26
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LUXEMBURG Y ROBINSON DOS MODELOS DEL ANALISIS NO-ESTANDAR

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

NORMA ELVIRA PERALTA MARQUEZ

1993

LUXEMBURG Y ROBINSON DOS MODELOS DEL ANALISIS NO-ESTANDAR.

INDICE.

CAPITULO I.

INTRODUCCION (Histórica)....................................1

CAPITULO II.

CONCEPTOS PRELIMINARES.

-Lenguajes de primer orden..................................4

-Estructuras algebraico relacionales........................6

-Modelos..8

-Teorema de Compacidad (T.C.)...............................11

-Axioma de elección y algunos de sus equivalentes...........11

-Conceptos de álgebra.......................................12

-Conceptos de análisis matemático...........................15

CAPITULO III.

MODELO DE LUXEMBURG.

-Definición de R^* y algunas de sus propiedades...........16

-Modelo de R^* que es un ultraproducto....................20

-El sistema de los números reales no-estandar...............37

-Definiciones y propiedades de algunas entidades externas...48

CAPITULO IV.

MODELO DE ROBINSON.

-Existencia de un modelo no-estandar de $\mathcal{R}$ usando el T.C.....52

-Los sistemas $\mathcal{R}$ y ${}^*\mathcal{R}$.............53

-Método general para demostrar propiedades de una relación ${}^*R$ u operación ${}^*f$: principio de transferencia..................57

-Finitos, Infinitos e infinitesimales. Estandar y no-estandar. Propiedades algebráicas..................................58

CAPITULO V.

APLICACIONES DE AMBOS MODELOS.

-Límites, Continuidad y Diferenciabilidad (mod. Luxemburg)..63

-Límites, Continuidad y Diferenciabilidad (mod. Robinson)...68

CAPITULO VI.

ANALISIS DE LOS DOS MODELOS.

-Modelo de Luxemburg.....................................74

-Modelo de Robinson......................................76

-Conclusiones..77

BIBLIOGRAFIA...80

CAPITULO I

INTRODUCCION.

El desarrollo del análisis matemático usando números infinitamente pequeños e infinitamente grandes ha sido el objeto de interesantes y constantes controversias en la historia de las matemáticas. Retrocediendo tiempo atrás al siglo XVII nos damos cuenta que Leibniz fue uno de los más grandes defensores de un método que involucraba números infinitamente grandes e infinitamente pequeños en las primeras etapas del desarrollo del cálculo. Dado que ni Leibniz ni sus sucesores fueron capaces de dar con suficiente precisión cuáles eran las reglas supuestas para sus afirmaciones,la teoría de los infinitesimales entró en desprestigio y fue reemplazada por el método ε-δ .

Fue un reciente descubrimiento de Abraham Robinson (1963), que las nociones de la teoría de modelos pueden justificar los conceptos de infinitamente pequeño e infinitamente grande.

La existencia del modelo no-estandar se conoce desde hace poco tiempo; el término mismo apareció ya en un escrito de Skolem en 1934, en el cual construía un modelo no-estandar de los números naturales $\mathbb{N}$; en efecto la construcción que se usó tiene semejanza a la construcción de los ultraproductos descubierta posteriormente por Łos en 1954.

Con la extensión a lenguajes incontables, el Teorema de Completez de Gödel y el Teorema de Compacidad, llegó a ser claro que cualquier modelo infinito posee una extensión elemental.

En 1961 Abraham Robinson mostró que uno podría hacer muchas cosas interesantes con la extensión elemental de $\mathbb{R}$ y de esta manera uno podría desarrollar la teoría del cálculo de una manera casi idéntica a la sugerida por Leibniz en el siglo XVII.

Robinson ha demostrado que el sistema de números reales $\mathbb{R}$ puede ser extendido a un sistema de números $^*\mathbb{R}$ que incluye a números infinitamente grandes e infinitamente pequeños. El postulaba la existencia de un número positivo que es menor que cada número real positivo y tomando postulados adicionales, casi todos las afirmaciones verdaderas para los reales $\mathbb{R}$ eran también verdaderas para $^*\mathbb{R}$.

Dado que antes se consideraba que habría un isomorfismo entre $\mathbb{R}$ y $^*\mathbb{R}$ se llegaba a ciertas paradojas las cuales se desvanecen si nosotros seguimos la idea de Robinson de restringir la afirmación "las mismas propiedades" a "una colección específica de propiedades de $\mathbb{R}$", las cuales pueden ser formuladas en un lenguaje formal específico con la interpretación apropiada en $\mathbb{R}$ tanto como en $^*\mathbb{R}$ y en el cual el teorema del isomorfismo clásico para el sistema de números $\mathbb{R}$ no puede ser formulado; por supuesto el Teorema de Compacidad garantiza la existencia de tal sistema $^*\mathbb{R}$.

Hay sin embargo otra forma de establecer la existencia de $^*\mathbb{R}$, este método se conoce como la construcción de modelos en la forma de ultraproductos, que se puede desarrollar en el marco de la teoría axiomática de conjuntos y fue desarrollada por Luxemburg recientemente.

Desde un punto de vista histórico el establecer la existencia de $^*\mathbb{R}$ es un gran logro. Desde un punto de vista pragmático esta pieza puramente matemática se antepone por su capacidad para revolucionar la matemática elemental, por eliminación de ciertas afirmaciones por medio del método ε-δ, cuyo propósito es definir tantos conceptos básicos como lo son límite, continuidad y continuidad uniforme, entre otros, y que usando la Teoría infinitesimal podemos expresar las ideas intuitivas involucradas de manera directa y simple.

En el siguiente texto analizaremos los modelos de Luxemburg y de Robinson, (observación: Aquí analizamos la versión actualizada basada en la versión original del modelo de Robinson, y es por esta razón que la llamamos de igual manera) compararemos las ventajas y desventajas de ambos, y finalmente veremos algunas de sus aplicaciones.

CAPITULO II

CONCEPTOS PRELIMINARES.

Lenguajes de primer orden.

Supondremos que tenemos los siguientes símbolos de L.

-Símbolos lógicos

i)Paréntesis (,).

ii)Símbolos de conectiva: $\vee$, $\neg$

iii)Variables individuales $v_1, v_2, \ldots$

iv)Símbolo de igualdad =

v)Símbolo de cuantificador universal $\forall$

-Parámetros

i)Símbolos de relación

ii)Símbolos de constante

iii)Símbolos de función

Definición.

Tipo L es un conjunto cuyos elementos son símbolos de constante, de función o de relación. Cada tipo L determina a $\mathcal{L}_L$.

Definición.

Una expresión en L es cualquier sucesión finita de símbolos de $\mathcal{L}_L$, un lenguaje de primer orden de tipo L.

Definición.

Término.

1) Las variables y constantes de $\mathcal{L}$ son términos .

2) Si f^n es un símbolo de operación de $\mathcal{L}$ y $t_1,\ldots,t_n$ son términos entonces $f^n(t_1,\ldots,t_n)$ es $\mathcal{L}$-término.

3) Una $\mathcal{L}$-expresión es término solo sí lo es en base a 1) y 2).

Definición.

Las Fórmulas Bien Formadas (FBF), son aquellas expresiones que se pueden construir apartir de las fórmulas atómicas, usando los símbolos de conectiva y el símbolo de cuantificador. Mejor aún si V es fórmula atómica entonces $[V]$ es FBF, si V,W son FBF entonces $[V \vee W]$, $[\neg V]$ son FBF, y si V es FBF entonces $[\forall x\ V]$ es FBF.

Abreviamos $[\neg(\neg V \vee \neg W)]$ con $[V \wedge W]$,

Abreviamos $[\neg V \vee W]$ con $[V \longrightarrow W]$,

Abreviamos $[\neg(\neg(\neg V \vee W) \vee \neg(\neg W \vee V))]$ con $[V \longleftrightarrow W]$,

Abreviamos $[\neg \forall x \neg V]$ con $[\exists x V]$

Definición.

x ocurre libre en α

1) Si α es atómica, x ocurre libre en α ssí x ocurre en α.

2) x ocurre libre en $(\neg\alpha)$ ssí x ocurre libre en α.

3) x ocurre libre en $(\alpha \longrightarrow \beta)$ ssí x ocurre libre en α o en β.

4) x ocurre libre en $\forall v_i\ (\alpha)$ ssí x ocurre libre en α y $x \neq v_i$.

Si x no ocurre libre entonces está dentro del alcance de algún cuantificador, e.d. x está acotado.

Definición.

Una FBF V en $\mathcal{L}$ es un enunciado si ninguna variable ocurre libre en α. Una FBF es abierta si no tiene cuantificadores.

Definición.

Una FBF W en $\mathcal{L}$ está en Forma Normal Prenex (FNP) si es de la forma QV donde V es una FBF abierta y Q es una sucesión $Q_0x_0,\ldots,Q_nx_n$ donde cada $Q_i\in\{\forall,\exists\}$ y cada x_i es una variable.

Teorema de la forma normal prenex.

Para cualquier fórmula podemos encontrar una fórmula en forma prenex lógicamente equivalente a ella y con las mismas variables libres.

Demostración $*_1$

Definición.

A las FBF de $\mathcal{L}$ las cuales tienen la propiedad de que todos sus cuantificadores estan acotados, e.d. son de la forma: $(\forall x)[x\in A \Rightarrow \ldots]$ y $(\exists x)[x\in A \wedge \ldots]$ donde A es el dominio del cuantificador serán llamadas Admisibles.

Estructuras algebraico relacionales.

Una estructura $\mathfrak{A}$ para nuestro lenguaje de primer orden dado es un par ordenado (A,f) donde A es un conjunto no vacío y f es función de interpretación cuyo dominio es el conjunto de los parámetros y tal que:

1) A es un conjunto no vacío llamado universo de $\mathfrak{A}$.

2) f asigna a cada símbolo de predicado n-ario P una relación n-aria $P^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$ e.d. $P^{\mathfrak{A}}$ es un conjunto de n-adas de elementos del universo de $\mathfrak{A}$.

3) f asigna a cada símbolo de función n-aria F una operación n-aria $F^{\mathfrak{A}}$ en A e.d. $F^{\mathfrak{A}}:A^n \longrightarrow A$.

4) f asigna a cada símbolo de constante C un elemento $C^{\mathfrak{A}}$ del universo A.

Satisfacción.

Sean

φ una fórmula de nuestro lenguaje,

$\mathfrak{A}$ una estructura para el lenguaje,

$s:V \longrightarrow A$ una función del conjunto V de todas las variables en el universo A de $\mathfrak{A}$.

Definiremos lo que significa que $\mathfrak{A}$ satisface φ con s,

$$\models_{\mathfrak{A}} \varphi\ [s]$$

I) Términos.

Definimos la extensión $\bar{s}$ como una función de los términos en el universo de $\mathfrak{A}$.

$$\bar{s}:T \longrightarrow A$$

a) Para cada variable x, $\bar{s}(x)=s(x)$

b) Para cada símbolo de cte. c, $\bar{s}(c)= c^{\mathfrak{A}}$

c) Si $t_1,\ldots,t_n$ son términos y f es un símbolo de función n-aria, entonces

$$\bar{s}(f(t_1,\ldots,t_n))=f^{\mathfrak{A}}(\bar{s}(t_1),\ldots,\bar{s}(t_n)).$$

II) Fórmulas atómicas

a) $\models_{\mathfrak{A}} =(t_1 t_2)[s]$ ssí $\check{s}(t_1)=\check{s}(t_2)$

b) Si P es un símbolo de predicado n-ario

$$\models_{\mathfrak{A}} P(t_1,\ldots,t_n)[s] \text{ ssí } <\check{s}(t_1),\ldots,\check{s}(t_n)>\in P^{\mathfrak{A}}$$

III) Otras fórmulas.

a) $\models_{\mathfrak{A}} \neg\varphi[s]$ ssí $\not\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$

b) $\models_{\mathfrak{A}} (\varphi \longrightarrow \psi)[s]$ ssí $\not\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$ o $\models_{\mathfrak{A}} \psi[s]$ o ambas

c) $\models_{\mathfrak{A}} \forall x\ \varphi[s]$ ssí para todo $d\in A$ se tiene $\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s(x/d)]$

donde $s(x/d)$ es la función que coincide con s en todo excepto en la variable x que toma el valor d, e.d.

$$s(x/d)(y)=\begin{cases} s(y) & \text{si } y\neq x \\ d & \text{si } y=x \end{cases}$$

Modelos.

Consecuencia lógica.

Definición.

Sean Γ un conjunto de fórmulas, φ una fórmula. Entonces

Γ implica lógicamente a φ, o φ es consecuencia lógica de Γ, $\Gamma\models\varphi$, ssí para toda estructura $\mathfrak{A}$, para el lenguaje y toda función $s:V\longrightarrow A$ t.q. $\mathfrak{A}$ satisface todos los elementos de Γ con s, $\mathfrak{A}$ también satisface φ con s.

Decimos que φ y ψ son lógicamente equivalentes ssí $\varphi\models\psi$ y $\psi\models\varphi$.

Una fórmula φ es válida ssí $\phi\models\varphi$ (denotado por $\models\varphi$). Así, φ es válida ssí para toda $\mathfrak{A}$ y toda $s:V\longrightarrow A$, $\mathfrak{A}$ satisface φ con s.

Teorema.

Supongamos que s_1, s_2 son funciones de V en A que coinciden en todas las variables que ocurren libres en la fórmula φ. Entonces,

$$\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s_1] \text{ ssí } \models_{\mathfrak{A}} \varphi[s_2]$$

Demostración $*_1$.

Corolario.

Sea σ un enunciado. Entonces, o bien,

a) $\mathfrak{A}$ satisface σ con cualquier función s de V en A ó

b) $\mathfrak{A}$ no satisface σ con ninguna función tal.

-Si se cumple a) entonces decimos que σ es verdadero en $\mathfrak{A}$ ($\models_{\mathfrak{A}}\sigma$) ó $\mathfrak{A}$ es un modelo de σ y,

-Si se cumple b) entonces σ es falso en $\mathfrak{A}$ (No se pueden cumplir ambas).

$\mathfrak{A}$ es un modelo de un conjunto Σ de enunciados ssí es un modelo de todos los elementos de Σ.

Corolario.

Para un conjunto $\Sigma\cup\{\tau\}$ de enunciados $\Sigma\models\tau$ ssí todo modelo de Σ es modelo de τ.

Teorema.

1) $\models_{\mathfrak{A}}(\alpha\wedge\beta)[s]$ ssí $\models\alpha[s]$ y $\models\beta[s]$; similarmente para $\vee$ y $\leftrightarrow$.

2) $\models_{\mathfrak{A}}\exists x\ \alpha[s]$ ssí existe $d\in A$ t.q. $\models_{\mathfrak{A}}\alpha[s(x/d)]$.

Demostración.$*_1$.

Definibilidad de una clase de estructuras.

Para un conjunto Σ de enunciados, Sea $\mathrm{Mod}\Sigma$ la clase de todos los modelos de Σ, e.d. la clase de todas las estructuras para el lenguaje en las cuales todos los elementos de Σ son verdaderos.

Definibilidad dentro de una estructura.

Consideremos una estructura fija $\mathfrak{A}$. Supongamos que φ es una fórmula tal que todas las variables que ocurren libres en φ estan entre $v_1,\ldots,v_k$. Entonces para los elementos $a_1,\ldots,a_k$ de A

$$\models_{\mathfrak{A}} \varphi[a_1,\ldots,a_k]$$

significa que $\mathfrak{A}$ satisface φ con alguna (y por tanto con cualquier) función $s:V\longrightarrow A$ para la cual $s(v_i)=a_i$, $1\leq i\leq k$.
A cada φ y $\mathfrak{A}$ tales podemos asociar la relación k-aria en A,

$$\{<a_1,\ldots,a_k>: \models_{\mathfrak{A}} \varphi[a_1,\ldots,a_k]\}$$

Llamemos a ésta relación k-aria que φ define en $\mathfrak{A}$. En general, una relación k-aria en A se llama definible en $\mathfrak{A}$ ssí existe una fórmula (cuyas variables libres están entre $v_1,\ldots,v_k$) que la define en $\mathfrak{A}$.

Homomorfismos.

Sean $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$ estructuras para el lenguaje. Un homomorfismo h de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ es una función $h:A\longrightarrow B$ (donde A y B son sus universos respectivamente) tal que:

a) Para todo símbolo de predicado n-ario y toda n-ada $<a_1,\ldots,a_n>$ de elementos de A

$$<a_1,\ldots,a_n>\in P^{\mathfrak{A}} \text{ ssí } <h(a_1),\ldots,h(a_n)>\in P^{\mathfrak{B}}$$

b) Para todo símbolo de función n-aria f y toda n-ada tal,

$$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1,\ldots,a_n))=f^{\mathfrak{B}}(h(a_1),\ldots,h(a_n))$$

c) Para un símbolo de cte. c

$$h(c^{\mathfrak{A}})=c^{\mathfrak{B}}$$

Si además, h es uno a uno y sobreyectiva, entonces se llama un isomorfismo de $\mathfrak{A}$ sobre $\mathfrak{B}$ entonces $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ se dicen isomorfos ($\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}$)

Teorema de compacidad.

a) En particular un conjunto Σ de enunciados tiene modelo ssí todos sus subconjuntos finitos tienen modelo.

Demostración. $*_1$.

b) Si $\Gamma\models\varphi$ entonces existe un subconjunto finito $\Gamma_0\subseteq\Gamma$ de Γ t.q. $\Gamma_0\models\varphi$

Axioma de elección y algunos de sus equivalentes.

Axioma de elección.

Este es una afirmación muy especial en Teoría de Conjuntos, ya que afirma la existencia de algo para lo cual no se da una definición, su versión más sencilla es:

-Para todo conjunto de conjuntos no vacíos existe una función de elección, que elige un elemento en cada uno de los conjuntos no-vacíos.

Ahora daremos algunos de sus enunciados equivalentes.

Sea $<A,r>$ un COPO (Conjunto parcialmente ordenado), entonces una cadena en A es un subconjunto $C\subseteq A$ con el orden r restringido a C tal que $<C,r>$ es COTO (Conjunto totalmente ordenado).

1)Lema de Zorn.

Sea $<A,r>$ un COPO no vacío tal que para toda cadena C en A hay un elemento b en A tal que todo elemento de C está r-relacionado con b ó es igual a b (tal b se llama una cota superior de C). Entonces en A hay un elemento m que es maximal en $<A,r>$, en el sentido de que m no está r-relacionado con ningún elemento de A.

2)El producto cartesiano de cualesquiera conjuntos no-vacíos es no-vacío.

3)Para todo conjunto A, hay una función f, con dom.$(f)=\mathcal{P}(A)-\{\phi\}$ y $\forall B\subseteq A$ $f(B)\in B$.

Nosotros utilizaremos el Lema de Zorn, cuya equivalencia con el Axioma de elección está demostrada en $*_2$.

Conceptos de álgebra.

Definición.

Un conjunto $R\neq\phi$ es un anillo si en R hay definidas dos operaciones + y · respectivamente tales que para todo a, b, c en R.

1) $a+b$ esta en R

2) $a+b=b+a$

3) $(a+b)+c= a+(b+c)$

4) Existe un elemento 0 en R t.q. $a+0=a$ $\forall a\in R$

5) $\forall a\in R$ existe un elemento $-a$ en R t.q. $a+(-a)=0$

6) $a\cdot b$ esta en R

7) $a\cdot(b\cdot c)= (a\cdot b)\cdot c$

8) $a\cdot(b+c)= a\cdot b + a\cdot c$

Definición.

Un anillo conmutativo R es un anillo que tiene la propiedad de que para todo a,b en R $a\cdot b=b\cdot a$.

Definición.

Si R es un anillo conmutativo entonces $a\neq 0\in R$ se dice que es un divisor de cero si existe un $b\in R$, $b\neq 0$ t.q. $a\cdot b=0$

Definición.

Un anillo conmutativo es un dominio entero si no tiene divisores de cero.

Definición.

Un anillo es un anillo con división si sus elementos distintos de cero forman un grupo bajo multiplicación.

Definición.

Un campo es un anillo conmutativo con división.

Definición.

Un subconjunto no vacío U del anillo R es un ideal de R si

1) U es un subgrupo de R bajo adición.

2) Para todo $u \in U$ y $r \in R$ ambas $u \cdot r$ y $r \cdot u$ estan en U.

Definición.

Dado un ideal U de un anillo R, sea R/U el conjunto de todas las distintas clases laterales de U en R las cuales obtenemos considerando U como un subgrupo de R bajo la adición.

Definición.

Un ideal $M \neq R$ en un anillo R es ideal maximal de R si para todo ideal U de R, si $M \subset U \subset R$ entonces $R=U$ o $M=U$.

Teorema.

