

00365

2
2ej.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

**PROBLEMA COLINEAL RESTRINGIDO DE
3 CUERPOS CON FUERZA REPULSIVA**

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

P R E S E N T A

RICARDO RAMIREZ MARTINEZ



MEXICO, D. F.

1992

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'J. H. T.' or similar, located in the bottom right corner of the page.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

Introducción

CAPITULO I

Preliminares.....	1
Problema de Fuerza Central Repulsiva	5
Problema Repulsivo de Tres Cuerpos	9

CAPITULO II

Análisis del Problema Colineal de Tres Cuerpos	15
Partículas Extremas Fijas	18
Problema Restringido	20
Ejemplo	32
Apéndice	35
Bibliografía	36

INTRODUCCION

El problema más general en Mecánica Celeste es el de conocer todas las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\ddot{\vec{x}}_k = \sum \frac{G m_j}{|\vec{x}_j - \vec{x}_k|^2} (\vec{x}_j - \vec{x}_k), \quad k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

que describe el movimiento de n partículas sujetas a su atracción gravitacional mutua .

Debido a la dificultad de analizarlo se han considerado casos más sencillos , no por ello de menos interés .

En el problema del movimiento de n partículas , éstas pueden presentar fuerzas de atracción o repulsión . Con fuerzas de atracción la situación puede ser muy complicada . pudiendo ocurrir choques , escapes , así como comportamiento periódico o recurrente del movimiento de las partículas .

Cuando se presentan repulsiones , generalmente ocurren escapes de las partículas .

Un problema que surgió como un problema académico y originó la tesis doctoral de Felipe Peredo , fué el de considerar el comportamiento de tres partículas en una configuración de triángulo isósceles con fuerzas de repulsión . Allí se probó la existencia de movimientos donde una partícula tiende a una posición fija , mientras que las otras escapan .

Actualmente José Guadalupe Reyes está trabajando sobre el mismo problema en su tesis doctoral usando técnicas halladas por Ernesto Lacomba y él mismo .

En esta tesis estudiamos el problema de tres partículas alineadas (problema colineal) con fuerza repulsiva . Este problema se podría considerar como un caso degenerado del isósceles , excepto que allí dos de las masas de las 3 partículas deben ser iguales .

El trabajo se ha dividido en dos capítulos , de la manera siguiente :

En el primero planteamos las ecuaciones para el problema de n cuerpos en el caso repulsivo , al igual que algunos resultados técnicos que se pueden consultar en la tesis doctoral de Felipe Peredo . Por eso en algunos casos omitimos las demostraciones .

Los temas claves en este capítulo son :

- 1) El problema de Fuerza Central Repulsiva que nos va a permitir hacer el cambio del tiempo físico t por x , fundamental en el estudio del problema colineal de tres cuerpos .
- 2) El problema Repulsivo de 3 Cuerpos , en especial la proposición de Felipe Peredo (1.3) que motivó este trabajo .

En el capítulo II hacemos un análisis de la proposición (1.3) y describimos el comportamiento de la partícula central para el caso restringido . Esto significa que la partícula situada entre las otras dos se supone de masa nula . Se demuestra como un ejemplo que si las masas extremas son iguales y elegimos apropiadamente las condiciones iniciales , la partícula central puede no escapar a infinito . En el caso general (masas de los extremos diferentes) , aunque todas las partículas escapan , para ciertas condiciones iniciales la relación entre distancias mutuas tiende a una constante que depende solo de las masas .

Una de las dificultades al intentar resolver el problema fué dar coordenadas adecuadas para que las ecuaciones se simplificaran . ya que en esta configuración no se tienen simetrías como en el isósceles .

Es importante hacer notar que en esta tesis nos apareció una ecuación diferencial de la forma

$$z u'' = F(u', u, z) .$$

En la tesis de José Guadalupe se analiza una ecuación parecida de segundo orden .

