UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Adjunciones de Galois

Tesis

que para obtener el título de

matemático

presenta

Aarón Aparicio Hernández

Febrero de 1993

INDICE pag.

INTRODUCCION

La presente tesis tiene como objetivo, aclarar los puntos que omiten los autores **Horst Herrlich** y **M. Hušek** en el artículo *Galois Connections Categorically*, que fue publicado en el Journal of Pure and Applied Algebra en 1990; así como agregar resultados para obtener las demostraciones de los teoremas que se mencionan. Quiero señalar que el contenido puede ayudar a entender conceptos vistos en los cursos de álgebra moderna, que se imparten en la Facultad de Ciencias; sin embargo hay conceptos que deben manejarse atinadamente para entenderlos. Dentro de la teoría de las categorías hay grandes estratos de estudio, mediante los cuales se obtiene información muy importante (*funtores, transformaciones naturales, situaciones adjuntas; etc*).

Aproximadamente en 1830 Galois descubrió e investigó una conexión, entre el conjunto de todos los subcampos de L que contienen a K y el conjunto de todos los automorfismos de L que dejan a K fijo. Las propiedades de esta conexión sigue vigente en marcos más abstractos.

En 1940 Birkhoff [2] asoció una relación con una conexión, la cual llamó *polaridad*. Generalizando este concepto, Ore [7] introdujo en 1944 *conexiones de Galois* entre conjuntos parcialmente ordenados (COPOS). Estas, así como las polaridades tienen forma contravariante. Su versión covariante fue introducido en 1953 por Schmidt [10], bajo el nombre *conexiones de Galois de tipo mixto*. Los categoristas observaron que estas conexiones, no son otras que *situaciones adjuntas* entre conjuntos parcialmente ordenados, considerados de la manera usual como categorías (ver Mac Lane [6]). Desafortunadamente, muchas propiedades de las conexiones de Galois no son válidas en las situaciones adjuntas, por consiguiente para las conexiones de Galois los funtores adjuntos forman un nivel inadecuado de generalidad.

A continuación, se mencionan los estratos que sirven como niveles de generalidad:

(a) Correspondencias de Galois (= Conexiones de Galois de tercera clase)

(b) Adjunciones de Galois (= Conexiones de Galois de cuarta clase)

Virtualmente todos los resultados interesantes de las conexiones de Galois son válidas para el concepto (a), y un número suficiente para el concepto (b). Algunas partes de la teoría del segundo concepto fueron introducidos por Isbell [5] (mencionado en Pumplün [9]).

El capítulo I se divide en dos secciones, que son las conexiones de Galois de primera y segunda clase; y se prueban las relaciones que existen entre ellas. En el capítulo II, se definen las conexiones de Galois de tercera clase, y se desarrollan gran parte de sus propiedades e incluyendo algunos ejemplos interesantes. Al abstraer más el concepto de conexiones de Galois, en el capítulo III; se definen las conexiones de Galois de cuarta clase y se agregan algunos resultados que Herrlich y Hušek no consideraron en su artículo.

CAPITULO I

CONEXIONES DE GALOIS DE PRIMERA Y SEGUNDA CLASE

Alrededor de 1830 apareció en Francia
una nueva estrella de inimaginable
brillo en los cielos de la matemática
pura: Evariste Galois.
Félix Klein

En este capítulo se definen las conexiones de Galois de primera clase, y se prueban algunas propiedades útiles. Posteriormente se definen las conexiones de Galois de segunda clase. Uno de los resultados interesantes que se prueba, es que toda conexión de Galois de primera clase es conexión de Galois de segunda clase y recíprocamente. A continuación, comenzamos por recordar la descripción clásica de las conexiones de Galois; descritas por Birkhoff y Ore, en sus formas covariantes.

1 Conexiones de Galois de Primera Clase

Definición 1.1 (Birkhoff [2]) *Sean X y Y conjuntos, $\rho = (X, R, Y)$ una relación entre X y Y. Denotamos con $A = (\wp(X), \supseteq)$ el conjunto potencia de X, ordenado mediante la inversa de la inclusión; y con $B = (\wp(Y), \subseteq)$ el conjunto potencia de Y, ordenado mediante la inclusión. Definimos las funciones $G : A \longrightarrow B$ y $F : B \longrightarrow A$ como sigue:*

$G(a) = \{y \in Y : \forall x \in a \quad x\rho y\}$ y $F(b) = \{x \in X : \forall y \in b \quad x\rho y\}$. En este caso (F, G) se llama conexión de Galois de primera clase.

Teorema 1.1 (Birkhoff [**2**])
Si (F,G) es conexión de Galois de primera clase, tales que $A^* = F[B]$ y $B^* = G[A]$, entonces se tiene lo siguiente:

(0) $G : A \longrightarrow B$ *y* $F : B \longrightarrow A$ *son funciones monótonas.*

(1) $\forall a \in A$ *y* $\forall b \in B \quad F(b) \leq a \iff b \leq G(a)$.

(2) $\forall a \in A$ *y* $\forall b \in B \quad FG(a) \leq a$ *y* $b \leq GF(b)$.

(3) $G(\cup a_i) = \cap G(a_i)$ *y* $F(\cup b_i) = \cap F(b_i)$.

(4) $GFG = G$ *y* $FGF = F$.

(5) $(GF)^2 = GF$ *y* $(FG)^2 = FG$.

(6) $A^* = FG[A] = \{a \in A : FG(a) = a\}$ *y*
$B^* = GF[b] = \{b \in B : GF(b) = b\}$.

(7) *Sean* $G^* : A^* \longrightarrow B^*$ *y* $F^* : B^* \longrightarrow A^*$ *tales que,* G^* *y* F^* *son restricciones de* G *y* F *respectivamente, entonces* G^* *y* F^* *son isomorfismos inversos uno del otro.*

Demostración:
(0) Se quiere probar que $G : A \longrightarrow B$ es monótona.
Veamos que si $a_1 \leq a_2$, entonces $G(a_1) \leq G(a_2)$.
Supongamos que $a_2 \subseteq a_1$, probaremos que $G(a_1) \subseteq G(a_2)$.
Si $y \in G(a_1)$, entonces $\forall x \in a_1 \; x\rho y$; como $a_2 \subseteq a_1$, entonces $\forall x \in a_2 \; x\rho y$; así $y \in G(a_2)$, por lo tanto $G(a_1) \subseteq G(a_2)$.

Análogamente, F es monótona.

(1) Se quiere probar que $F(b) \supseteq a \iff b \subseteq G(a)$ para $a \in A$ y $b \in B$.
$\Longrightarrow$) Supongamos que $F(b) \supseteq a$, $y \in b$; veamos que $y \in G(a)$, pero

$x \in a \subseteq F(b) \implies \forall y \in b\ (\forall x \in X\ x\rho y) \implies \forall y \in b\ (\forall x \in a\ x\rho y)$,
así $y \in G(a)$ por lo tanto $b \subseteq G(a)$.

$\Longleftarrow$) Supongamos $b \subseteq G(a)$ y $x \in F(b)$, veremos que $x \in a$.
$x \in F(b) \implies \forall y \in b\ (\forall x \in X\ x\rho y) \implies \forall y \in G(a)\ (\forall x \in a\ x\rho y)$, pues
$b \subseteq G(a) \quad \therefore \quad \forall y \in G(a)\ (\forall x \in a\ x\rho y) \quad \therefore \quad x \in a \quad \therefore \quad a \subseteq F(b)$.

(2) Probemos que $FG(a) \supseteq a$ y $b \subseteq GF(b)$ para $a \in A$ y $b \in B$.
Como $G(a) \subseteq G(a) \iff FG(a) \supseteq a$ por (1).
Como $F(b) \subseteq F(b) \iff b \subseteq GF(b)$ por (1)
por lo tanto $FG(a) \supseteq a$ y $b \subseteq GF(b)$.

(3) $y \in \cap G(a_i) \iff \forall y \in G(a_i) \iff \forall i\, \forall x_i \in \cup a_i \quad x_i \rho y$
$\iff \forall x_i \in \cup a_i \quad x_i\rho y \iff y \in G(\cup a_i)$.

Análogamente, $F(\cup b_i) = \cap F(b_i)$.

(4) Veamos que $GFG(a) = G(a)$ y $FGF(b) = F(b)$ para $a \in A$ y $b \in B$.

Por (2) $FG(a) \supseteq a \implies GFG(a) \supseteq G(a)$, pues G es monótona.
Como $b \subseteq GF(b)$, entonces $G(a) \subseteq GFG(a)$ (con $b = G(a)$),
por lo tanto $GFG(a) = G(a)$.

Análogamente, $FGF(b) = F(b)$.

(5) Por (4) $GFG = G \implies FGFG = FG \quad \therefore \quad (FG)^2 = FG$.

Por (4) $FGF = F \implies GFGF = GF \quad \therefore \quad (GF)^2 = GF$.

(6) Esto es claro por la manera en que se definió $F[B]$ y $G[A]$.

(7) Veamos ahora que $G^*F^* = I_{(F[B])}$ y $F^*G^* = I_{(G[A])}$
$G^*F^* = G^*F(b) = GF(b) = b$, pues G^* y F^* son restricciones de G y F

respectivamente y por (6); por lo tanto $G^*F^* = I_{(G[A])}$.

Análogamente, $F^*G^* = I_{(F[B])}$.

■

2 Conexiones de Galois de Segunda Clase

Definición 1.2 *Sean $G : A \longrightarrow B$ y $F : B \longrightarrow A$ funciones monótonas entre clases parcialmente ordenadas, tales que $\forall a \in A$ y $\forall b \in B$ $F(b) \leq a \iff b \leq G(a)$. En este caso (F, G) se llama* conexión de Galois de segunda clase.

Proposición 1.2
Si $G : A \longrightarrow B$ y $F : B \longrightarrow A$ son funciones monótonas entre clases parcialmente ordenadas, entonces (1) y (2) son equivalentes e implican las restantes. Con $A^* = F[B]$ y $B^* = G[A]$.

(1) (F, G) *es conexión de Galois de segunda clase.*

(2) $FG(a) \leq a$ *y* $b \leq GF(b)$ $a \in A$ *y* $b \in B$.

(3) *G preserva ínfimos (máxima cota inferior) y F preserva supremos (mínima cota superior).*

(4) $GFG = G$ *y* $FGF = F$.

(5) $(GF)^2 = GF$ *y* $(FG)^2 = FG$.

(6) $A^* = FG[A] = \{a \in A : FG(a) = a\}$ *y*
$B^* = GF[B] = \{b \in B : GF(b) = b\}$.

(7) *Sean $G^* : A^* \longrightarrow B^*$ y $F^* : B^* \longrightarrow A^*$, tales que G^* y F^* son restricciones de G y F respectivamente; entonces G^* y F^* son isomorfismos inversos uno del otro.*

Demostración:
(1) $\Longrightarrow$ (2) Si (F, G) es conexión de Galois de segunda clase, entonces $\forall a \in A$ y $\forall b \in B \quad F(b) \leq a \iff b \leq G(a)$, como $F(b) \leq F(b)$ $\iff b \leq GF(b)$, por lo tanto $\quad b \leq GF(b)$.
Como $G(a) \leq G(a) \quad \iff FG(a) \leq a$, por lo tanto $FG(a) \leq a$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Como $FG(a) \leq a$ y $b \leq GF(b)$ con $a \in A$ y $b \in B$, entonces veamos que, $F(b) \leq a \iff b \leq G(a)$.
$\Longrightarrow$) Si $F(b) \leq a$, entonces $GF(b) \leq G(a)$, pues G es monótona; además $b \leq GF(b) \leq G(a)$, por lo tanto $b \leq G(a)$.

$\Longleftarrow$) Si $b \leq G(a)$, entonces $F(b) \leq FG(a) \leq a \quad$ ya que F es monótona, por lo tanto $F(b) \leq a$.

(3) Veamos que G preserva ínfimos.
i) Como $\forall a_i \quad a_i \leq \cup a_i$, entonces $\forall a_i \ G(a_i) \leq G(\cup a_i)$ ya que G es monótona, por lo tanto $\cap G(a_i) \leq G(\cup a_i)$.

ii) Si $\forall i \quad c \leq G(a_i)$, entonces $\forall i \quad F(c) \leq a_i$, luego $F(c) \leq \cup a_i$; así $c \leq G(\cup a_i)$ por lo tanto $G(\cup a_i) = \cap G(a_i)$, por lo tanto G preserva ínfimos.

Análogamente, F preserva supremos.

(4) Como $FG(a) \leq a$, entonces $GFG(a) \leq G(a)$ por ser G monótona;
como $b \leq GF(b)$, entonces $G(a) \leq GFG(a)$ (con $b = G(a)$),
pues $G : A \longrightarrow B$, por lo tanto $GFG = G$.

Análogamente, $FGF = F$.

(5) Como $GFG = G$, entonces $(GF)^2 = GFGF = GF \therefore \quad (GF)^2 = GF$.

Análogamente, $(FG)^2 = FG$.

(6) Es claro que $FG[A] = \{a \in A : FG(a) = a\}$ y
$GF[B] = \{b \in B : GF(b) = b\}$.
i) Por (4) $F[B] = FGF[B] = FG[A^*] \subseteq FG[A]$, así $A^* \subseteq FG[A]$.
$x \in FG[A]$ implica $x = FG(a)$ para $a \in A$, aplicando (5) tenemos que $FG(a) = F(GFG(a)) \in F[B] = A^*$, así $x \in A^*$, luego $FG[A] \subseteq A^*$ por lo tanto $A^* = FG[A]$.

ii) Si $a \in A^*$, entonces $a \in FG[A]$; así $a = FG(a')$ $a' \in A$, lo cual implica $FG(a) = FGFG(a') = FG(a') = a$ por (5),
por lo tanto $FG(a) = a$, por lo tanto $A^* \subseteq FG(a)$.

