

123
2ej



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE QUIMICA

"DISEÑO DE UNA PRACTICA SOBRE LA
ANALOGIA ENTRE LA TRANSFERENCIA
DE MOMENTUM, ENERGIA Y MASA"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

INGENIERO QUIMICO

P R E S E N T A :

RUBEN RAMOS ISIDRO



MEXICO, D. F.

1993

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

	PAGINA
INTRODUCCION.....	5
I FUNDAMENTOS DE MECANISMOS DE TRANSPORTE.....	6
I.1 ECUACIONES FENOMENOLOGICAS.....	6
I.1.1 ECUACION DE VISCOSIDAD DE NEWTON.....	7
I.1.2 ECUACION DE FOURIER.....	9
I.1.3 ECUACION DE FICK.....	10
I.2 ANALOGIA ENTRE LAS ECUACIONES DE NEWTON, FOURIER Y FICK..	11
I.3 ECUACIONES DE LOS MECANISMOS DE TRANSPORTE.....	13
I.3.1 ECUACION DE CONTINUIDAD.....	15
I.3.2 ECUACION DE TRANSFERENCIA DE MOMENTUM.....	17
I.3.3 ECUACION DE TRANSFERENCIA DE ENERGIA.....	21
I.3.4 ECUACION DE TRANSFERENCIA DE MASA.....	25
II MECANISMOS DE TRANSPORTE EN CAPA LIMITE.....	28
II.1 CAPA LIMITE EN PLACAS PLANAS.....	29
II.1.1 ECUACIONES DE TRANSPORTE.....	30
II.1.2 ESPESOR DE CAPA LIMITE.....	40
II.1.3 PERFILES ADIMENSIONALES DE PROPIEDAD.....	44
II.1.4 COEFICIENTES DE TRANSPORTE.....	47
II.1.5 ANALOGIAS ENTRE LOS MECANISMOS DE TRANSPORTE.....	51
II.2 CAPA LIMITE EN CILINDROS.....	55
II.2.1 ECUACIONES DE TRANSPORTE.....	57
II.2.2 ESPESOR DE CAPA LIMITE.....	60
II.2.3 PERFILES DE PROPIEDAD ADIMENSIONAL.....	61
II.2.4 COEFICIENTES DE TRANSPORTE.....	62
II.2.5 ANALOGIA.....	72

	PAGINA
III DESARROLLO EXPERIMENTAL.....	74
III.1 PLACAS PLANAS.....	74
III.1.1 EQUIPO UTILIZADO.....	74
III.1.2 TECNICA EXPERIMENTAL.....	78
III.2 CILINDROS.....	80
III.2.1 EQUIPO UTILIZADO.....	80
III.2.2 TECNICA EXPERIMENTAL.....	81
IV CALCULOS Y RESULTADOS.....	84
IV.1 PLACAS PLANAS.....	84
IV.2 CILINDROS.....	97
V PRACTICA PROPUESTA.....	109
VI CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	116
BIBLIOGRAFIA.....	119

INTRODUCCION

Tradicionalmente se ha hecho el estudio de los mecanismos de transporte de momentum, calor y masa en forma aislada, el objetivo del presente trabajo es realizar un estudio experimental simultáneo de dichos mecanismos ya que actualmente se ha puesto de manifiesto la importancia del estudio simultáneo de estos debido a que en un proceso determinado no solamente se lleva a cabo un solo mecanismo de transporte sino que siempre está acompañado de otro y en algunos casos se involucran los tres.

Numerosos investigadores han realizado semejanzas entre los mecanismos de transporte por medio de correlaciones matemáticas ó experimentales, obteniendo así una analogía propia, la cual describe la semejanza entre dichos mecanismos bajo ciertas consideraciones a las cuales el investigador realizó el estudio.

De acuerdo a lo anterior existen varios tipos de analogías de los mecanismos de transportes, pero en base a las características de los equipos disponibles en el Laboratorio de Ingeniería Química se pretende reproducir experimentalmente la analogía de Colburn fundamentada en los conceptos de capa límite y así proponer una práctica para dicho laboratorio.

Un mecanismo de transporte es la forma en la cual se desarrolla la transferencia de una propiedad (ya sea momentum, energía o masa), por lo cual se utilizarán modelos básicos para mostrar el desarrollo de las leyes de flujo, también llamadas expresiones fenomenológicas, que son en las que se fundamentan los mecanismos de transporte.

I.1. ECUACIONES FENOMENOLÓGICAS.

Para obtener las expresiones fenomenológicas se considerará [27] un fluido entre dos placas paralelas horizontales infinitas, separadas por una distancia h como se muestra en la fig. 1-A; la placa superior se encuentra a $Y = h$ y se mantiene a una temperatura $T = T_h > 0$, a una concentración $C_A = C_{Ah} > 0$, y se le aplica una fuerza F a la placa superior que le ocasiona un movimiento con una velocidad $v = v_h$; mientras que la placa inferior se encuentra a $Y = 0$ con $T = 0$, $C_A = 0$ y $v = 0$.

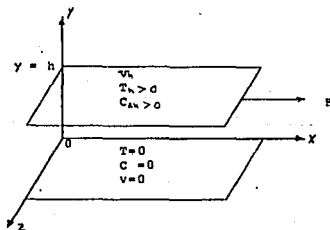


Fig. 1-A. Fluido entre dos placas paralelas.

De la consideración anterior el gradiente lineal en dos dimensiones de la velocidad, temperatura y concentración de A, se representa en la figura I-B.

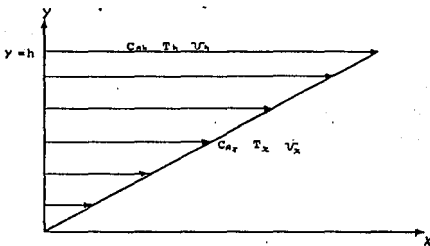


Fig. I-B. Gradiente lineal en dos dimensiones.

I.1.1 ECUACION DE VISCOSIDAD DE NEWTON.

La expresión fenomenológica de momentum se puede obtener partiendo de que la transferencia de momentum en un fluido incluye el estudio del movimiento así como de las fuerzas que lo producen. partiendo de la segunda ley de Newton del movimiento:

$$F = m \cdot a = m (dv/dt) \quad (I.1.1)$$

la fuerza se relaciona directamente con la rapidéz de cambio del momentum de un sistema, a su vez, el momentum de un sistema está definido como

$$\text{MOMENTUM} = \text{MASA} \times \text{VELOCIDAD} \quad (I.1.2)$$

De acuerdo a lo considerado en las figuras I-A y I-B; para el caso de momentum en particular, la fuerza aplicada origina un movimiento del fluido laminar, en dicho flujo laminar el fluido fluye en capas constantes o láminas [14]; aplicando éste concepto se puede decir que la placa superior transfiere momentum (μv) a la lámina próxima a ella, y ésta a su vez a la siguiente lámina contigua a ella y así sucesivamente, siendo que esta transferencia no es igual en cada caso, dando origen así a un gradiente de momentum. En función de lo anterior, Newton demostró que la fuerza aplicada por unidad de área, requerida para mantener la placa superior en movimiento con velocidad constante v_h , es proporcional al gradiente de velocidad.

$$F / A \propto \Delta v_h / \Delta Y \quad (I.1.3)$$

si se considera que v_h varía a lo largo de dY , la ecuación (I.1.3) se puede escribir como:

$$F / A \propto dv_x / dY \quad (I.1.4)$$

reemplazando el signo de proporcionalidad, por una constante de proporcionalidad μ :

$$F / A = - \mu (dv_x / dY) \quad (I.1.5)$$

el término μ es el coeficiente de viscosidad ó viscosidad absoluta, siendo ésta una propiedad del fluido y se define como una medida a la resistencia que presenta el fluido a ser deformado; el signo negativo en la ecuación indica que el transporte de propiedad decrece en dirección del eje Y ; el término F/A se denomina esfuerzo cortante, ya que F es ejercida paralela a la dirección del movimiento, que se denomina como τ .

$$\tau_{xy} = - \mu (dv_x / dY) \quad (I.1.6)$$

obteniéndose así la ecuación ó ley de viscosidad de Newton que es la ecuación fenomenológica del mecanismo de transporte de momentum. Los subíndices (x, y) nos indican que el esfuerzo cortante τ_{xy} se disipa a través del eje Y y tiene dirección X [22]; al aplicarle el factor g_c al esfuerzo cortante, éste puede interpretarse como un flux de momentum como es muestra en el siguiente análisis dimensional:

$$\tau = F / L^2 = ML / F \theta^2 = (M L / \theta) / L^2 \theta$$

I.1.2 ECUACION DE FOURIER.

Para obtener la ecuación fenomenológica de transferencia de energía en forma de calor por conducción se tomarán en cuenta las consideraciones hechas por las figuras I-A y I-B; en donde para este caso particular, la placa superior transfiere calor a la lámina próxima a ella y ésta a su vez a la siguiente lámina contigua y así sucesivamente dando origen así a un gradiente de temperaturas. De acuerdo a lo anterior Fourier demostró que la energía en forma de calor se transfiere de la placa superior a la inferior y que la rapidéz de energía transferida por unidad de área, es proporcional al gradiente de temperaturas.

$$Q / A \propto dT / dY \quad (I.1.7)$$

sustituyendo el signo de proporcionalidad por una constante de proporcionalidad k.

$$Q / A = - k (dT / dY) \quad (I.1.8)$$

donde el término k se define como la conductividad térmica del medio conductor. En la ecuación (I.1.8), Q es el calor transferido; A es el área de la sección transversal normal al flujo de calor; dT/dY es el

gradiente de temperatura. Se puede decir que Q/A es el flujo de calor y se puede representar por q_y .

$$q_y = -k \left(dT / dy \right) \quad (I.1.9)$$

obteniéndose así la ecuación de Fourier, que es la ecuación fenomenológica de la transferencia de calor por conducción; el subíndice indica en que dirección se difunde el calor y el signo negativo que la transferencia de calor, decrece en dirección del eje Y [27].

I.1.3 ECUACION DE FICK.

Siguiendo un análisis análogo a los dos anteriores y tomando en cuenta las consideraciones hechas por las figuras I-A y I-B. Fick demostró que los moles de A son transferidos de la placa superior a la inferior, y que la rapidez de moles de A transferidos (M) por unidad de área es proporcional al gradiente de concentración de A. E introduciendo un factor de proporcionalidad D_{AB} :

$$M / A = - D_{AB} \left(dC_A / dy \right) \quad (I.1.10)$$

donde D_{AB} es la difusividad del componente A ó difusión másica y es una propiedad del fluido. En ésta ecuación el término M/A es el flujo molar, y se puede representar como J_A , al igual que en los anteriores casos, el signo negativo indica que el transporte de concentración decrece en dirección del eje Y, por lo que:

$$J_A = - D_{AB} \left(dC_A / dy \right) \quad (I.1.11)$$

obteniéndose así la ecuación de Fick, que es la ecuación fenomenológica de la transferencia de masa.

gradiente de temperatura. Se puede decir que Q/A es el flujo de calor y se puede representar por q_y .

$$q_y = -k \left(dT / dy \right) \quad (I.1.9)$$

obteniéndose así la ecuación de Fourier, que es la ecuación fenomenológica de la transferencia de calor por conducción; el subíndice indica en que dirección se difunde el calor y el signo negativo que la transferencia de calor, decrece en dirección del eje Y [27].

I.1.3 ECUACION DE FICK.

Siguiendo un análisis análogo a los dos anteriores y tomando en cuenta las consideraciones hechas por las figuras I-A y I-B. Fick demostró que los moles de A son transferidos de la placa superior a la inferior, y que la rapidez de moles de A transferidos (M) por unidad de área es proporcional al gradiente de concentración de A . E introduciendo un factor de proporcionalidad D_{AB} :

$$M / A = - D_{AB} \left(dC_A / dy \right) \quad (I.1.10)$$

donde D_{AB} es la difusividad del componente A ó difusión másica y es una propiedad del fluido. En ésta ecuación el término M/A es el flujo molar, y se puede representar como J_A , al igual que en los anteriores casos, el signo negativo indica que el transporte de concentración decrece en dirección del eje Y , por lo que:

$$J_A = - D_{AB} \left(dC_A / dy \right) \quad (I.1.11)$$

obteniéndose así la ecuación de Fick, que es la ecuación fenomenológica de la transferencia de masa.

I.2 ANALOGIA ENTRE LAS ECUACIONES DE NEWTON, FOURIER Y FICK.

Observando las ecuaciones de viscosidad de Newton, Fourier y Fick respectivamente, se puede concluir que la transferencia en cada uno de los casos es debida a un gradiente, ya sea de velocidades, temperaturas o concentración:

$$\text{MOMENTUM} \quad \tau_{xy} = -\mu \left(\frac{dv_x}{dy} \right) \quad (\text{I.1.8})$$

$$\text{ENERGIA (CALOR)} \quad q_A = -k \left(\frac{dT}{dy} \right) \quad (\text{I.1.9})$$

$$\text{MASA} \quad J_A = -D_{AB} \left(\frac{dC_A}{dy} \right) \quad (\text{I.1.11})$$

como se puede observar en cada uno de los casos, la ecuación correspondiente toma una forma fundamental e igual:

$$\text{FLUX} = \text{PROPIEDAD DE TRANSPORTE} \times \text{GRADIENTE DE POTENCIAL} \quad (\text{I.2.1})$$

aunque éstas ecuaciones son similares, no existe una completa analogía debido a que las propiedades de transporte, así como sus potenciales, tienen diferentes dimensiones. Por lo tanto, se harán consideraciones [9], válidas desde luego: A) debido a que existe una difusión másica en L^2/θ (D_{AB}), se puede decir que existe una difusión de momentum y de calor con las mismas unidades. Para el caso de momentum es la viscosidad cinemática.

$$\nu = \mu / \rho = L^2 / \theta \quad (\text{I.2.2})$$

Para el caso de calor, existe una difusión térmica:

$$\alpha = k / (\rho C_p) = L^2 / \theta \quad (\text{I.2.3})$$

donde C_p es la capacidad calorífica a presión constante. B) de la misma manera se tiene un gradiente de concentración C_A en la ecuación de Fick,

de la forma (C_A / volumen); por lo que debe existir un gradiente de concentración de momentum y de calor. Para el caso de momentum:

$$\text{MOMENTUM / VOLUMEN} = \rho v \quad (\text{I.2.4})$$

de igual manera para energía se tiene que:

$$\text{CALOR / VOLUMEN} = \rho C_p T \quad (\text{I.2.5})$$

∴ las ecuaciones fenomenológicas quedan de la siguiente manera:

$$\text{MOMENTUM} \quad \tau_{xy} = -\nu \left[d(\rho v)_x / dy \right] \quad (\text{I.2.6})$$

$$\text{CALOR} \quad q_y = -\alpha \left[d(\rho C_p T) / dy \right] \quad (\text{I.2.7})$$

$$\text{MASA} \quad J_y = -D_{AB} \left(dC_A / dy \right) \quad (\text{I.2.8})$$

como se puede observar nuevamente, las ecuaciones toman la forma :

$$\text{FLUX} = \text{DIFUSIVIDAD} * \text{GRADIENTE DE CONCENTRACION} \quad (\text{I.2.9})$$

con lo cual queda demostrado que las ecuaciones fenomenológicas de los mecanismos de transporte son análogas [9]. Resumiendo lo anterior en la tabla I-A.

TRANSPORTE	MOMENTUM	ENERGIA	MASA
FLUJO	τ_{xy}	q_y	J_A
COEF. DE PROPORCIONALIDAD	μ	k	D_{AB}
GRADIENTE DE POTENCIAL	dv_x / dy	dT / dy	dC_A / dy
DIFUSIVIDAD	ν	α	D_{AB}
CONCENTRACION	ρv	$\rho C_p T$	C_A
GRADIENTE DE CONCENTRACION	$d(\rho v) / dy$	$d(\rho C_p T) / dy$	dC_A / dy

I.3 ECUACIONES DE LOS MECANISMOS DE TRANSPORTE.

Las ecuaciones básicas que describen el movimiento de un fluido están comprendidas en las ecuaciones de balances totales de momentum, energía y masa. Estas ecuaciones de flujo de fluidos proporcionan un medio de determinación de la variación de las propiedades de los fluidos de un punto a otro.

En la mecánica de un cuerpo rígido se estudia el movimiento de un cuerpo en función de su posición con respecto al tiempo y de una posición fija preestablecida, generalmente a $t = 0$, por ejemplo, un observador fijo en un puente estudia la descripción del movimiento de un carro en la carretera, éste método de estudio del movimiento se denomina análisis langragiano en honor a J.L. Langrange. Por otra parte L. Euler desarrolló un método muy útil en la mecánica de fluidos, debido a que es importante conocer los cambios de una partícula en el fluido, en éste método el análisis se concentra en un punto determinado del flujo, el análisis del movimiento de las partículas del fluido se realiza a medida que pasan por sitios dados; tomando como base el ejemplo anterior, aquí el estudio del movimiento se realiza desde la posición del carro, a éste análisis del movimiento se le denomina euleriano [11].

De acuerdo a lo anterior, los balances totales (macroscópicos) que se aplicarán al fluido, se realizarán a un recipiente finito o volumen finito fijo en el espacio llamado volumen de control fig. I-C. El término total se usa debido a que se desea describir estos balances con respecto al exterior del recipiente; los cambios dentro del recipiente quedan determinados en función de las propiedades de las corrientes de entrada y salida de los intercambios de energía entre el recipiente y sus alrededores [16]. Las ecuaciones que se obtienen por medio de éste balance total para un flujo en movimiento se denominan ecuaciones de mecanismos de transporte y se basan en la ley general de la conservación. Antes de obtener éstas ecuaciones, se mencionarán brevemente algunos aspectos matemáticos que intervienen en el desarrollo de dichas ecuaciones:

DERIVADA SUSTANCIAL CON RESPECTO AL TIEMPO [18]. Una derivada muy útil, es la que se obtiene cuando el observador viaja a la misma velocidad de la corriente y observa los cambios de propiedad en función del tiempo, a esto se le describe como una derivada que sigue el movimiento, esto es, una derivada sustancial con respecto al tiempo D / Dt , por ejemplo:

$$D\rho / Dt = \partial\rho/\partial t + v_x (\partial\rho/\partial X) + v_y (\partial\rho/\partial Y) + v_z (\partial\rho/\partial Z) \quad (I.3.1)$$

$$D\rho / Dt = \partial\rho / \partial t + v (\nabla \rho) \quad (I.3.2)$$

donde v_x , v_y y v_z son los componentes del vector velocidad v de la corriente.

OPERADORES DIFERENCIALES [2]. Se utilizan para simplificar una ecuación en tres dimensiones, por ejemplo, el gradiente ó "grad" (∇) de la densidad es:

$$\nabla \rho = i (\partial\rho/\partial X) + j (\partial\rho/\partial Y) + k (\partial\rho/\partial Z) \quad (I.3.3)$$

donde i , j y k son vectores unitarios. La divergencia ó "div" ($\nabla \cdot$) de la velocidad es:

$$(\nabla \cdot v) = \partial v_x / \partial X + \partial v_y / \partial Y + \partial v_z / \partial Z \quad (I.3.4)$$

donde la velocidad v es una función de v_x , v_y y v_z [24]. El laplaciano (∇^2) de la densidad es:

$$(\nabla^2 \rho) = \partial^2 \rho / \partial X^2 + \partial^2 \rho / \partial Y^2 + \partial^2 \rho / \partial Z^2 \quad (I.3.5)$$

El TEOREMA DE GAUSS [15]. Dice que una integral de superficie puede convertirse a una integral de volumen:

$$\iint a \cdot n \, ds = \iiint (\nabla \cdot a) \, dV \quad (I.3.6)$$

si " \mathbf{a} " es una función vectorial continua y se considera una superficie " s " que limita un volumen V , donde \mathbf{n} es un vector unitario.

I.3.1 ECUACION DE CONTINUIDAD.

La ecuación de continuidad [27] describe la variación de la densidad con la posición y el tiempo de un fluido en movimiento ó estacionario. Esta ecuación se desarrolla al aplicar la ley de la conservación en base de velocidades a un fluido de un componente y una sola fase.

$$\left[\begin{array}{l} \text{velocidad de} \\ \text{masa que entra} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{l} \text{velocidad de} \\ \text{masa que sale} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} \text{velocidad de} \\ \text{masa generada} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{velocidad de} \\ \text{masa acumulada} \end{array} \right]$$

A

B

C

D

(I.3.7)

Se considerará un elemento de volumen finito V con interface f figura I-C, a través del cual esta fluyendo un fluido, éste elemento de volumen arbitrario es fijo en el espacio y no ofrece resistencia al flujo a través de su superficie.

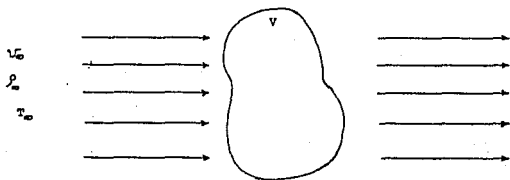


Fig. I-C. elemento de volumen finito.

Al evaluar los términos de la ecuación (I.3.7) se observa que A y B representan la velocidad neta de flujo de masa dentro del sistema, por lo tanto relacionando el flujo volumétrico (L^3/θ) con la masa (M/L^3): $\rho v df$ (M/θ), que es el flujo másico en un punto, si se quiere el flujo másico neto y como el término es A-B se tiene que.

$$- \iint \rho v df = (A - B) \quad (I.3.8)$$

Como en éste caso no se lleva a cabo ninguna reacción química y los efectos nucleares se asumen ausentes en cualquier punto del sistema, se concluye que el término C vale cero. El término D es una medida de velocidad de cambio de masa dentro del sistema, representa la masa (ρ) confinada en una diferencial de volumen (dV), representado mediante la rapidéz de cambio. La velocidad de cambio de masa en el elemento de volumen V en (M/θ) se obtiene al integrar todo el elemento de volumen.

$$\iiint (\partial \rho / \partial t) dV = D \quad (I.3.9)$$

Sustituyendo los términos obtenidos en la ec. (I.3.7) se tiene que

$$- \iint \rho v df = \iiint (\partial \rho / \partial t) dV \quad (I.3.10)$$

como se observa, ésta ecuación no es geoméricamente consistente ya que se tiene una integral de area y una de volumen, por lo que aplicando el teorema de Gauss ec. (I.3.6) al lado izquierdo de la ecuación:

$$- \iint \rho v df = - \iiint (\nabla \cdot \rho v) dV \quad (I.3.11)$$

por lo que la ec. (I.3.10) se transforma a:

$$- \iiint (\nabla \cdot \rho v) dV = \iiint (\partial \rho / \partial t) dV \quad (I.3.12)$$

Como la ecuación debe ser válida para cualquier volumen, además que los

Integrando los términos de la ecuación deben ser también iguales si ρ , v y sus derivadas son continuas en V , por lo tanto:

$$\partial \rho / \partial t + (\nabla \cdot \rho v) = 0 \quad (I.3.13)$$

$$\partial \rho / \partial t + v (\nabla \rho) + \rho (\nabla \cdot v) = D\rho/Dt + \rho (\partial v_x / \partial x + \partial v_y / \partial y + \partial v_z / \partial z) = 0$$

ésta es la ecuación de continuidad (I.3.14) que describe la variación de la masa (ρ) para un punto fijo, como consecuencia de las variaciones del vector velocidad. Una forma muy especial e importante de la ecuación de continuidad, es la correspondiente a un fluido de densidad constante (fluido incompresible).

$$(\nabla \cdot v) = \partial v_x / \partial x + \partial v_y / \partial y + \partial v_z / \partial z = 0 \quad (I.3.15)$$

aunque en realidad ningún fluido es totalmente incompresible, en la práctica se puede admitir con mucha frecuencia que la densidad es constante, con lo que se obtiene una considerable simplificación sin cometer casi error.

