

01161  
9  
201



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

ANALISIS DE TUBERIAS DE DESFOGUE SOMETIDAS  
A CARGAS VIAJERAS

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE  
MAESTRO EN INGENIERIA  
( ESTRUCTURAS )  
P R E S E N T A  
MARIA SARA VALENTINA SANCHEZ SALINAS

México, D.F.

1993

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# ANÁLISIS DE TUBERÍAS DE DESFOGUE SOMETIDAS A CARGAS VIAJERAS

## ÍNDICE

	PAG.
NOMENCLATURA	1
RESUMEN	4
CAPÍTULO 1.- INTRODUCCIÓN	7
CAPÍTULO 2.- REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA	11
CAPÍTULO 3.- FORMULACIÓN DEL MODELO	18
ANÁLISIS MATEMÁTICO	19
3.1 Frecuencias naturales	20
3.2 Factor de participación modal $\eta_k$	22
3.3 Condiciones iniciales	26
3.4 Solución de la ecuación dinámica	27
3.5 Influencia de la distribución de carga	29
ANÁLISIS DINÁMICO DE UN CASCARÓN CILÍNDRICO CIRCULAR, CON CARGA PUNTUAL VIAJANDO EN DIRECCIÓN CIRCUNFERENCIAL	29
3.6 Formulación de la función de influencia	29
3.7 Solución de la función de influencia	32
3.8 Respuesta de un cascarón cilíndrico bajo carga puntual viajando en dirección circunferencial	32

<b>CAPÍTULO 4.- ANÁLISIS PARAMÉTRICO</b>	<b>39</b>
<b>4.1 Frecuencias naturales</b>	<b>41</b>
4.1.1 Relación espesor del cilindro- $(\omega_{mn}/n)_{min}$ , en donde $\omega_{mn}$ es la frecuencia natural, $m$ y $n$ son los números de onda en las direcciones longitudinal y circunferencial respectivamente	<b>41</b>
<b>4.2 Convergencia</b>	<b>43</b>
<b>4.3 Relación velocidad-desplazamiento</b>	<b>44</b>
4.3.1 Relación tiempo-desplazamiento	<b>45</b>
4.3.2 Relación ángulo-desplazamiento	<b>46</b>
<b>4.4 Relación espesor del cilindro-desplazamiento</b>	<b>46</b>
<b>CAPÍTULO 5.- CONCLUSIONES</b>	<b>47</b>
<b>CAPÍTULO 6.- REFERENCIAS</b>	<b>51</b>
<b>CAPÍTULO 7.- TABLAS Y FIGURAS</b>	<b>54</b>
<b>APÉNDICE.- PROGRAMA DE CÁLCULO</b>	<b>91</b>

## NOMENCLATURA

## NOMENCLATURA

$l$	longitud del cascarón cilíndrico de acero.
$l'$	distancia entre arriostramientos.
$r$	radio del cascarón cilíndrico circular de acero.
$r_o$	radio equivalente.
$h$	espesor del cascarón cilíndrico circular de acero.
$h_o$	espesor equivalente.
$I_x, I_\phi$	momento de inercia de los atiesadores (longitudinales y circunferenciales respectivamente) respecto a la tangente de la superficie media del cascarón cilíndrico circular de acero.
$S_\phi, S_x$	separación entre atiesadores longitudinales y circunferenciales (anillos) respectivamente.
$S$	espesor del recubrimiento de concreto.
$A_x, A_\phi$	área de los atiesadores longitudinales y circunferenciales (anillos) respectivamente.
$C_x, C_\phi$	distancia del centroide de los atiesadores y anillos respectivamente al eje neutro del cascarón cilíndrico circular de acero.
$C$	distancia del centroide del área de concreto equivalente al eje neutro del cascarón cilíndrico circular de acero.
$E$	módulo de elasticidad del acero ( $1.9995E+11$ Pa).
$E_c$	módulo de elasticidad del concreto ( $2.0684E+10$ Pa).
$\rho$	densidad de masa del acero ( $7844.18 \text{ N s}^2/\text{m}^4$ ).
$\rho_c$	densidad de masa del concreto ( $2351.12 \text{ N s}^2/\text{m}^4$ ).
$\mu$	módulo de Poisson del acero (0.3).
$\mu_c$	módulo de Poisson del concreto (0.1).
$\lambda$	amortiguamiento viscoso equivalente.
$\zeta_k$	coeficiente de amortiguamiento modal
$m, n$	número de onda longitudinal y circunferencial respectivamente.
$u, v, w$	desplazamiento de un punto sobre la superficie media de un cascarón cilíndrico circular.
$u_1(\alpha_1, \alpha_2, t)$	respuesta dinámica del cascarón cilíndrico circular, en las coordenadas $\alpha_1, \alpha_2$ y en el tiempo $t$ .
$\xi$	localización en el sentido longitudinal de la carga rotativa en el sistema.
$\Omega t$	localización en el sentido circunferencial de la carga rotativa en

	el sistema.
$\Omega$	velocidad angular de la carga puntual rotativa.
$x$	localización en el sentido longitudinal de la respuesta en el sistema.
$\theta$	localización en el sentido circunferencial de la respuesta en el sistema.
$q_i$	carga puntual aplicada al cascarón cilíndrico circular en la dirección $i$ .
$F$	magnitud de la carga rotativa.
$A_{1,2}$	parámetros de Lamé.
$\omega_{kmn}$	frecuencias naturales del modo $(m,n)$ y $k=1,2,3$ para el sentido transversal, axial y circunferencial respectivamente.
$\eta_k$	factor de participación modal.

## RESUMEN



## RESUMEN

El origen del presente trabajo fue el mal comportamiento del cono de desfogue de las turbinas Francis (figuras 1,2) de la presa hidroeléctrica Manuel Moreno Torres en Chicoasen, Chiapas, México. Desde el principio se encontró que al operar las turbinas a baja carga (aproximadamente a 50 mega watts) se generaba un vórtice aunado a ésto excesivas vibraciones de la turbina aproximadamente entre 100 Hz y 15000 Hz. Debido a la complejidad del problema, se realizaron diversas simplificaciones. Este trabajo es un primer paso del análisis del cono de desfogue de la turbina Francis.

Para el estudio de vibraciones en conos, se adopta la hipótesis de analizar las frecuencias naturales de esta estructura mediante el uso de la teoría del cilindro equivalente presentada por Weingarten<sup>[1]</sup> y Seide<sup>[2]</sup>.

Utilizando la ecuación de frecuencias naturales, desarrollada por Soedel<sup>[3]</sup> basada en el modelo original de Donnell-Mushtary-Vlasov para cilindros isotrópicos simplemente apoyados, se efectúa un análisis numérico de frecuencias naturales por medio del cual se obtiene el incremento en el valor de las frecuencias naturales cuando el cilindro se atiesa en el sentido longitudinal y circunferencial, asimismo se obtiene el decremento que presenta el valor de las frecuencias naturales cuando

al cilindro atiesado se le recubre con una capa de concreto. Haciendo uso de la teoría de expansión modal se obtienen los desplazamientos que presenta un cilindro simplemente apoyado considerado en este trabajo con la geometría de una tubería, para cada una de las siguientes condiciones: atiesado, atiesado y arriestrado, y atiesado y con recubrimiento de concreto; bajo la acción de una carga puntual dinámica viajando en dirección circunferencial a diferentes velocidades angulares, ésto como una aproximación a la representación de un vórtice.

## **CAPÍTULO 1.- INTRODUCCIÓN**

## INTRODUCCIÓN

Existen estructuras de cascarones cilíndricos sometidos a la acción de cargas dinámicas que originan problemas de vibración, como es el caso del cono de desfogue de las turbinas Francis de la Presa Hidroeléctrica Manuel Moreno Torres ubicada en Chicoasén, Chiapas, México, estas turbinas tienen como efecto inevitable la formación de un flujo helicoidal inestable cuando son operadas a potencias reales menores a las de diseño (a este flujo se le conoce como la torcha), generando un vórtice dentro del cono de desfogue, induciendo efectos dinámicos de frecuencias relativamente bajas.

El análisis de vibraciones en conos es complejo, por lo cual se simplificó el problema al utilizar la teoría del cilindro equivalente presentada por Weingarten<sup>[1]</sup> y Seide<sup>[2]</sup>, según la cual las frecuencias naturales de conos son aproximadamente iguales a las del cilindro equivalente (fig. 2) si el ángulo  $\alpha \leq 17^\circ$ . Para el caso del cono de desfogue de la turbina Francis en Chicoasén, el ángulo  $\alpha$  es de  $5.89^\circ$ , por lo que se adopta como cilindro equivalente.

En este trabajo se obtiene el comportamiento para diversas tuberías modeladas como cascarones cilíndricos simplemente apoyados, bajo la acción de una carga puntual radial dinámica que viaja en dirección circunferencial a diferentes

velocidades angulares en un perfil del cilindro, ésto como una simplificación a la representación de un vórtice, dejando para futuras investigaciones el análisis de la carga que represente de manera más precisa al vórtice generado en las estructuras reales. Se realiza un análisis paramétrico de las frecuencias naturales para diferentes cilindros, con diferentes espesores, con atiesadores longitudinales y circunferenciales, con atiesadores y arriostrada, con atiesadores y recubrimiento de concreto. Cuando el cascarón cilíndrico es sometido a la acción de la carga puntual dinámica (simulando un vórtice) a diferentes velocidades angulares, se presentan en éste diferentes valores en los desplazamientos máximos, los cuales se obtienen en esta tesis.

Para el cálculo de las frecuencias naturales de un cascarón cilíndrico simplemente apoyado se utiliza la teoría de Soedel<sup>[3]</sup> basada en el modelo original de Donnell-Mushtary-Vlasov, para cilindros isotrópicos, simplemente apoyados. Esta ecuación es una de las expresiones más simples que se encuentran en la literatura para cascarones cilíndricos circulares y, sin embargo es aproximada en un cierto intervalo<sup>[4]</sup>, restringiendo de esta manera a cilindros con relación  $l/r \leq 10$ , debido a que para  $l/r > 10$  la teoría de Soedel no lleva a valores correctos, para estos casos se podrá recurrir a la teoría de Flügge<sup>[5]</sup>, en las anteriores expresiones  $l$  es la longitud y  $r$  es el radio del cascarón cilíndrico circular.

En estudios anteriores se ha demostrado<sup>[3]</sup> que a toda combinación  $(m,n)$ , donde  $m, n$  son los números de onda longitudinal y circunferencial respectivamente en el cascarón cilíndrico, le corresponden tres frecuencias naturales, esto es, tres combinaciones diferentes de las amplitudes  $u_{kmn}$ ,  $v_{kmn}$ ,  $w_{kmn}$ . La más baja ( $\omega_{1mn}$ ) está asociada a la componente radial del movimiento ( $w_{kmn}$ ), mientras que las otras dos, axial ( $\omega_{2mn}$ ) y circunferencial ( $\omega_{3mn}$ ), resultan ser de un orden de magnitud mayor. En este trabajo se obtuvieron los modos de vibrar de los diferentes cascarones cilíndricos, así como su menor frecuencia natural asociada ( $\omega_{1mn}$ ).

Por medio de la llamada representación espectral o desarrollo modal, de la teoría de Soedel<sup>[3]</sup> se calculan los desplazamientos de un cilindro simplemente apoyado, para tal efecto se hicieron las consideraciones siguientes: el cilindro isotrópico y homogéneo, las condiciones iniciales del problema nulas, los esfuerzos flexionantes son únicamente los que se consideran, esto con el fin de simplificar el problema. El cilindro se somete a una fuerza puntual radial (ver fig. 3) viajando alrededor de éste a diferentes velocidades angulares, para simular un vórtice. Los desplazamientos obtenidos son los correspondientes a la dirección transversal, siendo ésta la dirección más crítica, es decir, donde se presentan ante esta carga los mayores desplazamientos. Se obtuvo la velocidad aproximada a la cual se generan los

mayores desplazamientos (velocidad crítica), la cual esta dada por la relación  $\Omega_c = (\omega_k / \eta)_{\min}$ .

Para los diferentes casos de cilindros presentados en el desarrollo de este trabajo, se elaboraron gráficas en las que se observa claramente para cuáles velocidades angulares se presentan los desplazamientos máximos, además se presenta la manera de reducir el valor de los desplazamientos del cilindro.

Asimismo, se comprueba que el desplazamiento en el cilindro en el punto de aplicación de la carga a baja velocidad angular, tiende al desplazamiento estático.

Finalmente se proporcionan observaciones y recomendaciones especiales, para una adecuada aplicación de los resultados del presente análisis.

## **CAPÍTULO 2.- REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA**

## REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

V.I. Weingarten (1965)<sup>[1]</sup>, basado en el método de Galerkin, presenta un análisis lineal para cascarones cónicos considerando su vibración flexionante y de tensión. Se analizan dos cascarones cónicos, uno simplemente apoyado en sus extremos y el otro apoyado en un extremo y libre en el otro. Los especímenes de prueba los somete a vibración, y compara los resultados experimentales con los calculados analíticamente, obteniendo una buena aproximación en las frecuencias naturales.

M.J. Forrestal, D.V. Reddy y G. Herrmann (1965)<sup>[6]</sup>, analizan la respuesta de un cascarón cilíndrico ante ondas elásticas. En este estudio utilizan la técnica propuesta por Haywood para calcular los esfuerzos y velocidades en el cascarón causados por el modo dilatacional de vibración. Además de ciertas funciones elementales, la solución que proponen contiene funciones modificadas de Bessel de orden cero y uno. Los estudios exploratorios indicaron que las técnicas aproximadas utilizadas en este análisis no fueron extendidas para calcular los modos superiores de vibrar del cascarón, debido a que solamente los modos  $n=0$  y  $2$  contribuían a los esfuerzos máximos del cascarón. La formulación numérica que proponen reduce a la



mitad los extensos cálculos numéricos elaborados por otros métodos.

W.C. Lyons, J.E. Russell, y G. Herrmann (1968)<sup>[7]</sup>, presentan un estudio sobre la dinámica de cascarones cilíndricos reforzados sumergidos. Para resolver el problema de interacción líquido-cascarón desarrollaron un método aproximado, en el cual incluyen la respuesta transitoria de cascarones sumergidos en agua. El método tiene dos limitaciones:

- a) estudia sólo problemas que puedan ser resueltos por expansión modal.
- b) su precisión no es buena cuando se estudian modos amortiguados.

A pesar de estas limitaciones, el método permite conocer las amplitudes máximas y el tiempo de ocurrencia con razonable aproximación.

En general, indican que la presencia de un medio acústico tal como el agua reduce la amplitud de cada modo y la frecuencia de vibración libre. Por lo tanto concluyen que es necesaria una mayor presión dinámica crítica para causar fluencia plástica de un cascarón en agua en comparación con el cascarón en un vacío.

E.G. Lovel, (1970)<sup>[8]</sup>, estudia la respuesta de cascarones cilíndricos delgados elásticos bajo presión interna y externa, obteniendo como resultado un modo circular simple, el cual puede ser no estable en presencia de cierta irregularidad en la presión, lo cual depende de la geometría y amortiguamiento del cilindro, así como de la intensidad de la carga.

K.A. Naghdi (1970)<sup>[9]</sup>, presenta un análisis utilizando Series de Fourier de un cascarón cilíndrico circular, simplemente apoyado sujeto a la variación de una carga lineal longitudinal. El análisis que realiza Naghdi en donde obtiene esfuerzos y deformaciones, conduce a resultados prácticos con muy buena aproximación.

R. Parnes (1971)<sup>[10]</sup>, estudia la respuesta de un cascarón cilíndrico elástico, empotrado e infinitamente largo. Parnes determina los movimientos inextensionales y extensionales del cascarón debidos a la aplicación de tracciones (función del tiempo y de la coordenada angular). También determina el efecto de interacción del cascarón y el medio elástico, mediante condiciones de compatibilidad, las cuales son expresadas como un conjunto de ecuaciones acopladas integro-diferenciales en cada modo. Parnes resuelve el problema numéricamente y concluye que el comportamiento cascarón-medio elástico es similar al de un sistema amortiguado oscilando.

J.L. Urrutia-Galicia (1979)<sup>[11]</sup>, propone una solución utilizando series de Fourier para cascarones simplemente apoyados, con carga interna (fluida ó granular). Las ecuaciones las obtienen para diferentes geometrías de cascarones, y compara los resultados teóricos con los obtenidos de pruebas experimentales. Obtiene además la distribución de esfuerzos en cilindros circulares delgados.

Analiza la relación que existe entre el parámetro  $K = \sqrt{1/r \sqrt{h/r}}$ , en donde  $r$  es el radio y  $h$  es el espesor del cascarón cilíndrico, y el nivel de llenado del cilindro, con respecto a la distribución axial de esfuerzos. En los resultados teóricos y experimentales obtenidos, se observa que si  $K$  es menor que  $2.0$ <sup>[12]</sup>, la distribución axial de esfuerzos es no lineal, y el cilindro se tendrá que analizar utilizando la teoría de cascarones. Sin embargo comprueba que a medida que se incrementa el nivel de llenado del cilindro, aunque  $K$  sea menor que  $2.0$  la distribución de esfuerzos axial tiende a ser lineal y en el límite, cualquier tanque cilíndrico circular horizontal, simplemente apoyado, y completamente lleno de fluido tiene una distribución de esfuerzos que se puede calcular con la teoría de viga.

Al obtener el perfil de la distribución de esfuerzos bajo cierto fluido (agua) con densidad relativa  $\delta_r = 1$ , se mantiene aunque el fluido cambie, es decir, si se varía la densidad relativa del fluido, lo que habrá que afectar será la magnitud de la distribución de esfuerzos para tanque llenado con agua, multiplicándola por la densidad específica del fluido. Usualmente se supone que el máximo esfuerzo se presenta para cuando el nivel del fluido se encuentra a la mitad del cilindro, sin embargo, Urrutia demuestra que esto no siempre ocurre, por ejemplo para  $K=2$  el esfuerzo máximo se presenta cuando el cilindro esta totalmente lleno.

Para el análisis del cilindro con material granular el autor determina que los esfuerzos se incrementan respecto a los del fluido (agua) y la forma de la distribución de esfuerzos varía.

El análisis general de cascarones cilíndricos circulares delgados planteado por dicho autor es válido además de los problemas de equilibrio dinámico y estático, en los análisis de estabilidad.

J.L. Urrutia-Galicia (1987,1989)<sup>[13,14]</sup>, analiza la vibración libre en cascarones cilíndricos rigidizados, utilizando el modelo matemático de W. Flügge.

Las frecuencias naturales obtenidas para un cascaron cilíndrico circular simplemente apoyado, las compara con las obtenidas por Soedel obteniendo el rango de validez y convergencia de las frecuencias naturales según Soedel. Comprueba

nuevamente, que  $\Omega=(\omega_{mn} r)^2$  donde  $\omega_{mn}$  son las frecuencias naturales y  $r$  es el radio del cascarón cilíndrico circular, queda fijo e invariante para valores fijos de  $l/r$  y  $r/t$ . Presenta un análisis paramétrico de cilindros con las relaciones  $5 \leq l/r \leq 40$  y  $25 \leq r/t \leq 400$  usando la teoría de Soedel. Al graficar dichos resultados en escala doble-logarítmica, prueba que la fórmula de frecuencias de Soedel, basada en las ecuaciones de Donnell-Mushtary-Vlasov, no converge o lo hace aleatoriamente para  $l/r \geq 10$ , debido a que Soedel únicamente considera el efecto de la fuerza inercial transversal de un cilindro simplemente apoyado. Comprueba que el valor mínimo del parámetro  $\Omega=(\omega_{mn} r)^2$  ocurre para  $m=1$  y para un valor  $n$  determinado.

Obtiene las frecuencias naturales de cascarones cilíndricos rigidizados con anillos, con el fin de aumentar las frecuencias naturales del cascarón y satisfacer ciertos requisitos dinámicos de diseño. El análisis lo complementa tratando el problema ortotrópico, considerando la rigidez dominante de flexión, como rigidez equivalente en las direcciones circunferencial y longitudinal de un cilindro reforzado con anillos.

