derrota del sensor. Sea:

$\alpha(r)$ = Probabilidad de detectar al blanco cuando la derrota del sensor tiene alcance lateral r .

Entonces α es la función de alcance lateral del sensor. El ancho de barrido W del sensor, se define como el área bajo la función de alcance lateral, esto es:

$$w = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) dx$$

Observe que α no es una densidad de probabilidad, de manera que W , puede ser mayor o menor que la unidad. Además, la función de alcance lateral y el ancho de barrido generalmente depende de la velocidad relativa del blanco y del sensor. La figura 4, muestra algunas funciones de alcance lateral típicas. La regla de alcance definido es la más simple y algunas veces una razonable aproximación para búsquedas visuales en las cuales una cámara es remolcada sobre el fondo del océano. Para esta regla, la probabilidad de detección es 1 hasta el alcance lateral R y 0 más allá; el ancho del barrido es $W = 2R$.

La función de alcance lateral y aún más el ancho de barrido, representan las capacidades del sensor con mayor crudeza. Sin embargo, en una operación de búsqueda real, sería una suerte tener esta información acerca de las capacidades de detección del sensor de búsqueda, bajo las condiciones reales de operación. Cuando no se cuenta con esta información, es importante probar el sensor en el sitio de la operación contra un blanco de prueba, similar al blanco buscado para determinar la función de alcance lateral.

Las características generales del sensor son generalmente suficientes para determinar la forma de la función de alcance lateral. Por ejemplo, usando un magnetómetro (y promediando todas las posibles orientaciones del blanco) podríamos esperar obtener una función de alcance lateral que es simétrica alrededor de $r = 0$, y que es monótonica decreciente conforme aumenta el valor absoluto del alcance lateral. Las técnicas de regresión monótonicas de Barlow y otros [1941], podrían usarse para estimar la función de alcance lateral de este sensor. Para funciones de alcance lateral que se incrementen y luego disminuyan conforme el valor absoluto del alcance lateral

se incrementa, está disponible una modificación del algoritmo descrito en Barlow y otros. Richardson y otros, usaron esta modificación durante la limpieza del Canal de Suez en 1974, para estimar las funciones de alcance lateral del sonar del tipo mostrado en la figura 4(c).

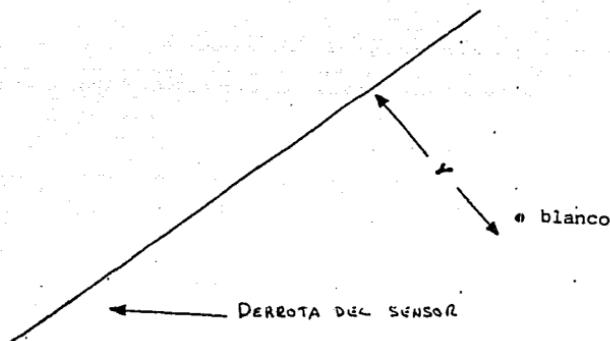
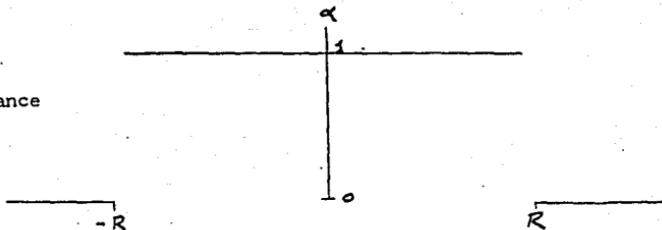


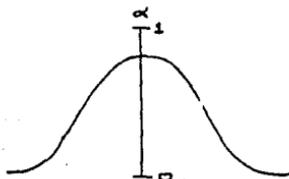
FIGURA 3. ALCANCE LATERAL.

A menudo los sensores de búsqueda no están probados. En estos casos, el planeador de la búsqueda deberá confiar en las especificaciones de diseño del sensor para estimar las funciones de alcance lateral y deberá estar pendiente, sin embargo, de que estas estimaciones sean generalmente optimistas. De hecho, Koopman dice que la experiencia de la Segunda Guerra Mundial demostró que en una situación operativa los sistemas tienen típicamente un desempeño de entre el 60 y el 70 % de su capacidad de diseño.

a. Ley de Alcance definido.



b. Magnetómetro



c. Sonar de búsqueda lateral.

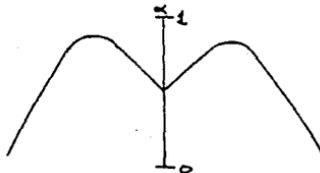


FIGURA 4. FUNCIONES DE ALCANCE LATERAL.

AREAS PROBLEMATICAS.

Los modelos de detección usados para los sensores de búsqueda no toman en cuenta las falsas alarmas. Se ha estado trabajando en el problema de los falsos blancos, esto es, objetos que dan esencialmente la misma respuesta al sensor que el blanco; pero muy poco se conoce acerca de incorporar alarmas falsas controladas dentro de los modelos de detección usados para la búsqueda. Algunos investigadores han sugerido un enfoque a este problema para la detección visual.

Un buen planeamiento de una búsqueda necesita un catálogo de funciones de alcance lateral obtenidas de la prueba de sensores en una variedad de situaciones de búsqueda. En caso de un problema de búsqueda que requiera respuesta rápida, el planeador deberá escoger la función de alcance lateral que fue obtenida bajo la situación más cercana a la de la búsqueda ha desarrollar, por lo tanto obteniendo una estimación más realista que la que se obtendría confiando en las especificaciones de diseños o en juicios subjetivos solamente.