Si R es un anillo conmutativo con elemento unidad y M es un ideal de R, entonces M es un ideal maximal de R ssí R/M es un campo.

Demostración. $*_4$

Teorema.

Sean R,R' anillos y φ un homomorfismo de R sobre R' con kernel U. Entonces R' es isomorfo a R/U.

Demostración. $*_4$

Conceptos de análisis matemático.

Principio Arquimediano o Propiedad Arquimediana de los números reales $\mathbb{R}$ y algunos equivalentes.

a) $\forall x([x\in\mathbb{R} \wedge x>0] \Rightarrow \exists n[n\in\mathbb{N} \wedge nx>1])$

b) $\forall y\forall x([x,y\in\mathbb{R} \wedge x,y>0] \Rightarrow \exists n[n\in\mathbb{N} \wedge ny>x])$

c) $\forall x([x\in\mathbb{R} \wedge x>0] \Rightarrow \exists n[n\in\mathbb{N} \wedge x<n])$

d) $\forall x([x\in\mathbb{R} \wedge x>0] \Rightarrow \exists n[n\in\mathbb{N} \wedge 1/n<x])$

e) $\forall x([x\in\mathbb{R} \wedge x>0] \Rightarrow \exists n[n\in\mathbb{N} \wedge n-1\leq x<n])$

CAPITULO III

MODELO DE LUXEMBURG.

Definición de la estructura R^* y algunas de sus propiedades.

Definición.

Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Entonces definimos inductivamente los siguientes conjuntos:

$R_0 = \mathbb{R}$

$R_{n+1} = \mathcal{P}(\bigcup_{k=0}^{n} R_k)_{n=0,1,2,\ldots}$

Donde $\mathcal{P}(X)$ denota el conjunto de todos los subconjuntos de X.

A la $\bigcup_{n\geq 0} R_n$ le llamaremos la super estructura sobre $\mathbb{R}$ y la denotaremos con R^*.

Así pues, $R^* = \bigcup_{n\geq 0} R_n = \mathbb{R} \cup \mathcal{P}(\mathbb{R}) \cup \mathcal{P}(\mathbb{R} \cup \mathcal{P}(\mathbb{R})) \cup \ldots$

$R_0 = \mathbb{R}$ y observamos que $\mathbb{R} \cap R_n = \phi$ con $n \neq 0$ y $R_1 \subset R_2 \subset \ldots \subset R_n \subset R_{n+1} \subset \ldots$

y además que $\mathbb{R} \in R_1 \in R_2 \in \ldots \in R_n \in R_{n+1} \in \ldots$

A los elementos de R^* los llamaremos entidades de la superestructura R^* y a los de R_0, individuos de R^*. Definimos par ordenado en el sentido de Kuratowski:

$(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$

las n-adas quedan definidas inductivamente

$(a_1) = a_1$

$(a_1,\ldots,a_n,a_{n+1}) = ((a_1,\ldots,a_n),a_{n+1})$

por tanto las n-adas son entidades de R^*.

Podemos definir las operaciones algebráicas como relaciones ternarias; siendo P la relación producto y S la relación suma, entonces

$a \cdot b = c$ sí y sólo sí $(a,b,c) \in P \in R^*$

$a+b=c$ sí y sólo sí $(a,b,c) \in S \in R^*$ y así sucesivamente... por lo tanto las propiedades de $\mathbb{R}$ se expresan en términos de ciertas entidades de R^*.

Definición.

A las entidades de R_n-R_{n-1} $(n\geq1)$ los llamamos de rango n en R^*. A los individuos les damos rango 0 (es natural ya que los individuos aparecen por primera vez en R_0 que es la base), y el conjunto vacío tiene rango 1.

Observación.

Si $a \in R^*$ entonces el rango de a es el natural n más pequeño tal que $a \in R_n$.

Proposición 3.1

Si $a_1,a_2,...,a_n \in R_n$ entonces

$(a_1,a_2,...,a_n) \leq \max(rg\ (a_1),rg\ (a_2),...,rg\ (a_n))+2(n-1)$.

Dem.

Inducción sobre n.

n=1) sea $a_1 \in R^*$, $\Rightarrow rg(a_1)=\max\{rg(a_1)\}+2(0)$

n=2) sea a_1, $a_2 \in R^*$

$\Rightarrow rg(a_1,a_2) = rg\{\{a_1\},\{a_1,a_2\}\} = \max\{rg(a_1),rg(a_2)\} + 2(2-1)$

n=3) sea a_1, a_2, $a_3 \in R^*$

$$\begin{aligned}\Rightarrow rg(a_1,a_2,a_3)=rg((a_1,a_2),a_3)&=\max\{rg(a_1,a_2),rg(a_3)\}+2\\ &=\max\{\max\{rg(a_1),rg(a_2)\}+2,rg(a_3)\}+2\\ &=\max\{\max\{rg(a_1)+2,rg(a_2)+2\},rg(a_3)\}+2\\ &=\max\{\max rg(a_1)+4,rg(a_2)+4,rg(a_3)+2\}\\ &\leq\max\{\max rg(a_1),rg(a_2),rg(a_3)\}+2(3-1)\end{aligned}$$

supongamos que lo cumple n, p.d. el caso n+1 .

n+1) Sean $a_1, \dots, a_n, a_{n+1} \in R^*$

$$\Rightarrow \text{ como } (a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = ((a_1, \dots, a_n), a_{n+1})$$

$$\Rightarrow rg(a_1, \dots, a_{n+1}) = rg((a_1, \dots, a_n), a_{n+1})$$

$$= \max\{rg(a_1, \dots, a_n), rg(a_{n+1})\}+2$$

$$\leq_{h.i.} \max\{\max\{rg(a_1), \dots, rg(a_n)\}+2(n-1), rg(a_{n+1})\}+2$$

$$= \max\{\max\{rg(a_1)+2(n-1), \dots, rg(a_n)+2(n-1)\}, rg(a_{n+1})\}+2$$

$$\leq \max\{rg(a_1)+2(n-1), \dots, rg(a_n)+2(n-1), rg(a_{n+1})+2(n-1)\}+2$$

$$= \max\{rg(a_1), \dots, rg(a_n), rg(a_{n+1})\}+2(n-1)+2$$

$$= \max\{rg(a_1), \dots, rg(a_n), rg(a_{n+1})\}+2(n) \quad \blacksquare$$

Lema 3.2

i) $R_p \subset R_n \quad \forall\, n \geq p \geq 1$

ii) $\bigcup^n_{k=0} R_k = R_0 \cup R_n \ \forall\, n \geq 1$

iii) $R_k \in R_{n+1} \ \forall\, 0 \leq k \leq n \quad \forall\, n \geq 0$

iv) Si $x \in y \in R_n$ $(n \geq 1) \Rightarrow x \in R_0 \cup R_{n-1}$

v) Si $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in y \in R_p$ $(p \geq 1) \Rightarrow x_1, \dots, x_n \in R_0 \cup R_{p-1}$

En particular si $\varphi \in R^*$ es una relación binaria entonces su dominio $dom(\varphi) = \{x : \exists y\ (x,y) \in \varphi\} \in R^*$ y su rango $rg(\varphi) = \{y : \exists x\ (x,y) \in \varphi\} \in R^*$.

Dem.

i) Sea $p \geq 1$ y $n \geq p$

$\Rightarrow]$ $x \in R_p = \mathcal{P}(\bigcup^{p-1}_{k=0} R_k) \Rightarrow x \subset \bigcup^{p-1}_{k=0} R_k \subset \bigcup^{n-1}_{k=0} R_k$

$$\Rightarrow x \in \mathcal{P}(\bigcup^{n-1}_{k=0} R_k) = R_n.$$

ii) Sea $n \geq 1$

$\Rightarrow]$ Sea $x \in \bigcup^n_{k=0} R_k \Rightarrow \exists R_k$ tal que $x \in R_k$ p.a. $0 \leq k \leq n$

si $k=0 \Rightarrow x \in R_0$ y, si $k \geq 1 \Rightarrow x \in R_n$.

$\Leftarrow]$ Sea $x \in R_0 \cup R_n \Rightarrow x \in R_0$ o $x \in R_n \Rightarrow x \in \bigcup^n_{k=0} R_k$.

iii) $R_{n+1} = \mathcal{P}(\bigcup^n_{k=0} R_k) = \mathcal{P}(R_0 \cup R_n)$ y $R_k \in \mathcal{P}(R_0 \cup R_n)$.

iv) $R_n = \mathcal{P}(R_0 \cup R_{n-1})$ y como $y \in \mathcal{P}(R_0 \cup R_{n-1})$

$$\Rightarrow y \subset R_0 \cup R_{n-1} \text{ y } x \in y \Rightarrow x \in R_0 \cup R_{n-1} .$$

v) Sea $(x_1,\dots,x_n) \in y \in R_p \Rightarrow$ por iv) $(x_1,\dots,x_n) \in R_0 \cup R_{p-1}$

$$\Rightarrow \{\{(x_2,\dots,x_n)\},\{(x_2,\dots,x_n),x_n\}\} \in R_0 \cup R_{p-1}$$

$$= R_0 \cup \mathcal{P}(R_0 \cup R_{p-2})$$

$$\Rightarrow \{x_n\} \in R_0 \cup R_{p-2} = R_0 \cup \mathcal{P}(R_0 \cup R_{p-3})$$

$$\Rightarrow x_n \in R_0 \cup R_{p-3} \subset R_0 \cup R_{p-1} \text{ y así sucesivamente...}$$

■

El lenguaje L que ahora introduciremos es:

-Los simbolos de L son:

i) Los conectivos $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$.

ii) Una sucesión numerable de variables.

iii) Cuantificadores($\exists$) existencial y ($\forall$) universal.

iv) Paréntesis.

-Los parámetros de L son:

i) El predicado básico $\in$.

ii) Constantes. Este conjunto es infinito pero fijo.

Asumimos que el conjunto de constantes de L está en una corrrespondencia 1-1 con las entidades de la estructura R^* y ahora identificaremos las constantes. de L con las entidades de la estructura R^* tal y como si R^* fuera parte de L.

La interpretación del predicado básico $\in$ de L en R^* será la relación de pertenencia de la teoría de conjuntos.

Las fórmulas (admisibles, FBF y FNP), se construyen y definen como en el capitulo II.

El conjunto de las FBF admisibles de L se denotará por $K=K(L)$ y el subconjunto de K de todos los enunciados admisibles verdaderos en R^* por $K_0=K_0(L)$.

Toda *L-estructura ${}^{*}(R^{*})$ en la cual la L-estructura R^{*} puede ser propiamente inmersa y para la cual todo enunciado admisible de R^{*} verdadero en R^{*} con una interpretación adecuada de los símbolos en ${}^{*}(R^{*})$ tambien es verdadero en ${}^{*}(R^{*})$, se llamará un modelo no-estandar de orden superior de R^{*}. En ese caso el conjunto ${}^{*}R$ de individuos de ${}^{*}(R^{*})$ es un campo totalmente ordenado del cual $\mathbb{R}$ es un subcampo propio. Pero ${}^{*}(R^{*})$ no es la superestructura determinada por ${}^{*}R$, en efecto, si $A=\mathcal{P}(R)$ entonces bajo la inmersión de R^{*} en ${}^{*}(R^{*})$ estas constantes no denotaran el conjunto de todos los subconjuntos de ${}^{*}R$, será solamente un subsistema del conjunto potencia de ${}^{*}R$.

Modelo de R^{*} que es un ultraproducto.

Teoría de Filtros.

Definición.

Sea I un conjunto distinto del vacío entonces por filtro sobre I entendemos, un conjunto no vacío $\mathcal{U}$ de subconjuntos de I tal que cumple:

i) $\phi \notin \mathcal{U}$, $I\in\mathcal{U}$

ii) $\mathcal{U}$ es cerrado bajo intersecciones finitas

iii) Si $U \subset G$ y $U \in \mathcal{U}$ entonces $G\in\mathcal{U}$

Definición.

Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ es un filtro maximal(e.d. si $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ filtro entonces $\mathcal{U}=\mathcal{F}$).

Proposición 3.3.

Un filtro $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sí y sólo sí para todo $U \subset I$ $U \in \mathcal{U}$ o $I-U\in\mathcal{U}$.

Dem.

$\Rightarrow$] Sea $U \subset I$ y supongamos que $U \notin \mathcal{U}$, sea $G=\{x\subseteq I / U\cup x\in\mathcal{U}\}$.

Veamos primero que $\mathcal{U} \subseteq G$: sea $x \in \mathcal{U} \Rightarrow x \subseteq (U \cup x)$ y $\mathcal{U}$ filtro

$$\Rightarrow U \cup x \in \mathcal{U} \Rightarrow x\in G.$$ P.D. que G es filtro sobre I.

i) Si $\phi \in G \Rightarrow U \cup \phi = U \in \mathcal{U}$ pero supusimos que $U \notin \mathcal{U} \therefore \phi \notin G$

como $U \cup I = I \in \mathcal{U} \Rightarrow I \in G$.

ii) Sean $x_1, x_2 \in G$ p.d. $x_1 \cap x_2 \in G$

$$U\cup x_1,\ U\cup x_2 \in \mathcal{U} \Rightarrow (U\cup x_1) \cap (U\cup x_2) \in \mathcal{U} \quad \text{pero}$$

$$(U\cup x_1) \cap (U\cup x_2) = U \cup (x_1\cap x_2) \quad \therefore \quad (x_1\cap x_2) \in G.$$

iii) Sea $x_1 \in G$ y $x_1 \subseteq x_2$ p.d. $x_2 \in G$.

$$U\cup x_1 \subseteq U\cup x_2 \quad \text{como } U\cup x_1\in \mathcal{U} \Rightarrow U\cup x_2 \in \mathcal{U} \therefore x_2 \in G.$$

Así pues G es filtro, pero

$$U\cup(I-U)=I \in \mathcal{U} \Rightarrow (I-U) \in G \Rightarrow (I-U) \in \mathcal{U}$$

pues $\mathcal{U} = G$ porque $\mathcal{U}$ es ultrafiltro.

$\Leftarrow$] $\mathcal{U}$ es filtro y $\forall U\subseteq I$, $U\in\mathcal{U}$ o $I-U\in\mathcal{U}$ p.d. que $\mathcal{U}$ es ultrafiltro,

Sea $\mathcal{F}$ filtro tal que $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{F}$ y sup que $\mathcal{U}\neq\mathcal{F}$

$$\Rightarrow \exists w\in\mathcal{F} \text{ t.q. } w\notin\mathcal{U}$$

$$\Rightarrow I-w\in\mathcal{U} \Rightarrow (\text{como } \mathcal{U}\subset\mathcal{F})\ I-w\in\mathcal{F}$$

$$\Rightarrow w\cap I-w=\phi \in \mathcal{F} \text{ porque } \mathcal{F} \text{ es filtro } \nabla$$

contradice la suposición, por tanto la proposición es cierta.∎

Observación.

$\mathcal{U}$ es ultrafiltro ssí Para todo $f_i\subseteq I$ $i=i,..,n$, si $\bigcup^n_{i=1} f_i\in\mathcal{U}$ entonces $\exists i\in\{1,..,n\}$ t.q. $f_i\in\mathcal{U}$.

Dem.

$\Rightarrow$] Sean $fi \subseteq I$ $i=1,..,n$ y supongamos que $fi \notin \mathcal{U}$. para cada $i=1,..,n$

$$\Rightarrow I-fi \in \mathcal{U} \text{ para cada } i=1,..,n$$

$$\Rightarrow \bigcap^{n}_{i=1} I-fi = I-\bigcup^{n}_{i=1} fi \in \mathcal{U} \Rightarrow \bigcup^{n}_{i=1} fi \notin \mathcal{U}$$

$\Leftarrow$]p.d. que $\mathcal{U}$ es ultrafiltro

sea $U \neq \phi$ y $U \subseteq I \Rightarrow I-U \subseteq I \Rightarrow U \cup I-U = I \in \mathcal{U} \Rightarrow U \in \mathcal{U}$ o $I-U \in \mathcal{U}$. ■

Definición.

Un filtro $\mathcal{F}$ es llamado δ-incompleto, cuando existe una sucesión $F_n \in \mathcal{F}$ $(n=1,2,...)$ tal que $\bigcap^{\infty}_{n=1} F_n \notin \mathcal{F}$, y un filtro es llamado δ-completo si no es δ-incompleto.

Definición.

Un filtro $\mathcal{F}$ es llamado libre cuando $\bigcap(F:F \in \mathcal{F}) = \phi$.

Proposición 3.4.

Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ es δ-incompleto sí y sólo sí existe una partición numerable $\{I_n\}$ $n=1,2,...$ del conjunto I sobre el cual $\mathcal{U}$ está definido tal que $I_n \notin \mathcal{U}$ para todo $n=1,2,...$

Dem.

$\Leftarrow$] Sea $\{I_n\}_{n=1,2,...}$ partición t.q. $I_n \notin \mathcal{U}$ $\Rightarrow$ $I-I_n \in \mathcal{U}$ porque es ultrafiltro $\Rightarrow \bigcap^{\infty}_{n=1} I-I_n = I-\bigcup^{\infty}_{n=1} I_n = \phi \notin \mathcal{U}$ porque $\phi \notin \mathcal{U}$.

$\Rightarrow$]tenemos que existe una suc. $fn \in \mathcal{U}$ t.q. $\bigcap^{\infty}_{n=1} fn \notin \mathcal{U}$

Sea $\{fn : n < \omega\}$ con $fn \in \mathcal{U}$,

sea $g: I \longrightarrow \omega \cup \{\omega\}$ tal que

$\forall i$

$$g(i) = \begin{cases} \omega & \text{si } i \in \bigcap fn \\ \text{min. } n \ (n < \omega) \text{ t.q. } i \notin fn & \text{si } i \notin \bigcap fn \end{cases}$$

Entonces $\{g^{-1}(\alpha):\alpha \le \omega\}$ es una partición.

dem.

i) sea $\alpha=n$, $\beta=m$ sup. $i\in (g^{-1}(n)\cap g^{-1}(m)) \Rightarrow n=m$

sea $\alpha=w$, $\beta=n$ sup. $i\in (g^{-1}(w)\cap g^{-1}(n)) \Rightarrow i\in \cap fn$ y $i\notin fn$

$$\therefore \quad g^{-1}(w) \cap g^{-1}(n)=\phi .$$

ii) $\bigcup_{\alpha<\omega} g^{-1}(\alpha)=I$.

iii) no es vacía cada $g^{-1}(\alpha)$. $\therefore$ es una partición de I.

p.d. que $g^{-1}(n)\notin \mathcal{U}$. $\forall n$

caso 1 $n=\omega$

$\bigcap_{n=1}^{\infty} fn\in\mathcal{U}$ dado que tomamos la suseción que existe por ser $\mathcal{U}$ δ-incompleto

$$\Rightarrow \quad g^{-1}(\omega)= \bigcap_{n=1}^{\infty} fn\notin \mathcal{U}.$$

caso 2 $n<\omega$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow g^{-1}(n) = \{i\in I:g(i)=n\} \\ &\quad \subseteq \{i\in I:i\notin fn\}=I-fn \\ &\Rightarrow \text{dado que } fn\in\mathcal{U} \Rightarrow I-fn\notin\mathcal{U} \\ &\therefore \quad g^{-1}(n)\notin \mathcal{U}. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Procederemos ahora a describir una estructura la cual es un ultraproducto de R^*.

Sea I un conjunto infinito sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro δ-incompleto de subconjuntos de I y sea $\{In\}$ $n=1,2,...$ una partición numerable de I que satisface $In \notin \mathcal{U}$ para todo $n=1,2,...$

Definición.

Por R^{*I} denotamos el conjunto de todas las funciones de I en R^*. Existe una inmersión natural $a \longrightarrow {}^*a$, de R^*en R^{*I}

definida por ${}^{\bullet}a(i)=a$ para toda $i\in I$, es decir $R^{\bullet}$ está identificado en $R^{\bullet I}$ por las funciones constantes.

Definición

Si $a,b\in R^{\bullet I}$ entonces $a=_{\mathcal{U}}b$ sí y sólo sí $\{i:a(i)=b(i)\}\in \mathcal{U}$ y $a\in_{\mathcal{U}}b$ sí y sólo sí $\{i:a(i)\in b(i)\}\in \mathcal{U}$.

Como consecuencia inmediata de esta definición se tiene que $a=b$ sí y sólo sí ${}^{\bullet}a=_{\mathcal{U}}{}^{\bullet}b$ y $a\in b$ sí y sólo sí ${}^{\bullet}a\in_{\mathcal{U}}{}^{\bullet}b$.

Mostraremos que $\forall a,b\in R^{\bullet I}$ se tiene que $a=b$ o $a\neq b$ y $a\in b$ o $a\notin b$.