Si $a \in A$ y $FG(a) = a$, entonces $G(a) \in B$, así $a = FG(a) \in A^*$,
por lo tanto $a = FG(a) \subseteq A^*$, por lo tanto $\forall a \in A \quad A^* = FG(a)$.

Análogamente, $B^* = GF[B] = \{b \in B : GF(b) = b\}$.

(7) Probemos que $G^*F^* = I_{(F[B])}$ y $F^*G^* = I_{(G[A])}$.

$G^*F^* = G^*F(b) = GF(b) = b$, pues G^* y F^* son restricciones de G y F respectivamente y por (6), por lo tanto $G^*F^* = I_{(G[A])}$.

Análogamente, $F^*G^* = I_{(F[B])}$.

■

Proposición 1.3
Sean $G : A \longrightarrow B$, $F_1 : B \longrightarrow A$ y $F_2 : B \longrightarrow A$ funciones. Si (F_1, G) y (F_2, G) son conexiones de Galois de segunda clase, entonces $F_1 = F_2$.

Demostración:
(F_1, G) conexión de Galois de segunda clase $\Longleftrightarrow$ $b \leq G(a)$ para $a \in A$ y $b \in B$ $\Longleftrightarrow$ $b \leq G(F_1(b))$ (con $a = F_1(b)$) $\Longleftrightarrow$ $F_2(b) \leq F_1(b)$, pues (F_2, G) es conexión de Galois de segunda clase; por lo tanto $F_2(b) \leq F_1(b)$.

(F_2, G) conexión de Galois de segunda clase $\Longleftrightarrow$ $b \leq G(a)$
$\Longleftrightarrow$ $b \leq G(F_2(b))$ (con $a = F_2(b)$) $\Longleftrightarrow$ $F_1(b) \leq F_2(b)$, pues (F_1, G) es conexión de Galois de segunda clase; por lo tanto $F_1(b) \leq F_2(b)$, por lo tanto $F_1(b) = F_2(b)$ por lo tanto $F_1 = F_2$. ∎

Proposición 1.4 (Pickert [8])
Sean A,B clases parcialmente ordenadas y $G : A \longrightarrow B$ función entre retículas completas, entonces G preserva ínfimos $\Longleftrightarrow$ existe una única función $F : B \longrightarrow A$ tal que (F, G) es conexión de Galois de segunda clase.

Demostración:
$\Longrightarrow$) Veamos la existencia.
$F : B \longrightarrow A$ se define mediante $F(b) = \bigcap_{b \leq G(a)} a$.
i) Afirmamos que F es monótona, pues si $b_1 \leq b_2$, entonces $(b_2 \leq G(a) \Longrightarrow b_1 \leq G(a))$, lo cual implica que $\bigcap_{b_1 \leq G(a)} a \leq \bigcap_{b_2 \leq G(a)} a$, por lo tanto $F(b_1) \leq F(b_2)$; así $b_1 \leq b_2$ implica $F(b_1) \leq F(b_2)$, por lo tanto F es monótona.

ii) Ahora probemos que $b \leq G(a') \Longleftrightarrow F(b) \leq a'$
$\Longrightarrow$) $b \leq G(a')$ implica $\bigcap_{b \leq G(a)} a \leq a'$, por lo tanto $F(b) \leq a'$
$\Longleftarrow$) $F(b) \leq a'$ implica $\bigcap_{b \leq G(a)} a \leq a'$, por lo tanto $b \leq \bigcap_{b \leq G(a)} G(a) \leq G(a')$; por lo tanto si $F(b) \leq a'$, entonces $b \leq G(a')$.

iii) La unicidad se sigue inmediatamente de la proposición 1.3.

$\Longleftarrow$) Es claro por la proposición 1.2 (3). ∎

Proposición 1.5
Si (F, G) es conexión de Galois de segunda clase, entonces G es inyectiva $\Longleftrightarrow$ F es suprayectiva.

Demostración:
Como (F, G) es conexión de Galois de segunda clase, entonces existen funciones monótonas $G : A \longrightarrow B$ y $F : B \longrightarrow A$.
$\Longrightarrow$) Veamos que $\forall a \in A\ \exists\ b \in B \cdot \ni \cdot F(b) = a$.
Si $a \in A$, entonces $G(a) \in B$; probemos que $FG(a) = a$.
Por la proposición 1.2 (4) $GFG(a) = G(a) \Longrightarrow FG(a) = a$, pues G es inyectiva $\therefore$ $F(b) = a$ (con $b = G(a)$) $\therefore$ F es suprayectiva.

$\Longleftarrow$) Probemos que si $G(a) = G(a')$, entonces $a = a'$.
$a, a' \in A \Longrightarrow \exists\ b, b' \in B \cdot \ni \cdot F(b) = a$ y $F(b') = a'$, pues F es suprayectiva; así $G(a) = G(a')$ implica $GF(b) = GF(b')$, luego $FGF(b) = FGF(b')$; así por la proposición 1.2 (4) $F(b) = F(b')$, luego $a = a'$;
por lo tanto G es inyectiva.

■

Proposición 1.6 (Everett [3], Ore [7], Schmidt [10])
Sean X, Y conjuntos, tales que $A = (\wp(X), \supseteq)$, $B = (\wp(Y), \subseteq)$. Si $G : A \longrightarrow B$ y $F : B \longrightarrow A$ son funciones, entonces (F, G) es conexión de Galois de primera clase $\Longleftrightarrow$ (F, G) es conexión de Galois de segunda clase.

Demostración:
$\Longrightarrow$) (F, G) Conexión de Galois de primera clase, implica F y G son monótonas $\therefore$ por el teorema 1.1 (1) $\forall a \in A$ y $\forall b \in B$, $F(b) \leq a \Longleftrightarrow b \leq G(a)$; por lo tanto (F, G) es conexión de Galois de segunda clase.

$\Longleftarrow$) (F,G) conexión de Galois de segunda clase $\Longrightarrow$ F y G son monótonas. Veamos ahora que,

$$G(a) = \{y \in Y : \forall x \in a \quad x\rho y\} \quad F(b) = \{x \in X : \forall y \in b \quad x\rho y\}$$

Sea ρ la relación de X en $Y \cdot \ni \cdot x\rho y \iff \exists\, a \in \wp(X)$ con $x \in a,\ y \in G(a)$.
Por demostrar $\exists\ b \in \wp(Y)$ con $y \in b$ y $x \in F(b) \iff x\rho y$
$\Longrightarrow$) $b \in B$ con $y \in b$ y $x \in F(b) \Longrightarrow y \in b$ y $x \in A$, pues $F(b) \subseteq A$
$\therefore\quad b \leq GF(b)$ y $b \in B \Longrightarrow b \subseteq GF(b) \subseteq G(a)$, pues $F(b) \subseteq A$
$\therefore\quad y \in G(a)$ y $x \in A \quad \therefore \quad x\rho y$.

$\Longleftarrow$) $x\rho y \Longrightarrow \exists\ a \in \wp(X)$, con $x \in A,\ y \in G(a) \Longrightarrow \exists\ a \in A$, con $x \in A,\ y \in G(a) \subseteq B \Longrightarrow \exists\ x \in a,\ y \in B$; además $F(b) \leq FG(a) \leq a$, pues (F,G) es conexión de Galois de segunda clase.
$\therefore\quad \exists\ x \in a,\ y \in B,$ y $a \subseteq FG(a) \subseteq F(b)$
$\therefore\quad \exists\ x \in F(b),\ y \in B \quad \therefore \quad \exists\ b \in B$, con $y \in b,\ x \in F(b)$
$\therefore\quad \exists\ b \in \wp(Y)$, con $y \in b,\ x \in F(b)$.

La correspondencia definida por ρ es conexión de Galois de primera clase
$\therefore\quad (F,G)$ es conexión de Galois de primera clase.

■

OBSERVACION

El resultado anterior nos permite caracterizar por medio de las conexiones de Galois de segunda clase, a todas las conexiones de Galois de primera clase de una manera más sencilla.

CAPITULO II

CONEXIONES DE GALOIS DE TERCERA CLASE

Reductio ad absurdum, que tanto amaba Euclides, es una de las mejores armas del matemático. Es un gambito mucho más fino que uno cualquiera del ajedrez: un jugador de ajedrez puede ofrecer el sacrificio de un peón o de otra pieza mayor, pero el matemático ofrece el juego.

G.H. Hardy

En este capítulo se desarrollan algunas definiciones y posteriormente se definen las conexiones de Galois de tercera clase, las cuales resultan muy importantes pues con ello se obtiene un estrato muy grande al trabajar con categorías. Con respecto a la definición de conexión de Galois de tercera clase, se hizo un cambio en la definición que dan los autores Herrlich y Hušek, pues resulta más fácil trabajar con ella y después probamos que son equivalentes.

La utilidad que se obtiene al definir las conexiones de Galois de tercera clase, es muy importante ya que las conexiones de Galois de primera clase, resultan ser un caso particular de las de tercera clase, como podrá verse más adelante. A continuación, se definen algunos conceptos.

2 Conexiones de Galois de Tercera Clase

Definición 2.1 *Sea* $\mathbf{X}$ *una categoría. Una* categoría concreta *sobre* $\mathbf{X}$, *es un par* $(\mathbf{A}, U)$ *tales que* $\mathbf{A}$ *es categoría y* $U : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{X}$ *es funtor fiel y amnésico.*

Definición 2.2 $U : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{X}$ *se llama* funtor amnésico *cuando para cada* f $\mathbf{A}$*-isomorfismo, con* Uf *morfismo identidad en* $\mathbf{X}$ *se tiene que* f *es identidad en* $\mathbf{A}$.

Definición 2.3 $F : (\mathbf{A}, U) \longrightarrow (\mathbf{B}, V)$ *es* funtor concreto *si* $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *es funtor tal que* $V \circ F = U$, *es decir el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "U"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "V"] \\
& \mathbf{X}
\end{tikzcd}$$

OBSERVACIONES

Nosotros adoptaremos las siguientes convenciones:

1) Ya que los funtores fieles son inyectivos en los conjuntos *hom*, nosotros supondremos que $hom_{\mathbf{A}}(A, B)$ es subconjunto de $hom_{\mathbf{X}}(UA, UB)$ para cada par de objetos $(A, B) \in$ Ob$\mathbf{A}$. Esta convención nos permite expresar la propiedad de que, si $A, B \in$ Ob$\mathbf{B}$ y $f \in$Mor$\mathbf{X}$ con $UA \xrightarrow{f} UB$, entonces existe un único $\mathbf{A}$-morfismo $A \xrightarrow{g} B$ con $U(A \xrightarrow{g} B) = UA \xrightarrow{f} UB$, y en tal caso abusaremos del lenguaje diciendo que $f : A \longrightarrow B$ es un morfismo de $\mathbf{A}$.

2) Algunas veces, se denotará con $\mathbf{A}$ a la categoría concreta $(\mathbf{A}, U)$.

FIBRAS EN CATEGORIAS CONCRETAS

Definición 2.4 *Si* $(\mathbf{A}, U)$ *es categoría concreta sobre* $\mathbf{X}$, *entonces*

(1) *La* fibra *de* $X \in Ob\mathbf{X}$, *consiste de la clase preordenada de todos los* $A \in Ob\mathbf{A}$ *con* $U(A) = X$, *ordenados por:*

$$A \leq B \iff id_X : A \longrightarrow B \in \; Mor\,\mathbf{A}.$$

(2) $A, B \in Ob\mathbf{A}$ *son* equivalentes *si* $A \leq B$ *y* $B \leq A$.

(3) $(\mathbf{A}, U)$ *es* amnésico *si las fibras son clases parcialmente ordenadas; es decir dos objetos equivalentes son iguales.*

EJEMPLOS

En los siguientes ejemplos $\mathbf{X}$ denotará la categoría de los conjuntos.

(1) Si $\mathbf{A}$ es la categoría de los conjuntos preordenados, ρ_1 y ρ_2 relaciones en Set, entonces las fibras en $\mathbf{A}$ estan dadas por:

$$\rho_1 \leq \rho_2 \iff \rho_1 \subseteq \rho_2$$

(2) Si $\mathbf{A}$ es la categoría de los espacios métricos, entonces para las métricas d_1 y d_2 en $\mathbf{X}$, las fibras en $\mathbf{A}$ estan dadas por:

$$d_1 \leq d_2 \iff \forall\, (x, y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{X},\; d_2(x, y) \leq d_1(x, y)$$

(3) Si $\mathbf{X} = Top$, entonces para las topologías τ_1 y τ_2 en $\mathbf{X}$, las fibras en $\mathbf{A}$ estan dadas por:

$$\tau_1 \leq \tau_2 \iff \tau_2 \subseteq \tau_1$$

(4) Si $\mathbf{A} = Vec$, entonces para los espacios vectoriales ν_1 y ν_2 en $\mathbf{X}$, las fibras en $\mathbf{A}$ estan dadas por:

$$\nu_1 \leq \nu_2 \iff \nu_1 = \nu_2$$

Definición 2.5 *Si F y G son funtores concretos para $(\mathbf{A}, U)$ y $(\mathbf{B}, V)$ respectivamente, se dice que F es* más fino *que G (o G es* más grueso *que F) si se cumple:*

$$F \leq G \iff \forall A \in Ob\mathbf{A} \quad F(A) \leq G(A)$$

EJEMPLOS

(1) Sea $\mathbf{X}$ = Set la categoría de los conjuntos, y consideremos las funciones que preservan el orden como funtores concretos sobre $1 = \{0\}$, entonces

$$F \leq G \iff \forall\, x \quad F(x) \leq G(x)$$

(2) Sean $U : Top \longrightarrow Set$ el funtor que olvida, $F : Set \longrightarrow Top$ el funtor discreto, y $G : Set \longrightarrow Top$ el funtor indiscreto, entonces $F \leq G$.