El mejor método disponible hasta ahora para estimar la función de alcance lateral, por ejemplo, la regresión monótona, no permite encontrar intervalos de confianza para los parámetros estimados.

4. DETERMINANDO LA FUNCION DE DETECCION.

Habiendo caracterizado las capacidades del sensor por medio de la función de alcance lateral, aún requerimos de una función de detección, es decir, que relacione el esfuerzo de búsqueda aplicado a una área a la probabilidad de detectar el blanco dado, que se encuentra en dicha área.

Más específicamente, supongamos que el blanco esta estacionario, que el área de

búsqueda está dividida en J celdas, y que el esfuerzo se mide en términos del tiempo consumido en cada celda. Queremos conocer la función de detección, b , la cual se define como:

$b(j,t) =$ Probabilidad de detectar al blanco dado que se encuentra en la celda j , y que se han empleado t horas, en buscarlo en dicha celda.

$$\text{Para } j = 1, \dots, J \text{ y } t \geq 0$$

Conociendo la función de detección podemos calcular la probabilidad de detección resultado de cualquier asignación del esfuerzo de búsqueda. Por ejemplo, sea

$p(j) =$ probabilidades de que el blanco esté en la celda j , para $j = 1, \dots, J$

donde,
$$\sum_{j=1}^J p(j) = 1$$

Si t_j horas son usadas buscando en la celda j , para $j = 1, \dots, J$, la probabilidad total de detectar al blanco es:

$$\sum_{j=1}^J p(j) b(j, t_j)$$

Supongamos que un sensor realiza la búsqueda con velocidad v , y tiene un ancho de barrido w_j en la celda j , la cual tiene una área A_j para $j = 1, \dots, J$. El ancho de barrido del sensor a menudo varía sobre la región de búsqueda debido a condiciones ambientales variables. En el caso de búsqueda visual, puede haber niebla en una parte

de la región de búsqueda y cielo despejado en otra. Una función de detección clásica y muy útil es la exponencial. Para esta función:

$$b(j, t) = 1 - \exp\left(\frac{-W_j v t}{A_j}\right) \quad \text{para} \quad t \geq 0 \quad \text{y} \quad j = 1, \dots, J.$$

La derivación típica de la función de detección exponencial (llamada fórmula de la búsqueda aleatoria por Koopman), supone que el esfuerzo de búsqueda se distribuye aleatoriamente sobre el área de búsqueda conforme a una distribución uniforme y que cada pequeño incremento del esfuerzo de búsqueda se asigna independientemente del esfuerzo de búsqueda pasado. Aún cuando ninguna situación de búsqueda satisface estos supuestos, la función de detección exponencial ha probado su utilidad en el planeamiento de su búsqueda. Una razón es su facilidad de ser calculada. Otra es que proporciona una estimación razonable y conservadora de la función de detección para una amplia gama de búsquedas.

Para apoyar la última afirmación, consideramos un sensor con un alcance lateral definido y ancho de barrido W . Suponemos que estamos buscando un blanco estacionario cuya distribución de posición es uniforme sobre una región rectangular de área A . En este caso existe una sola celda de manera que suprimiremos la variable j en la función de detección b . Como: $p(1) = 1$, $b(t) =$ probabilidad total de detección en el tiempo t . Las franjas de búsqueda son paralelas y están espaciadas a una distancia S como se muestra en la figura 5. Si elegimos $S = W$, una velocidad de búsqueda v , y no hay traslape en las franjas, entonces la probabilidad de detección como una función del tiempo estará dada por la línea recta de la figura 6. Sin embargo, no es posible generalmente posicionar las franjas en forma precisa.

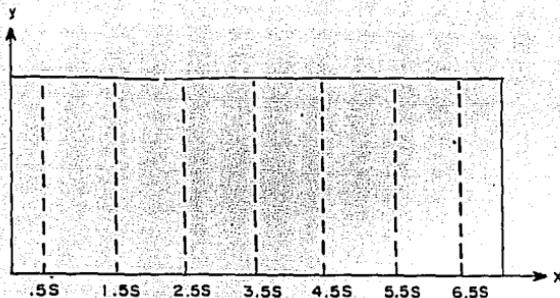


FIGURA 5. POSICION NOMINAL DE LAS FRANJAS.

Suponemos que las franjas de búsqueda son realmente paralelas al eje de las Ys como en la **figura 5**, pero que la *i*-ésima franja tiene una coordenada X que está distribuida normalmente con media $(2i-1)S/2$ y una desviación estándar σ . Este error en la posición de las franjas resulta en traslapes no intencionados y huecos en la cobertura del sensor. La **figura 7**, muestra la probabilidad de detección para una cobertura completa del rectángulo como una función de σ/W . Conforme σ/W se incrementa (pero no tan grande que una considerable cantidad del esfuerzo de búsqueda caiga fuera del rectángulo), la probabilidad de detección, cae a $1 - e^{-1}$. Esta es la probabilidad que uno obtendría de la función de detección exponencial. Para ver esto, observamos que si la función de detección *b*, para esta búsqueda es exponencial, entonces:

$$b(t) = 1 - e^{-Wvt/A} \quad \text{para} \quad t \geq 0 \quad (1)$$

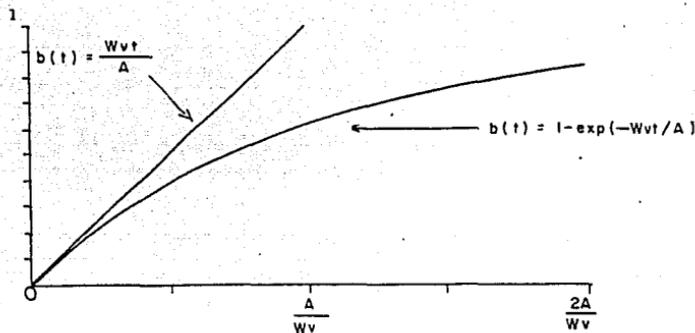


FIGURA 6. PROBABILIDAD DE DETECCIÓN PARA LA BÚSQUEDA.