La densidad de frecuencias es también objeto de su estudio. Los resultados que obtiene, tienen gran aplicación, pues son prácticos y confiables, lo cual se traduce en economía, eficiencia y reducción del tiempo de análisis para diseño de estructuras circulares y cónicas de pared delgada.

L.J. Arango (1988)<sup>[14,4]</sup>, obtiene las frecuencias naturales de un cascarón cilíndrico, circular y simplemente apoyado, y determina el número de onda "n" circunferencial para el cual se obtiene la frecuencia natural mínima  $\omega_{mn}$ , el cual lo obtuvo combinando las teorías de flexión de Flügge y la de vibraciones de Soedel.

J.L. Urrutia-Galicia (1990)<sup>[15]</sup>, presenta un estudio respecto de las frecuencias naturales de cilindros ortotrópicos de pared delgada. En este trabajo utiliza la ecuación de frecuencias naturales desarrollada por Soedel, para cilindros ortotrópicos simplemente apoyados. Postula la existencia de un invariante  $\Omega=(\omega_{mn} r)^2$ , el cual permanece constante para cilindros con idénticas relaciones  $l/r$  y  $r/h$ , donde  $l$  es la longitud,  $r$  el radio y  $h$  el espesor del cascarón cilíndrico circular. Demuestra que la ecuación de frecuencias desarrollada por Soedel basada en el modelo original de Donnell-Mushtary-Vlasov, tiene un acoplamiento cuatro veces logarítmico entre los parámetros  $l/r$  y  $r/h$ , el número de ondas en dirección axial  $m$ , y la frecuencia natural mínima  $\omega_{mn}$  para  $m=1,2,3,\dots$ . Realiza un análisis de la densidad de frecuencias y demuestra la manera de utilizar este concepto para mejorar el comportamiento dinámico de estructuras.

Un estudio recientemente presentado por I.A. Okumura (1990)<sup>[16]</sup>, trata el problema de esfuerzos en cilindros en cantiliver. Se lleva a cabo un análisis tridimensional de esfuerzos, para cilindros sujetos a carga cortante parcial sobre uno de sus extremos, este análisis se basa en la teoría de la elasticidad. Una solución para problemas de elasticidad tridimensional. Los resultados numéricos para esfuerzos y desplazamientos en el cilindro en cantiliver (para la relación  $l/r=2$ ) se comparan con aquellos dados por el método de Saint-Venant.

Okumura concluye lo siguiente:

- Los valores de las tres componentes de esfuerzos ( $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta}$ ) en el extremo cargado vienen a ser infinitos en la frontera del área cargada.
- Los valores de  $\sigma_{rr}$  y  $\sigma_{\theta\theta}$  en el extremo fijo son muy grandes y presentan una tendencia a concentrar esfuerzos en la circunferencia del extremo.
- El valor de  $\sigma_{rz}$  en el extremo fijo sigue ligeramente una variación parabólica y presenta una tendencia a concentrar esfuerzos en la circunferencia del extremo.
- Los valores de  $\sigma_{rr}=\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{\theta z}$  y  $\sigma_{rz}$  en el extremo fijo divergen mucho de los obtenidos con el método de Saint-Venant.

J.L. Urrutja-Galicia (1991)<sup>[17]</sup>, recientemente presentó un estudio sobre el factor de amplificación de vigas bajo la acción de fuerzas puntuales en movimiento. Demostró que la localización sobre la viga del desplazamiento dinámico máximo depende de las condiciones de frontera de ésta y por cual extremo entre la fuerza móvil. Este desplazamiento máximo se localiza retrasado con respecto al punto de aplicación de la fuerza viajera. La velocidad crítica (para la cual se presentó el máximo desplazamiento dinámico) resultó ser un porcentaje de la comúnmente llamada velocidad de resonancia y que para este estudio fué del 63%. Estos avances permiten obtener cierta experiencia para entonces atacar el problema de cargas móviles en cascarones cilíndricos, un problema aún más difícil.

El parámetro  $K = \sqrt{l/r \sqrt{h/r}}$ , donde  $l$  es la longitud,  $r$  es el radio y  $h$  es el espesor de un cascarón cilíndrico circular, analizado por J.L. Urrutia-Galicia (1992)<sup>[18]</sup>, ha sido determinado para un cascarón circular delgado colocado horizontalmente y simplemente apoyado, llenado con agua hasta cualquier nivel. En este trabajo se utiliza la teoría de flexión de cascarones cilíndricos circulares. El parámetro  $K$  es un buen indicador del grado de no linealidad en esfuerzos, así como una forma de describir un cilindro de acuerdo con su longitud, radio y espesor.

Además es claramente delimitada la transición entre la teoría de viga ( $K \geq 2$ ) y la teoría de cascarones cilíndricos delgados ( $K < 2$ ).

## CAPÍTULO 3.- FORMULACIÓN DEL MODELO

## FORMULACIÓN DEL MODELO

### ANÁLISIS MATEMÁTICO

El análisis desarrollado en este trabajo se enfoca en la determinación de frecuencias naturales y desplazamientos en cascarones cilíndricos circulares. Con éste se pueden resolver problemas de vibración en tuberías, modelándolas como cascarones cilíndricos circulares rectos simplemente apoyados sobre diafragmas rígidos (fig. 4).

Un cilindro circular se genera mediante una línea recta que sigue una trayectoria circular paralela a la dirección original. Estas líneas se denominan generatrices y mantienen una misma dirección. Todo plano que sea normal a las generatrices intersecta al cilindro con una curva circular denominada perfil (fig. 4).

En este capítulo se presenta el método de operadores con expansión modal<sup>[3]</sup>, con el propósito de utilizarlo como base en el análisis de cascarones cilíndricos circulares sometidos a carga puntual en dirección circunferencial. Una vez obtenida la solución, se realizará un análisis numérico para obtener desplazamientos máximos en el sistema para una carga puntual viajando a diferentes velocidades angulares.

### 3.1 FRECUENCIAS NATURALES

Para el análisis de las frecuencias naturales de cilindros isotrópicos simplemente apoyados se utilizó la ecuación de frecuencias propuesta por Soedel<sup>[3]</sup>.

De acuerdo con la referencia 1, a toda combinación (m,n) le corresponden tres frecuencias naturales  $\omega_{kmn}$  (k=1,2,3), siendo la más baja  $\omega_{1mn}$ , la cual está asociada a la componente transversal del movimiento (fig. 5), es decir, la que menor energía necesita para ser excitada, mientras que la axial y circunferencial resultan ser de magnitud mayor. A estas frecuencias le corresponden tres combinaciones diferentes de las amplitudes  $u_{kmn}$ ,  $v_{kmn}$ ,  $w_{kmn}$  de las funciones coordenadas, donde  $u_{kmn}$  es la amplitud en la dirección axial del cascarón cilíndrico,  $v_{kmn}$  es la amplitud en la dirección circunferencial y  $w_{kmn}$  es la amplitud en la dirección radial, es decir,

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{kmn} \cos(m\pi x/l) \cos(n\phi) \\ v_{kmn} \sin(m\pi x/l) \sin(n\phi) \\ w_{kmn} \sin(m\pi x/l) \cos(n\phi) \end{bmatrix}$$

donde los subíndices m,n indican el número de onda en las direcciones longitudinal y circunferencial respectivamente (fig. 6), k indica la frecuencia natural utilizada (transversal, axial o bien circunferencial), l es la longitud del cascarón cilíndrico circular, x es la distancia longitudinal de uno de los apoyos a un punto del cascarón y  $\phi$  representa un ángulo en un perfil del cascarón respecto de un sistema coordenado.

La expresión para la obtención de frecuencias naturales utilizada en el desarrollo de este trabajo está dada por<sup>[3]</sup>:



$$\omega_{mn}^2 = (\rho h)^{-1} \left[ D_{11} \left( \frac{m\pi}{l} \right)^4 + 2 \left( D_{12} + 2D_{33} \right) \left( \frac{n}{r} \right)^2 \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 + D_{22} \left( \frac{n}{r} \right)^4 + \frac{\left( A_{11} A_{22} - A_{12}^2 \right) \left( \frac{m\pi}{l} \right)^4}{r^2 \left\{ A_{11} \left( \frac{m\pi}{l} \right)^4 + A_{22} \left( \frac{n}{r} \right)^4 + \frac{A_{11} A_{22} - A_{12}^2 - 2A_{12} A_{33}}{A_{33}} \left( \frac{n}{r} \right)^2 \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 \right\}} \right] \quad (3.1.1)$$

la cual se ha demostrado<sup>[4]</sup> que para valores de  $l/r < 10$ , donde  $l$  es la longitud y  $r$  es el radio, los resultados obtenidos son correctos, mientras que para  $l/r \geq 10$  el valor de las frecuencias naturales es erróneo.

Si se considera isótropo el cilindro se tiene:

$$D_{11} = D_{22} = D = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} \quad (3.1.2a)$$

$$D_{12} = \mu D = \frac{\mu E h^3}{12(1-\mu^2)} \quad (3.1.2b)$$

$$D_{33} = \frac{(1-\mu)D}{2} = \frac{(1-\mu)}{2} \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} \quad (3.1.2c)$$

$$A_{11} = A_{22} = K = \frac{E h}{(1-\mu^2)} \quad (3.1.2d)$$

$$A_{12} = \mu D = \frac{\mu E h}{(1-\mu^2)} \quad (3.1.2e)$$

$$A_{33} = \frac{(1-\mu)K}{2} = \frac{(1-\mu)}{2} \frac{E h}{(1-\mu^2)} \quad (3.1.2f)$$

donde:

$E$  es el módulo de elasticidad del acero

$h$  es el espesor del cascarón cilíndrico circular

$\mu$  es el módulo de Poisson del acero

$A_{ij}$  es el coeficiente de rigidez de membrana

$D_{ij}$  es el coeficiente de rigidez de flexión

Sustituyendo 3.1.2. en la ecuación 3.1.1. resulta:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{E}{\rho r^2} \left\{ \frac{\left(\frac{n}{r}\right)^2}{12(1-\mu^2)} \left[ \left(\frac{m\pi r}{l}\right)^2 + n^2 \right]^2 + \frac{\left(\frac{m\pi r}{l}\right)^4}{\left[ \left(\frac{m\pi r}{l}\right)^2 + n^2 \right]} \right\} \quad (3.1.3)$$

### 3.2 FACTOR DE PARTICIPACIÓN MODAL $\eta_k$

Al someter un cascarón a una perturbación, ésta excita los diversos modos naturales del cascarón en distintas cantidades. La cantidad de participación de cada modo en la respuesta dinámica total es definido por el *factor de participación modal*. Este factor puede ser cero para ciertos modos y puede aproximarse a un valor grande para otros, dependiendo de la naturaleza de la excitación y del cascarón.

Los modos naturales de una estructura representan vectores ortogonales que satisfacen las condiciones de frontera de la estructura. Para sistemas con un número finito de grados de libertad, el vector es de dimensión finita y el número de vectores ó modos naturales es igual al número de grados de libertad. Para sistemas continuos, por ejemplo, cascarones, el número de grados de libertad es infinito, por lo que la solución serán series infinitas, dadas por:

$$u_1(\alpha_1, \alpha_2, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(t) U_{1k} \quad (3.2.1)$$

en donde  $u_1$  es la respuesta del sistema (desplazamiento),  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son las coordenadas en el sistema donde se requiere conocer la respuesta,  $t$  es el tiempo y  $U_{1k}$  representa los modos naturales en las tres direcciones principales.

En este trabajo se hace un análisis lineal, siendo el amortiguamiento viscoso proporcional a la masa y a la rigidez del sistema; la ecuación de equilibrio dinámico de un cascarón está dada por<sup>[1]</sup>:

$$L_1(u_1, u_2, u_3) - \lambda \dot{u}_1 - \rho h \ddot{u}_1 = -q_1 \quad (\text{ec. de Love}) \quad (3.2.2)$$

donde el amortiguamiento viscoso equivalente  $\lambda$  se considera uniforme en las tres direcciones principales,  $\rho$  es la densidad de masa del acero,  $h$  es el espesor del cascarón cilíndrico circular,  $q_1$  representa la fuerza excitadora y  $L_1$  es el operador de Love el cual es un conjunto de tres ecuaciones diferenciales. Este operador  $L_1$  adopta diferentes formas que dependen de la configuración geométrica del cascarón. Para el cascarón cilíndrico circular los operadores  $L_1$  de la ecuación 3.2.2 adoptan la siguiente forma:

$$L_1 = (D/r^2)(L_{11}u_1 + L_{12}u_2 + L_{13}u_3) \quad (\text{a})$$

$$L_2 = (D/r^2)(L_{21}u_1 + L_{22}u_2 + L_{23}u_3) \quad (\text{b})$$

$$L_3 = (D/r^2)(L_{31}u_1 + L_{32}u_2 + L_{33}u_3) \quad (\text{c})$$

donde:

$$L_{11} = \frac{r}{\delta x^2} \frac{\delta^2(u_1)}{\delta x^2} + (1-\mu) \frac{\delta^2(u_1)}{\delta \phi^2} \quad (\text{a}')$$

$$L_{12} = \frac{(1+\mu)}{2} \frac{r}{\delta x} \frac{\delta^2(u_2)}{\delta \phi} \quad (\text{b}')$$

$$L_{13} = \mu r \frac{\delta(u_3)}{\delta x} \quad (\text{c}')$$

$$L_{11} = L_{12} \quad (\text{d}')$$

$$L_{22} = \frac{\delta^2(u_2)}{\delta \phi^2} + \frac{(1-\mu)}{2} r \frac{\delta^2(u_2)}{\delta x^2} \quad (\text{e}')$$

$$L_{23} = \frac{\delta(u_3)}{\delta \phi} \quad (\text{f}')$$

$$L_{31} = L_{13} \quad (\text{g}')$$

$$L_{32} = L_{23} \quad (\text{h}')$$

$$L_{33} = u_3 \quad (\text{i}')$$

Del análisis de eigenvalores se tiene que el operador  $L_1$  se puede expresar como:

$$L_1(U_{1k}, U_{2k}, U_{3k}) = -\rho h \omega_k^2 U_{1k} \quad (3.2.3)$$

Sustituyendo 3.2.1 y 3.2.3 en 3.2.2 se tiene:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ \rho h \ddot{\eta}_k + \lambda \dot{\eta}_k + \rho h \omega_k^2 \eta_k \right] U_{1k} = q_1 \quad (3.2.4)$$

Considerando la ortogonalidad entre las funciones  $U_{1k}$  como en el análisis de Fourier,

$$\delta_{pk} = U_{1k} U_{1p} \begin{cases} 1 & k=p \\ 0 & k \neq p \end{cases} \quad (3.2.5)$$

y multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por el modo  $U_{1p}$  se obtiene:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ \rho h \ddot{\eta}_k + \lambda \dot{\eta}_k + \rho h \omega_k^2 \eta_k \right] U_{1k} U_{1p} = q_1 U_{1p} \quad (3.2.6)$$

$i=1,2,3$  indica cada una de las direcciones principales, por lo que podemos expresar la ecuación 3.2.6 como:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ \rho h \ddot{\eta}_k + \lambda \dot{\eta}_k + \rho h \omega_k^2 \eta_k \right] U_{1k} U_{1p} = q_1 U_{1p} \quad (3.2.7a)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ \rho h \ddot{\eta}_k + \lambda \dot{\eta}_k + \rho h \omega_k^2 \eta_k \right] U_{2k} U_{2p} = q_2 U_{2p} \quad (3.2.7b)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ \rho h \ddot{\eta}_k + \lambda \dot{\eta}_k + \rho h \omega_k^2 \eta_k \right] U_{3k} U_{3p} = q_3 U_{3p} \quad (3.2.7c)$$

sumando las ecuaciones 3.2.7 e integrando sobre la superficie del medio continuo a lo largo de las coordenadas  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  resulta:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ \rho h \ddot{\eta}_k + \lambda \dot{\eta}_k + \rho h \omega_k^2 \eta_k \right] \int_{\alpha_2} \int_{\alpha_1} \left[ U_{1k} U_{1p} + U_{2k} U_{2p} + U_{3k} U_{3p} \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 =$$

$$\int_{\alpha_2} \int_{\alpha_1} \left[ q_1 U_{1k} + q_2 U_{2k} + q_3 U_{3k} \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2$$

(3.2.8)

en donde  $A_{1,2}$  son los parámetros de forma fundamental ó parámetros de Lamé

$$\left[ A_{1,2}^2 = \frac{\partial r}{\partial \alpha_{1,2}} + \frac{\partial r}{\partial \alpha_{1,2}} \right]$$

(3.2.9)

esto es, la relación del vector de posición y las coordenadas. En análisis tensorial se le denomina vectores base curvilíneos y a partir de estos se obtienen los tensores métricos  $A_{ij}$ .

Debido a la ortogonalidad de los modos (3.2.5) la ecuación 3.2.8 puede expresarse como:

$$\frac{1}{\rho h} \left[ \rho h \ddot{\eta}_k + \lambda \dot{\eta}_k + \rho h \omega_k^2 \eta_k \right] \int_{\alpha_2} \int_{\alpha_1} \left[ U_{1k} U_{1k} + U_{2k} U_{2k} + U_{3k} U_{3k} \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 =$$

$$\frac{1}{\rho h} \int_{\alpha_2} \int_{\alpha_1} \left[ q_1 U_{1k} + q_2 U_{2k} + q_3 U_{3k} \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2$$

(3.2.10)

Obteniendo:

$$\ddot{\eta}_k + \frac{\lambda}{\rho h} \dot{\eta}_k + \rho h \omega_k^2 \eta_k = F_k$$

(3.2.11)

en donde:

$$F_k = \frac{1}{\rho h N_k} \int_{\alpha_2} \int_{\alpha_1} \left[ q_1 U_{1k} + q_2 U_{2k} + q_3 U_{3k} \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2$$

(3.2.12)

y

$$N_k = \int_{\alpha_2} \int_{\alpha_1} \left[ U_{1k}^2 + U_{2k}^2 + U_{3k}^2 \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (3.2.13)$$

Como aproximación a un espacio infinito se toman k términos de la serie de expansión modal; para tal efecto se resuelve la ecuación definiendo los factores de participación modal para k funciones de participación, las funciones que deben conocerse son las fuerzas  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$ , las formas modales  $U_{ik}$  ( $i=1,2,3$ ) y las frecuencias naturales  $\omega_k$ , la densidad de masa por unidad de superficie y el factor de amortiguamiento  $\lambda$ .

### 3.3 CONDICIONES INICIALES

Para la solución completa de la ecuación 3.2.11 se requieren dos condiciones iniciales para el factor de participación modal, siendo éstas los desplazamientos iniciales  $u_1(\alpha_1, \alpha_2, 0)$  y las velocidades iniciales  $\dot{u}_1(\alpha_1, \alpha_2, 0)$  que se especifican para todos los puntos del continuo, (existen condiciones iniciales cero para muchos casos prácticos). Cuando se requiere conocer la respuesta transitoria y se especifican las condiciones iniciales, estas se convertirán en condiciones iniciales del factor de participación modal en  $t=0$ , esto es:

$$u_1(\alpha_1, \alpha_2, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(0) U_{1k}(\alpha_1, \alpha_2) \quad (3.3.1)$$

$$\dot{u}_1(\alpha_1, \alpha_2, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \dot{\eta}_k(0) U_{1k}(\alpha_1, \alpha_2) \quad (3.3.2)$$

Las cuales se resuelven para  $\eta_k(0)$  y  $\dot{\eta}_k(0)$ . Multiplicando 3.3.1 y 3.3.2 por  $U_{1p}$ , se obtiene:

$$\begin{aligned}
u_1(\alpha_1, \alpha_2, 0) &= \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(0) U_{1k}(\alpha_1, \alpha_2) \\
u_2(\alpha_1, \alpha_2, 0) &= \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(0) U_{2k}(\alpha_1, \alpha_2) \\
u_3(\alpha_1, \alpha_2, 0) &= \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(0) U_{3k}(\alpha_1, \alpha_2)
\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1(\alpha_1, \alpha_2, 0) &= \sum_{k=1}^{\infty} \dot{\eta}_k(0) U_{1k}(\alpha_1, \alpha_2) \\
\dot{u}_2(\alpha_1, \alpha_2, 0) &= \sum_{k=1}^{\infty} \dot{\eta}_k(0) U_{2k}(\alpha_1, \alpha_2) \\
\dot{u}_3(\alpha_1, \alpha_2, 0) &= \sum_{k=1}^{\infty} \dot{\eta}_k(0) U_{3k}(\alpha_1, \alpha_2)
\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Sumando estas ecuaciones e integrando sobre la superficie del medio continuo, y considerando además la ortogonalidad entre las funciones se obtiene:

$$\eta_k(0) = \frac{1}{N_k} \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} \left[ u_1(\alpha_1, \alpha_2, 0) U_{1k} + u_2(\alpha_1, \alpha_2, 0) U_{2k} + u_3(\alpha_1, \alpha_2, 0) U_{3k} \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \tag{3.3.5}$$

$$\dot{\eta}_k(0) = \frac{1}{N_k} \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} \left[ \dot{u}_1(\alpha_1, \alpha_2, 0) U_{1k} + \dot{u}_2(\alpha_1, \alpha_2, 0) U_{2k} + \dot{u}_3(\alpha_1, \alpha_2, 0) U_{3k} \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \tag{3.3.6}$$

en donde  $N_k$  está dado por 3.2.13.