Demostración:

(2) Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Set \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[r, shift right, "G"'] \arrow[dr, "id_{Set}"'] & Top \arrow[d, "U"] \\
& Set
\end{tikzcd}$$

Sea $(X, \tau), (X, \sigma)$ espacios topológicos, con σ y τ topologías discretas, entonces $id_X : (X, \tau) \longrightarrow (X, \sigma)$.

Así $F \leq G$, pues $\forall x \in X \quad id_X : F(x) \longrightarrow G(x)$ es continua.

■

Proposición 2.1

(1) *Todo funtor concreto es fiel.*

(2) *Todo funtor concreto está completamente determinado por su valor en los objetos.*

(3) *Los objetos que son identificados por un funtor concreto pleno son equivalentes.*

(4) *Todo funtor concreto pleno con dominio amnésico es inmersión.*

Demostración:

1) Sea $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un funtor concreto y $A_1, A_2 \in Ob\mathbf{A}$.
Veamos que $F : Hom(A_1, A_2) \longrightarrow Hom(F(A_1), F(A_2))$ es inyectiva.
$f_1, f_2 \in Hom(A_1, A_2) \cdot \ni \cdot F(f_1) = F(f_2)$, por demostrar $f_1 = f_2$.
Como F es funtor concreto, entonces $U = V \circ F \quad \therefore \quad F(f_1) = F(f_2)$
$\Longrightarrow VF(f_1) = VF(f_2) \Longrightarrow U(f_1) = U(f_2) \Longrightarrow f_1 = f_2$, pues U es fiel.

2) Sea $G : (\mathbf{A}, U) \longrightarrow (\mathbf{B}, V)$ un funtor concreto tal que $\forall A \in \mathrm{Ob}\mathbf{A}$ $G(A) = F(A)$, entonces $\forall f \in \mathrm{Mor}\mathbf{A} \quad f : A \longrightarrow A'$, tenemos los $\mathbf{B}$-morfismos

$G(A) = F(A) \underset{Gf}{\overset{Ff}{\rightrightarrows}} F(A') = G(A')$ con $V(Ff) = U(f) = V(Gf)$, ya que V es fiel, entonces $Ff = Gf$; por lo tanto $F = G$.

3) Si $A, A' \in Ob\mathbf{A}$ tales que $F(A) = F(A')$. Por ser F fiel y pleno, existe un único $g : A \longrightarrow A'$ isomorfismo de $\mathbf{A}$ tal que $F(g) = id : F(A) \longrightarrow F(A')$, y $U(g) = V(F(g)) = id \quad \therefore \quad g = id_A \quad \therefore \quad A \leq A'$.
Análogamente, $A' \leq A$; por lo tanto A y A' son equivalentes.

4) Sea $F : (\mathbf{A}, U) \longrightarrow (\mathbf{B}, V)$ funtor concreto pleno.
Por 1) F es fiel, veamos que si $F(A) = F(A')$, entonces $A = A'$.
Por 3) si $F(A) = F(A')$, entonces A y A' son equivalentes,
así $A = A'$, pues U es amnésico; por lo tanto F es inmersión.

■

Definición 2.6 *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *categorías concretas sobre* $\mathbf{X}$*, si* $G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *y* $F : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ *son funtores concretos sobre* $\mathbf{X}$*; tales que* $F \circ G \leq id_{\mathbf{A}}$ *y* $id_{\mathbf{B}} \leq G \circ F$*, entonces el par* (F, G) *se llama* Conexión de Galois de Tercera Clase (o Correspondencia de Galois o Conexión de Galois Concreta).

EJEMPLOS

Sean $U : Top \longrightarrow Set$ el funtor que olvida, $D : Set \longrightarrow Top$ el funtor discreto y $N : Set \longrightarrow Top$ el funtor indiscreto, entonces (U, N) y (D, U) son correspondencias de Galois.

Demostración:
(1) Veamos que $U \circ N \leq id_{Set}$ y $id_{Top} \leq N \circ U$.
Es claro que $U \circ N \leq id_{Set}$, por demostrar $id_{Top} \leq N \circ U$.
Sea (X, τ) espacio topológico, veremos que $id_X : (X, \tau) \longrightarrow (N(U(X, \tau)))$ es continua. Se probará que $id_X : (X, \tau) \longrightarrow (X, \sigma)$ es continua, donde σ es la topología indiscreta en $(N(U(X, \tau)))$.

Es claro que $id_X : (X, \tau) \longrightarrow (X, \sigma)$ es continua, pues los únicos abiertos son $\emptyset$ y X.

(2) Veamos que $D \circ U \leq Top$ y $id_{Set} \leq U \circ N$, lo cual es claro; pues todos los conjuntos son abiertos en la topología discreta. ⊠

Proposición 2.2
Si (F, G) es correspondencia de Galois entre $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, y (F', G') es correspondencia de Galois entre $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$, entonces $(F \circ F', G' \circ G)$ es correspondencia de Galois entre $\mathbf{A}$ y $\mathbf{C}$.

Demostración:
$\forall A \in \mathrm{Ob}\mathbf{A} \quad F'G'(G(A)) \leq G(A)$, pues (F', G') es correspondencia de Galois;
por lo tanto $FF'G'G \leq FG(A)$, pues $FG(A) \leq A$
por lo tanto $(FF')(G'G)(A) \leq A$.

Análogamente, $\forall C \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$ $C \leq (G'G)(FF')(C)$
$\therefore \quad (F \circ F', G' \circ G)$ es correspondencia de Galois entre $\mathbf{A}$ y $\mathbf{C}$.

■

Proposición 2.3
Si (F, G) es correspondencia de Galois entre $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ sobre $\mathbf{X}$, entonces (G^{op}, F^{op}) es correspondencia de Galois entre $\mathbf{B}^{op}$ y $\mathbf{A}^{op}$ sobre $\mathbf{X}^{op}$.

Demostración:
Veamos que $\quad G^{op} \circ F^{op} \leq id_{\mathbf{B}^{op}}$ y $id_{\mathbf{A}^{op}} \leq F^{op} \circ G^{op}$.
Por hipótesis $\quad F \circ G \leq id_{\mathbf{A}}$ y $id_{\mathbf{B}} \leq G \circ F$. por lo tanto,
$id_{\mathbf{B}} \leq G \circ F \iff \forall B \in \mathrm{Ob}\mathbf{B} \quad B \leq GF(B) \iff id_B : B \longrightarrow GF(B) \in \mathrm{Mor}\mathbf{B} \iff id_{B^{op}} \in \mathrm{Mor}\mathbf{B}^{op}$, así $(G \circ F)^{op} = G^{op} \circ F^{op} \leq id_{\mathbf{B}^{op}}$
por lo tanto $G^{op} \circ F^{op} \leq id_{\mathbf{B}^{op}}$.
$F \circ G \leq id_{\mathbf{A}} \iff \forall A \in \mathrm{Ob}\mathbf{A} \quad FG(A) \leq A \iff id_A : FG(A) \longrightarrow A \in \mathrm{Mor}\mathbf{A} \iff id_{A^{op}} \in \mathrm{Mor}\mathbf{A}^{op}$, así $id_{\mathbf{A}^{op}} \leq (F \circ G)^{op} = F^{op} \circ G^{op}$
por lo tanto $id_{\mathbf{A}^{op}} \leq F^{op} \circ G^{op}$.

■

Proposición 2.4
Si $G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ y $F : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ son funtores concretos sobre $\mathbf{X}$, entonces son equivalentes:

(1) *(F, G) es correspondencia de Galois.*

(2) *Si $f \in Mor\mathbf{X}$, entonces $F(B) \xrightarrow{f} A \in Mor\mathbf{A} \iff B \xrightarrow{f} G(A) \in Mor\mathbf{B}$ para cada $A \in \mathbf{A}$ y $B \in \mathbf{B}$.*

Demostración:
(1) $\Longrightarrow$ (2)
$\Longrightarrow$) Si $f \in$ Mor$\mathbf{X}$, entonces aplicando G y $id_{\mathbf{B}} \leq G \circ F$ se tiene

$$B \xrightarrow{id_B} GF(B) \xrightarrow{f} G(A) \in \text{Mor}\mathbf{B}$$

$\Longleftarrow$) Si $B \xrightarrow{f} G(A) \in$ Mor$\mathbf{B}$ y $F \circ G \leq id_{\mathbf{A}}$, entonces

$$F(B) \xrightarrow{f} FG(A) \xrightarrow{id_A} A \in \text{Mor}\mathbf{A}$$

(2) $\Longrightarrow$ (1) ya que cada $F(B) \xrightarrow{id_{F(B)}} F(B) \in$ Mor$\mathbf{A}$, por (2) $\forall B \in$Ob$\mathbf{B}$
$B \leq GF(B)$, por lo tanto $id_{\mathbf{B}} \leq G \circ F$.

Análogamente, $\forall A \in$Ob$\mathbf{A}$ $\quad F \circ G \leq id_{\mathbf{A}}$.
Po lo tanto (F, G) es correspondencia de Galois.

∎

OBSERVACION

En el artículo de Herrlich y Hušek [4], la definición de correspondencia de Galois es la que aparece en el inciso (2) de la proposición anterior; y no la definición que se da (Definición 2.6), sin embargo la proposición anterior afirma que son equivalentes; por lo tanto usaremos cualquiera de ellas.

Proposición 2.5
Si (F, G) y (F', G) son correspondencias de Galois entre categorías concretas amnésicas, entonces $F = F'$.

Demostración:
$B \in \mathrm{Ob}\mathbf{B}$, si (F, G) es correspondencia de Galois, entonces $B \leq GF(B) \iff B \leq G(A)$ (con $F(B) = A$) $\iff F'(B) \leq A = F(B)$, pues (F', G) es correspondencia de Galois, por lo tanto $F'(B) \leq F(B)$.

Análogamente, $F(B) \leq F'(B)$; por lo tanto por amnesia $F = F'$.

■

Proposición 2.6
Si (F, G) y (F, G') son correspondencias de Galois entre categorías concretas amnésicas, entonces $G = G'$.

Demostración:
Se sigue por dualidad de la proposición anterior.

■

OBSERVACION

Si las clases parcialmente ordenadas son interpretadas de la manera usual, como categorías concretas sobre una categoría $\mathbf{T}$ que tiene un morfismo; entonces las conexiones de Galois de segunda clase, son justamente las conexiones de Galois de tercera clase (ver [4]).

Proposición 2.7
Si H es isomorfismo concreto, entonces (H^{-1}, H) es correspondencia de Galois.

Demostración:
Sea $H : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ isomorfismo concreto.
Por demostar $H^{-1}(B) \xrightarrow{f} A \iff B \xrightarrow{f} H(A)$ para $A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B}$.
$A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B} \quad H^{-1}(B) \xrightarrow{f} A \iff H(H^{-1}(B)) \xrightarrow{f} H(A)$
$\iff id_{\mathbf{B}}(B) \xrightarrow{f} H(A) \iff B \xrightarrow{f} H(A)$.

■

Definición 2.7 *Si H es isomorfismo concreto, entonces (H^{-1}, H) es correspondencia de Galois; a (H^{-1}, H) se le llama* isomorfismo de Galois.

Corolario 2.8
Sean $G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ y $F : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ funtores concretos entre categorías concretas amnésicas tales que (F, G) es correspondencia de Galois. Sean $\mathbf{A}^*$ la subcategoría plena de $\mathbf{A}$ cuyos objetos $\{F(B) | B \in Ob\mathbf{B}\}$ y $\mathbf{B}^*$ la subcategoría plena de $\mathbf{B}$ cuyos objetos $\{G(A) | \in Ob\mathbf{A}\}$, entonces

(1) $\mathbf{A}^*$ *es correflexiva en $\mathbf{A}$, y $A \in Ob\mathbf{A}^* \iff A = (F \circ G)(A)$*

(2) $\mathbf{B}^*$ *es reflexiva en $\mathbf{B}$, y $B \in Ob\mathbf{B}^* \iff B = (G \circ F)(B)$*

(3) *$G^* : \mathbf{A}^* \longrightarrow \mathbf{B}^*$ y $F^* : \mathbf{B}^* \longrightarrow \mathbf{A}^*$ las restricciones de G y F respectivamente, son isomorfismos concretos inversos uno del otro.*

Definición 2.8 *Si $E : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es inmersión concreta y $R : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ es reflector concreto, entonces (R, E) es correspondencia de Galois y en este caso se llama* reflexión de Galois (ver [1] p. 60-61).

Definición 2.9 *Si* $E : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *es inmersión concreta y* $C : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ *es correflector concreto, entonces* (E, C) *es correspondencia de Galois y en este caso se llama* correflexión de Galois (ver [1] p. 60-61).

OBSERVACION

Si se considera el soporte de la categoría $\mathbf{X} = \mathbf{1}$, entonces las categorías concretas sobre $\mathbf{X}$, son esencialmente clases preordenadas y los funtores concretos son funciones que preservan el orden, y como ($\forall a \in A$ y $\forall b \in B$ $F(b) \leq a \iff b \leq G(a)$) es equivalente a ($\forall a \in A$ $(F \circ G)(a) \leq a$ y $\forall b \in B$ $b \leq (G \circ F)(b)$) (proposición 2.4), entonces las conexiones de Galois de primera clase son justamente las correspondencias de Galois cuando $\mathbf{X} = \mathbf{1}$.

Proposición 2.9

Sean $G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *y* $F : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ *funtores concretos entre categorías concretas amnésicas tales que* (F, G) *es correspondencia de Galois. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(1) G *es inmersión plena.*

(2) G *es plena.*

(3) G *es inyectiva en los objetos.*

(4) F *es suprayectiva en los objetos.*

(5) $F \circ G = id_{\mathbf{A}}$.

(6) *Excepto por isomorfismo* (F, G) *es reflexión de Galois, es decir; existe* (R, E) *reflexión de Galois y* (H^{-1}, H) *isomorfismo de Galois con* $(F, G) = (R, E) \circ (H^{-1}, H)$.