Se requiere un tiempo $t = A/Wv$, para realizar la búsqueda de franjas paralelas antes mencionadas. Evaluando (1) en ese momento, obtendremos $1 - e^{-1}$ para la probabilidad de detección.

En muchas búsquedas el error de navegación es grande y la función exponencial es una buena aproximación a la función de detección real. Para la mayoría de las búsquedas en las cuales tratamos de distribuir el esfuerzo uniformemente sobre un rectángulo, la función de detección real estará situada entre la línea recta y la curva exponencial mostrada en la figura 6. Koopman derivó la función para un sensor con una función lateral inversa cúbica. Esta función de detección es apropiada para ciertas búsquedas visuales y también cae entre las dos curvas en la figura 6.

Cuando el ancho de barrido (esto es, una función de alcance lateral) es incierto, la función de detección exponencial no es una buena aproximación. Aún si la capacidad

de detección del sensor es conocida, el ancho de barrido puede ser incierto. Por ejemplo, el detector puede no saber si el blanco es uno solo o varios, o si está sobre el fondo oceánico o enterrado en él. En este caso debemos especificar una distribución del ancho de barrido de la misma forma como especificamos una distribución de la situación del blanco.

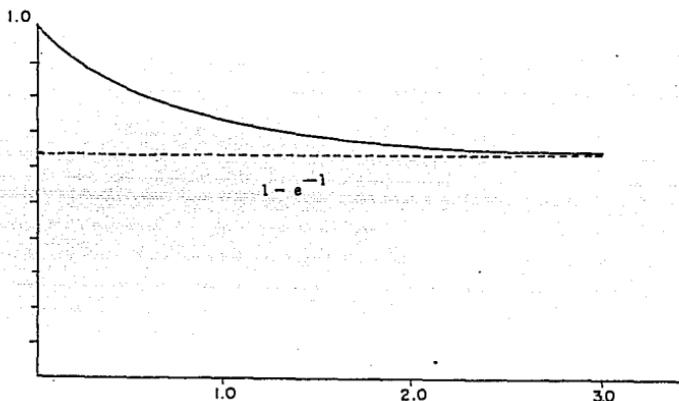


FIGURA 7. PROBABILIDAD DE DETECCIÓN PARA UNA BUSQUEDA DE FRANJAS PARALELAS.

Suponemos que la función de detección b , está determinada por el ancho de barrido del sensor y es constante, pero desconocida, sobre la región de búsqueda. Como la función de detección no depende de la celda j , suprimiremos otra vez la variable j . Suponga que hay m posibles valores del ancho de barrido:

$$\{ \omega_i, i=1, \dots, m \}$$

y que:

$$\beta_i = Pr (\text{ancho de barrido} = \omega_i) \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, m.$$

donde $\sum_{i=1}^m \beta_i = 1$. Sea $B(t, \omega_i)$ la función de detección dado que el ancho

de barrido tiene un valor ω_i . Definimos:

$$\bar{B}(t) = \sum_{i=1}^m \beta_i B(t, \omega_i) \quad \text{para } t \geq 0.$$

Mas adelante se demuestra que uno puede planear la búsqueda como si \bar{B} fuera la función de detección real; Richardson y Belkin, dan ejemplos de la penalización, en términos del tiempo medio para detectar, en que uno incurre por no tomar en cuenta la incertidumbre en el ancho de barrido.

AREAS PROBLEMATICAS.

Unicamente para la búsqueda con franjas paralelas, ha sido posible proceder en forma rigurosa de la función de alcance lateral a la función de detección. La fórmula de búsqueda aleatoria fue derivada bajo supuestos muy irreales. Sin embargo sentimos, basados en el ejemplo discutido en esa sección, que la fórmula de búsqueda aleatoria dá una cota inferior razonable, de la efectividad de la búsqueda que intenta distribuir uniformemente el esfuerzo sobre la región de búsqueda.

Por otro lado, si uno busca aleatoriamente (esto es, se sigue una derrota de búsqueda determinada por un recorrido aleatorio), la probabilidad de detección será inferior que la dada por la fórmula de búsqueda aleatoria. Para ver esto, regresemos a la búsqueda de un blanco estacionario, cuya distribución es uniforme sobre el rectángulo de la figura 5. Suponemos que el tiempo disponible para la búsqueda es $t = A/Wv$ y

σ/w son grandes. Si intentamos realizar la búsqueda de franjas paralelas mostradas en la figura 5, nuestra distribución del esfuerzo de búsqueda será (en promedio) uniforme sobre el rectángulo. Como σ/w es grande, la función de detección exponencial es aplicable, y la probabilidad de detección calculada de la ecuación 1 es $1 - e^{-1}$. Suponemos por otro lado que el detector empieza en el centro del rectángulo y para cada incremento de tiempo Δt , toma una muestra independiente de una distribución uniforme sobre $[0^\circ, 360^\circ]$ para determinar su dirección θ . El detector se enfila en esa dirección por un tiempo Δt y toma otra muestra para determinar la dirección aleatoriamente y repite el proceso. Si Δt es pequeño, la distribución de la posición al tiempo t , después de que empezó la búsqueda convergirá rápidamente a una distribución normal con media en el centro del rectángulo. Como resultado, la densidad del esfuerzo de búsqueda será no uniforme con la densidad mayor en el centro. Esta distribución no uniforme no es óptima y producirá una probabilidad de detección menor que $1 - e^{-1}$, la cual resulta de la distribución óptima (uniforme) del esfuerzo.