### 3.4 SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DINÁMICA

La ecuación del factor de participación modal es la de un oscilador simple. Al considerar el cascarón compuesto por osciladores simples se puede interpretar la vibración forzada de éste, donde cada oscilador consiste en el medio continuo restringido a vibrar en uno de sus modos naturales. La superposición de la respuesta de los osciladores simples da como resultado la respuesta total del

casarón.

La ecuación del oscilador simple se puede resolver por medio de la técnica de transformación de Laplace. La solución puede obtenerse para los casos de amortiguamiento subcrítico, crítico y supercrítico. El primer caso es de gran importancia en el análisis de vibración de estructuras y por tal motivo, será el que se estudie.

La ecuación del factor de participación modal puede escribirse como:

$$\ddot{\eta}_k + 2\zeta_k \omega_k \dot{\eta}_k + \omega_k^2 \eta_k = F_k(t) \quad (3.3.7)$$

en donde:

$$\zeta_k = \frac{\lambda}{2\rho h \omega_k} \quad (3.3.8)$$

$\zeta_k$  se conoce como el coeficiente de amortiguamiento modal, y es idéntico al coeficiente de amortiguamiento en el problema de un oscilador simple.

Utilizando la transformación de Laplace en 3.3.7, se puede obtener la siguiente transformación:

$$\eta_k(s) = \frac{F_k(s) + \eta_k(0) [s + 2\zeta_k \omega_k] + \dot{\eta}_k(0)}{[s + \zeta_k \omega_k]^2 + \omega_k^2 [1 - \zeta_k^2]} \quad (3.3.9)$$

Definiendo  $\gamma_k = \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2}$  para el caso subcrítico ( $\zeta < 1$ ), y aplicando la transformación inversa de Laplace a 3.3.9 se llega finalmente al factor de participación modal  $\eta_k(t)$ ,

$$\eta_k(t) = e^{-\zeta_k \omega_k t} \left[ \eta_k(0) \cos \gamma_k t + \left( \dot{\eta}_k(0) \zeta_k \omega_k + \eta_k(0) \right) \frac{\text{sen} \gamma_k t}{\gamma_k} \right] + \frac{1}{\gamma_k} \int_0^t F_k(\tau) e^{-\zeta_k \omega_k (t-\tau)} \text{sen} \gamma_k (t-\tau) d\tau$$

La solución es una integral de convolución, ya que la función de fuerza  $F_k(t)$  es arbitraria.

Nótese que las vibraciones causadas por las condiciones iniciales, son oscilaciones que decaen exponencialmente con el tiempo. Para una fuerza dada la



integral de convolución estará formada por una parte estacionaria y una parte transitoria, la cual decae exponencialmente con el tiempo.

### 3.5 INFLUENCIA DE LA DISTRIBUCIÓN DE CARGA

Una de las condiciones para la participación de un cierto modo en la respuesta total de un sistema es la carga, considerando su distribución y su posición en el sistema.

Un rasgo interesante es que los cascarones, placas, vigas, etc. tienen modos que son simétricos respecto de la línea de simetría.

No es indispensable reorganizar la eliminación de ciertos modos (aquéllos que no participan en la respuesta total del sistema (fig 7)). Incluir todos éstos da ciertamente la respuesta correcta, sin embargo el costo de cálculo se incrementa considerablemente.

### ANÁLISIS DINÁMICO DE UN CASCARÓN CILÍNDRICO CIRCULAR, CON CARGA PUNTUAL VIAJANDO EN DIRECCIÓN CIRCUNFERENCIAL.

La función de influencia dinámica (Green) de un cascarón describe la respuesta de cada punto del cascarón para un impulso aplicado a otros puntos. Para estructuras simples, por ejemplo vibración a través de vigas, la función de influencia puede ser en una dirección. También para placas, donde la respuesta en el plano está desacoplada de la respuesta transversal para pequeñas oscilaciones, una función de influencia dinámica unidireccional es aplicable al problema de vibración transversal. Sin embargo, en el análisis dinámico de cascarones tiene que tomarse en cuenta el acoplamiento entre la respuesta transversal y la respuesta en planos tangenciales a la superficie del cascarón.

### 3.6 FORMULACIÓN DE LA FUNCIÓN DE INFLUENCIA

Un tipo de carga común en problemas de ingeniería es la carga puntual, un ejemplo de ello lo es, la carga puntual actuando en un cilindro circular viajando en dirección circunferencial (fig. 3).

Para representar este tipo de cargas, se utilizó la función Delta de Dirac<sup>[19]</sup> (función impulso, delta) dada por:

$$P = \int P(t) dt \quad (3.6.1)$$

Una función  $\delta$  en  $t = \xi$  se identifica por  $\delta(t-\xi)$  y tiene las siguientes propiedades:

$$\delta(t-\xi) = 0 \quad t \neq \xi \quad (3.6.2)$$

por lo que:

$$\int_0^{\infty} \delta(t-\xi) dt = 1, 0 \quad 0 < \xi < \infty \quad (3.6.3)$$

Si  $\delta(t-\xi)$  es multiplicada por cualquier función temporal  $f(t)$ , como se muestra en la fig. 8, el producto es nulo en todas partes excepto en  $t = \xi$  y su integral temporal se define como:

$$\int_0^{\infty} f(t) \delta(t-\xi) dt = f(\xi) \quad 0 < \xi < \infty \quad (3.6.4)$$

Un impulso unitario, aplicado en la localización  $(\alpha_1^*, \alpha_2^*)$  en el tiempo  $t^*$  en la dirección  $\alpha_1$  se puede expresar como:

$$q_1(\alpha_1, \alpha_2, t) = 0 \quad (3.6.5)$$

$$q_2(\alpha_1, \alpha_2, t) = 0 \quad (3.6.6)$$

$$q_3(\alpha_1, \alpha_2, t) = \frac{1}{A_1 A_2} \delta(\alpha_1 - \alpha_1^*) \delta(\alpha_2 - \alpha_2^*) \delta(t - t^*) \quad (3.6.7)$$

los cuales producirán una respuesta del cascarón con las tres componentes:

$$u_1(\alpha_1, \alpha_2, t) = G_{11}(\alpha_1, \alpha_2, t; \alpha_1^*, \alpha_2^*, t^*) \quad (3.6.8)$$

$$u_2(\alpha_1, \alpha_2, t) = G_{21}(\alpha_1, \alpha_2, t; \alpha_1^*, \alpha_2^*, t^*) \quad (3.6.9)$$

$$u_3(\alpha_1, \alpha_2, t) = G_{31}(\alpha_1, \alpha_2, t; \alpha_1^*, \alpha_2^*, t^*) \quad (3.6.10)$$

Donde  $G_{ij}$  es la función de Green y representa la respuesta en la dirección  $i$  en  $\alpha_1, \alpha_2, t$  para un impulso unitario en la dirección  $j$  en  $\alpha_1^*, \alpha_2^*, t^*$ .

De acuerdo con 3.2.2, la ecuación de movimiento está dada por:

$$L_1(G_{1j}, G_{2j}, G_{3j}) - \lambda \dot{G}_{1j} - \rho h \ddot{G}_{1j} = \frac{\delta_{1j}}{A_1 A_2} \delta(\alpha_1 - \alpha_1^*) \delta(\alpha_2 - \alpha_2^*) \delta(t - t^*) \quad (3.6.11)$$

donde  $i, j = 1, 2, 3$  y

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (3.6.12)$$

Utilizar el análisis de expansión modal se encuentran las componentes  $G_{1j}$ . De acuerdo con la expresión 3.2.1, la solución está dada por:

$$G_{1j}(\alpha_1, \alpha_2, t; \alpha_1^*, \alpha_2^*, t^*) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{1j} (t; \alpha_1^*, \alpha_2^*, t^*) U_{1k}(\alpha_1, \alpha_2) \quad (3.6.13)$$

donde  $i, j = 1, 2, 3$ . El término  $\eta_{jk}$  es el factor de participación modal en el  $k$ -ésimo modo debido al impulso en la dirección  $j$ . Sustituyendo 3.6.13 en 3.6.11 e integrando sobre la superficie del continuo, y considerando además, la ortogonalidad de las funciones, se tiene:

$$\ddot{\eta}_{jk} + 2\zeta_k \omega_k \dot{\eta}_{jk} + \omega_k^2 \eta_{jk} = F_{jk}(t; \alpha_1^*, \alpha_2^*, t^*) \quad (3.6.14)$$

donde:

$$F_{jk}(t; \alpha_1^*, \alpha_2^*, t^*) = \frac{1}{\rho h N_k} U_{jk}(\alpha_1^*, \alpha_2^*) \delta(t - t^*) \quad (3.6.15)$$

Resolviendo  $\eta_{jk}$  para el caso de amortiguamiento subcrítico, para  $t \geq t^*$

$$\eta_{jk} = \frac{U_{jk}(t - t^*)}{\rho h N_k \gamma_k} U_{jk}(\alpha_1^*, \alpha_2^*) e^{-\zeta_k \omega_k (t - t^*)} \sin \gamma_k (t - t^*) \quad (3.6.16)$$

La función de influencia dinámica se obtiene sustituyendo 3.6.16 en 3.6.13, la cual se expresa como

$$G_{1j}(\alpha_1, \alpha_2, t; \alpha_1^*, \alpha_2^*, t^*) = \frac{1}{\rho h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_{1k}(\alpha_1, \alpha_2) U_{1k}(\alpha_1^*, \alpha_2^*) S(t - t^*)}{N_k} \quad (3.6.17)$$

donde:

$$S(t-t^*) = \frac{1}{\rho h} e^{-\zeta_k \omega_k (t-t^*)} \sin \gamma_k (t-t^*) U(t-t^*) \quad (3.6.18)$$

### 3.7 SOLUCIÓN DE LA FUNCIÓN DE INFLUENCIA

La respuesta en un sistema en la dirección  $i$  es igual a la suma en el espacio y tiempo de todas las cargas en la direcciones  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  y normal, multiplicándolas por  $G_{11}$ ,  $G_{12}$  y  $G_{13}$  respectivamente. Este razonamiento de superposición nos lleva a la solución integral del problema, dada por:

$$u_i(\alpha_1, \alpha_2, t) = \int_0^t \int_{\alpha_2} \int_{\alpha_1} \sum_{j=1}^3 G_{ij}(\alpha_1, \alpha_2, t; \alpha_1^*, \alpha_2^*, t^*) q_j(\alpha_1^*, \alpha_2^*, t^*) A_1^* A_2^* d\alpha_1^* dt_1^* \quad (3.6.19)$$

### 3.8 RESPUESTA DE UN CASCARÓN CILÍNDRICO BAJO CARGA PUNTUAL VIAJANDO EN DIRECCIÓN CIRCUNFERENCIAL.

Para el caso de un cascarón simplemente apoyado las funciones coordenadas (modos) están dados por:

$$\begin{aligned} U_{1k}(x, \theta) &= A_{mnp} \cos \frac{m\pi x}{l} \cos n(\theta - \phi) \\ U_{2k}(x, \theta) &= B_{mnp} \cos \frac{m\pi x}{l} \cos n(\theta - \phi) \\ U_{3k}(x, \theta) &= C_{mnp} \cos \frac{m\pi x}{l} \cos n(\theta - \phi) \end{aligned} \quad (3.6.20)$$

donde  $m=1,2,\dots$ ;  $n=0,1,2,\dots$  y  $p=1,2,3$

La función de influencia dinámica para un cascarón cilíndrico delgado simplemente apoyado está dada por<sup>[3]</sup>:

$$G_{ij} = \frac{1}{\rho h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^3 \frac{1}{N_{mnp}} A_{ij} S(t-t^*) \quad (3.6.21)$$

donde:

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= A_{mnp}^2 \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} \cos n(\theta - \theta^*) \\
 A_{12} &= A_{mnp} B_{mnp} \cos \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin n(\theta - \theta^*) \\
 A_{13} &= A_{mnp} C_{mnp} \cos \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \cos n(\theta - \theta^*) \\
 A_{21} &= B_{mnp} A_{mnp} \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} \sin n(\theta - \theta^*) \\
 A_{22} &= B_{mnp}^2 \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \cos n(\theta - \theta^*) \\
 A_{23} &= B_{mnp} C_{mnp} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin n(\theta - \theta^*) \\
 A_{31} &= C_{mnp} A_{mnp} \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} \cos n(\theta - \theta^*) \\
 A_{32} &= C_{mnp} B_{mnp} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin n(\theta - \theta^*) \\
 A_{33} &= C_{mnp}^2 \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \cos n(\theta - \theta^*)
 \end{aligned} \tag{3.6.22}$$

La carga puntual viajando en dirección circunferencial puede expresarse de la siguiente manera:

$$q_1 = q_2 = 0$$

(3.6.23)

$$q_3(x, \theta, t) = \frac{F}{a} \delta(x - \xi) \delta(\theta - \Omega t)$$

en donde  $x, \theta, t$  es la ubicación en el cilindro, en dirección longitudinal y circunferencial respectivamente de la respuesta de éste en el tiempo. La ubicación de la carga estará en  $\xi, \Omega t$ , siendo  $\Omega$  la velocidad angular de ésta.

Para condiciones iniciales cero ( $u = 0$  y  $\dot{u} = 0$ ) se obtiene:

$$u_1(x, \theta, t) = \frac{F}{\rho h} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^l \int_0^{2\pi} \frac{1}{N_{mnp}} A_{13} S(t-t^*) \delta(x^* - \xi) \delta(\theta - \Omega t) \delta\theta^* \delta x^* \tag{3.6.24}$$

en la cual  $A_{13}$ ,  $A_{23}$ ,  $A_{33}$  están dadas 3.6.22 y  $S(t-t^*)$  por la ecuación 3.6.18, en forma expandida e integrándola para  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  se tiene:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \frac{F}{\rho h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_k N_k} \begin{pmatrix} A_k C_k \cos m\pi x/l \\ B_k C_k \sin m\pi x/l \\ C_k^2 \sin m\pi x/l \end{pmatrix} \sin m\pi \xi/l \int_0^t e^{-a_k(t-t^*)} \sin \gamma_k(t-t^*) \cos n(\theta - \Omega t^*) dt^* \quad (3.6.25)$$

En el desarrollo de este trabajo se calcularon los desplazamientos en el sentido transversal ( $u_3$ ), debido a que para la carga descrita anteriormente, se consideran los más críticos. Estos se obtuvieron de la siguiente manera:

$$u_3 = \frac{F}{\rho h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_k N_k} C_k^2 \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{m\pi \xi}{l} \int_0^t e^{-a_k(t-t^*)} \sin \gamma_k(t-t^*) \cos n(\theta - \Omega t^*) dt^* \quad (3.6.26)$$

De esta ecuación se tiene que:

$$J_k(t) = \int_0^t e^{-a_k(t-t^*)} \sin \gamma_k(t-t^*) \cos n(\theta - \Omega t^*) dt^* \quad (3.6.27)$$

Integrando por variable compleja se obtiene

$$J_k(t) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \quad (3.6.28)$$

donde:

$$p_1 = \frac{a_k \left[ -ie^{i[-n(\theta - \Omega t)]} \right]}{2 \left[ a_k^2 + (\gamma_k - n\Omega)^2 \right]} - \frac{a_k e^{-a_k t} \left[ -ie^{i[\gamma_k t - n\theta]} \right]}{2 \left[ a_k^2 + (\gamma_k - n\Omega)^2 \right]} \quad (3.6.29)$$

$$p_2 = \frac{i(\gamma_k - n\Omega) \left[ e^{i[-n(\theta - \Omega t)]} \right]}{2 \left[ a_k^2 + (\gamma_k - n\Omega)^2 \right]} - \frac{i(\gamma_k - n\Omega) e^{-a_k t} \left[ e^{i[\gamma_k t - n\theta]} \right]}{2 \left[ a_k^2 + (\gamma_k - n\Omega)^2 \right]} \quad (3.6.30)$$

$$p_3 = \frac{a_k \left[ -ie^{i[n(\theta - \Omega t)]} \right]}{2 \left[ a_k^2 + (\gamma_k + n\Omega)^2 \right]} - \frac{a_k e^{-a_k t} \left[ -ie^{i[\gamma_k t + n\theta]} \right]}{2 \left[ a_k^2 + (\gamma_k + n\Omega)^2 \right]} \quad (3.6.31)$$

$$P_4 = \frac{1(\gamma_k + n\Omega) \left[ e^{1|n(\theta - \Omega t)|} \right]}{2 \left[ a_k^2 + (\gamma_k + n\Omega)^2 \right]} - \frac{1(\gamma_k + n\Omega) e^{-a_k t} \left[ e^{1|\gamma_k t + n\theta|} \right]}{2 \left[ a_k^2 + (\gamma_k + n\Omega)^2 \right]} \quad (3.6.32)$$

donde:

$$\gamma_k = \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} \quad (3.6.33)$$

$\omega_k$  dada por la expresión 3.1.3

$$a_k = \zeta_k \omega_k \quad (3.6.34)$$

Soedel<sup>[3]</sup> obtiene la siguiente forma de  $J_k(t)$ :

$$J_k(t) = Y_k \cos \left[ n(\theta - \Omega t) - \phi_k \right] + e^{-a_k t} T_k(t) \quad (3.6.35)$$

donde:

$$Y_k = \frac{\sqrt{a_k^2 (\xi_k^2 - n_k^2)^2 + [n_k (a_k^2 + \xi_k^2) - \xi_k (a_k^2 + n_k^2)]^2}}{2[a_k^4 + 2a_k^2(n_k^2 \Omega^2 + \gamma_k^2) + (n_k^2 \Omega^2 - \gamma_k^2)^2]} \quad (3.6.36)$$

$$\phi_k = \tan^{-1} \frac{a_k^2 (\xi_k^2 - n_k^2)^2}{n_k (a_k^2 + \xi_k^2) - \xi_k (a_k^2 + n_k^2)} \quad (3.6.37)$$

$$T_k(t) = \frac{a_k \sin(n\theta - \gamma_k t) + \xi_k \cos(n\theta - \gamma_k t)}{2(a_k^2 + \xi_k^2)} - \frac{a_k \sin(n\theta + \gamma_k t) + n_k \cos(n\theta - \gamma_k t)}{2(a_k^2 + n_k^2)} \quad (3.6.38)$$

donde:

$$\xi_k = n\Omega - \gamma_k \quad (3.6.39)$$

$$n_k = n\Omega + \gamma_k \quad (3.6.40)$$

Donde se observa un fenómeno muy interesante, el cual indica la presencia de resonancia en la solución cuando  $\Omega = \gamma_k/n$  y  $\zeta_k \approx 0$ .