Demostración:

(1) $\Longrightarrow$ (2) Es claro.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Veamos que, si $G(A) = G(A')$, entonces $A = A'$ para cada $A, A' \in$ObA.

Si $G(A) = G(A') = B$, entonces $id_B : B \xrightarrow{\ \ }_{f} B \in$ MorB, pero $G : \mathbf{A}(A, A') \longrightarrow \mathbf{B}(B, B)$ es sobre (pues G es pleno) $\therefore$ $\exists\, f : A \longrightarrow A'$ con $A \leq A'$.

Análogamente, $A' \leq A$; por lo tanto $A = A'$.

(3) $\Longrightarrow$ (4) $\forall A \in$ObA si $GFG(A) = G(A)$, entonces $FG(A) = A$ por (3), $\therefore$ $F(B) = A$ (con $G(A) = B$) $\therefore$ F es suprayectiva en los objetos.

(4) $\Longrightarrow$ (5) si $A \in$ObA, entonces $\exists\ B \in$ObB con $F(B) = A$, pues F es suprayectiva. $(F \circ G)(A) = F(G(A)) = F(G(F(B))) = F(B) = A$ por la proposición 2.5 $\therefore$ $(F \circ G)(A) = A$ $\therefore$ $F \circ G$ y $id_{\mathbf{A}}$ coinciden en los objetos, pero los funtores concretos estan determinados por su valor en los objetos (proposición 2.1 (2)), por lo tanto $F \circ G = id_{\mathbf{A}}$.

(5) $\Longrightarrow$ (6) Sean $\mathbf{B}^*$ la subcategoría plena de $\mathbf{B}$, cuyos objetos son de la forma $\{G(A) | A \in$ObA$\}$; $H : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}^*$ la correstricción de G, $E : \mathbf{B}^* \hookrightarrow \mathbf{B}$ la inclusión y $R = H \circ F$.

Ahora formemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[rr, shift left, "G"] \arrow[d, shift left, "H"] & & \mathbf{B} \arrow[ll, shift left, "F"] \\
\mathbf{B}^* \arrow[u, shift left, "H^{-1}"] \arrow[urr, "E"'] & &
\end{tikzcd}$$

Afirmación (H^{-1}, H) es isomorfismo de Galois, pues $\forall A \in$ObA
$H^{-1}(H(A)) = H^{-1}(G(A)) = F(E(G(A))) = F(G(A)) = A$
por lo tanto $H^{-1} \circ H = id_{\mathbf{A}}$.

$H(H^{-1}(G(A))) = H(F(E((G(A)))) = H(F(G(A))) = H(A) = G(A)$
$\therefore \quad H \circ H^{-1} = id_{\mathbf{B}^*}$. (Lo cual ya sabíamos por la proposición 2.7).

Por hipótesis (F, G) correspondencia de Galois $\Longrightarrow B \leq (G \circ F)(B)$, pero
$(G \circ F)(B) = (E \circ H \circ F)(B) = (H \circ F)(B) = R(B)$
$\therefore \quad id_B : B \longrightarrow R(B) \in \mathrm{Mor}\mathbf{B} \quad \therefore$ las reflexiones tienen como soporte la identidad. $\quad \therefore \quad (R, E)$ es reflexión de Galois.

Claramente $G = E \circ H$ y $F = H^{-1} \circ R \quad \therefore \quad (F, G) = (R, E) \circ (H^{-1}, H)$.

(6) $\Longrightarrow$ (1) Ya que toda subcategoría concretamente reflexiva, de una categoría concreta amnésica es subcategoría plena; entonces por la amnesia de la inmersión, E es subcategoría plena $\quad \therefore \quad G = E \circ H$ es la composición de inmersiones plenas $\quad \therefore \quad G$ es inmersión plena.

■

Teorema 2.10
Si $G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ y $F : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ son funtores concretos sobre $\mathbf{X}$, entonces las siguientes condiciones (1)-(3) *son equivalentes e implican las restantes; donde $\mathbf{A}^*$ es la subcategoría plena de $\mathbf{A}$, cuyos objetos son de la forma $\{F(B) | B \in Ob\mathbf{B}\}$ y $\mathbf{B}^*$ la subcategoría plena de $\mathbf{B}$, cuyos objetos son de la forma $\{G(A) | \in Ob\mathbf{A}\}$.*

(1) $\quad$ *(F, G) es correspondencia de Galois.*

(2) $\quad$ *F es adjunto izquierdo de G y las funciones G-universales son llevados por $\mathbf{X}$-identidades $id_B : B \longrightarrow GF(B)$.*

(3) $\quad$ *G es adjunto derecho de F y las funciones F-couniversales son llevados por $\mathbf{X}$-identidades $id_A : FG(A) \longrightarrow A$.*

(4) $\quad$ *G preserva fuentes iniciales y F preserva sumideros finales.*

(5) $\quad G \circ F \circ G = G$ y $F \circ G \circ F = F$.

(6) $\quad (G \circ F)^2 = G \circ F$ y $(F \circ G)^2 = F \circ G$.

(7) $\quad A \in Ob\mathbf{A}^* \iff \exists A' \in Ob\mathbf{A} \cdot \ni \cdot A = FG(A') \iff A = FG(A)$ y
$B \in Ob\mathbf{B}^* \iff \exists B' \in Ob\mathbf{B} \cdot \ni \cdot B = GF(B') \iff B = GF(B)$.

(8) *Sean $G^* : \mathbf{A}^* \longrightarrow \mathbf{B}^*$ y $F^* : \mathbf{B}^* \longrightarrow \mathbf{A}^*$ con G^* y F^* las restricciones de G y F respectivamente, entonces G^* y F^* son isomorfismos inversos uno del otro.*

Demostración:
(1) $\Longrightarrow$ (2) F es adjunto izquierdo de G es claro, pues existe una biyección $\mathbf{A}(F(B), A) \longrightarrow \mathbf{B}(B, G(A))$; por lo tanto existe una biyección
$\mathbf{A}(F(B), F(B)) \longrightarrow \mathbf{B}(B, GF(B))$,
por lo tanto $F(B) \xrightarrow{id_{F(B)}} F(B)$ es $B \xrightarrow{id_{F(B)}} GF(B)$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "id_B"] \arrow[dr, "f"'] & GF(B) \arrow[d, "G(f')"] \\ & G(A) \end{tikzcd}$$

Como id_B es universal, entonces para cada $f : B \longrightarrow G(A) \in \text{Mor}B$ existe un único $f' : F(B) \longrightarrow A \in \text{Mor}A$ tal que $G(f') = f$; pero entonces
$F(B) \xrightarrow{f} A \in \text{Mor}\mathbf{A} \iff B \xrightarrow{f} G(A) \in \text{Mor}\mathbf{B}$,
por lo tanto (F, G) es correspondencia de Galois.

Análogamente, (1) $\iff$ (3) por dualidad.

(1) $\Longrightarrow$ (4) Consideremos $(A \xrightarrow{f_i} A_i)_{i \in I}$ fuente inicial en $\mathbf{A}$, y $B \xrightarrow{g} G(A) \in \text{Mor}\mathbf{X}$ tales que $\forall i \in I \;\; B \xrightarrow{g} G(A) \xrightarrow{f_i} G(A_i) \in \text{Mor}\mathbf{B}$, entonces $\forall i \in I$

$F(B) \xrightarrow{f_i \circ g} A_i \in \text{Mor}\mathbf{B} \quad \therefore \quad$ por la inicialidad de la fuente
$F(B) \xrightarrow{g} A \in \text{Mor}\mathbf{A} \quad \therefore \quad B \xrightarrow{g} G(A) \in \text{Mor}\mathbf{B}$
$\therefore \quad (G(A) \xrightarrow{f_i} G(A))_{i \in I}$ es fuente inicial en $\mathbf{B}$
$\therefore \quad G$ preserva fuentes iniciales.

Análogamente, por dualidad F preserva sumideros finales.

(5) (F, G) correspondencia de Galois $\iff id_{\mathbf{B}} \leq G \circ F$
$\iff F = F \circ id_{\mathbf{B}} \leq F \circ G \circ F \quad \therefore \quad F \leq F \circ G \circ F.$
Como $F \circ G \leq id_{\mathbf{A}} \iff F \circ G \circ F \leq id_{\mathbf{A}} \circ F = F \quad \therefore \quad F \circ G \circ F \leq F$
$\therefore \quad F \circ G \circ F = F.$

Análogamente, $G \circ F \circ G = G.$

(6) Es claro por (5).

(7) $A \in \text{Ob}\mathbf{A}^* \iff \exists B \in \text{Ob}\mathbf{B} \cdot \ni \cdot A = F(B) = FGF(B) = FG(A)$
$\therefore \quad A = FG(A) \iff A = A' \in \text{Ob}\mathbf{A}$ con $A = FG(A')$.

$B \in \text{Ob}\mathbf{B}^* \iff \exists A \in \text{Ob}\mathbf{A} \cdot \ni \cdot B = G(A) = GFG(A) = GF(B)$
$\therefore \quad B = GF(B) \iff B = B'$ con $B = GF(B')$.

(8) $(G^* \circ F^*)(G(a)) = G^*(F^*(G(a))) = G^*(F(G(a))) =$
$G(F(G(a))) = G(a) = id(G(a))$
$\therefore \quad G^* \circ F^* = id_{\mathbf{B}^*}$.

Análogamente, $F^* \circ G^* = id_{\mathbf{A}^*}$.

■

Definición 2.10 $(\mathbf{A}, U)$ *es* inicialmente completa *si toda fuente estructurada* $(X \xrightarrow{f_i} UA_i)_{i \in I}$ *tiene un único levantamiento inicial* $(A \xrightarrow{f_i} A_i)_{i \in I}$.

Teorema 2.11
Si $G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es funtor concreto sobre $\mathbf{X}$ y $\mathbf{A}$ es inicialmente completa, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $\exists \quad F \quad \cdot \ni \cdot \quad (F, G)$ *es correspondencia de Galois.*

(2) *G tiene adjunto izquierdo concreto.*

(3) *G preserva fuentes iniciales.*

Demostración:
(1) $\Longrightarrow$ (2) Es claro por el teorema anterior.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Sea F adjunto izquierdo concreto de G, con funciones G-universales $\eta_B : B \longrightarrow GF(B)$ y funciones F-couniversales $\varepsilon_A : FG(A) \longrightarrow A$ tales que se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta B"] \arrow[d, shift left, "F"] & GF(B) \\ A \arrow[u, shift left, "G"] & FG(A) \arrow[l, "\varepsilon_A"'] \end{tikzcd}$$

Entonces $\forall \ B \in \mathrm{Ob}\mathbf{B} \ \varepsilon F(B) \circ F\eta_B = id_{F(B)}$
por lo tanto cada $F \circ \eta_B$ es sección en $\mathbf{A}$.
Ya que F es concreto cada η_B es sección en $\mathbf{X}$.
Veamos que $\eta_B : B \longrightarrow GF(B)$ es epimorfismo en $\mathbf{X}$.

Sean $GF(B) \overset{r}{\underset{s}{\rightrightarrows}} X$ un par de $\mathbf{X}$-Morfismos tales que $r \circ \eta_B = s \circ \eta_B$, probemos que $r = s$.
Sea $A \in \mathrm{Ob}\mathbf{A}$ indiscreto con $|A| = X$, entonces $F(B) \overset{r}{\underset{s}{\rightrightarrows}} A$ es un par de $\mathbf{A}$-Morfismos con $Gr \circ \eta_B = Gs \circ \eta_B$, como η_B es mapeo G-universal, entonces $r = s$; por lo tanto η_B es isomorfismo en $\mathbf{X}$.

Sea $(A \xrightarrow{f_i} A_i)_{i\in I}$ fuente inicial en $\mathbf{A}$ y $B \xrightarrow{g} G(A) \in \mathrm{Mor}\mathbf{X}$ tal que $\forall\, i \in I \quad B \xrightarrow{g} G(A) \xrightarrow{f_i} G(A_i) \in \mathrm{Mor}\mathbf{B}$.

En $\mathbf{X}$ consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[d, "g"'] & GF(B) \arrow[dl, "g \circ \eta_B{}^{-1}"'] \arrow[d, "f_i \circ g \circ \eta_B{}^{-1}"] \\ G(A) \arrow[r, "f_i"'] & G(A_i) \end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal de η_B y el hecho de que todos los
$B \xrightarrow{g} G(A) \xrightarrow{f_i} G(A_i)$ son $\mathbf{B}$-Morfismos, entonces
$F(B) \xrightarrow{f_i \circ g \circ \eta_B{}^{-1}} A_i$ son $\mathbf{A}$-Morfismos;
así por la inicialidad $F(B) \xrightarrow{g \circ \eta_B{}^{-1}} A \in \mathrm{Mor}\mathbf{A}$,
por lo tanto $B \xrightarrow{g} G(A) = (B \xrightarrow{\eta_B} GF(B) \xrightarrow{g \circ \eta_B{}^{-1}} G(A))$;
así $(G(A) \xrightarrow{f_i} G(A_i))_{i\in I}$ es fuente inicial en $\mathbf{B}$,
por lo tanto G preserva fuentes iniciales.

(3) $\Longrightarrow$ (1) $\forall B \in \mathrm{Ob}\mathbf{B}$, considere el levantamiento inicial en $\mathbf{A}$ $(A \xrightarrow{f_i} A_i)$ de la fuente $\mathbf{A}$-estructurada $B \xrightarrow{f_i} A_i$, que consiste de todos los $\mathbf{B}$-Morfismos de la forma $B \xrightarrow{id_B} G(A_i)$.
Por (3) $G(A) \xrightarrow{f_i} G(A_i)$ es fuente inicial en $\mathbf{B}$, así $B \xrightarrow{id_B} G(A) \in \mathrm{Mor}\mathbf{B}$; por lo tanto id_B es función G-universal para B, por lo tanto por el teorema anterior (2) $\exists\, F \cdot \ni \cdot \ (F, G)$ es correspondencia de Galois.