En la discusión anterior, nos hemos enfocado a una búsqueda aleatoria particular pero los resultados son aplicables para cualquier recorrido aleatorio bidimensional cuyos incrementos tienen media (0,0), con tal que el intervalo de tiempo Δt , del recorrido sea pequeño.

5. DESARROLLAR UN PLAN DE BÚSQUEDA.

Regresando al ejemplo de la Sección 2, tenemos una distribución normal derivada para la situación del blanco al principio de la búsqueda, como se muestra en la figura 2. Suponemos que tenemos 3 horas disponibles para la búsqueda y que estamos buscando visualmente desde una aeronave que vuela a 125 nudos. Verificando las tablas de ancho de barrido del Manual Nacional de Búsqueda y Rescate, encontramos que el ancho de barrido visual es de 4 millas náuticas, para el tipo de buque que estamos buscando y las condiciones meteorológicas en el área de búsqueda. El esfuerzo total E , medido en el área barrida para esta búsqueda es:

$$\begin{aligned} E &= Wvt = (4mn) (125 \text{ nudos}) (3 \text{ horas}) \\ &= (4mn) (125 \text{ mn/h}) (3 \text{ h}) = 1500 (mn)^2. \end{aligned}$$

Para ser conservadores, supondremos que estamos usando una función de detección exponencial como la dada en (1).

Este es un problema de un blanco móvil y un plan óptimo de búsqueda podría calcularse usando los algoritmos descritos en Brown [1980], Stone y otros [1978] o Discenza y Stone [1981]. Sin embargo, para mantener la simplicidad de la discusión, trataremos este problema como uno de blanco estacionario calculando la distribución del blanco a la mitad del período de búsqueda de la aeronave y planeando la búsqueda como si fuera de un blanco estacionario con dicha distribución. Este procedimiento es un método común para tratar búsquedas en la práctica. La elipse de la figura 8, representa la distribución del blanco a la mitad del período de búsqueda de la aeronave, $T = 11.5$ horas después de la llamada de auxilio.

Usando el trabajo de Koopman se puede calcular la distribución óptima de la densidad del esfuerzo de búsqueda. La parábola de la figura 9, muestra una sección transversal de esta función de densidad. Es muy difícil implementar el plan óptimo en este caso

debido a que la aeronave no puede distribuir su esfuerzo de búsqueda en forma precisa. Esta dificultad ha motivado al detector para que busque planes más simples. Por ejemplo el CASP, fue desarrollado asignando la búsqueda uniformemente sobre una región rectangular.

PLANEAMIENTO RECTANGULAR

Para una distribución normal bivariada, considere la clase de rectángulos que están centrados en la media de la distribución y que tengan sus lados paralelos al eje principal de la distribución. Sean σ_1 y σ_2 la desviación estándar de la

distribución del blanco a lo largo del primero y segundo eje y sean L_1 y L_2 las

longitudes de los lados del rectángulo paralelo al primero y segundo eje. Nosotros nos limitamos a la atención de los rectángulos para los cuales

$L_1 = 2 K \sigma_1$ y $L_2 = 2 K \sigma_2$ para alguna constante K. La figura 10, ilustra

a la familia de rectángulos bajo consideración. Es la familia de un parámetro, con cada valor del factor de tamaño, K, definiendo un rectángulo para $k \geq 0$. Sea Φ , la

función de la distribución acumulada de una variable normal al azar con media 0 y desviación estándar 1. La probabilidad de que el blanco esté en el rectángulo con el

parámetro K es $[\Phi(K) - \Phi(-K)]^2$. Si asignamos el esfuerzo $E = Wvt$, el

cual se extiende uniformemente sobre el rectángulo, la probabilidad de detectar el blanco, dado que está en el rectángulo, es $1 - \exp(-E / 4 k^2 \sigma_1 \sigma_2)$. La

probabilidad incondicional de la detección es:

$$P_D(K) = [\Phi(K) - \Phi(-K)]^2 [1 - \exp(-E / (4 k^2 \sigma_1 \sigma_2))].$$

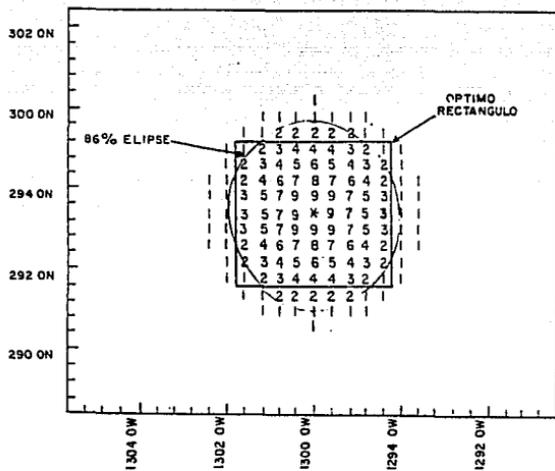


FIGURA 8. DISTRIBUCION DEL BLANCO A LA MITAD DEL PERIODO DE BUSQUEDA
($T = 11.5$ HORAS)

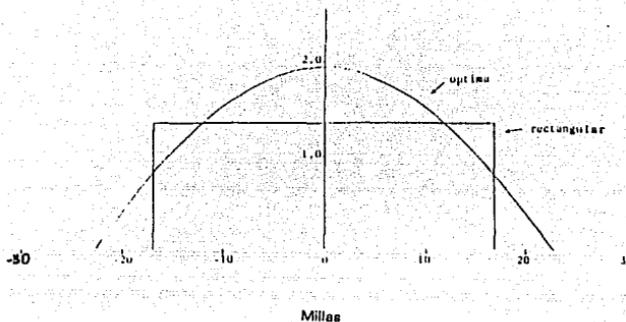


FIGURA 9. SECCION TRANSVERSAL DE UNA DENSIDAD OPTIMA DE BUSQUEDA RECTANGULAR.