La existencia de soluciones analíticas de esta ecuación ha sido estudiada desde finales del siglo pasado . Sin embargo , no conocemos aplicaciones ni análisis posteriores de la misma .

CAPITULO I

PRELIMINARES

En este capítulo estableceremos la notación básica y algunos resultados generales relativos al problema de n cuerpos con fuerza repulsiva. También enunciamos la conjetura que motivó esta tesis. Todos los resultados aquí mencionados se pueden revisar en [PE], por lo cual en algunos casos omitiremos las demostraciones.

1. Problema Repulsivo de n Cuerpos

Sean n partículas que pueden experimentar por parejas uno o los dos tipos de fuerzas: de atracción y de repulsión. Si \vec{F}_{ik} es la fuerza que actúa sobre la partícula k debido a la presencia de la partícula i ; entonces \vec{F}_{ik} está dada por:

$$\vec{F}_{ik} = \frac{G m_i m_k - \gamma q_i q_k}{|\vec{x}_i - \vec{x}_k|^3} (\vec{x}_i - \vec{x}_k), \quad (i \neq k)$$

donde $m_i \geq 0$, $\gamma \geq 0$, $G > 0$, $q_i \in \mathbb{R}$ y \vec{x}_i es el vector de posición de la partícula i respecto a un sistema coordenado cartesiano dado. Aquí las m_i pueden interpretarse como masas y las q_i como cargas de las partículas.

Las ecuaciones de movimiento son:

$$(1.0) \quad \ddot{\vec{x}}_k = \sum_{j \neq k} \frac{G m_j - (\gamma q_j q_k / m_k)}{|\vec{x}_j - \vec{x}_k|^3} (\vec{x}_j - \vec{x}_k), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

De aquí obtenemos 4 casos:

- 1) Si $q_i = 0$ para toda $i=1, 2, \dots, n$, las ecuaciones de movimiento (1.0)

se reducen a las ecuaciones del problema de n cuerpos en mecánica celeste.

2) Si $G m_j m_k - \gamma q_j q_k > 0$ para ciertos valores de j y k entonces la fuerza entre dichas partículas será de atracción.

3) Cuando $G m_j m_k - \gamma q_j q_k = 0$ no habrá interacción entre dichas partículas.

4) Pero si, $G m_j m_k - \gamma q_j q_k < 0$ la fuerza entre ellas será de repulsión.

El caso que nos concierne es para $m_i = 0$ y $q_i > 0$, para todo i , es decir, las fuerzas de interacción son repulsivas. La notación será con m_i en lugar de q_i , de esta manera m_i serán nuestras masas.

Ahora la ecuación (1.0) restringida al caso que nos interesa toma la forma

$$(1.1) \quad m_k \ddot{\vec{x}}_k = - \sum_{j \neq k} \gamma \frac{m_k m_j}{|\vec{x}_j - \vec{x}_k|^3} (\vec{x}_j - \vec{x}_k), \quad k=1, \dots, n.$$

donde γ es una constante real positiva y $m_i > 0$ para toda i .

Definimos el vector centro de masa como:

$$\vec{x}_c = (m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2 + \dots + m_n \vec{x}_n) / (m_1 + m_2 + \dots + m_n)$$

Entonces

$$\ddot{\vec{x}}_c = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{x}}_i / (m_1 + m_2 + \dots + m_n) = 0$$

ya que
$$\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{x}}_i = 0$$

Si consideramos el cambio de coordenadas $\vec{r}_k = \vec{x}_k - \vec{x}_c$, entonces, el sistema (1.1) es invariante:

$$(1.2) \quad m_k \ddot{\vec{r}}_k = - \sum_j \gamma \frac{m_j m_k}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_k), \quad k=1, \dots, n.$$

Además, el centro de masa queda fijo en el origen, es decir:

$$(1.3) \quad \sum m_l \vec{r}_l = 0.$$

Derivando (1.3) obtenemos

$$(1.4) \quad \sum m_l \dot{\vec{r}}_l = 0. \text{ Esto es, el momento lineal es cero.}$$