I.3.2 ECUACION DE TRANSFERENCIA DE MOMENTUM.

En la obtención de la ecuación de momentum también llamada de movimiento [27], se considerará la definición del elemento de volumen de la fig. I-C. Aplicando la ley general de la conservación a un balance de momentum en base de velocidades en el elemento de volumen, se obtiene la ecuación (I.3.16):

$$\begin{matrix} A \\ \left[\begin{array}{l} \text{vel. de momentum} \\ \text{que entra por} \\ \text{convección} \end{array} \right] \end{matrix} - \begin{matrix} B \\ \left[\begin{array}{l} \text{vel. de momentum} \\ \text{que sale por} \\ \text{convección} \end{array} \right] \end{matrix} + \begin{matrix} C \\ \left[\begin{array}{l} \text{vel. de momentum} \\ \text{que entra por} \\ \text{difusión molecular} \end{array} \right] \end{matrix}$$

$$\begin{array}{c} \text{D} \\ \left[\begin{array}{l} \text{vel. de momentum} \\ \text{que sale por di-} \\ \text{fusión molecular} \end{array} \right] \end{array} + \begin{array}{c} \text{E} \\ \left[\begin{array}{l} \text{fuerzas externas} \\ \text{ejercidas al} \\ \text{fluido} \end{array} \right] \end{array} = \begin{array}{c} \text{F} \\ \left[\begin{array}{l} \text{velocidad de} \\ \text{momentum} \\ \text{acumulada} \end{array} \right] \end{array} \quad (I.3.16)$$

Evaluando los términos de la ecuación anterior, se observa que (A-B) representa la velocidad neta de momentum que es el flujo másico por la velocidad, para obtener la velocidad de momentum.

$$v (C - \rho v df) = (A - B) \quad (I.3.17)$$

al integrar a través de toda el área se obtiene la velocidad neta de momentum:

$$\iint v (C - \rho v df) = (A - B) \quad (I.3.18)$$

(C - D) es la velocidad neta de momentum por difusión molecular. Este mecanismo de transporte es originado por la presencia de gradientes de velocidad en la capa límite ó interface del elemento de volumen y puede ser descrita por un esfuerzo cortante actuando sobre una diferencial de área. Al integrar se obtiene la velocidad neta de momentum por difusión molecular

$$- \iiint \tau df = (C - D) \quad (I.3.19)$$

éste término es equivalente a la velocidad de momentum, ya que al reorganizar dimensiones queda como $M (L / \theta) / \theta$.

El término E se puede dividir en dos tipos de fuerzas externas actuando sobre el fluido:

1.- INTERFACE. Una fuerza por interface es siempre presente debido a la presión externa P, actuando sobre la interface del elemento de volumen.

$$- \iiint P \, df = (\text{E por interface}) \quad (I.3.20)$$

2.- VOLUMEN. Una fuerza de volumen también puede ser ejercida sobre el elemento de volumen, si F es la fuerza ejercida por unidad de masa ; (ρF) es la fuerza por unidad de volumen actuando sobre una diferencial de volumen, que al integrar se obtiene la fuerza a través de todo el elemento de volumen

$$\iiint \rho F \, dV = (\text{E por volumen}) \quad (I.3.21)$$

El término F es la variación de cambio de momentum con respecto al tiempo, como ya se había definido el momentum como (ρv), pero ahora contenido en una diferencial de volumen. Para obtener la velocidad de acumulación de momentum total, se integra en todo el elemento de volumen

$$\iiint [\partial (\rho v) / \partial t] \, dV = "F" \quad (I.3.22)$$

sustituyendo las expresiones obtenidas en la ec. (I.3.16)

$$- \iiint v (\rho v) \, df - \iiint \tau \, df - \iint P \, df + \iiint \rho F \, dV = \iiint [\partial (\rho v) / \partial t] \, dV \quad (I.3.23)$$

como se puede observar, la ecuación anterior no es geoméricamente consistente, por lo que, aplicando el teorema de Gauss ecuación (I.3.6) a las integrales de área de dicha ecuación, queda como:

$$- \iiint (\nabla \rho v) \, dV - \iiint (\nabla \tau) \, dV - \iiint (\nabla P) \, dV + \iiint \rho F \, dV = \iiint [\partial (\rho v) / \partial t] \, dV \quad (I.3.24)$$

como la ecuación debe ser válida para cualquier volumen, además los integrandos de la ecuación son iguales si son continuas a través de V,

por lo tanto se obtiene la ecuación (I.3.25):

$$-\left(\nabla \rho v v\right) - \left(\nabla \tau\right) - \left(\nabla P\right) + \rho F = \partial(\rho v) / \partial t$$

ésta es la ecuación general de momentum y describe la distribución momentum ó velocidades y caídas de presión en un fluido, pero haciendo ciertas consideraciones, ésta ecuación toma expresiones más útiles y conocidas como:

$$\rho \left(\underset{A}{Dv} / Dt \right) = - \left(\underset{B}{\nabla \tau} \right) - \left(\underset{C}{\nabla P} \right) + \underset{D}{\rho F} \quad (I.3.26)$$

Donde el término A representa la masa por unidad de volumen, multiplicada por la aceleración B, la fuerza viscosa sobre el elemento de volumen por unidad de volumen C, la fuerza de presión sobre el elemento de volumen por unidad de volumen D, la fuerza gravitacional sobre el elemento por unidad de volumen. La ecuación de movimiento expresada en ésta forma (2), establece que un pequeño elemento de volumen que se mueve con el fluido, es acelerado por las fuerzas que actúan sobre él; observese que las dos ecuaciones (I.3.25 y I.3.26) corresponden a la ecuación de movimiento en cada caso, la primera forma representa un balance aplicado a un elemento de volumen fijo en el espacio y la segunda es una descripción de las variaciones que tienen lugar en un elemento de volumen que sigue el movimiento del fluido.

Rara vez se utilizan éstas ecuaciones en su forma completa para el planteamiento de problemas de flujo de fluidos, sino que generalmente resulta más conveniente emplear formas restringidas de las mismas, partiendo de la ecuación (I.3.26) y desarrollando el esfuerzo cortante, para densidad y viscosidad constantes, la ecuación puede simplificarse mediante la ecuación de continuidad (I.3.15) para obtener:

$$\rho \left(Dv / Dt \right) = - \nabla P + \mu \left(\nabla^2 v \right) + \rho g \quad (I.3.27)$$

Esta ecuación en diferentes coordenadas pueden ser fácilmente encontrada en la bibliografía (2), conocida como las ecuaciones de Navier-Stokes. Partiendo de la ecuación de Navier-Stokes (I.3.27) se pueden obtener casos particulares, haciendo la siguiente restricción ($\nabla \tau = 0$), la ecuación se reduce a:

$$\rho (Dv / Dt) = - \nabla P + \rho g \quad (I.3.28)$$

obteniéndose así la ecuación de Euler, utilizada para describir sistemas de flujo en donde los efectos viscosos son poco importantes.

I.3.3 ECUACION DE TRANSFERENCIA DE ENERGIA.

Esta ecuación general diferencial describe la distribución de la energía en un fluido en movimiento. Considerando de nuevo el elemento de volumen definido por la fig. I-C y aplicando la ley general de la conservación para energía en base a velocidades (27).

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{l} \text{vel. energía en} \\ \text{calor que entra} \\ \text{por conducción} \end{array} \right]_A - \left[\begin{array}{l} \text{vel. energía en} \\ \text{calor que sale} \\ \text{por conducción} \end{array} \right]_B + \left[\begin{array}{l} \text{vel. energía} \\ \text{interna entra} \\ \text{por convección} \end{array} \right]_C \\
 & - \left[\begin{array}{l} \text{vel. energía} \\ \text{interna sale} \\ \text{por convección} \end{array} \right]_D + \left[\begin{array}{l} \text{vel. energía} \\ \text{cinética entra} \\ \text{por convección} \end{array} \right]_E - \left[\begin{array}{l} \text{vel. energía} \\ \text{cinética sale} \\ \text{por convección} \end{array} \right]_F \\
 & + \left[\begin{array}{l} \text{vel. energía en} \\ \text{trabajo donado} \\ \text{por alrededores} \end{array} \right]_G + \left[\begin{array}{l} \text{vel. energía} \\ \text{generada en} \\ \text{el sistema} \end{array} \right]_H = \left[\begin{array}{l} \text{velocidad de} \\ \text{acumulación} \\ \text{de energía} \end{array} \right]_I \quad (I.3.29)
 \end{aligned}$$

Interpretando los términos de la ecuación anterior (I.3.29), análogamente que en las dos ecuaciones anteriores, tenemos que : (A-B) representan la velocidad neta de energía debido a la presencia de un gradiente de temperaturas y está definida como el calor (q) que pasa por una diferencial de Área df, que al integrar se obtiene la velocidad neta de calor por conducción

$$- \iint q \, df = (A - B) \quad (I.3.30)$$

(C - D) representa la velocidad neta de energía interna y es originada debido a el movimiento del fluido, para una diferencial de Área (v df), e integrando a través de toda el área.

$$- \iint (\rho \, C_v \, T) \, v \, df = (C - D) \quad (I.3.31)$$

(E - F) representan la velocidad neta de energía cinética, por lo tanto la energía cinética relacionada con el flujo volumétrico e integrando a través de toda el área de interfase es:

$$- \iint 1/2 (\rho \, v^2 / g_c) (v \, df) = (E - F) \quad (I.3.32)$$

El término G representa el trabajo en forma de energía que puede ser transferido dentro y fuera del sistema, originado si hay un fluido en movimiento. En éste caso la velocidad de trabajo transferido es la suma de tres efectos:

1.- FUERZA GRAVITACIONAL. Se sabe que la masa contenida en una diferencial de volumen es ($\rho \, dV$) y que la fuerza gravitacional por unidad de masa es (g / g_c), por lo tanto, la fuerza gravitacional actuando sobre una diferencial de volumen, multiplicada por la velocidad e integrando a través del elemento de volumen:

$$\iiint v (\rho \, g / g_c) \, dV = (G \text{ gravitacional}) \quad (I.3.33)$$

2.- FUERZA POR PRESION. Es la fuerza P ejercida por el fluido a una diferencial de área df , que al multiplicarla por la velocidad e integrando se obtiene la velocidad de fuerza neta por presión a través del área de interface.

$$- \iint v P df = (G \text{ por presión}) \quad (I.3.34)$$

3.- FUERZAS VISCOSAS. Este término se origina debido a la presencia de efectos viscosos actuando en una diferencial de área (τdf), debido a que existe un movimiento, debe ser multiplicado por la velocidad e integrando a través de toda el área, se obtiene la velocidad neta de trabajo por efectos viscosos:

$$- \iint (\tau v) df = (G \text{ fuerzas viscosas}) \quad (I.3.35)$$

H, representa la velocidad de energía generada en el elemento de volumen debido a reacción química ó nuclear, definida como R

$$\iiint R dV = H \quad (I.3.36)$$

El término I es la variación con respecto al tiempo de la energía interna y energía cinética contenida en una diferencial de volumen, al integrar a través de todo el elemento de volumen:

$$\iiint \left[\partial \left(\rho Cv T \right) + \left(\rho v^2 / 2 g_c \right) \right] / \partial t \, dV = I \quad (I.3.37)$$

sustituyendo las expresiones obtenidas en la ec. (I.3.29) y aplicando el teorema de Gauss ec. (I.3.6) a las integrales de área se tiene que:

$$\begin{aligned} & - \iiint (\nabla q) dV - \iiint (\nabla v \rho Cv T) dV - \iiint \nabla (\rho v^2 v / 2 g_c) dV \\ & + \iiint v (\rho g / g_c) dV - \iiint (\nabla v P) dV - \iiint (\nabla \tau v) dV + \end{aligned}$$

$$\iiint R \, dV = \iiint [\theta (\rho C_v T) + (\rho v^2 / 2 g_c)] / \theta t \, dV \quad (I.3.38)$$

ya que la ecuación debe ser válida para cualquier volumen, también observando que la igualdad se aplica para cada uno de los integrandos y sus derivadas, se puede hacer la siguiente simplificación:

$$\begin{aligned}
 -(\nabla q) - (\nabla v \rho C_v T) - \nabla (\rho v^2 / 2 g_c) + (\nabla v g) \rho / g_c \\
 - (\nabla v P) - (\nabla \tau v) + R = \theta (\rho C_v T) + (\rho v^2 / 2 g_c) / \theta t
 \end{aligned}$$

La ecuación anterior (I.3.39), es la ecuación general de la energía. Reordenando dicha ecuación con la ayuda de la ecuación de continuidad (I.3.15), aplicando el concepto de la derivada sustancial y suponiendo que no existe reacción química en el elemento de volumen, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \rho D(C_v T + 1/2 v^2) / Dt = -(\nabla q) + \rho (v g) \\
 - (\nabla v P) - (\nabla \tau v) \quad (I.3.40)
 \end{aligned}$$

Observese que se ha obtenido ahora dos formas de la ecuación de energía, análogamente a las ecuaciones de momentum. La ecuación (I.3.39) describe los intercambios de energía en un fluido desde el punto de vista de un observador estacionario, y la ecuación (I.3.40) describe dichos cambios tal como serían vistos por un observador que se moviese con el fluido. La relación (I.3.40) es una ecuación de variación tanto de energía cinética como de energía potencial, para éste caso en particular se requiere la ecuación de energía en forma de calor, por lo tanto restándole los términos de la energía cinética se tiene que:

$$\underbrace{\rho C_v DT / Dt}_A = \underbrace{- (\nabla q)}_B - \underbrace{P (\nabla v)}_C - \underbrace{\tau (\nabla v)}_D \quad (I.3.41)$$

ésta. ecuación (I.3.41) es la ecuación general de energía en forma de

calor en función de la temperatura del fluido, en donde los términos de dicha ecuación son (2): A, es la velocidad de ganancia de calor por unidad de volumen; B, velocidad de entrada de calor por unidad de volumen debido a la conducción; C, velocidad reversible de aumento de calor por unidad de volumen debido a la compresión; D, velocidad irreversible de aumento de calor por unidad de volumen debido a la disipación viscosa

Para la solución de problemas de flujo de fluidos, por lo general, se emplean simplificaciones de la ecuación general de energía en forma de calor. Las más utilizadas son cuando se omite el término de la disipación viscosa, y expresando q en función de los gradientes de temperatura.

$$\rho C_v \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T - p (\nabla \cdot v) \quad (I.3.42)$$

para un fluido a presión constante

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T \quad (I.3.43)$$

Esta última ecuación por lo general, se toma como punto de partida para la mayor parte de los tratamientos de transmisión de calor, su forma en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas, se pueden encontrar fácilmente en la bibliografía (2).

I.3.4 ECUACION DE TRANSFERENCIA DE MASA.

Aunque se puede argumentar que la ecuación de continuidad es una ecuación de transferencia de masa, no describe el comportamiento de un sistema que constituye más de un componente. Cuando un sistema contiene dos o más componentes cuyas concentraciones varían de un punto a otro, presentan una tendencia natural a transferir la masa haciendo mínimas las diferencias de concentración dentro del sistema. Esta transferencia de un componente de una región de alta concentración a una de baja

concentración se le llama difusión molecular. Para la obtención de la ecuación de transferencia de masa se aplicará la ley general de la conservación al elemento de volumen definido en la figura I-C en función de velocidades de masa:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{l} \text{vel. moles de A} \\ \text{que entran por} \\ \text{difusión molecular} \end{array} \right]_A - \left[\begin{array}{l} \text{vel. moles de A} \\ \text{que salen por} \\ \text{difusión molecular} \end{array} \right]_B + \left[\begin{array}{l} \text{vel. moles de A} \\ \text{que entran por} \\ \text{convección} \end{array} \right]_C \\ & - \left[\begin{array}{l} \text{vel. moles de A} \\ \text{que salen por} \\ \text{convección} \end{array} \right]_D + \left[\begin{array}{l} \text{velocidad de} \\ \text{moles de A} \\ \text{generados} \end{array} \right]_E = \left[\begin{array}{l} \text{velocidad de} \\ \text{moles de A} \\ \text{acumulados} \end{array} \right]_F \end{aligned}$$

(I.3.44)

Evaluando los términos de manera similar a las ecuaciones anteriores : (A - B) representa el flujo de moles de A (JA) que pasa por una diferencial de área df, que al integrar a través de toda el área se obtiene la velocidad neta de moles de A por difusión molecular debido a la presencia de un gradiente de concentración.

$$- \iint J_A \, df = (A - B) \quad (I.3.45)$$

(C - D) representa el término convectivo y es originado por el movimiento del fluido; por lo tanto, relacionando el flujo volumétrico definido anteriormente con la concentración de A e integrando a través de toda el área de interface, se obtiene la velocidad neta de moles de A por convección.

$$- \iint C_A \, v \, df = (C - D) \quad (I.3.46)$$

El término E representa la velocidad de moles de A generados debido a reacción química ó nuclear, definido como R_A.

$$\iiint RA \, dV = E \quad (I.3.47)$$

El término F es la variación de moles de A con respecto al tiempo en una diferencial de volumen, que al integrar a través del elemento de volumen:

$$\iiint (\partial C_A / \partial t) \, dV = F \quad (I.3.48)$$

sustituyendo las expresiones obtenidas en la ecuación (I.3.44); aplicando el teorema de Gauss a las integrales de área y como dicha ecuación debe ser válida para cualquier volumen se tiene que:

$$\partial C_A / \partial t = - (\nabla \cdot J_A) - (\nabla \cdot C_A) + R_A \quad (I.3.49)$$

Esta es la ecuación general de transferencia de masa que describe como varía la concentración del elemento A (variación de masa) en un fluido. Esta ecuación general (I.3.49) se puede simplificar (3), dando como resultado expresiones que en algunos casos son muy útiles e importantes, por ejemplo: reordenando la ec. (I.3.49) para obtener una derivada sustancial y aplicando la ecuación de continuidad se tiene que:

$$D C_A / D t = - (\nabla \cdot J_A) + R_A \quad (I.3.50)$$

ésta es la ecuación de transferencia de masa que describe la variación de la concentración con respecto al tiempo como resultado de los cambios del flujo molar y reacción química. Si no existe reacción química y los componentes obedecen la ley de Fick para difusión, la variación de concentración con respecto al tiempo puede escribirse como:

$$D C_A / D t = D_{AB} \nabla^2 C_A \quad (I.3.51)$$

CAPITULO II

MECANISMOS DE TRANSPORTE EN CAPA LIMITE

Los fluidos reales debido a su viscosidad, al fluir sobre superficies sólidas se adhieren a ellas de tal forma que su velocidad en la superficie del sólido es nula. Se denomina capa límite a la región de un flujo de fluido en las proximidades de una superficie sólida, en donde sus propiedades están afectadas por la presencia de dicho sólido; con el aumento de la distancia a partir de la superficie del sólido, las propiedades del fluido en la capa límite se aproximan en forma asintótica a las propiedades de la corriente libre del fluido [4].

Si bien, las ecuaciones de Navier-Stokes describen el movimiento de un fluido, las dificultades matemáticas para resolver éstas hacen prohibitivo el estudio teórico de los flujos viscosos. El Ing. alemán Ludwig Prandtl introdujo por primera vez, en 1904, el concepto de capa límite y demostró que numerosos fluidos viscosos se pueden estudiar dividiéndolos en dos regiones [16]: Aquella en que los esfuerzos cortantes son de primordial importancia y aquella más allá de la capa límite en la que el efecto de la viscosidad es despreciable.

En la capa límite existen elevadas diferencias de velocidad en dirección normal al flujo y en ella reside la mayor resistencia al transporte de momentum en el flujo de fluidos; si éste es de tal naturaleza, que durante el mismo se desarrollan los mecanismos de calor y materia, entre la superficie del sólido y el fluido, se presentarán también elevados gradientes de temperatura y concentración normales al flujo por oponer también la mayor resistencia al transporte. Por lo anterior, suelen distinguirse tres capas límites que se definen concretamente [4] como la región del fluido afectada por la presencia de la superficie sólida en su velocidad (capa límite de momentum); en su temperatura (capa límite térmica) y en su concentración (capa límite de concentración). Aunque las tres capas límites se superponen, sus espesores serán distintos dependiendo de las propiedades del fluido y de las características del flujo.

II-1 CAPA LIMITE EN PLACAS PLANAS.

Para visualizar mejor la capa límite en placas planas en flujo externo, considérese un fluido a régimen estacionario con velocidad, temperatura y composición uniformes u_{∞} , T_{∞} , $C_{A\infty}$, respectivamente, sobre una placa plana horizontal como se representa en la fig. II-A, la placa plana tiene una temperatura T mayor que la del fluido y contiene un componente volátil A que no se encuentra presente en la corriente del fluido; dentro de la capa límite, las propiedades del fluido tienen un valor de u_x , T_x , C_{Ax} y varían al alejarse de la placa, tendiendo asintóticamente a los valores de la corriente libre [4].

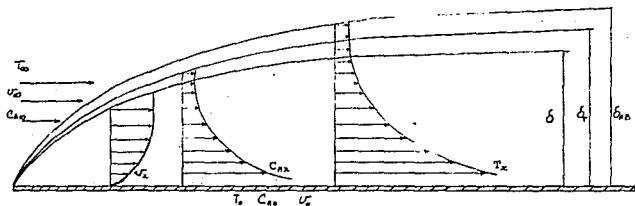


Fig. II-A. Capa límite de momentum (δ), térmica (δ_t) y de concentración (δ_c)

Cabe mencionar que la capa límite se forma a ambos lados de la placa; por razones didácticas en la fig. II-A solo se muestra la parte

superior, ya que en la parte inferior ocurre exactamente lo mismo. Es frecuente considerar el espesor de la capa límite en cada punto, como la distancia a la placa en donde la velocidad del fluido solo se diferencia en 1 % de la velocidad libre v_{∞} , ($v_{x\delta} = 0.99 v_{\infty}$) para el caso de momentum; en el caso de capa límite térmica, cuando la temperatura del fluido solo se diferencia en 1 % de la temperatura de la corriente libre T_{∞} , ($T_{x\delta} = 0.99 T_{\infty}$); para el caso de masa ($C_{A\delta} = 0.99 C_{A\infty}$).

II.1.1 ECUACIONES DE TRANSPORTE.