En tanto K aumenta, el primer factor aumenta y el segundo disminuye. Así hay un K^* que lleva al máximo a P_D . Por medio de una inspección de la ecuación se muestra que esta K^* depende solamente de $E/\sigma_1\sigma_2$, el esfuerzo de investigación normalizado.

La gráfica de K^* , así como la probabilidad de la detección asociada $P_D(K^*)$, como función del esfuerzo normalizado se puede calcular numéricamente y se muestra en la figura 11, adaptado de Richardson y Discenza. Usándolo, uno puede rápida y fácilmente planear una búsqueda rectangular y obtener una estimación de su efectividad.

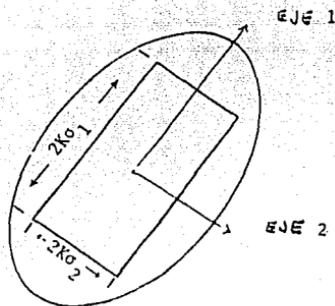


FIGURA 10. FAMILIA DE RECTANGULOS.

El plan resultante del rectángulo parece razonable, pero ¿ qué tan buena es la aproximación al plan óptimo ?. Para contestar esta pregunta, uno puede efectuar un cálculo similar al que conduce a la ecuación 2.2.21 de Stone para calcular la probabilidad de detección, P_D^* , para el plan óptimo, y saber:

$$P_D^*(E) = 1 - (1 + H(E)) \exp(-H(E))$$

donde, $H(E) = (E / (\pi\sigma_1\sigma_2))^{1/2}$.

Al comparar las probabilidades de detección, uno encuentra que la probabilidad para el plan del rectángulo óptimo está siempre dentro de 0.03 de la probabilidad óptima (ver figura 11).

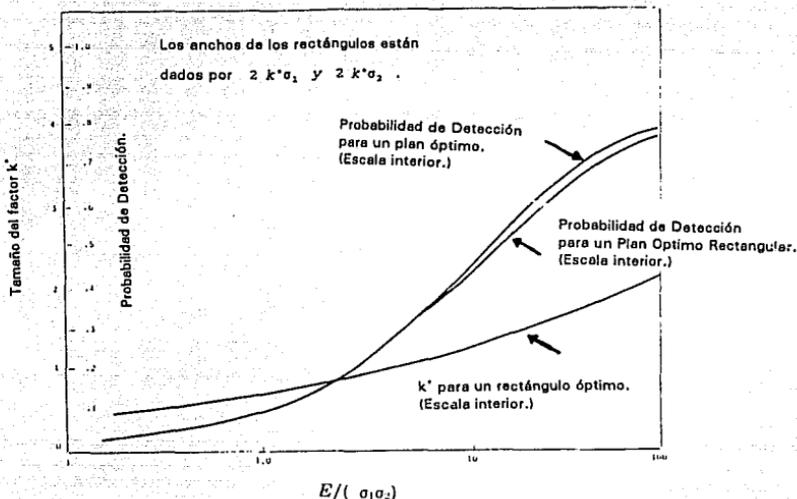


FIGURA 11. RECTANGULO OPTIMO.

Aunque puede haber mejores aproximaciones, estas no pueden mejorar el plan óptimo. Puesto que estamos ya tan cerca de lo óptimo, no hay ningún punto en la investigación para mejores aproximaciones. Así es, que nos sentimos seguros al recomendar un plan rectangular para esta situación.

El ejemplo anterior ilustra la regla del análisis en el planeamiento de la investigación. Uno podría recomendar un plan rectangular sin hacer ningún análisis, aunque el análisis se requiere para determinar el mejor plan rectangular y para cuantificar qué tan bien se aproxima el plan óptimo.

La figura 8 ilustra el plan rectangular óptimo para el ejemplo de la Sección 2. La probabilidad de detección para este plan es de 0.55, en comparación con una probabilidad de detección de 0.58 para el plan óptimo.

Este ejemplo considera una situación particularmente simple. Suponga que la investigación anterior no detecta al blanco. ¿ De qué manera se investigaría el siguiente avión ?. A fin de mantener la simplicidad, uno podría requerir que la siguiente investigación sea rectangular. Engel [1981] ha desarrollado un método para encontrar tal rectángulo, lo cual depende solamente de la probabilidad de detección del esfuerzo de investigación previa.

Suponga que uno se enfrenta con un mapa de probabilidad no normal que consiste de probabilidades en celdas, como es el caso con los mapas producidos por CASP. Para situaciones como esta, el Sistema CASP contiene un Programa MULTI (Richardson y Discenza) que encuentra hasta tres rectángulos desarticulados con los cuales aproximarse al plan de investigación óptimo. Discenza [1980] ha desarrollado un acercamiento alterno a este problema el cual permite más de tres rectángulos.

Con la excepción de Engel [1981], quien permite la función de detección del cubo inverso mencionado antes, los acercamientos anteriores suponen una función de detección exponencial. Sin embargo, debe haber poca dificultad al extender estos métodos a cualquier función de detección regular. Una función de detección regular es una cuya derivada con respecto al esfuerzo es continua, positiva y estrictamente decreciente. La mayor parte de las funciones de detección son regulares.