Por un cálculo directo como en mecánica celeste [P] se demuestra que el momento angular \vec{c} se conserva (es decir, toma un valor constante a lo largo de cada solución):

$$\vec{c} = \sum m_k \vec{r}_k \times \dot{\vec{r}}_k.$$

Definimos la energía potencial U como en mecánica celeste, pero con el signo cambiado:

$$(1.5) \quad U = - \sum_{1 \leq j < k \leq n} m_j m_k \frac{\gamma}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|}.$$

Otra forma de escribir (1.2) es:

$$(1.6) \quad m_l \ddot{\vec{r}}_l = \nabla_l U,$$

$$\text{donde } \nabla_l U = \left(\frac{\partial U}{\partial r_l^1}, \frac{\partial U}{\partial r_l^2}, \frac{\partial U}{\partial r_l^3} \right)$$

$$\text{y } \vec{r}_l = (r_l^1, r_l^2, r_l^3).$$

Si consideramos el producto $\dot{\vec{r}}_l \cdot m_l \ddot{\vec{r}}_l = \dot{\vec{r}}_l \cdot \nabla_l U$ e integrando como en [P], obtenemos :

$$1.7) \frac{1}{2} \sum_l m_l |\dot{\vec{r}}_l|^2 - U = h, \text{ donde } h \text{ es una constante (conservación de la energía total del sistema).}$$

Es claro que h siempre es positiva porque $U < 0$, y U está siempre acotado superiormente .

Los siguientes resultados se pueden ver en [Pe]:

1) Las funciones $r_{jk} = |\vec{r}_j - \vec{r}_k|$ están acotadas inferiormente por números positivos.

2) las soluciones de (1.2) están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$. No hay singularidades.

3) las velocidades $\dot{\vec{r}}_k$ están acotadas :

$$|\dot{\vec{r}}_k| < \left(\frac{2h}{m_k} \right)^{1/2}$$

4) El momento de inercia $I = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k r_k^2$ tiende a infinito cuando $t \rightarrow \pm\infty$.

Definamos las funciones R , ζ , r como :

$$R(t) = \max_{j,k} r_{jk}(t) = \max_{j,k} |\vec{r}_j(t) - \vec{r}_k(t)|,$$

$$r(t) = \min_{j,k} r_{jk}(t) \quad \text{y}$$

$$\zeta(t) = \max_k r_k(t). \text{ Entonces,}$$

$$5) \quad \begin{aligned} \zeta(t) &\rightarrow +\infty & \text{si } t &\rightarrow \pm\infty, \\ R(t) &\rightarrow +\infty & \text{si } t &\rightarrow \pm\infty \end{aligned}$$

En mecánica celeste el diámetro R del sistema de partículas no siempre tiende a infinito.

$$6) \quad U(t) \rightarrow 0 \text{ si y sólo si } \lim_{t \rightarrow \infty} r = \infty$$

$$\text{Sean } \bar{Q} = ((r_1, \dots, r_n) \mid \sum m_i r_i = 0)$$

$$\Delta = \bigcup_{i \neq j} ((r_1, \dots, r_n) \mid r_i = r_j)$$

$$P = ((r_1, \dots, r_n) \mid \sum m_i r_i = 0).$$

Entonces, $Q = \bar{Q} - \Delta$ es el espacio de configuración del sistema y $Q \times P$ el espacio de fases. En nuestro caso Δ no puede ser alcanzado por ninguna solución.