Sea $U_1=\{i:a(i)=b(i)\}$ y $U_2=\{i:a(i)\neq b(i)\}$ $\rightarrow U_1\bigcup U_2=I\in\mathcal{U}$

$\rightarrow$ $U_1\in\mathcal{U}$ y $U_2\notin\mathcal{U}$ o $U_2\in\mathcal{U}$ y $U_1\notin\mathcal{U}$ $\therefore$ $a=b$ o $a\neq b$.

La otra demostración es análoga.

Dado que los individuos de $R^{\bullet}$ son sin elementos pero $\neq \phi$, esto en teoría de conjuntos quiere decir que $R^{\bullet}$ esta basado sobre un conjunto a cuyos elementos se les nombra urelementos, en términos de $\in$ se demuestra el siguiente resultado.

Proposición 3.5.

$$a=b \text{ sí y sólo sí } \forall c\in R^{\bullet I}\ (a\in c \leftrightarrow b\in c).$$

Dem.

$\rightarrow]\rightarrow)$ Sup. $a=b$ sea $c\in R^{\bullet I}$ y supongamos que $a\in c$

$$\rightarrow U_1=\{i:a(i)=b(i)\}\in \mathcal{U} \quad \text{y} \quad U_2=\{i:a(i)\in c(i)\}\in\mathcal{U}$$

$$\rightarrow U_1\cap U_2=\{i:a(i)=b(i) \wedge a(i)\in c(i)\}$$

$$\subseteq \{i:b(i)\in c(i)\}\in \mathcal{U} \text{ pues } U_1\cap U_2\in\mathcal{U}$$

$$\therefore \quad b\in c.$$

$\Rightarrow]\Leftarrow$) Es análogo.

$\Leftarrow]$ Sea $a,b \in R^{\cdot I}$ p.d. $a=b$, sea $c\in R^{\cdot I}$ tal que $c(i)=\{a(i)\}\in R^{\cdot}$

$$\Rightarrow \{i:a(i)\in c(i)\}=I\in \mathcal{U} \therefore a\in c \therefore b\in c \therefore \{i:b(i)\in c(i)\}\in\mathcal{U}$$

$$\text{pero } \{i:b(i)\in c(i)\}=\{i:b(i)=a(i)\}\in \mathcal{U}$$

$$\therefore b=_{\mathcal{U}} a. \qquad \blacksquare$$

Asumimos que los elementos de $R^{\cdot I}$ estan relacionados 1-1 con las constantes del lenguage ${}^{*}L$, mejor aun ${}^{*}L$ tiene 2 predicados básicos $=,\in$, entonces se obtiene una ${}^{*}L$-estructura de $R^{\cdot I}$ cuyos conjuntos de enunciados verdaderos dependen de $\mathcal{U}$. Una subestructura de nuestra ${}^{*}L$-estructura será simplemente la que satisface en cierto sentido los enunciados de K_0.

Lema 3.6.

i) ${}^{*}\phi = \phi$

ii) si $a,b \in R^{\cdot}$ y $a\subset b \Rightarrow {}^{*}a\subset {}^{*}b$

iii) si $a,b \in R^{\cdot}$ entonces $a\in b \leftrightarrow {}^{*}a\in {}^{*}b$

iv) $\forall a\in R^{\cdot}$ ${}^{*}\{a\}=\{{}^{*}a\}$

v) si $a_1,\ldots,a_n$ $R^{\cdot}$ entonces a) ${}^{*}(\bigcup^{n}_{i=1}a_i)=\bigcup^{n}_{i=1}{}^{*}a_i$

b) ${}^{*}(\bigcap^{n}_{i=1}a_i)=\bigcap^{n}_{i=1}{}^{*}a_i$ c) ${}^{*}\{a_1,\ldots,a_n\}=\{{}^{*}a_1,\ldots,{}^{*}a_n\}$,

d) ${}^{*}(a_1,\ldots,a_n)=({}^{*}a_1,\ldots{}^{*}a_n)$ y e) ${}^{*}(a_1\times\ldots\times a_n)={}^{*}a_1\times,\ldots,\times{}^{*}a_n$.

vi) $\forall a,b\in R^{\cdot}$ ${}^{*}(a-b)={}^{*}a-{}^{*}b$.

vii) si $b\in R^{\cdot}$ y es una relación binaria $\Rightarrow$ a) ${}^{*}(\text{dom } b)=\text{dom } b^{*}$,

b) ${}^{*}(\text{rg } b)=\text{rg}\,{}^{*}b$ y $\forall a\in R^{\cdot}$ se tiene

${}^{*}(b(a))={}^{*}\{y:(\exists x(x\in a \wedge (x,y)\in b)\}$

$$={}^{*}b({}^{*}a)=\{y:\exists x(x\in {}^{*}a \wedge (x,y)\in {}^{*}b)\}.$$

Dem.

i) Es claro que $\{i:x(i)\notin{}^{*}\phi(i)\}=I\in\mathcal{U}$ para cualquier $x\in R^{\cdot I}$

$$\therefore {}^{*}\phi=\phi$$

ii) Sea $a,b \in R^{\bullet}$ y $a \subset b$ p.d. ${}^{\bullet}a \subset {}^{\bullet}b$

$$c \in {}^{\bullet}a \;\rightarrow\; U_1=\{i:c(i)\in {}^{\bullet}a(i)\}\in \mathcal{U}$$

$$\rightarrow\; U_1=\{i:c(i)\in a\}\in \mathcal{U}$$

$$a\subset b \rightarrow\; U_1\subset\{i:c(i)\in b\}= U_2$$

$$\text{como } U_1\in\mathcal{U} \;\wedge\; U\subset_1 U_2 \;\rightarrow\; U_2\in \mathcal{U}$$

$$\rightarrow\; U_2=\{i:c(i)\in {}^{\bullet}b(i)\}\in \mathcal{U} \;\;\therefore\;\; {}^{\bullet}a\subset {}^{\bullet}b.$$

iii) $${}^{\bullet}a\in {}^{\bullet}b \leftrightarrow \{i:{}^{\bullet}a(i)\in {}^{\bullet}b(i)\}\in \mathcal{U}$$

$$\leftrightarrow \{i:a\in b\}\in \mathcal{U} \;\;\leftrightarrow\;\; a\in b.$$

iv) $$x\in\{{}^{\bullet}a\} \;\leftrightarrow\; x={}^{\bullet}a \leftrightarrow \{i:x(i)={}^{\bullet}a(i)\}\in \mathcal{U}$$

$$\leftrightarrow \{i:x(i)=a\}\in \mathcal{U}$$

$$\leftrightarrow \{i:x(i)\in\{a\}\}\in \mathcal{U}$$

$$\leftrightarrow \{i:x(i)\in {}^{\bullet}\{a\}(i)\}\in \mathcal{U}$$

$$\leftrightarrow x\in {}^{\bullet}\{a\}.$$

v) a) $$c\in {}^{\bullet}(\cup^n{}_{j=1}a_j) \;\leftrightarrow\; \{i:c(i)\in {}^{\bullet}(\cup^n{}_{j=1}a_j)(i)\}\in \mathcal{U}$$

$$\leftrightarrow\; \{i:c(i)\in\cup^n{}_{j=1}a_j\}\in\mathcal{U}$$

$$\leftrightarrow\; \{i:c(i)\in R^{\bullet}-\cup^n{}_{j=1}a_j\}\notin \mathcal{U}$$

$$\leftrightarrow\; \{i:c(i)\in\cap^n{}_{j=1}(R^{\bullet}-a_j)\}\notin \mathcal{U}$$

$$\leftrightarrow\; \{i:c(i)\in(R^{\bullet}-a_j)\,\forall_{j=1,\dots,n}\}\notin \mathcal{U}$$

$$\leftrightarrow\; \cap^n{}_{j=1}\{i:c(i)\in(R^{\bullet}-a_j)\}\notin \mathcal{U}$$

$$\leftrightarrow\; I-\cap^n{}_{j=1}\{i:c(i)\in(R^{\bullet}-a_j)\}\in \mathcal{U}$$

$$\leftrightarrow\; \cup^n{}_{j=1}I-\{i:c(i)\in(R^{\bullet}-a_j)\}\in \mathcal{U}$$

$$\leftrightarrow\; \exists_j \text{ t.q. } I-\{i:c(i)\in R^{\bullet}-a_j\}\in \mathcal{U} \text{ p.a. } j=1,\dots,n$$

$$\leftrightarrow\; \exists_j \text{ t.q. } I-(I-\{i:c(i)\in a_j\}\in \mathcal{U} \text{ p.a. } j=1,..,n$$

$$\leftrightarrow\; \exists_j \text{ t.q. } \{i:c(i)\in a_j\}\in \mathcal{U} \text{ p.a. } j=1,..,n$$

$$\leftrightarrow\; \exists_j \text{ t.q. } \{i:c(i)\in {}^{\bullet}a_j(i)\}\in \mathcal{U} \text{ p.a.} j=1,..,n$$

$$\leftrightarrow\; \exists j \text{ t.q. } c\in {}^{\bullet}a_j \quad \text{p.a.} j=1,..,n. \;\therefore\; c\in\cup^n{}_{j=1}{}^{\bullet}a_j$$

b) $c\in {}^*(\bigcap^n_{j=1}a_j) \leftrightarrow \{i:c(i)\in {}^*(\bigcap^n_{j=1}a_j)(i)\}\in \mathcal{U}$

$$\leftrightarrow \{i:c(i)\in \bigcap^n_{j=1}a_j\}\in \mathcal{U}$$

$$\leftrightarrow \{i:c(i)\in a_j\ \forall_{j=1,\dots,n}\}\in \mathcal{U}$$

$$\leftrightarrow \bigcap^n_{j=1}\{i:c(i)\in a_j\}\in \mathcal{U}$$

$$\leftrightarrow \forall_{j=1,\dots,n}\{i:c(i)\in a_j\}\in \mathcal{U}$$

$$\leftrightarrow \forall_{j=1,\dots,n}\{i:c(i)\in {}^*a_j(i)\}\in \mathcal{U}$$

$$\leftrightarrow \forall_{j=1,\dots,n} c\in {}^*a_j \quad \leftrightarrow \quad c\in \bigcap^n_{j=1}{}^*a_j .$$

c)Dem. inducción sobre n.

para $n=1\ {}^*\{a\}=\{{}^*a\}$ por iv)

supongamos la proposición cierta para n, p.d. n+1.

$$\{{}^*a_1,\dots,{}^*a_n,{}^*a_{n+1}\}=\{{}^*a_1,\dots,{}^*a_n\}\cup\{{}^*a_{n+1}\}={}^*\{a_1,\dots,a_n\}\cup{}^*\{a_{n+1}\}$$
$$={}^*\{a_1,\dots,a_n,a_{n+1}\}.$$

d)Dado que el par ordenado fue definido según Kuratowski y las n-adas inductivamente con el inciso anterior queda demostrado que:

$$\text{d)}\ {}^*(a_1,\dots,a_n)=({}^*a_1,\dots,{}^*a_n)$$

Analogamente para e) ${}^*(a_1\times\dots\times a_n)= {}^*a_1\times\dots\times{}^*a_n$.

vi) $c\in{}^*(a-b) \quad \leftrightarrow U_1=\{i:c(i)\in{}^*(a-b)(i)\}\in\mathcal{U}$

$$\leftrightarrow U_1=\{i:c(i)\in(a-b)\}\in \mathcal{U}$$

$$\leftrightarrow U_1=\{i:c(i)\in a \wedge c(i)\notin b\}\in \mathcal{U}$$

$$\leftrightarrow (\{i:c(i)\in a\} \cap \{i:c(i)\notin b\})\in \mathcal{U}$$

$$\leftrightarrow \{i:c(i)\in{}^*a(i)\}\in \mathcal{U} \text{ y } \{i:c(i)\notin{}^*b(i)\}\in \mathcal{U}$$

$$\leftrightarrow c\in{}^*a \text{ y } c\notin{}^*b \qquad \therefore\ c\in {}^*a-{}^*b.$$

vii) a) $x\in{}^*(\mathrm{dom}b). \leftrightarrow \{i:x(i)\in {}^*(\mathrm{dom}b)(i)\}\in \mathcal{U}$

$$\leftrightarrow \{i:x(i)\in \mathrm{dom}\ b\}\in \mathcal{U}$$

$$\leftrightarrow \{i:\exists y\ (x(i),y)\in b\}\in \mathcal{U}$$

$$\leftrightarrow A=\{i:\exists y\ (x(i),y)\in {}^*b(i)\}\in \mathcal{U}$$

$$A\subset B \overset{\exists}{\Leftarrow\!\Rightarrow} \quad B=\{i: (x(i),y_0(i))\in {}^{*}b(i)\}\in \mathcal{U} \quad @1$$

$$\text{def.}(x,y0) \overset{B=D\cap C}{\Leftarrow\!\Rightarrow} \quad C=\{i: (x,y_0)(i)\in {}^{*}b(i)\}\in \mathcal{U} \quad @2$$

$$\Longleftrightarrow (x,y_0)\in {}^{*}b$$

$$\exists \overset{\text{sea } y=y0}{\Leftarrow\!\Rightarrow} \exists y\ (x,y)\in {}^{*}b \quad @3$$

$$\Longleftrightarrow x\in \mathrm{dom}({}^{*}b)$$

@1 Sea $i_0\in A$, sea y_{i_0} t.q. $(x_{i_0},y_{i_0})\in {}^{*}b_i$

$$\text{sea } y \text{ t.q} \quad y(i)=\begin{cases} y \text{ t.q. } (x(i),y)\in b & \text{si } i\in A \\ y_{i_0} & \text{si } i\in I-A \end{cases}$$

@2 Sea $D=\{i:(x,y_0)(i)=(x(i),y_0(i))\}\in \mathcal{U}$

Dado que los enunciados de las matemáticas se pueden expresar en el lenguaje de teoría de conjuntos, e.d. se pueden expresar en términos de $\in$ e $=$, entonces podemos escribir lo que significa par ordenado y pasarlo a $R^{\cdot I}$ y utilizar las definiciones de $\in$ e $=$ modulo el ultrafiltro $\mathcal{U}$.

@3 Fijamos un $y=y_0$ (Instancia existencial).

La demostración es análoga para el caso de b) ${}^{*}(\mathrm{rg}\ b)=\mathrm{rg}({}^{*}b)$. ∎

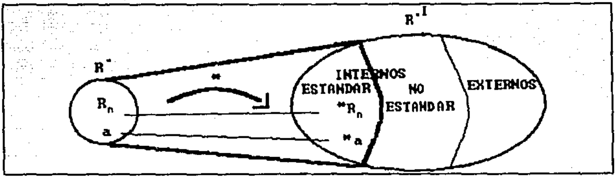
Definición.

Una entidad a de la ${}^{*}L$-estructura $R^{\cdot I}$ es llamada interna cuando existe un número natural n tal que $a\in {}^{*}Rn$. Una entidad interna a es llamada estandar cuando existe una entidad $b\in R^{\cdot}$ tal que $a={}^{*}b$. Toda entidad la cual no es interna es llamada externa.

El conjunto $\bigcup_{n\geq 0} {}^{*}Rn$ de todas las entidades internas es llamado el ultraproducto de $R^{\cdot}$ con respecto al ultrafiltro $\mathcal{U}$ y será denotado ${}^{*}(R^{\cdot})$.

Observación.

Notese que la función $a \longrightarrow {}^{*}a$ de $R^{\cdot}$ en $R^{\cdot I}$, inmersa $R^{\cdot}$ en la subestructura ${}^{*}(R^{\cdot})$ de $R^{\cdot I}$.



OBSERVACIONES

$R^{\cdot} = \bigcup Rn$

1- ${}^{*}(R^{\cdot}) = \bigcup {}^{*}Rn = \{x \in R^{\cdot I} : x$ es interno$\}$ es transitivo, e.d. todo elemento de un interno es interno

2- ${}^{*}[R^{\cdot}] = \{{}^{*}a : a \in R^{\cdot}\} = \{x \in R^{\cdot I} : x$ es estandar$\}$ no es transitivo, e.d. un elemento de un estandar puede no ser estandar; aunque si interno.

3- ${}^{*}[R^{\cdot}] \subset \bigcup {}^{*}Rn$ y ${}^{*}[R^{\cdot}] \neq \bigcup {}^{*}Rn$.

La noción de rango se extiende de inmediato a entidades internas.

Una entidad interna $a \in {}^{*}(R^{\cdot})$ se dice que tiene rango n ($n \geq 1$) cuando $a \in {}^{*}R_n - {}^{*}R_{n+1}$; las entidades de ${}^{*}R_0$ tienen rango 0 y les llamamos individuos de ${}^{*}(R^{\cdot})$, nuevamente el conjunto ${}^{*}\phi$ tiene rango 1.

Teorema 3.7.

Existen entidades internas las cuales no son estandar. En efecto si $a \in R^{\cdot}$ es una entidad la cual tiene una infinidad de elementos, entonces existe una entidad $b \in {}^{*}a$ tal que b es no estandar.

Dem.

Dado que a es un conjunto infinito existe una sucesion $\{bn\}$ $n=1,\dots$ de elementos de a tales que $bn \neq bm$ $\forall n,m=1,2,\dots$

Sea In una partición de I tal que $In \notin \mathcal{U}$, $\forall n=1,\dots$

$\Rightarrow$ Sea $b: I \longrightarrow a$ t.q. $b(i)=bn$ $\forall i \in In$ $(n=1,2,\dots)$

Claramente $b \in {}^{*}a$ pues $\{i : b(i) \in a\} = I \in \mathcal{U}$ pues $b(i)=bn \in a$ (si $i \in In$)

sin embargo $b \neq x$ para todo x estandar; pues si x es estandar entonces $x = {}^{*}c$ para algún $c \in R^{*}$ y entonces $x(i)=c$, $\forall i \in I$ de donde

$$\{i \in I : x(i)=b(i)\} = \begin{cases} \phi \\ \{i_0\} \text{ p.a. } i_0 \in In \subset I \text{ p.a. } n. \end{cases}$$

$\{i_0\} \subset In \notin \mathcal{U}$ porque $\mathcal{U}$ es δ-incompleto con la partición In dada, por lo tanto $\{i_0\} \notin \mathcal{U}$. Así pues $\{i \in I : x(i)=b(i)\} \notin \mathcal{U}$ y $b \neq x$ para cualquier x estandar, e.d. b es un elemento no estandar

■

Proposición 3.8.

Una entidad a es interna ssí a es un elemento de una entidad estandar.

Dem.

$\Rightarrow$] a es interna $\Rightarrow \exists n$ t.q. $a \in {}^{*}Rn$ y ${}^{*}Rn$ es estandar pues $Rn \in R^{*}$.

$\Leftarrow$]p.d. que si $a \in {}^{*}b$, $b \in R^{*} \Rightarrow$ a es interna.

$b \in R^{*} \Rightarrow \exists Rn$ t.q. $b \in Rn$ p.a. $n>0$ como $a \in {}^{*}b$, $\exists i$ t.q. $a(i) \in b$

$$\Rightarrow b \notin R_0 \Rightarrow b \subset R_{n-1}$$

$$\Rightarrow a \in {}^{*}b \subset {}^{*}R_{n-1} \therefore a \in {}^{*}R_{n-1} \therefore \text{ a es interna.}$$ ■

Teorema 3.9.

Si $a \in b \in {}^{*}R_n (n \geq 1)$ entonces $a \in {}^{*}R_0 \cup {}^{*}R_{n-1}$, esto es los elementos de una entidad interna son internos

Dem.

$$b\in{}^{*}R_n \Rightarrow U=\{i:b(i)\in{}^{*}R_n(i)\}\in \mathcal{U}$$
$$\Rightarrow U=\{i:b(i)\in R_n\}\in \mathcal{U}$$
$$\Rightarrow U=\{i:b(i)\subset R_0\cup R_{n-1}\}\in \mathcal{U} \text{ y } V=\{i:a(i)\in b(i)\}\in \mathcal{U} \text{ porque } a\in b$$
$$\Rightarrow U\cap V=\{i:a(i)\in b(i) \wedge b(i)\subset R_0\cup R_{n-1}\}\in \mathcal{U}$$
$$\le\{i:a(i)\in R_0\cup R_{n-1}\}\in \mathcal{U}$$
$$\Rightarrow \{i:a(i)\in{}^{*}(R_0\cup R_{n-1})_1(i)\}\in \mathcal{U} \quad \therefore\ a\in{}^{*}R_0\cup{}^{*}R_{n-1}$$

■

Análogo al caso de la L-estructura $R^{\cdot}$ llamaremos una ${}^{\bullet}$L-FBF admisible cuando todos los cuantificadores que ocurren en esta son de la forma "$(\forall x)[[x\in a]\Rightarrow\ldots]$" y "$(\exists x)[[x\in a]\wedge\ldots]$" donde a denota una entidad constante de $R^{\cdot I}$.

Definición.