Existe otro medio simple y útil para planear las investigaciones cuando la distribución del blanco es celular. Usando el método discutido en las páginas 50-51 de Stone, uno puede idear un programa de computación que calcule la distribución óptima del esfuerzo de investigación para los problemas estacionarios que involucren distribuciones celulares y funciones de detección regular. El esfuerzo óptimo para cada celda se puede exhibir como un mapa para el planeador. El planeador puede usar este mapa como guía para desarrollar un plan operacionalmente factible. Cuando la función de detección es exponencial, el algoritmo Charnes-Cooper descrito en el ejemplo 2.2.8 de Stone se puede usar para obtener la asignación de investigación

óptima.

Cuando un problema de investigación estacionario involucre a blancos falsos, las asignaciones de esfuerzo óptimo se pueden encontrar usando los resultados del Capítulo 6 de Stone. Sin embargo, los planes óptimos sin contactos falsos, generalmente son demasiado complicados para realizarse operacionalmente. El capítulo 7 de Stone describe un acercamiento de incremento que se puede usar para encontrar simples aproximaciones a los planes óptimos. Esto generalmente no son tan fáciles para implementarse como investigaciones rectangulares.

AREAS PROBLEMATICAS.

Encontrar planes simples de investigación casi óptimos para los problemas de los blancos móviles, permanece sin resolverse. Aunque Stone y otros hicieron algún progreso sobre este problema, gran parte aún falta por hacerse. Tal vez las técnicas del rectángulo múltiple de Discenza, podrían adaptarse a estos problemas.

Actualmente no hay ninguna aproximación simple, casi óptima para los planes de investigación ante la presencia de blancos falsos. Tal vez, el enfoque de la búsqueda rectangular se podría aplicar aquí también.

6. ACTUALIZACION PARA LA REALIMENTACION DE LA BUSQUEDA

La mayor parte de las investigaciones se realizan de de manera secuencial, o sobre un largo período de tiempo, para que el planeador de la investigación pueda recibir la realimentación de la investigación y ajuste su plan.

A fin de discutir la realimentación, debemos de distinguir entre detección previa y

posterior y las probabilidades de la ubicación del blanco. La probabilidad de detección previa, es la probabilidad que calculamos antes de que tome lugar la búsqueda. La probabilidad de detección posterior es de cero a uno, dependiendo de si el blanco fue detectado o no. Las probabilidades de la ubicación del blanco posterior, consideran toda la información lograda durante la investigación. Si el blanco ha sido detectado, entonces la probabilidad de la ubicación posterior es una de la celda en donde el blanco fue detectado, entonces las probabilidades del lugar posterior, o el mapa del blanco, son calculadas por el Método descrito antes.

Suponga que, en el ejemplo anterior, hemos planeado una segunda búsqueda, si fracasa la primera en la detección del blanco. La segunda búsqueda es también rectangular; con el rectángulo que es determinado por la probabilidad del éxito previa de la primera búsqueda en la manera de Engel. En la mitad de la primera investigación, el avión tiene problemas en el motor y tiene que abandonar la investigación a la mitad del recorrido a través del rectángulo. Calculando la probabilidad de detección previa para la mitad de esa investigación y usando las curvas de Engel, uno puede ajustar la segunda investigación para calcular la primera investigación parcial.

MAPAS POSTERIORES.

En general, uno calcula la realimentación de la investigación obteniendo los registros (es decir, el trayecto del vuelo) de la investigación presente y calculando el mapa de la ubicación posterior del blanco debido a que no se tiene éxito en la detección. Suponga que el mapa está especificado por una rejilla de las celdas J con la probabilidad previa $p(j)$ del blanco que esta en la j -ésima celda. Suponga que el blanco es fijo, el esfuerzo de la investigación es medido en unidades de tiempo y la función de detección b está determinada por:

$b(j,t)$ = probabilidad de detección del blanco, dado que se encuentra en la celda j y se han consumido t horas de búsqueda en la celda j , para $t \geq 0$ y $j = 1, \dots, J$.

En este caso la realimentación de la investigación consiste del tiempo t_j , empleado investigando en la j -ésima celda para $j = 1, \dots, J$. La distribución del blanco posterior, dado el fracaso en la detección, se calcula usando la Regla de Bayes como:

$$\tilde{p}(j) = p(j) (1 - b(j, t_j)) / \left(\sum_{k=1}^J p(k) (1 - b(k, t_k)) \right) \quad (2)$$

para, $j = 1, \dots, J$

Teniendo la distribución posterior, basada en el esfuerzo de investigación real, el planeador de la investigación puede usar las técnicas de la sección 5 para generar los planes óptimos o casi óptimos para el siguiente incremento de esfuerzo, siempre que la función de detección sea exponencial. Si la función de detección no es exponencial, entonces la función de detección posterior se debe usar al planear el siguiente incremento. Es decir, $b(j, \cdot)$ se debe de reemplazar por $\tilde{b}(j, \cdot)$, en donde:

$$\tilde{b}(j, t) = (b(j, t+t_j) - b(j, t_j)) / (1 - b(j, t_j)) \quad (3)$$

para $t \geq 0$, $j = 1, \dots, J$

(Si la función de detección no es exponencial)

Observe; que para una función de detección exponencial, tal como la de la ecuación

$$1: \quad \tilde{b}(j, t) = b(j, t) \quad \text{para} \quad t \geq 0 .$$

PLANES DE INCREMENTO.

Para los problemas de blancos fijos con funciones de detección regular y sin blancos falsos, Stone (Capítulo 3), muestra que el investigador, quién planea cada incremento de su investigación en un modo óptimo (usando las distribuciones posteriores en (2) y (3) en cada etapa), obtendrá una asignación óptima del esfuerzo total. Para los problemas de blancos fijos con funciones de detección regular, los planes de incremento son óptimos. Esto significa que el planeador de la investigación no necesita considerar el horizonte del tiempo al planear las investigaciones fijas, sino que necesita planear solamente cada incremento óptimamente. En estos problemas, la asignación óptima en el tiempo 1 y en otros tiempos depende de la duración de la investigación. Es decir, los planes de incremento no son óptimos para los blancos en movimiento.