2. Problema de fuerza Central Repulsiva

Consideremos dos partículas con fuerza coulombiana repulsiva. Como $m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0$, entonces,

$$1.8) \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \vec{r}_1$$

que al substituir en (1.2) y simplificar resulta

$$(1.9) \quad \left\{ \begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_1 &= [\gamma m_2^3 / (m_1 + m_2)^2] \vec{r}_1 / r_1^3 \\ \ddot{\vec{r}}_2 &= [\gamma m_1^3 / (m_1 + m_2)^2] \vec{r}_2 / r_2^3 \end{aligned} \right.$$

Estas ecuaciones son de la forma

$$(1.10) \quad \ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu \vec{r}}{r^3} \quad \text{con } \mu > 0 \text{ constante,}$$

que define el problema de fuerza central repulsiva.

Como el momento de inercia I tiende a ∞ cuando $t \rightarrow \infty$ en cualquier problema de n cuerpos, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (m_1 r_{12}^2 + m_2 r_{21}^2) \geq \lim_{t \rightarrow \infty} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) = \lim_{t \rightarrow \infty} I = \infty,$$

de donde se deduce que $\lim_{t \rightarrow \infty} r_{12} = \infty$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} r_{21} = \infty$. Por lo tanto, en el problema de fuerza central repulsiva necesariamente $\lim_{t \rightarrow \infty} r = \infty$.

También podemos deducir que $\dot{\vec{r}} \times \vec{r} = \vec{c}$ (constante), como en [P] capítulo II. Por lo tanto $\dot{\vec{r}}$ permanece en el plano perpendicular a \vec{c} para todo t si $\vec{c} \neq 0$, pero si $\vec{c} = 0$, entonces el movimiento es colineal (caso de nuestro interés).

De la ecuación (1.10) obtenemos efectuando el producto interno por $\dot{\vec{r}}$

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}^2 + 2\mu/r \right) = 0.$$

De donde obtenemos la ecuación de la energía

$$(1.11) \quad \frac{1}{2} \dot{\vec{r}}^2 + \mu/r = h,$$

que difiere de su análoga en mecánica celeste en el signo del término correspondiente a la energía potencial:

$$\mu/r.$$

OBSERVACION: La energía total h siempre es positiva.

Utilizando la identidad

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \times \dot{\vec{r}}}{r}, \quad [P],$$

y el hecho de que $\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = \vec{0}$, obtenemos que

$$(1.12) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} - \vec{c} \times \mu \dot{\vec{r}} \right) = \vec{0}, \quad [Pe], \text{ por lo tanto existe un}$$

vector \vec{e}_0 (constante) tal que

$$(1.13) \quad \frac{\vec{r}}{r} - \mu \vec{c} \times \dot{\vec{r}} = \vec{e}_0.$$

Si $\vec{c} = 0$, caso colineal, entonces, (1.12) se reduce a $\dot{\vec{r}}/r = \vec{e}_0$, es decir, el movimiento ocurre en la recta que pasa por el origen y cuya dirección es \vec{e}_0 . Substituyendo $\vec{r} = r\vec{e}_0$ en (1.10) y (1.11), obtenemos:

$$(1.14) \quad \ddot{r} = \mu/r \quad \text{y}$$

$$(1.15) \quad (\dot{r})^2 + 2\mu r^{-1} = 2h.$$

La ecuación diferencial (1.15) se puede reducir a una ecuación diferencial de coeficientes constantes mediante el cambio de variable

$$(1.16) \quad r = \int \frac{k dt}{r(t)}, \quad \text{donde } k = \text{constante por determinar a nuestra conveniencia.}$$

De este cambio concluimos que $\frac{dr}{dt} = k/r$, y por lo tanto

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = k r'/r ,$$

$$\text{donde } r' = \frac{dr}{d\tau} .$$

Substituyendo \dot{r} en (1.15):

$$k^2 r^{-2} (r')^2 + 2\mu r^{-1} = 2h$$

$$(1.17) \quad k^2 (r')^2 + 2\mu r = 2h r^2$$

Derivando (1.17) con respecto a τ :

$$2k^2 r' r'' + 2\mu r' = 2h (2r r')$$

Como r' no puede ser siempre nula, entonces dividimos por r' obteniendo

$$k^2 r'' - 2h r + \mu = 0 ,$$

que tiene por solución a

$$(1.18) \quad r(\tau) = a \cosh [(2h/k^2)^{1/2} \tau] + b \sinh [(2h/k^2)^{1/2} \tau] + \mu/2h .$$