■

EJEMPLOS

(1) Las condiciones (1) y (2) del teorema anterior, son equivalentes con ciertas restricciones (si $\mathbf{A}$ tiene objetos indiscretos o si $\mathbf{B}$ tiene objetos discretos o si G es pleno). Pero ellos no son equivalentes en general como lo

muestra el siguiente ejemplo.
Sean **A** subcategoría plena de Set tal que $\mathbf{X} = \{\mathbf{N}\}$ y **B** la categoría concreta sobre **X** tal que $\mathbf{B} = \{B_n\}_{n\in N}$, cuyos morfismos $f : B_n \longrightarrow B_m$ son funciones monótonas $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ tales que
(a) $f(n) \leq m$
(b) $\forall\, p \geq 1 \quad f(n+p) = m+p$
Sea **A** el objeto de la subcategoría plena de **B**, cuyos **A**-Morfismos son $f : B_n \longrightarrow B_m$ tales que (c) $f(n) = m$.
Sea $G : \mathbf{A} \hookrightarrow \mathbf{B}$ la inmersión canónica y $F : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ el funtor concreto definido por $F(B_n) = B_{n+1}$, entonces F es adjunto izquierdo concreto de G con funciones G-universales $\eta_n : B_n \longrightarrow GF(B_n)$ definidos por:

$$\eta_n(k) = \begin{cases} k & \text{si } k \leq n \\ k+1 & \text{si } k > n \end{cases} .$$

y funciones F-couniversales $\varepsilon_n : FG(B_n) \longrightarrow B_n$ definidos por:

$$\varepsilon_n(k) = \begin{cases} k & \text{si } k \leq n \\ k-1 & \text{si } k > n \end{cases}$$

ya que algunas de estas funciones, (de hecho todas) no son **X**-Isomorfismos; el funtor G no tiene adjunto izquierdo concreto con **X**-Isomorfismo función G-universal.
por lo tanto no existe F' tal que (F', G) sea correspondencia de Galois.

(2) Podríamos seguir trabajando haciendo notar que, cuando $F : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ es adjunto izquierdo concreto para un funtor concreto $G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, cuyas funciones G-universales son **X**-Isomorfismos; entonces (F, G) no necesita ser correspondencia de Galois. Esto es demostrado en el siguiente ejemplo.

Sea **X** una categoría tal que $\mathbf{X} = \{X\}$, con dos morfismos id_X y $S^2 = id_X$. Sea **A** la categoría concreta sobre **X** tal que $\mathbf{A} = \{A_o, A_1\}$ y los siguientes morfismos:

$$Hom_{\mathbf{A}}(A_i, A_j) = \begin{cases} id_X & \text{si } i = j \\ S & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

entonces existen precisamente dos isomorfismos concretos $F, G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ tal que $G(A_i) = A_i$ y $F(A_i) = A_{1-i}$. Como puede verse fácilmente, G y F son naturalmente equivalentes; ambos son adjuntos izquierdos de G $\therefore$ (G, G) es correspondencia de Galois, pero (F, G) no es correspondencia de Galois.

Las propiedades (5)-(8) del teorema 2.10, se pueden modificar fácilmente para obtener más caracterizaciones de las conexiones de Galois de tercera clase. Nosotros formularemos esto en el próximo teorema.

Definición 2.11 *Sea* $\mathbf{A}$ *subcategoría plena de una categoría concreta* $\mathbf{B}$, *entonces* $\mathbf{A}$ *es* modificación reflexiva *de* $\mathbf{B}$ $\Longleftrightarrow$ *el funtor inmersión* $G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *tiene adjunto izquierdo concreto* F, *cuyas funciones* G*-universales son llevados por* $\mathbf{X}$*-identidades.*

Definición 2.12 *Sea* $\mathbf{A}$ *subcategoría plena de una categoría concreta* $\mathbf{B}$, *entonces* $\mathbf{A}$ *es* modificación correflexiva *de* $\mathbf{B}$ $\Longleftrightarrow$ *el funtor inmersión* $G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *tiene adjunto derecho concreto* F, *cuyas funciones* F*-couniversales son llevados por* $\mathbf{X}$*-identidades.*

Corolario 2.12
Si $\mathbf{B}$ *es categoría concreta, entonces* $\mathbf{A}$ *es modificación reflexiva de* $\mathbf{B}$ $\Longleftrightarrow$ (F, G) *es correspondencia de Galois.*

Demostración:
Es claro por el teorema 2.10 (2). ■

Corolario 2.13
Si $\mathbf{B}$ *es categoría concreta, entonces* $\mathbf{A}$ *es modificación correflexiva* $\mathbf{B} \Longleftrightarrow$ (G, F) *es correspondencia de Galois.*

Demostración:
Es claro por el teorema 2.10 (3).

■

Teorema 2.14 *TEOREMA DE DESCOMPOSICION PARA CORRESPONDENCIAS DE GALOIS*
Sean $G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *y* $F : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ *funtores concretos sobre* $\mathbf{X}$ *entonces* (F, G) *es correspondencia de Galois* $\Longleftrightarrow\ \exists\ \mathbf{A}^*$ *modificación correflexiva de* $\mathbf{A}$ $\left(\mathbf{A}^* \underset{C}{\overset{E_A}{\rightleftarrows}} \mathbf{A}\right)$, $\mathbf{B}^*$ *modificación reflexiva de* $\mathbf{B}$ $\left(\mathbf{B}^* \underset{R}{\overset{E_B}{\rightleftarrows}} \mathbf{B}\right)$ *y* H *isomorfismo concreto* $H : \mathbf{A}^* \longrightarrow \mathbf{B}^*$ *tales que los siguientes diagramas conmutan:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, shift left, "G"] \arrow[d, shift right, "C"'] & \mathbf{B} \arrow[l, shift left, "F"] \arrow[d, shift right, "R"'] \\
\mathbf{A}^* \arrow[u, shift right, "E_A"'] \arrow[r, shift right, "H"'] & \mathbf{B}^* \arrow[u, shift right, "E_B"'] \arrow[l, shift right, "H^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Demostración:
$\Longrightarrow$) Es claro por el corolario 2.8, corolario 2.12 y proposición 2.9 (6).

$\Longleftarrow$) Como $\mathbf{A}^*$ es modificación correflexiva de $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}^*$ es modificación reflexiva de $\mathbf{B}$; H es isomorfismo concreto, y además los diagramas conmutan; entonces (F, G) es correspondencia de Galois, pues composición de correspondencias de Galois es correspondecia de Galois. ■

Teorema 2.15

Si $T : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ es endofuntor concreto, entonces $\exists\ (F,G)$ correspondencia de Galois tal que $T = GF \iff T^2 = T$ y $T \leq id_{\mathbf{A}}$; es decir T puede ser considerado como modificación correflexiva.

Demostración:

$\Longrightarrow$) Si $T = GF$, entonces $T^2 = (GF)^2 = GF = T$ por el teorema 2.10 (6) por lo tanto $T^2 = T$.

$\forall A \in \mathrm{Ob}\mathbf{A}\quad T(A) \leq A$ es claro, ya que $id_A : T(A) \longrightarrow A \in \mathrm{Mor}\mathbf{A}$; pues $id_A : GF(A) \longrightarrow A \in \mathrm{Mor}\mathbf{A}$, por lo tanto $T \leq id_{\mathbf{A}}$.

$\Longleftarrow$) Sea $T : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ endofuntor concreto tal que $T^2 = T$ y $T \leq id_{\mathbf{A}}$.
Por demostrar $\exists\ (F,G)$ correspondencia de Galois tal que $T = GF$.

Sea $\mathbf{A}^*$ la subcategoría plena de $\mathbf{A} \Longrightarrow \exists\ \mathbf{A}^*$ modificación correflexiva de $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A}^* \underset{C}{\overset{E_A}{\rightleftarrows}} \mathbf{A}$), $\mathbf{A}^*$ modificación reflexiva de $\mathbf{A}$ ($\mathbf{B}^* \underset{C}{\overset{E_A}{\rightleftarrows}} \mathbf{B}$)

y (H^{-1}, H) isomorfismo concreto; E_A la inclusión, C la correstricción de $T \circ T$, H^{-1} la correstricción de T y H la restricción de T; por lo tanto se tienen los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, shift left, "G"] \arrow[d, shift right, "C"'] & \mathbf{A} \arrow[l, shift left, "F"] \arrow[d, shift right, "C"'] \\
\mathbf{A}^* \arrow[u, shift right, "E_A"'] \arrow[r, shift right, "H"'] & \mathbf{A}^* \arrow[u, shift right, "E_A"'] \arrow[l, shift right, "H^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

$\therefore\quad \forall A \in \mathrm{Ob}\mathbf{A}\quad E_A(H(C(A))) = E_A(T(T \circ T(A))) = E_A(T(A)) = T(A)$

$\therefore\quad E_A \circ H \circ C = T.$

Sea $f : A \longrightarrow A' \in \mathrm{Mor}\mathbf{A}$, entonces $E_A(H(C(f))) = E_A(T(T \circ T(f))) = E_A(T(f)) = T(f) \quad \therefore \quad E_A \circ H \circ C = T$.

Análogamente, $E_A \circ H^{-1} \circ C = T$.

$\because \quad (T, T)$ es correspondencia de Galois tal que $T^2 = T$

$\therefore \quad \exists\ (F, G)$ correspondencia de Galois tal que $T = GF$ con $T = G = F$.

■

OBSERVACION

La amnesia de los funtores que olvidan, es usado solamente para obtener igualdades en algunas proposiciones anteriores. Toda la teoría de las conexiones de Galois de tercera clase siguen siendo verdaderas sin la amnesia, cuyos isomorfismos son substituídos por igualdades. Muchos ejemplos de conexiones de Galois de tercera clase, son amnésicos del mismo tipo; pero en algunos casos no amnésicos ocurren ciertas situaciones (ver [4] p. 172).

CAPITULO III

CONEXIONES DE GALOIS DE CUARTA CLASE

Perseguir un teorema es tan emocionante
como perseguir a una muchacha
¡verdad! Dr. Barajas.
A. Aparicio

La idea en este capítulo es, abstraer un poco más la definición de conexión de Galois de tercera clase; y así definir las conexiones de Galois de cuarta clase. Uno de los resultados obtenidos, es que la definición que se da; es más compacta y manejable con respecto a la que dan Herrlich y Hušek.

Por la manera en que se definen las conexiones de Galois de cuarta clase, se obtienen resultados análogos a los del capítulo anterior. En este capítulo, por comodidad se usará adjunción de Galois en vez de conexión de Galois de cuarta clase, pues el nombre se relaciona más al concepto de situación adjunta en categorías.

3 Conexiones de Galois de Cuarta Clase

Las conexiones de Galois se pueden abstraer más, aunque con ello se pierden algunas de sus propiedades. A diferencia de las secciones anteriores, nosotros lo desarrollaremos al último (ver proposición 3.9 y la discusión acerca de ello). Si no se especifica lo contrario $F : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ y $G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ son funtores covariantes.

Definición 3.1 (F, G) *es* conexión de Galois de cuarta clase o adjunción de Galois *si, y sólo si existe* $(\eta, \varepsilon) : F \dashv G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *adjunción tal que* ηG *es Isotransformación(=isomorfismo natural).*

OBSERVACION

La definición de adjunción de Galois que aparece en el artículo de Herrlich y Hušek, piden además de lo anterior que εF también sea isotransformación; sin embargo no es necesario ya que si uno lo es, entonces el otro también y recíprocamente como podrá verse en el siguiente teorema. (Equivalentemente uno podría pedir que $F\eta$ sea epitransformación o $G\varepsilon$ sea monotransformación o $G\varepsilon F$ sea Isotransformación, ver teorema 3.3).

Teorema 3.1
Si $(\eta, \varepsilon) : F \dashv G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *es situación adjunta, entonces son equivalentes*

(1) $\eta GF = GF\eta$

(2) ηG *es isotransformación*

(3) $\varepsilon FG = FG\varepsilon$

(4) εF *es isotransformación*

Demostración:

(1) $\Longrightarrow$ (2) ηG tiene como inverso izquierdo a $G\varepsilon$, ya que $G\varepsilon \circ \eta G = id_G$, pues ($G \xrightarrow{\eta G} GFG \xrightarrow{G\varepsilon} G$) $= (G \xrightarrow{id_G} G)$. Por demostrar $\eta G \circ G\varepsilon = id_G$. Como η es natural, entonces el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
GFG(A) \arrow[r, "\eta GFG(A)"] \arrow[d, "G\varepsilon(A)"'] & GFGFG(A) \arrow[d, "GFG(\varepsilon_A)"] \\
G(A) \arrow[r, "\eta G(A)"'] & GFG(A)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
(\eta G \circ G\varepsilon)(A) &= \eta G(A) \circ G\varepsilon(A) \\
&= GF(G\varepsilon(A)) \circ \eta GFG(A) \quad \text{por la naturalidad de } \eta \\
&= GF(G\varepsilon(A) \circ GF(\eta G(A)) \quad \text{por (1)} \\
&= GF(G\varepsilon(A) \circ \eta G(A)) \quad \text{pues } GF \text{ es funtor} \\
&= GF(id_{G(A)}) \quad \text{pues } G\varepsilon(A) \text{ es inverso izquierdo de } \eta G(A) \\
&= id_{GFG(A)} \quad \text{pues } GF \text{ es funtor}
\end{aligned}$$

$\therefore$ $G\varepsilon$ es inverso derecho de ηG $\therefore$ ηG es isomorfismo natural

$\therefore$ ηG es isotransformación.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Supongamos $\eta G(A)$ es isotransformación, entonces existe $G\varepsilon(A)$ inverso izquierdo.

$$\begin{aligned}
\varepsilon FG(A) &= \varepsilon FG(A)F(id_{GFG(A)}) \\
&= \varepsilon FG(A)F(G\varepsilon(A) \circ \eta G(A)) \\
&= \varepsilon FG(A)F(\eta G(A) \circ G\varepsilon(A)) \quad \text{pues } \eta G \text{ es isotransformación} \\
&= \varepsilon(FG(A)F\eta G(A))FG\varepsilon(A) \quad \text{pues } F \text{ es funtor} \\
&= id_{FG(A)}FG\varepsilon(A) \quad \text{pues } \varepsilon F \circ F\eta = id_F \\
&= FG\varepsilon(A)
\end{aligned}$$

$\therefore \quad \varepsilon FG(A) = FG\varepsilon(A) \quad \therefore \quad \varepsilon FG = FG\varepsilon.$

(3) $\Longrightarrow$ (4) Es análogo a (1), pues existen adjunciones entre $\mathbf{A}^{op}$ y $\mathbf{B}^{op}$; por lo tanto si $\varepsilon FG = FG\varepsilon$, entonces εF es isotransformación.