BLANCOS FALSOS.

En muchas investigaciones hay objetos, llamados blancos falsos, cuyas características de detección son casi idénticas a las del blanco. Es decir, los blancos falsos tienen la misma función de detección que la de los blancos reales. En la investigación submarina, una gran roca en el fondo del océano del mismo tamaño y forma a la del blanco puede ser indistinguible del blanco en el rastro del sonar de vista lateral.

Suponga que la distribución de estas rocas es Poisson con el parámetro $\delta(j)$, en la j -ésima celda, es decir:

$$\Pr(\text{los blancos falsos } n \text{ en la celda } j) = (\delta(j))^n e^{-\delta(j)} / n! \quad \text{para } n=0,1,\dots$$

La distribución Poisson es a menudo un modelo razonable para las dispersiones

aleatorias. Supongamos que los parámetros $\delta(j), j = 1, \dots, J$; se conocen o se han estimado de la información geológica sobre el área de investigación.

Suponga que la investigación toma lugar en dos fases separadas, una investigación amplia y otra investigación de contacto. Esto sucede a menudo en el caso de las investigaciones submarinas. La fase de amplia investigación se lleva a cabo con un sensor, tal como el sonar, que tiene un gran ancho de barrido sobre el blanco, pero que podría responder a un blanco falso con una detección. Siempre que se realiza la detección, se le llama contacto. La segunda fase emplea un sensor separado, tal como una cámara, que típicamente tiene un ancho de barrido más pequeño y es capaz de realizar la identificación (es decir, distinguir los blancos verdaderos de los falsos). Registrar la fase de investigación del contacto requiere que se termine la amplia investigación.

Considere el caso en donde uno haya investigado por un tiempo t_j , en la celda $j, j = 1, \dots, J$, y esta investigación producen blancos con contactos en las celdas j_1, \dots, j_n . Si ninguno de estos contactos se ha investigado, entonces uno puede usar los resultados de la Sección 7 de Stone y Stanshine (1971), para calcular la distribución del lugar del blanco posterior. Sea

$$P = \sum_{j=1}^J p(j) b(j, t_j) \quad (4)$$

Esta es la probabilidad previa de detección del blanco con la asignación de la investigación (t_1, \dots, t_j) . La probabilidad posterior de que el i -ésimo contacto es el blanco, está dada por :

$$\gamma_i = (p(j_i) / \delta_i(j_i)) / (1 - P + \sum_{k=1}^n p(j_k) / \delta(j_k)) \quad (5)$$

$$i = 1, \dots, n$$

La probabilidad posterior de que el blanco esté en la j-ésima celda como un contacto o sin detección, llega a ser:

$$\bar{p}(j) = p(j) [1 - b(j, t_j)] / (1 - P + \sum_{k=1}^n p(j_k) / \delta(j_k)) + \sum_{i=j}^n \gamma_i \quad (6)$$

La segunda suma de la derecha es simplemente la suma sobre todos los contactos que se efectúan en la celda j. Si no hay contactos en la celda j, entonces esta suma es cero.

Las ecuaciones (5) y (6) proporcionan la guía con respecto a qué contactos investigar primero y qué celdas investigar a continuación.

AREAS PROBLEMATICAS.

Siempre que la investigación del contacto sea terminante y contribuya poco o nada al esfuerzo de investigación afuera de la vecindad inmediata de los contactos, uno puede considerar la realimentación de la investigación del contacto removiendo simplemente los contactos investigados de la lista de contactos. Cuando la investigación del contacto no es terminante o cuando contribuye a un esfuerzo de investigación importante, el cálculo de su esfuerzo es más complicado. De hecho, actualmente no conocemos ningún método satisfactorio para hacer esto.

Existen dificultades adicionales que involucran a los blancos falsos. Por ejemplo, los blancos falsos se pueden deber a objetos móviles, tales como peces, o puede haber tantos contactos en una área que sea difícil calcularlos con precisión.

7. ESTIMACION DE LA EFECTIVIDAD DE LA INVESTIGACION.

En muchas operaciones de investigaciones uno se encara con la cuestión de evaluar la cantidad total del esfuerzo de investigación. Una simple medida es observar si el blanco se ha encontrado o nó. Si se ha encontrado el blanco, esta medida es buena, pero si el blanco no se ha encontrado, esta medida no nos dá ninguna pista con respecto a la calidad total y a la eficiencia de la investigación, ni proporciona la guía sobre cuando se detiene la investigación.

NINGUN BLANCO FALSO.

Si uno está investigando con un sensor para cuya detección e identificación del blanco es simultánea, entonces es fácil interpretar una medida de la efectividad de la investigación. La probabilidad previa P de la detección determinada en la ecuación 4 sirve muy bién. A menudo las investigaciones visuales ó con cámara caen en esta categoría.

Un alto valor para P , digamos 0.9, implica que si un gran número de investigaciones idénticas fueron realizadas bajo las condiciones supuestas en la distribución de blancos y en la función de detección, entonces el blanco habría sido encontrado en este tiempo en un 90 % de esas investigaciones. Así es que la mala suerte ó una mala suposición y no un pobre planeamiento, ha conducido a las fallas. La investigación ha sido realizada de una manera inteligente dada la mejor información a la mano. Por supuesto, que esta información podría ser errónea. Así, es que cuando la medida P

llega a ser alta, tenemos una base para determinar que hemos agotado la información sobre la cual basamos la investigación que llegue a estar disponible, debemos detenernos. Por supuesto, que la definición de alta es subjetiva.