Podemos elegir $k = (h/2)^{1/2}$, quedando entonces

$$r(\tau) = a \cosh (2\tau) + b \sinh (2\tau) + \mu/2h .$$

Eligiendo $a = \mu/2h$ y $b = 0$. [Pe] obtenemos:

$$(1.19) \quad r(\tau) = \mu/2h (1 + \cosh 2\tau)$$

La relación entre τ y t viene dada por :

$$\begin{aligned} t &= \int \frac{r \, dt}{k} = \int (2/h)^{1/2} (\mu/2h) (1 + \cosh 2\tau) \, d\tau \\ &= \frac{\mu}{2 (2h^3)^{1/2}} [2\tau + \sinh (2\tau)] + c_0 \end{aligned}$$

Si elegimos $c_0 = 0$, entonces hacemos corresponder los ceros de los tiempos τ y t . Así

$$t(\tau) = \mu/(2h)^{3/2} [2\tau + \sinh(2\tau)]$$

Un resultado que utilizaremos es el de que r y t son del mismo orden, esto es,

$$(1.20) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} r/t = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\mu/2h) [1 + \cosh (2\tau)]}{\mu(2h)^{-3/2} [2\tau + \sinh (2\tau)]} = (2h)^{1/2}$$

Esto da lugar que para t suficientemente grande podamos cambiar t por r .

3. Problema Repulsivo de 3 Cuerpos

Consideramos un sistema de 3 partículas. Las ecuaciones de movimiento son:

-- (1.21) --

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} - \gamma \frac{m_1 m_3}{r_{13}^3} \vec{r}_{13} ,$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\gamma \frac{m_2 m_1}{r_{21}^3} \vec{r}_{21} - \gamma \frac{m_2 m_3}{r_{23}^3} \vec{r}_{23} ,$$

$$m_3 \ddot{\vec{r}}_3 = -\gamma \frac{m_3 m_1}{r_{31}^3} \vec{r}_{31} - \gamma \frac{m_3 m_2}{r_{32}^3} \vec{r}_{32} .$$

Simplificando las m_i y restando las ecuaciones, podemos escribir el sistema sólo en términos de \vec{r}_{ij} . en particular

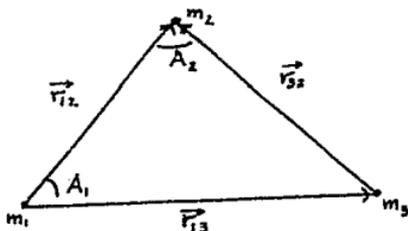
$$(1.22) \quad \ddot{\vec{r}}_{12} = \frac{\gamma m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} - \frac{\gamma m_3}{r_{23}^3} \vec{r}_{23} - \frac{\gamma m_1}{r_{21}^3} \vec{r}_{21} + \frac{\gamma m_3}{r_{13}^3} \vec{r}_{13}$$

$$(1.23) \quad \ddot{\vec{r}}_{12} = \gamma \frac{m_1 + m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} + \gamma m_3 \left(\frac{\vec{r}_{13}}{r_{13}^3} - \frac{\vec{r}_{23}}{r_{23}^3} \right)$$

Si efectuamos el producto punto con \vec{r}_{12} :

$$(1.24) \quad \ddot{\vec{r}}_{12} \cdot \vec{r}_{12} = \frac{2\gamma(m_1 + m_2)}{r_{12}^3} + \gamma m_3 \left[\frac{\vec{r}_{32} \cdot \vec{r}_{12}}{r_{32}^3} + \frac{\vec{r}_{13} \cdot \vec{r}_{12}}{r_{13}^3} \right]$$