(4) $\Longrightarrow$ (1) Si εF es isotransformación, entonces existe $F\eta$ inverso derecho.

$$\begin{aligned}
\eta GF(B) &= \eta GF(B)G(id_{F(B)}) \\
&= \eta GF(B)G(\varepsilon F(B)F\eta(B)) \quad \text{pues } \varepsilon F \text{ es isotransformación} \\
&= \eta GF(B)G\varepsilon F(B)GF\eta(B) \quad \text{pues } G \text{ es funtor} \\
&= (G\varepsilon F(B)\eta GF(B))(GF\eta(B)) \quad \text{pues } \varepsilon F \text{ es isomorfismo} \\
&= id_{GF(B)}GF\eta(B) \quad \text{pues } G\varepsilon \circ \eta G = id_G \\
&= GF\eta(B)
\end{aligned}$$

$\therefore \quad \eta GF(B) = GF\eta(B) \quad \therefore \quad \eta GF = GF\eta$.

■

Proposición 3.2
Si (F, G) es adjunción de Galois, entonces (G^{op}, F^{op}) es adjunción de Galois.

Demostración:
(F, G) adjunción de Galois $\Longrightarrow \exists\, (\eta, \varepsilon) : F \dashv G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ adjunción tal que ηG es isotransformación. Por demostrar que $\exists\, (\varepsilon^{op}, \eta^{op}) : G^{op} \dashv F^{op}$ tal que $\varepsilon^{op}F^{op}$ es isotransformación.

Como $G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, $F : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ son funtores , entonces $G^{op} : \mathbf{A}^{op} \longrightarrow \mathbf{B}^{op}$, $F^{op} : \mathbf{B}^{op} \longrightarrow \mathbf{A}^{op}$ también.
Por lo tanto $\eta G : G \longrightarrow GFG$ y $\varepsilon F : FGF \longrightarrow F$ son isotransformaciones $\Longleftrightarrow \quad \eta^{op}G^{op} : G^{op}F^{op}G^{op} \longrightarrow G^{op}$ y $\varepsilon^{op}F^{op} : G^{op} \longrightarrow G^{op}F^{op}G^{op}$ son isotransformaciones, por lo tanto $\varepsilon^{op}F^{op}$ es isotransformación,
por lo tanto (G^{op}, F^{op}) es adjunción de Galois. ■

Teorema 3.3
Si $(\eta, \varepsilon) : F \dashv G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *es situación adjunta, entonces son equivalentes*

(1) (F, G) *es adjunción de Galois*

(2) $F\eta$ *es isotransformación*

(3) ηG *es epitransformación*

(4) $F\eta$ *es epitransformación*

(5) $GF\eta = \eta GF$

Demostración:
(1) $\Longrightarrow$ (2) (F,G) adjunción de Galois $\Longrightarrow$ $\exists\ (\eta, \varepsilon) : F \dashv G$ adjunción tal que ηG es isotransformación $\Longleftrightarrow$ εF es isotransformación por el teorema 3.1; como $(\ G \xrightarrow{\eta G} GFG \xrightarrow{G\varepsilon} G\ ) = (G \xrightarrow{id_G} G)$ y $(\ F \xrightarrow{F\eta} FGF \xrightarrow{\varepsilon F} F\ ) = (F \xrightarrow{id_F} F)$, entonces $G\varepsilon$ y $F\eta$ son isotransformaciones;
por lo tanto $F\eta$ es isotransformación.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Veamos que, si los morfismos $A \underset{G'}{\overset{F'}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{\eta G} C$ son tales que $F'\eta G = G'\eta G$, entonces $F' = G'$ con $A \in$ObA, $B \in$ObB, $C \in$ObC .
Como $F'\eta G = G'\eta G$, entonces $F'\eta GF\eta = G'\eta GF\eta$, pues $F\eta$ es isotransformación; así $F' = G'$ por lo tanto $F\eta$ es epitransformación.

(3) $\Longrightarrow$ (4) Probemos que si $F'F\eta = G'F\eta$, entonces $F' = G'$.
$F'F\eta = G'F\eta$ implica $F'F\eta G = G'F\eta G$, luego $F'F = G'F$ pues ηG es epitransformación, por lo tanto $F' = G'$.

(4) $\Longrightarrow$ (5) Consideremos las composiciones correspondientes para
$A \in$ObA, $B \in$ObB .

$GF\eta(B) = GF\eta(G(A)) = GFG(A)$ pues η es identidad.
$\eta GF(B) = \eta GF(G(A)) = GFG(A)$ pues η es identidad.
Por lo tanto $\eta GF = GF\eta$.

(5) $\Longrightarrow$ (1) Si $\eta GF = GF\eta$, entonces ηG es isotransformación por el teorema anterior.

■

Teorema 3.4
Si (F, G) es correspondencia de Galois, entonces (F, G) es adjunción de Galois.

Demostración:
(F, G) correspondencia de Galois $\Longleftrightarrow$ F es adjunto izquierdo de G y G es adjunto derecho de F $\Longleftrightarrow$ $\varphi : \mathbf{A}(F(B), A) \cong \mathbf{B}(B, G(A))$ es isomorfismo natural, por lo tanto $(\eta, \varepsilon) : F \dashv G$ es adjunción.

Como $\forall\ B \in \mathrm{Ob}\mathbf{B}$ $\eta_B : B \longrightarrow GF(B)$, entonces $\eta_{G(A)} : G(A) \longrightarrow GFG(A)$ es isomorfismo natural, pues $id_{G(A)} : G(A) \longrightarrow GFG(A) = G(A)$ es isomorfismo natural; por lo tanto ηG es isotransformación,
por lo tanto (F, G) es adjunción de Galois.

■

Teorema 3.5
Si $(\eta, \varepsilon) : F \dashv G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es situación adjunta y η es epitransformación o G es pleno, entonces $(\eta, \varepsilon) : F \dashv G$ es adjunción de Galois.

Demostración:

(i) Primer caso, si η es epitransformación.

Como $(\eta,\varepsilon) : F \dashv G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es situación adjunta, entonces $\eta : id_B \longrightarrow GF$ y $\varepsilon : FG \longrightarrow id_A$ son transformaciones naturales tales que
$(G \xrightarrow{\eta G} GFG \xrightarrow{G\varepsilon} G) = (G \xrightarrow{id_G} G)$ y $(F \xrightarrow{F\eta} FGF \xrightarrow{\varepsilon F} F) = (F \xrightarrow{id_F} F)$.

Como η es epitransformación, entonces $\eta G(A)$ es epitransformación; y como $G\varepsilon \circ \eta G = id_G$, entonces ηG es sección $\therefore$ ηG es isomorfismo natural $\therefore$ ηG es isotransformación $\therefore$ $(\eta,\varepsilon) : F \dashv G$ es adjunción de Galois.

(ii) Segundo caso, si G es pleno.

G Pleno implica ε es sección, así ε es monotransformación, lo cual implica εF es monotransformación; y como $\varepsilon F \circ F\eta = id_F$ $\therefore$ εF es retracción $\therefore$ εF es isomorfismo natural; así por el teorema 3.1 ηG es isomorfismo natural $\therefore$ ηG es isotransformación
$\therefore$ $(\eta,\varepsilon) : F \dashv G$ es adjunción de Galois.

∎

Teorema 3.6
Si $G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, $F : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ *son funtores concretos sobre* $\mathbf{X}$, *entonces* (F,G) *es adjunción de Galois* $\Longleftrightarrow$ $\exists\ (\eta,\varepsilon) : F \dashv G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *situación adjunta, tales que* η *y* ε *son transformaciones naturales concretas.*

Demostración:
Por el teorema 2.10 sabemos que, (F,G) es adjunción de Galois $\Longleftrightarrow$
$\exists\ (\eta,\varepsilon) : F \dashv G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, y las funciones G-universales son llevados por $\mathbf{X}$-identidades, y las funciones F-couniversales son llevados por $\mathbf{X}$-identidades con $\eta = id_B : B \longrightarrow GF(B)$, y $\varepsilon = id_A : FG(A) \longrightarrow A$
por lo tanto $\eta : id_B \longrightarrow GF$ y $\varepsilon : FG \longrightarrow id_A$.

La naturalidad de η y ε es clara por la universalidad de G y F, pues F y G son funtores concretos.

■

Antes de buscar otros ejemplos, es conveniente probar el siguiente resultado que caracteriza a las adjunciones de Galois, y que es la versión correspondiente del teorema 1.1 (7), proposición 1.2 (7) y el teorema 2.14.

Teorema 3.7 *TEOREMA DE DESCOMPOSICION PARA ADJUNCIONES DE GALOIS*
Sean $\mathbf{A}^*$ la subcategoría plena de $\mathbf{A}$ generada por $F[\mathbf{B}]$, y $\mathbf{B}^*$ la subcategoría plena de $\mathbf{B}$ generada por $G[\mathbf{A}]$; entonces (F,G) es adjunción de Galois $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{A}^*$ es correflexiva en $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A}^* \underset{C}{\overset{E_A}{\rightleftarrows}} \mathbf{A}$), $\mathbf{B}^*$ es reflexiva en $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B}^* \underset{R}{\overset{E_B}{\rightleftarrows}} \mathbf{B}$); $\mathbf{A}^*$ y $\mathbf{B}^*$ son equivalentes ($\mathbf{A}^* \underset{F^*}{\overset{G^*}{\rightleftarrows}} \mathbf{B}^*$), F es naturalmente isomorfo a E_AF^*R (es decir $F \cong E_AF^*R$) y G es naturalmente isomorfo a E_BG^*C (es decir $G \cong E_BG^*C$)

Demostración:
$\Longrightarrow$) Consideremos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, shift left, "G"] \arrow[d, shift right, "C"'] & \mathbf{B} \arrow[l, shift left, "F"] \arrow[d, shift right, "R"'] \\
\mathbf{A}^* \arrow[u, shift right, "E_A"'] \arrow[r, shift right, "G^*"'] & \mathbf{B}^* \arrow[u, shift right, "E_B"'] \arrow[l, shift right, "F^*"']
\end{tikzcd}$$

(F,G) adjunción de Galois $\Longrightarrow$ $\exists\ (\eta,\varepsilon)$: $F \dashv G$ adjunción tal que ηG es isotransformación. Sea $C = FG$ con rango restringido a $\mathbf{A}^*$, y $R = GF$ con rango restringido a $\mathbf{B}^*$; F^* y G^* las restricciones de F y G respectivamente.

$\mathbf{B}^*$ es reflexiva en $\mathbf{B}$, pues (F,G) es adjunción de Galois; $\mathbf{A}^*$ es correflexiva en $\mathbf{A}$, pues (F,G) es adjunción de Galois; $\mathbf{A}^*$ y $\mathbf{B}^*$ son equivalentes, pues F^* y G^* son restricciones de F y G respectivamente.

$E_B(G^*(C(A))) = E_B(G^*(FG(A))) = E_B(G(F(G(A)))) =$
$G(F(G(A))) \cong G(A)$, por lo tanto $E_B \circ G^* \circ C \cong G$.

Análogamente, $E_A \circ F^* \circ R \cong F$.

$\Longleftarrow$) Es claro ya que $\mathbf{B}^*$ es reflexiva en $\mathbf{B}$, y $\mathbf{A}^*$ es correflexiva en $\mathbf{A}$; además los diagramas conmutan, y composición de isotransformaciones es isotransformación, por lo tanto (F,G) es adjunción de Galois.

■

Proposición 3.8
Si $(\eta,\varepsilon) : F \dashv G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *es situación adjunta, entonces* $\exists$ (R,I) *reflexión plena y* (J,C) *correflexión plena tales que* $(F,G) = (RJ, CI)$

Demostración:
Sea $\mathbf{C}$ la unión ajena de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, cuyos conjuntos de morfismos son
$Hom_{\mathbf{C}}(B,A) = Hom_{\mathbf{A}}(F(B),A)$ y $Hom_{\mathbf{C}}(A,B) = \emptyset$ con $A \in \mathbf{A} \quad B \in \mathbf{B}$.

Hacemos los conjuntos de morfismos ajenos y definimos la composición como sigue:
$f : B' \longrightarrow B \in \mathrm{Mor}\mathbf{B}$ y $g' : B \longrightarrow A \in \mathrm{Mor}\mathbf{C} \Longrightarrow g' : F(B) \longrightarrow A \in \mathrm{Mor}\mathbf{A} \quad \therefore \quad g'f : B' \longrightarrow A$ se define mediante $g' \circ f = g \circ F(f)$.
Si $g' : B \longrightarrow A \in \mathrm{Mor}\mathbf{C}$ y $f : A \longrightarrow A' \in \mathrm{Mor}\mathbf{A}$, entonces $f \circ g' : B \longrightarrow A'$ y $f \circ g' = (f \circ g)'$, por lo tanto la inmersión $I : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ tiene adjunto izquierdo $R : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{A}$ con R la restricción de F en $\mathbf{B}$, y $R(B \xrightarrow{f} A) = F(B) \xrightarrow{f} A$; la inmersión $J : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ tiene adjunto derecho $C : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{B}$ con C la restricción de G en $\mathbf{A}$, y $C(B \xrightarrow{f} A) = B \xrightarrow{\eta_B} GF(B) \xrightarrow{Gf} G(A)$.