Cuando hay blancos falsos y contactos que sean investigados, el problema de definir una medida de efectividad llega a ser más complicada.

BLANCOS FALSOS.

Durante la investigación de 1966 por la Bomba "H", perdida en la costa de España cerca de Palomares, H. R. Richardson introdujo una medida denominada Probabilidad de Efectividad en la Investigación (SEP = Search Effectiveness Probability) que se aplica cuando los sensores no visuales son incapaces de efectuar la identificación del blanco. Esto se calcula en la siguiente forma:

V_j = La probabilidad previa de que el blanco sería detectado por medio de una investigación visual dado que el blanco está en la celda j .

D_j = La probabilidad previa de que el blanco sería detectado ya sea visual o no visualmente, dado que está en la celda j .

C_j = La probabilidad previa de que si el blanco fuera uno de los contactos en la celda j , habría sido identificado por el esfuerzo de investigación en la celda j . ($C_j = 1$ por convenio si no hay ningún contacto en la celda j .)

$$\text{Sea } E_j = V_j + C_j(D_j - V_j) \quad \text{para } j = 1, \dots, J.$$

$$\text{Entonces, } SEP = \sum_{j=1}^J P(j) E_j.$$

Observe que cuando la investigación es puramente visual, $SEP = P$.

SEP es una medida útil y ha sido aplicada sobre un número de investigaciones, incluyendo la investigación Scorpion (Richardson y Stone) y la limpieza de piezas explosivas del Canal de Suez (Richardson y otros [1975]). Sin embargo, hay dificultades con ello. Suponer que uno está investigando con un sensor no visual, es decir, un sonar de vista lateral que no es capaz de efectuar una identificación del blanco, y no ha habido ningún contacto. En este caso, $E_j = D_j$, la probabilidad de detección para el sensor no visual. Como uno aplica más esfuerzo de investigación a las celdas, las probabilidades D_j , $j = 1, \dots, J$, continúan aumentando. Tanto como uno no obtenga ningún contacto, SEP también continúa aumentando. Sin embargo, tan pronto como uno obtiene un contacto, digamos la celda j , $E_j = 0$, y SEP ¡desciende!, lo que sería una buena noticia para la investigación, produce una degradación en la medida del desempeño de SEP.

AREAS PROBLEMATICAS.

Aunque Richardson y otros [1971], investigaron un número de medidas alternativas de SEP, no se ha encontrado ninguna alternativa completamente satisfactoria. El problema consiste en encontrar una definición de SEP que tenga un significado intuitivamente natural y que esté monótonamente aumentando para una investigación bien planeada.

8. CONCLUSION.

En este escrito hemos discutido el proceso del planeamiento de la investigación y se han identificado un número de problemas de investigación de las operaciones asociado con ello. A través de esta discusión, hemos mostrado, de qué manera se combinan: la teoría, la práctica y el juicio al resolver los problemas de la Investigación. Planear una investigación no es solo un ejercicio analítico. Puesto que los juicios subjetivos son cruciales para el planeamiento de las buenas investigaciones, las investigaciones siempre, en cierto grado, serán un arte. Sin embargo, aplicar buenas técnicas analíticas dá lugar a que se mejore el arte y proporciona un mejor planeamiento de la investigación. Aplicar las técnicas analíticas a esas partes de un problema operacional que pueda beneficiarse del análisis es la médula de la práctica de la Investigación de Operaciones.

REFERENCIAS

DISCENZA, J. H. 1980. A Solution for the Optimal Multiple Rectangle Search. In Search Theory and Applications, pp. 261-272, K.B. Haley and L. D. Stone (eds.). Plenum, New York.

KOOPMAN, B.O. 1946. Search and Screening, Operations Evaluations Group Report 56, Center for Naval Analysis, Alexandria, Va.

STONE, L. D. 1975. Theory of Optimal Search. Academic Press, New York.

STONE, L. D., S. S. BROWN, R. P. BUEMI AND C. R. HOPKINS. 1978. Numerical Optimization of Search for a Moving Target. Daniel H. Wagner, Associates Report to the Office of Naval Research.

RICHARDSON, H.R., T. L. CORWIN, L. D. STONE, F. P. ENGEL, B. E. SCRANTON AND W. J. BROWNING. 1975. Operations Analysis During the 1974 Search for Unexploded Ordnance in the Suez Canal, Daniel H. Wagner, Associates Report to Naval Explosive Ordnance Disposal Facility.

REFERENCIAS

DISCENZA, J. H. 1980. A Solution for the Optimal Multiple Rectangle Search. In Search Theory and Applications, pp. 261-272, K.B. Haley and L. D. Stone (eds.). Plenum, New York.

KOOPMAN, B.O. 1946. Search and Screening, Operations Evaluations Group Report 56, Center for Naval Analysis, Alexandria, Va.

STONE, L. D. 1975. Theory of Optimal Search. Academic Press, New York.

STONE, L. D., S. S. BROWN, R. P. BUEMI AND C. R. HOPKINS. 1978. Numerical Optimization of Search for a Moving Target. Daniel H. Wagner, Associates Report to the Office of Naval Research.

RICHARDSON, H.R., T. L. CORWIN, L. D. STONE, F. P. ENGEL, B. E. SCRANTON AND W. J. BROWNING. 1975. Operations Analysis During the 1974 Search for Unexploded Ordnance in the Suez Canal, Daniel H. Wagner, Associates Report to Naval Explosive Ordnance Disposal Facility.