Partiendo de las ecuaciones de continuidad (I.3.15), momentum (I.3.27), energía (I.3.41) y de masa (I.3.49), obtenidas con anterioridad y tomando en cuenta las suposiciones hechas para capa límite [23]: Fuerzas externas despreciables; Propiedades del fluido constantes; El movimiento es bidimensional; Sistema a régimen permanente; Fluido newtoniano. De acuerdo a lo anterior, las ecuaciones de continuidad, momentum, calor y masa respectivamente se simplifican así:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.1.1})$$

$$v_x \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + v_y \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\left(\frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.1.2})$$

$$v_x \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + v_y \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.1.3})$$

$$v_x \left(\frac{\partial \rho_A}{\partial x} \right) + v_y \left(\frac{\partial \rho_A}{\partial y} \right) = D_{AB} \left(\frac{\partial^2 \rho_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho_A}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.1.4})$$

ECUACION DE TRANSFERENCIA DE MOMENTUM.

En el caso de capa límite de momentum, debido a que la solución de la ecuación de movimiento es muy compleja, Prandtl propuso un análisis que permite despreciar algunos términos, que aunque intervienen

en el fenómeno, debido a que tienen una participación ínfima los podemos eliminar, sin cometer un error apreciable, a éste análisis se le denomina órdenes de magnitud. Partiendo de las ecuaciones simplificadas de capa límite, ec. de continuidad (II.1.1) y ec. de momentum (II.1.2) en X y en Y respectivamente [21]:

$$u_x (\partial u_x / \partial x) + v_y (\partial u_x / \partial y) = -(1/\rho) \partial P / \partial x + \nu (\partial^2 u_x / \partial x^2 + \partial^2 u_x / \partial y^2) \quad (\text{II.1.2A})$$

$$u_x (\partial v_y / \partial x) + v_y (\partial v_y / \partial y) = -(1/\rho) \partial P / \partial y + \nu (\partial^2 v_y / \partial x^2 + \partial^2 v_y / \partial y^2) \quad (\text{II.1.2B})$$

El análisis de orden de magnitud consiste en asignar un valor de la unidad (1) a la máxima longitud de la placa (x) y a la velocidad del fluido involucrada en la capa límite (u_x); de la misma manera que se le asigna un valor muy pequeño (δ) al espesor de la capa límite y a la componente de la velocidad en dirección Y (v_y). De acuerdo a lo anterior y simbolizando (θ) como el orden de magnitud, se puede escribir que:

$$\begin{array}{llll} x = \theta (1) & \implies & \partial x = \theta (1) & (\text{II.1.5}) \\ u_x = \theta (1) & \implies & \partial u_x = \theta (1) & (\text{II.1.6}) \\ y = \theta (\delta) & \implies & \partial y = \theta (\delta) & (\text{II.1.7}) \\ v_y = \theta (\delta) & \implies & \partial v_y = \theta (\delta) & (\text{II.1.8}) \end{array}$$

Basandose en lo anterior, se pueden obtener los órdenes de magnitud de los diferentes términos de las ecuaciones de continuidad y momentum en X y Y:

$$\partial u_x / \partial x = \theta (1) / \theta (1) = \theta (1)$$

$$\partial u_x / \partial y = \theta (1) / \theta (\delta) = \theta (1/\delta)$$

$$\partial v_y / \partial y = \theta (\delta) ; \quad \partial v_y / \partial x = \theta (\delta)$$

de manera similar se pueden obtener los órdenes de magnitud para las

derivadas de segundo orden de las ecuaciones (II.1.2A) y (II.1.2B).

$$\partial^2 u_x / \partial x^2 = (\partial / \partial x) \partial u_x / \partial x = [1 / O(1)] O(1) / O(1) = O(1)$$

$$\partial^2 u_y / \partial x^2 = (\partial / \partial x) \partial u_y / \partial x = [1 / O(1)] O(\delta) / O(1) = O(\delta)$$

$$\partial^2 u_y / \partial y^2 = O(1/\delta) \quad ; \quad \partial^2 u_x / \partial y^2 = O(1/\delta^2)$$

indicando los órdenes de magnitud de los diferentes términos de las ecs. de momentum, en X como en Y, se tiene que:

$$u_x (\partial u_x / \partial x) + v_y (\partial u_x / \partial y) = -(1/\rho) \partial P / \partial x + \nu (\partial^2 u_x / \partial x^2 + \partial^2 u_x / \partial y^2)$$

(1) (1) (δ) (1/δ) (1) (1/δ²)

$$u_x (\partial v_y / \partial x) + v_y (\partial v_y / \partial y) = -(1/\rho) \partial P / \partial y + \nu (\partial^2 v_y / \partial x^2 + \partial^2 v_y / \partial y^2)$$

(1) (δ) (δ) (1) (δ) (1/δ)

Como en las dos ecuaciones se trata de una igualdad, el orden de magnitud del lado derecho de la ecuación debe ser el mismo que del lado izquierdo, por otra parte, el orden de magnitud tanto de la viscosidad cinemática como de la densidad en ambas ecuaciones debe ser el mismo, para que lo anterior se cumpla es necesario que: $\nu = O(\delta^2)$ y que $\rho = O(1)$; por lo tanto, $\partial P / \partial x = O(1)$ y $\partial P / \partial y = O(\delta)$.

Colocando los órdenes de magnitud obtenidos y como ya se había establecido que $1 \gg \delta$; por consiguiente, los términos que tienen órdenes de magnitud (δ) son muy pequeños y se pueden despreciar sin cometer un error significativo, de tal manera que las ecuaciones de continuidad (II.1.1), momentum en X (II.1.2A) y momentum en Y (II.1.2B) respectivamente quedan como:

$$\partial u_x / \partial x + \partial v_y / \partial y = 0 \quad (\text{II.1.1})$$

$$u_x (\partial v_x / \partial x) + v_y (\partial v_x / \partial y) = -(1/\rho) \partial P / \partial x + \nu (\partial^2 v_x / \partial y^2) \quad (\text{II.1.9})$$

$$\partial P / \partial y = 0 \quad (\text{II.1.10})$$

A este sistema de ecuaciones se le conoce como ecuaciones de Prandtl de capa límite. De la variación de la presión se tiene que la presión que se da en la placa está dada por:

$$P = P_x + P_y \quad (\text{II.1.11})$$

$$\text{como } (\partial P / \partial y) = 0 \quad \implies \quad P = P_x \approx P_\infty \quad (\text{II.1.12})$$

lo cual indica que la presión en la capa límite (P_x) es igual a la presión de acercamiento (P_∞), esto lleva a concluir que $\partial P / \partial x = 0$ y por lo tanto, la ecuación de momentum se reduce a:

$$u_x (\partial v_x / \partial x) + v_y (\partial v_x / \partial y) = \nu (\partial^2 v_x / \partial y^2) \quad (\text{II.1.13})$$

Blausius continuó el estudio de la capa límite de momentum partiendo de las ecuaciones de Prandtl, haciendo ciertas consideraciones e introduciendo los factores de función corriente y variable de similitud, desarrolló la solución de la ecuación de conservación de cantidad de movimiento, por lo cual se le llamó solución de Blasius.

Debido a la complejidad de resolver simultáneamente las ecuaciones de momentum con derivadas parciales, lo que hizo Blasius fue introducir una función corriente (Ψ) que es una función, la cual involucra las dos componentes de la velocidad (v_x, v_y) en una sola variable que es la función corriente [14, 21]. El caudal másico a través del espacio definido por dos líneas de corriente está dado por:

$$W = \int v \rho \cos \theta ds \quad (\text{II.1.14})$$

donde s es la distancia que une a las dos líneas de corriente fig. II-B;

θ es el ángulo entre el vector velocidad y la normal a ds . La función corriente está relacionada con el caudal másico por:

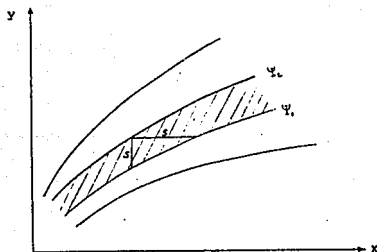


Fig. II-B. Líneas de corriente.

$$W = \rho d\dot{\Psi} = v \rho \cos \theta ds \quad (\text{II.1.15})$$

el valor de $\rho v d\dot{\Psi}$ es el mismo para cualquier camino que una las líneas de corriente, si se elige el camino orientado en la dirección Y , entonces $ds = dy$ y $v \cos \theta = v_x$, de manera que:

$$d\dot{\Psi} = v_x dy \quad \implies \quad v_x = d\dot{\Psi} / dy \quad (\text{II.1.16})$$

si se elige el camino orientado en la dirección X , $ds = -dx$ y $v \cos \theta = v_y$, dando como resultado:

$$d\dot{\Psi} = -v_y dx \quad \implies \quad v_y = -d\dot{\Psi} / dx \quad (\text{II.1.17})$$

Partiendo de las ecuaciones obtenidas con la función corriente,

(II.1.16 y II.1.17), para un fluido incompresible y sustituyendolas en la ecuación de momentum (II.1.13), resulta una ecuación diferencial parcial no lineal que debe resolverse para $\Psi(x, y)$.

$$(\partial\Psi/\partial y) \partial^2\Psi/\partial x\partial y - (\partial\Psi/\partial x) \partial^2\Psi/\partial x^2 = \nu (\partial^3\Psi/\partial y^3) \quad (\text{II.1.18})$$

La solución de ésta ecuación no puede obtenerse por un método matemático determinado, sino que normalmente depende de un tanteo que implica una intuición física y matemática considerable. En el presente caso el artificio que conduce a la solución surge del hecho que cuando el flujo es laminar, el espesor de la capa límite (δ) aumenta con $(x)^{1/2}$ al desplazarse en la dirección X (1), por lo tanto, la velocidad en un punto cualquiera sobre la lámina es una función exclusiva de (y/δ) , por lo anterior se puede decir que v_x es función de $y / (x)^{1/2}$, por lo que Blasius introdujo relaciones para simplificar la ecuación, en función de variables adimensionales. Partiendo de una velocidad adimensional (v^*).

$$(\rho v_{x_0} - \rho v_x) / (\rho v_{x_0} - \rho v_\infty) = v_x / v_\infty = v^* = \xi (y/\delta) \quad (\text{II.1.19})$$

Blasius estudió solamente la capa límite de momentum (sin embargo éste estudio se ha extendido a la capa límite de energía y de masa, como se verá mas adelante), representando por $\eta(x, y)$ la variable de similitud ó variable adimensional de posición que es una distancia adimensional a la superficie sobre la que se forma la capa límite y que se representa como [4]:

$$\eta = y \sqrt{v_\infty / \nu x} \quad (\text{II.1.20})$$

ya apoyándose en la una función corriente adimensional propuesta por Prandtl como:

$$\Psi = \sqrt{\nu x v_\infty} f(\eta) \quad (\text{II.1.21})$$

Con estas consideraciones, se procede a obtener los diferentes términos de la ecuación de momentum (II.1.9).

$$v_x = \partial v / \partial y = \partial \left[\sqrt{\nu x / v_\infty} f(\eta) \right] / \partial y = \sqrt{\nu x / v_\infty} \left(\partial f / \partial \eta \right) \partial \eta / \partial y$$

$$\partial \eta / \partial y = \partial \left(y \sqrt{v_\infty / \nu x} \right) / \partial y = \sqrt{v_\infty / \nu x} \quad (\text{II.1.22})$$

$$\partial \eta / \partial x = -1/2 y v_\infty / \left(\sqrt{v_\infty \nu x} \right) \nu x^2 = -\eta / 2x ; \quad \partial f / \partial \eta = f'$$

$$\therefore v_x = (1/2) v_\infty f' \quad (\text{II.1.23})$$

$$v_y = 1/2 \sqrt{v_\infty \nu / x} (\eta f' - f) \quad (\text{II.1.24})$$

$$\partial v_x / \partial x = \partial (v_\infty f') / \partial x = - (v_\infty \eta / 2x) f'' \quad (\text{II.1.25})$$

$$\partial v_x / \partial y = \partial (v_\infty f') / \partial y = v_\infty \sqrt{v_\infty / \nu x} f'' \quad (\text{II.1.26})$$

$$\partial^2 v_x / \partial y^2 = \partial (v_\infty \sqrt{v_\infty / \nu x} f'') / \partial y = (v_\infty^2 / \nu x) f''' \quad (\text{II.1.27})$$

sustituyendo las ecuaciones (II.1.23 a II.1.27) en la ecuación de momentum (II.1.18), haciendo simplificaciones y multiplicando la ecuación resultante por el factor (x/ν^2) se tiene que:

$$2 f'''' + f'' f = 0 \quad (\text{II.1.28})$$

Esta es la ecuación de momentum para capa límite y su aplicación ayuda a predecir como es el perfil de velocidades en la capa límite así como a resolver el problema del espesor de la misma, que se verá en el apartado II.1.2. Esta ecuación tiene las siguientes condiciones a la frontera.

$$y = 0 \quad v_x = v_y = 0$$

$$y = \infty \quad v_x = v_\infty \quad v_y = 0$$

Sin embargo, esta ecuación de momentum fue resuelta por Blasius mediante una serie de Taylor de la forma:

$$f = 0.16603 \eta^2 - 4.5943 \eta^5 \times 10^{-4} + 2.4972 \eta^8 \times 10^{-6} - \dots$$

de donde los resultados obtenidos se muestran en la siguiente tabla.

η	f	f'	f''
0.0	0.00000	0.00000	0.33208
1.0	0.16557	0.32979	0.32301
2.0	0.65003	0.62977	0.28975
3.0	1.39892	0.84605	0.16136
4.0	2.30576	0.95552	0.06424
4.4	2.69238	0.97587	0.03897
4.8	3.08534	0.98779	0.02187
5.0	3.28329	0.99155	0.01591
5.2	3.48189	0.99425	0.01134
5.4	3.68094	0.99616	0.00793
6.0	4.27964	0.99898	0.00240
7.0	5.27926	0.99992	0.00022
8.0	6.27923	1.00000	0.00001

Tabla II-A. Solución matemática de Blasius.

ECUACION DE TRANSFERENCIA DE ENERGIA.

Para obtener la ecuación de energía en capa límite se hará referencia a la fig. II-A, donde si un fluido circula sobre una superficie sólida a distinta temperatura, se puede hablar de una capa límite térmica, entendiéndose como tal, a la región del fluido afectada en su temperatura por la presencia de la superficie sólida. La región

del fluido con temperatura comprendida entre T_0 y $T_\infty(0.99)$, constituirá la capa límite térmica. De manera análoga al desarrollo anterior, se puede obtener la ecuación de energía (en forma de calor), partiendo de la ecuación de energía para capa límite (II.1.3), extendiendo el análisis de órdenes de magnitud y tomando una temperatura adimensional θ , para sustituirla en la ecuación de energía se tiene que:

$$(\rho C_p T - \rho C_p T_0) / (\rho C_p T - \rho C_p T_\infty) = T_0 / T_\infty = \theta \quad (II.1.29)$$

$$u_x (\partial\theta/\partial x) + v_y (\partial\theta/\partial y) = \alpha (\partial^2\theta/\partial y^2) \quad (II.1.30)$$

y tomando en cuenta los términos ya obtenidos en el desarrollo de la ecuación de momentum, de manera análoga se obtienen los términos restantes donde:

$$v/\alpha = Pr \quad (II.1.31)$$

$$\partial\theta/\partial\eta = \theta' \quad (II.1.32)$$

$$\partial^2\theta/\partial\eta^2 = \theta'' \quad (II.1.33)$$

sustituyendo los términos en la ecuación (II.1.30), realizando simplificaciones y multiplicándola por el factor (x/v_∞) :

$$-1/2 \eta f' \theta' + 1/2 (\eta f' - f) \theta'' = (1/Pr) \theta'''$$

$$\theta''' + 1/2 Pr f \theta' = 0 \quad (II.1.34)$$

Obteniéndose así la ecuación de energía (en forma de calor) para capa límite en placas planas con las siguientes condiciones a la frontera:

$$y = 0 \quad \eta = 0 \quad \theta = 0$$

$$y = \infty \quad \eta = \infty \quad \theta = 1$$

ECUACION DE TRANSFERENCIA DE MASA.

En el flujo de un fluido multicomponente sobre una superficie sólida, en donde la concentración de un cierto componente en el fluido es distinta de la correspondiente al seno del sólido, da origen a una capa límite de concentración como la definida en la fig. II-A. Partiendo de la ecuación de masa para capa límite (II.1.4), extendiendo el análisis de órdenes de magnitud y tomando una concentración adimensional Γ :

$$(C_{A0} - CA) / (C_{A0} - CA_{\infty}) = \Gamma \quad (\text{II.1.35})$$

$$v_x (\partial \Gamma / \partial x) + v_y (\partial \Gamma / \partial y) = D_{AB} (\partial^2 \Gamma / \partial y^2) \quad (\text{II.1.36})$$

De manera análoga a las ecuaciones de momentum y energía, tomando los términos ya definidos, obteniendo los restantes, sustituyéndolos en la ecuación (II.1.36) y simplificando se tiene que:

$$\Gamma''' + 1/2 Sc f \Gamma'' = 0 \quad (\text{II.1.37})$$

obteniéndose así la ecuación de transferencia de masa para capa límite en placas planas con condiciones a la frontera:

$$y = 0 \quad \eta = 0 \quad \Gamma = 0$$

$$y = \infty \quad \eta = \infty \quad \Gamma = 1$$

TRATAMIENTO GENERAL.

Analizando las tres ecuaciones de transferencia en capa límite para placas planas se observa que son similares, por lo tanto, comparándolas se puede hacer lo siguiente (4): Tomando un perfil ó distribución de propiedad adimensional π : (π_v, π_T, π_{AB}); y una

difusividad adimensional $\Lambda : (\Lambda_U, \Lambda_T, \Lambda_{AB})$ tales que:

$$\pi_U = U^* \quad ; \quad \Lambda_U = \nu/\nu = 1$$

$$\pi_T = \Theta \quad ; \quad \Lambda_T = \nu/\alpha = Pr$$

$$\pi_{AB} = \Gamma \quad ; \quad \Lambda_{AB} = \nu/D_{AB} = Sc$$

por lo tanto, sustituyendo en cada una de las ecuaciones de transporte (II.1.28), (II.1.34) y (II.1.37) las formas adimensionales correspondientes se tiene que:

$$\pi_U'' + \Lambda_U f \pi_U' = 0 \quad (II.1.38)$$

$$\pi_T'' + \Lambda_T f \pi_T' = 0 \quad (II.1.39)$$

$$\pi_{AB}'' + \Lambda_{AB} f \pi_{AB}' = 0 \quad (II.1.40)$$

lo cual demuestra que las tres ecuaciones de transporte siguen una misma forma matemática que es:

$$\pi'' + \Lambda f \pi' = 0 \quad (II.1.41)$$

lo que muestra que éstos tres mecanismos de transporte son análogos también en capa límite.

II.1.2 ESPESOR DE CAPA LIMITE.

CAPA LIMITE DE MOMENTUM

De acuerdo a lo definido con anterioridad y mostrado en la figura II-A, se puede añadir que el espesor de la capa límite es siempre muy pequeño con respecto a lo largo de la placa. Para el caso del

espesor de la capa límite de momentum, partiendo de la solución de Blasius y demás términos obtenidos:

$$v_x = v_\infty f' \quad \implies \quad f' = v_x / v_\infty = 0.99$$

Ubicando el valor de η en la solución matemática de Blasius para $f' = 0.99$, corresponde un valor de $\eta = 5$ y substituyéndolo en la variable de similitud ecuación (II.1.20)

$$\begin{aligned} 5 &= \delta \sqrt{v_\infty / \nu x} \quad \implies \quad \delta / x = 5 / \text{Re}^{1/2} \\ \delta &= 5x / \text{Re}^{1/2} \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad (II.1.42) \end{aligned}$$

CAPA LIMITE TERMICA.

Para obtener el espesor de la capa límite térmica [1], se toma en cuenta que la velocidad v_x en la capa límite, varía desde cero hasta v_∞ y que ésta variación se puede calcular aproximadamente mediante un desarrollo de serie de Taylor de la forma:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + [f'(a)/1!](x-a) + [f''(a)/2!][(x-a)^2] + \dots \\ v_x(y) &= 0 + (\partial v_x / \partial y) y \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad (II.1.43) \end{aligned}$$

de la ley de viscosidad de Newton ec. (I.1.B)

$$\tau = -\mu (\partial v_x / \partial y) \quad \implies \quad \partial v_x / \partial y = -\tau / \mu$$

$$\therefore v_x(y) = -(\tau / \mu) y$$

de la ecuación de continuidad se obtiene v_x , al sustituirla e integrar

$$\partial v_y = -(\partial v_x / \partial x) dy = (\tau / \mu) y / \partial x dy$$

$$v_y = y^2/2\mu \, d\tau/dx \quad (\text{II.1.44})$$

sustituyendo los términos obtenidos en la ecuación de energía para capa límite (II.1.3) y realizando un análisis de orden de magnitud análogo al de momentum

$$(-\tau/\mu \, y) \, \partial\theta/\partial x + (y^2/2\mu \, \partial\tau/\partial x) \, \partial\theta/\partial y = \alpha (\partial^2\theta/\partial y^2)$$

$$\tau/\mu \, \delta_T \, \Delta\theta/\Delta x + \delta_T^2/\mu \, \tau/x \, \Delta\theta/\delta_T = \alpha \, \Delta\theta/\delta_T^2$$

$$\delta_T \tau / \mu x = \alpha / \delta_T^2 \quad \implies \quad \delta_T = (\mu x^3 \alpha / \tau x^2)^{1/3} \quad (\text{II.1.45})$$

como ya se había definido el término τ/μ , de la definición de capa límite de momentum (tomando solamente órdenes de magnitud) y sustituyendo en la ecuación (II.1.45)

$$\tau/\mu = \partial v_x / \partial y \approx v_\omega / \delta \quad ; \quad \delta = x / \text{Re}^{1/2}$$

$$\delta_T = (\alpha/\nu \, v/v_\omega \, x \, \delta/x)^{1/3} x = (1/\text{Pr} \, 1/\text{Re} \, 1/\text{Re}^{1/2})^{1/3} x$$

$$\delta_T = x \, \text{Pr}^{-1/3} \, \text{Re}^{-1/2} \quad (\text{II.1.46})$$

CAPA LIMITE DE CONCENTRACION.

Para obtener el espesor de la capa límite de concentración se procede de manera análoga al espesor de la capa límite térmica, por lo tanto, siguiendo los mismos pasos y partiendo de la ecuación de masa para capa límite (II.1.4) se tiene que:

$$(-\tau/\mu \, y) \, \partial\Gamma/\partial x + (y^2/2\mu \, \partial\tau/\partial x) \, \partial\Gamma/\partial y = D_{AB} (\partial^2\Gamma/\partial y^2)$$

$$\tau/\mu \, \delta_{AB} \, \Delta\Gamma/\Delta x + \delta_{AB}^2/\mu \, \tau/x \, \Delta\Gamma/\delta_{AB} = D_{AB} \, \Delta\Gamma/\delta_{AB}^2$$

haciendo las mismas consideraciones que en capa límite térmica:

$$\begin{aligned} (\delta_{AB} \tau / \mu x) &= D_{AB} / \delta_{AB}^2 & \implies & \delta_{AB} = (D_{AB} / \nu) \nu / v_{\infty} x (\delta/x)^{1/3} x \\ \delta_{AB} &= x Sc^{-1/3} Re^{-1/2} & & (II.1.47) \end{aligned}$$

RELACIONES ENTRE ESPESORES DE CAPA LIMITE.