Este fenómeno se observa en la parte estacionaria de la solución, por lo que, la primera velocidad crítica  $\Omega_c$  ocurre cuando:

$$\Omega_c = \left( \frac{\omega_k}{n} \right)_{\min} \quad (3.6.41)$$

Por otra parte, en las expresiones 3.6.29, 3.6.30, 3.6.31 y 3.6.32, si se desprecia el amortiguamiento ( $\lambda=0$ ), entonces  $\gamma_k = \omega_{mn}$ , y se obtienen los siguientes resultados:

$$p_1 = 0 \quad (3.6.42)$$

$$p_2 = \frac{1 (\omega_{mn} - n\Omega) e^{i(-n\theta + n\Omega t)}}{2 (\omega_{mn} - n\Omega)^2} - \frac{1 (\omega_{mn} - n\Omega) e^{i(\omega_{mn} t - n\theta)}}{2 (\omega_{mn} - n\Omega)^2} \quad (3.6.43)$$

$$p_3 = 0 \quad (3.6.44)$$

$$p_4 = \frac{1 (\omega_{mn} + n\Omega) e^{i(n\theta + n\Omega t)}}{2 (\omega_{mn} + n\Omega)^2} - \frac{1 (\omega_{mn} + n\Omega) e^{i(\omega_{mn} t + n\theta)}}{2 (\omega_{mn} + n\Omega)^2} \quad (3.6.45)$$

Una duda aparece respecto del valor límite de la ecuación 3.6.43, conforme el parámetro  $\Omega$  se aproxima al valor  $\omega_{mn}/n$ . Parece que un valor ilimitado para el desplazamiento puede ser una posibilidad en un fenómeno parecido al efecto de resonancia de estructuras bajo carga armónica<sup>[20]</sup>, no siendo éste el caso. En el caso de cargas armónicas actuando en una localización específica la singularidad de la solución es del tipo  $1/0$ . Sin embargo, para fuerzas moviéndose sobre una estructura, como por ejemplo el caso de una viga simplemente apoyada y con una carga móvil actuando en ésta<sup>[3]</sup>, no se presenta la singularidad antes mencionada. Entonces, el problema es demostrar si existe un límite cuando la solución para el desplazamiento se aproxima a la condición  $0/0$ , el cual se obtiene en las siguientes líneas.

Si en la ecuación 3.6.43 se sustituye  $\Omega = \omega_{mn}/n$  se obtiene:

$$b = \frac{1 (0) e^{i(-n\theta + n\Omega t)}}{2 (0)} - \frac{1 (0) e^{i(\omega_{mn} t - n\theta)}}{2 (0)} \quad (3.6.46)$$

y tal parece que existe una singularidad del tipo  $0/0$ , pero la ecuación 3.6.43 puede expresarse como sigue (considerando que  $\omega_{mn} = n\Omega$ ):



$$b = \frac{1}{2} \frac{(\omega_{mn} - \omega_{mn}) e^{i(-n\theta + \omega_{mn} t)}}{(\omega_{mn} - \omega_{mn})(\omega_{mn} + \omega_{mn})} - \frac{1}{2} \frac{(\omega_{mn} - \omega_{mn}) e^{i(\omega_{mn} t - n\theta)}}{(\omega_{mn} - \omega_{mn})(\omega_{mn} + \omega_{mn})} \quad (3.6.47)$$

por lo que:

$$b = \frac{1}{2} \frac{e^{i(-n\theta + \omega_{mn} t)}}{(\omega_{mn} + \omega_{mn})} - \frac{1}{2} \frac{e^{i(-n\theta + \omega_{mn} t)}}{2(\omega_{mn} + \omega_{mn})} = 0 \quad (3.6.48)$$

con lo cual se comprueba que no existe alguna singularidad.

Por otra parte integrando la ecuación 3.6.26 se obtiene la respuesta (desplazamientos transversales) del cascarón cilíndrico circular simplemente apoyado, sometido a una carga puntual descrita anteriormente, como a continuación se expresa:

$$u_3 = \frac{F}{\rho h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_k N_k} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{m\pi \xi}{l} \left[ \frac{\cos [n\theta + \phi - n\Omega t]}{2 \sqrt{a_k^2 + (\gamma_k - n\Omega)^2}} + \frac{\cos [n\theta - \alpha - n\Omega t]}{2 \sqrt{a_k^2 + (\gamma_k + n\Omega)^2}} \right] \left\{ \frac{e^{-a_k t} \cos [n\theta + \phi - \gamma_k t]}{2 \sqrt{a_k^2 + (\gamma_k - n\Omega)^2}} + \frac{e^{-a_k t} \cos [n\theta - \alpha - \gamma_k t]}{2 \sqrt{a_k^2 + (\gamma_k + n\Omega)^2}} \right\} \quad (3.6.49)$$

donde:

$$\alpha = \tan^{-1} \left[ \frac{a_k}{\gamma_k + n\Omega} \right] \quad (3.6.50)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left[ \frac{a_k}{\gamma_k - n\Omega} \right] \quad (3.6.51)$$

El factor  $N_k$  se obtiene con la expresión 3.2.13, para la dirección transversal, dando como resultado:

$$N_k = \frac{l r \pi}{2} \epsilon_n \quad (3.6.52)$$

donde

$$c_n = \begin{cases} 1 & n \neq 0 \\ 2 & n = 0 \end{cases}$$

En el capítulo siguiente se realiza un análisis paramétrico con el objeto de conocer el comportamiento del modelo antes descrito.

## **CAPÍTULO 4.- ANÁLISIS PARAMÉTRICO**

## ANÁLISIS PARAMÉTRICO

Con el objeto de conocer el comportamiento del modelo descrito en el capítulo anterior, se estudian varios cascarones cilíndricos circulares con diversas características físicas. Para tal efecto se variaron los parámetros correspondientes al radio, longitud, espesor y el número de armónicas a participar en la respuesta del cascarón cilíndrico circular (fig. 9). En la figura 6 están dibujados los modos de vibrar del cilindro en la dirección transversal, para distintos números de ondas, longitudinal ( $m$ ) y circunferencial ( $n$ ).

El análisis paramétrico se realizó tomando en cuenta los siguientes puntos y variables:

### 1) Frecuencias naturales

a) Relación espesor del cilindro- $(\omega_{mn}/n)$ , donde  $\omega_{mn}$  es la frecuencia natural para el modo ( $m,n$ ) y  $n$  es el número de onda circunferencial

### 2) Convergencia

### 3) Relación velocidad-desplazamiento

a) tiempo-desplazamiento

b) ángulo-desplazamiento

#### 4) Relación espesor del cilindro-desplazamiento

##### 4.1) FRECUENCIAS NATURALES

###### 4.1.1) Relación espesor del cilindro- $(\omega_{mn}/n)_{\min}$

Para el cálculo de las frecuencias naturales se utilizó la ecuación 3.1.3 de Soedel, la cual se ha demostrado<sup>[15]</sup> que para valores de  $l/r < 10$  siendo  $l$  la longitud y  $r$  el radio del cascarón cilíndrico, se obtienen resultados correctos de las frecuencias naturales, y para valores iguales o mayores que 10 se obtienen valores erróneos de dichas frecuencias, debido a que la ecuación 3.1.3 considera únicamente el efecto de la fuerza inercial transversal de un cilindro simplemente apoyado. El comportamiento de las frecuencias naturales asociadas a los distintos cascarones cilíndricos circulares estudiados (fig. 10, 11, 12, 13 y 14) se observa en las gráficas de las figuras 15 a la 24; las gráficas de las figuras 15a a la 20a corresponden a las frecuencias naturales de cascarones cilíndricos circulares con la misma relación  $l/r$  pero diferente espesor (fig. 10), los datos correspondientes están indicados en la tabla 1. Las figuras 15b. a la 24b son una ampliación de las figuras 15a a la 24a de las frecuencias naturales correspondientes a el número de onda longitudinal  $m=1$ ; en ellas el número de onda circunferencial  $n$  varía de 0 a 31. De acuerdo con la ecuación 3.6.36, se observa que  $Y_k$  toma un valor cada vez mayor cuando el amortiguamiento sea pequeño y la velocidad angular de la carga tienda al valor de  $\omega_{mn}/n$ . En las gráficas de las figuras 15c a la 24c se indica el comportamiento de la relación  $\omega_{mn}/n$  para  $m=1$  y  $n$  variando de uno en uno hasta el valor de 31 excepto para el caso  $n=0$ . De las gráficas se nota que el mínimo valor de la relación  $\omega_{mn}/n$  no corresponde al valor  $n=1$ , sino que varía de acuerdo al tipo y propiedades del cascarón cilíndrico.

Para el cálculo de las frecuencias naturales y desplazamientos de un cascarón cilíndrico circular original, un cascarón cilíndrico circular atiesado, un cascarón cilíndrico circular atiesado y arriostado, un cascarón cilíndrico circular atiesado y con recubrimiento de concreto, se tomó como base el cascarón original número 3 (tabla 1) correspondiente al modelo del cono de desfogue de las turbinas Francis de la P.H. Chicoasén. Para ello se calculó un espesor y radio equivalente para observar el efecto que tienen los atiesadores y el recubrimiento de concreto armado en el cascarón, utilizando las siguientes ecuaciones<sup>[6]</sup>:

$$\frac{E h_o^3}{12(1-\mu^2)} = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} + \frac{E I_x}{S_x} + \frac{E A_x C_x^2}{S_x} + \frac{E_c h_c^3}{12(1-\mu_c^2)} + \frac{E_c S h_c C^2}{S} \quad (4.1.1)$$

$$\frac{E h_o^3}{12(1-\mu^2)} = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} + \frac{E I_\phi}{S_\phi} + \frac{E A_\phi C_\phi^2}{S_\phi} + \frac{E_c h_c^3}{12(1-\mu_c^2)} + \frac{E_c S h_c C^2}{S} \quad (4.1.2)$$

donde:

$h, h_o, h_c$  espesores del cascarón original, equivalente y del recubrimiento de concreto respectivamente.

$E$  módulo de elasticidad del acero.

$E_c$  es el módulo de elasticidad del concreto.

$\mu, \mu_c$  módulos de Poisson para el acero y concreto respectivamente.

$I_x, I_\phi$  momentos de inercia de los atiesadores con respecto a la tangente a la superficie media del cascarón cilíndrico circular.

$S_x, S_\phi$  separaciones entre atiesadores longitudinales y circunferenciales.

$S$  ancho, del recubrimiento de concreto.

$A_x, A_\phi$  áreas de acero de los atiesadores longitudinales y circunferenciales.

$C_x, C_\phi$  son las distancias del centroide de los atiesadores longitudinales y circunferenciales respectivamente al eje neutro del cascarón cilíndrico circular de acero.

$C$  es la distancia del centroide del área de concreto equivalente al eje neutro del cascarón cilíndrico circular de acero.

En la obtención del espesor y radio equivalente del cascarón cilíndrico con atiesadores (tabla 2, fig. 11) no se consideró en las ecuaciones anteriores los términos correspondientes a las propiedades del concreto ( $h_c=0$ ). Con estos datos se obtuvieron sus frecuencias naturales las cuales se muestran en la figura 21a. Comparando estas frecuencias naturales con las obtenidas para los cascarones cilíndricos número 1 al 6 mostradas en las figuras 15a a la 20a, se observa un incremento en el valor de las frecuencias naturales debido a la rigidez que aportan al sistema los atiesadores.

Para el cascarón cilíndrico circular atiesado y arriostrado (fig. 12 y 13), el espesor y radio equivalente son los mismos que para el atiesado. Los datos para este cascarón se especifican en las tablas 3 y 4 y corresponden a los casos en el que el

cascarón cilíndrico circular atiesado tiene uno y tres arriostramientos intermedios respectivamente. El comportamiento de éstos cascarones de acero atiesados se observa en las gráficas de las figuras 22a y 23a.

El espesor del cascarón cilíndrico atiesado y con recubrimiento de concreto (fig. 14), se obtuvo a partir de las ecuaciones (4.1.1) y (4.1.2). Con base en el equilibrio de fuerzas de una sección del perfil del cascarón cilíndrico, considerando el recubrimiento de concreto, el cascarón original de acero y los atiesadores se obtuvo el radio equivalente, los valores obtenidos se presentan en la Tabla 5. En figura 24a se graficaron las frecuencias naturales de este cascarón cilíndrico, se observa que la adición de rigidez al mismo con recubrimiento de concreto no incrementa el valor de las frecuencias naturales respecto a los valores de las frecuencias naturales del cascarón cilíndrico circular atiesado, debido al gran incremento en su masa proporcionado por el recubrimiento de concreto.

Como un resultado de interés es el comportamiento que presentan los valores de los términos  $(\omega_{mn}/n)$  mínimos para  $m=1,3,5$ , con respecto al espesor del cascarón cilíndrico circular. Estos valores dados en la tabla 6, se graficaron en sistema doble-logarítmico como se observa en la figura 25 y en la cual puede extrapolarse para otros valores de  $m$  y del espesor del cascarón, debido al comportamiento lineal y logarítmico que presentan respectivamente.

## 4.2) CONVERGENCIA

En el cálculo de los desplazamientos de un cascarón cilíndrico, un número infinito de modos de vibrar participan en la respuesta. Para el análisis aquí realizado se llevó a cabo un estudio respecto a la convergencia de la misma en función del número de modos que se toman en cuenta en su cálculo. Se analizaron los cascarones número 1, 2, 3, 4, 5 y 6 para tres diferentes valores de la velocidad angular; uno corresponde a la velocidad angular igual a la relación  $(\omega_{mn}/n)$  mínima, y los otros dos para velocidades angulares con valores menores y mayores respecto de dicha relación mínima. Se consideraron valores de  $(m,n)=(1,1), (3,3), (5,5), (7,7), \dots, (179,179)$ , obteniéndose la respuesta de los cascarones cilíndricos antes mencionados, la cual está representada en las gráficas de las figuras 26 a la 31 respectivamente, y en las cuales se observa que para la velocidad angular igual al valor de  $(\omega_{mn}/n)$  mínimo, el desplazamiento converge de manera general para valores de  $(m,n)$  de hasta  $(179, 179)$ , mientras que para las velocidades de valores mayores y menores respecto del valor  $(\omega_{mn}/n)$  mínimo, éste converge para cuando se alcanzan

valores de  $(m,n)=(31,31)$ .

Se observa además, que mientras más grueso es el cascarón cilíndrico, el desplazamiento para la velocidad angular igual al valor de  $(\omega_{mn}/n)$  mínimo converge más rápidamente.

### 4.3) RELACIÓN VELOCIDAD-DESPLAZAMIENTO

Las gráficas de las figuras 32a,b,c a la 34a,b,c y de la 38a,b,c a la 44a,b,c están normalizadas con respecto al desplazamiento estático.

En las gráficas de las figuras 32a, 33a, 34a, 38a, 39a, 40a, 41a y 44a están representados los desplazamientos de los cascarones cilíndricos no. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 10 (tablas 1,2 y 5), considerando la participación de las armónicas para  $m=1,3,5,7,\dots,31$  y  $n=0,1,2,3,\dots,31$ .

En las gráficas de las figuras 32b, 33b, 34b, 38b, 39b, 40b, 41b y 44b están representados los desplazamientos de los cascarones cilíndricos no. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 10 (tablas 1,2 y 5), considerando la participación de las armónicas para  $m=1,3,\dots,179$  y  $n=0,1,\dots,179$ . Aquí también se tomaron valores de la velocidad angular tales que incluyeran aquellas correspondientes a los valores de  $(\omega_{mn}/n)$  mínima, así como para valores alrededor de éstas.

Las gráficas de las figuras 32c, 33c, 34c, 38c, 39c, 40c, 41c, 42c, 43c y 44c, las cuales representan únicamente la parte estacionaria de la respuesta correspondiente a los cascarones cilíndricos no. 1 al 10, se obtuvieron considerando únicamente la participación de las armónicas dadas en la tabla 7.

La respuesta del sistema descrito anteriormente se constituye de una parte estacionaria y una parte transitoria de acuerdo con la ecuación (3.6.49).

El cálculo de los desplazamientos máximos de los cascarones cilíndricos ante una carga puntual con magnitud de 1000 Nw que viaja en dirección circunferencial respecto del mismo (fig. 3), se hizo considerando la parte estacionaria y transitoria de la respuesta, cuyas gráficas corresponden a las figuras 32a,b, 33a,b, 34a,b, 38a,b, 39a,b, 40a,b, 41a,b, 42a,b, 43a,b y 44a,b, para las gráficas de las figuras 32c, 33c, 34c, 38c, 39c, 40c, 41c, 42c, 43c y 44c únicamente fué considerada la parte estacionaria de la respuesta.

Los desplazamientos calculados para los cascarones cilíndricos no. 1 al no. 7 y el no. 10 se obtuvieron a una distancia del apoyo de  $1/2$  (donde la carga viajera se aplica) y un ángulo de  $\theta=0^\circ$  (fig. 3a). Para los cascarones cilíndricos no. 8 y no. 9, el desplazamiento se calculó a  $1/4$  y  $1/8$  respectivamente y  $\theta=0^\circ$  (fig. 3b y 3c).



Las velocidades angulares se seleccionaron de tal manera que se considerasen aquellas con valor igual a  $(\omega_{mn}/n)$  mínima. Los desplazamientos presentados en las gráficas de las figuras 32a, 33a, 34a, 38a, 39a, 40a, 41a y 44a, correspondientes a los cascarones cilíndricos no. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 10 (tablas 1,2 y 5), se obtuvieron considerando la participación de  $m=1,3,5,7,\dots,31$  y  $n=0,1,2,\dots,31$  (tabla 7).

Para los cascarones cilíndricos no. 8 y no. 9 (tablas 3 y 4), los desplazamientos generados por las distintas velocidades angulares, dados en las figuras 42a y 43a respectivamente, se obtuvieron para las armónicas dadas en las tablas 8 y 9. Para las gráficas de las figuras 42b y 43b se obtuvo la respuesta con la participación de las armónicas ( $m=2,6,10,\dots,180$ ,  $n=0,1,2,3,\dots,180$ ) y ( $m=4,12,20,\dots,180$  y  $n=0,1,2,3,\dots,180$ ) respectivamente, para aquellas velocidades angulares con valor igual o alrededor de  $(\omega_{mn}/n)$  mínimo.

#### 4.3.1) Relación tiempo-desplazamiento

Los desplazamientos graficados en la figura 35 corresponden al cascarón cilíndrico número 3 sometido a una carga como la que se muestra en la figura 3a y con velocidad angular igual a  $(\omega_{mn}/n)$  mínima (21.5218 rad/s) para  $m=1$ . Estos desplazamientos se obtuvieron con la participación de las armónicas para  $m=1,3,\dots,179$  y  $n=0,1,2,\dots,179$ . La respuesta de un cascarón cilíndrico circular está dada por la parte estacionaria más la transitoria, para el cascarón cilíndrico número 3 se calculó su respuesta en el tiempo (fig. 35a). En la figura 35b se observa únicamente la parte estacionaria de la respuesta, la cual tiende a establecerse ante la perturbación dada. La parte transitoria de la respuesta tiende a desaparecer con respecto al tiempo, como se puede observar en la gráfica de la figura 35c.

Una vez realizada la superposición de la parte estacionaria y transitoria se obtiene la respuesta total del sistema, y para el cascarón cilíndrico circular número 3 la respuesta total del mismo se observa en la figura 35a, la cual es debida a una carga viajando en dirección circunferencial con valor de 166.8355 rad/s, la cual corresponde a su frecuencia natural mínima, y a partir de la cual se eligió el valor máximo del desplazamiento en el tiempo, para posteriormente representarlo en la gráfica de velocidad angular contra desplazamiento (fig. 34).

#### 4.3.2) Relación ángulo-desplazamiento

Las gráficas de las figuras 36 y 37 corresponden a los desplazamientos del perfil del cascarón cilíndrico no. 3 (tabla 1) a una distancia del apoyo de éste de  $l/2$ , sometidos a velocidades angulares iguales a 528.535 rad/s y 166.8355 rad/s respectivamente. Para la respuesta del cilindro se consideró la participación de los modos de vibrar  $(m,n)=(1,7)$  y  $(m,n)=(1,3)$  para cada caso, observándose que el perfil del cascarón cilíndrico circular original de acero toma la forma del modo a participar; cuando la participación es de varias formas modales, la respuesta total es la superposición de todos ellos.