Una FBF admisible de ${}^{\bullet}$L es llamada interna cuando todas las constantes que ocurren en esta denotan entidades internas. Una FBF admisible de ${}^{\bullet}$L es llamada estandar cuando todas las constantes que ocurren en esta denotan entidades estandar. Por tanto una FBF estandar es interna.

Definición.

El conjunto de todos los enunciados internos de ${}^{\bullet}$L se denotarán por ${}^{\bullet}K={}^{\bullet}K({}^{\bullet}L)$ y el subconjunto de todos los enunciados internos los cuales son verdaderos en ${}^{\bullet}(R^{\cdot})$ se denotarán por ${}^{\bullet}K_0={}^{\bullet}K_0({}^{\bullet}L)$.

Si V es una FBF admisible de L, entonces su *-transformación a ${}^{\bullet}$V se definirá a ${}^{\bullet}$L como una FBF estandar la cual fue ontenida de V al remplazar en V todas las constantes digamos, $a_1,\ldots,a_p$ que ocurran en esta, por

$\bullet a_1,\ldots,\bullet a_p$; pero dejando las variables y los parentesis inalterados.

Teorema 3.10.

Sea $V=V(x_1,\ldots,x_p)$ es una L-FBF admisible con las variables libres $x_1,\ldots,x_p$ y sea $A=\{(x_1,\ldots,x_p):(x_1,\ldots,x_p)a$ y $V(x_1,\ldots,x_p)\}$, donde a es una entidad arbitraria de R^*. Entonces $A\in R^*$ y ${}^\bullet A=\{(y_1,\ldots,y_p):(y_1,\ldots,y_p)\in{}^\bullet a$ y ${}^\bullet V(y_1,\ldots,y_p)\}$.

Dem.

$A\in R^*$ está dado.

- $V=V(x_1,\ldots,x_p,a_1,\ldots,a_q)$ es atómica

$\leftrightarrow$ V es $(x_1,\ldots,x_p,a_1,\ldots,a_{q-1})\in a_q$ o

$(x_1,\ldots,x_{p-1},a_1,\ldots,a_q)\in x_p$

con posibles permutaciones de variables y ctes..

$\leftrightarrow$ por def.y lema 3.6 ${}^\bullet A=\{(x_1,\ldots,x_p):(x_1,\ldots,x_p)\in{}^\bullet a$ y $(x_1,\ldots x_p,{}^\bullet a_1,\ldots,{}^\bullet a_{q-1})\in{}^\bullet a_q={}^\bullet V\}$.

-Si V es una L-FBF sin cuantificadores.

Sea V y W dos L-FBF admisibles y tales que cumplen el teorema.

p. d. que $[V\wedge W]$ y $[\neg V]$ lo cumplen.

Asumimos que ${}^\bullet A=\{(x_1,\ldots,x_p):(x_1,\ldots,x_p)\in{}^\bullet a$ y ${}^\bullet V\}$.

p. d. ${}^\bullet B=\{(x_1,\ldots,x_p):(x_1,\ldots,x_p)\in{}^\bullet a$ y $\neg{}^\bullet V\}$ donde $B=a-A$

$\leftrightarrow {}^\bullet B={}^\bullet a-{}^\bullet A.$

Ahora $V=V(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q)$ y $W=W(x_1,\ldots,x_p,z_1,\ldots,z_r)$

entonces $A=\{(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots y_q,z_1,\ldots,z_r):(x_1,\ldots,z_r)\in a$ y $[V\wedge W]\}$

$\leftrightarrow A=\{(x_1,\ldots,y_q):(x_1,\ldots,y_q)\in a$ y $V\}\cap$

$\{(x_1,\ldots,z_r):(x_1,\ldots,z_r)\in a$ y $W\}$

$\leftrightarrow {}^\bullet A={}^\bullet\{(x,\ldots,y):(x,\ldots,y)\in a$ y $V\}\cap{}^\bullet\{(x,\ldots,z):(x,\ldots,z)\in a$ y $W\}$

$\leftrightarrow {}^\bullet A=\{(x,\ldots,y):(x,\ldots,y)\in{}^\bullet a$ y ${}^\bullet V\}\cap\{(x,\ldots,z):(x,\ldots,z)\in{}^\bullet a$ y ${}^\bullet W\}$.

-Si V tiene cuantificadores entonces aplicamos inducción sobre el número de cuantificadores.

Para n=0 ya se demostró.

Supongamos que la afirmación es cierta para fórmulas con menos que o con igual que n cuantificadores.

P. d. para n+1 cuantificadores.

Sea $V=(qx_{n+1})\ldots(qx_1)W(x_1,\ldots,x_{n+1},y_1,\ldots,y_q)$ donde V está en FNP, $q\in\{\forall,\exists\}$, W sin cuantificadores y $y_1,\ldots,y_q$ son variables libres que ocurren en V.

Caso 1 Sup que $qx_{n+1}=\exists x_{n+1}$, b denota el dominio de este cuantificador, dado que V es admisible, $b\in R^*$.

$$B=\{((y_1,\ldots,y_p),x_{n+1}):((y_1,\ldots,y_p),x_{n+1})\in a\times b \text{ y } (qx_n)\ldots(qx_1)W\}$$

con $a\in R^*$

$\leftrightarrow$ h.i.

$$^{*}B=\{((y_1,\ldots,y_p),x_{n+1}):((y_1,\ldots,y_p),x_{n+1})\in {}^{*}a\times{}^{*}b \text{ y } (qx_n)\ldots(qx_1)\,{}^{*}W\}$$

El dominio de la relación binaria es el conjunto:

$$A=\{(y_1,\ldots,y_p):(y_1,\ldots,y_p)\in a \text{ y } (\exists x_{n+1})(x_{n+1}\in b \wedge (qx_n)\ldots(qx_1)W)\}$$
$$=\{(y_1,\ldots,y_p):(y_1,\ldots,y_p)\in a \text{ y } V(y_1,\ldots,y_p)\}$$

El dominio de la relación $^{*}B$ es por lo tanto

$$\{(y_1,\ldots,y_p):(y_1,\ldots,y_p)\in{}^{*}a \text{ y } (\exists x_{n+1})(x_{n+1}\in{}^{*}b \wedge (qx_n)\ldots(qx_1)\,{}^{*}W)\}$$
$$=\{(y_1,\ldots,y_p):(y_1,\ldots,y_p)\in{}^{*}a \text{ y } {}^{*}V(y_1,\ldots,y_p)\}.$$

Por el lema 3.6 obtenemos

$$^{*}A=\{(y_1,\ldots,y_p):(y_1,\ldots,y_p)\in{}^{*}a \text{ y } {}^{*}V\}.$$

Caso 2

Sea $A=\{(x_1,\ldots,x_p):(x_1,\ldots,x_p)\in a \text{ y } V(x_1,\ldots,x_p)\}$

donde $qx_{n+1}=\forall x_{n+1}$

$$C=a-A=\{(x_1,\ldots,x_p):(x_1,\ldots,x_p)\in a \text{ y } \neg V(x_1,\ldots,x_p)\}$$
$$\leftrightarrow {}^{*}C={}^{*}a-{}^{*}A=\{(y_1,\ldots,y_p):(y_1,\ldots,y_p)\in {}^{*}a \text{ y } \neg {}^{*}V(y_1,\ldots,y_p)\}$$
$$\leftrightarrow {}^{*}A={}^{*}a-({}^{*}a-{}^{*}A)=\{(y_1,\ldots,y_p):(y_1,\ldots,y_p)\in {}^{*}a \text{ y } {}^{*}V(y_1,\ldots,y_p)\}$$

■.

TEOREMA FUNDAMENTAL ACERCA DE ULTRAPRODUCTOS (T.F.).

Teorema 3.11.

${}^{*}(R^{\cdot})$ es un modelo no-estandar de $R^{\cdot}$ de orden superior, esto es, un enunciado admisible V de K(L) es verdadero en $R^{\cdot}$ sí sólo sí ${}^{*}V$ es verdadero en ${}^{*}(R^{\cdot})$ y $R^{\cdot}$ esta propiamente inmerso en ${}^{*}(R^{\cdot})$.

Dem.

Que $R^{\cdot}$ está propiamente inmerso en ${}^{*}(R^{\cdot})$, está dado por el teorema 3.7.Sea V una L-FBF admisible

p. d. que $V\in K_0 \leftrightarrow {}^{*}V\in {}^{*}K_0$

-Si V no tiene cuantificadores entonces:

a) Si V es atómica por la def. ya está dado.

b) Si V,W son fórmulas sin cuantificadores tales que cumplen el teorema ent.

$${}^{*}(V\wedge W)\in {}^{*}K_0 \leftrightarrow {}^{*}V\wedge {}^{*}W\in {}^{*}K_0 \leftrightarrow V\in K_0 \text{ y } W\in K_0.$$

c) Si $V=\neg W$ con W fórmula sin cuant. tal que cumple el teorema ent.

$$\neg V\in K_0 \leftrightarrow \neg\neg W\in K_0 \leftrightarrow W\in K_0 \leftrightarrow {}^{*}W\in {}^{*}K_0 \leftrightarrow \neg\neg {}^{*}W\in {}^{*}K_0 \leftrightarrow \neg {}^{*}V\in {}^{*}K_0.$$

-Si V tiene cuantificadores ent. demostramos utilizando inducción sobre el número de cuantificadores.

Si n=0 ya está demostrado.

Sup. que el teorema es verdadero para todas las fórmulas con menor que o igual que n cuantificadores.

P. d. que es verdadero para fórmulas con n+1 cuantificadores.

Sea $V=(qx_{n+1})\ldots(qx_1)W$ en FNP.

Caso 1. $(qx_{n+1})=\exists x_{n+1}$

$$V\in K_0 \leftrightarrow A=\{x_{n+1}:x_{n+1}\in a \text{ y } (qx_n)\ldots(qx_1)W\}\neq\phi$$

donde a es el dominio de $(\exists x_{n+1})$

$$\leftrightarrow {}^*A=\{x_{n+1}:x_{n+1}\in {}^*a \text{ y } (qx_n)\ldots(qx_1)\,{}^*W\}\neq{}^*\phi$$

$$\therefore\ {}^*V\in{}^*K_0.$$

Caso 2. $(qx_{n+1})=\forall x_{n+1}$

$$V\in K_0 \leftrightarrow A=\{x_{n+1}:x_{n+1}\in a \text{ y } (q'x_n)\ldots(q'x_1)\neg W\}=\phi$$

$$\leftrightarrow {}^*A=\{x_{n+1}:x_{n+1}\in {}^*a \text{ y } (q'x_n)\ldots(q'x_1)\neg{}^*W\}={}^*\phi$$

$$\therefore\ {}^*V\in{}^*K_0 \qquad \blacksquare$$

Ejemplos de aplicación de (T.F.) 3.12.

i) Los individuos de R^* son los urelementos de teoría de conjuntos de R^* en el sentido de que ellos son $\neq\phi$ y no hay entidades de R^* que sean elementos de individuos. Este enunciado en K_0 se puede expresar como:

$$\forall x(\forall y([x\in R] \wedge [y\in R_n] \rightarrow \neg[y\in x]))_{n=0,1,2,\ldots}$$

$\leftrightarrow$(T.F.)

$$\forall x(\forall y([x\in{}^*R] \wedge [y\in{}^*R_n] \rightarrow \neg[y\in x]))_{n=0,1,2,\ldots}$$

En palabras, no hay entidades internas las cuales sean elementos de los individuos de ${}^*(R^*)$.

ii) La unión de elementos de un conjunto es un conjunto. En K_0:

$$\forall z([z\in R_n] \rightarrow \exists y([y\in R_n] \wedge \forall x([x\in R_n] \rightarrow [[x\in y]] \leftrightarrow \exists u([u\in R_n] \wedge [u\in z] \wedge [x\in u]))))$$

$\leftrightarrow$(F.T.)

$$\forall z([z\in{}^*R_n] \rightarrow \exists y([y\in{}^*R_n] \wedge \forall x([x\in{}^*R_n] \rightarrow [[x\in y]] \leftrightarrow \exists u([u\in{}^*R_n] \wedge [u\in z] \wedge [x\in u]))))$$

En ${}^{*}K_0$ la unión de elementos de una entidad interna es una entidad interna.

iii) Para todo conjunto existe un conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de este conjunto. En K_0:

$$\forall x([x\in R_n] \rightarrow \exists y([y\in R_{n+1}] \wedge \forall z([z\in R_n] \rightarrow [[z\in Y] \leftrightarrow [z\subseteq x]])))_{n=1,2,\ldots}$$

$\leftrightarrow$ (F.T.)

$$\forall x([x\in {}^{*}R_n] \rightarrow \exists y([y\in {}^{*}R_{n+1}] \wedge \forall z([z\in {}^{*}R_n] \rightarrow [[z\in Y] \leftrightarrow [z\subseteq x]])))_{n=1,2,\ldots}$$

En ${}^{*}K_0$ el conjunto de todas las entidades internas las cuales son subconjuntos de una entidad interna es una entidad interna.

iv) El dominio y el rango de cualquier entidad de R^{*} el cual es una relación binaria (B_n denota las entidades de todas las relaciones binarias de rango $\leq n$) es una entidad de R^{*}. En K_0.

$$\forall b([b\in B_n] \rightarrow \exists z([z\in R_n] \wedge \forall x([x\in R_n] \rightarrow [[x\in z] \leftrightarrow \exists y([y\in R_n] \wedge [(x,y)\in b])])))_{n=1,2,\ldots}$$

$\leftrightarrow$(T.F.)

$$\forall b([b\in {}^{*}B_n] \rightarrow \exists z([z\in {}^{*}R_n] \wedge \forall x([x\in {}^{*}R_n] \rightarrow [[x\in z] \leftrightarrow \exists y([y\in {}^{*}R_n] \wedge [(x,y)\in b])])))_{n=1,2,\ldots}$$

En ${}^{*}K_0$ el dominio y rango de cualquier relación binaria interna es interna.

Teorema 3.13.

Sea $V=V(x_1,\ldots,x_n)$es una FBF interna con variables libres $x_1,\ldots,x_n$ y sea $a\in {}^{*}(R^{*})$ una entidad interior entonces el conjunto $\{(x_1,\ldots,x_n):(x_1,\ldots,x_n)\in a$ y $V(x_1,\ldots,x_n)\}$ es interno.

Dem.

Caso a) V no tiene cuantificadores

Sea $V=V(x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_p)$ donde $a_1,\ldots,a_p$ son las constantes que ocurren en V (estas son entidades internas).

→ Definimos la función E:

$E:I \longrightarrow R_n$ p.a. n tal que

$i \longrightarrow E(i)$ donde

$E(i)=\{(x_1,..,x_n):(x_1,..,x_n)a(i)$ y $V(x_1,..,x_n,a_1(i),..,a_p(i))\}$

$$E\in {}^{*}R_n \leftrightarrow \{i:E(i)\in R_n\}\in \mathcal{U} \text{ pero } \{i:E(i)\in R_n\}=I\in \mathcal{U}$$

$$\therefore E=\{(x_1,\ldots,x_n):(x_1,\ldots,x_n)\in a \text{ y } V\} \text{ es interno.}$$

Caso b) V tiene cuantificadores.

Inducción sobre num. de cuantificadores.

h.i. Supongamos el teorema válido para FBF con menos que o igual que n cuantificadores.

Sea $V=(qx_{n+1})\ldots(qx_1)W$, V en FNP, con $y_1,\ldots,y_p$ variables libres

Caso1) $q=\exists$ con $\mathrm{dom}(b)\in {}^{*}(R^{\cdot})$, dado que b es interna entonces se sigue que la relación binaria

$B=\{((y_1,..,y_p),x_{n+1}):((y_1,..,y_p),x_{n+1})\in a\times b$ y

$$(qx_n)..(qx_1)W(y_1,..y_p,x_{n+1})\} \text{ es interna.}$$

→ ej.3.12 iv) su dominio

$\{(y_1,..,y_p):(y_1,..,y_p)\in a$ y $(\exists x_{n+1})(qx_n)..(qx_1)W\}$ es interno.

Caso 2) Tomamos $\neg V$ y procedemos análogamente. ■

El sistema de los números reales no-estandar.

El conjunto ${}^{*}\mathbb{R}$ de individuos del $\mathcal{U}$-ultraproducto ${}^{*}(R^{\cdot})$ de la superestructura $R^{\cdot}$, donde $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro δ-incompleto tiene, según el T.F., las mismas propiedades de $\mathbb{R}$ que pueden ser expresadas como enunciados de K_0.

Dado que $\mathbb{R}$ es un campo totalmente ordenado, es facil ver que esta propiedad puede ser expresada por enunciados de K_0; por esto ${}^*\mathbb{R}$ es un campo totalmente ordenado.

La inmersión $a \longrightarrow {}^*a$ de $\mathbb{R}$ en ${}^*\mathbb{R}$ inmersa $\mathbb{R}$ en un subcampo de ${}^*\mathbb{R}$

Notación.

Nuestras expresiones algebráicas se denotarán igual al pasar de $\mathbb{R}$ a ${}^*\mathbb{R}$ aunque el significado es diferente e.d. $a+b=c$ en ${}^*\mathbb{R}$ significa $\{i:a(i)+b(i)=c(i)\}\in \mathcal{U}$, similarmente para la sustracción y la multiplicación, además $a\le b$ en ${}^*\mathbb{R}$ significa $\{i:a(i)\le b(i)\}\in \mathcal{U}$.

El que $\mathbb{R}$ sea totalmente ordenado puede expresarse por el siguiente enunciado de K_0

$$\forall x,\ \forall y\ ([x\in R \wedge y\in R] \rightarrow [x<y] \vee [x=y] \vee [x>y])$$

$\Rightarrow$ por T.F.

$$\forall x,\ \forall y\ ([x\in {}^*R \wedge y\in {}^*R] \rightarrow [x<y] \vee [x=y] \vee [x>y])$$

se tiene que la relación de orden extendida a ${}^*\mathbb{R}$ ordena totalmente a ${}^*\mathbb{R}$.

El elemento unitario $e\in{}^*\mathbb{R}$ que tiene la propiedad de, para todo $0\ne r\in R$ ${}^*r({}^*r)^{-1}=e$ y está dado por $e={}^*1$ donde $1\in R$; por esto simplificamos la notación no usando mas la $*$-notación que denota los individuos estandar de ${}^*\mathbb{R}$, dado que ahora identificamos a $\mathbb{R}$ con el subcampo de los números estandar de ${}^*\mathbb{R}$ y haciendo un abuso de notación escribimos $\mathbb{R}\subset{}^*\mathbb{R}$.

El valor absoluto $/r/$ de un número real r se define por

$$/r/=r \quad \text{si} \quad r > 0 \qquad \text{y} \qquad /r/=-r \quad \text{si} \quad r < 0$$

y es una función de $\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^+$ donde $R^+=\{r\in R/r\ge 0\}$;
esta función extendida de R^+ en ${}^*(R^+)$ como la función ${}^*/\ /$ es

$${}^*/a/=a \ \ \forall 0\le a\in{}^*\mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad {}^*/a/=-a \ \ \forall 0\ge a\in{}^*\mathbb{R}$$

y es una función de ${}^*\mathbb{R}\longrightarrow{}^*(\mathbb{R}^+)$ por el T.F., de esta manera también utilizamos la misma notación para /a/ donde a es un número real t.q. $a\in{}^{*}\mathbb{R}$. Análogamente para max(,), min(,) de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, sus extenciones son *max(,), *min(,) de ${}^{*}\mathbb{R}\times{}^{*}\mathbb{R}\longrightarrow{}^{*}\mathbb{R}$ respectivamente.

Denotemos con S un subconjunto de $\mathbb{R}$. Entonces pasando a ${}^{*}(\mathbb{R}^{\cdot})$, ${}^{*}S$ denota un subconjunto de ${}^{*}\mathbb{R}$ el cual es una entidad estandar y tiene las mismas propiedades de S que pueden ser expresadas con enunciados de K_0. Mejor aún la subestructura ${}^{*}(S^{\cdot})$ de ${}^{*}(R^{\cdot})$ donde $S^{\cdot}$denota la superestructura definida por S, es un modelo ultrapotencia no-estandar de $S^{\cdot}$. Como ya habíamos mencionado anteriormente con un abuso de notación escribimos $S\subset{}^{*}S$. Mas aún, damos la siguiente caracterización.

Proposición 3.14.

$$S={}^{*}S \text{ ssí } S \text{ es un conjunto finito.}$$

Dem.

Sea $S\subset\mathbb{R}$

$\Leftarrow$] Sea S finito digamos $S=\{s_1,\ldots,s_n\}$ con $n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow$ ${}^{*}S={}^{*}\{s,\ldots,s\}=\{{}^{*}s,\ldots,{}^{*}s\}$ y dada la identificación anteriormente mencionada concluimos que $S={}^{*}S$.