La comparación del espesor de la capa límite de momentum con los espesores de capa límite térmica y de concentración, conduce a las siguientes relaciones:

$$\delta / \delta_T = (x Re^{-1/2}) / (x Re^{-1/2} Pr^{-1/3}) = Pr^{1/3} \quad (II.1.48)$$

$$\delta / \delta_{AB} = (x Re^{-1/2}) / (x Re^{-1/2} Sc^{-1/3}) = Sc^{1/3} \quad (II.1.49)$$

De acuerdo a lo anterior, los números de Prandtl y Schmidt que implican las propiedades del fluido, expresan la importancia relativa de las capas límite en cada caso. Cuantitativamente [4], los espesores de las tres capas límite son parecidas ($\delta \approx \delta_T \approx \delta_{AB}$), si los números adimensionales indicados son próximos a la unidad ($Pr \approx 1$ y $Sc \approx 1$). El espesor de la capa límite de momentum es muy inferior al de los otros dos ($\delta \ll \delta_T, \delta_{AB}$), si dichos números son muy pequeños ($Pr, Sc \ll 1$). El espesor de la capa límite de momentum es superior a los espesores de capa límite térmica y de concentración ($\delta \gg \delta_T, \delta_{AB}$) si los números adimensionales de Prandtl y Schmidt son muy elevados ($Pr, Sc \gg 1$).

Los dos últimos casos indicados pueden considerarse también cuantitativamente. Si ($\delta \ll \delta_T, \delta_{AB}$), puede suponerse una velocidad $v_x = v_{\infty}$ constante en toda la capa límite térmica ó de concentración, dado el escasisimo espesor de la capa límite de momentum respecto al espesor de la capa límite térmica y de concentración. Cuando ($\delta \gg \delta_T, \delta_{AB}$), se puede suponer una variación lineal de v_x respecto a Y en toda la capa

límite térmica ó de concentración, dando como resultado un aumento del espesor de la capa límite de momentum con respecto a los otros dos.

II.1.3 PERFILES ADIMENSIONALES DE PROPIEDADES.

El perfil ó distribución de propiedades adimensional, dá una muestra de como se desarrolla la transferencia de propiedad en la capa límite. Estos perfiles se pueden obtener partiendo del modelo matemático general de las ecuaciones de transporte para capa límite en placas planas (II.1.41), rearreglando términos, integrando para cualquier η y tomando antilogaritmos (4)

$$\int d\pi' / \pi' = - \int f d\eta \quad \implies \quad \pi' = C_1 \text{Exp} \left(- \int_0^{\eta} f d\eta \right)$$

integrando nuevamente

$$\pi = C_1 \int_0^{\eta} \text{Exp} \left(- \int_0^{\eta} f d\eta \right) d\eta + C_2 \quad (\text{ II.1.50A })$$

Obteniéndose así la ecuación de perfiles ó distribución de propiedades adimensionales. Evaluando las constantes con las condiciones límite se tiene que:

$$y = 0 \quad \eta = 0 \quad \pi = 0 \quad \implies \quad C_2 = 0$$

$$y = \infty \quad \eta = \infty \quad \pi = 1$$

$$\therefore \quad C_1 = 1 / \int_0^{\infty} \text{Exp} \left(- \int_0^{\eta} f d\eta \right) d\eta \quad (\text{ II.1.51 })$$

sustituyendo las constantes obtenidas en la ecuación (II.1.50) se tiene:

$$\pi = \frac{\int_0^{\eta} \text{Exp} \left(- \int_0^{\eta} f d\eta \right) d\eta}{\int_0^{\infty} \text{Exp} \left(- \int_0^{\eta} f d\eta \right) d\eta} \quad (\text{ II.1.50B })$$

Esta es la ecuación general de perfiles adimensionales de las tres propiedades en las capas límite respectivas, mediante esta relación y con la ayuda de la solución numérica de Blasius (tabla II-A), se han calculado valores de π en función de η , para tres valores del flujo másico adimensional K (-5, 0 y 1) y tres de la relación de difusividades Λ (0.72, 1 y 2) por cada uno de ellos [2, 4], siendo K una densidad adimensional que se obtiene de la diferenciación de π'' con respecto a η para el caso de masa, que para la capa límite laminar es constante y que esta dada por la siguiente relación:

$$K = \left(\frac{1}{\Lambda} \right) \left[(\chi_{AO} - \chi_{AO'}) / (1 - \chi_{AO}) \right] \pi'_{AB} (0) \quad (II.1.52)$$

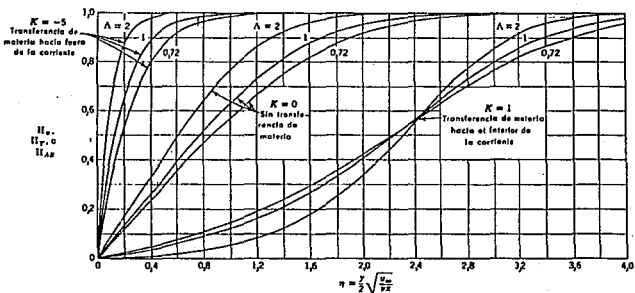


Fig. II-C. Perfiles adimensionales de momento, energía y masa en las respectivas capas límite sobre una superficie plana.

En la figura II-C se muestran los resultados obtenidos, el grupo central ($K = 0$) corresponde a un sistema en el cual no existe transferencia de propiedad entre la corriente libre y la superficie de la placa plana, el grupo de la izquierda ($K = -5$) corresponde a un sistema en donde la transferencia se realiza del fluido hacia la superficie de la placa y el grupo de la derecha ($K = 1$) corresponde cuando ocurre transferencia de la superficie de la placa hacia el fluido (2, 4).

En un intento por correlacionar cada una de las curvas en una línea recta, para fluidos con un intervalo de ($Pr > 0.8$ y $Sc > 0.8$), éstos resultados obtenidos fueron utilizados por Pohlhausen (1) para correlacionar en una sola línea las diferentes curvas de la figura II-C,

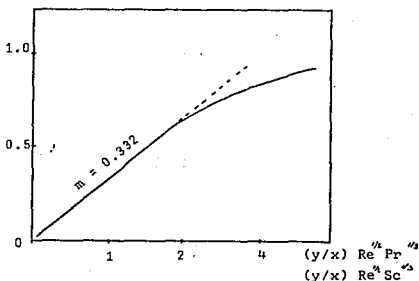


Fig. II-D. Correlación de Pohlhausen

al relacionar la variable π_T con el término $(y/x) Re^{1/2} Pr^{1/3}$, haciendo lo mismo para el caso de masa, pero relacionando π_{AB} con el término $(y/x) Re^{1/2} Sc^{1/3}$ tal como se muestra en la figura II-D. Este procedimiento se basa en la ecuación obtenida por Pohlhausen para la relación entre el espesor de la capa límite de momentum con el espesor de la capa límite térmica ec. (II.1.48) y con el espesor de la capa límite de concentración ec. (II.1.49).

II.1.4 COEFICIENTES DE TRANSPORTE.

Para la obtención de los coeficientes de transporte para capa límite en placas planas, se partirá de las ecuaciones constitutivas en cada uno de los casos.

COEFICIENTE DE MOMENTUM.

Se han realizado numerosos estudios acerca de las pérdidas por fricción que ocurre durante el movimiento de un fluido y la superficie que tiene contacto con él. Existen indicaciones que son proporcionales a la energía cinética del fluido por unidad de volumen y el Área (A_v) de la interface del sólido en contacto con el fluido [28].

$$F = 1/2 (\rho v^2 f / g_c) A_v \quad (II.1.53)$$

donde F es la fuerza de resistencia que es opuesta a la dirección del flujo y proviene de un balance de energía de un fluido en movimiento (ec. de Bernoulli). Rearreglando la ecuación de la fuerza de resistencia por fricción (II.1.53), donde (F/A_v) corresponde al esfuerzo cortante y despejando f

$$\tau = (\rho v^2 f) / 2g_c \quad \implies \quad f = (2 \tau g_c / \rho v^2) \quad (II.1.54)$$

donde el factor de fricción f es el factor de proporcionalidad que relaciona la pérdida de energía cinética debido al esfuerzo de corte; también se puede decir que es la manifestación de los efectos viscosos en el fluido sobre una superficie y que da como resultado pérdidas de energía ó presión, debido al rozamiento. El factor de fricción se presenta como una función del número de Reynolds $f = p(\text{Re})$.

Partiendo de la ecuación de esfuerzo cortante (I.1.6) y sustituyendo los términos obtenidos con anterioridad ec. (II.1.28) se tiene:

$$\tau_{xy} = \mu v_{\infty} \sqrt{\frac{u_{\infty}}{\nu} \frac{dx}{x}} f'' \quad (\text{II.1.55})$$

En la superficie de la placa [$f''(0)$], de la tabla II-A, de la solución matemática de Blasius se obtiene que para $f''(0) = 0.33208$, sustituyendo éste valor en la ecuación (II.1.55) y ésta a su vez en la ecuación (II.1.54), se obtiene el coeficiente de transporte local para momentum, que es el factor de fricción de Fanning.

$$f_f = 0.66412 \text{Re}^{-1/2} \quad (\text{II.1.56})$$

para obtener el coeficiente promedio se integra la ecuación (II.1.56)

$$f_f = 0.66412 \left[\int_0^L \left(\mu / v_{\infty} \rho x \right)^{-1/2} dx \right] / \int_0^L dx$$

$$f_f = 1.3282 \text{Re}^{-1/2} \quad (\text{II.1.57})$$

COEFICIENTE DE ENERGIA.

El flujo de calor en función de un coeficiente de transferencia de calor por convección, está dado por:

$$dQ = h (T_{\infty} - T_s) dA \quad (\text{II.1.58A})$$

el cual se da entre la capa límite y la corriente libre. Otra forma de ver el flujo de calor es por medio de la ecuación de calor por conducción, el cual se da entre la capa límite y la placa plana, que es la ecuación de Fourier (I.1.9), multiplicada por el área de transferencia.

$$dq = k (dT / dy) dA \quad (II.1.59)$$

al relacionar las dos ecuaciones anteriores de flujo de calor, aplicables al problema de placas planas se tiene que:

$$h = k d [(T - T_s) / (T_\infty - T_s)] / dy \quad (II.1.60)$$

La cantidad $d [(T - T_s) / (T_\infty - T_s)] / dy$ puede obtenerse para fluidos con $Pr > 0.6$, basándose en la ecuación de la línea recta y proyectándola en la gráfica de la fig. II-D, propuesta por Pohlhausen:

$$d [(T - T_s) / (T_\infty - T_s)] / dy = (0.332 / x) Re^{1/2} Pr^{1/3} \quad (II.1.61)$$

sustituyendo éste término en la ecuación (II.1.60) y reorganizándola:

$$h = (0.332 / x) k Re^{1/2} Pr^{1/3} \quad (II.1.62)$$

$$Nu = (hx / k) = 0.332 Re^{1/2} Pr^{1/3} \quad (II.1.63)$$

obteniéndose así el coeficiente de transporte local de calor [1], para evaluar el coeficiente de transporte de calor promedio a través de toda la placa, se integra la ecuación (II.1.62) a lo largo de la placa plana

$$h_m (T_\infty - T_s) A = \int_0^L h_x (T_\infty - T_s) b dx$$

$$h_m = (b / A) \int_0^L 0.332 k Pr^{1/3} (v_\infty / \nu)^{1/2} (x^{1/2} / x) dx$$

$$h_m = (0.664 / L) k Re^{1/2} Pr^{1/3} \quad (II.1.64)$$

$$Nu_m = h_m L / k = 0.664 Re^{1/2} Pr^{1/3} \quad (II.1.65)$$

COEFICIENTE DE MASA.

De manera análoga al coeficiente de calor, se obtiene el coeficiente de transferencia de masa, partiendo de la ecuación de difusión de masa de Fick (I.1.11) y de la transferencia de masa por convección; al realizar el mismo procedimiento matemático que en el caso anterior, para la transferencia de masa se tiene que:

$$J_A = D_{AB} (\partial C_A / \partial y) dA = k_c (C_A - C_{Ab}) dA$$

$$k_c = D_{AB} d [(C_A - C_{Ab}) / (C_A - C_{A\infty})] / dy \quad (II.1.66)$$

de la gráfica propuesta por Pohlhausen fig. II-D, para correlacionar las curvas de los perfiles de concentración para fluidos con $Sc > 0.6$, se obtiene el término $d [(C_A - C_{Ab}) / (C_A - C_{A\infty})] / dy$, y sustituyéndolo en la ec. (II.1.66)

$$k_c = D_{AB} (0.332 / x) Re^{1/2} Sc^{1/3} \quad (II.1.67)$$

$$Sh = (k_c x / D_{AB}) = 0.332 Re^{1/2} Sc^{1/3} \quad (II.1.68)$$

Obteniéndose así el coeficiente local de transferencia de masa para capa límite en placas planas. Para determinar el coeficiente promedio en toda la placa plana, se integra la ecuación (II.1.67)

$$k_{cm} = \int_0^L k_c (C_A - C_{A\infty}) b dx = (0.332 D_{AB} / L) Sc^{1/3} (\nu / \omega)^{1/2} x^{-1/2} dx$$

$$k_{cm} = (0.664 D_{AB} / L) Re^{1/2} Sc^{1/3} \quad (II.1.69)$$

$$Sh = \left(k_{cm} L / D_{AB} \right) = 0.664 Re^{1/2} Sc^{1/3} \quad (II.1.70)$$

II.1.5 ANALOGÍAS ENTRE LOS MECANISMOS DE TRANSPORTE.

Reiteradamente se ha puesto de manifiesto la semejanza entre los fenómenos de transporte de momentum, de energía y de materia que se producen en el seno de los fluidos, desarrollándose un tratamiento común de los mismos. Existen numerosas analogías que relacionan a los mecanismos de transporte, cada una de ellas considerando condiciones ó características diferentes, debido a esto, solo se hará mención de algunas de ellas y se describirán únicamente las que contribuyan al desarrollo del presente trabajo.

ANALOGIA DE REYNOLDS.

Fué O. Reynolds uno de los primeros científicos que advirtió y estudió la analogía entre los mecanismos de calor y momentum, llegando a establecer una relación teórica entre ambos fenómenos, es decir, la analogía de Reynolds. El flujo que pasa alrededor de una superficie sólida y cuyo número de Prandtl es igual a la unidad, los gradientes adimensionales de velocidad y temperatura se relacionan de la siguiente forma [28]:

$$d \left(v_x / v_{\infty} \right) / dy \Big|_{y=0} = d \left[(T - T_s) / (T_{\infty} - T_s) \right] / dy \Big|_{y=0} \quad (II.1.71)$$

cuando $(Pr = \mu Cp / k = 1 \implies \mu Cp = k)$ y se puede reescribir la ecuación (II.1.71) como:

$$\mu Cp \, d \left(v_x / v_{\infty} \right) / dy \Big|_{y=0} = k \, d \left[(T - T_s) / (T_{\infty} - T_s) \right] / dy \Big|_{y=0} \quad (II.1.72)$$

la relación correspondiente al coeficiente de transferencia convectiva de calor está dada por la ecuación (II.1.60), Al sustituirla en el lado

derecho de la ecuación (II.1.72) se tiene que:

$$\left(\mu C_p / v_{\infty} \right) \left. \frac{dv_x}{dy} \right|_{y=0} = h \quad (\text{II.1.73})$$

introduciendo el coeficiente de fricción superficial por definición [28, 1], ecuación (II.1.74) y sustituyéndola en la ecuación (II.1.73):

$$f_f \equiv \tau / \left(\rho v_{\infty}^2 / 2 \right) = \left(2 \mu / \rho v_{\infty}^2 \right) \left. \frac{dv_x}{dy} \right|_{y=0} \quad (\text{II.1.74})$$

$$h = \left(f_f / 2 \right) \rho v_{\infty} C_p$$

$$h / \left(\rho v_{\infty} C_p \right) = f_f / 2 \quad (\text{II.1.75})$$

La ecuación (II.1.75) representa la analogía de Reynolds entre el mecanismo de transferencia de calor y momentum. Las restricciones acerca de ésta analogía son que el número de Prandtl debe ser igual a la unidad.

ANALOGIA DE SHERWOOD-KARMAN.

Aplicando la hipótesis de Reynolds a los transportes de materia y momentum, de manera análoga a como se obtuvo la ecuación (II.1.75), Sherwood-Karman, llegaron a [4]:

$$Sh = St_{AB} = k_c / v_{\infty} = f / 2 \quad (\text{II.1.76})$$

expresión conocida como la analogía de Sherwood y Karman entre los transportes de momentum y materia, en donde Sh es el número de Sherwood que es el número de Stanton para masa.

ANALOGIA DE PRANDTL-TAYLOR.

Prandtl y Taylor prosiguieron el desarrollo de Reynolds, con la

variante de que el número de Prandtl no necesariamente fuera la unidad.

$$St = h / (\rho C_p v_{\infty}) = (f / 2) / (1 + S [(f / 2)]^{1/2} (Pr - 1)) \quad (II.1.77)$$

Expresión de la analogía de Prandtl-Taylor entre los transportes de momentum y energía, que para $Pr = 1$, se simplifica a la analogía de Reynolds.

Martinelli [4], desarrolló la analogía de Reynolds pensando esencialmente en los metales líquidos, obteniendo así expresiones que relacionan los mecanismos de momentum y calor, llegando así a la analogía de MARTINELLI. Seban y Shimazaki continuaron el estudio de Martinelli y llegaron a las relaciones que se conocen como analogía de SEBAN-SHIMAZAKI [4]. Kays y Leung culminaron un programa emprendido por Reynolds, Lundberg y McCuen sobre transmisión de calor en flujos de fluidos por conducciones anulares entre tubos cilíndricos, obteniendo así la analogía de KAYS-LEUNG [4].

ANALOGIA DE CHILTON-COLBURN.

A. P. Colburn continuó el estudio realizado por Reynolds acerca de la analogía existente entre los mecanismos de transferencia de calor, momentum y masa, con el fin de aumentar el rango de aplicación de dicha analogía; obteniendo así otras relaciones para la analogía de dichos mecanismos, por lo cual, a éstas relaciones matemáticas se les conoce como analogía de Colburn ó Chilton-Colburn. Por lo tanto, partiendo de las siguientes ecuaciones experimentales para calor, masa y momentum respectivamente:

$$Nu = h D / k = 0.023 (Re)^{0.8} (Pr)^{0.33} \quad (II.1.78)$$

$$k_c D / D_{AB} = 0.023 (Re)^{0.8} (Sc)^{0.33} \quad (II.1.79)$$

$$f_D = 0.184 (Re)^{-0.2} \quad (II.1.80)$$

Para obtener la relación de calor y momentum se parte de la ec. (II.1.78). Dividiendo la ecuación entre el factor $(Re Pr)$:

$$Nu / (Re Pr) = St = h / (C_p \rho v) = 0.023 (Re)^{-0.2} (Pr)^{-0.66}$$

$$[h / (C_p \rho v)] (Pr)^{0.66} = 0.023 (Re)^{-0.2} = Jq \quad (II.1.81)$$

obteniéndose así el factor de Colburn para calor (Jq) ; para relacionar este factor de calor con el momentum, la ecuación (II.1.80) se divide entre ocho y haciendo igualdades

$$f_D / 8 = 0.023 (Re)^{-0.2} \quad (II.1.82)$$

$$Jq = [h / (C_p \rho v)] (Pr)^{0.66} = 0.023 (Re)^{-0.2} = f_D / 8 \quad (II.1.83)$$

siendo esta relación (II.1.83) la analogía de Colburn (Jq) para calor-momentum. Para la transferencia de masa se parte de la ecuación (II.1.79), dividiéndola entre el factor $(Re Sc)$ y arreglando términos

$$Jm = k_c (Sc)^{0.66} / v = 0.023 (Re)^{-0.2}$$

tomando en cuenta la ecuación. (II.1.82) y haciendo igualdades

$$Jm = k_c (Sc)^{0.66} / v = f_D / 8 \quad (II.1.84)$$

siendo esta la relación de Colburn para masa-momentum (Jm) . Realizando igualdades en función de la ecuación (II.1.82) con las ecuaciones (II.1.81) y (II.1.84) se tiene que:

$$f_D / 8 = Jq = Jm \quad (II.1.85)$$

obteniéndose así la analogía de Colburn, ecuación (II.1.85), donde muestra que los mecanismos de transferencia de calor, masa y momentum son iguales. Esta analogía de Colburn para transferencia de calor es aplicable en un rango de [1, 28]:

$$10,000 < Re < 300,000 \quad \text{y} \quad 0.6 < Pr < 100$$

y para la transferencia de masa el rango de aplicación es:

$$2,000 < Re < 300,000 \quad \text{y} \quad 0.6 < Sc < 2,500$$

La analogía de Colburn para calor también se puede deducir en base al factor de fricción de Fanning, partiendo de la ecuación (II.1.68) dividiéndola entre $(Re Sc^{1/3})$, relacionándola con el factor de fricción de Fanning (II.1.57) y rearrreglando términos

$$[Sh / (Re Sc)] Sc^{2/3} = f_f / 2$$

$$Sh / (Re Sc^{1/3}) = [Sh / (Re Sc)] Sc^{2/3} = f_f / 2$$

sustituyendo los números adimensionales se obtiene:

$$(K_c Sc^{2/3}) / v_w = f_f / 2 \quad (II.1.86)$$

que es la misma relación de Colburn para masa (J_m), pero en este caso se emplea el factor de Fanning en lugar del factor de Darcy.

II.2 . CAPA LIMITE EN CILINDROS.

Para el caso de cilindros, análogamente al de placas planas, se parte de las ecuaciones de transporte, ecuación de continuidad (I.3.15), momentum (I.3.27), energía (I.3.41) y masa (I.3.49), para obtener las

correspondientes ecuaciones de transporte en capa límite, aunque en el caso de cilindros, debido a la complejidad de la solución de dichas ecuaciones, se ha tenido la necesidad de basarse en consideraciones experimentales y expresiones empíricas.

Para observar como se comporta la capa límite en cilindros considere un cilindro de sección circular fijo, sobre el cual circula un fluido perpendicular a su eje, figura II-E, bajo éstas condiciones se distinguen sucesivamente cuatro regiones al aumentar el número de

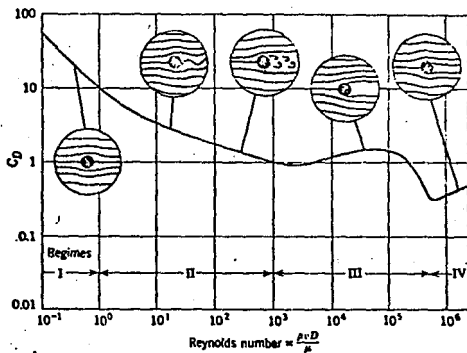


Fig. II-H. Regiones de flujo en la curva de forma frente al número de Reynolds para cilindros.

Reynolds del fluido y que se describen a continuación [4, 28]:

Región I. En ésta región la capa límite que se forma sobre la superficie cilíndrica es enteramente laminar, predominando las fuerzas viscosas. El flujo es prácticamente simétrico alrededor del cilindro y la estela que se forma en la parte posterior no oscila, es estacionaria, disipándose en ella escasa energía.