#### 4.4) RELACIÓN ESPESOR DEL CILINDRO-DESPLAZAMIENTO

Con el objeto de conocer el comportamiento que tienen los desplazamientos generados en un cascarón cilíndrico respecto a su espesor, éstos se obtuvieron para distintos valores del espesor. Los datos de dichos cascarones se encuentran en la Tabla 10, en la cual se le denomina velocidad crítica a aquella velocidad angular igual a  $(\omega_{mn}/n)$  mínima, baja velocidad angular a aquella cuyo valor es mucho menor que  $(\omega_{mn}/n)$  mínima de tal manera que el desplazamiento producido por ésta sea el estático y velocidad a la cual llamaremos de impacto a la que produce un desplazamiento con valor del doble del estático, debido a que en vigas sucede este efecto siendo probable que este resultado se repita para cascarones cilíndricos circulares. Se consideró la participación de las formas modales para  $m=1,3,5,\dots,179$  y  $n=0,1,2,3,\dots,179$ . Los resultados se observan en la figura 45 los cuales muestran un comportamiento lineal en un sistema doble-logarítmico.

## CAPÍTULO 5.- CONCLUSIONES

## CONCLUSIONES

Las conclusiones que emanan de este trabajo de investigación son las siguientes:

Al incrementar el espesor de la tubería se observa, que ante una perturbación dada, las frecuencias naturales son menos susceptibles de excitarse. Esto es debido a que el aumento del espesor hace más rígida la tubería y por lo tanto sus frecuencias naturales tienden a ser mayores. Asimismo, se verifica que la menor frecuencia natural no siempre es la que genera el mayor desplazamiento, sino que la da la relación  $(\omega_{mn}/n)$  mínima ó muy cercana a ésta. Al tratar de incrementar las frecuencias naturales, mediante un recubrimiento de concreto armado no resulta adecuado pues el aumento de masa es excesivo comparado con el incremento de rigidez. Para lograr este objetivo es mejor arriostrear la tubería, puesto que por este medio se incrementa la rigidez sin incremento de masa.

De acuerdo a las gráficas 32 a la 34 y de la 38 a la 44 de desplazamientos máximos, se observa que la velocidad de excitación juega un papel muy importante debido a que a baja velocidad el desplazamiento que sufre una tubería ya sea

atiesada, arriostrada ó bien con recubrimiento de concreto, tiende al desplazamiento estático. Por otro lado, el desplazamiento máximo que presentan las tuberías se alcanza para una velocidad igual o cercana a la relación  $(\omega_{mn}/n)$  mínima, como puede observarse en las gráficas 32b a la 34b y de la 38b a la 44b. Sin embargo, se cree que un mayor desplazamiento puede ocurrir para una velocidad angular menor que  $(\omega_{mn}/n)$  mínima más baja como se observó en el caso de vigas. Esto es debido a las simplificaciones hechas en este trabajo, al considerar en el cálculo de las frecuencias naturales a un sistema isotrópico con fuerzas inerciales en la dirección transversal únicamente, así como la participación en la respuesta de las frecuencias naturales en dicha dirección. Por otra parte, para una solución más aproximada se requiere de la contribución de nueve funciones de influencia dinámica (4.6.22) y en este trabajo sólo se consideró la transversal. En análisis más refinados y de acuerdo con la referencia 21, al someter un sistema a una carga determinada, ésta modifica el estado de esfuerzos del sistema lo que trae como consecuencia modificación en sus frecuencias naturales, lo cual tampoco ha sido considerado aquí. Se deja abierta esta posibilidad para trabajos posteriores, en los que además se consideren sistemas ortotrópicos.

Al viajar una carga en dirección circunferencial a altas velocidades de acuerdo con las frecuencias naturales de la tubería, los desplazamientos en la misma tienden a valores muy pequeños. Al incrementar el espesor de la tubería, los desplazamientos de ésta disminuyen de manera líneal en escala doble-logarítmica, como se presenta en la gráfica 45, y se conserva la misma linealidad que se presentó en el estudio de vigas. Esto es, la respuesta dinámica queda comprendida entre la estática y la de impacto.

La relación espesor y  $(\omega_{mn}/n)$  mínima para  $m=1,3$  y  $5$  se comporta línealmente en escala doble-logarítmica, por lo que para relaciones  $(\omega_{mn}/n)$  mínimas y valores de  $m$  superiores se pueden extrapolar fácilmente.

El recubrimiento de concreto armado hace posible disminuir los desplazamientos en la tubería, pero como puede observarse el mismo efecto se obtiene al arriostrar la tubería, siendo ésto entonces lo más recomendable.

En términos generales, los resultados obtenidos en este trabajo han conducido a presentar el análisis del comportamiento de estructuras cilíndricas circulares de pared delgada ante una carga puntual viajando en dirección circunferencial, como

pueden ser los conos de desfogue, así como aquellas que requieran de un control adecuado de las vibraciones y desplazamientos.

Se espera que este trabajo se proyecte hacia nuevas investigaciones, y que los resultados logrados aquí sirvan para la solución de problemas donde sea necesario conocer frecuencias naturales y formas modales, así como sus desplazamientos, en estructuras como las planteadas en este trabajo ante perturbaciones arbitrarias fijas ó móviles.

## CAPÍTULO 6.- REFERENCIAS

## REFERENCIAS

- 1.-V.I. Weingarden, "Free vibrations of conical shells", Journal of the engineering Mechanics Division, ASCE, vol 91, EM4, pag. 69-87, (1965).
- 2.-P.Seide, "On the free vibrations of simple supported truncated conical shells", Israel Journal of Technology, 3(1), 50-61 (1965).
- 3.-W. Soedel, "Vibrations of shells and plates", Marcel Dekker, INC, New York, (1981).
- 4.-J.L. Urrutia-Galicia and L.J. Arango, "On the fundamental frequencies and modes of free vibration of cylindrical shells, Transacciones CSME, vol 15, no.2, pag. 147-159, Canada, (1991).
- 5.-W.Flügge, "Stresses in shells", segunda edición, Springer-Verlag New York Heidelberg, Berlín, (1973).
- 6.-M.J. Forrestal, D.V. Reddy, ang G. Herrmann, "Response of a cylindrical shell to an elastic wave", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, vol. 9, pag. 1-11, (1965).
- 7.-W.C. Lyons, J.E. Russell y G. Herrmann, "Dynamics of submerged reinforced cylindrical shells, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, vol. 94, EM2, pag. 397-420, (1968).



- 8.-E.G. Lovell, "Cylindrical shell under sudden pressurization", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, vol. 96, (1970).
- 9.-K.A. Naghdi, "Cylindrical shell subject to longitudinal line load", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, vol. 96, EM5, pag. 653-660, (1970).
- 10.-R. Parnes, "Dynamic response of imbedded cylindrical shell", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, vol. 97, EM2, pag. 421-440, (1971).
- 11.-J.L. Urrutia-Galicia, "Stress in internally loaded cylindrical shell", Tesis de Maestría, Universidad de Waterloo, (1979).
- 12.-J.L. Urrutia-Galicia, "Vibración libre en conos y cilindros", Instituto de Ingeniería, reporte interno, (1987).
- 13.-J.L. Urrutia-Galicia, "On the natural frequencies of thin simply supported cylindrical shells", CSME, Journal no. 13 (1-2) pag. 35-40, (1989).
- 14.-L.J. Arango, "Vibración libre en cascarones cilíndricos rigidizados", Tesis de Maestría, México, (1988).
- 15.-J.L. Urrutia-Galicia, "Frecuencias naturales en cilindros ortotrópicos de pared delgada, un nuevo enfoque", Sismodinámica, (1990).
- 16.-I.A. Okumura, "Three-Dimensional stresses in short cantilevered cylinders", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, vol. 116, PAG. 2186-2205, (1990).
- 17.-J.L. Urrutia-Galicia, "Amplification factors of beams under the action of moving point forces", sometida a las Transacciones CSME, Canada, (1991).
- 18.-J.L. Urrutia-Galicia, "Parámetro de Batdorf Z -vs- parámetro K en el diseño de ductos circulares", Instituto de Ingeniería, (1992).
- 19.-W.T. Thomson, "Teoría de vibraciones, aplicaciones", Prentice-Hall Hispanoamericana, (1982).
- 20.-Biggs, "Introduction to Structural Dynamics", Mc. Graw-Hill, (1964).
- 21.-Y.W. Timoshenko, "Vibration Problems in Engineering", cuarta edición, Wiley, (1928).
- 22.-V.V. Bolotin, "Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability", The MacMillan Company, New York, (1963).

## CAPÍTULO 7.- TABLAS Y FIGURAS

# de cascaron	r (m)	l (m)	h (m)	l/r	r/h	K'
1	2.6279	4.4709	0.001	1.7013	2627.9	0.1822
2	2.6279	4.4709	0.005	1.7013	525.6	0.2724
3	2.6279	4.4709	0.00953	1.7013	275.8	0.3201
4	2.6279	4.4709	0.010	1.7013	262.8	0.3240
5	2.6279	4.4709	0.050	1.7013	52.6	0.4844
6	2.6279	4.4709	0.100	1.7013	26.3	0.5761

TABLA 1. Datos para los cascarones cilíndricos circulares (originales)

# de cascaron	r (m)	l (m)	h (m)	l/r	r/h	K'
7	2.6585	4.4709	0.0707	1.6818	37.6	0.5236

TABLA 2. Datos para el cascarón cilíndrico circular atiesado

# de cascaron	r (m)	l (m)	l' (m)	h (m)	l/r	r/h	K'
8	2.6585	4.4709	2.2355	0.0707	0.8409	37.6	0.3703

TABLA 3. Datos para el cascarón cilíndrico circular atiesado y arriostrado (caso 1)

# de cascaron	r (m)	l (m)	l' (m)	h (m)	l/r	r/h	K'
9	2.6585	4.4709	1.1177	0.0707	0.4204	37.6	0.2618

TABLA 4. Datos para el cascarón cilíndrico circular atiesado y arriostrado (caso 2)

# de cascaron	r (m)	l (m)	h (m)	l/r	r/h	K'
10	2.7242	4.4709	0.1892	1.6412	14.4	0.6577

TABLA 5. Datos para el cascarón cilíndrico circular atiesado y con recubrimiento de concreto armado

r (m)	l (m)	h (m)	$(\omega_{mn}/n)_{\min}$		
			m=1	m=3	m=5
2.6279	4.4709	0.001	3.8736	5.5203	6.8159
2.6279	4.4709	0.005	13.0761	18.8172	23.4609
2.6279	4.4709	0.00953	21.5218	30.9679	38.8665
2.6279	4.4709	0.010	22.2506	32.1954	40.3534
2.6279	4.4709	0.050	77.7603	115.3464	149.2810
2.6279	4.4709	0.100	133.8986	203.0813	273.1360

TABLA 6. Relación  $(\omega_{mn}/n)_{\min}$  para m=1,3,5 correspondientes a los cascarones cilíndricos no. 1,2,3,4,5 y 6 respectivamente

m	n
1	0
1	1
1	2
·	·
·	·
1	31
3	0
3	1
3	2
·	·
·	·
3	31
·	·
·	·
·	·
31	0
31	1
31	2
·	·
·	·
31	31

TABLA 7. Número de onda longitudinal (m) y circunferencial (n) asociado a las diferentes frecuencias y modos naturales, para los cascarones cilíndricos no. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 10.

m	n
2	0
2	1
2	2
.	.
.	.
2	30
6	0
6	1
6	2
.	.
.	.
6	30
.	.
.	.
30	0
30	1
30	2
.	.
.	.
30	30

TABLA 8. Número de onda longitudinal (m) y circunferencial (n) asociado a las diferentes frecuencias y modos naturales, para el cascarón cilíndrico no. 8.

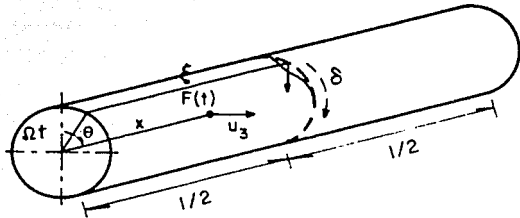
m	n
4	0
4	1
4	2
.	.
.	.
4	36
12	0
12	1
12	2
.	.
.	.
12	36
.	.
.	.
36	0
36	1
36	2
.	.
.	.
36	36

TABLA 9. Número de onda longitudinal (m) y circunferencial (n) asociado a diferentes frecuencias y modos naturales, para el cascarón cilíndrico no. 9.

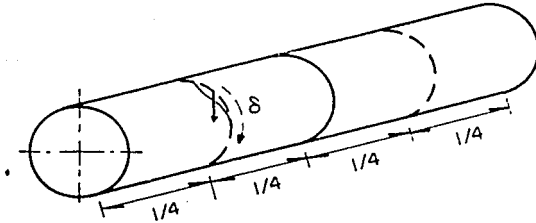
r (m)	l (m)	h (m)	desplazamiento		
			baja velocidad	velocidad critica	velocidad de impacto
2.6279	4.4709	0.001	0.0324413	0.0637786	0.0648830
2.6279	4.4709	0.005	0.0010626	0.0017106	0.0021259
2.6279	4.4709	0.00953	0.0002598	0.0004089	0.0005196
2.6279	4.4709	0.010	0.0002337	0.0003662	0.0004673
2.6279	4.4709	0.050	0.0000065	0.0000102	0.0000130
2.6279	4.4709	0.100	0.0000014	0.0000022	0.0000027

**TABLA 10.** Desplazamientos máximos correspondientes a los cascarones cilíndricos no. 1, 2, 3, 4, 5 y 6 respectivamente.

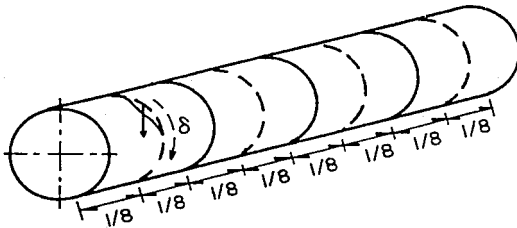




- a) Cascarón cilíndrico circular original, cascarón cilíndrico circular atesado y cascarón cilíndrico circular con recubrimiento de concreto.



- b) Cascarón cilíndrico circular atesado y arriostrado (caso 1).



- c) Cascarón cilíndrico atesado y arriostrado (caso 2).

FIGURA 3. Ubicación de la fuerza y lugar en el que se calculó el desplazamiento  $\delta$  en el cascarón cilíndrico circular.



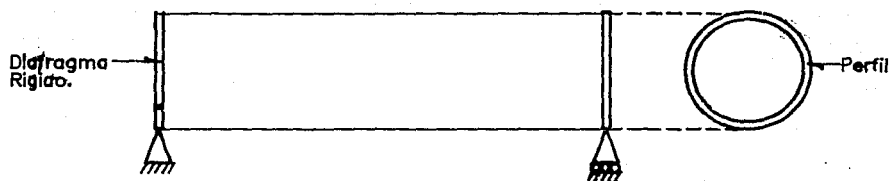


FIGURA 4. Condición de apoyo y de frontera para un cascarón cilíndrico circular.

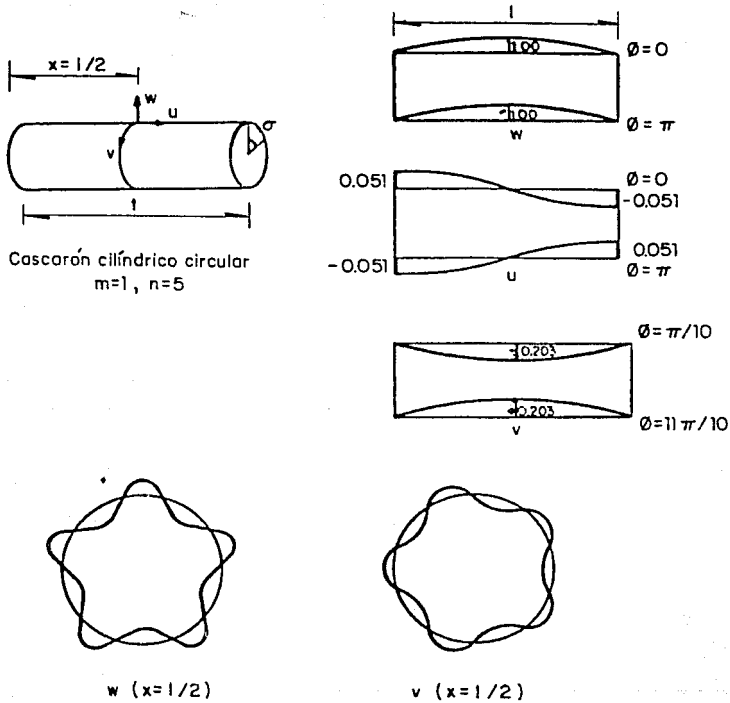


FIGURA 5. Configuración del modo fundamental de vibración (1,5) para un cascarón cilíndrico circular<sup>[14]</sup>

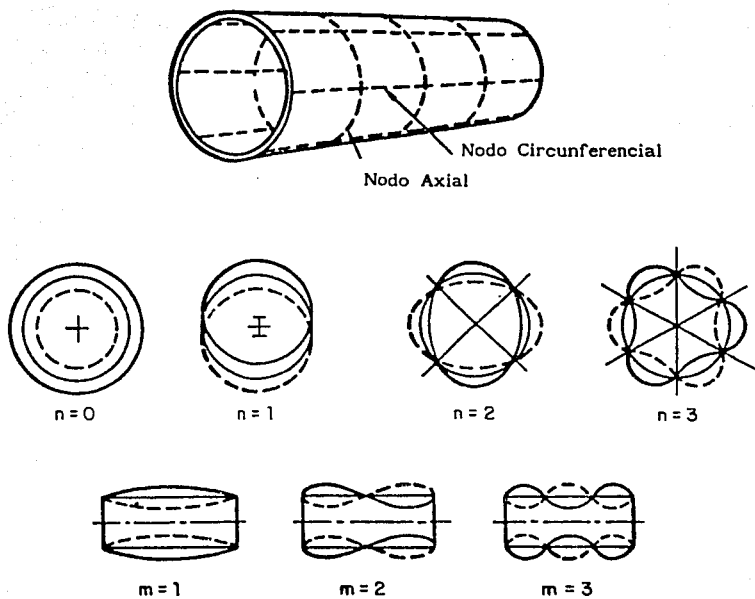


FIGURA 6. Formas modales para un cascarón cilíndrico circular simplemente apoyado.

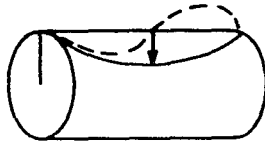


FIGURA 7. Dos primeros modos longitudinales de vibrar para un cascarón cilíndrico circular, simplemente apoyado, con carga puntual aplicada en  $l/2$  y viajando en dirección circunferencial.

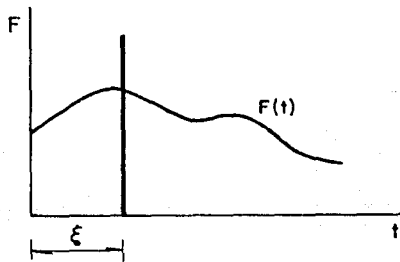


FIGURA 8. Producto de una función arbitraria por  $\delta(t-\xi)$ .

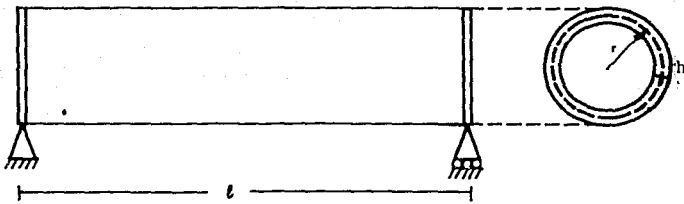


FIGURA 9. Parámetros del cascarón cilíndrico circular simplemente apoyado.

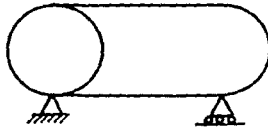


FIGURA 10. Cascarón cilíndrico circular simplemente apoyado.