$\Rightarrow$] Supongamos que S es infinito.

$\Rightarrow$ $S\in R^{\cdot}$ entonces (teorema 3.7) existe una entidad $b\in{}^{*}S$ tal que b es no-estandar $b\neq{}^{*}s$ $\forall s\in S$ $b\notin S$, e.d.

$$\therefore\ S\neq{}^{*}S \qquad \blacksquare$$

Si la constante $\mathbb{N}$ denota a el conjunto de los números naturales de $\mathbb{R}$ entonces la entidad no-estandar ${}^{*}\mathbb{N}$ denota un conjunto de números de ${}^{*}\mathbb{R}$ el cual tiene las mismas propiedades de $\mathbb{N}$ que pueden ser expresadas como enunciados de K_0. Mejor aún precisamente ${}^{\bullet}(\mathbb{N}^{\bullet})$ es un modelo no-estandar ultraproducto de orden superior de la aritmética.

Dado que ${}^{\bullet}\mathbb{R}$ es una extensión propia de $\mathbb{R}$ y con el resultado del álgebra que afirma que todo campo Arquimediano es isomorfo a un subcampo de $\mathbb{R}$ podemos concluir que ${}^{\bullet}\mathbb{R}$ es no Arquimediano. Pero ${}^{\bullet}\mathbb{R}$ tiene las mismas propiedades que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$ es Arquimediano.

Examinemos pues esta aparente paradoja.

El que $\mathbb{R}$ sea Arquimediano puede ser expresado como enunciado de K_0 así:

$$\forall x\ ([x\in\mathbb{R} \wedge x>0] \Rightarrow \exists n\ [n\in\mathbb{N} \wedge nx>1])$$

$\Rightarrow$por T.F.

$$\forall x\ ([x\in{}^{\bullet}\mathbb{R} \wedge x>0] \Rightarrow \exists n\ [n\in{}^{\bullet}\mathbb{N} \wedge nx>1])$$

e.d. con la interpretación apropiada de constantes ${}^{\bullet}\mathbb{R}$ es Arquimediano con respecto a ${}^{\bullet}\mathbb{N}$. Y no Arquimediano en el sentido del metalenguaje e.d. $0<a\in{}^{\bullet}\mathbb{R}$ entonces existe un número natural n en el metalenguaje tal que $a+\ldots+a>1$ n-veces, es decir, un número finito de veces.

Ahora solo consideraremos algunas propiedades de $\mathbb{R}$ y sus extensiones, las cuales pueden ser formuladas en lenguaje de primer orden e.d. los enunciados en los cuales la cuantificación es sobre números solamente.

Propiedad de completud de Dedekind de $\mathbb{R}$

Todo subconjunto no-vacío de $\mathbb{R}$ el cual está acotado superiormente tiene una mínima cota superior.

Esta afirmación acerca de $\mathbb{R}$ puede expresarse como enunciado de K_0 que contiene un cuantificador universal cuyo rango está sobre subconjuntos de $\mathbb{R}$. Entonces por T.F. $^*\mathbb{R}$ satisface una propiedad de completud de Dedekind en la siguiente forma: Todo subconjunto interno no-vacío de $^*\mathbb{R}$ el cual está acotado superiormente tiene una mínima cota superior.

Dado que $^*(\mathbb{N}^*)$ es un modelo no-estandar de orden superior de la aritmética se tiene que bajo la apropiada interpretación del T.F. el modelo $^*(\mathbb{N}^*)$ satisface todos los axiomas de Peano; por tanto el pricipio de inducción que afirma que, todo subconjunto de números naturales tiene un primer elemento, debe interpretarse en $^*(\mathbb{N}^*)$ en el siguiente sentido: todo subconjunto interno no vacío de $^*\mathbb{N}$ tiene un primer elemento.

Proposición 3.15.

Existe un número $\omega\in{}^*\mathbb{N}$ tal que $/r/<\omega$ para todo $r\in\mathbb{R}$

Dem.

Sea $\{In\}$ $n=1,2,\ldots$ partición de I t.q. $In\notin\mathcal{U}$ $\forall n$

definimos $\omega:I\longrightarrow\mathbb{N}$ t.q. $\omega(i)=n$ $\forall i\in In$ $(n=1,2,\ldots)$

$\Rightarrow$ para todo $s\in\mathbb{N}$ $A=\{i:\omega(i) < s\}\notin\mathcal{U}$,

como en $\mathbb{R}$ existe la propiedad arquimediana entonces dado un real r existe un natural n tal que $r<n$ e.d.

$$\{i:\omega(i)\leq r\} \subseteq \{i:\omega(i) < n\}\notin\mathcal{U} \therefore B=\{i:\omega(i)\leq r\}\notin\mathcal{U}$$

por definición $\omega\in{}^*\mathbb{N}$ y si tomamos I-B concluimos $/r/<\omega$ ∎

Esta prueba está basada en que $\mathcal{U}$ es δ-incompleto, y demostramos que $^*\mathbb{N}$ contiene un número más grande que cualquier número real positivo, al cual llamaremos infinitamente grande.

Definición.

Un número $a\in{}^*\mathbb{R}$ es llamado finito siempre que exista un número real $0<r\in\mathbb{R}$ t.q. $/a/<r$. Un número $a\in{}^*\mathbb{R}$ que no es finito se denomina infinito.

Un número $a\in{}^*\mathbb{R}$ es llamado infinitesimal siempre que $/a/<r$ para todo $0<r\in\mathbb{R}$.

Al conjunto de todos los números finitos de ${}^*\mathbb{R}$ lo denotaremos M_0 y al de todos los infinitesimales por M_1.

Obsérvese que $\mathbb{R}\subset M_0$, $M_1\subset M_0$ y $M_1\cap\mathbb{R}=\{0\}$ e.d. 0 (cero) es el único infinitesimal estandar.

Definición.

Dados $r,s\in\mathbb{R}$ decimos que r es infinitamente cercano a s ($r\approx s$) ssí $/r-s/\in M_1$.

Proposición 3.16.

Un número $a\in{}^*\mathbb{R}$ es infinito ssí $/a/>r$ $\forall 0<r\in\mathbb{R}$

Dem.

$\Leftarrow$]Como $/a/>r$ $\forall 0<r\in\mathbb{R}$ entonces a no es finito e.d es infinito por definición.

$\Rightarrow$]Sup que $\exists r\in\mathbb{R}$ t.q. $/a/<r$ $\Rightarrow$ a es finito. ∎

Por esto el núm. ω definido anteriormente es infinito, su recíproco es un infinitesimal. De manera más general:

Proposición 3.17.

Un número $0\neq a\in{}^*\mathbb{R}$ es un infinitesimal ssí su recíproco $1/a$ es infinito.

Dem.

$$1/a \text{ es infinito} \leftrightarrow \forall r \in \mathbb{R}\ \ 1/|a| > r$$

$$\leftrightarrow \forall r > 0 \in\ \ /a/ < 1/r \leftrightarrow a \text{ es infinitesimal.} \blacksquare$$

Teorema 3.18.

Un número $n \in {}^*\mathbb{N}$ es finito ssí n es un número natural. (e.d. ${}^*\mathbb{N} \cap M_0 = \mathbb{N}$)

Dem.

$\supseteq$]Ya está dado puesto que $\mathbb{N} \subset M_0$ y $\mathbb{N} \subset {}^*\mathbb{N}$

$\subseteq$]Sea $x \in \mathbb{N} \cap M_0$. En K_0 se tiene el siguiente enunciado:

$\forall x([x \in \mathbb{N}] \Rightarrow [x \leq r] \leftrightarrow [x=1] \vee [x=2] \vee \ldots \vee [x=p])$

donde r y p son constantes y p=[r] es la parte entera de r.

$\Rightarrow$ t.r.

Obtenemos que n=1 o n=2 o...on=[r] $\therefore$ $x \in \mathbb{N}$ $\blacksquare$

De este teorema se sigue que el conjunto de todos los números naturales infinitamente grandes está dado por ${}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$.

La función $r \longrightarrow [r]$ de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{N} \cup \{0\}$ donde [r] denota el mayor entero no negativo menor o igual a r se extiende de R^* a ${}^*(R^*)$ a la función ${}^*[\ \ ]$ de ${}^*(\mathbb{R}^+)$ a ${}^*\mathbb{N} \cup \{0\}$ por el T.F. se sigue que para todo $0 \leq a \in {}^*\mathbb{R}$, ${}^*[a]$ es el entero no negativo más grande menor o igual que. También en este caso simplificamos la $*$-notación.

M_0 es un subanillo de ${}^*\mathbb{R}$ porque $M_0 \subset {}^*\mathbb{R}$ y $(M_0, +|_{M0}, \cdot|_{M0})$ es un anillo y es un dominio entero ya que M_0 no tiene divisores de cero.

M_1 es un subanillo de M_0 por la misma razón, además si $h \in M_1$ y $a \in M_0$ entonces $ah \in M_1$ por lo tanto M_1 es un ideal en M_0. P.d. que M_1 es un ideal maximal en M_0.

Dem.

Sea U ideal de M_0 y sup. que $M_1 \subset U \subset M_0$ y $M_1 \neq U$ p.d. $U=M_0$

$\Rightarrow \exists i \in U-M_1 \quad \Rightarrow i$ es finito no-infinitesimal

$\Rightarrow$ sea $i^{-1} \in M_0$ el inverso multiplicativo de i

$\Rightarrow ii^{-1}=1 \in U \Rightarrow U=M_0$ ∎

Consideremos el anillo cociente M_0/M_1 entonces dado que M_1 es un ideal maximal en M_0, el anillo cociente M_0/M_1 es un campo (ver teorema de álgebra cap. II). Afirmamos entonces el siguiente teorema.

Teorema 3.19.

El anillo cociente M_0/M_1 es orden isomórfico (que hay un isomorfismo que respeta el orden) al campo de los números $\mathbb{R}$.

Dem.

-Si A es una clase de equivalencia de M_0/M_1, entonces A no puede tener dos números reales distintos r_1, r_2, porque de ser así $/r_1-r_2/\approx 0$ con $r_1 \neq r_2$ entonces $/r_1-r_2/ \in \mathbb{R}$

$\therefore /r_1-r_2/</r_1-r_2/ \quad \nabla \quad \therefore \mathbb{R}$ es un subcampo de M_0/M_1.

P.d. A todo $a \in M_0$ le corresponde un único número real r el cual es único t.q. $/a-r/\approx 0$.

Sea $a \in M_0$ entonces los conjuntos $D=\{r: r \in \mathbb{R}$ y $r \leq a\}$ y $D'=\mathbb{R}-D$ definen una cortadura de Dedekind (D,D') en $\mathbb{R}$.

Sea $r \in \mathbb{R}$ el cual determina la misma cortadura (D,D')

p.d. $a \approx r$; si no, entonces por definición $\exists 0<\varepsilon \in \mathbb{R}$ t.q. $/a-r/\geq \varepsilon$

-si $a>r \Rightarrow a-r \geq \varepsilon > \varepsilon/2 \Rightarrow a > r+\varepsilon/2 \therefore$ a y r no determinan la misma cortadura ∇

-si $a<r \Rightarrow -a+r \geq \varepsilon > \varepsilon/2 \Rightarrow a < r-\varepsilon/2 \therefore$ a y r no determinan la misma cortadura ∇

$\therefore\ a \approx r$

Unicidad. Sup. $a \approx r_1$ y $a \approx r_2$ $\Rightarrow r_1 \approx r_2$ ∇

M_1 es el kernel dado que si $a \in M_1 \Rightarrow a \approx 0$

El único homomorfismo de anillo y de orden de M_0 sobre $\mathbb{R}$ con kernel M_1 determina entonces que $\mathbb{R}$ es isomorfo a M_0/M_1(Ver teoremas de álgebra cap. II).■

Definición.

El homomorfismo de anillo y orden encontrado será llamado parte estandar y se denotará por st.

Proposición 3.20.

Sean $x,y \in M_0$ $st(x)=st(y)$ ssí $x-y \in M_1$ e.d. $x \approx y$.

Dem.

$\Rightarrow]$ $x \approx st(x)=st(y) \approx y$ $\qquad \therefore\ x \approx y$

$\Leftarrow]$ Tenemos que $st(x) \approx st(y)$ pero $st(x)$ y $st(y)$ estan en $\mathbb{R}$

$\therefore\ st(x)=st(y)$ ■

Teorema 3.21.

Sean a,b en M_0

i) $st(a+b)=st(a)+st(b)$, $st(ab)=st(a)st(b)$, $st(a-b)=st(a)-st(b)$

ii) $a \leq b$ entonces $st(a) \leq st(b)$

iii) $st(/a/)=/st(a)/$, $st(\max(a,b))=\max(st(a),st(b))$

$st(\min(a,b))=\min(st(a),st(b))$

iv) $st(a)=0$ ssí $a \in M_1$

v) para todo estandar $r \in \mathbb{R}$ se tiene $st(r)=r$

vi) si $st(a) \geq 0$ entonces $/a/ \approx st(a)$

Dem.

Sean $a'=st(a)$ y $b'=st(b)$

i) como $a\approx a'$ y $b\approx b'$ $\Rightarrow$ $a+b\approx a'+b'$, $ab\approx a'b'$ y $a-b\approx a'-b'$

ii) Está dado porque st es morfismo de orden

iv) $st(a)=0 \Leftrightarrow a\approx 0 \Leftrightarrow a\in M_1$

v) Como $/r-r/=0\in M_1$ ent $st(r)=r$

vi) Caso 1) si $st(a)=0 \Rightarrow 0=st(a)\approx /a/$

Caso 2) si $st(a)>0$

$\Rightarrow$ p.d. *** $st(a)>0$ ssí $a>0$

$\Rightarrow$] sup $st(a)>0$ y $a\leq 0 \Rightarrow$ si $a=0$ ∇, si $a<0 \Rightarrow 0>a\approx st(a)>0$ ∇

$\Leftarrow$] $a>0 \Rightarrow st(a)\approx a>0. \Rightarrow st(a)>0$ entonces $a>0 \Rightarrow /a/=a\approx st(a)$.

iii) utilizando *** se da $st(/a/)=/st(a)/$ y por inciso (ii) se da $st(\max(a,b))=\max(st(a),st(b))$ análogamente para el min. ∎

La manera usual en que llamaremos a las clases de equivalencia de M_0 con respecto a M_1 es:" Las monadas de los números estandar determinadas por ellos". A las monadas las denotamos por $\mu(r)$, $r\in\mathbb{R}$; en particular $\mu(0)=M_1$.

OBSERVACIONES.

i) (Una construcción no-estandar del sistema de los números reales $\mathbb{R}$). La dem. del teorema 3.19. sugiere la siguiente alternativa de construcción. Sea $\mathbb{Q}$ la constante de L que denota el campo de los números racionales. Entonces $^*(\mathbb{Q})$ es el modelo no-estandar de orden superior de la superestructura $\mathbb{Q}$. Se tiene $^*\mathbb{Q}\subset{}^*\mathbb{R}$ y $^*\mathbb{Q}$ es un subcampo de $^*\mathbb{R}$ el cual tiene las mismas propiedades de $\mathbb{Q}$ que puedan ser expresadas por enunciados de K_0, por el teorema 3.7. sabemos que $^*\mathbb{Q}\neq\mathbb{Q}$ p.d. que $^*\mathbb{Q}$ puede ser usado para definir el sistema de números reales. Para este fin particularizaremos con los racionales de ${}^*\mathbb{Q}$ que son finitos, e.d. $q\in{}^*\mathbb{Q}$ es finito siempre que $/q/<$ algún num. racional positivo. El conjunto de todos los números racionales finitos lo denotamos $\mathbb{Q}_0$, observemos que $\mathbb{Q}_0={}^*\mathbb{Q}\cap M_0$ y $q\in{}^*\mathbb{Q}$ es llamado infinitesimal cuando $/q/$ es más pequeño que todo número racional positivo, el conjunto de todos los racionales infinitamente pequeños lo denotamos con $\mathbb{Q}_1$, por esto $\mathbb{Q}_1={}^*\mathbb{Q}\cap M_1$. Entonces $\mathbb{Q}_1$ es un ideal maximal en el dominio entero $\mathbb{Q}_0$. El anillo cociente $\mathbb{Q}_0/\mathbb{Q}_1$ es un anillo de orden isomórfico a un campo. La dem. del teorema 3.19. demuestra que este campo es isomorfo al campo de las cortaduras de Dedekind de $\mathbb{Q}_0$, por lo tanto es isomorfo a el sistema de los números reales $\mathbb{R}$.

ii) (El sistema de los números complejos no-estandar). Dentro del marco de la teoría axiomática de conjuntos el sistema de los números complejos $\mathbb{C}$ puede considerarse como una subteoría de la teoría de la superestructura $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ con operaciones algebráicas de adición y multiplicación, las cuales siguen un cierto orden de lugar, también ${}^*(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ puede verse, como un modelo no-estandar de orden superior de el sistema de números complejos.

Es viable que en este caso se emplee una notación familiar $z=x+iy$ para números complejos donde $x,y\in{}^*\mathbb{R}$ y $i^2=-1$. El conjunto ${}^*\mathbb{C}={}^*\mathbb{R}\times{}^*\mathbb{R}$ del sistema de números complejos extendidos tiene las mismas propiedades de $\mathbb{C}$, en particular ser un campo. Si $z_1=x_1+iy_1$ y $z_2=x_2+iy_2$, entonces también en ${}^*\mathbb{C}$ se tiene

$$z_1+z_2=x_1+x_2 + i(y_1+y_1) \quad y \quad z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2) + i(x_1y_2+x_2y_1)$$

Mas aún, $z=x+iy$, entonces x es la parte real de z y y la parte imaginaria de z. Un número complejo $z=x+iy$ es finito cuando x y y lo son; de otra forma es infinito. Si x y y son infinitesimales entonces $z=x+iy$ es un complejo infinitesimal.

Definiciones y propiedades de algunas entidades externas.

Se señaló acerca del teorema 3.9.(los elementos de una entidad interna son internos.); que el inverso, no necesariamente es cierto e.d. un conjunto de entidades internas no necesariamente es interno.

En la sección anterior introducimos un número de conjuntos de individuos, a saber, el conjunto de todos los números naturales infinitamente grandes ${}^{*}\mathbb{N}-\mathbb{N}$, el conjunto de números finitos M_0, el conjunto de los infinitesimales M_1 y las mónadas $\mu(r)$, $r\in\mathbb{R}$. Es natural ahora hacernos la pregunta: ¿Son estos conjuntos internos o no? Para responderlo demostramos el siguiente teorema.

Teorema 3.22.
Los conjuntos ${}^{*}\mathbb{N}-\mathbb{N}$, M_0, M_1, $\mu(r)$, $r\in\mathbb{R}$, y el conjunto de los números reales infinitamente grandes ${}^{*}\mathbb{R}_{\infty}={}^{*}\mathbb{R}-M_0$ son todos externos.

Dem.
Supongamos que ${}^{*}\mathbb{N}-\mathbb{N}$ es interno entonces dado que ${}^{*}\mathbb{N}-\mathbb{N}\neq\phi$ tenemos que tiene un primer elemento digamos w_0; pero si $w\in{}^{*}\mathbb{N}-\mathbb{N}$ entonces $k+1 < w$ $\forall k\in\mathbb{N}$ y de aquí se sigue que $w-1\in{}^{*}\mathbb{N}-\mathbb{N}$ pero $w_0-1 < w_0$ y $w_0-1\in{}^{*}\mathbb{N}-\mathbb{N}$ ∇

$\therefore {}^{*}\mathbb{N}-\mathbb{N}$ no tiene primer elemento y debería tenerlo si fuera interno

$$\therefore {}^{*}\mathbb{N}-\mathbb{N} \text{ es externo}$$

Supongamos que M_1 es interno. Dado que $M_1 \neq \phi$ y $\forall h \in M_1$, $/h/<1$ (e.d. M_1 tiene cota superior) entonces tiene una mínima cota superior en $\mathbb{R}$ digamos r; pero $r/2 \in \mathbb{R}$, $\forall h \in M_1$ $/h/<r/2$ y $r/2<r$ ∇

$$\therefore M_1 \text{ es externo.}$$

Para M_0 la demostración es análoga.

Si ${}^{*}\mathbb{R}_{\infty} = {}^{*}\mathbb{R} - M_0$ es interno, entonces también

$M_0 = {}^{*}\mathbb{R} - {}^{*}\mathbb{R}_{\infty}$ es interno ∇ $\quad \therefore {}^{*}\mathbb{R}_{\infty}$ es externo.

Sea $Ta:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ t.q. $Ta(y)=y+a$ con $a \in \mathbb{R}$ (la función traslación en a).

$\Rightarrow$ T.F.