Región II. La capa límite superficial sigue siendo completamente laminar, llegando a separarse de la superficie sólida; en la parte posterior del cilindro se inicia la formación de pequeños remolinos que crecen al aumentar el número de Reynolds y llegan a separarse de la superficie, formando una estela no estacionaria.

Región III. En esta región el punto de separación del fluido se estabiliza a una distancia de unos 80° del punto de estancamiento. La estela ya no se caracteriza por grandes remolinos aunque sigue siendo variable. El flujo sobre la superficie cilíndrica, del punto de estancamiento (punto donde choca inicialmente el fluido con el cilindro) al punto de separación, es laminar.

Región IV. La capa límite superficial pasa de laminar a turbulenta en las proximidades del punto de estancamiento hasta que se separa de la superficie cilíndrica (cerca de un ángulo de 90° del punto de estancamiento [8, 61]) por lo que puede considerarse turbulenta en su totalidad.

II.2.1 ECUACIONES DE TRANSPORTE.

Debido a la complejidad de los modelos matemáticos de Prandtl, Blasius y Karman para obtener las soluciones de las ecuaciones de transporte de momentum (I.3.27), energía (I.3.41) y masa (I.3.49) para capa límite en cilindros, impide la obtención de ecuaciones explícitas de transporte y los subsiguientes coeficientes de transferencia, por lo que en algunos casos, las ecuaciones de transporte para cilindros se apoyarán en términos empíricos ó experimentales.

ECUACION DE MOMENTUM.

Considerando un flujo con formación de capa límite sobre una superficie cilíndrica y partiendo de las ecuaciones de transporte para capa límite: continuidad (II.1.1), momentum (II.1.2), energía (II.1.3) y masa (II.1.4). Falkner y Skan suponen funciones que relacionan a las variables v_∞ , $(T_0 - T_\infty)$, $(\rho_{A0} - \rho_{A\infty})$, con la distancia sobre la superficie cilíndrica, son las siguientes:

$$v_\infty = CX_1^m \quad (\text{II.2.1})$$

$$(T_0 - T_\infty) = DX_1^n \quad (\text{II.2.2})$$

$$(\rho_{A0} - \rho_{A\infty}) = EX_1^p \quad (\text{II.2.3})$$

donde C, D, E, m, n y p son constantes; transformando así a las ecuaciones diferenciales parciales no lineales de tercer orden en ecuaciones diferenciales ordinarias más sencillas de resolver. Falkner y Skan al igual que Blasius introducen una función corriente ordinaria $\Psi(x, y)$ y una adimensional $f(\eta)$, teniendo en cuenta la función potencial de v_∞ (II.2.1).

$$\eta(x, y) = (y/2) \sqrt{v_\infty / \nu x} = (y/2) \sqrt{CX_1^{m-1} / \nu} \quad (\text{II.2.4})$$

$$v_x = \partial \Psi(x, y) / \partial y \quad ; \quad v_y = - \partial \Psi(x, y) / \partial x$$

$$f(\eta) = \Psi(x, y) / \sqrt{v_\infty \nu x} = \Psi(x, y) / \nu CX_1^{m+1}$$

de las anteriores expresiones, representando la función $f(\eta)$ como f y sus derivadas como f' , f'' y f''' con respecto a la variable adimensional η , los distintos términos de la ecuación de momentum (II.1.13), para el caso de cilindros son:

$$v_x = \partial \psi / \partial y = (1/2) v_\infty f' = (1/2) C X_1^m f' \quad (\text{II.2.5})$$

$$v_y = -\partial \psi / \partial x = -\sqrt{\nu C X_1^{(m-1)/2}} \left[(m+1)/2 f + (m-1)/2 (y/2) \sqrt{C/\nu} X_1^{(m-1)/2} f' \right] \quad (\text{II.2.6})$$

$$\partial v_x / \partial x = (1/2) C X_1^{m-1} \left[m f + (m-1)/2 (y/2) \sqrt{C/\nu} X_1^{(m-1)/2} f'' \right] \quad (\text{II.2.7})$$

$$\partial v_x / \partial y = (1/4) \sqrt{C/\nu} C X_1^{(3m-1)/2} f'' \quad (\text{II.2.8})$$

$$\partial^2 v_x / \partial y^2 = (1/8) C^2 / \nu X_1^{2m-1} f''' \quad (\text{II.2.9})$$

$$\partial v_\infty / \partial x = C m X_1^{m-1} \quad (\text{II.2.10})$$

reemplazando los términos obtenidos en la ecuación de momentum (II.1.13) y realizando simplificaciones se llega a:

$$f''' + (m+1) f f'' + 2m(4-f^2) = 0 \quad (\text{II.2.11})$$

obteniéndose así la ecuación de momentum de capa límite en cilindros, y que fue resuelta numéricamente por Hartree [4], para cilindros.

η	$f'(\eta)$	η	$f'(\eta)$
0.0	0.0000	1.8	1.9138
0.2	0.4532	2.0	1.9464
0.5	0.9092	2.4	1.9810
1.0	1.5556	3.0	1.9970
1.4	1.7936	4.0	2.0000

TABLA II-B. Solución numérica de Hartree para la ecuación de momentum de capa límite en cilindros.

ECUACIONES DE ENERGIA Y MASA (TRATAMIENTO GENERALIZADO).

El método para resolver la ecuación de momentum para cilindros, fue propuesto inicialmente por Falkner y Skan [4], aplicado posteriormente por Levy a las capas límite térmica y de concentración. Realizando un análisis análogo al presentado en la sección II.1.1 de tratamiento general, se pueden obtener las ecuaciones para calor y masa, partiendo de las correspondientes ecuaciones de calor (II.2.3) y masa (II.2.4), obteniendo los diferentes términos análogamente que en placas planas en cada ecuación y sustituyéndolos posteriormente, haciendo simplificaciones se llega a:

$$\pi_T'' + \Lambda_T (m+1) f \pi_T' + \Lambda_T 4\eta (1 - \pi_T) \pi_U = 0 \quad (\text{II.2.12})$$

$$\pi_{AB}'' + \Lambda_{AB} (m+1) f \pi_{AB}' + \Lambda_{AB} p (1 - \pi_{AB}) \pi_U = 0 \quad (\text{II.2.13})$$

obteniéndose así las ecuaciones de capa límite de energía y de masa para cilindros [4].

II.2.2 ESPESOR DE CAPA LIMITE.

CAPA LIMITE DE MOMENTUM.

Partiendo de la ecuación (II.1.23) y tomando en cuenta la definición de la velocidad de capa límite

$$v_x = (1/2) v_\infty f' \quad \implies \quad f' = 2 v_x / v_\infty$$

$$v_{0x} / v_\infty = 0.99 \quad \implies \quad f' = 2 (0.99) = 1.98$$

Se busca el valor de η que corresponda al valor de $f' = 1.98$ en la tabla II-B y basándose en la ecuación (II.2.4)

$$\eta = (\delta / 2) \sqrt{ Cx_1^{m-1} / \nu } \quad \implies \quad \delta = 2\eta \sqrt{ \nu / Cx_1^{m-1} } \quad (\text{II.2.14})$$

para el caso de cilindros circulares $m = 1$ y obteniendo el valor de η de dicha tabla ($\eta = 2.38$)

$$\delta = 4.76 \sqrt{ \nu / C } \quad (\text{II.2.15})$$

II.2.3 PERFILES DE PROPIEDADES ADIMENSIONALES.

Paralelamente a como se resolvió el modelo matemático de placas planas, en cilindros partiendo del modelo matemático general de las ecuaciones de transporte para capa límite en cilindros (II.2.11, 12 y 13) y siguiendo el mismo procedimiento que en el apartado II.1.3, para superficies cilíndricas se tiene que:

$$\pi (\eta, \Lambda, m) = \int_0^\eta \text{Exp} [- (m + 1) \Lambda \int_0^\eta f d\eta] d\eta / \int_0^\infty \text{Exp} [- (m + 1) \Lambda \int_0^\eta f d\eta] d\eta \quad (\text{II.2.16})$$

Para el caso de momentum en cilindros, en la fig. F se muestra el perfil de velocidades [23], en donde se puede observar el angulo de separación alrededor de la superficie cilíndrica. Los Perfiles de distribución de temperatura y masa están íntimamente relacionados con el de momentum, ya que solamente hay transferencia en la capa límite mientras ésta exista, ya que al ocurrir separación desaparece dicha capa límite y por consiguiente la teoría de capa límite también.

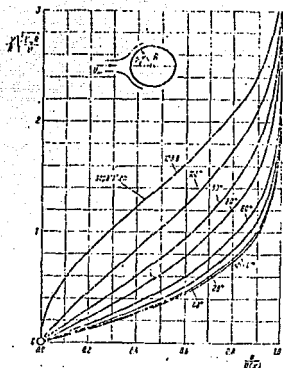


Fig. II-F. Perfil de distribución de velocidades en la capa límite de un cilindro.

II.2.4 COEFICIENTES DE TRANSPORTE.

Debido a que la integración de las ecuaciones de transporte para cilindros en algunos casos no son viables y en otros son muy complejas y extensas, la solución que se le ha dado a la obtención de los coeficientes de transporte es el de recurrir al establecimiento de ecuaciones experimentales. En la obtención de dichos coeficientes en capa límite sobre superficies cilíndricas es importante tomar en cuenta el fenómeno de separación, el cual limita la formación de la capa límite

y por consiguiente la aplicación de dicha teoría.

Cuando se tiene un fluido sobre una superficie curva se presenta el fenómeno descrito por la región III de la Fig. II-E, que se denomina separación, y es cuando un fluido se separa de la superficie sólida, originando así la ruptura de la capa límite y la formación de una estela donde se originan las remolinos Fig. II-G. Considerando un

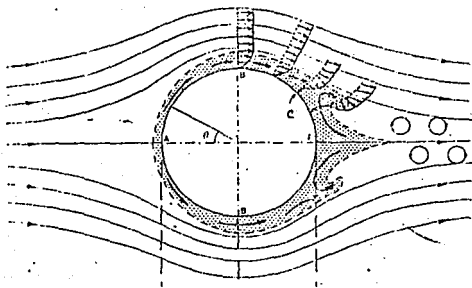


Fig. II-J. Flujo alrededor de un cilindro horizontal.

fluido alrededor de un cilindro (16), en las inmediaciones de éste se forma la capa límite pero al desviarse el fluido alrededor de la superficie, éste se acelera hasta alcanzar su velocidad máxima (punto B) en este punto la presión es mínima (aunque el gradiente de presión tiene el mismo valor a través de la sección transversal del cilindro en

la capa límite, su efecto más significativo se realiza sobre el fluido más cercano a la superficie), lo que origina un gradiente de presión negativo y la fuerza neta de presión que se ejerce sobre un elemento en capa límite, tiene dirección hacia adelante, sin embargo más allá del punto B aumenta la presión y por lo tanto, la fuerza neta de presión se opone al flujo hacia adelante, a tal grado que el fluido es llevado al reposo (punto C).

A partir del punto C, el fluido cercano a la superficie es invertido y ya incapaz de seguir en contacto con la superficie cilíndrica se separa de éste, originando así una estela; en resumen, la separación es causada por la reducción de la velocidad en la capa límite combinada con un gradiente de presión positivo. Debido a este fenómeno, es claro que en la zona de separación no se puede hablar de capa límite y sus efectos solo tiene aplicación hasta el punto de separación.

COEFICIENTE DE MOMENTUM.

La obtención del coeficiente de momentum en este caso, está afectado por el fenómeno de separación antes descrito, debido a esto se tiene la necesidad de un coeficiente que involucre tanto a la zona de capa límite como a la de separación, por lo tanto, partiendo de la expresión de fuerza de forma [28]:

$$F_F = (1/2) C_D \rho v_\infty^2 A \quad (II.2.17)$$

donde F_F es la fuerza de forma; A es el área de contacto entre el cuerpo y el fluido; ρ la densidad del fluido; v_∞ es la velocidad de la corriente libre y C_D es el coeficiente de forma total de momentum, (involucrando la zona de capa límite y de separación). Por experimentación se encontró que el coeficiente de forma es una función del número de Reynolds.

$$C_D = 12 \mu / (v v_x \rho) \equiv 24 / Re \quad (II.2.18)$$

En la fig. II-E se puede observar la variación del coeficiente de forma en función del número de Reynolds, debido a que el coeficiente de forma C_D involucra dos regiones, puede definirse también como:

$$C_D = f_f + C'_D \quad (II.2.19)$$

donde f_f es el coeficiente de sustentación ó factor de fricción y C'_D es el coeficiente por arrastre de estela, el cual es generalmente estimado del estudio de modelos físicos, no existiendo suficiente teoría para su cálculo. Para la obtención del factor de fricción f_f , se parte de la fuerza de forma por fricción que se relaciona con el esfuerzo cortante y que se define como [4]:

$$F_{F-f} = f_f (1/2) \rho v_\infty^2 A = \int \tau dA \quad (II.2.20)$$

aplicando un coeficiente adimensional (λ) [4], aplicado al esfuerzo cortante en la capa límite en cilindros

$$d\lambda / dA = (\tau_{yx}) \quad (II.2.21)$$

al sustituir la relación (II.2.21) a la integral de la ecuación (II.2.20) se obtiene el coeficiente de fricción local para cilindros

$$(\tau_{yx})_0 = f_f (\rho v_\infty^2 / 2)$$

$$\therefore f_f = 2 (\tau_{yx})_0 / \rho v_\infty^2 \quad (II.2.22)$$

Para la obtención del factor de fricción en superficies cilíndricas nos apoyaremos en la figura II-H para la obtención del esfuerzo cortante en función de la posición [23].

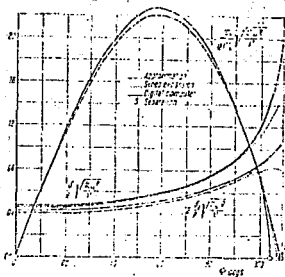


Fig. II-H. Variación del esfuerzo cortante (τ) con la posición alrededor de un cilindro.

COEFICIENTE DE ENERGIA.

El análisis de la transferencia de calor en flujo cruzado se complica cuando se involucra capa límite, pero más aun cuando en dicha capa límite se encuentra el fenómeno de separación, debido a esto se ha tenido que recurrir a expresiones experimentales para obtener el coeficiente de transferencia de calor. Eckert y Soehngen [8] calcularon números locales de Nusselt en diversas posiciones sobre una superficie cilíndrica, alrededor de la cual fluye una corriente de aire. En la figura II-I se muestran sus experimentaciones, con expresiones similares Giedz [28, 17, 25] investigó números de Reynolds mayores figura II-J.

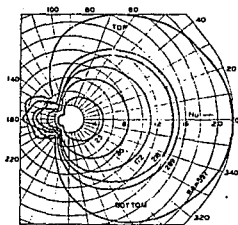


Fig. II-I. Distribución del número de Nusselt local alrededor de cilindros circulares.

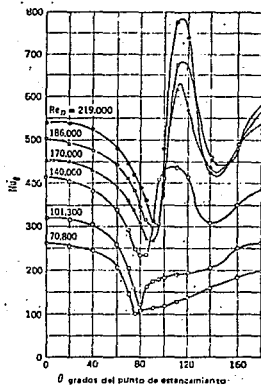


Fig. II-J. Distribución del número de Nusselt local alrededor de cilindros a números de Reynolds elevados.

Como se puede observar en las figuras anteriores, el número de Nusselt disminuye casi continuamente desde el punto de estancamiento; la única excepción es un aumento de la región de separación; para números de Reynolds altos Figura II-J el coeficiente de transferencia de calor alcanza un segundo máximo, esto se debe al hecho de que la capa límite sufre una transición de flujo laminar a turbulenta. Es evidente a juzgar por las figuras que el coeficiente de transferencia puntual de calor varía de una manera irregular y compleja en un flujo externo alrededor de un cilindro, McAdams [17] realizó una gráfica correspondiente a 13 investigaciones diferentes del flujo de aire en dirección perpendicular a un cilindro, logrando una excelente concordancia entre los números de Nusselt promedio y de Reynolds figura II-K.

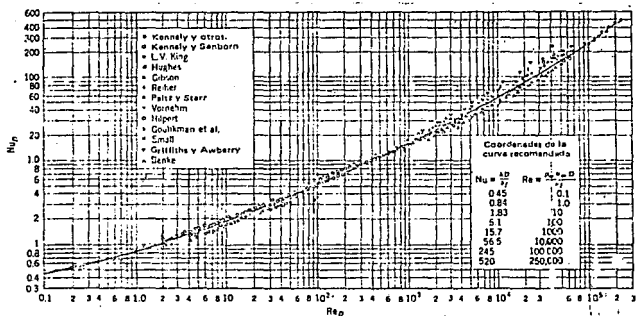


Fig. II-K. Gráfica de número de Nusselt promedio contra número de Reynolds en flujo cruzado para cilindros.

McAdams recomienda el uso de la siguiente ecuación empírica para la correlación de los datos obtenidos:

$$\overline{Nu} = \beta (Re)^n \quad (II.2.23)$$

donde las constantes β y n se obtienen de la tabla II-C para diferentes valores de Reynolds

Re	β	n
0.4 - 4	0.991	0.330
4.0 - 40	0.821	0.385
40.0 - 4,000	0.615	0.466
4,000 - 40,000	0.174	0.618
40,000 - 400,000	0.0239	0.805

TABLA. II-C. Valores de β y n a diferentes números de Reynolds

Otra manera de obtener el coeficiente de transferencia de calor es mediante la definición del calor por convección, ecuación (II.1.58A)

$$-Q = h A_c (T_c - T_\infty) \quad (II.1.58B)$$

y definiendo el calor por convección forzada en un sistema en donde es enfriado un cilindro por medio de una corriente de aire, por medio de un balance de energía se tiene:

$$-Q = m_c C_p [d(T - T_\infty) / dt] \quad (II.2.24)$$

al igualar las ecs. (II.1.58B) y (II.2.24), integrar y reorganizando términos:

$$h A \Delta T = - m_c C_p (dT / dt)$$

$$- \int_{T_{co}}^{T_c} dT / (T_c - T_{\infty}) = \int_{0}^t h A_c / (m_c C_p) dt$$

$$\ln (T_c - T_{\infty}) = - (h A_c / W_c C_p) t + \ln (T_{co} - T_{\infty}) \quad (II.2.25)$$

donde T_c es la temperatura del cilindro; T_{co} la temperatura inicial del cilindro; T_{∞} es la temperatura de la corriente libre; h el coeficiente de transferencia de calor por convección; A_c el area de transferencia del cilindro ($A = \pi D L$); t el tiempo de operación; W_c la masa del cilindro y C_p capacidad calorífica del cilindro. Esta ecuación tiene la forma de una ecuación de línea recta ($Y = mx + b$), en donde se grafican los datos experimentales como se muestra en la figura II-L. El signo negativo en las ecuaciones indica que el cilindro está perdiendo calor.

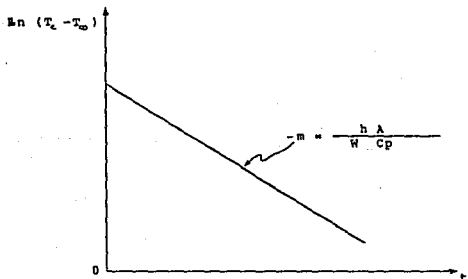


Fig. II-L. Gráfica de datos para la obtención del coeficiente de transferencia de calor por convección.

Al graficar la ecuación (II.2.25), Fig. II-L, se puede obtener el coeficiente de transferencia de calor por convección:

$$h = (m W_c C_p) / A_c \quad (\text{II.2.26})$$

COEFICIENTE DE MASA.

La obtención del coeficiente de transferencia de masa por medio de la solución de la ecuación de transferencia de masa para cilindros es mucho más compleja que los dos anteriores, por lo cual, partiendo de correlaciones empíricas experimentales del factor de Colburn (Jm) fig. II-P [25], se puede obtener dicho coeficiente.

La figura II-M muestra como varía experimentalmente el factor de transferencia de masa de Colburn para cilindros (Jm) con respecto al número de Reynolds cuando pasa un flujo de aire a través de un cilindro simple, el factor de Colburn para masa responde a la siguiente relación experimental [25].

$$J_m = 1.90 (Re_p)^{-0.5} \quad (\text{II.2.27})$$

en donde el número de Reynolds se calcula con el diámetro de cilindro denominado d_p :

$$d_p = \sqrt{d_c L + d_c^2 / 2} \quad (\text{II.2.28})$$

donde d_c es el diámetro del cilindro; L la longitud del cilindro y d_p es un diámetro de referencia para el cálculo del número de Reynolds que se ocupa en la ecuación (II.2.27). Posteriormente, igualando las ecuaciones (II.2.27) y la (II.1.84) se tiene que:

$$K_c Sc^{2/3} / v_\infty = 1.90 (Re_p)^{-0.5}$$

$$K_c = 1.90 v_\infty / [(Re_p)^{1/2} Sc^{2/3}] \quad (\text{II.2.29})$$

obteniéndose así el coeficiente de transferencia de masa para cilindros.

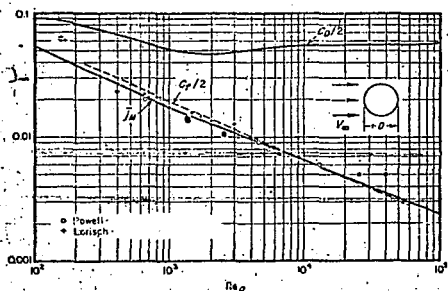


Fig. II-M. Coeficiente de transferencia de masa en un flujo que pasa por un cilindro simple contra Reynolds.

II.2.5 ANALOGIAS.

La analogía de Colburn al igual que en placas planas también se cumple en cilindros, ecuación (II.1.85), pero con la condición que en cilindros los coeficientes de momentum y calor se obtienen de manera diferente. Los factores de Colburn de momentum, calor y masa para cilindros son respectivamente:

$$f/2 = (\tau_{yx}) / \rho v_{\infty}^2 \quad (II.2.22)$$

$$Jq = [h / (C_p \rho v_{\infty})] Pr^{2/3} \quad (II.1.83)$$

$$J_m = 1.90 (Re_p)^{-0.5} \quad (II.2.27)$$

en donde el esfuerzo cortante de la ecuación (II.2.22) se obtiene de la figura II-H, como se puede observar, para el factor de Colburn de calor se ocupa la misma ecuación que para placas planas, con la variación de la procedencia del coeficiente de transferencia de calor, ya que en placas planas dicho coeficiente se obtiene de la ecuación (II.1.79), mientras que para cilindros se obtiene de la ecuación (II.2.26)

$$h D / K = 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.33} \quad (II.1.79)$$

$$h = (m_w C_p) / A_c \quad (II.2.26)$$

por lo tanto, al sustituir las expresiones de los coeficientes en la ecuación (II.1.85) para cilindros, la analogía de Colburn se puede representar como:

$$f / 2 = J_q = J_m \quad (II.1.85)$$

$$(\tau_{yx}) / \rho v_{\infty}^2 = [h / (C_p \rho v_{\infty})] Pr^{2/3} = 1.90 (Re_p)^{-0.5} \quad (II.2.30)$$

Extendiendo así la analogía de Colburn a cilindros circulares simples.