Consideremos los ángulos A_1 y A_2 que se forman en m_1 y m_2 respectivamente



Si en un sistema dado los ángulos que se forman en m_1 y m_2 son agudos, entonces

$$\vec{r}_{22} \cdot \vec{r}_{12} = r_{22} r_{12} \cos A_2 > 0$$

$$\vec{r}_{19} \cdot \vec{r}_{12} = r_{19} r_{12} \cos A_1 > 0$$

$$\text{y por (1.24)} \quad \vec{r}_{12} \cdot \ddot{\vec{r}}_{12} > 0$$

PROPOSICION I.1 . Sea $\vec{r} = \vec{r}(t)$ una función C^2 de \mathbb{R} en \mathbb{R}^3 tal que $\vec{r}(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y $r = |\vec{r}|$. Entonces

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}}}{r} + \frac{|\dot{\vec{r}}|^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{r}$$

donde θ es el ángulo formado por \vec{r} y $\dot{\vec{r}}$.
La demostración es un cálculo directo .

PROPOSICION I.2 . Si a partir de un instante dado t_0 los ángulos que se forman en las masas m_1 y m_2 permanecen agudos para todo $t \geq t_0$. Entonces

- a) $\ddot{r}_{12} > 0$ en $(0, \infty)$
- b) Existe $t_1 > t_0$ tal que $\dot{r}_{12}(t_1) > 0$
- c) $\lim_{t \rightarrow \infty} r_{12} = +\infty$

Demostración .-

a) Por la proposición I.1 y 1.24 tenemos :

$$\ddot{r}_{12} = \frac{\dot{r}_{12} \cdot \ddot{r}_{12}}{r_{12}} + \frac{|\dot{r}_{12}|^2 \operatorname{sen} \theta}{r_{12}} > 0 \text{ Para todo } t \geq t_0$$

b) Por reducción al absurdo, si $\dot{r}_{12} \leq 0$ para todo $t > t_0$, entonces r_{12} sería una función positiva decreciente y por lo tanto acotada superiormente; $r_{12}(t) \leq M$ para alguna $M \in \mathbb{R}$ y para todo $t \geq t_0$.

Con esto tenemos que

$$\ddot{r}_{12} \geq \frac{\dot{r}_{12} \cdot \ddot{r}_{12}}{r_{12}} \geq \frac{\dot{r}_{12} \cdot \ddot{r}_{12}}{M} \geq \frac{2\gamma(m_1+m_2)}{M r_{12}} \geq \frac{2\gamma m_1}{M}$$

para todo $t \geq 0$. Integrando dos veces

$$r_{12} \geq \frac{\gamma m_1}{M} (t - t_0)^2 - \dot{r}_{12}(t_0) (t - t_0) - r_{12}(t_0)$$

Pero el segundo miembro tiende a ∞ cuando $t \rightarrow \infty$, lo cual es una contradicción .

c) Como existe $t_1 > t_0$ tal que $\dot{r}_{12}(t_1) > 0$ y la integral de una función continua positiva siempre es positiva, tenemos

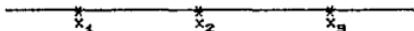
$$\begin{aligned} r_{12}(t) - r_{12}(t_1) &= \int_{t_1}^t \dot{r}_{12} dt = \int_{t_1}^t [\dot{r}_{12}(t) - \dot{r}_{12}(t_1) + \dot{r}_{12}(t_1)] dt \\ &= \dot{r}_{12}(t_1) (t - t_1) + \int_{t_1}^t \left[\int_{t_1}^s \ddot{r}_{12}(s) ds \right] dt \geq \dot{r}_{12}(t_1) (t - t_1). \end{aligned}$$

Pero $\dot{r}_{12}(t_1) (t - t_1) \rightarrow \infty$ si $t \rightarrow \infty$, por lo tanto $\lim_{t \rightarrow \infty} r_{12} = \infty$. ■

PROPOSICION I.3 ([Pe]). En un movimiento en una dimensión de tres partículas con fuerza repulsiva, al menos dos de ellas escapan a ∞ cuando $t \rightarrow \infty$.