${}^{*}Ta: {}^{*}\mathbb{R} \longrightarrow {}^{*}\mathbb{R}$ t.q. ${}^{*}Ta(y)=y+a$ con $a \in {}^{*}\mathbb{R}$ (la función traslación en a).

$$\therefore {}^{*}Ta \text{ es interna.}$$

$M_1=\mu(0)$ y M_1 es externa como las funciones traslación son internas entonces $\mu(r)=\mu(0)+r$ $r \in \mathbb{R}$ es externa ∎

Observaciones.

i) Si $D \subset M_1$ es interno y $D \neq \phi$, entonces tiene una mínima cota superior y ésta debe ser un infinitesimal. Análogamente la mínima cota superior de un conjunto interno no vacío de números finitos es un número finito. La máxima cota inferior de un conjunto interno no vacío de números infinitos es un número infinito.

ii) La operación parte estandar (st) es una función de M_0 sobre $\mathbb{R}$. Sin embargo no es una función interna, e.d. es una operación externa.

Teorema 3.23.

Si $A \in R^{\cdot}$ entonces el conjunto ${}^{*}A-\{{}^{*}a : a \in A\}$ de todos los elementos no-estandar de ${}^{*}A$ es vacío o externo, y en ese último caso el conjunto de los estandar de A $\{{}^{*}a : a \in A\}$ es externo también.

Dem.

Si $A \in R^{\cdot} \Rightarrow {}^{*}A-\{{}^{*}a : a \in A\} = \phi$ ssí A es finito.

Sup. que A es infinito $\Rightarrow$ existe una función f 1-1 de un subconjunto de A sobre el conjunto $\mathbb{N}=\{1,2,\ldots\}$

Si $B={}^{*}A-\{{}^{*}a : a \in A\}$ es interno $\Rightarrow$ $B \cap \mathrm{dom}({}^{*}f)$ es interno (por el teo 3.13)

pero $f(B \cap \mathrm{dom}({}^{*}f)) = {}^{*}\mathbb{N}-\mathbb{N}$ es interno ∇ ■

El teorema anterior muestra que el conjunto de elementos no-estandar de la extensión de un conjunto infinito de $R^{\cdot}$ es externo y hay ciertamente conjuntos externos cuyos elementos son todos entidades internas los cuales son no-estandar. También hay conjuntos externos cuyos elementos son todos entidades internas y estandar; aunque también hay muchos conjuntos internos cuyos elementos son entidades internas no-estandar por ejemplo, si $w \in {}^{*}\mathbb{N}-\mathbb{N}$ entonces el conjunto $\{w\}$ es interno pero sus elementos son entidades no-estandar.

Definición.

Un conjunto D de entidades internas de ${}^{*}(R^{\cdot})$ lo llamamos $*$-finito cuando existe un número $w \in {}^{*}\mathbb{N}-\mathbb{N}$ y una función 1-1 de D sobre el conjunto interno $\{1,2,\ldots,w\}$. En efecto diremos que el cardinal de D es w o simplemente que D tiene W-elementos.

Si D es $*$-finito, entonces es claro que su cardinal externo, es al menos tan grande como $\aleph_0$.

Teorema 3.24.

Todo conjunto *-finito de entidades internas es interno. Un conjunto *-finito de números reales tiene un máximo y un mínimo elemento.

Dem.

Dado que el dominio de una función interna es interno y de la definición anterior concluimos que un conjunto *-finito es interno.

Si D es un conjunto *-finito de números reales entonces con el enunciado de K_0 que afirma "Todo conjunto finito de números reales en $\mathbb{R}$ tiene un elemento máximo y uno mínimo". Utilizando el T.F. se obtiene "Todo conjunto *-finito de números reales en ${}^*\mathbb{R}$ tiene un elemento máximo y uno mínimo". ∎

CAPITULO IV

MODELO DE ROBINSON.

Existencia de un modelo no-estandar de $\mathcal{R}$ usando el teorema de Compacidad.

Usando el Teorema de Compacidad de la lógica matemática, es fácil probar que $\mathbb{R}$ puede ser extendido a $^*\mathbb{R}$ que posee todas las propiedades de $\mathbb{R}$ que sean expresables en lenguaje de primer orden.

Sea ρ un tipo, y $\mathfrak{A}$ =<A,I> una ρ-estructura o ρ-interpretación entonces la denotaremos de la siguiente forma $\mathfrak{A}=\langle A, X_1^{\mathfrak{A}}, X_2^{\mathfrak{A}}, \ldots, X_n^{\mathfrak{A}} \rangle$, si $\rho=\{x_1,\ldots,x_n\}$ y en la forma $\mathfrak{A}=\langle A,\{x_i^{\mathfrak{A}}\}\rangle$ si $\rho=\{x_i\}$ $i\in I$.

Para hablar de la teoría de los números reales tendremos un lenguaje $L_{\mathcal{R}}$ que consta de:

-Los símbolos lógicos (igual que en el cap. II)

-Parámetros.

i) Un símbolo relacional P_R (de aridad n), para cada relación n-aria R, sobre $\mathbb{R}$; $R\subseteq\mathbb{R}^n$.

ii) Un símbolo operacional F_f (de aridad m) para cada operacaión m-aria $f(m>0)$ sobre $\mathbb{R}$;

$$f:\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

iii) Un símbolo de constante C_r para cada $r\in\mathbb{R}$.

El lenguaje $L_{\mathcal{R}}$ así especificado tiene una interpretación estandar que es:

$$\mathcal{R}=\langle\mathbb{R},\{R_i\},\{f_j\},\{r\}\rangle \text{ donde } i,j\in 2^c \text{ y } r\in\mathbb{R} \ (2^c=/\mathcal{P}(\mathbb{R})/)$$

Los sistemas $\mathcal{R}$ y $^{*}\mathcal{R}$

Definiremos primero lo que entendemos por la teoría completa de los números reales que denotaremos Teo($\mathcal{R}$).

Definición.

Teo($\mathcal{R}$) = $\{\sigma : \sigma$ es enunciado de $L_{\mathcal{R}}$, verdadero en $\mathcal{R}\}$

Nótese que para cualquier enunciado σ de $L_{\mathcal{R}}$, se tiene que

$$\sigma \in \text{Teo}(\mathcal{R}) \quad \text{o} \quad \neg\sigma \in \text{Teo}(\mathcal{R})$$

Ahora consideremos la fórmula $P_<(C_r, v_1)$, que simboliza o formaliza en $L_{\mathcal{R}}$ la afirmación

$$"r < v_1"$$

$P_<(C_r, v_1)$ es satisfacible en $\mathcal{R}$, instanciando la variable v_1 con un real mayor que r.

La fórmula $P_<(C_0, v_1) \wedge P_<(v_1, C_r)$ simboliza en $L_{\mathcal{R}}$:
$0 < v_1 < r$, con $r \in \mathbb{R}$

Es claro que para cada $r > 0$ dado, $P_<(C_0, v_1) \wedge P_<(v_1, C_r)$ es satisfacible en $\mathcal{R}$, tomando como instancia de v_1 un real entre 0 y r. Consideremos ahora:
$\Sigma = \text{Teo}(\mathcal{R}) \cup \{P_<(C_0, v_1) \wedge P_<(v_1, C_r) : r \in \mathbb{R}^+\}$; dado un conjunto finito $\Gamma \subseteq \Sigma$, Γ es satisfecho por $\mathcal{R}$ (o $\mathcal{R}$ satisface Γ), tomando como instancia de v_1 un real suficientemente pequeño. Entonces por el Teorema de Compacidad hay una estructura $\mathfrak{A}$ interpretación del mismo lenguaje y un elemento $a \in A$=dominio de $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A}$ satisface Σ cuando a es la interpretación de la variable v_1.

Ya que $\mathfrak{A}$ satisface Σ y Teo($\mathcal{R}$) consta sólo de enunciados, entonces $\mathfrak{A}$ es modelo de Teo($\mathcal{R}$).

Proposición 4.1.

Para todo enunciado $\sigma \in L_{\mathcal{R}}$, σ es verdadero en $\mathfrak{R}$ ssí σ verdadero en $\mathcal{R}$.

Dem.

$\Rightarrow$] σ falso en $\mathcal{R} \Rightarrow \neg\sigma$ verdadero en $\mathcal{R} \Rightarrow \neg\sigma \in \mathrm{Teo}(\mathcal{R})$

$\neg\sigma$ verdadero en $\mathfrak{R} \Rightarrow \sigma$ falso en $\mathfrak{R}$.

$\Leftarrow$] σ verdadero en $\mathcal{R} \Rightarrow \sigma \in \mathrm{Teo}(\mathcal{R}) \Rightarrow \sigma$ verdadero en $\mathfrak{R}$. ■

Además de la proposición anterior, hay un monomorfismo $h:\mathcal{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$, dado por $h(r)=c_r^{\mathfrak{R}}$.

h es monomorfismo.

Dem.

Usaremos que: $\forall r \in \mathbb{R}$ $c_r^{\mathcal{R}}=r$; para toda $R \subseteq \mathbb{R}^n$, $P_R^{\mathcal{R}}=R$; para todo $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $F_f^{\mathcal{R}}=f$.

-h es inyectiva, pues $r_1 \neq r_2$ ssí la fórmula "$C_{r1} \neq C_{r2}$"es verdad en $\mathcal{R}$ ssí "$C_{r1} \neq C_{r2}$" es verdad en $\mathfrak{R}$ ssí $C_{r1}^{\mathfrak{R}} \neq C_{r2}^{\mathfrak{R}}$.

-h preserva relaciones n-arias, pues $<r_1,\ldots,r_n> \in R$ ssí "$P_R(C_{r1},\ldots,C_{rn})$" es verdad en $\mathcal{R}$ ssí "$P_R(C_{r1},\ldots,C_{rn})$" es verdad en $\mathfrak{R}$ ssí $(C_{r1}^{\mathfrak{R}},\ldots,C_{rn}^{\mathfrak{R}}) \in P_R^{\mathfrak{R}}$ ssí $<h(r_1),\ldots,h(r_n)> \in P_R^{\mathfrak{R}}$.

-h preserva operaciones n-arias, pues

$$h(f(r_1,\ldots,r_n))=C^{\mathfrak{R}}_{f(r1,\ldots,rn)} \text{ y}$$

$$F_f^{\mathfrak{R}}(h(r_1),\ldots,h(r_n)) = F_f^{\mathfrak{R}}(C_{r1}^{\mathfrak{R}},\ldots,C_{rn}^{\mathfrak{R}}) \text{ pero}$$

$$C_{f(r1,\ldots,rn)} = F_f^{\mathfrak{R}}(C_{r1}^{\mathfrak{R}},\ldots,C_{rn}^{\mathfrak{R}})$$

ssí "$C_{f(r1,\ldots,rn)} = F_f(C_{r1},\ldots,C_{rn})$" es verdadero en $\mathfrak{R}$

ssí "$C_{f(r1,\ldots,rn)} = F_f(C_{r1},\ldots,C_{rn})$" es verdadero en $\mathcal{R}$

ssí "$C^{\mathcal{R}}_{f(r1,\ldots,rn)} = F_f^{\mathcal{R}}(C_{r1}^{\mathcal{R}},\ldots,C_{rn}^{\mathcal{R}})$"

ssí $f(r_1,\ldots,r_n) = f(r_1,\ldots,r_n)$

-h preserva elementos distinguidos:

$$h(c_r^{\mathcal{R}}) = h(r) = c_r^{\mathfrak{A}}$$

por definición de h.

Por tanto, tenemos una copia isomórfica de $\mathcal{R}$ dentro de $\mathfrak{A}$; ahora construiremos otra estructura que llamaremos ${}^{*}\mathcal{R}$ isomórfica a $\mathfrak{A}$ tal que $\mathcal{R}$ sea subestructura de ${}^{*}\mathcal{R}$: consideremos el dominio A de $\mathfrak{A}$ y cambiamos todo $r\in\mathbb{R}$ de $A-h[\mathbb{R}]$ si lo hay, por un objeto no número real y lo haga "jugar el mismo papel" que r en la estructura $\mathfrak{A}$; así se obtiene una estructura $\mathfrak{A}'$ tal que $\mathfrak{A}'\cong\mathfrak{A}$ y tal que $(A'-h[\mathbb{R}]) \cap \mathbb{R} = \phi$.

Definimos g con dominio A' tal que

$$g(x) = \begin{cases} r & \text{si } x=h(r)\text{, con } r\in\mathbb{R} \\ x & \text{en otro caso} \end{cases}$$

g es inyectiva pues h es función y $\mathbb{R} \cap (A'-h[\mathbb{R}])=\phi$

Así:

$$\mathcal{R} \cong_h h[\mathcal{R}] \subseteq \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}' \cong_g {}^{*}\mathcal{R} \supset \mathcal{R}$$

Defino ahora la nueva estructura ${}^{*}\mathcal{R}$ con dominio ${}^{*}\mathbb{R}$ tal que ${}^{*}\mathbb{R}=g[A']$ y "calcando" la estructura de $\mathfrak{A}'$ sobre ${}^{*}\mathbb{R}$:

i) $(x_1,\ldots,x_n)\in P_R^{{}^{*}\mathcal{R}}$ ssí $(g^{-1}(x_1),\ldots,g^{-1}(x_n))\in P_R^{\mathfrak{A}'}$

ii) $F_f^{{}^{*}\mathcal{R}}(x_1,\ldots,x_n)=g[F_f^{\mathfrak{A}'}(g^{-1}(x_1),\ldots,g^{-1}(x_n))]$

iii) $c_r^{{}^{*}\mathcal{R}}=g(c_r^{\mathfrak{A}'})=r$

Es claro que $\mathfrak{A}'\cong{}^{*}\mathcal{R}$ y como $\mathcal{R}\subset{}^{*}\mathcal{R}\cong\mathfrak{A}'\cong\mathfrak{A}$, hay un $b\in{}^{*}\mathbb{R}-\mathbb{R}$ tal que ${}^{*}\mathcal{R}$ satisface Σ cuando v_1 toma el valor b; en particular $<0,b>\in P_<^{{}^{*}\mathcal{R}}$ y $<b,r>\in P_<^{{}^{*}\mathcal{R}}$ para todo $r\in\mathbb{R}^{+}\subseteq{}^{*}\mathbb{R}$, o sea que b es un infinitesimal.

Además como $\mathfrak{A}\cong{}^{*}\mathcal{R}$, para cualquier enunciado σ, σ es verdadero en $\mathfrak{A}$ ssí σ es verdadero en ${}^{*}\mathcal{R}$.

Proposición 4.2.
Para todo enunciado σ de $L_{\mathcal{R}}$, σ es verdad en $\mathcal{R}$ ssí σ es verdad en ${}^{*}\mathcal{R}$.

Observaciones.

1) Para toda relación R sobre $\mathbb{R}$ denotamos ${}^{*}R=P_R{}^{*\mathcal{R}}$ (que es la interpretación del símbolo P_R en la estructura ${}^{*}\mathcal{R}$): en particular para $\mathbb{R}$, R como relación unaria sobre $\mathbb{R}$, ${}^{*}\mathbb{R}$ será la base o dominio de ${}^{*}\mathcal{R}$ pues el enunciado $\forall x\ P_{\mathbb{R}}(x)$ es verdadero en $\mathcal{R}$, de donde es verdadero en ${}^{*}\mathcal{R}$ y de aqui que todo elemento de la base de ${}^{*}\mathcal{R}$ pertenece a ${}^{*}\mathbb{R}$; por otro lado, ya que $\mathcal{R}\subseteq{}^{*}\mathcal{R}$, $\mathbb{R}\subset{}^{*}\mathbb{R}$.

2) Para toda operación n-aria f sobre $\mathbb{R}$, denotamos ${}^{*}f=F_f{}^{*\mathcal{R}}$ (la interpretación del símbolo F_f en ${}^{*}\mathcal{R}$). Es claro que si f es operación m-aria, $f:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}$, entonces ${}^{*}f|\mathbb{R}^m=f$ y ${}^{*}f:{}^{*}\mathbb{R}^m\longrightarrow{}^{*}\mathbb{R}$.

3) Como $b\in{}^{*}\mathbb{R}-\mathbb{R}$ y satisface $0\ {}^{*}\!\!<b\ {}^{*}\!\!<r$ para todo $r\in\mathbb{R}^{+}$, a b le llamaremos un infinitesimal. A los elementos de ${}^{*}\mathbb{R}$ los llamaremos hiperreales. Todo real es hiperreal. A los elementos de $\mathbb{R}$ los llamaremos estandar y a los de ${}^{*}\mathbb{R}-\mathbb{R}$ los llamaremos no-estandar; b es un hiperreal no-estandar.

Método general para demostrar propiedades de una relación $^*R$ u operación $^*f$: principio de transferencia.

Para probar que una propiedad acerca de relaciones $^*R$, u operaciones $^*f$, se cumple en $^*\mathcal{R}$ podemos seguir el siguiente sencillo método:

1. R o f tiene la propiedad en $\mathcal{R}$.

2. La propiedad puede expresarse con un enunciado del lenguaje $L_{\mathcal{R}}$ de primer orden.

3. Aplicar que para todo enunciado σ de $L_{\mathcal{R}}$:

** σ es verdad en $\mathcal{R}$ ssí σ es verdad en $^*\mathcal{R}$.

Ejemplos:

a) $^*<$ es transitiva en $^*\mathcal{R}$ pues $<$ es transitiva en $\mathcal{R}$ y se expresa con

$$\sigma = \forall x\ \forall y\ \forall x\ (P_<(x,y) \wedge P_<(y,z) \Rightarrow P_<(x,z)).$$

b) $^*<$ es antirreflexiva y cumple tricotomía en $^*\mathcal{R}$, pues lo cumple en $\mathcal{R}$ y se expresa con

$$\forall x\ \neg P_<(x,x) \text{ y}$$

$$\forall x\ \forall y\ (x \neq y \Rightarrow P_<(x,y) \vee P_<(y,x))$$

c) $^*<$ es orden total y compatible con $^*+$, $^*\cdot$, en $^*\mathcal{R}$

d) Los axiomas de Campo se cumplen en $^*\mathcal{R}$ y así:

$$<^*\mathbb{R},\ ^*<,\ ^*+,\ ^*\cdot,\ 0,\ 1>$$

es campo ordenado.

e) $^*1/b \in {}^*\mathbb{R}$ y es mayor que cualquier real: Sea

$$r \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow 0 \mathbin{^*<} b \mathbin{^*<} 1/r \Rightarrow 1 \mathbin{^*<} 1/r \cdot {}^*1/b \Rightarrow r \mathbin{^*<} {}^*1/b$$

Definición.

A un hiperreal mayor que cualquier real estandar le llamaremos un hiperreal infinito; ${}^{*}1/b$es un hiperreal infinito.

f) La propiedad del supremo no se puede expresar en un lenguaje de primer orden. Es más, hay $S\subseteq {}^{*}\mathbb{R}$, $S\neq\phi$ tal que S es acotado superiormente y no tiene supremo respecto a ${}^{*}<$, por ejemplo el conjunto "M_1." de los infinitesimales, es acotado por cualquier real positivo, pero no hay un real positivo mínimo.

Otro ejemplo es $\mathbb{R}\subset{}^{*}\mathbb{R}$ acotado por ${}^{*}1/b$ y no tiene supremo, pues de hecho entre un real y un infinito, siempre hay otro infinito: sea $r\in\mathbb{R}^{+}$ y sea K infinito, entonces

$2r<K$ de donde $r<K-r$ y $K-r<K$ así pues $r<K-r<K$ y $K-r$ es infinito pues si hubiese $t\in\mathbb{R}$ tal que $K-r<t$, entonces $K<t+r$ ∇

Corolario 4.3.

$${}^{*}\mathcal{R} \not\cong \mathcal{R}.$$

Dem.

Pues sabemos que un orden lineal es un continuo ssí es isomorfo a los reales, y $({}^{*}\mathbb{R}, {}^{*}<)$ no es continuo. ∎

Finitos, Infinitos e infinitesimales. Estandar y no-estandar. Propiedades algebráicas.

Resuminos las definiciones de los conceptos dados, como:

$x\in{}^{*}\mathbb{R}$ es finito ssí ${}^{*}/x/ \ {}^{*}< y$, para algún $y\in\mathbb{R}$.

$x\in{}^{*}\mathbb{R}$ es infinitesimal ssí ${}^{*}/x/ \ {}^{*}< y$, para todo $y\in\mathbb{R}^{+}$.

$x \in {}^*\mathbb{R}$ es infinito ssí ${}^*/x/ \;{}^*\!> y$, para todo $y \in \mathbb{R}$.

$x \in {}^*\mathbb{R}$ es estandar ssí $x \in \mathbb{R}$.

$x \in {}^*\mathbb{R}$ es no-estandar ssí $x \in {}^*\mathbb{R}-\mathbb{R}$.