CAPITULO III

DESARROLLO EXPERIMENTAL

El desarrollo experimental para la comprobación de la analogía entre los mecanismos de transferencia de momentum, calor y masa en el presente trabajo, se realizó en base a dos figuras geométricas como lo son placas planas y cilindros.

III.1 PLACAS PLANAS.

En base a que se desea conocer la analogía entre la transferencia de momentum, calor y masa bajo las mismas condiciones experimentales, existe la necesidad de una placa plana en la cual se lleven a efecto los tres mecanismos de transporte. De acuerdo a lo anterior y en función de los equipos con que se dispone en el laboratorio de Ingeniería Química, se realizó el siguiente trabajo.

III.1.1 EQUIPO UTILIZADO.

Después de numerosas pruebas con diferentes materiales (yeso, barro, vidrio, acrílico y una resistencia de enchaquetamiento) para la elaboración de la placa plana, se decidió realizarla con una lámina de acero galvanizado de 0.25 (0.1Cm.) de calibre de espesor, para elaborar una placa de 41 X 15 X 1 Cm., la cual va inmersa en un recipiente un poco mayor en donde se colocaron una serie de resistencias flexibles de 200 Amp. en paralelo como sistema de calentamiento, como se muestra en la figura III-A, las resistencias utilizadas se eligieron en base de que éstas están aisladas, se pueden manipular fácilmente debido a que son flexibles, su longitud es sencilla de establecer ya que se pueden acortar ó aumentar (recortandolas ó uniendo más de una resistencia). El equipo que se utilizó para la parte experimental es el secador de charolas intermitente (marca Armfield), debido a que en éste equipo se puede hacer pasar un flujo de aire a través de una placa plana. También fué necesario fabricar un soporte para colocar el recipiente

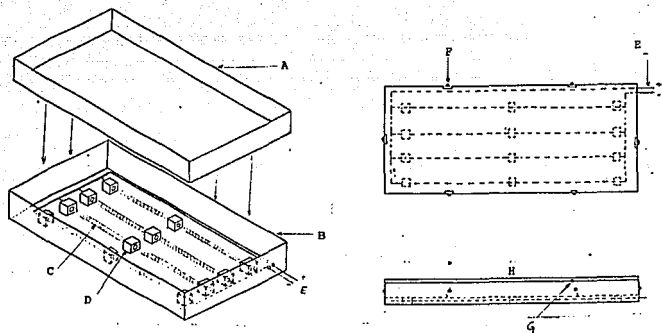


Fig. III-A. Placa utilizada en la parte experimental.

Partes de que consta la placa fabricada para el desarrollo experimental (Fig. III-A):

- A : Recipiente superior en donde se deposita el naftaleno.
- B : Recipiente inferior con el sistema de calentamiento.
- C : Resistencias eléctricas flexibles.
- D : Soportes guías.
- E : Conexión a corriente eléctrica.
- F : Tuercas para mantener unidas los dos recipientes.
- G : Orificios para toma de temperaturas.
- H : Placa soporte del naftaleno.

anteriormente mencionado, ya que el existente para el secador de charolas no se ajustaba a las medidas de la placa fabricada.

III.1.2 TECNICA EXPERIMENTAL.

Se procedió a fundir naftaleno y vertirlo sobre la placa descrita con anterioridad y que al solidificar se obtiene una placa plana de naftaleno a la cual se le hicieron perforaciones a un costado, lo más cercano a la superficie, con el fin de obtener la temperatura de operación por medio de un termopar, como se desea que dicha temperatura de operación (producida por las resistencias) sea constante y además poder regularla, se colocó con éste fin una resistencia variable (variac), lo cual permite una manipulación de la temperatura, para comprobar lo anterior se realizaron pruebas con las resistencias flexibles conectadas al variac tomando lecturas de temperatura de la placa plana a diferentes posiciones del variac, los resultados obtenidos se muestran en la gráfica IV-A, en donde se puede observar a que posición del variac le corresponde una temperatura de placa y así poder establecer la temperatura de operación.

Una vez montado el sistema como se muestra en la fig. III-B, se le hace pasar aire a la placa plana de naftaleno a diferentes aberturas del ventilador, esto implica a diferentes números de Reynolds, y se procede a tomar lecturas en cada caso de:

- * Temperatura en la superficie de la placa plana (T_w) y la temperatura de la corriente libre (T_∞).
- * La diferencia ó caída de presión (ΔP) es registrada en el micromanómetro por medio del tubo pitot colocado en la parte superior de la placa plana, la cual proporciona la velocidad del fluido (v_∞).
- * La variación de la masa se mide por medio de la diferencia del peso al inicio y final de la experimentación.

Al realizar la parte experimental de transferencia de masa por pérdida de peso, se encontró que la temperatura de operación (en la

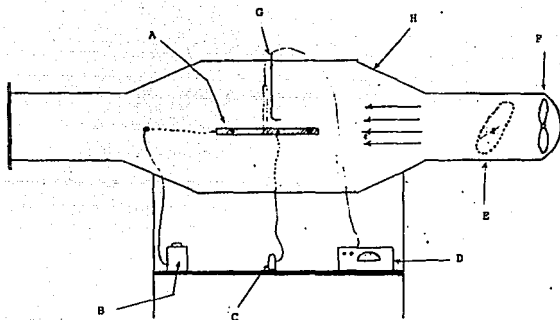


Fig. III-B. Esquema del equipo utilizado en la parte experimental de placas planas.

Descripción del equipo utilizado en la parte experimental de placas planas y mostrado en la figura III-B:

- A : Placa plana de naftaleno.
- B : Resistencia variable "variac".
- C : Termómetro digital.
- D : Micromanómetro.
- E : Control del flujo de aire del ventilador.
- F : Ventilador.
- G : tubo pitot.
- H : Equipo de secado de charolas intermitente.

superficie de la placa plana) influya considerablemente en el coeficiente de transferencia de masa por pérdida de peso (k_c), ya que al aumentar dicha temperatura de operación la transferencia del naftaleno no ocurre por difusión sino que la transferencia se debe a la sublimación del naftaleno; en función de lo anterior se realizaron experimentaciones para observar el comportamiento del coeficiente de transferencia de masa por pérdida de peso con la temperatura de operación, obteniendo los resultados que se muestran en la gráfica IV-B, en donde se puede seleccionar una temperatura óptima de operación.

Este proceso se reprodujo a diferentes temperaturas para un mismo flujo, obteniéndose así los datos para el cálculo de los diferentes factores de Colburn, los datos experimentales se muestran en la tabla III-A. Los datos experimentales que permanecen constantes durante la experimentación son la longitud de la placa ($X = 0.41$ m.), el área de la placa plana ($A = 0.0615$ m²), la constante del tubo pitot ($k = 1$), el tiempo de operación ($t = 20$ min.).

Corrida No. ,	T_{∞} °C	T_x °C	ΔP $\bar{K}g/m^2$	ΔW Kg 10^{-4}
1	23.0	40.0	0.44	7.5
2	23.5	45.5	0.55	9.5
3	23.0	43.0	0.52	9.0
4	23.0	42.0	0.75	9.0

Tabla III-A. Datos experimentales para la obtención del coeficiente de transferencia de masa por pérdida de peso (k_c).

Corrida No.	T_{∞} °C	T_x °C	ΔP Kg/m ²
1	16.5	23.5	0.58
2	17.5	27.0	0.58
3	18.0	33.0	0.58
4	18.5	41.5	0.58
5	19.0	49.0	0.58
6	19.5	59.0	0.58
7	20.0	26.0	0.70
8	20.0	30.0	0.70
9	19.5	34.5	0.70
10	19.0	40.0	0.70
11	18.5	48.0	0.70
12	18.0	55.0	0.70
13	15.0	20.0	0.75
14	15.5	25.0	0.75
15	10.5	30.5	0.75
16	17.0	37.0	0.75
17	18.0	43.0	0.75
18	18.0	51.5	0.75
19	18.5	60.0	0.75

Tabla III-B. Datos experimentales para los calculos de capa límite en placas planas.

ESTA TESIS NO DEBE
SER DE LA BIBLIOTECA

III.2 CILINDROS.

III.2.1 EQUIPO UTILIZADO.

Análogamente a las placas planas, también se tiene la necesidad de un cilindro en donde se efectuarán los tres mecanismos de transporte, de manera que, utilizando un tubo de cobre de 3/4 " se le introdujo una resistencia flexible aislada y se le hizo un orificio a dicho tubo en en la parte central, donde se le colocó en su superficie un termopar de cromo-constantano, protegiendo los cables de dicho termopar con aislante de cerámica para evitar lecturas erróneas de temperatura, como lo muestra la Fig. III-C. Para la parte experimental se utilizó el equipo de calor de flujo cruzado, ya que éste equipo se utiliza para cilindros y proporciona un mayor rango de velocidades.

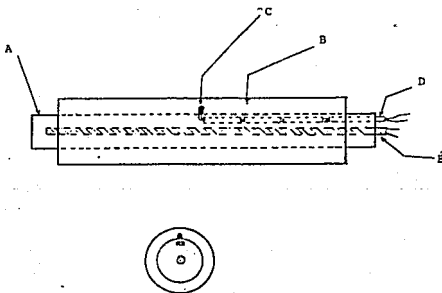


Fig. III-C. Cilindro que se utilizó para la parte experimental.

Descripción del cilindro utilizado en el desarrollo experimental y mostrado en la figura III-C.

- A : Cilindro de cobre de $\frac{3}{4}$ de pulgada.
- B : Naftaleno adherido.
- C : Termopar Cromo-Constantano.
- D : Aislante de cerámica del termopar.
- E : Resistencia flexible aislada.

III.2.2 TECNICA EXPERIMENTAL.

Se procede a fundir naftaleno en un tubo de ensayo. se introduce el tubo de cobre antes descrito y se deja enfriar hasta que solidifique el naftaleno (por lo tanto se adhiere al tubo de cobre), posteriormente se pone en baño maría el tubo de ensayo para poder sacarlo y obtener así un cilindro de naftaleno como se muestra en la figura III-C. Instalando el cilindro de naftaleno en el equipo de transferencia de calor de flujo cruzado como se muestra en la figura III-D, se calienta el cilindro por medio de la resistencia y se le hace pasar un flujo de aire para posteriormente tomar lecturas de:

* La temperatura de operación (T_x) por medio del voltímetro que está conectado al termopar del cilindro de naftaleno, al igual que en placas planas, se realizaron pruebas con anterioridad en el cilindro para determinar a que posición del "variac" le corresponde una temperatura de operación, como se muestra en gráfica IV-F.

* La temperatura de la corriente libre (T_{∞}) por medio de un termómetro digital.

* La Caída de presión (ΔP) es registrada por el micromanómetro que está conectado con el tubo pitot, el cual está instalado en la parte superior del cilindro y que proporciona la velocidad del aire.

* La variación de masa (ΔW) se mide por medio de la diferencia del peso al inicio y final de la experimentación.

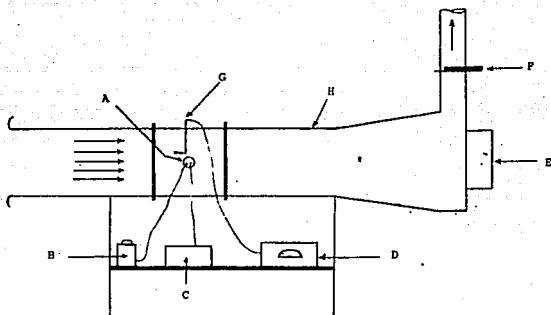


Fig. III-D. Esquema del equipo utilizado en la parte experimental de cilindros.

Descripción del equipo utilizado en la experimentación de cilindros y mostrado en la figura III-D.

- A : Cilindro de naftaleno.
- B : Resistencia variable.
- C : Voltímetro.
- D : Micromanómetro.
- E : Ventilador.
- F : Control del flujo de aire.
- G : Tubo pitot.
- H : Equipo de calor de flujo cruzado.

Este proceso anteriormente descrito se reprodujo a diferentes flujos de aire variando la abertura de paso que tiene el equipo de calor de flujo cruzado, obteniéndose así los datos necesarios para el cálculo de los diferentes coeficientes de transferencia de Colburn.

Los valores experimentales correspondientes a la obtención de la pendiente (m) para obtener el coeficiente de transferencia de calor (h), se muestran en la tabla IV-F. Los demás datos experimentales se muestran a continuación.

Corrida No.	Abertura del ventilador %	ΔP $\frac{\text{Kg}}{\text{m}^2}$	T_c °C	T_∞ °C
1	10	0.27	44	19
2	15	0.60	45	20
3	20	1.05	46	20
4	25	1.45	46	21
5	30	2.25	49	21
6	35	3.30	47	21
7	40	4.90	45	21
8	45	6.50	45	21

Tabla III-C. Datos experimentales para los calculos de la capa limite en cilindros.

CAPITULO IV

CALCULOS Y RESULTADOS

La forma en que se obtubieron los resultados de la parte experimental fué en función de los cálculos que a continuación se describen, para ello se utilizaron expresiones obtenidas con anterioridad y en las restantes se indica la bibliografía entre corchetes en donde se localizan. La definición de los términos de las ecuaciones se muestran en la pagina :

IV.1 PLACAS PLANAS.

MEDIDAS DE LA PLACA PLANA:

0.41 X 0.15 X 0.01 m.

TEMPERATURA PROMEDIO (T_m):

La temperatura promedio se obtubo de la fórmula [2]:

$$T_m = (T_{c1} + T_p) / 2$$

para el primer valor se tiene que :

$$T_m = (16.5^{\circ}\text{C} + 23.5^{\circ}\text{C}) / 2$$

$$T_m = 20^{\circ}\text{C} = 293^{\circ}\text{K}$$

PRESION (P):

Se obtiene de la lectura del micromanómetro en $\bar{\text{K}}\text{g}/\text{m}^2$. Para la primera corrida : $AP = 0.58 \bar{\text{K}}\text{g}/\text{m}^2$.

DENSIDAD (ρ):

De la siguiente fórmula [19], se obtiene la densidad:

$$\rho = \rho_1 (T_0 / T_1) (P_1 / P_0)$$

para el primer valor se tiene que:

$$\rho = 1.1614 \text{ Kg}/\text{m}^3 * (300^{\circ}\text{K}/293^{\circ}\text{K}) * (11.3\text{Lb}/\text{in}^2/14.7\text{Lb}/\text{in}^2)$$

$$\rho = 0.9141 \text{ Kg}/\text{m}^3$$

VISCOSIDAD (μ):

Los valores de la viscosidad del fluido, a diferentes temperaturas se obtienen de la bibliografía [12]. para el primer valor :

$$\mu = 1.7923E-05 \text{ Kg/m seg.}$$

VELOCIDAD (v):

La velocidad del fluido se obtiene de la fórmula [5]:

$$v = \beta * (2 g_c \Delta P / \rho)^{1/2}$$

Para el primer cálculo se tiene que :

$$v = 1 (2 * 9.81 * 0.58 / 0.0141)^{1/2}$$

$$v = 3.528 \text{ m/seg}$$

NUMERO DE REYNOLDS (Re):

El número de Reynolds se obtuvo de la siguiente fórmula [5]:

$$Re = (X * v * \rho) / \mu$$

para el primer valor se tiene que :

$$Re = (0.41m * 3.528m/s * 0.0141Kg/m^3) / 1.7923E-05Kg/m \text{ seg.}$$

$$Re = 73779$$

NUMERO DE PRANTL (Pr):

Los valores de número de Prantl se obtuvieron de bibliografía [19], para el primer valor (por extrapolación) : $Pr = 0.7075$

CONDUCTIVIDAD TERMICA (K_f):

Los valores de conductividad térmica se obtuvieron de la bibliografía [1], para el primer valor: $K_f = 6.0139e-03 \text{ cal/mseg}^{\circ}\text{C}$

ESPESOR DE CAPA LIMITE DE MOMENTUM (δ):

Para el cálculo del espesor de capa límite de momentum se utilizó la ecuación (II.1.42):

$$\delta = 5 X / (Re)^{1/2}$$

para el primer valor :

$$\delta = 5 (0.41m.) / (75635)^{1/2}$$

$$\delta = 7.454E-03 \text{ m.}$$

ESPESOR DE CAPA LIMITE DE CALOR (δ_t):

Para el cálculo del espesor de capa limite de calor, se utilizó la ecuación (II.1.46):

$$\delta_t = X / (C Pr^{1/3} * Re^{1/2})$$

Para el primer cálculo se tiene:

$$\delta_t = 0.41 \text{ m.} / ((0.7075)^{1/3} * (73779)^{1/2})$$

$$\delta_t = 1.894E-03 \text{ m.}$$

COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA DE CALOR (h_c):

Para el cálculo del coeficiente de transferencia de calor se utilizó la ecuación (II.1.64):

$$h_m = 0.664 (K / L) Re^{1/2} Pr^{1/3}$$

para el primer valor se tiene:

$$h_m = 0.664 * (8.0139E-03 \text{ cal/mseg}^\circ\text{C} / 0.41 \text{ m.}) * (73779)^{1/2} * (0.7075)^{1/3}$$

$$h_m = 2.357 \text{ cal/m}^2\text{seg}^\circ\text{C}$$

CAPACIDAD CALORIFICA (C_p):

Los valores de la capacidad calorifica se obtuvieron de tablas [20], para el primer valor se tiene que: $C_p = 241.6 \text{ cal/Kg}^\circ\text{C}$

FACTOR DE CALOR DE COLBURN (J_q):

El factor de Colburn se obtuvo de la ecuación (II.1.83):

$$J_q = (h_m / C_p \rho \mu) * Pr^{2/3} = St Pr^{2/3}$$

$$J_q = Nu / (C Re Pr^{1/3})$$

Para el primer valor se tiene:

$$J_q = (2.357 \text{ cal/m}^2\text{seg}^\circ\text{C} / 241.6 \text{ cal/Kg}^\circ\text{C} * 0.9141 \text{ Kg/m}^3 * 3.528 \text{ m/seg}) * (0.7075)^{2/3}$$

$$J_q = 2.402E-03$$

FACTOR DE MOMENTUM DE COLBURN (F_t):

El factor de momentum de Colburn se obtuvo de la ecuación (II.1.57):

$$f_f = (1.328 / Re^{1/2}) / 2$$

para el primer valor se tiene que :

$$Ff = (1.328 / (75635)^{1/2}) / 2$$

$$Ff = 2.504E-03$$

DIFUSIVIDAD (D_{AB}):

La difusividad se obtuvo de la ecuación [19]:

$$D_{AB} = D_{AB} (P_i / P) * (T / T_i)^{3/2}$$

para el primer valor se tiene que :

$$D_{AB} = 6.11E-06 \text{ m}^2/\text{seg} * (1 \text{ atm} / 0.77 \text{ atm}) * (293^\circ\text{K} / 298^\circ\text{K})$$

$$D_{AB} = 7.726E-06 \text{ m}^2/\text{seg}$$

NUMERO DE SCHMITH (Sc):

El número de Smith se obtuvo de la fórmula [28]:

$$Sc = \mu / (\rho * D_{AB})$$

para el primer valor:

$$Sc = 1.7923E-05 \text{ Kg/mseg} / (0.9141 \text{ Kg/m}^3 * 7.726E-06 \text{ m}^2/\text{seg})$$

$$Sc = 2.54$$

PRESION DE VAPOR (P°):

La presión de vapor del Naftaleno se obtuvo de la ecuación [13]:

$$\ln P^\circ = 13.752 - (3701.48 / (T - 85.8319))$$

para el primer valor se tiene que (transferrando los Kpascales a atm):

$$\ln P^\circ = 13.752 - (3701.48 / (304.5 - 85.8319))$$

$$P^\circ = 4.123E-04 \text{ atm.}$$

CONCENTRACION MOLAR (C_A):

La concentración molar se obtuvo de la fórmula [10]:

$$C_A = P / (R T)$$

para el primer valor se tiene que:

$$C_A = 4.123E-04 \text{ atm} / (0.082 \text{ m}^3 \text{ atm/KgMol}^\circ\text{K} * 304.5^\circ\text{K})$$

$$C_A = 1.651E-05 \text{ KgMol/m}^3$$

PESO PERDIDO POR DIFUSION (ΔW):

El peso perdido se obtuvo por diferencias de peso experimentales en la placa plana, para el primer valor se obtuvo que: $D_w = 0.75E-03$ Kg.

FLUJO MOLAR (N_A):

el flujo molar se obtuvo de la fórmula [10]:

$$N_A = D_w / (C P M A t)$$

para el primer valor se tiene que:

$$N_A = 0.75E-03 \text{ Kg} / (128.1 \text{ Kg/kgMol} \cdot 0.0815 \text{ m}^2 \cdot 1200 \text{ seg})$$

$$N_A = 7.933E-08 \text{ KgMol/m}^2 \text{ seg.}$$

COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA DE MASA (K_c):

Para obtener el coeficiente de transferencia de masa por correlación se utilizó la ecuación (II.1.69):

$$K_c = (0.664 / L) \text{ Re}^{1/2} \text{ Sc}^{1/3} D_{AB}$$

para el primer valor se tiene que:

$$K_c = (0.664 / 0.41 \text{ m}) \cdot (73779)^{1/2} \cdot (2.54)^{1/3} \cdot 7.728E-08 \text{ m}^2/\text{seg}$$

$$K_c = 4.835E-03 \text{ m/seg.}$$

COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA DE MASA POR PERDIDA DE PESO ($'k_c$):

Para obtener el coeficiente de transferencia de masa por pérdida de peso se utilizó la fórmula:

$$'k_c = N_A / C_A$$

para el primer valor se tiene que:

$$'k_c = 7.933E-08 \text{ KgMol/m}^2 \text{ seg} / 1.651E-05 \text{ KgMol/m}^3.$$

$$'k_c = 4.805E-03 \text{ m/seg.}$$

Factor de masa de Colburn (J_m):

El factor de masa de Colburn por correlación se obtiene de la fórmula [28]:

$$J_m = (0.664 / L u) \text{ Re}^{1/2} \text{ Sc} D_{AB}$$

para el primer valor se tiene que:

$$J_m = (0.664 / 0.41 \text{ m} \cdot 3.528 \text{ m/seg}) \cdot (73779)^{1/2} \cdot 2.54 \cdot 7.728E-08 \text{ m}^2/\text{s.}$$

$$J_m = 2.444E-03$$

FACTOR DE MASA DE COLBURN (J_m):

El factor de masa de Colburn por pérdida de peso, se obtiene de la fórmula [4]:

$$J_m = (k_c Sc^{2/3}) / v$$

para el primer valor se tiene que:

$$J_m = (4.8055E-03 \text{ m/seg} \cdot (2.506)^{2/3}) / 3.13 \text{ m/seg.}$$

$$J_m = 2.899E-03$$

Los resultados totales de las ecuaciones anteriores para placas planas se muestran en las tablas IV-A, IV-B, IV-C, IV-D y IV-E. En la gráfica IV-A se muestran los resultados obtenidos de las pruebas que se realizaron para observar la variación de la temperatura con respecto a la posición de la resistencia variable (variac). En la gráfica IV-B se muestran las experimentaciones hechas para observar el comportamiento del factor de masa de Colburn (J_m) con la temperatura de operación y por lo tanto, fijar un rango óptimo de temperatura de operación para obtener el factor de masa de Colburn. Las gráficas IV-C, IV-D y IV-E muestran un aspecto comparativo de los resultados experimentales obtenidos en el presente trabajo (puntos), con los reportados en la bibliografía (línea recta) [28, 17, 10, 22, 23].

corrida	T	ΔP	ρ	u	μ	Re	δ	f_f
No.	$^{\circ}K$	$\frac{Kg}{m^2}$	Kg/m^3	m/seg	$\frac{Kg}{mseg}$		m	
					10^{-5}		10^{-3}	10^{-3}
1	289.5	0.58	0.9351	3.507	1.7588	75835	7.454	2.504
2	290.5	0.58	0.9260	3.505	1.7684	75249	7.473	2.512
3	291.0	0.58	0.9204	3.516	1.7732	74831	7.494	2.516
4	291.5	0.58	0.9188	3.519	1.7779	74587	7.507	2.520
5	292.0	0.58	0.9172	3.522	1.7827	74300	7.520	2.524
6	292.5	0.58	0.9158	3.525	1.7875	74035	7.534	2.528
7	293.0	0.70	0.9141	3.876	1.7923	81052	7.200	2.415
8	293.0	0.70	0.9141	3.878	1.7923	81052	7.200	2.415
9	292.5	0.70	0.9158	3.873	1.7875	81334	7.188	2.411
10	292.0	0.70	0.9172	3.889	1.7827	81628	7.175	2.408
11	291.5	0.70	0.9188	3.886	1.7779	81919	7.162	2.404
12	291.0	0.70	0.9204	3.883	1.7732	82208	7.150	2.400
13	288.0	0.75	0.9300	3.978	1.7445	86944	6.952	2.336
14	288.5	0.75	0.9283	3.981	1.7493	86822	6.965	2.341
15	289.5	0.75	0.9251	3.988	1.7588	86006	6.990	2.348
16	290.0	0.75	0.9235	3.991	1.7636	85697	7.003	2.352
17	291.0	0.75	0.9204	3.998	1.7732	85003	7.027	2.359
18	291.0	0.75	0.9204	3.988	1.7732	85093	7.027	2.359
19	291	0.75	0.9188	4.002	1.7779	84794	7.040	2.363

Tabla IV-A. RESULTADOS EXPERIMENTALES PARA LA OBTENCION DEL COEFICIENTE DE MOMENTUM DE COLBURN (f_f), PARA PLACAS PLANAS.