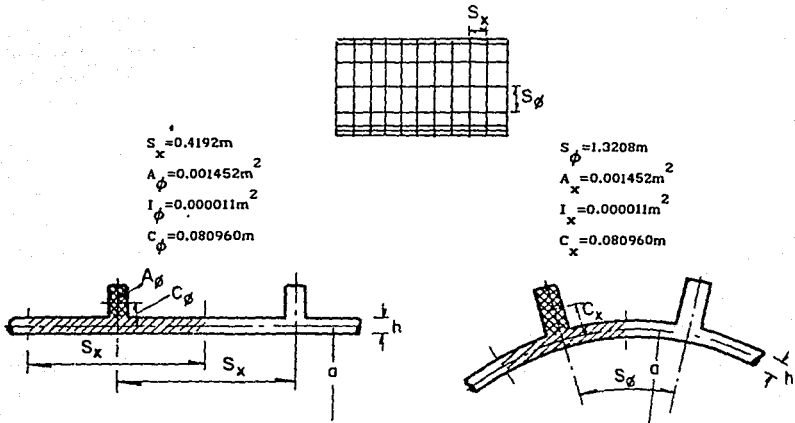


FIGURA 11. Cascarón cilíndrico circular atiesado (longitudinal y circunferencial).

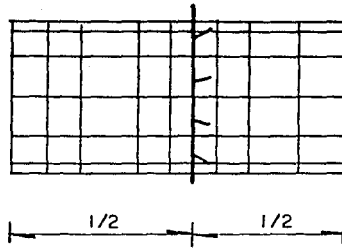


FIGURA 12. Cascaron cilíndrico circular atiesado y arriostrado (caso 1).

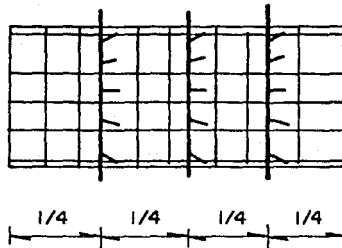


FIGURA 13. Cascaron cilíndrico circular atiesado y arriostrado (caso 2).

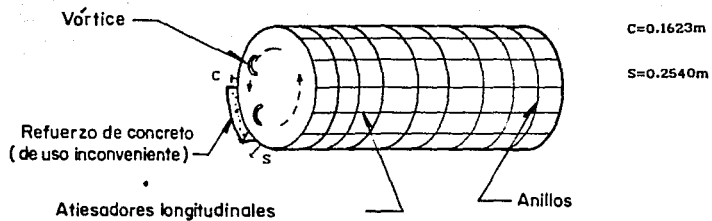


FIGURA 14. Cascarón cilíndrico circular atiesado y con recubrimiento de concreto.



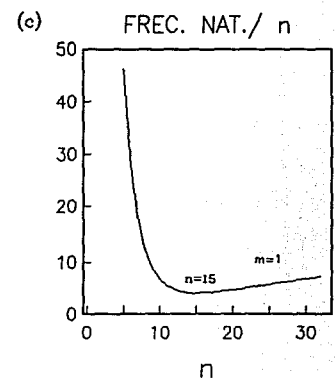
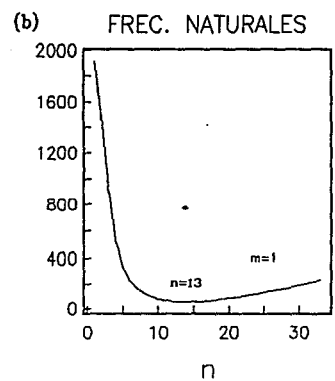
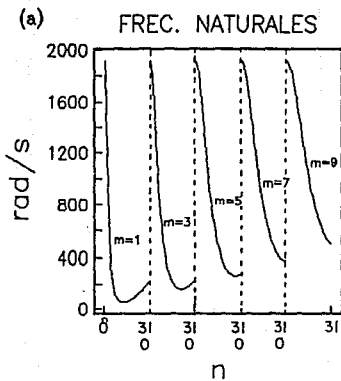


FIGURA 15. Frecuencias naturales para el cascarón cilíndrico original de acero número 1.

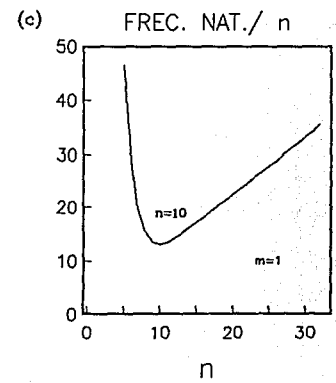
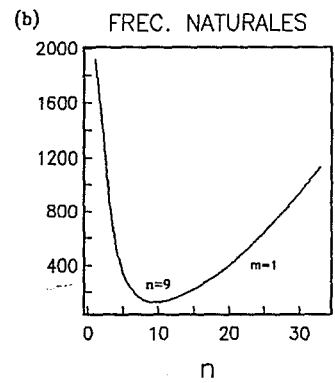
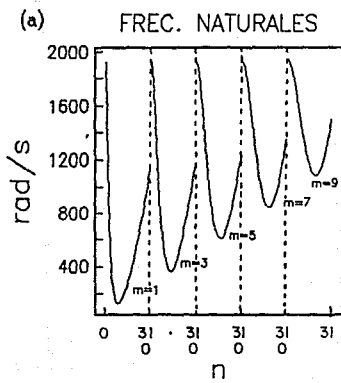


FIGURA 16. Frecuencias naturales para el cascarón cilíndrico original de acero número 2.

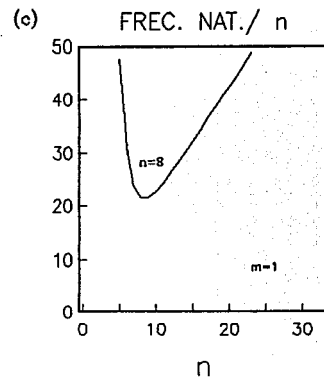
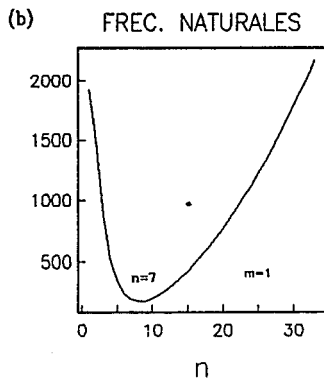
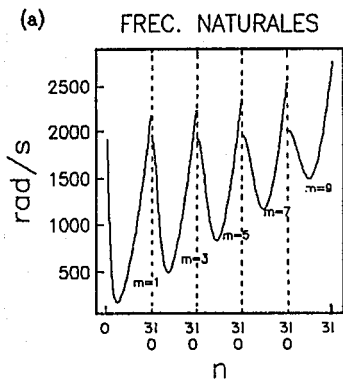


FIGURA 17. Frecuencias naturales para el cascarón cilíndrico original de acero número 3.

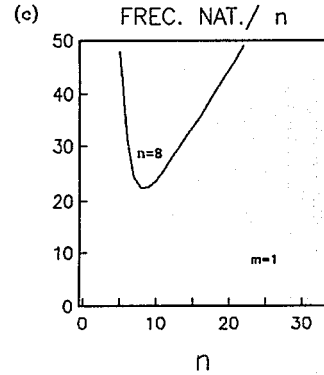
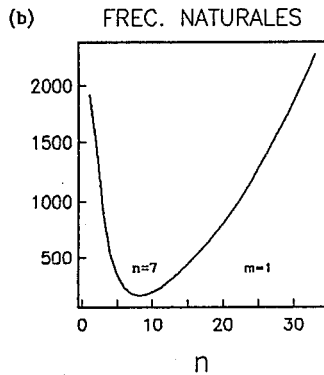
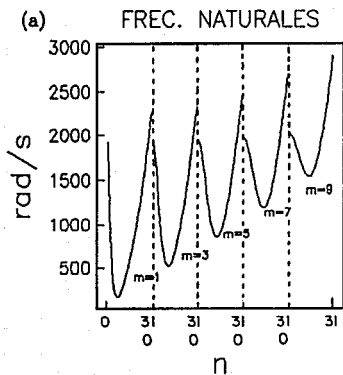


FIGURA 18. Frecuencias naturales para el cascarón cilíndrico original de acero número 4.

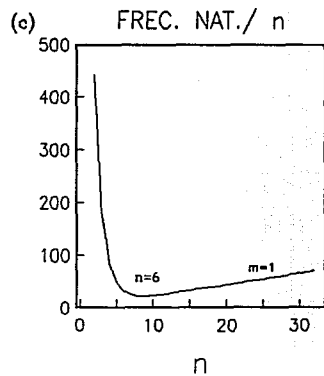
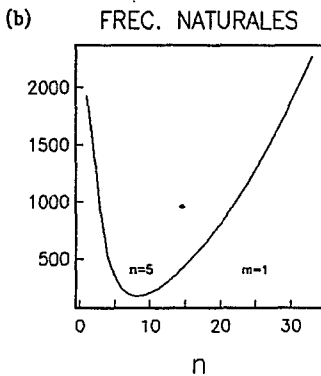
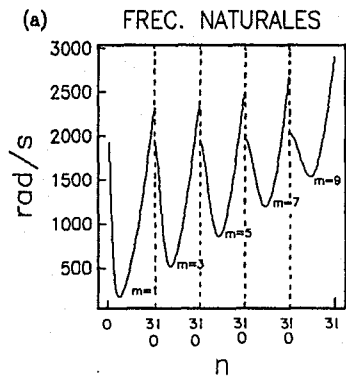


FIGURA 19. Frecuencias naturales para el cascarón cilíndrico original de acero número 5.

71

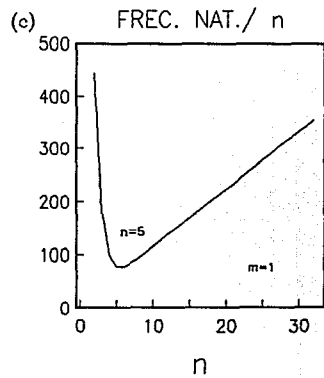
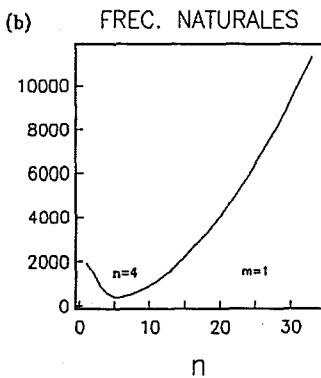
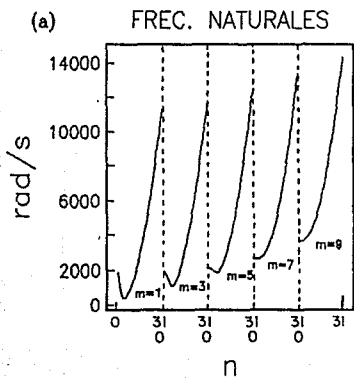


FIGURA 20. Frecuencias naturales para el cascarón cilíndrico original de acero número 6.

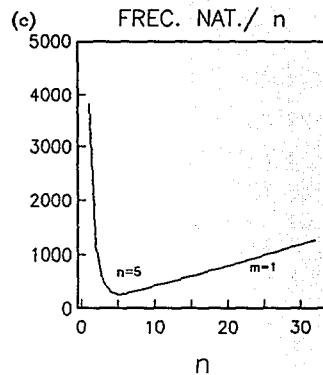
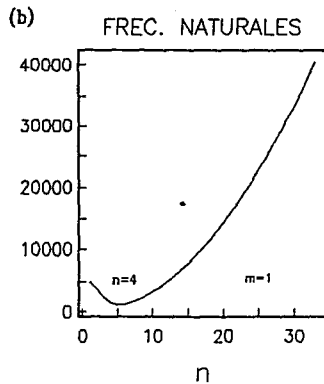
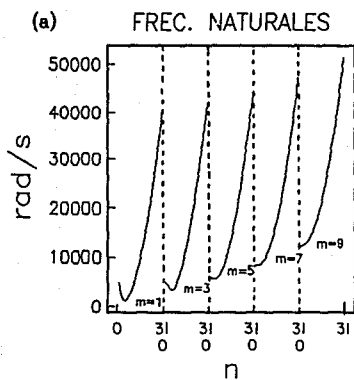


FIGURA 21. Frecuencias naturales para el cascarón cilíndrico atiesado longitudinal y circunferencialmente número 7.

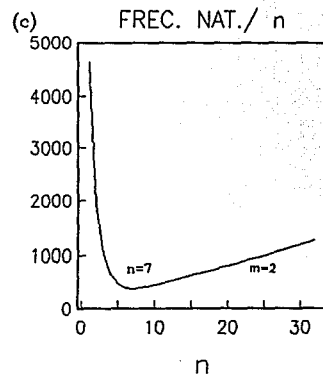
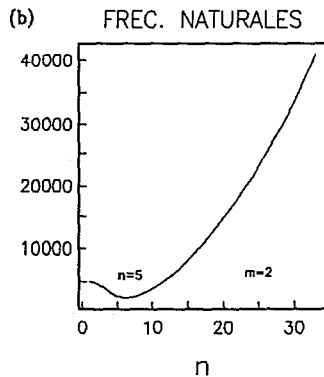
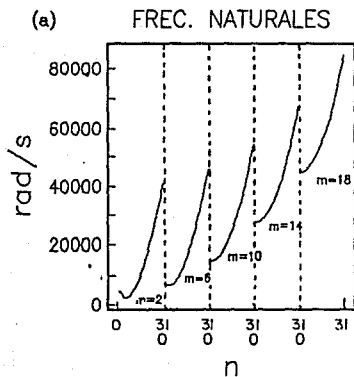


FIGURA 22. Frecuencias naturales para el cascarón cilíndrico atiesado y arriostado (caso 1) número 8.

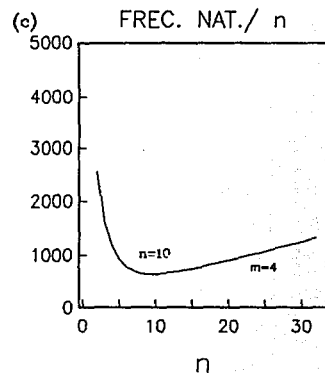
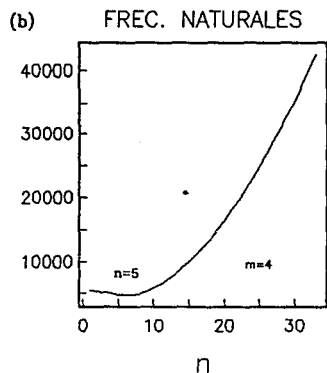
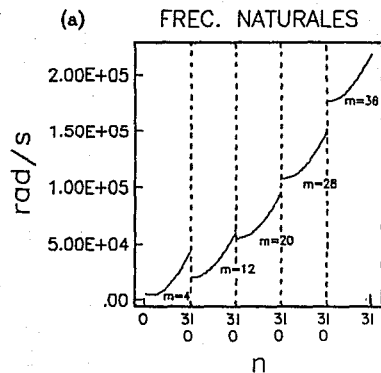


FIGURA 23. Frecuencias naturales para el cascarón cilíndrico atiesado y arriostrado (caso 2) número 9.

73

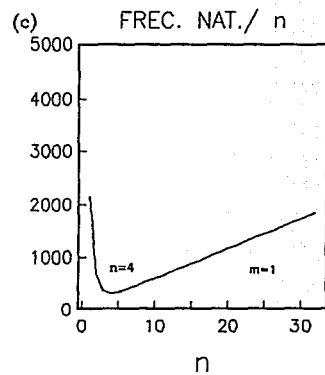
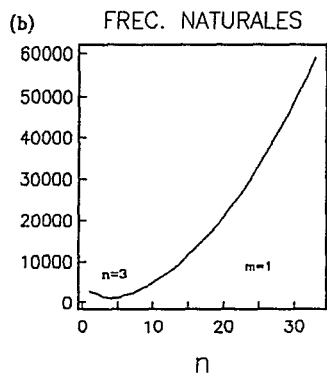
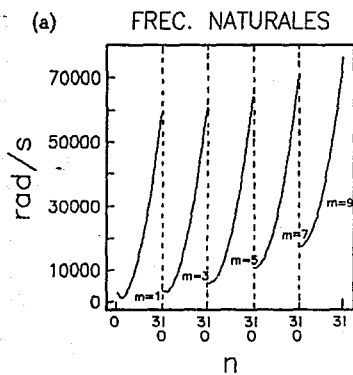


FIGURA 24. Frecuencias naturales para el cascarón cilíndrico atiesado y con recubrimiento de concreto número 10.

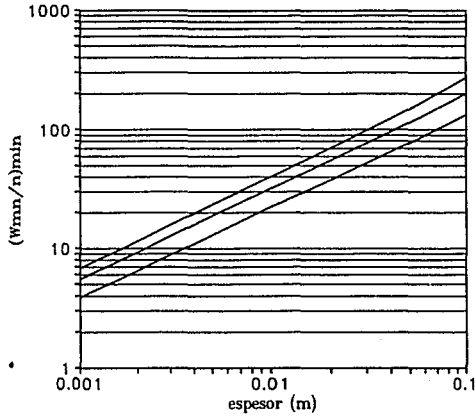


FIGURA 25. Relación espesor -  $(\omega_{mn}/n)_{\text{min}}$  para cascarones cilíndricos circulares de acero (original)

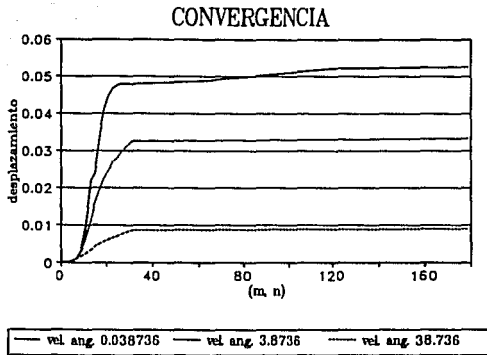


FIGURA 26. Gráfica de convergencia para el cascarón cilíndrico circular original número 1. La velocidad angular está en rad/s y el desplazamiento en metros.

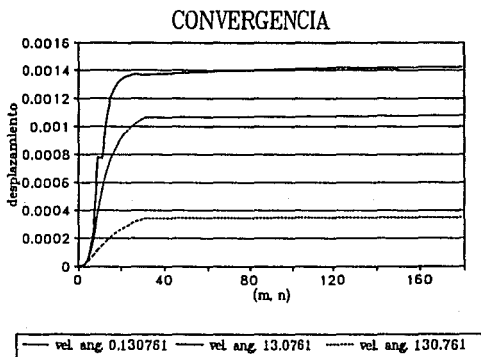


FIGURA 27. Gráfica de convergencia para el cascarón cilíndrico circular original número 2. La velocidad angular está en rad/s y el desplazamiento en metros.

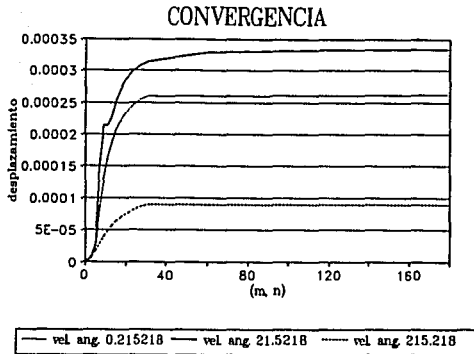


FIGURA 28 Gráfica de convergencia para el cascarón cilíndrico circular original número 3. La velocidad angular está en rad/s y el desplazamiento en metros.

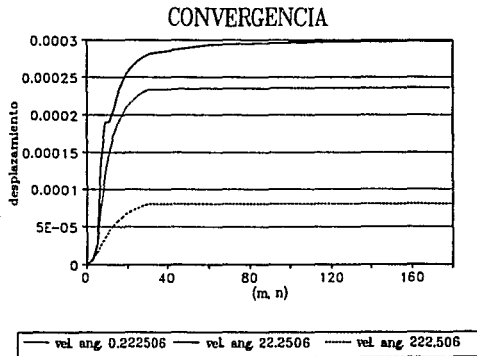


FIGURA 29 Gráfica de convergencia para el cascarón cilíndrico circular original número 4. La velocidad angular está en rad/s y el desplazamiento en metros.