Hacemos notar que aunque la idea original de infinitesimal excluía al cero, es conveniente considerarlo como infinitesimal por razones técnicas.

Denotamos: $M_0 = \{x : x \text{ es finito}\}$

$M_1 = \{x : x \text{ es infinitesimal}\}$

Observaciones.

Las letras i,j, denotan infinitesimales; las letras K,L,M denotan infinitos, las letras r,t denotan estandar o reales.

a) El único estandar infinitesimal es 0. E.d. $\mathbb{R} \cap M_1 = \{0\}$

b) $\mathbb{R} \subset M_0$; $M_1 \subset M_0$.

c) Los finitos pueden ser de la forma: 0, r, i, $r \pm i$.

d) Los infinitos pueden ser de la forma: K, $K \pm r$, $K \pm i$, $K \pm r \pm i$.

e) Hay al menos tantos infinitos e infinitesimales como reales pues si K es infinito, K+r es infinito para todo $r \in \mathbb{R}$ y sus respectivos inversos son infinitesimales.

Propiedades algebráicas.

Proposición 4.4.

a) M_0 está cerrado bajo ${}^*+, {}^*\cdot, {}^*-$. (E.d. M_0 es subanillo de ${}^*\mathbb{R}$)

b) M_1 está cerrado bajo ${}^*+, {}^*\cdot, {}^*-$, y bajo productos por finitos. (e.d. M_1 es ideal en el anillo M_0).

Dem.

a) Sean $x, y \in M_0$.

$^{*}/x/ < a$, $^{*}/y/ < b$ para algún $a, b \in \mathbb{R}$ entonces

$$^{*}/x\pm y/ < {}^{*}/x/ \,{}^{*}\!\!+ {}^{*}/y/ < a \,{}^{*}\!\!+ b = a+b \in \mathbb{R}$$

$$^{*}/x \,{}^{*}\!\!\cdot y/ < a \,{}^{*}\!\!\cdot b = a\cdot b \in \mathbb{R}.$$

b) Sean $i, j \in M_1$; entonces $\forall a \in \mathbb{R}^{+}$, $^{*}/i/ \,{}^{*}\!\!< a/2$, $^{*}/j/ < a/2$, entonces $^{*}/i\pm j/ \,{}^{*}\!\!< a/2+a/2 = a$.

Sea $i \in M_1$, $z \in M_0$. Entonces $^{*}/z/ \,{}^{*}\!\!< a$ p.a. $a \in \mathbb{R}$

Sea $y \in \mathbb{R}^{+}$ $\therefore$ $^{*}/i/ \,{}^{*}\!\!< y/a$ y $^{*}/i\cdot z/ \,{}^{*}\!\!< y/a\cdot a = y$ ■

Definición.

Sean $x, y \in {}^{*}\mathbb{R}$, diremos que x es infinitamente cercano a y ($x \approx y$) ssí $x \,{}^{*}\!\!- y \in M_1$.

Proposición 4.5.

a) $\approx$ es relación de equivalencia sobre $^{*}\mathbb{R}$.

b) $u \approx v$, $x \approx y \Rightarrow u+x \approx v+y$ y $-u \approx -v$

c) $u \approx v$, $x \approx y$; $x, y, u, v, \in M_0 \Rightarrow u\cdot x \approx v\cdot y$

Dem.

a) porque $0 \in M_1$ y Proposición 4.4 b)

b) $(u+x)-(v+y)=(u-v)+(x-y) \in M_1$ por proposición 4.4 b).

$(-u)-(-v)=v-u \in M_1$ pues $v \approx u$.

c) $(u\cdot x)-(v\cdot y)=(u\cdot x)-(u\cdot y)+(u\cdot y)-(v\cdot y)=u\cdot(x-y)+y\cdot(u-v)$ como $u, y \in M_0$ y $(x-y)$ y $(u-v) \in M_1$, por la proposición 4.4. b) la última expresión es infinitesimal. ■

Observación.

si $r, s \in \mathbb{R}$; $r \approx s$ ssi $r=s$. Porque 0 es el único infinitesimal estandar

Proposición 4.6.

Todo finito está infinitamente cercano a un único real.

Dem.

Sea x finito. Sea $S=\{y\in R: y<x\}$ por el axioma del supremo para $\mathbb{R}$ y ya que $S\neq\phi$ y S acotado superiormente por el r tal que $x<r$, entonces S tiene supremo en $\mathbb{R}$. Sea t tal supremo, entonces $x\approx t$ pues si no, $/x-t/$ no es infinitesimal de donde hay $q\in\mathbb{R}^+$ tal que $q</x-t/$ y $x\neq t$, por lo que hay dos casos:

-Si $t<x$, entonces $q<x-t \therefore q+t<x$ y así $q+t\in S$ y $t<t+q$ de donde t no sería cota superior ∇

-Si $x<t$, entonces $q<t-x \therefore x<t-q$ y así $t-q$ es cota superior de S, pero $t>t-q$ de donde t no sería la mínima cota superior.

Por lo anterior $x\approx t$. ∎

Corolario 4.7.

Todo finito x tiene una descomposición única $x=r+i$ donde $r\in\mathbb{R}$ (parte estandar) e $i\in M_1$ (parte infinitesimal).

Dem.

Pues sea x finito $\Rightarrow \exists!\ r\in\mathbb{R}$ tal que $x\approx r$, entonces $x-r=i$ para algún $i\in M_1$. Así $x=r+i$. ∎

Podemos definir una función $St:M_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $St(x)$=la parte estandar de x. St está bien definida por el corolario anterior y es un homomorfismo del anillo M_0 sobre el campo $\mathbb{R}$ con núcleo el ideal M_1, por tanto el anillo cociente $M_0/M_1 \cong \mathbb{R}$. Resumimos las propiedades de esta función St como:

i) $St[M_1]=\{0\}$ $St[\mathbb{R}]=\mathbb{R}$

ii) $\forall r\in\mathbb{R}$, $(r\approx x \Leftrightarrow r=St(x))$ siempre que x sea finito.

iii) $St(x+y)=St(x)+St(y)$ usando la proposición 4.5.b)

iv) $St(x\cdot y)=St(x)\cdot St(y)$ usando la proposición 4.5.c)

v) $St(1/x)=1/St(x)$

CAPITULO V

APLICACIONES DE AMBOS MODELOS.

5.1 Límites, Continuidad y diferenciabilidad (mod. Luxemburg).

Una sucesión estandar $\{Sn:n=1,\dots\}$ puede ser vista como una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$, y también como subconjunto de $\mathbb{N}\times\mathbb{R}$, es también una entidad de $R^{\cdot}$, la cual denotaremos por razones obvias por S. Pasando de $R^{\cdot}$ a $^{*}(R^{\cdot})$ la entidad S se extiende a una función de $^{*}\mathbb{N}$ en $^{*}\mathbb{R}$. Mejor aún, para todo $n\in\mathbb{N}$ se tiene $^{*}Sn=Sn$ que se sigue del hecho de $^{*}(\mathrm{ran}\ S)=\mathrm{ran}\ ^{*}S$ y la convención de la $*$-notación se retoma.

La sucesión estandar $^{*}S$ en $^{*}(R^{\cdot})$ tiene las mismas propiedades que la sucesión S que puedan ser expresadas como enunciados de K_0.

Teorema 5.1.1.

Una sucesión $\{Sn:n=1,\dots\}$ en $\mathbb{R}$ es acotada ssí $^{*}S\omega$ es finita para todo $\omega\in{}^{*}\mathbb{N}-\mathbb{N}$.

Dem.

$\Rightarrow]$ $/Sn/<a$ $\forall n\in\mathbb{N}$ p.a. $a\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $/^{*}S\omega/<a$ $\forall\omega\in{}^{*}\mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $^{*}S\omega$ es finita $\forall\omega\in{}^{*}\mathbb{N}-\mathbb{N}$.

$\Leftarrow]$ Dado que la mínima cota superior de un conjunto interno de números finitos es finita $\Rightarrow$ $(\mathrm{ran}\ ^{*}S)\subset Mo$ $\Rightarrow$ $/^{*}Sn/\leq a$ $\forall n\in{}^{*}\mathbb{N}$ y alguna $a\in Mo$ $\Rightarrow$ $/Sn/\leq St(a)$ $\forall n\in\mathbb{N}$. ■

En el sentido clásico se dice que una sucesión

$\{Sn:n=1,...\}$ es convergente a un límite S ssí

$$\forall c([0<c\in\mathbb{R}] \Rightarrow \exists n([n\in\mathbb{N}] \wedge \forall y([y\in\mathbb{N} \wedge n\leq y] \Rightarrow /Sy-S/<c))).$$

Teorema 5.1.2.

Sea $\{Sn:n=1,...\}$ una suc de números reales y sea $s\in\mathbb{R}$, entonces $\lim_{n\infty}Sn=S$ ssí ${}^*S\omega\approx S$ $\forall\omega\in{}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$.

Dem.

$\Rightarrow]$ $\lim_{n\infty}Sn=S \Rightarrow \forall x([x\in\mathbb{N} \wedge x>n] \Rightarrow /Sx-S/<c)$, donde $c>0$ y $n\in\mathbb{N}$ son constantes $\Rightarrow_{T.F.}\forall x([x\in{}^*\mathbb{N} \wedge x>n] \Rightarrow /{}^*Sx-S/<c)$, en particular para todo $\omega\in{}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$ se tiene $/{}^*S\omega-S/<c \Rightarrow {}^*S\omega\approx S$ $\forall\omega\in{}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$.

$\Leftarrow]$ Sea $0<c\in\mathbb{R} \Rightarrow$ el siguiente enunciado es verdadero en ${}^*(R^*)$ $\exists y([y\in{}^*\mathbb{N}] \wedge \forall x([x\in{}^*\mathbb{N} \wedge y<x] \Rightarrow /{}^*Sx-S/<c))$ desde luego necesitamos que y sea un número natural infinitamente grande. Observamos ahora que este enunciado es la $*$-transformación de el enunciado

$$\exists y([y\in\mathbb{N}] \wedge \forall x([x\in\mathbb{N} \wedge y<x] \Rightarrow /Sx-S/<c))$$

que por el T.F. es también verdadero en R^*. Esto significa que hay un índice $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $/Sn-S/<c$ $\forall n>n_0$, dado que esto es verdadero para todo $c>0$ obtenemos que $\lim_{n\infty}Sn=S$.

∎

La condición ${}^*S\omega\approx S$ $\forall\omega\in{}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$ es equivalente a $St({}^*S\omega)=S$ $\forall\omega\in{}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$.

Es consecuencia del teorema 5.1.2. que si el límite existe, éste es único. Mejor aún, por el teorema 5.1.1. muestra que toda sucesión convergente es acotada.

Teorema 5.1.3.

Una sucesión $\{Sn:n=1,\ldots\}$ de números reales de $\mathbb{R}$ es convergente ssí ${}^*S\omega \approx {}^*S\omega'$ $\forall\omega,\omega' \in {}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$.

Dem.

$\Rightarrow$] usando el criterio de Cauchy se tiene que dado $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ $\{Sn:n=1,\ldots\}$ converge ssí $/Sn-Sm/<\varepsilon$ para todo n,m suficientemente grandes. Entonces dado que $\{Sn:n=1,\ldots\}$ converge $\Rightarrow$T.F.

$/{}^*S\omega-{}^*S\omega'/<\varepsilon$ $\forall\omega,\omega' \in {}^*\mathbb{N}-\mathbb{N} \Rightarrow {}^*S\omega \approx {}^*S\omega'$ $\forall\omega,\omega' \in {}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$.

$\Leftarrow$] Dado que toda sucesión convergente es acotada y ser acotada es que ${}^*S\omega$ es finita $\forall\omega\in{}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$ entonces, supongamos que existe

$\omega_0\in{}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$ t.q. ${}^*S\omega_0$ es infinito.

Sea $A=\{n:n\in{}^*\mathbb{N} \wedge /{}^*S\omega_0-{}^*S_n/<1\}$

$\Rightarrow$por el teo.3.13 A es interno y por hipótesis se tiene que

${}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}\subset A$, Sea $n\in\mathbb{N}\Rightarrow /{}^*S_{\omega0}/-/{}^*S_n/\le/{}^*S_{\omega0}-{}^*S_n/$

$\Rightarrow/{}^*S_{\omega0}/\le/{}^*S_{\omega0}-{}^*S_n/+/{}^*S_n/ \Rightarrow n\notin A \Rightarrow {}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}=A\nabla$ porque ${}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$ no es interno y $\therefore$ ${}^*S\omega$ es finito $\forall\omega\in{}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$ ∎

Observación.

La prueba anterior demuestra que una suceción infinita $\{Sn:n=1,\ldots\}$ si es acotada entonces ${}^*S\omega-{}^*S\omega'$ es finito $\forall\omega,\omega'\in{}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$.

Teorema 5.1.4.

Sea $\{a_n:n\in{}^*\mathbb{N}\}$ una sucesión interna de números tal que a_n es infinitamente pequeño para todo $n\in\mathbb{N}$. Entonces existe $\omega\in{}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$ tal que $a_n\approx0$ $\forall n\le\omega$.

Dem.

Sea $\{na_n : n\in {}^*\mathbb{N}\}$ una suceción interna y sea

$A=\{n: n\in {}^*\mathbb{N} \wedge \forall k\ ([k\in {}^*\mathbb{N} \wedge k\leq n] \Rightarrow k/a_k/<1)\}$

$\Rightarrow$ por teo. 3.13 A es interno y como $a_n\approx 0\ \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow na_n\approx 0 \Rightarrow \mathbb{N}\subset A$, por el teo 3.23 $\mathbb{N}$ es externo $\Rightarrow$ como A es interno $A-\mathbb{N}\neq\phi$

$\therefore$ existe un número $\omega\in {}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$ y $\omega\in A$ t.q. $\forall n\in {}^*\mathbb{N}$ y $n\leq\omega$ y $0\leq n/a_n/<1$

pero $0\leq /a_n/<1/n$ $\therefore$ $0\approx /a_n/$ ∎

Sea f una función con valores reales de una variable real, la cual está definida sobre un intervalo $a<x<b$ de $\mathbb{R}$. Extendemos f a ${}^*(\mathbb{R}^*)$ con la función ${}^*f$ cuyo dominio de definición es el intervalo abierto $a<x<b$ de ${}^*\mathbb{R}$ y con valores en ${}^*\mathbb{R}$. Mejor aún teniendo en mente el T.F., éste implica que ${}^*f$ satisface en ${}^*(\mathbb{R}^*)$ todas las propiedades de f las cuales sean expresables por enunciados de K_0.

Por ejemplo, si para alguna $a<x_0<b$, $\lim_{x\to x_0} f(x)=1$ es verdadero entonces se tiene el siguiente enunciado de K_0.

$\forall\varepsilon([0<\varepsilon\in\mathbb{R}] \Rightarrow \exists\delta([0<\delta\in\mathbb{R}]\wedge\forall x([x\in\mathbb{R} \wedge 0</x-x_0/<\delta] \Rightarrow /f(x)-1/<\varepsilon))$

Teorema 5.1.5.

$\lim_{x\to x_0} f(x)=1$ ssí ${}^*f(x_0+h)\approx 1\ \forall 0\neq h\in M_1$.

En particular f es continua en x_0 ssí ${}^*f(x_0+h)\approx f(x_0)\ \forall h\in M_1$.

Dem.

$\Rightarrow]$ $\lim_{x\to x_0} f(x)=1$, sea $0\neq h\in M_1$ y sea $0<\varepsilon\in\mathbb{R} \Rightarrow \exists 0<\delta\in\mathbb{R}$ y consideramos $x\in {}^*\mathbb{R}$ digamos $x=x_0+h$ $\Rightarrow$ $/x_0+h-x_0/=h<\delta \Rightarrow_{T.F.}$ $/{}^*f(x_0+h)-1/<\varepsilon$

$\Rightarrow {}^*f(x_0+h)\approx 1$

$\Leftarrow$] Sea $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$, sea $\delta\in M_1 \therefore \exists 0<\delta\in{}^{*}\mathbb{R}$ y sea $x\in{}^{*}\mathbb{R}$, supongamos que $0</x-x_0/<\delta$

sea $h_0=/x-x_0/\in M_1$ como ${}^{*}f(x_0+h_0)\approx l$ y $x_0+h_0=x$

$\Rightarrow {}^{*}f(x)\approx l \qquad \therefore /f(x)-l/<\varepsilon.$

Es claro que si sustituimos l por $f(x_0)$ obtenemos el caso particular. ■

Definición.

La derivada de f en x_0 existe ssí $\lim_{h\,0}(f(x_0+h)-f(x_0))/h$ existe.

Por el teorema anterior f es diferenciable en x_0 ssí existe una constante $l\in\mathbb{R}$ tal que

$$({}^{*}f(x_0+h)-{}^{*}f(x_0))/h \approx l \text{ para todo } 0\neq h\in M_1$$

Como podemos esperar la derivada de una función diferenciable es la parte estandar del cociente $\Delta f/\Delta x={}^{*}(f(x+\Delta x)-f(x))/\Delta x$ donde $\Delta x\neq 0$ denota un infinitesimal.

Si f es diferenciable en x_0, entonces f es continua en x_0, en efecto de ${}^{*}f(x_0+h)-f(x_0) \approx hf'(x_0)\ \forall\ 0\neq h\in M_1$, se sigue, usando que $hl\approx 0$, que ${}^{*}f(x_0+h)-f(x_0) \approx 0\ \forall\ 0\neq h\in M_1$.

Una función f definida sobre un intervalo arbitrario es uniformemente continua siempre que

$\forall\varepsilon([0<\varepsilon\in\mathbb{R}] \Rightarrow \exists\delta([0<\delta\in\mathbb{R}]\wedge\forall x,y([x,y\in dom f \Rightarrow (0</x-y/<\delta] \Rightarrow$
$/f(x)-f(y)/<\varepsilon)))$

de donde, pasando a ${}^{*}(\mathbb{R}^{*})$se obtiene inmediatamente el siguiente criterio para continuidad uniforme.

Teorema 5.1.6.

Sea f una función real de una variable real. Entonces f es uniformente continua ssí ${}^{*}f(a) \approx {}^{*}f(b)$, para todo $a,b \in \mathrm{dom}\,{}^{*}f$ y $a \approx b$.

Dem.

Dado que ser uniformemente continua es una propiedad expresable como enunciado de K_0 se tiene

$\forall \varepsilon([0<\varepsilon\in R] \Rightarrow \exists\delta([0<\delta\in R]\wedge\forall a,b([a,b\in \mathrm{dom}\,{}^{*}f \wedge 0</a-b/<\delta] \Rightarrow /{}^{*}f(a)-{}^{*}f(b)/<\varepsilon)))$ por el T.F. que es equivalente a

para todo $a,b \in \mathrm{dom}\,{}^{*}f$, si $a \approx b$ entonces ${}^{*}f(a) \approx {}^{*}f(b)$ ■

Teorema 5.1.7.

Sea f una función real de variable real definida sobre un intervalo cerrado y acotado $x_1 \le x \le x_2$, $x_1, x_2 \in R$. f es continua ssí f es uniformemente continua.

Dem.

$\Leftarrow$]Es una implicación lógica.

$\Rightarrow$]Sea $a,b \in {}^{*}R$ que satisfacen $x_1 \le a,b \le x_2$ y $a \approx b$ entonces $a,b \in M_0$ y $x = st(a) = st(b)$ satisface $x_1 \le x \le x_2$. Dado que f es continua tenemos que ${}^{*}f(a) \approx f(x) \approx {}^{*}f(b)$, y también ${}^{*}f(a) \approx {}^{*}f(b)$ e.d. f es uniformemente continua. ■

5.2. Límites, continuidad y diferenciabilidad. (mod. de Robinson).

Sea $f: R \longrightarrow R$. Usaremos S para abreviar estandar y N.S. para abreviar no-estandar.

Definición N.S.

$\lim_{x\to a} f(x)=b$ ssí $\forall x(x\approx a \wedge x\neq a \Rightarrow {}^*f(x)\approx b)$

Así, si $i\in M_1$, $i\neq 0$, $a\pm i\approx a$ y $a\pm i\neq a$ entonces ${}^*f(a\pm i)\approx b$ y $b=st({}^*f(a\pm i))$.

Teorema 5.2.1.

Definición S. ssí Definición N.S.

$\Rightarrow$] Supongamos $\lim_{x\to a} f(x)=b$ en sentido estandar entonces $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x(0\neq/x-a/<\delta \longrightarrow /f(x)-b/<\varepsilon)$ es formalizable en $L_{\mathcal{R}}$ y se cumple en $\mathcal{R}$, entonces se cumple en ${}^*\mathcal{R}$.