Corrida	Tm	ΔP	ρ	u	μ	Re	Kr	Pr
No.	$^{\circ}K$	$\bar{K}g/m^2$	Kg/m^3	m/seg	$Kg/mseg$ 10^{-5}		cal/ms $^{\circ}C$ 10^{-3}	
1	293.0	0.58	0.9141	3.528	1.7923	73814	6.0139	0.70756
2	295.2	0.58	0.9073	3.541	1.8136	72640	6.0500	0.70724
3	298.6	0.58	0.8989	3.562	1.8423	71096	6.1055	0.70675
4	303.0	0.58	0.8939	3.598	1.8666	69661	6.1666	0.70612
5	307.0	0.58	0.8724	3.611	1.8877	68433	6.2333	0.70554
6	312.2	0.58	0.8579	3.642	1.9155	66878	6.3028	0.70479
7	296.0	0.70	0.9048	3.896	1.8209	79371	6.0639	0.70713
8	298.0	0.70	0.8987	3.909	1.8400	78281	6.0972	0.70684
9	300.0	0.70	0.8928	3.922	1.8506	77580	6.1222	0.70656
10	302.4	0.70	0.8857	3.938	1.8638	76732	6.1500	0.70621
11	306.2	0.70	0.8747	3.982	1.8836	75444	6.2194	0.70565
12	309.5	0.70	0.8654	3.984	1.9008	74364	6.2694	0.70518
13	290.5	0.75	0.9220	3.995	1.7684	85399	5.9722	0.70792
14	293.1	0.75	0.9138	4.013	1.7932	83842	6.0028	0.70754
15	296.5	0.75	0.9033	4.036	1.8256	81878	6.0722	0.70705
16	300.0	0.75	0.8928	4.080	1.8506	80303	6.1222	0.70656
17	303.5	0.75	0.8825	4.083	1.8692	79044	6.1750	0.70605
18	307.7	0.75	0.8704	4.111	1.8916	77568	6.2416	0.70544
19	312.2	0.75	0.8579	4.141	1.9155	76050	6.3028	0.70479

Tabla IV-B. RESULTADOS EXPERIMENTALES PARA LA OBTENCION DEL COEFICIENTE DE CALOR DE COLBURN (Jq), PARA PLACAS PLANAS.

Corrida	hc	δ_t	D_{AB}	Kc	Jq	Jm
No.	cal/m ² seg°C	m	m ² /seg	m/seg		
		10 ⁻³	10 ⁻⁶	10 ⁻³	10 ⁻³	10 ⁻³
1	2.357	1.694	7.726	4.635	2.402	2.444
2	2.352	1.707	7.815	4.663	2.406	2.462
3	2.348	1.726	7.949	4.709	2.412	2.489
4	2.347	1.744	8.125	4.775	2.426	2.515
5	2.351	1.760	8.286	4.834	2.444	2.538
6	2.349	1.781	8.500	4.912	2.458	2.568
7	2.464	1.633	7.845	4.899	2.298	2.357
8	2.461	1.645	7.925	4.927	2.299	2.372
9	2.459	1.653	8.004	4.958	2.304	2.383
10	2.456	1.662	8.101	4.993	2.310	2.395
11	2.463	1.676	8.256	5.054	2.329	2.416
12	2.464	1.689	8.388	5.105	2.340	2.433
13	2.518	1.574	7.627	4.908	2.249	2.272
14	2.508	1.589	7.730	4.943	2.247	2.291
15	2.506	1.608	7.865	4.990	2.257	2.319
16	2.502	1.624	8.004	5.044	2.265	2.343
17	2.503	1.638	8.145	5.098	2.277	2.361
18	2.506	1.653	8.317	5.165	2.293	2.383
19	2.505	1.670	8.500	5.239	2.297	2.409

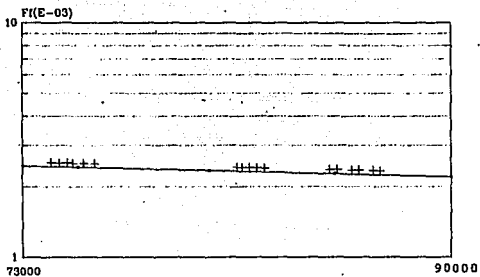
Tabla IV-C. RESULTADOS EXPERIMENTALES PARA LA OBTENCION DEL COEFICIENTE DE CALOR (Jq) Y DE MASA (Jm) DE COLBURN, PARA PLACAS PLANAS.

Corrida No.	Tm °K	ΔP Kg/m ²	ρ Kg/m ³	v m/seg	μ Kg/mseg 10 ⁻⁵	Re	D_{AB} m ² /seg 10 ⁻⁶
1	304.5	0.44	0.8796	3.13	1.874	80368	8.185
2	307.5	0.55	0.8718	3.52	1.888	66664	8.296
3	306.0	0.62	0.8753	3.73	1.882	71180	8.240
4	305.5	0.75	0.8767	4.10	1.879	78473	8.226

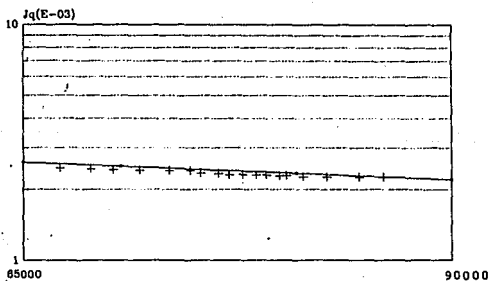
Tabla IV-D. RESULTADOS EXPERIMENTALES PARA LA OBTENCION DEL COEFICIENTE DE MASA ($'J_m$) POR PERDIDA DE PESO EN PLACAS PLANAS.

Corrida No.	Sc	P^o atm. 10 ⁻⁴	C_A KgMol/m ³ 10 ⁻⁵	D_w Kg 10 ⁻⁴	N_A KgMol/m ² s 10 ⁻⁸	'kc m/s 10 ⁻³	'Jm 10 ⁻³
1	2.596	4.123	1.651	7.5	7.933	4.8055	2.899
2	2.606	5.068	2.012	9.5	10.050	4.9944	2.694
3	2.800	4.627	1.844	9.0	9.520	5.1611	2.624
4	2.588	4.453	1.777	9.0	9.520	5.3555	2.475

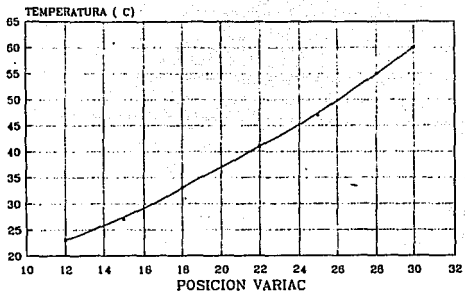
Tabla IV.E. RESULTADOS EXPERIMENTALES PARA LA OBTENCION DEL COEFICIENTE DE MASA ($'J_m$), POR PERDIDA DE PESO EN PLACAS PLANAS.



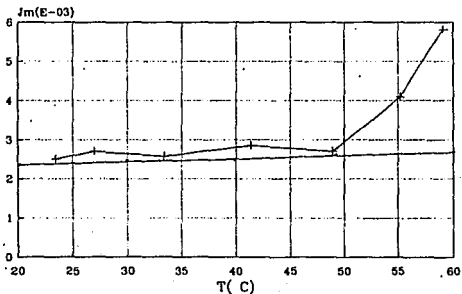
GRAF. IV-C. FACTOR DE FRICCIÓN (F_f) Vs Re EN PLACAS PLANAS



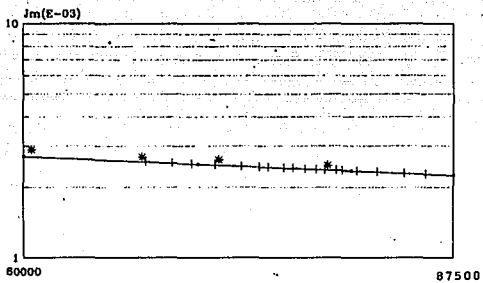
GRAF. IV-D. FACTOR DE CALOR (J_q) Vs Re EN PLACAS PLANAS



GRAF. IV-A. POSICION DEL VARIAC Vs TEMPERATURA DE PLACA



GRAF. IV-B. VARIACION DEL FACTOR DE MASA (Jm) Vs TEMPERATURA



GRAF. IV-E. FACTOR DE MASA (J_m) Vs Re EN PLACAS PLANAS

IV.2 Cilindros

En el caso de cilindros, la temperatura promedio, presión, densidad, velocidad, viscosidad, número de Prndtl, número de Scmith, capacidad calorífica, Conductividad térmica, difusividad, presión de vapor, concentración molar, flujo molar y coeficiente de transferencia de masa, se obtienen de forma similar que en placas planas; todos los resultados experimentales obtenidos se muestran en las tablas de la IV-F a la IV-N.

En la gráfica IV-F se muestra la variación de la temperatura con respecto a la posición de la resistencia variable. Las gráficas IV-G, IV-H, IV-I y IV-J, muestran un aspecto comparativo de los resultados experimentales obtenidos (puntos) con los reportados en la bibliografía [2, 8, 13, 23, 25] (línea recta). A continuación se muestran los calculos restantes en cilindros.

AREA DEL CILINDRO (A_c):

Para obtener el área del cilindro se utilizó la ecuación:

$$A_c = \pi D L$$

pero como no toda el área del cilindro es efectiva [28, 8], se obtiene un porcinto de separación contra Re de la cual se obtiene que para el primer valor es:

$$A_c = 3.1415 * 0.0162m * 0.145m * (33\%)$$

$$A_c = 49.102E-04 \text{ m}^2$$

COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA DE CALOR (h_c):

Para el cálculo del coeficiente de transferencia de calor se utilizó la ecuación (II.2.26):

$$h_c = m C_p w / A_c$$

la pendiente m se obtiene al graficar la ecuación:

$$\ln (T_c - T_f) = (h_c A_c / w c_p v) t + \ln (T_i - T_f)$$

los valores para obtener dicha pendiente se muestran en la tabla IV-F,

para el primer valor se tiene que:

$$m = -0.0066668 \text{ 1/seg.}$$

por lo tanto para el primer valor del coeficiente de transferencia de calor se tiene que:

$$hc = - (-0.0066668 \text{ 1/seg} * 0.31 \text{ Kcal/kg}^{\circ}\text{C} * 0.0229 \text{ Kg}) / 49.102\text{E-}04 \text{ m}^2$$
$$hc = 96.386\text{E-}04 \text{ Kcal/m}^2 \text{ seg}^{\circ}\text{C}$$

COEFICIENTE DE MASA DE COLBURN (J_m):

Para obtener el coeficiente de masa de Colburn para cilindros, se utilizó la ecuación (II.2.27):

$$J_m = 1.90 / *Re^{1/2}$$

donde:

$$*Re = (dp \ v \ \rho) / \mu$$

$$dp = (dc \ L + (dc)^2 / 2)^{1/2}$$

para el primer valor del número de Reynolds se se tiene que:

$$dp = (0.0162 \text{ m} * 0.145 \text{ m} + (0.0162)^2 / 2)^{1/2}$$

$$dp = 0.04980181 \text{ m.}$$

$$*Re = (0.04980181 \text{ m} * 2.45 \text{ m/seg} * 0.89192 \text{ Kg/m}^3) / 1.87444 \text{ Kg/m s}$$

$$*Re = 5741$$

para el primer valor del coeficiente de masa de Colburn para cilindros se tiene que:

$$J_m = 1.90 / (5741)^{1/2}$$

$$J_m = 0.0251$$

FACTOR DE FRICCIÓN (f'):

Para obtener el factor de fricción se utiliza la ecuación (II.2.22):

$$\tau = (f' \ \rho \ / \ v^2) / 2$$

$$\therefore f' = 2 \tau / \rho \ v^2$$

donde τ se obtiene de la ecuación [23]:

$$(\tau / \rho \ v^{1/2}) * (v \ Re \ \rho / \mu)^{1/2} = c$$

donde el valor de c se obtiene de la figura II-I [23], para el primer valor se tiene que:

$$c = 0.6$$

por lo tanto :

$$\tau = 0.8 * 0.88192 \text{ Kg/m}^3 * (2.45 \text{ m/seg})^2 * (1.8744\text{E-}05 \text{ Kg/mseg} / 2.45 \text{ m/seg} * 0.88192 \text{ Kg/m}^3 * 0.0081 \text{ m})^{1/2}$$

$$\tau = 0.103946 \text{ Kg/mseg}^2$$

para el primer valor del factor de fricción se tiene que :

$$f' = 2 * 0.103946 \text{ Kg/mseg}^2 / (0.88192 \text{ Kg/m}^3 * (2.45 \text{ m/seg})^2)$$

$$f' = 0.0259$$

donde el factor de fricción obtenido es puntual, para la obtención del factor de fricción promedio, se suman los valores puntuales y se dividen entre el número de ellos.

Corrida	Tc	Ln (Tc-Tf)	t
No.	°C		seg
1	44.0	3.219	0
2	40.0	3.044	28
3	37.5	2.918	52
4	35.0	2.772	71
5	32.5	2.602	92
6	30.0	2.398	127
7	27.5	2.140	160
8	25.0	1.792	220

Tabla IV-F. VALORES PARA OBTENER LA PENDIENTE (m_c)

Corr.	Tf	ΔP	ρ	v	μ	Re	Pr	Cp
No.	°K	Kg/m ²	Kg/m ³	m/seg	Kg/mseg 10 ⁻⁵			cal/Kg°C
1	304.5	0.27	0.88192	2.45	1.8744	1857	0.7059	0.24194
2	305.5	0.60	0.87903	3.66	1.8797	2772	0.7057	0.24197
3	306.0	1.05	0.87759	4.84	1.8824	3659	0.7057	0.24199
4	306.5	1.45	0.87618	5.70	1.8850	4290	0.7056	0.24200
5	308.0	2.25	0.87189	7.11	1.8930	5309	0.7054	0.24205
6	307.0	3.30	0.87473	8.60	1.8877	6458	0.7055	0.24202
7	306.0	4.90	0.87759	10.40	1.8824	7905	0.7057	0.24199
8	306.0	6.50	0.87759	12.00	1.8824	9104	0.7057	0.24199

Tabla IV-G. RESULTADOS EXPERIMENTALES PARA LA OBTENCION DEL COEFICIENTE DE CALOR DE COLBURN (J_q), PARA CILINDROS.

Corrida	\dot{m}	X	A	hc	*Re	Jq	Jm	Nu
No.	1/seg		m^2	$cal/m^2seg^{\circ}C$				
	10^{-3}		10^{-3}	10^{-3}		10^{-3}	10^{-3}	
1	6.6668	33	4.9102	9.638	5741	14.02	16.82	20.57
2	7.6351	38	4.5438	11.9297	8524	12.14	12.77	24.73
3	8.9745	38	4.5438	14.0213	11237	10.81	11.10	28.14
4	9.5039	38	4.5438	14.8484	13194	9.74	10.23	30.58
5	10.9367	36	4.6903	16.5532	16309	8.74	9.53	34.88
6	11.2296	42	4.2506	18.7547	19846	8.16	7.83	39.37
7	12.3198	42	4.2506	20.5752	24147	7.38	7.07	44.81
8	11.5445	50	3.6643	22.3656	27862	6.95	5.70	48.68

Tabla IV-H. RESULTADOS EXPERIMENTALES PARA LA OBTENCION DE LOS COEFICIENTES DE CALOR (Jq) Y DE MASA (Jm) DE COLBURN.

Corrida	Tf	ΔP	ρ	v	μ	Re
No.	$^{\circ}K$	Kg/m^2	Kg/m^3	m/seg	$Kg/mseg$	
					10^{-5}	
1	305.0	0.14	0.88047	1.76	1.87709	1243
2	306.0	0.21	0.87759	2.16	1.88239	1515
3	304.5	0.65	0.88193	3.80	1.87444	2684
4	305.0	2.45	0.88047	7.39	1.87709	5199
5	305.0	4.60	0.88047	10.12	1.87709	7123

Tabla IV-I. RESULTADOS EXPERIMENTALES PARA LA OBTENCION DEL COEFICIENTE DE MASA (*Jm), POR PERDIDA DE PESO.

Corrida	D_{AB}	Sc	p^o	C_A	t
No.	m^2/seg		atm	$KgMol/m^3$	seg
	10^{-6}		10^{-4}	10^{-5}	
1	8.2055	2.59	4.2855	1.7135	292
2	8.2459	2.60	4.6271	1.8441	218
3	8.1853	2.59	4.1231	1.6513	196
4	8.1853	2.59	4.2855	1.7135	152
5	8.1853	2.59	4.2855	1.7135	143

Tabla IV-J. RESULTADOS EXPERIMENTALES PARA LA OBTENCION DEL COEFICIENTE DE MASA (J_m), POR PERDIDA DE PESO.

Corrida	Ac	Dw	NA	k_c	J_m
No.	m^2	Kg	$KgMol/m^2seg$	m/seg	
	10^{-3}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-2}	10^{-2}
1	6.7858	2.0	7.9758	4.596	1.936
2	6.7858	7.5	3.9559	2.145	1.878
3	5.5643	6.0	4.2927	2.599	1.292
4	4.7500	6.0	6.4843	3.784	9.68
5	4.2750	6.0	7.6582	4.469	8.34

Tabla IV-K. RESULTADOS EXPERIMENTALES PARA LA OBTENCION DEL COEFICIENTE DE MASA (J_m), POR PERDIDA DE PESO EN CILINDROS.

Angulo grados	t_1 Kg/ms 10^{-2}	f'_1 10^{-2}	t_2 Kg/ms 10^{-2}	f'_2 10^{-2}	t_3 Kg/ms 10^{-2}	f'_3 10^{-2}
10	10.394	3.927	18.975	3.223	28.852	2.807
20	19.923	7.527	36.369	6.177	55.299	5.379
30	27.719	10.472	50.599	8.594	76.939	7.485
40	33.782	12.763	61.668	10.474	93.760	9.122
50	37.247	14.072	67.993	11.548	103.387	10.058
60	38.113	14.399	69.575	11.817	105.791	10.292
70	36.381	13.745	66.412	11.280	100.982	9.824
80	31.184	11.781	56.925	9.668	86.558	8.420

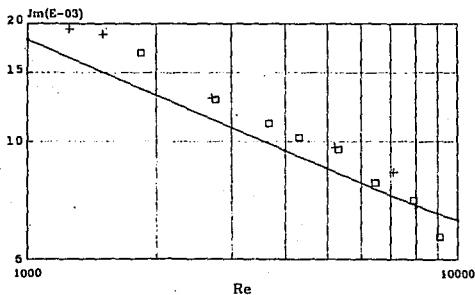
TABLA IV-L. VALORES PARA LA OBTENCION DEL FACTOR DE FRICCION PROMEDIO.

Angulo grados	t_4 Kg/ms 10^{-2}	f'_4 10^{-2}	t_5 Kg/ms 10^{-2}	f'_5 10^{-2}	t_6 Kg/ms 10^{-2}	f'_6 10^{-2}
10	36.869	2.590	51.347	2.329	68.322	2.112
20	70.667	4.905	98.418	4.486	130.949	4.048
30	98.319	6.908	136.928	6.213	182.191	5.632
40	119.927	8.419	166.879	7.572	222.045	6.884
50	132.117	9.282	183.905	8.349	244.819	7.568
60	135.189	9.498	188.273	8.543	250.513	7.744
70	129.044	9.066	179.716	8.155	239.126	7.392
80	110.609	7.771	154.042	6.986	204.965	6.336

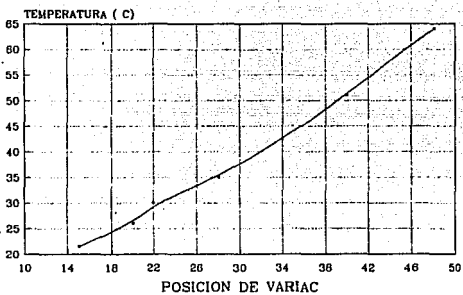
TABLA IV-M. VALORES PARA LA OBTENCION DEL FACTOR DE FRICCION PROMEDIO.

Angulo grados	t_{γ} Kg/ms 10^{-2}	f'_{γ} 10^{-2}	t_{θ} Kg/ms 10^{-2}	f'_{θ} 10^{-2}	Re	\bar{f} 10^{-2}
10	90.878	1.915	112.637	1.782	1867	11.086
20	174.183	3.670	215.887	3.416	2772	9.098
30	242.342	5.106	300.365	4.753	3659	7.923
40	295.354	6.223	366.070	5.793	4290	7.312
50	325.646	6.861	403.616	6.387	5309	6.577
60	333.219	7.021	413.002	6.536	6458	5.962
70	318.073	6.702	394.229	6.239	7905	5.405
80	272.634	5.744	337.911	5.348	9104	5.032

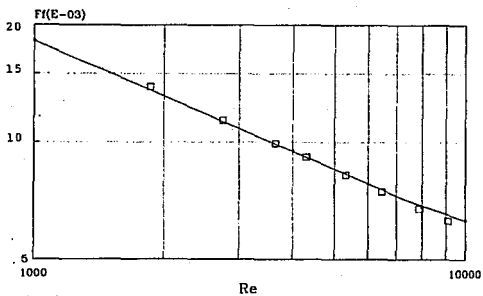
TABLA IV-N. RESULTADOS DEL FACTOR DE FRICCIÓN PROMEDIO EN CILINDROS.