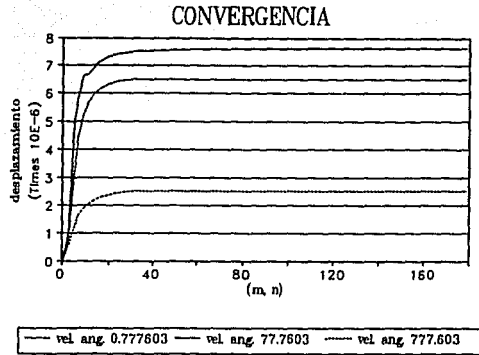


FIGURA 30 Gráfica de convergencia para el cascarón cilíndrico circular original número 5. La velocidad angular está en rad/s y el desplazamiento en metros.

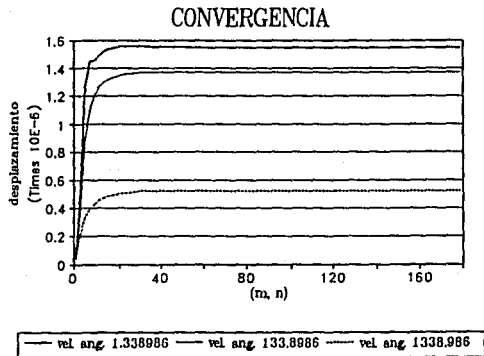


FIGURA 31 Gráfica de convergencia para el cascarón cilíndrico circular original número 6. La velocidad angular está en rad/s y el desplazamiento en metros.

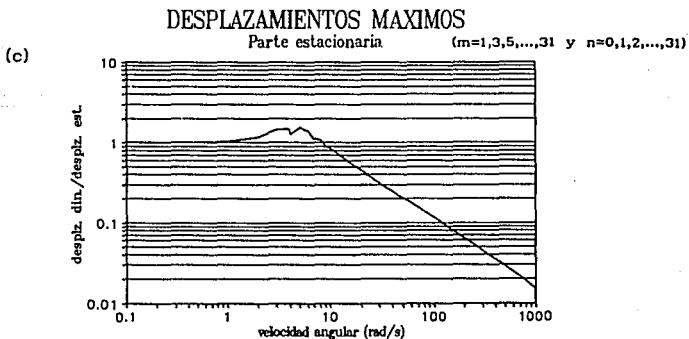
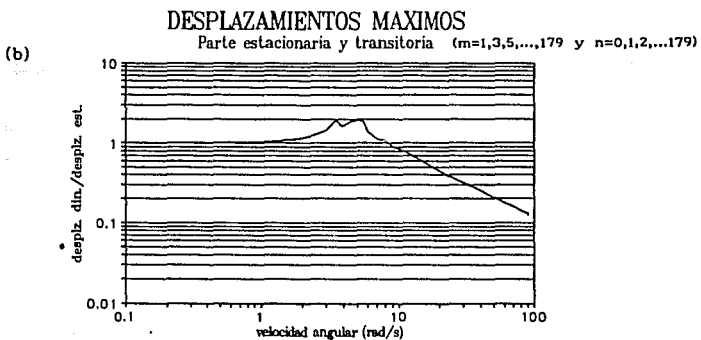
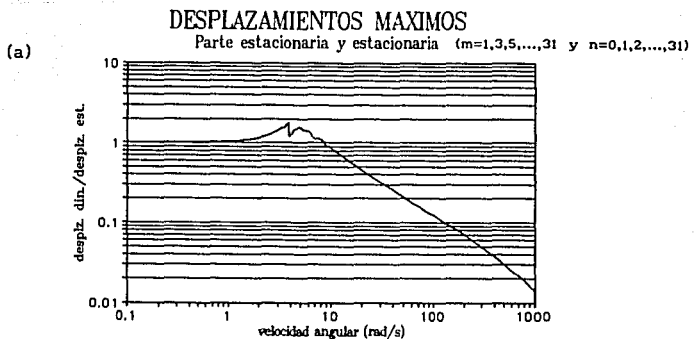


FIGURA 32. Relación de los desplazamientos dinámicos máximos respecto al desplazamiento estático (0.0324m), para el cascarón cilíndrico circular original número 1.

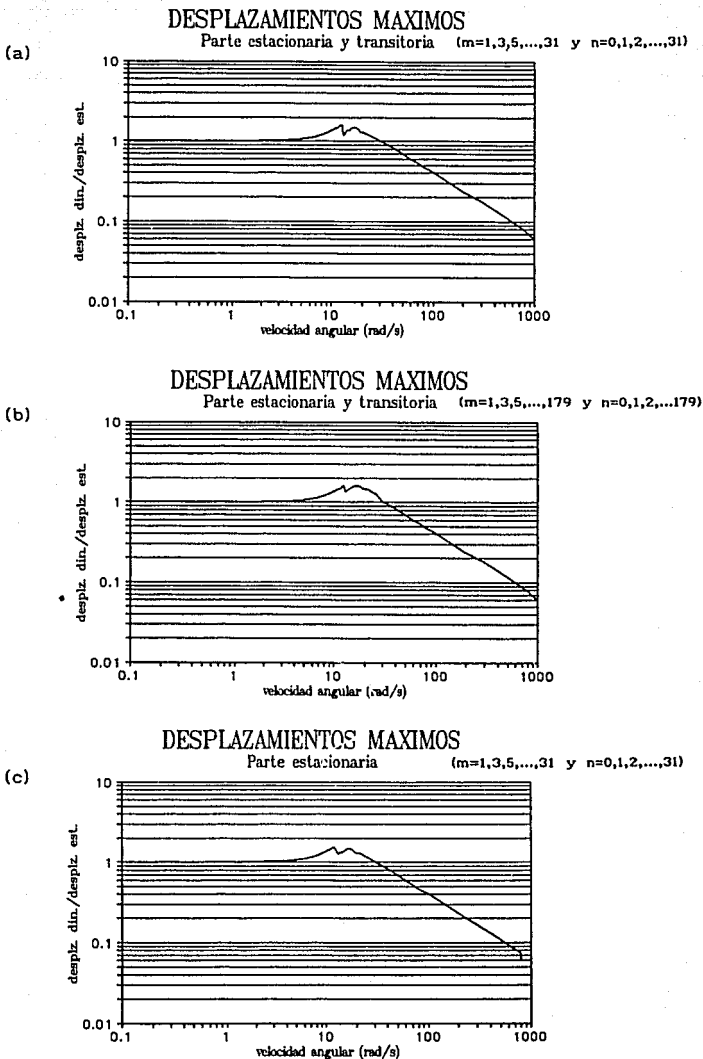


FIGURA 33. Relación de los desplazamientos dinámicos máximos respecto al desplazamiento estático (0.001m), para el cascarón cilíndrico circular original número 2.

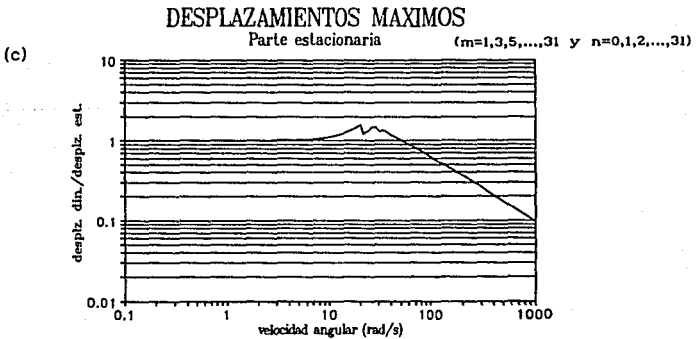
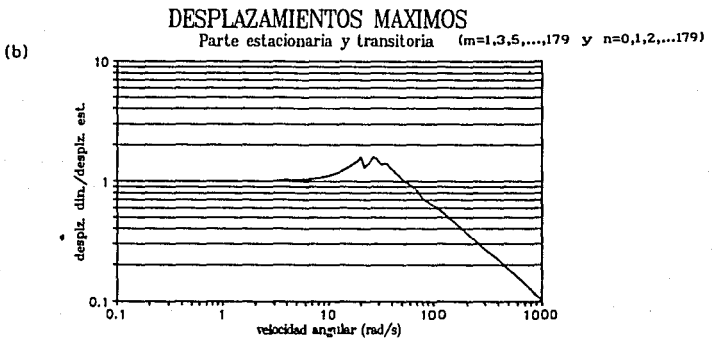
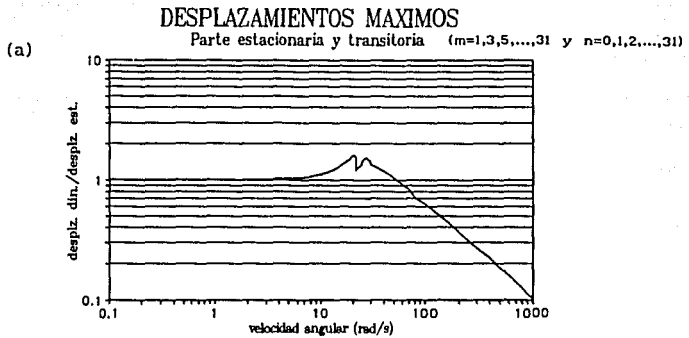


FIGURA 34. Relación de los desplazamientos dinámicos máximos respecto al desplazamiento estático (0.00026m), para el cascarón cilíndrico circular original número 3.

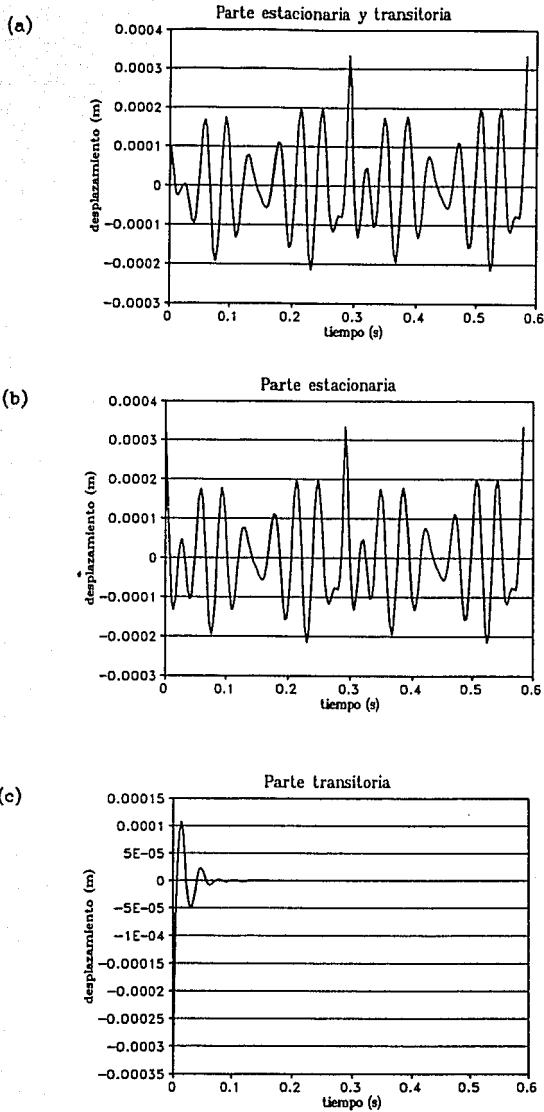


FIGURA 35. Respuesta tiempo-desplazamiento del cascarón cilíndrico circular original de acero número 3, bajo carga girando alrededor de éste (1/2) con velocidad igual a 21.5218 rad/s ( $\omega_{mn} \sqrt{n}$  / min).

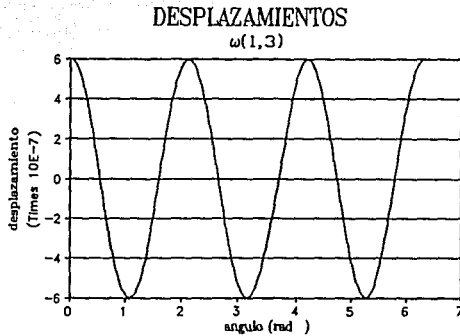


FIGURA 36. Desplazamientos en el perfil a 1/2 del cascarón cilíndrico circular original de acero número 3, bajo carga girando alrededor de éste, con velocidad angular de 528.5353 rad/s ((m,n)=(1,3)).

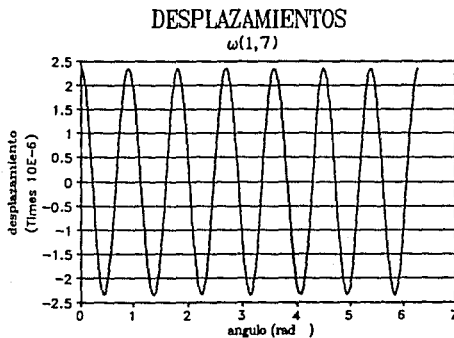


FIGURA 37. Desplazamientos en el perfil a 1/2 del cascarón cilíndrico circular original de acero número 3, bajo carga girando alrededor de éste, con velocidad angular de 166.8355 rad/s ((m,n)=(1,7)).

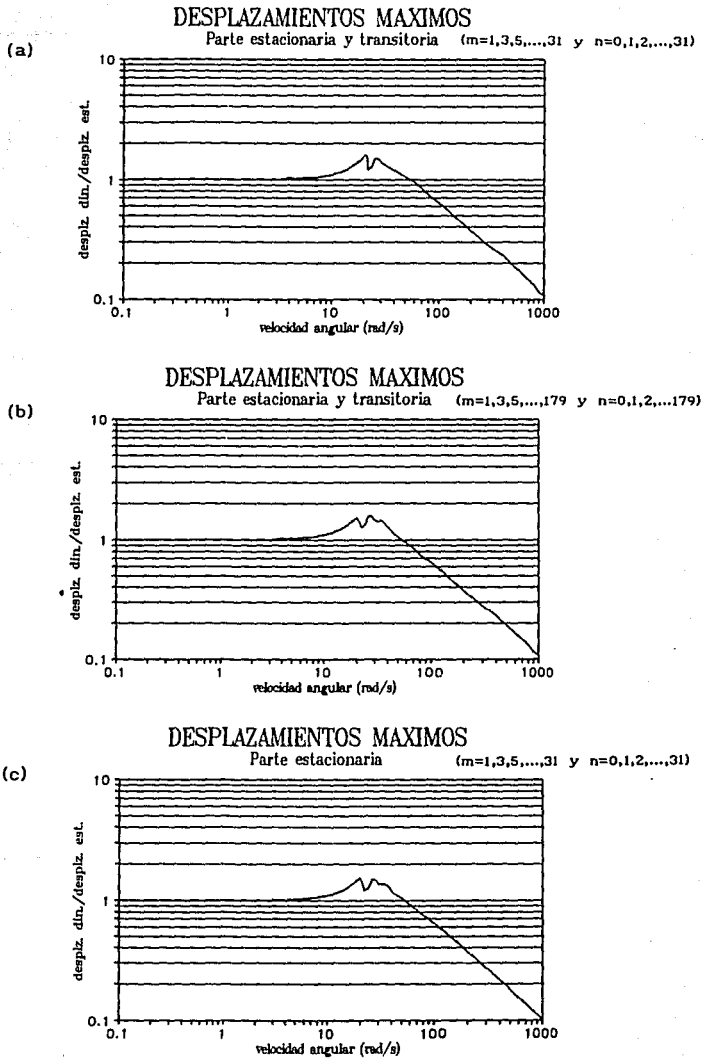


FIGURA 38. Relación de los desplazamientos dinámicos máximos respecto al desplazamiento estático (0.00023m), para el cascarón cilíndrico circular original número 4.

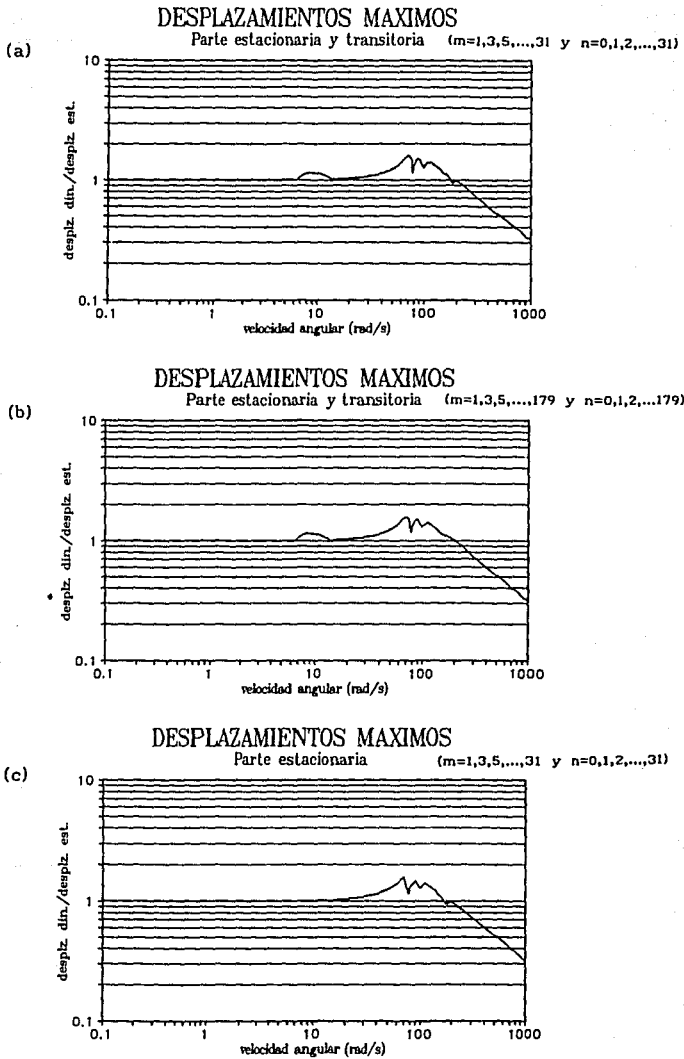


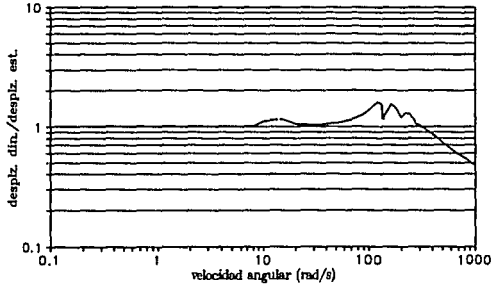
FIGURA 39. Relación de los desplazamientos dinámicos máximos respecto al desplazamiento estático (6.5018E-06m), para el cascarón cilíndrico circular original número 5.



### DESPLAZAMIENTOS MAXIMOS

Parte estacionaria y transitoria ( $m=1,3,5,\dots,31$  y  $n=0,1,2,\dots,31$ )

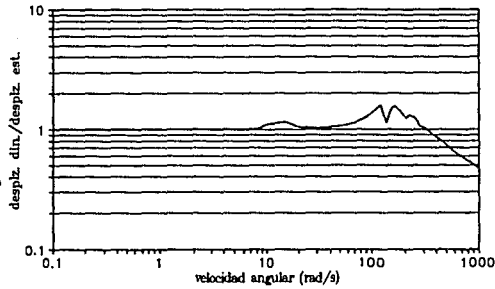
(a)



### DESPLAZAMIENTOS MAXIMOS

Parte estacionaria y transitoria ( $m=1,3,5,\dots,179$  y  $n=0,1,2,\dots,179$ )

(b)



### DESPLAZAMIENTOS MAXIMOS

Parte estacionaria ( $m=1,3,5,\dots,31$  y  $n=0,1,2,\dots,31$ )

(c)

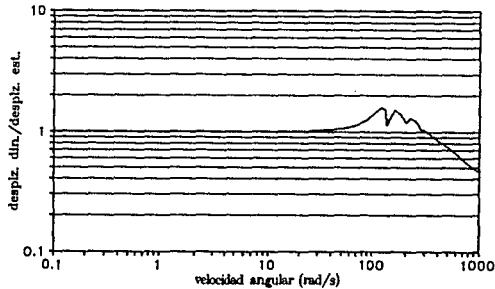


FIGURA 40. Relación de los desplazamientos dinámicos máximos respecto al desplazamiento estático ( $1.3690E-06m$ ), para el cascarón cilíndrico circular original número 6.