Afirmación $\mathbf{A}(R(C), A) \cong \mathbf{C}(C, A)$

i) Si $C \in A$, entonces $\mathbf{A}(A', A) = \mathbf{C}(A', A) \quad \therefore \quad \mathbf{A}(R(C), A) \cong \mathbf{C}(C, A)$.

ii) Si $C \in B$, entonces $\mathbf{A}(R(B), A) = \mathbf{C}(F(B), A) \cong \mathbf{C}(B, A)$,
así $\mathbf{A}(R(B), A) \cong \mathbf{C}(B, A)$, por lo tanto $\mathbf{A}(R(C), A) \cong \mathbf{C}(C, A)$
por lo tanto $(C, R) : F \dashv G$.

Por lo anterior tenemos los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, shift left, "G"] \arrow[dr, shift left, "I"] & \mathbf{B} \arrow[l, shift left, "F"] \arrow[d, shift left, "J=E_B"] \\
& \mathbf{C} \arrow[u, shift left, "C"] \arrow[ul, shift left, "R"]
\end{tikzcd}$$

i) $A \in \mathrm{Ob}\mathbf{A} \Longrightarrow C(I(A)) = C(A) = G(A) \quad \therefore \quad C \circ I = G.$

ii) $h : A \longrightarrow A' \in \mathrm{Mor}\mathbf{A} \Longrightarrow C(I(h)) = C(h) = G(h) \quad \therefore \quad C \circ I = G$

por lo tanto $C \circ I = G$ en los objetos y en los morfismos.

i) $B \in \mathrm{Ob}\mathbf{B} \Longrightarrow R(J(B)) = R(B) = F(B) \quad \therefore \quad R \circ J = F.$

ii) $h' : B \longrightarrow B' \in \mathrm{Mor}\mathbf{B} \Longrightarrow R(J(h')) = R(h') = F(h') \quad \therefore \quad R \circ J = F$

por lo tanto $R \circ J = F$ en los objetos y en los morfismos.

por lo tanto $(F, G) = (RJ, CI)$.

■

Definición 3.2 *Un* esqueleto *de* $\mathbf{A}^*$ *es una subcategoría plena* $\mathbf{A}'$ *de* $\mathbf{A}$*, tal que cada objeto de* $\mathbf{A}^*$ *es isomorfo en* $\mathbf{A}^*$ *a exactamente un objeto de* $\mathbf{A}'$.

OBSERVACION

Con mucha frecuencia, resulta mejor entender por conexión de Galois un funtor F, y no una pareja (F, G); ya que G queda determinado excepto por isomorfismo natural; análogamente dado G, F queda determinado. Una pregunta natural es, ¿ existe una conexión de Galois especial, en el conglomerado de conexiones de Galois equivalentes entre si ?; se puede probar que esta pregunta, está relacionada con el problema de que concepto se obtiene si en la definición de adjunción de Galois, se pide que ηG sea identidad en lugar de isotransformación.

Considérese los siguientes diagramas:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, shift left, "C"] \arrow[d, shift right, "G"'] & \mathbf{A}^* \arrow[l, shift left, "E_A"] \arrow[r, shift right, "S_A"'] \arrow[d, shift right, "G^*"'] & \mathbf{A}' \arrow[l, shift right, "J_A"'] \arrow[d, shift right, "G'"'] \\
\mathbf{B} \arrow[r, shift left, "R"] \arrow[u, shift right, "F"'] & \mathbf{B}^* \arrow[l, shift left, "E_B"] \arrow[r, shift right, "S_B"'] \arrow[u, shift right, "F^*"'] & \mathbf{B}' \arrow[l, shift right, "J_B"'] \arrow[u, shift right, "F'"']
\end{tikzcd}
$$

donde $\mathbf{A}^*$ es la subcategoría plena de $\mathbf{A}$ generado por $F[\mathbf{B}]$, $\mathbf{B}^*$ la subcategoría plena de $\mathbf{B}$ generado por $G[\mathbf{A}]$; (F, G) adjunción de Galois $\iff$

$\mathbf{A}^*$ es correflexiva en $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A}^* \underset{C}{\overset{E_A}{\rightleftarrows}} \mathbf{A}$), $\mathbf{B}^*$ es reflexiva en $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B}^* \underset{R}{\overset{E_B}{\rightleftarrows}} \mathbf{B}$), $\mathbf{A}^*$ y $\mathbf{B}^*$ equivalentes ($\mathbf{A}^* \underset{F^*}{\overset{G^*}{\rightleftarrows}} \mathbf{B}^*$), $(F \cong E_A F^* R)$ y $(G \cong E_B G^* C)$.

$\mathbf{A}'$ es un esqueleto de $\mathbf{A}^*$, $\mathbf{B}'$ es un esqueleto de $\mathbf{B}^*$; J_A, J_B inmersiones; S_A, S_B son las retracciones y $S(F(B)) = A \iff A \in \mathrm{Ob}A'$; $A' \cong F(B)$, G' y F' son las restricciones de G y F respectivamente; por lo tanto G', F' son isofuntores.

Se definen $\hat{G} = E_B J_B G' S_A C$ y $\hat{F} = E_A J_A F' S_B R$. Así los isomorfismos natural $\mu : id_{A^*} \longrightarrow J_A S_A$, $\omega : id_{B^*} \longrightarrow J_B S_B$ pueden ser escogidos de tal manera que $S_A(\mu_A) = id_{S_A(A)}$, (es decir μ y ω son identidades en $\mathbf{A}'$ y $\mathbf{B}'$ respectivamente).

para las transformaciones naturales $\hat{\eta} = E_B\omega R : id_B \longrightarrow \hat{G}\hat{F}$ y $\hat{\varepsilon} = E_A\mu C : \hat{F}\hat{G} \longrightarrow id_A$, tenemos que $(\hat{\eta}, \hat{\varepsilon}) : \hat{F} \dashv \hat{G} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$; $\hat{\eta}\hat{G} = id_{\hat{G}}$, $\hat{\varepsilon}\hat{F} = id_{\hat{F}}$; $\hat{F} \cong F$, $\hat{G} \cong G$. Por lo tanto se tiene la siguiente proposición.

Proposición 3.9
Si (F, G) es adjunción de Galois, entonces $\exists\ (\hat{F}, \hat{G})$ adjunción de Galois con adjunciones $(\hat{\eta}, \hat{\varepsilon})$ $\cdot \ni \cdot$ $\hat{\eta}\hat{G}$ o $\hat{\varepsilon}\hat{F}$ consiste de identidades, y $\hat{F} \cong F$, $\hat{G} \cong G$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
\hat{G}(A) &= E_B J_B G' S_A C(A) \quad \text{con } A \in \mathrm{Ob}\mathbf{A} \\
&= E_B G^{*} C(A) \\
&= G(C(A)) \\
&= G(F(G(A))) \\
&\cong G(A) \quad \text{pues } id_{G(A)} \text{ es isomorfismo natural}
\end{aligned}$$

Si $h : A \longrightarrow A' \in \mathrm{Mor}\mathbf{A}$, entonces consideremos la composición

$$\begin{aligned}
\hat{G}(h) &= E_B J_B G' S_A C(h) \\
&= E_B G^{*} C(h) \\
&= G(C(h)) \\
&= G(F(G(h))) \\
&\cong G(h)
\end{aligned}$$

por lo tanto $\hat{G} \cong G$.
Análogamente, $\hat{F} \cong F$.

$$
\begin{aligned}
\hat{\eta}\hat{G}(G(A)) &= E_B\omega RE_B J_B G' S_A C(G(A)) \\
&= E_B\omega(RE_B J_B)G' S_A C(G(A)) \\
&= E_B\omega G' S_A C(G(A)) \quad \text{pues } RE_B J_B = id \\
&= E_B G' S_A C(G(A)) \\
&= \hat{G}(G(A)) \\
&= id_{\hat{G}(G(A))}
\end{aligned}
$$

Si $f : A \longrightarrow A' \in$MorA, entonces consideremos la composición

$$
\begin{aligned}
\hat{\eta}\hat{G}(f) &= E_B\omega RE_B J_B G' S_A C(f) \\
&= E_B\omega(RE_B J_B)G' S_A C(f) \\
&= E_B\omega G' S_A C(f) \quad \text{pues } RE_B J_B = id \\
&= E_B G' S_A C(f) \\
&= \hat{G}(f) \\
&= id_{\hat{G}(f)}
\end{aligned}
$$

por lo tanto $\hat{\eta}\hat{G} = id_{\hat{G}}$.
Análogamente, $\hat{\varepsilon}\hat{F} = id_{\hat{F}}$. ■

OBSERVACION

Como $(B \times X, A) \cong (B, A^X)$, entonces
$Hom(B \times X, A) \cong Hom(B, A^X) \cong Hom(B, Hom(X, A))$;
además $(X \times B, A) \cong (X, X^B)$, por lo tanto
$Hom(X \times B, A) \cong Hom(X, X^B) \cong Hom(X, Hom(B, X))$,
y como $(B \times X, A) \cong (X \times B, A)$, entonces
$Hom(B, Hom(X, A)) \cong Hom(X, Hom(B, X))$.

EJEMPLOS

Los funtores *Hom* contravariantes internos, usualmente no son adjunciones de Galois ver [4]. En adelante nosotros consideraremos solamente funtores *Hom* que tienen adjunto derecho.

(1) $Hom(-,X) : Set^{op} \longrightarrow Set$ es adjunción de Galois $\Longleftrightarrow$ $|X| \leq 1$.

Demostración:
$\Longleftarrow$) Si $|X| \leq 1$, entonces $X = \emptyset$ o $X = 1$.
Veamos que $Hom(-,X) : Set^{op} \longrightarrow Set$ es adjunción de Galois.
Por demostrar $\eta G : G \longrightarrow GFG$ es isomorfismo natural.

Por la observación anterior $Set(A, X^B) = Set(X^B, A) \cong Set(B, X^A)$ y como $Set(A, X^B) = Set(X^B, A) = Set^{op}(X^B, A)$, entonces
$Set^{op}(X^B, A) \cong Set(B, X^A)$; por consiguiente
$Set^{op}(Set(B, X), A) \cong Set(B, Set(A, X))$,
por lo tanto $Set^{op}(F(B), A) \cong Set(B, G(A))$ con $Set(B, X) = F(B)$, y
$Set(A, X) = G(A)$; así $GFG(A) = Set(FG(A), X) =$
$Set(Set(G(A), X), X) = Set(Set(Set(A, X), X), X)$
por lo tanto $GFG(A) = Set(Set(Set(A, X), X), X)$.

Veremos que $Set(A, X) \cong Set(Set(Set(A, X), X), X)$.

i) Primer caso $X = \emptyset$, entonces
$\eta G(A) : Set(A, \emptyset) \longrightarrow Set(Set(Set(A, \emptyset), \emptyset), \emptyset)$
a) primer subcaso $A = \emptyset$, implica
$\eta G(A) : Set(\emptyset, \emptyset) \longrightarrow Set(Set(Set(\emptyset, \emptyset), \emptyset), \emptyset)$
$\therefore$ $\eta G(A) : \{id_\emptyset\} \longrightarrow Set(Set(\{id_\emptyset\}, \emptyset), \emptyset) = Set(\emptyset, \emptyset) = \{id_\emptyset\}$
$\therefore$ $\eta G(A) : \{id_\emptyset\} \longrightarrow \{id_\emptyset\}$ $\therefore$ $\eta G(A) = \{id_\emptyset\}$ es biyección
$\therefore$ $\eta G(A)$ es isomorfismo natural.

b) Segundo subcaso $A \neq \emptyset$, implica
$\eta G(A) : Set(A,\emptyset) \longrightarrow Set(Set(Set(A,\emptyset),\emptyset),\emptyset)$
$\therefore \quad \eta G(A) : \emptyset \longrightarrow Set(Set(\emptyset,\emptyset),\emptyset) = Set(\{id_\emptyset\},\emptyset) = \emptyset$
$\therefore \quad \eta G(A) : \emptyset \longrightarrow \emptyset \quad \therefore \quad \eta G(A) = id_\emptyset$ es biyección
$\therefore \quad \eta G(A)$ es isomorfismo natural.

ii) Segundo caso si $X = 1$, entonces
$G(A) = Set(A,1) \cong 1$ pues 1 es objeto terminal en Set
$GFG(A) = Set(Set(Set(A,1),1),1) \cong 1$ pues 1 es objeto terminal en Set
$\therefore \quad \eta G(A)$ es biyección $\quad \therefore \quad \eta G(A)$ es isomorfismo natural
$\therefore \quad$ por i) y ii) $\eta G(A)$ es isotransformación.
$\therefore \quad Hom(-,X) : Set^{op} \longrightarrow Set$ es adjunción de Galois
$\therefore \quad (F,G)$ es adjunción de Galois.

$\Longrightarrow) \quad |X| = m, \ |A| = n \Longrightarrow |Set(A,X)| = |X|^{|A|} = m^n$

$\Longrightarrow \quad |Set(Set(Set(A,X),X),X)| = |X|^{|X|^{|X|^{|A|}}} = m^{m^{m^n}}$ pero $m^{m^{m^n}} \neq m^n$ en general.

$\therefore \quad m^{m^{m^n}} = m^n \Longrightarrow m^m = 1$ con $n = 0 \Longrightarrow m = 0$ o $m = 1$

$\therefore \quad |X| = 1$ o $|X| = 0 \quad \therefore \quad |x| \leq 1.$

$\therefore \quad Hom(-,X) : Set^{op} \longrightarrow Set$ adjunción de Galois $\Longrightarrow |X| \leq 1$.