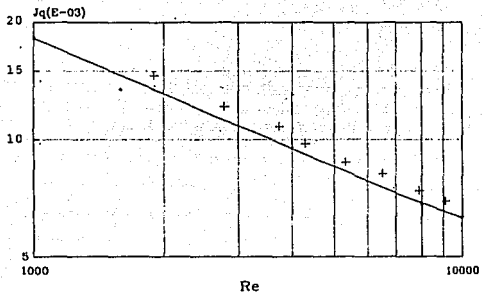
GRAF. IV-J. FACTOR DE MASA (J_m) vs Re EN CILINDROS.



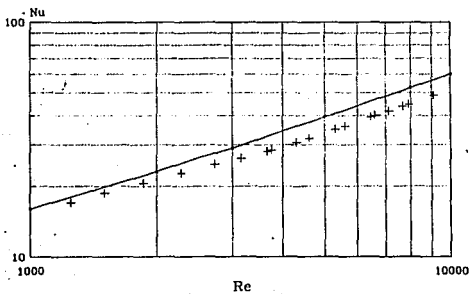
GRAF. IV-F. POSICION DE VARIAC V_0 TEMPERATURA EN CILINDRO.



GRAF. IV-G. FACTOR DE FRICCION (Ff) V_0 Re EN CILINDROS.



GRAF. IV-H. FACTOR DE CALOR (Jq) Vs Re EN CILINDROS.



GRAF. IV-I. NUMERO DE NUSSELT PROMEDIO Vs Re EN CILINDROS.

La definición de los términos que aparecen en las ecuaciones anteriores, utilizadas para obtener los resultados de los coeficientes de Colburn tanto en placas planas como en cilindros son:

- Ac : Area del cilindro en m^2 .
- Ap : Area de la placa plana en m^2 .
- CA : Concentración molar en $KgMol/m^3$.
- CFL : Factor de fricción de Fanning (adimensional).
- Cp : Capacidad calorífica en $cal/Kg^{\circ}C$.
- dp : Diámetro promedio del cilindro en m.
- Dab : Difusividad del Naftaleno en aire en m^2/hr .
- Dab₁ : Difusividad de referencia del Naftaleno en aire en m^2/hr .
- Ff : Factor de momentum de Colburn (adimensional).
- G_c : Factor gravitacional $9.8 Kg/mKgseg^2$.
- hc : Coef. de transf. de calor por convección en $cal/m^2hr^{\circ}C$.
- Jm : Factor de masa de Colburn por correlaciones (adimensional).
- *Jm : Factor de masa de Colburn por pérdida de masa (adimensional).
- Jq : factor de calor de Colburn (adimensional).
- Kc : Difusividad másica por correlaciones en m/hr .
- *kc : Difusividad másica por pérdida de peso en m/hr .
- Kf : Conductividad térmica en $cal/mhr^{\circ}C$.
- L : Longitud de la placa plana en m.
- l : longitud del cilindro en m.
- mc : Pendiente en $-1/seg$.
- NA : Flujo molar en $KgMol/m^2hr$.
- Nu : Número de Nusselt (adimensional).
- Pr : Número de Prandtl (adimensional).
- P_o : Presión a la cual se desea conocer alguna propiedad en atm.
- P₁ : Presión de referencia de alguna propiedad en atm.
- P^o : Presión de vapor del naftaleno en Atm.
- ΔP : Presión obtenida en el micromanómetro en Kg/m^2 .
- PM : Peso molecular del Naftaleno (128.1) en $Kg/KgMol$.
- R : Constante de los gases ideales en $m^3atm/KgMol^{\circ}K$.

R_c : Radio del cilindro en m.
 Re : Número de Reynolds (adimensional).
 $*Re$: Número de Reynolds con el diámetro promedio del cilindro.
 Sc : Número de Scmith (adimensional).
 St : Número de Stanton (adimensional).
 t : Tiempo en seg.
 T_f : Temperatura del fluido en $^{\circ}K$.
 T_m : Temperatura promedio en $^{\circ}K$.
 T_p : Temperatura de la placa en $^{\circ}K$.
 T_o : Temperatura a la cual se desea conocer alguna propiedad en $^{\circ}K$.
 T_r : Temperatura de referencia de alguna propiedad en $^{\circ}K$.
 v : Velocidad del fluido en m/seg.
 ΔW : Peso perdido por difusión en Kg.
 β : Constante del tubo pitot (adimensional) igual a 1.
 z : valor obtenido de la gráfica II-? adimensional.
 δ : Espesor de la capa límite de momentum en m.
 δ_t : Espesor de la capa límite de calor en m.
 ρ : Densidad en Kg/m^3 .
 ρ_1 : Densidad de referencia en Kg/m^3 .
 μ : Viscosidad en Kg/mhr .
 τ : Esfuerzo cortante en $Kg/mseg$.

CAPITULO V

PRACTICA PROPUESTA

" ANALOGIA ENTRE LA TRANSFERENCIA DE MOMENTUM, CALOR Y MASA "

OBJETIVO.

Comprobar experimentalmente la analogía que existe entre la transferencia de momentum, calor y masa, por medio de los factores de Colburn $f/8$, J_q y J_m respectivamente.

INTRODUCCION.

El estudio de los mecanismos de transporte de momentum, calor y masa por lo general se ha realizado de una manera independiente entre ellos, pero cada vez se hace más elocuente y necesario su estudio simultáneo ya que desde las ecuaciones en que se fundamentan (ecuación de viscosidad de Newton, Fourier y Fick) se percibe una similitud entre dichos mecanismos. Inicialmente fue Reynolds quien observó y realizó un estudio sobre esta similitud, posteriormente numerosos investigadores como Prandtl, Blasius, Pohlhausen y otros prosiguieron dicho estudio, en la actualidad existen numerosas relaciones propuestas por investigadores para correlacionar los mecanismos de transporte, cada uno con sus respectivas condiciones específicas [2].

Colburn propone una analogía entre los mecanismos de momentum, calor y masa (1, 2, 6), obteniendo para ello relaciones experimentales adimensionales llamados factores de Colburn (F_f , J_q y J_m), los cuales se basan en la obtención de un coeficiente de transporte (f , h y K_c).

CONCEPTOS BASICOS

Partiendo de las ecuaciones de viscosidad de Newton, Fourier y Fick respectivamente, se puede observar una similitud entre dichas ecuaciones.

$$\text{MOMENTUM} \quad \tau_{xy} = -\mu \left(\frac{dv_x}{dy} \right) \quad (1)$$

$$\text{ENERGIA (CALOR)} \quad q = -k \left(\frac{dT}{dy} \right) \quad (2)$$

$$\text{MASA} \quad J = - D_{AB} \left(dC_A / dY \right) \quad (3)$$

obteniendo una difusividad de momentum y de calor (con unidades semejantes a la de masa D_{AB}), así como un gradiente de concentración de momentum y de calor (al igual que el de masa) (3), las ecuaciones anteriores se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\text{MOMENTUM} \quad \tau_{xy} = - \nu \left[d(\rho v)_x / dY \right] \quad (4)$$

$$\text{CALOR} \quad q = - \alpha \left[d(\rho C_p T) / dY \right] \quad (5)$$

$$\text{MASA} \quad J = - D_{AB} \left(dC_A / dY \right) \quad (6)$$

como se puede observar las ecuaciones toman una forma análoga e igual a:

$$\text{FLUX} = \text{DIFUSIVIDAD} \pm \text{GRADIENTE DE CONCENTRACION}$$

lo cual demuestra que las ecuaciones fundamentales de los mecanismos de transporte son análogas.

Aplicando un balance de momentum, energía (en forma de calor) y de masa a un elemento de volumen y realizando simplificaciones se pueden obtener las ecuaciones de continuidad y de los mecanismos de transporte de momentum, energía y de masa respectivamente (4):

$$\left(\nabla \cdot v \right) = \partial v_x / \partial x + \partial v_y / \partial y + \partial v_z / \partial z = 0 \quad (7)$$

$$\rho \left(Du / Dt \right) = - \nabla P + \mu \left(\nabla^2 v \right) + \rho g \quad (8)$$

$$\rho \left(C_p DT \right) / Dt = k \nabla^2 T \quad (9)$$

$$DC_A / Dt = - \left(\nabla \cdot J_A \right) + R_A \quad (10)$$

Partiendo de las ecuaciones anteriores y tomando en cuenta las

suposiciones hechas para capa límite [2] : fuerzas externas despreciables; propiedades del fluido constantes; el movimiento es bidimensional; sistema a régimen permanente y fluido newtoniano. Las ecuaciones de continuidad, momentum, energía y de masa se reducen a:

$$\partial v_x / \partial x + \partial v_y / \partial y = 0 \quad (11)$$

$$v_x (\partial v_x / \partial x) + v_y (\partial v_x / \partial y) = -(1/\rho) \partial P / \partial x + \nu (\partial^2 v_x / \partial x^2 + \partial^2 v_x / \partial y^2) \quad (12)$$

$$v_x (\partial T / \partial x) + v_y (\partial T / \partial y) = \alpha (\partial^2 T / \partial x^2 + \partial^2 T / \partial y^2) \quad (13)$$

$$v_x (\partial \rho_A / \partial x) + v_y (\partial \rho_A / \partial y) = D_{AB} (\partial^2 \rho_A / \partial x^2 + \partial^2 \rho_A / \partial y^2) \quad (14)$$

aplicando el análisis de órdenes de magnitud propuesto por Prandtl [5], que permite despreciar algunos términos que, aunque intervienen en el fenómeno, debido a que tienen una participación ínfima los podemos eliminar sin cometer un error apreciable, las ecuaciones anteriores (12, 13 y 14) se pueden simplificar:

$$v_x (\partial v_x / \partial x) + v_y (\partial v_x / \partial y) = \nu (\partial^2 v_x / \partial y^2) \quad (15)$$

$$v_x (\partial T / \partial x) + v_y (\partial T / \partial y) = \alpha (\partial^2 T / \partial y^2) \quad (16)$$

$$v_x (\partial C_A / \partial x) + v_y (\partial C_A / \partial y) = D_{AB} (\partial^2 C_A / \partial y^2) \quad (17)$$

resolviendo las ecuaciones anteriores para capa límite en placas planas:

$$2 f''' + f' f = 0 \quad (18)$$

$$\theta''' + 1/2 Pr f \theta' = 0 \quad (19)$$

$$\Gamma''' + 1/2 Sc f \Gamma' = 0 \quad (20)$$

obteniéndose así las ecuaciones de transferencia de momentum, energía y masa para capa límite en placas planas [2]. Analizando las tres ecuaciones anteriores se observa que son similares.

Partiendo de las ecuaciones fundamentales de transferencia de momentum calor y masa (1, 2, 3), resolviendo las ecuaciones de transporte para capa límite en placas planas (18, 19, 20) para obtener los perfiles de concentración adimensionales y tomando en cuenta la solución matemática de Blasius para el caso de momentum [5] y la solución de Pohlhausen [1] para el caso de calor y de masa, se obtienen los correspondientes coeficientes de momentum, calor y masa:

$$f_l = 1.3282 \operatorname{Re}^{-1/2} \quad (21)$$

$$h = (0.864 / L) k \operatorname{Re}^{1/2} \operatorname{Pr}^{1/3} \quad (22)$$

$$k_c = (0.864 D_{AB} / L) \operatorname{Re}^{1/2} \operatorname{Sc}^{1/3} \quad (23)$$

ANALOGIA DE COLBURN.

Partiendo de las siguientes ecuaciones propuestas por Colburn para momentum, calor y masa respectivamente :

$$\operatorname{Nu} = h D / k = 0.023 (\operatorname{Re})^{0.8} (\operatorname{Pr})^{0.33} \quad (24)$$

$$k_c D / D_{AB} = 0.023 (\operatorname{Re})^{0.8} (\operatorname{Sc})^{0.33} \quad (25)$$

$$f_D = 0.184 (\operatorname{Re})^{-0.2} \quad (26)$$

realizando igualdades y haciendo simplificaciones, se obtienen los factores de Colburn que comprueban la analogía entre los tres mecanismos

$$f_D / 8 = 0.023 (\operatorname{Re})^{-0.2} \quad (27)$$

$$Jq = \left[h / (C_p \rho v) \right] (Pr)^{0.66} = 0.023 (Re)^{-0.2} \quad (28)$$

$$Jm = k_c (Sc)^{0.66} / v = 0.023 (Re)^{-0.2} \quad (29)$$

es decir :

$$f_D / 8 = Jq = Jm \quad (30)$$

el factor de fricción utilizado para obtener las relaciones de la analogía de Colburn es el de Darcy, para utilizar el coeficiente de fricción que se obtiene para placas planas que es el factor de fricción de Fanning, simplemente se sustituye de la siguiente relación

$$f_D = 4 f_f \quad (31)$$

TRABAJO EXPERIMENTAL

1.) Discusión de los conceptos básicos

Los Temas propuestos a desarrollar por los alumnos son:

- * Descripción de capa límite y órdenes de magnitud.
- * Solución de Blasius para la ecuación de transferencia de momentum.
- * Solución de Pohlhausen para los perfiles de calor y de masa en capa límite.
- * Coeficientes de transporte en capa límite.
- * Analogías de los mecanismos de transporte y sus diferencias con la analogía de Colburn.

2.) Desarrollo experimental

Para la realización de la parte experimental, se montará el equipo mostrado en la figura V-A; posteriormente se procederá a calentar la placa plana a una temperatura constante utilizando para ello

la resistencia variable (para que la temperatura de operación se estabilice es conveniente esperar cinco minutos); se seleccionará una abertura para el paso de aire y se pondrá en marcha el ventilador.

Una vez encendido el ventilador se toman lecturas de: la temperatura de la corriente libre; la temperatura de la placa plana; la caída de presión registrada en el micromanómetro; el peso de la placa plana al inicio y final de la experimentación.

DESCRIPCION DEL EQUIPO

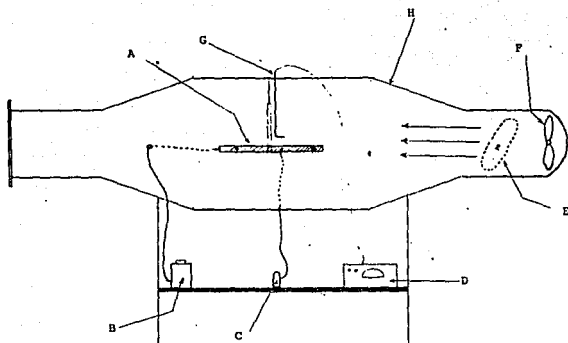


Fig. V-A. Esquema del equipo utilizado en la parte experimental de placas planas.

La descripción del equipo se muestra en la fig. V-A y es la siguiente:

- A : Placa plana de naftaleno.
- B : Resistencia variable "variac".
- C : Termómetro digital.
- D : Micromanómetro.
- E : Control del flujo de aire del ventilador.
- F : Ventilador.
- G : Tubo pitot.
- H : Equipo de secado de charolas intermitente.

CAPITULO VI

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El trabajo experimental realizado en el presente trabajo demostró que el objetivo en proponer una práctica en donde se estudiará de forma análoga los mecanismos de transferencia de momentum, calor y masa, utilizando la analogía de Colburn, es aceptable en el intervalo de números de Reynolds que proporcionan los equipos disponibles en el Laboratorio de Ingeniería Química. Los resultados experimentales obtenidos son similares a los reportados en la bibliografía y su comparación es satisfactoria como se muestra en las gráficas comparativas del presente trabajo (Gráficas IV-A a IV-I).

Debido a que el equipo disponible en el laboratorio de Ingeniería Química no era el adecuado para cumplir con el objetivo del presente trabajo, se tuvo la necesidad de fabricar material de apoyo que es necesario para la realización experimental, específicamente una placa plana de naftaleno.

La elaboración de la placa plana de naftaleno se realizó inicialmente con diferentes materiales, la de acero galvanizado fue la más adecuada debido a:

- * el peso y las dimensiones de la placa de acero galvanizado fueron las más adecuadas para el equipo utilizado en comparación con la de yeso, barro y vidrio, que fueron más pesadas y difíciles de manipular.
- * la transferencia de calor es mejor en el acero galvanizado debido a que el yeso, barro, vidrio y el acrílico, ya que éstos materiales son malos conductores del calor.
- * por otro lado, al tratar de colocar el naftaleno en el recipiente que contiene el sistema de calentamiento (parte B de la figura III-A) se tuvo el problema de que las resistencias flexibles se deterioran al verter el naftaleno a temperatura de fusión y las resistencias no flexibles son muy grandes y por lo tanto la placa plana se volvía muy voluminosa.

* El control de la temperatura, en comparación con una placa plana hecha con una resistencia de enchaquetamiento fue mucho más controlable.

Lo anterior se determinó después de numerosas pruebas experimentales. Las resistencias que se seleccionaron para la placa plana son flexibles y aisladas de 200 Amp. que se controlan fácilmente para el calentamiento por medio de una resistencia variable, como se muestra en la gráfica IV-A.

Para el estudio de la transferencia de masa, utilizando la analogía de Colburn se adicionó una evaluación para el cálculo de J_m por la medición experimental de la pérdida de peso en la placa de naftaleno, los resultados obtenidos que se muestran en la gráfica IV-B llevan a concluir que la transferencia de masa depende de la temperatura de operación, debido a esto, dicha transferencia puede ocurrir por arrastre ó sublimación por calentamiento, que en el presente trabajo se puede predecir con la ayuda de dicha gráfica.

Se recomienda que si se desea trabajar con otro compuesto diferente al naftaleno, se debe realizar un trabajo experimental similar que muestre la influencia de la temperatura sobre el factor J_m por pérdida de peso, porque al ser otro compuesto cambia su difusividad, su presión de vapor, su temperatura de fusión ó ebullición (según sea el caso) y por lo tanto cambiara la relación del factor de masa (J_m) por pérdida de peso con la temperatura de operación.

Este trabajo experimental (en placas planas) se extendió también a la forma geométrica de cilindros, comprobando que la analogía entre los tres mecanismos no depende de la forma geométrica. Se elaboró en este caso un cilindro de cobre sobre el cual se depositó naftaleno, en el cual se colocó un termopár de cromo-constantano que se recomienda

utilizar por el voltímetro empleado en la parte experimental para obtener las mediciones de temperatura adecuadas. Se recomienda aislar los polos de dicho termopar por medio de aislantes de cerámica para evitar lecturas erróneas de temperatura. Con todo esto el diámetro del cilindro de naftaleno resultó ser muy grande para el calibre de los orificios que posee el cambiador de calor de flujo cruzado del laboratorio, por lo cual fué necesario elaborar una caja que se ajustara al calibre requerido por el cilindro con naftaleno fabricado.

Para el caso de cilindros, de acuerdo a los resultados experimentales mostrados en las gráficas IV-G, IV-H, IV-I y IV-J, la analogía de Colburn se sigue cumpliendo, pero con la diferencia que para la obtención de los factores J_m y J_q se obtienen de manera diferente, además de que los coeficientes de momentum, calor y masa están afectados por el ángulo de separación, lo cual involucra el área de transferencia a considerar para la obtención de dichos coeficientes.

Para proponer una práctica de la analogía de Colburn en cilindros se recomienda realizar modificaciones al equipo de cambiador de calor de flujo cruzado fabricando una caja adecuada a las dimensiones requeridas por el cilindro de naftaleno ó en su defecto proponer un nuevo equipo para éste fin.

B I B L I O G R A F I A.

1. C.O. Bennett and J.E. Myers. Momentum, Heat and Mass Transfer. McGraw-Hill; U.S.A. 1982.
2. R.B. Bird. Fenómenos de Transporte. Repla S. A.; México 1987.
3. R. S. Brodkey & H. C. Hershey. Transport Phenomena. McGraw-Hill; U.S.A. 1988.
4. E. Costa N. Ingeniería Química. Vol. II Fenómenos de Transporte y Vol. III Flujo de fluidos. Alhambra; España 1984.
5. Crane. Flow of Fluid. Crane Co.; U.S.A. 1957.
6. T. B. Drew and W. P. Ryan. Industrial and Engineering chemistry Ago. 1931, 8, 945 " Mechanism of Heat Transmission "
7. E. R. G. Eckert. Analysis of Heat and Mass Transfer. McGraw-Hill; Japon 1972.
8. E. R. G. Eckert and E. Soehngen. Trans. ASME. Abr. 1952, 343. " Distribution of Heat-Transfer Coefficients Around Circular Cylinders in Crossflow ".
9. R. W. Fahien. Fundamentals of Transport Phenomena. McGraw-Hill; U.S.A. 1983.
10. C. J. Geankoplis. Mass Transport Phenomena. Holt Rinehart & Winston Inc.; U.S.A. 1972.
11. A.G. Hansen. Mecánica de Fluidos. Limusa; México 1971.
12. A. L. Horvath. Physical Properties of Inorganic Compounds. Edward Arnold; Gran Bretaña 1975.
13. F. P. Incropera. Fundamentals of Heat and Mass Transfer. John Wiley & Sons; Singapur 1990.
14. E. A. John. Introducción a la Mecánica de los Fluidos. Prentice-Hall internacional; España 1974.
15. J. M. Kay. Introducción al Estudio de la Mecánica de Fluidos y transferencia de calor. Marcombo; España 1984.

16. B. S. Massey. Mecánica de Fluidos. Continental; México 1983.
17. W. H. McAdams. Heat Transmission. McGraw-Hill; Japon 1954.
18. Parker, Boggs and Blick. Introduction to Fluid Mechanics and Heat Transfer. Addison-Wesley; U.S.A. 1974.
19. Perry, Robert and Don Green. Chemical Engineer's Handbook. McGraw-Hill; U.S.A. 1984.
20. K. Raznjevic. Handbook of Thermodynamic Tables and Charts. McGraw-Hill; U.S.A. 1976.
21. R. Roca. Introducción a la Mecánica de los Fluidos. Limusa; México 1980.
22. W. M. Rohsenow and H. Y. Choi. Heat, Mass and Momentum transfer. Prentice-Hall, Inc.; U.S.A. 1961.
23. Schlichting. Boundary Layer Theory. McGraw-Hill; U.S.A 1955.
24. I. H. Shames. Mechanics of Fluids. McGraw-Hill; U.S.A. 1982.
25. Sissom and Pitts. Elements of Transport Phenomena. McGraw-Hill; U.S.A. 1972.
26. J. C. Slattery. Momentum, Energy and Mass Transfer in Continua. McGraw-Hill; U.S.A. 1972.
27. L. Theodore. Transport Phenomena for Engineers. International Textbook Co. 1971.
28. J. R. Welty. Fundamentals of Momentum, Heat and Mass Transfer. John and Wiley & Sons; Singapur 1984.
29. S. Whitaker. AIChE Journal. Mar. 1972, 361. " Forced Convection Heat Transfer Correlations for flow....."