Ahora sea $x\in{}^*\mathbb{R}$ tal que $x\approx a$ y $x\neq a$, es claro que $0\neq{}^*/x{}^*-a/<\delta$ cualquiera que sea $\delta\in\mathbb{R}^+$, entonces ${}^*/{}^*f(x){}^*-b/<\varepsilon$, pero como ε es arbitraria en $\mathbb{R}^+$, ${}^*f(x)\approx b$.

$\Leftarrow$] Supongamos que $\forall x(x\approx a \wedge x\neq a \Rightarrow {}^*f(x)\approx b)$. Sea $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$, entonces "$\exists\delta>0\ \forall x(0\neq/x-a/<\delta \longrightarrow /f(x)-b/<\varepsilon)$" es enunciado de $L_{\mathcal{R}}$ verdadero en ${}^*\mathcal{R}$ ya que podemos tomar δ como infinitesimal positivo; en ese caso, si se cumple $0\neq/x-a/<\delta$, entonces $x\approx a \wedge x\neq a$, entonces por hipótesis, ${}^*f(x)\approx b$, o sea $/{}^*f(x)-b/<\varepsilon$, cumpliendo entonces $/f(x)-b/<\varepsilon$.

Así pues, el enunciado es verdadero en $\mathcal{R}$. ■

Corolario 5.2.2.

Una función f es contínua en a ssí $\forall x(x\approx a \Rightarrow {}^*f(x)\approx f(a))$.

Obsérvese que ${}^*f(a)=f(a)$ pues $a\in\mathbb{R}$. En tales casos omitiremos la notación * a la izquierda de la función u operación.

Veamos ahora el concepto de punto de acumulación de un conjunto, usando la noción no-estandar de infinita cercanía:

Definición N.S.

a es un punto de acumulación de un conjunto S, ssí $\exists y \in {}^*S$ tal que ($y \approx a \wedge y \neq a$).

Teorema 5.2.3.

DefS. ssí DefN.S.

$\rightarrow$]Supongamos que a es punto de acumulación de S, entonces $\forall \varepsilon > 0\ \exists y \in S\ (0 \neq /a-y/ < \varepsilon)$ es verdad en $\mathcal{R}$ y por tanto verdad en ${}^*\mathcal{R}$, entonces con $i \in M_1{}^*$ tendremos que $\exists y \in {}^*S(0 \neq /a-y/ < i)$ de donde $a \approx y$ y $a \neq y$.

$\leftarrow$]Supongamos $\exists y \in {}^*S\ (y \approx a \wedge y \neq a)$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces "$\exists y \in S\ (0 \neq /a-y/ < \varepsilon)$" es verdad en ${}^*\mathcal{R}$ de donde ese enunciado es verdad en $\mathcal{R}$, pero ε es arbitraria en $\mathbb{R}^+$de donde a es punto de acumulación de S, en sentido estandar. ■

Definición N.S.

S converge a b ssí $\forall k \in {}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}\ ({}^*S(k) \approx b)$.

Teorema 5.2.4.

DefS. ssí DefN.S.

$\rightarrow$]Supongamos que $\forall \varepsilon > 0\ \exists l \in \mathbb{N}\ \forall n > l\ /Sn-b/ < \varepsilon$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces hay $l \in \mathbb{N}$ tal que "$\forall n > l\ /Sn-b/ < \varepsilon$" se cumple en $\mathcal{R}$, entonces se cumple en ${}^*\mathcal{R}$.

Sea ahora k infinito en ${}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$, es claro que $k > l$, por tanto $/{}^*Sk-b/ < \varepsilon$; como esto es para ε arbitraria en $\mathbb{R}^+$, tenemos que ${}^*Sk \approx b$.

$\leftarrow$]Supongamos $\forall k \in {}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}({}^*Sk \approx b)$. Sea $\varepsilon > 0$, tomando cualquier

$k\in{}^{*}\mathbb{N}-\mathbb{N}$, tenemos que toda $n>k$ está en ${}^{*}\mathbb{N}-\mathbb{N}$ y por hipótesis ${}^{*}S_k\approx b$, por lo que el enunciado "$\exists l\in\mathbb{N}\ \forall n>l\ /S_n-b/<\varepsilon$" es verdadero en ${}^{*}\mathcal{R}$ y por tanto se cumple en $\mathcal{R}$. ∎

De lo anterior tenemos los conceptos de cerrado y abierto; sea $S\subseteq\mathbb{R}$:

Def N.S. Decimos que S es abierto ssí $\forall x(x\in S \Rightarrow \forall y(y\approx x \Rightarrow y\in{}^{*}S))$.

Def S. Decimos que S es abierto ssí

$\forall x(x\in S \Rightarrow \exists\varepsilon(0<\varepsilon\in\mathbb{R} \wedge \forall y(y\in\mathbb{R} \wedge /y-x/<\varepsilon \Rightarrow y\in S)))$.

Teorema 3.2.5.

Def S ssí Def N.S.

Dem.

$\Leftarrow]$ Sea $x\in S \Rightarrow$ por T.F. $\forall y(y\in{}^{*}\mathbb{R} \wedge /y-x/<\varepsilon \Rightarrow y\in{}^{*}S)$

es verdadero en ${}^{*}\mathbb{R}$ para ε infinitesimal

porque $/y-x/<\varepsilon \Rightarrow y\approx x$ y $y\in{}^{*}S$ $\therefore$ es verdadero

$\exists\varepsilon(0<\varepsilon\in{}^{*}\mathbb{R} \wedge \forall y(y\in{}^{*}\mathbb{R} \wedge /y-x/<\varepsilon \Rightarrow y\in{}^{*}S))$ y su transferido es:

$\exists\varepsilon(0<\varepsilon\in\mathbb{R} \wedge \forall y(y\in\mathbb{R} \wedge /y-x/<\varepsilon \Rightarrow y\in S))$.

$\Rightarrow]$ sea $x\in S$, sea $y\approx x \Rightarrow$ existe $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ t.q. $/y-x/<\varepsilon \Rightarrow y\in S \Rightarrow y\in{}^{*}S$

∎

Def N.S. Decimos que S es cerrado ssí $\forall x(\exists y\in{}^{*}S\ (y\approx x) \Rightarrow x\in S)$.

Def S. Decimos que S es cerrado ssí

$\forall x\ (\forall\varepsilon(0<\varepsilon\in\mathbb{R} \Rightarrow \exists y\ 0</y-x/<\varepsilon \wedge y\in S) \Rightarrow x\in S)$.

Teorema 3.2.6.

Def N.S. ssí Def S.

Dem.

$\Rightarrow$]Sea x, sup. $\forall c\ 0<c\in\mathbb{R} \Rightarrow \exists y$ t.q. $0</y-x/<c \wedge y\in S$

sea $0<c\in\mathbb{R} \Rightarrow \exists y$ t.q. $0</y-x/<c \wedge y\in {}^{*}S$

$\Rightarrow \exists y$ t.q. $0</y-x/<c \wedge y\in \Rightarrow x\in S$

$\Leftarrow$]Sea x tal que hay $y\in {}^{*}S$ y $y\approx x \Rightarrow$ T.F. $\forall x\ \exists y\in S$

$0</y-x/<c\quad \forall c\ 0<c\in\mathbb{R} \Rightarrow \forall x\ \forall c\ 0<c\in\mathbb{R}\ \exists y\in S$ t.q. $0</y-x/<c$

$\Rightarrow x\in S$ ∎

Derivada.

Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ $a\in\mathbb{R}$.

Definición S. $f'(a)=\lim_{h\ 0}(f(a+h)-f(a))/h$

Definición N.S. $f'(a)=b$ ssí para todo infinitesimal no-cero i

$$({}^{*}f(a+i)-f(a))/i\approx b.$$

Teorema 3.2.7.

Def N.S. ssí Def S.

Dem.

Dado que se demostro ya la equivalencia de las definiciones estandar y no-estandar de límite, queda demostrado el teorema.

∎

Así, si tal b existe, $f'(a)=St(({}^{*}f(a+i)-f(a))/i)$ con $i\in M_1-\{0\}$.

Siguiendo la notación histórica, es común llamar: $df={}^{*}f(a+i)-f(a)$ y $dx=i$. Con lo que $f'(a)=St(df/dx)$ con $dx\in M_1-\{0\}$ y df/dx es realmente un cociente en ${}^{*}\mathcal{R}$.

Teorema 3.2.8.

Sean $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$. Si f es derivable en a, entonces f es continua en a.

Dem.

Supongamos $f'(a)$ tal que $x \neq a$ y $x \approx a$, entonces $x = a \pm dx$ con $dx \in M_1$ así, por definición de $f'(a)$, $({}^{*}f(a+dx)-f(a))/dx \approx f'(a)$; pero como $f'(a) \in \mathbb{R}$, $({}^{*}f(a+dx)-f(a))/dx$ es finito y si se multiplica por dx, el producto será un infinitesimal, de donde

${}^{*}f(a+dx)-f(a) \in M_1$ o sea ${}^{*}f(a+dx) \approx f(a)$ o sea ${}^{*}f(x) \approx f(a)$ ∎

CAPITULO VI
ANALISIS DE LOS DOS MODELOS.

El presente análisis se inicia con un breve resumen de cada modelo.

Modelo de Luxemburg.

Se construye de manera conjuntista una superestructura $R^{\bullet}$ con ciertas propiedades, utilizando un lenguaje de primer orden L, donde el conjunto de las constantes de la L-estructura se identifica con los elementos de la superestructura $R^{\bullet}$.

Se define lo que es un modelo no-estandar de orden superior (ultrafiltro δ-incompleto), tomando el conjunto de todas las funciones de I en $R^{\bullet}$, e.d. $R^{\bullet I}$, lo que es una $^{\bullet}$L-estructura, y a $^{\bullet}(R^{\bullet})=\bigcup {}^{\bullet}Rn$ se le define como el ultraproducto de $R^{\bullet}$ con respecto al ultrafiltro $\mathcal{U}$, notando que $R^{\bullet}$ está inmerso en $^{\bullet}(R^{\bullet})$ de $R^{\bullet I}$, con la función $*:R^{\bullet}\longrightarrow R^{\bullet I}$.En $R^{\bullet I}$ se define lo que son elementos internos, estandar y no-estandar y los elementos externos, demostrando que "hay entidades internas que no son estandar".

Se denota al conjunto de todos los enunciados internos verdaderos en $^{\bullet}(R^{\bullet})$ con $^{\bullet}K_0(^{\bullet}L)$ y con la ayuda de resultados ya probados se demuestra el "Teorema Fundamental" (T.F.) que afirma "$\alpha\in K_0(L)$ ssí $\alpha\in {}^{\bullet}K_0(^{\bullet}L)$". Dándose ejemplos de aplicación de dicho teorema, estudiando en base a esto lo que es el sistema de los números reales no-estandar

${}^{*}\mathbb{R}$ que son los individuos del $\mathcal{U}$-ultraproducto ${}^{*}(R^{*})$ y las propiedades de $\mathbb{R}$ pasan a ${}^{*}\mathbb{R}$ con un significado diferente (todo se interpreta módulo el ultrafiltro $\mathcal{U}$); identificándose a $\mathbb{R}$ con el subcampo de los números estandar de ${}^{*}\mathbb{R}$ y realizando una justificación del porqué ${}^{*}\mathbb{R}$ no es arquimediano (básicamente porque "finitud" no es expresable en lenguaje de primer orden).

Se prueba la existencia de un número infinito en ${}^{*}\mathbb{N}$ con la certeza de que hay entidades internas no-estandar, basándose en que $\mathcal{U}$ es ultrafiltro δ-incompleto; dicho número es más grande que cualquier real estandar, como el número infinito en ${}^{*}\mathbb{N}$ no es cero su inverso es más pequeño que cualquier real positivo y no es cero, de esta manera se define a los números infinitos e infinitesimales.

Se define a los números finitos, y por medio de una función la parte estandar de un número finito y las propiedades de esta función.

Se aprecia, a manera de observación, una construcción de los números reales $\mathbb{R}$, basada en los números ${}^{*}\mathbb{Q}$ siguiendo la idea de la construcción vista en el teorema 3.19.

Se aprecia por último una idea muy clara de cómo es el sistema de los números complejos no-estandar ${}^{*}\mathbb{C}$.

Se palpan finalmente a las entidades externas de R^{*I}, por medio de definiciones y propiedades de las mismas, una propiedad en particular interesante es la que fue dada en el teorema 3.23. "Si $A\in R^{*}$ entonces el conjunto ${}^{*}A-\{{}^{*}a:a\in A\}$ de todos los elementos no-estandar de ${}^{*}A$ es vacío o externo, y en ese último caso el conjunto de los estandar de A $\{^{*}a : a\in A\}$ es externo también."

Modelo de Robinson.

Mucho más breve que el de Luxemburg, es puramente lógico. Se define la estructura $\mathcal{R}=\langle\mathbb{R},I\rangle$, denotando con Teo($\mathcal{R}$) a la teoría completa de $\mathbb{R}$, que es satisfacible, y a su vez considerando $0<v_1<r$ fórmula satisfacible en $\mathcal{R}$ con r constante y v_1 variable, aquí se define a $\Sigma=\text{Teo}(\mathcal{R})\cup\{0<v_1<r\}$ que es finitamente satisfacible por $\mathcal{R}$, aplicando el Teorema de Compacidad (Sea Σ un conjunto de enunciados entonces, Σ es finitamenta satisfacible ssí Σ es satisfacible.), hay una estructura $\mathfrak{A}$ y un elemento $a\in A$ universo de $\mathfrak{A}$ t.q. $\mathfrak{A}$ satisface Σ cuando a es la interpretación de la variable v_1. Luego entonces se prueba que, para todo enuciado σ en $L_{\mathcal{R}}$,

"σ es verdadero en $\mathfrak{A}$ ssí σes verdadero en $\mathcal{R}$"

se define entonces un monomorfismo $h:\mathcal{R}\longrightarrow\mathfrak{A}$ y de esta manera se tiene una copia isomórfica de $\mathcal{R}$ dentro de $\mathfrak{A}$.

Se construye una estructura $^{*}\mathcal{R}$ isomórfica a $\mathfrak{A}$ tal que $\mathcal{R}\subset{}^{*}\mathcal{R}$, el dominio de $^{*}\mathcal{R}$ es $^{*}\mathbb{R}$, probandose que hay un elemento $b\in{}^{*}\mathbb{R}-\mathbb{R}$ tal que satisface Σ cuando $v_1$toma el valor b, a este b se le define como infinitesimal.

Se demuestra el principio de transferencia que afirma "Para todo enunciado $\sigma\in L_{\mathcal{R}}$ se tiene, σ es verdadero en $\mathcal{R}$ ssí σ es verdadero en $^{*}\mathcal{R}$", e.d. "$\sigma\in\text{Teo}(\mathcal{R})$ ssí $\sigma\in\text{Teo}(^{*}\mathcal{R})$".

Con la b encontrada se define a 1/b como un hiperreal infinito.

Se estudian las propiedades algebraícas de los números infinitos e infinitesimales, estandar y no-estandar, definiendo los números finitos y la parte estandar de un número hiperreal finito con sus propiedades.

Se aplica finalmente el principio de transferencia con una serie de ejemplos.

Conclusiones.

El modelo de Luxemburg con la construcción de modelos en la forma de ultraproductos, tiene la ventaja de que se desarrolla con la teoría axiomática de conjuntos. El de Robinson no puede ser comprensible sin tener conocimientos previos de Lógica Matemática; sin embargo cuando se tienen, resulta muy sencillo de entender.

Con Luxemburg se construye un modelo no-estandar de orden superior, que es muy grande y de este modelo para nuestros fines, que son el desarrollar el sistema de los números reales no-estandar, se considera sólo un subconjunto de él, que es el ultraproducto ($^{*}\mathbb{R}^{\cdot}$). Con Robinson no es así, pues el modelo que obtenemos es únicamente para el sistema de los números reales no-estandar.

Una observación importante es que la construcción del primer modelo no es tan existencial, es verdad que la superestructura $R^{\cdot}$ tiene como base a $\mathbb{R}$; pero el ultraproducto de $R^{\cdot}$ se definió en base al $\mathcal{U}$-ultrafiltro δ-incompleto, y es aquí donde se aplica el "Axioma de Elección", por lo tanto se parte de que existe el $\mathcal{U}$-ultrafiltro δ-incompleto. Con el segundo modelo, por el Teorema de Compacidad, se parte de que existe un modelo que contiene al modelo de $\mathbb{R}$ y no hay un desarrollo constructivo.

El Axioma de Elección no es equivalente al Teorema de Compacidad, se dice que el segundo es una forma débil del Axioma de Elección (A.E. $\rightarrow$ T.C. y no al contrario).

Ya teniendo ambos modelos se observa que en escencia el Teorema Fundamental del Modelo de Luxemburg (Un enunciado V de $K_0(L)$ es verdadero en $R^{\cdot}$ ssí $^{*}v$ es verdadero en $^{*}(R^{\cdot})$), es lo mismo que el Principio de Transferencia del modelo de Robinson (Un enunciado v de $L_{\mathcal{R}}$ es verdadero en $\mathcal{R}$ ssí v es verdadero en $^{*}\mathcal{R}$).

Por lo anterior se identifica a Teo($\mathcal{R}$) con $K_0(L)$, esto es lo mismo y es en escencia lo más importante de ambos modelos.

Con Robinson se anexa a 0 en los infinitesimales ya definidos, no siendo así con Luxemburg, quien lo definió como tal.

En ambos modelos se definen y trabajan de manera similar las definiciones y propiedades de los números infinitos, finitos e infinitesimales, e.d. el sistema de los números reales no-estandar.

Dada la forma de construcción de $\mathbb{R}$ con Luxemburg, siguiendo la misma idea, estudiamos una construcción no-estandar de $\mathbb{R}$ utilizando a $^{*}\mathbb{Q}$ bastante interesante; pero utilizando el modelo de Robinson, también puede ser dada dicha construcción.

En cuanto al sistema de los números complejos en ambos modelos se pueden definir de igual manera, pues el sistema de

${}^*\mathbb{R}$ y el producto cartesiano ya está dado.

Una aportación importante del modelo de Luxemburg son las definiciones y propiedades de algunas entidades externas como lo son ${}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$, M_0, M_1, $\mu(r)$ con $r\in\mathbb{R}$, y ${}^*\mathbb{R}_\infty={}^*\mathbb{R}-M_0$, se sabe donde se encuentran las entidades externas, por la construcción en que se desarrolló dicho modelo, e.d. son más palpables. Con Robinson también se pueden estudiar dichas entidades; aunque no se sabe dónde se encuentran, e.d. no se aprecian de igual manera.

Con la ayuda de la definición y las propiedades de los conjuntos *-finitos, se conoce mas aún a las entidades internas y con esto se puede demostrar otras propiedades de ${}^*(R^*)$, y claro está que como caso particular más propiedades de ${}^*\mathbb{R}$. Las aplicaciones consideradas por ambos en $\mathbb{R}$ son de manera similar.

En lo personal el modelo de Luxemburg me es de mayor interés, ya que la forma en que se desarrolló y las aportaciones que fueron dadas son de suma importancia; aunque ambos modelos son muy comprensibles pues fueron construídos paso a paso.

BIBLIOGRAFIA.

*[1] Enderton, H.B., A Mathematical Introduction to Logic, Ed. Academic Press Inc., E.U.A., 1972, 384 pp.

*[2] Enderton, H.B., Elements of Set Theory, Ed. Academic press Inc., E.U.A., 1977, 279 pp.

*[3] Amor Montaño, J.A., Análisis No-estandar, Revista del seminario de enseñanza y titulación num. 12, Depto. de Matemáticas de la Fac. de Ciencias UNAM, 1987, 33 pp.

*[4] Herstein, I.N., Topics in Algebra, 2ª ed., Ed. John Wiley & Sonns Inc., E.U.A., 388 pp.

*[5] Luxemburg, W.A.J., What is Nonstandard Analysis?, in Papers in the Fundations of Mathematics, Amer. Math. Monthly, 1973, No. 6, Part. II, pp. 38-67.

*[6] Davis, M., Applied Nonstandard Analysis, Ed. John Wiley & Sons Inc., E.U.A., 1977, 177 pp.

*[7] Robinson, A., Non-standard Analysis, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland, 1966.

*[8] Bell, J. L. and A. B. Slomsom, Models and Ultraproducts, North-Holland, 1969.

*[9] Bernstein, A.R., Non-standard Analysis, in Studies in Model Theory, M. D. Morley, Ed. Studies in Mathematics, Vol. 8, 1973, pp. 35-58.

*[10] Luxemburg, W.A.J., Nonstandard Analysis, Lectures on A. Robinson's Theory of Infinitesimals and infinitely large numbers, Pasadena (1962) and revised edition (1964).

*[11] Guerrero Zarco, L., Análisis No-standard: Una Alternativa, Tesis UNAM, 1979, 112 pp.