Demostración:

Sean $x_1 < x_2 < x_3$ las coordenadas de dichas partículas.



De la relación $\sum m_i \vec{r}_i = 0$ se obtiene $\sum m_i x_i = 0$ de donde se deduce que $x_3 > 0$ y $x_1 < 0$ para todo t .

Si x_3 no tendiera a ∞ , existiría una sucesión $t_k \rightarrow \infty$ tal que $x_3(t_k) \leq M_0$ para algún número real M_0 .

Hay dos posibilidades

- 1) $x_2(t_k) \geq 0$ a partir de cierto k , o bien,
- 2) $x_2(t_k) < 0$ para alguna subsucesión de $\{t_k\}$.

Caso 1. Como $x_1 < 0 \leq x_2 < x_3$, entonces, $0 \leq x_2(t_k) < M$ para todo $k \geq R_0$. Pero entonces:

$$|\vec{r}_1(t)| = |x_1(t_k)| = \left| \frac{-m_2 x_2(t_k) - m_3 x_3(t_k)}{m_1} \right|$$

$$\leq \frac{m_2}{m_1} x_2(t_k) + \frac{m_3}{m_1} x_3(t_k) < \frac{m_3 + m_2}{m_1} M_0 .$$

Por lo tanto

$$r_{13}(t_k) = |\vec{r}_3(t_k) - \vec{r}_1(t_k)| \leq x_3(t_k) + |x_1(t_k)| < (1 + \frac{m_2 + m_3}{m_1}) M_0$$

Contradiciendo el hecho de que $r_{13} \rightarrow \infty$ ya que los ángulos que forman las masas m_1 y m_3 son agudos para todo t .

Caso 2.- $x_1 < x_2 < 0 < x_3$ para una subsucesión $\{t_k\}$. Tenemos que

$$x_3 = \frac{-m_1 x_1}{m_3} - \frac{m_2 x_2}{m_3} = \frac{m_1}{0} |x_1| + \frac{m_2}{m_3} |x_2| \geq \frac{m_1}{m_3} |x_1|$$

entonces

$$|\vec{r}_{13}(t_k)| = |\vec{r}_3(t_k) - \vec{r}_1(t_k)| \leq x_3(t_k) + |x_1(t_k)| < M_0 + \frac{m_3}{m_1} M_0$$

pero $r_{13} \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$, contradicción. ■

Este último resultado de Paredó motivó esta tesis. En el próximo capítulo probaremos que la partícula m_2 puede o no escapar a ∞ .

CAPITULO II

Análisis del Problema Colineal de 3 Cuerpos

Consideremos tres partículas de masas m_1 , m_2 y m_3 respectivamente; alineadas sobre una recta como en el capítulo anterior. Estudiar el comportamiento de la partícula m_2 cuando t tiende a ∞ es la finalidad de este capítulo. Para ello hemos dividido el análisis en dos casos:

- 1) Las posiciones x_1 y x_3 de m_1 y m_3 respectivamente son fijas,
- 2) $m_2 = 0$, $m_1 = \mu$ y $m_3 = 1 - \mu$ en $\frac{1}{2} \leq \mu < 1$ (caso restringido).

En el primer caso se tienen oscilaciones como un resorte no lineal de la partícula de masa m_2 . En contraste, al no estar fijas las partículas extremas en el caso 2), la repulsión las hace escapar, así que la de en medio ya no oscila.

El problema colineal repulsivo de tres cuerpos tiene dos grados de libertad, como el problema isósceles de tres cuerpos, estudiado por Felipe Peredo y José Guadalupe Reyes.

En general, no se tienen las simetrías que en el caso isósceles. Esto conduce a que hay solo una configuración central (Euler) en vez de las 3 del caso isósceles (Euler y Lagrange). Ambos problemas tienen en común (para valores simétricos de las masas) ciertos movimientos asintóticos con algunas condiciones iniciales.