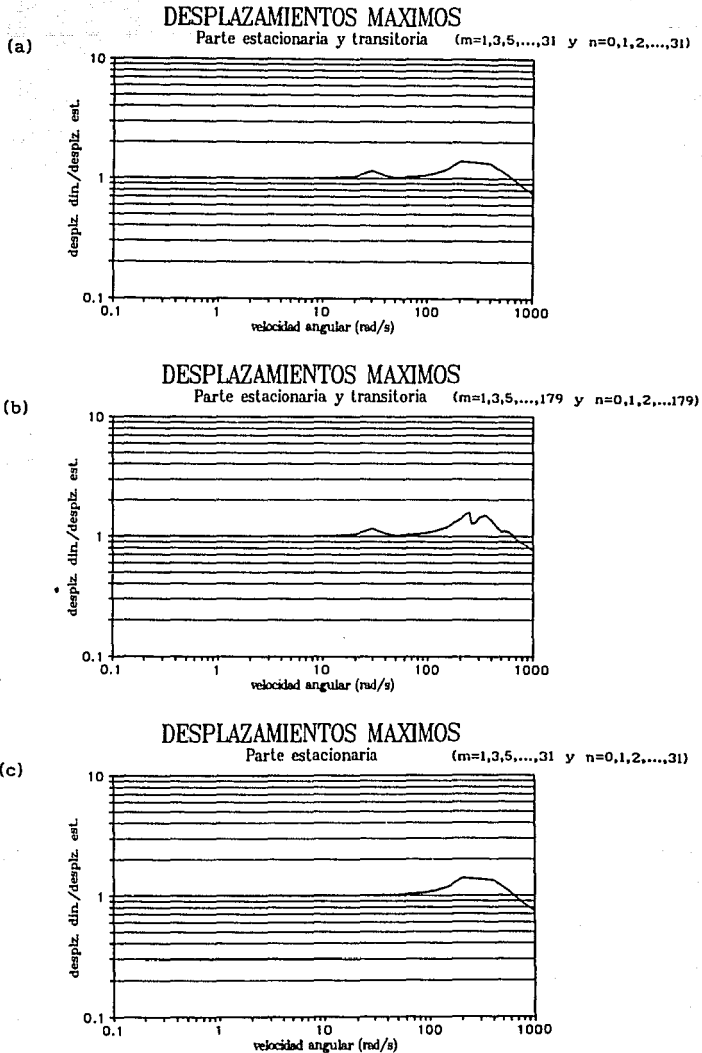


FIGURA 41. Relación de los desplazamientos dinámicos máximos respecto al desplazamiento estático (4.5220E-07m), para el cascarón cilíndrico circular atesado (longitudinal y circunferencial) número 7.

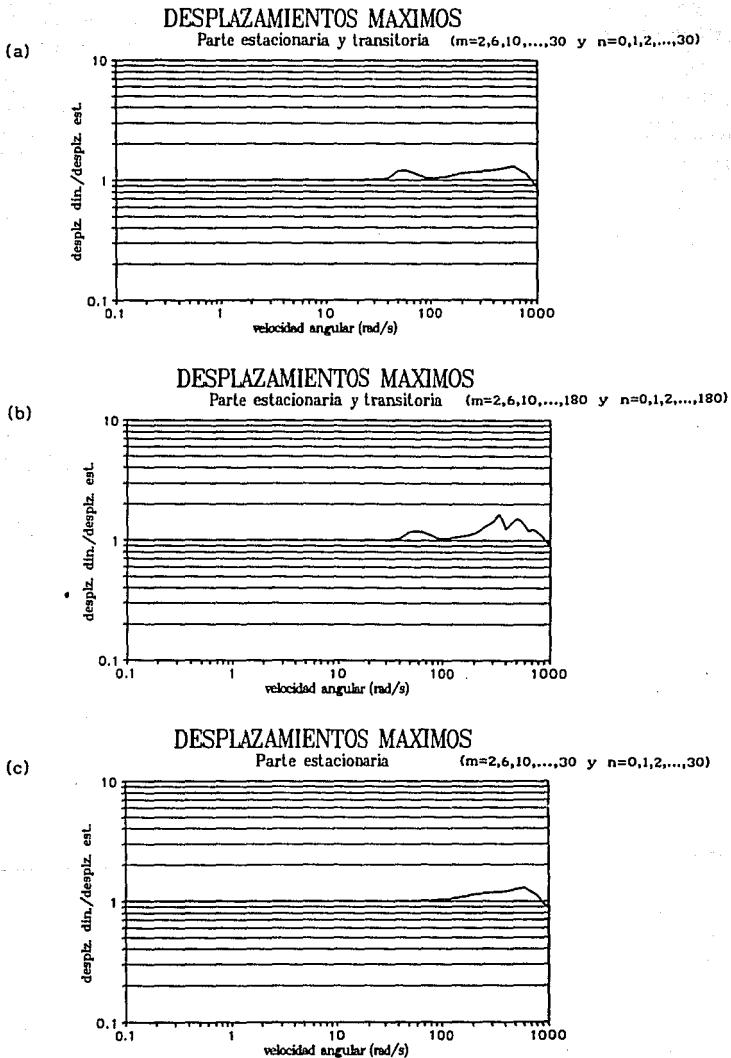


FIGURA 42. Relación de los desplazamientos dinámicos máximos respecto al desplazamiento estático ( $1.5534E-07m$ ), para el cascarón cilíndrico circular atesado y arriestrado (caso 1) número 8.

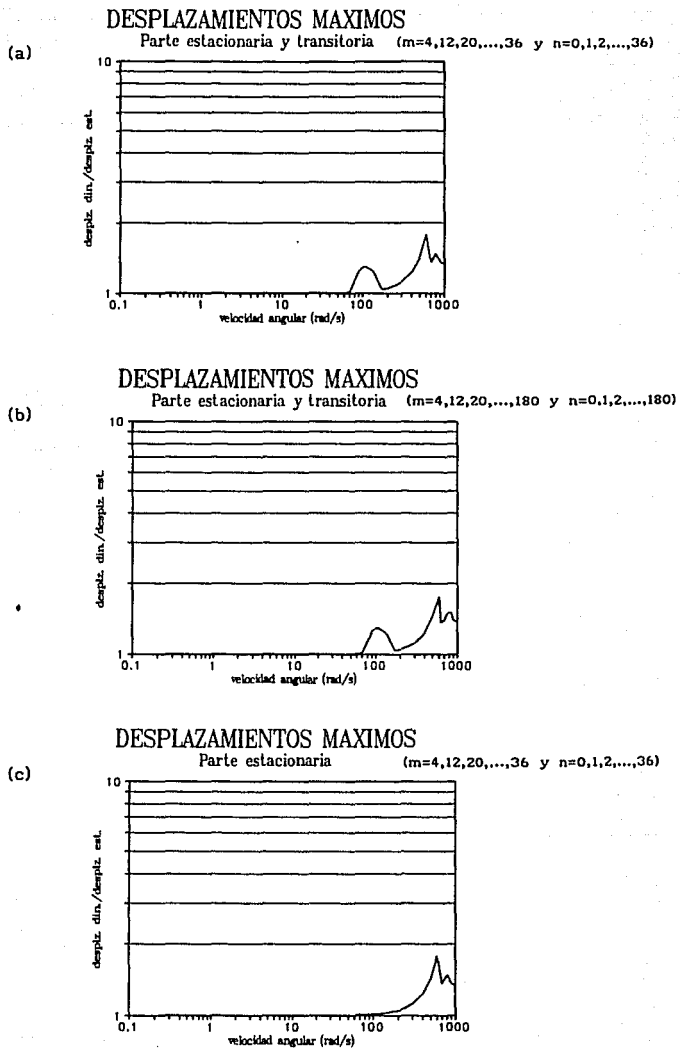


FIGURA 43. Relación de los desplazamientos dinámicos máximos respecto al desplazamiento estático ( $5.3510E-08m$ ), para el cascarón cilíndrico circular atiesado y arriostrado (caso 2) número 9.

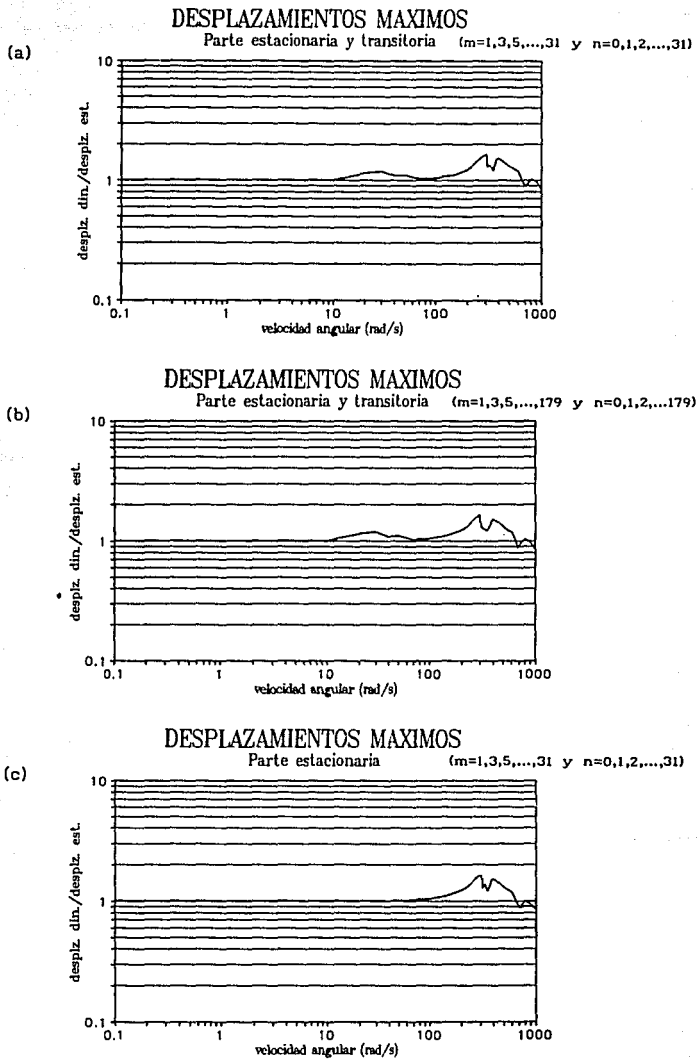
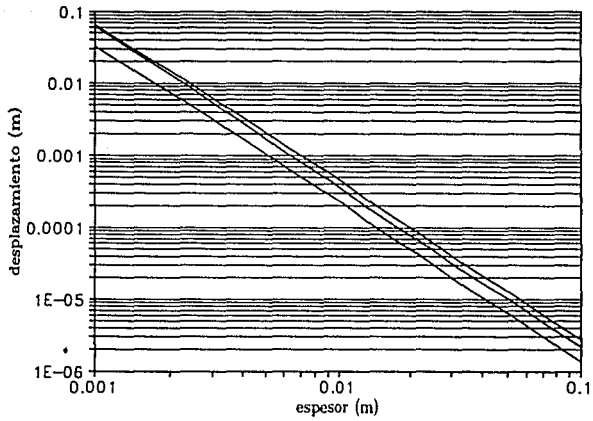


FIGURA 44. Relación de los desplazamientos dinámicos máximos respecto al desplazamiento estático ( $1.5229E-07m$ ), para el cascarón cilíndrico circular atesado y con recubrimiento de concreto número 10.



**FIGURA 45.** Relación del espesor de un cascarón cilíndrico circular original de acero contra su desplazamiento, para baja velocidad, crítica y la llamada de impacto (tabla 10).

**APÉNDICE.- PROGRAMA DE CÁLCULO**

PROGRAMA PARA CALCULAR LA RESPUESTA EN EL TIEMPO DE UN CASCARON  
CILINDRICO CIRCULAR RTC.FOR

Elaborado por  
M.S.V.Sánchez Salinas  
Noviembre 1992.

\$DEBUG  
\$LARGE

implicit real\*8(a-h,o-z)  
REAL NU  
INTEGER BN  
DIMENSION  $\omega$ (180,180),OMEX(40),U3(8000),THETA(8)  
,tr(80)  
CHARACTER\*12 A1,A2,A4  
,a3

LECTURA DE DATOS

WRITE(\*,\*)'DATOS DEL PROBLEMA:'  
WRITE(\*,\*)' FUERZA,'  
WRITE(\*,\*)' RADIO,'  
WRITE(\*,\*)' LONGITUD DE LA TUBERIA,'  
WRITE(\*,\*)' ESPESOR DE LA MISMA,'  
WRITE(\*,\*)' NO. DE CICLOS DE LA RESPUESTA,'  
WRITE(\*,\*)' N PARA DET. EL INCREMENTO DE T,'  
WRITE(\*,\*)' AMORTIGUAMIENTO,'  
WRITE(\*,\*)' M,N,'  
WRITE(\*,\*)' NO. DE ANGULOS DE LA RESPUESTA'  
WRITE(\*,\*)' NO. DE FRECUENCIAS EXCITADORAS'  
READ(\*,\*)FU,R,GL, TES,CICLO,NT,ZI,MAX,NAX,NAN,JMAX  
WRITE(\*,\*)' K,NN PARA DET.EL INIC. DE LOS MODOS'  
READ(\*,\*)K1,N1  
WRITE(\*,\*)'CON CUAL DE LAS TRES OPCIONES DESEA TRABAJAR:'  
WRITE(\*,\*)' 1) PARTE ESTACIONARIA Y TRANSITORIA'  
WRITE(\*,\*)' 2) PARTE ESTACIONARIA'  
WRITE(\*,\*)' 3) PARTE TRANSITORIA'  
READ(\*,\*)CT  
IF(CT.EQ.1.0)GO TO 11  
IF(CT.EQ.2.0)GO TO 12  
IF(CT.EQ.3.0)GO TO 13  
GO TO 1800  
11 PP1=1.0  
PP2=1.0  
GO TO 14  
12 PP1=1.0  
PP2=0.0  
GO TO 14  
13 PP1=0.0  
PP2=1.0



```
C ~~~~~  
C APERTURA DE ARCHIVOS  
C ~~~~~
```

```
14 WRITE(*,*)'NOMBRE DEL ARCHIVO DE LAS FRECUENCIAS EXCITADORAS'  
  READ(*,100)A1  
  OPEN(2,FILE=A1)  
  WRITE(*,*)'NOMBRE DEL ARCHIVO DE LOS ANGULOS'  
  READ(*,100)A2  
  OPEN(3,FILE=A2)  
C  WRITE(*,*)'NOMBRE DEL ARCHIVO DE SALIDA, DE LA RESPUESTA EN EL  
C  *TIEMPO T-D'  
C  READ(*,100)A3  
C  OPEN(4,FILE=A3)  
  WRITE(*,*)'NOMBRE DEL ARCHIVO DE SALIDA W-D'  
  READ(*,100)A4  
  OPEN(5,FILE=A4)  
  OPEN(6,FILE='FRENAT')  
100 FORMAT(A12)
```

```
C ~~~~~  
C LECTURA DE DATOS DE ARCHIVO  
C ~~~~~
```

```
  DO 3000 J=1,JMAX  
  READ(2,*)OMEX(J)  
C  WRITE(*,*)'EL VALOR DE LA FRECUENCIA ES ',OMEX(J)  
3000 CONTINUE  
  DO 200 L=1,NAN  
  READ(3,*)THETA(L)  
200 CONTINUE
```

```
C ~~~~~  
C DATOS PARA MATERIAL "ACERO"  
C ~~~~~
```

```
E=1.9995D+11  
RO=7844.18  
NU=0.3  
PI=3.14159265
```

```
C ~~~~~  
C CALCULO DE LA FRECUENCIA MINIMA  
C ~~~~~
```

```
A=((RO*R/TES)/(81.0*E))**0.25  
B=(GL/R)**0.5  
C=3340.0*(1.0-NU**2)  
NC=C*A/B  
D=E*TES/(12.0*(1.0-NU**2))  
F=(9.0/(7.0*GL/R))**2  
WCRTIT=((D*F/(RO*R))**0.5)/R  
C  WRITE(*,*)'EL VALOR DE LA FRECUENCIA MINIMA ES ',WCRTIT  
C  ~~~~~
```

```
C ~~~~~  
C CALCULO DE LAS FRECUENCIAS NATURALES  
C ~~~~~
```

```
DO 1000 K=K1,MAX  
DO 1010 N=N1,NAX  
M=2.0*K-1.0  
C  M=K
```

```

C   M=2.0*K
C   M=3.0*K
    AM=M
    BN=N-1
    EMN=E/(RO*R**2)
    HA=((TES/R)**2)/(12.0*(1.0-NU**2))
    W(M,N)=(EMN*(((AM*PI*R/GL)**4)/(((AM*PI*R/GL)**2+BN**2)**2
    *)+HA*((AM*PI*R/GL)**2+BN**2)**2)**0.5
    WRITE(*,*)'FREC. NATURAL W('',M,'',BN,')=',W(M,N)
    WRITE(6,*)'FREC. NATURAL W('',M,'',BN,')=',W(M,N)

```

1010 CONTINUE

1000 CONTINUE

```

C   ~~~~~
C   CALCULO DE LAS RESPUESTA DEL SISTEMA
C   ~~~~~
    DO 1500 J=1,JMAX
    WRITE(*,*)J
    TT=2.0*PI/OMEX(J)
    DT=TT/NT
    ND=CICLO*NT
    DO 2000 L=1,NAN
    DESP=0.0
    T=0.0
    DO 1100 I=1,ND+1
C   WRITE(*,*)'VALOR DE I= ',I
    U=0.0
    DO 1600 K=K1,MAX
    DO 1610 N=N1,NAX
    M=2.0*K-1.0
C   M=K
C   M=2.0*K
C   M=3.0*K
    AM=M
    BN=N-1
    if(bn.eq.0)go to 500
    eps=1
    go to 600
500 eps=2
600 GA=W(M,N)*SQRT(1.0-ZI**2)
    AK=ZI*W(M,N)
    ALFHA=DATAN(AK/(GA+BN*OMEX(J)))
    FHI=DATAN(AK/(GA-BN*OMEX(J)))
C   rel=(GA-BN*OMEX(J))
C   write(*,*)'rel=',rel,'fhi',fhi
    PNK=(PI*GL*r*eps)/2.0
    ASS=1.0/(GA*PNK)
    BSS=DSIN(AM*PI/2.0)
    CSS=DSIN(AM*PI/2.0)
    A44=PP1*(DCOS(BN*THETA(L)+FHI-BN*OMEX(J)*T))
    A55=2.0*SQRT(AK**2+(GA-BN*OMEX(J))**2)
    A6=PP1*(DCOS(BN*THETA(L)-ALFHA-BN*OMEX(J)*T))
    A7=2.0*SQRT(AK**2+(GA+BN*OMEX(J))**2)
    A8=(PP2*(2.71828**(-AK*T)))*(DCOS(BN*THETA(L)+FHI-GA*T))
    A9=(PP2*(2.71828**(-AK*T)))*(DCOS(BN*THETA(L)-ALFHA+GA*T))
    FSS=A8/A55

```

```

GSS=A9/A7
DSS=A44/A55
ESS=A6/A7
U=U+(ASS*BSS*CSS)*(DSS+ESS-(FSS+GSS))
1610 CONTINUE
1600 CONTINUE
    DES=U*(FU/(RO*TES))
    V1=DABS(DES)
    V2=DABS(DES)
    U3(I)=DES
C    TR(I)=T
C    WRITE(4,*)OMEX(J),theta(I),tR(I),U3(I)
    IF(V1.GT.V2)GO TO 300
    DESP=DES
    300 T=T+DT
1100 CONTINUE
    WRITE(5,*)OMEX(J),theta(I),DABS(DES)
2000 CONTINUE
1500 CONTINUE
    CLOSE(2)
    CLOSE(3)
    CLOSE(4)
    CLOSE(5)
    CLOSE(6)
    STOP
1800 END

```