■

(2) $Hom(-,X) : Gr^{op} \longrightarrow Gr$ es adjunción de Galois $\iff X = (0) = e$.

Demostración:
$\Longleftarrow) \quad X = (0)$.
Veamos que $Hom(-,X) : Gr^{op} \longrightarrow Gr$ es adjunción de Galois.
Por demostrar $\eta G : G \longrightarrow GFG$ es isomorfismo natural.

Por la observación anterior $Gr^{op}(Gr(B,X),A) \cong Gr(B,Gr(A,X))$,
así $Gr^{op}(F(B),A) \cong Gr(B,G(A))$ con $F(B) = Gr(B,X)$, y
$G(A) = Gr(A,X) \Longrightarrow GFG(A) = Gr(FG(A),X) =$
$Gr(Gr(G(A),X),X) = Gr(Gr(Gr(A,X),X),X)$
por lo tanto $GFG(A) = Gr(Gr(Gr(A,X),X),X)$.

Veamos que $Gr(A,X) = Gr(Gr(Gr(A,X),X),X)$.

$X = (0) = e$, entonces
$\eta G(A) : Gr(A,e) \longrightarrow Gr(Gr(Gr(A,e),e),e)$
a) primer caso si $A = e$, entonces
$\eta G(A) : Gr(e,e) \longrightarrow Gr(Gr(Gr(e,e),e),e)$
$\therefore \quad \eta G(A) : \{id_e\} \longrightarrow Gr(Gr(id_e,e),e) = Gr(\{id_e\},e) = \{id_e\}$
$\therefore \quad \eta G(A) : \{id_e\} \longrightarrow \{id_e\} \quad \therefore \quad \eta G(A) = \{id_e\}$ es biyección
$\therefore \quad \eta G(A)$ es isomorfismo natural.

b) Segundo caso si $A \neq e$, entonces
$\eta G(A) : Gr(A,e) \longrightarrow Gr(Gr(Gr(A,e),e),e)$
$\therefore \quad \eta G(A) : e \longrightarrow Gr(Gr(e,e),e) = Gr(\{id_e\},e) = \{id_e\} = e$
$\therefore \quad \eta G(A) : e \longrightarrow e \quad \therefore \quad \eta G(A) = id_e$ es biyección
$\therefore \quad \eta G(A)$ es isomorfismo natural
$\therefore \quad$ por a) y b) $\eta G(A)$ es isotransformación.

$\therefore \quad Hom(-,X) : Gr^{op} \longrightarrow Gr$ es adjunción de Galois

$\therefore \quad (F,G)$ es adjunción de Galois.

$\Longrightarrow$) $1 \leq \ |Gr(Gr(Gr(A,X),X),X)| \leq |X|^{|X|^{|X|^{|A|}}} = 1$ pues $Gr(A,X) \cong Gr(Gr(Gr(A,X),X),X)$.

$\therefore \quad X = (0) = e$

$\boxtimes$

(3) $Hom(-,X) : Top^{op} \longrightarrow Top$ es adjunción de Galois con la topología indiscreta $\iff \quad |X| \leq 1$.

Demostración:

$\Leftarrow$) Si $|X| \leq 1$, entonces $X = \emptyset$ o $X = 1$.

Veamos que $Hom(-,X) : Top^{op} \longrightarrow Top$ es adjunción de Galois.

Por demostrar $\eta G : G \longrightarrow GFG$ es isomorfismo natural.

Por la observación anterior $Top(A, X^B) = Top(X^B, A) \cong Top(B, X^A)$ y como $Top(A, X^B) = Top(X^B, A) = Top^{op}(X^B, A)$, entonces

$Top^{op}(X^B, A) \cong Top(B, X^A)$

$\therefore \quad Top^{op}(Top(B,X), A) \cong Top(B, Top(A,X))$

$\therefore \quad Top^{op}(F(B), A) \cong Top(B, G(A))$ con $Top(B,X) = F(B)$, y

$Top(A,X) = G(A) \Longrightarrow GFG(A) = Top(FG(A), X) =$

$Top(Top(G(A),X),X) = Top(Top(Top(A,X),X),X)$

$\therefore \quad GFG(A) = Top(Top(Top(A,X),X),X)$.

Probaremos que $Top(A,X) \cong Top(Top(Top(A,X),X),X)$.

i) Primer caso, si $X = \emptyset$, entonces

$\eta G(A) : Top(A, \emptyset) \longrightarrow Top(Top(Top(A,\emptyset),\emptyset),\emptyset)$

a) primer subcaso, si $A = \emptyset$, entonces

$\eta G(A) : Top(\emptyset, \emptyset) \longrightarrow Top(Top(Top(\emptyset,\emptyset),\emptyset),\emptyset)$

$\therefore \quad \eta G(A) : \{id_\emptyset\} \longrightarrow Top(Top(\{id_\emptyset\},\emptyset),\emptyset) = Top(\emptyset,\emptyset) = \{id_\emptyset\}$

$\therefore \quad \eta G(A) : \{id_\emptyset\} \longrightarrow \{id_\emptyset\} \quad \therefore \quad \eta G(A) = \{id_\emptyset\}$ es biyección

$\therefore \quad \eta G(A)$ es isomorfismo natural.

b) Segundo subcaso, si $A \neq \emptyset$, entonces

$\eta G(A) : Top(A, \emptyset) \longrightarrow Top(Top(Top(A,\emptyset),\emptyset),\emptyset)$

$\therefore \quad \eta G(A) : \emptyset \longrightarrow Top(Top(\emptyset,\emptyset),\emptyset) = Top(\{id_\emptyset\},\emptyset) = \emptyset$

$\therefore \quad \eta G(A) : \emptyset \longrightarrow \emptyset \quad \therefore \quad \eta G(A) = id_\emptyset$ es biyección

$\therefore \quad \eta G(A)$ es isomorfismo natural.

ii) Segundo caso, si $X = 1$, entonces
$G(A) = Top(A, 1) \cong 1$ pues 1 es objeto terminal en Top;
$GFG(A) = Top(Top(Top(A, 1), 1), 1) \cong 1$, pues 1 es objeto terminal en Top
$\therefore \quad \eta G(A)$ es biyección $\quad \therefore \quad \eta G(A)$ es isomorfismo natural
$\therefore \quad$ por i) y ii) $\eta G(A)$ es isotransformación.
$\therefore \quad Hom(-, X) : Top^{op} \longrightarrow Top$ es adjunción de Galois
$\therefore \quad (F, G)$ es adjunción de Galois.

$\Longrightarrow) \quad |X| = m, \; |A| = n \Longrightarrow |Top(A, X)| = |X|^{|A|} = m^n$

$\Longrightarrow |Top(Top(Top(A, X), X), X)| = |X|^{|X|^{|X|^{|A|}}} = m^{m^{m^n}}$, pero $m^{m^{m^n}} \neq m^n$ en general.

$\therefore \quad m^{m^{m^n}} = m^n \Longrightarrow m^m = 1$ con $n = 0 \Longrightarrow m = 0$ o $m = 1$

$\therefore \quad |X| = 1$ o $|X| = 0 \quad \therefore \quad |x| \leq 1$.

$\therefore \quad Hom(-, X) : Top^{op} \longrightarrow Top$ adjunción de Galois $\Longrightarrow |X| \leq 1$.

■

Existen importantes restricciones de estos funtores *Hom* que son adjunciones de Galois ver [4].

Los funtores covariantes internos que tienen adjunto izquierdo, pueden ser adjunciones de Galois en algunos casos.

EJEMPLOS

(1) $Hom(X, -) : Set \longrightarrow Set$ es adjunción de Galois $\iff$ $|X| \leq 1$.

Demostración:

$\Longrightarrow$) Como $Hom(B \times X, A) \cong Hom(B, Hom(X, A))$, entonces veamos que $Set(X, A) \cong Set(X, Set(X, A) \times X)$.

$$\therefore \quad |Set(X,A)| = |A|^{|X|}, |Set(X, Set(X,A) \times X)| = (|A|^{|X|} \cdot |X|)^{|X|}$$

$$\therefore \quad |A|^{|X|} = (|A|^{|X|} \cdot |X|)^{|X|} \text{ no puede ser si } |X| > 1$$

$$\therefore \quad |X| \leq 1 \ .$$

$\Longleftarrow$) Si $|X| \leq 1$, entonces $X = \emptyset$ o $X = 1$.
Veamos que $Hom(X, -) : Set \longrightarrow Set$ es adjunción de Galois.
Por demostrar $\eta G(A) : G(A) \longrightarrow GFG(A)$ es isomorfismo natural.

Probemos que $Set(X, A) \cong Set(X, Set(X, A) \times X)$.

i) Si $X = \emptyset$, entonces
$\eta G(A) : Set(\emptyset, A) \longrightarrow Set(\emptyset, Set(\emptyset, A) \times \emptyset) = Set(\emptyset, \emptyset) = \{id_\emptyset\}$
$\therefore \quad \eta G(A) : \{i_A\} \longrightarrow \{id_\emptyset\}$ la inclusión es biyección
$\therefore \quad \eta G(A)$ es biyección
$\therefore \quad \eta G(A)$ es isomorfismo natural.

ii) Si $X = 1$, entonces
$\eta G(A) : Set(1, A) \longrightarrow Set(1, Set(1, A) \times 1) \cong Set(1, A \times 1)$
$\cong Set(1, A) = A$
$\therefore \quad \eta G(A) : A \longrightarrow A \quad \therefore \quad \eta G(A) = id_A$ es biyección
$\therefore \quad \eta G(A)$ es isomorfismo natural.

$\therefore$ por i) y ii) $\eta G(A)$ es isotransformación.

$\therefore$ $Hom(X, -) : Set \longrightarrow Set$ es adjunción de Galois

$\therefore$ (F, G) es adjunción de Galois. ■

CONCLUSIONES

.- Las conexiones de Galois de segunda clase, son las mismas que las conexiones de Galois de primera clase.

.- La definición de conexión de Galois de tercera clase que se dió, resulta más manejable a la que dieron Herrlich y Hušek originalmente.

.- Si el soporte de la categoría $\mathbf{X} = \mathbf{1}$, entonces las conexiones de Galois de primera clase, coinciden con las conexiones de Galois de tercera clase.

.- Cuando consideramos una pareja de funtores adjuntos, con F adjunto izquierdo de G y funciones G-universales; que sean llevadas por identidades en $\mathbf{X}$, siempre obtenemos una correspondencia de Galois y recíprocamente.

.- Siempre existe un teorema de descomposición para conexiones de Galois de tercera clase.

.- La definición de adjunción de Galois, se substituyó por una definición más compacta a la que Herrlich y Hušek habían dado originalmente.

.- Se obtuvieron varias definiciones de conexión de Galois de tercera clase, al haber probado un resultado que no estaba en el artículo de Herrlich y Hušek (teorema 3.3).

.- En el caso de los funtores concretos, si (F, G) es adjunción de Galois, entonces F es adjunto izquierdo de G y η, ε son transformaciones naturales.

.- Para cada conexión de Galois de cuarta clase, siempre existe un teorema de descomposición, en el sentido del teorema 3.7.

.- Si (F, G) es adjunción de Galois, entonces siempre existe $(\hat{F}, \hat{G})$ adjunción de Galois con adjunciones $(\hat{\eta}, \hat{\varepsilon})$ tales que $\hat{\eta}\hat{G}$ o $\hat{\varepsilon}\hat{F}$ consiste de identidades, y $\hat{F} \cong F$, $\hat{G} \cong G$.

SIMBOLOGIA

$F \dashv G$	F es adjunto izquierdo de G
$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	categorías
$Mor\mathbf{A}$	conjunto de morfismos de $\mathbf{A}$
$Iso\mathbf{A}$	conjunto de isomorfismos de $\mathbf{A}$
$Ob\mathbf{A}$	conjunto de objetos de $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^{op}$	categoría opuesta
$\lvert X \rvert$	cardinalidad de X
$\Longleftrightarrow$	si, y sólo si
$\Longrightarrow$	entonces o implica
$\cdot \ni \cdot$	tal que o tales que
$\therefore$	por lo tanto
$\cong$	isomorfo
$\forall$	para todo o para toda
$\exists$	existe
$\in$	pertenece o es elemento de
$\mathbf{N}$	el conjunto de los números naturales
$\wp(X)$	el conjunto potencia de X
Set	categoría de los conjuntos
Top	categoría de los espacios topológicos
Gr	categoría de los grupos
Vec	categoría de los espacios vectoriales

Bibliografía

[1] J. Adámek, H. Herrlich and G. Strecker, Abstract and Concrete Categories, Pure and Applied Mathematics , A Wiley-Interscience Publication, John Wiley and Sons, Inc. 1990.

[2] G. Birkhoff, Lattice Theory. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 25 (1940).

[3] C. J. Everett. Closure operators and Galois Theory in Lattices. Trans. Amer. Math. Soc. 55 (1944).

[4] H. Herrlich and M. Hušek, Galois Connections Categorically, Journal of Pure and Applied Algebra 68 (1990) 165-180 North-Holland.

[5] J. R. Isbell, General functorial semantics, Amer. J. Math. 94 (1972) 535-559.

[6] S. Mac Lane, Categories for the Working Mathematician (Springer, Berlin, 1971).

[7] O. Ore, Galois connections, Trans. Amer. Math. Soc. 55 (1944) 493-513.

[8] G. Pickert, Bemerkungen über Galois-Verbindungen, Arch. Math. 3 (1952) 285-289.

[9] D. Pumplün, Kategorien, Vorlesungsskript, Universität Münster, 1972.

[10] J. Schmidt, Berträge zur Filtertheorie II, Math. Z. 10 (1953) 197-232.