El primer problema al considerar los tres cuerpos alineados es el de describir sus ecuaciones de movimiento y dar coordenadas adecuadas que las simplifiquen, ya que no existen simetrías como en el isósceles.

Sean m_1 , m_2 y m_3 las masas de tres partículas sobre una recta con coordenadas x_1 , x_2 y x_3 respectivamente. De la ecuación

$$m_k \ddot{x}_k = - \sum_{j \neq k} \gamma \frac{m_j m_k (x_j - x_k)}{|x_j - x_k|^3} \quad \text{con } \gamma > 0 ,$$

caso repulsivo, tenemos que

$$m_1 \ddot{x}_1 = - \frac{\gamma m_1 m_2 (x_2 - x_1)}{|x_2 - x_1|^3} - \frac{\gamma m_3 m_1 (x_3 - x_1)}{|x_3 - x_1|^3}$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = - \frac{\gamma m_1 m_2 (x_1 - x_2)}{|x_1 - x_2|^3} - \frac{\gamma m_3 m_2 (x_3 - x_2)}{|x_3 - x_2|^3}$$

$$m_3 \ddot{x}_3 = - \frac{\gamma m_1 m_3 (x_1 - x_3)}{|x_1 - x_3|^3} - \frac{\gamma m_2 m_3 (x_2 - x_3)}{|x_2 - x_3|^3}$$

De aquí se obtienen las ecuaciones de movimiento de x_1 , x_2 y x_3 :

$$\ddot{x}_1 = - \frac{\gamma m_2}{(x_2 - x_1)^2} - \frac{\gamma m_3}{(x_3 - x_1)^2} ,$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{\gamma m_1}{(x_1 - x_2)^2} - \frac{\gamma m_3}{(x_3 - x_2)^2} ,$$

$$\ddot{x}_3 = \frac{\gamma m_1}{(x_1 - x_3)^2} + \frac{\gamma m_2}{(x_2 - x_3)^2} .$$

Para simplificar las ecuaciones hacemos las siguientes consideraciones, que no hacen perder generalidad :

1) $\gamma = 1$

2) El centro de masa del sistema, $\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$, lo suponemos en el origen .

Definimos $x_3 - x_1 = x$ y $x_2 = y$. Escribimos x_1 y x_3 en términos de x , y , resolviendo el siguiente sistema

$$\begin{aligned} m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 &= 0 \\ x_3 - x_1 &= x \\ x_2 &= y \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} x_1 &= - \frac{m_2 y + m_3 x}{m_1 + m_3} , \\ x_3 &= \frac{m_1 x - m_2 y}{m_1 + m_3} , \\ x_2 &= y \end{aligned}$$

Las nuevas ecuaciones de movimiento del sistema serán

- 2.1 -

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{m_1 + m_3}{x^2} + m_2 (m_1 + m_3) \left[\frac{1}{(My - m_1 x)^2} + \frac{1}{(My + m_3 x)^2} \right] , \\ \ddot{y} &= - \frac{m_1}{\left[\frac{My + m_3 x}{m_1 + m_3} \right]^2} - \frac{m_3}{\left[\frac{m_1 x - My}{m_1 + m_3} \right]^2} , \end{aligned}$$

$$\text{donde } M = m_1 + m_2 + m_3$$

1. Partículas Extremas Fijas

Supongamos que x_1 y x_3 son fijos, entonces, x es constante y por lo tanto $\ddot{x} = 0$. Así tenemos que (2.1) se reduce a

$$\ddot{y} = \frac{m_1}{\left[\frac{My + m_3 x}{m_1 + m_3} \right]^2} - \frac{m_3}{\left[\frac{m_1 x - My}{m_1 + m_3} \right]^2},$$

con $x = \text{constante}$. Para integrarla, eliminamos el tiempo. Si hacemos

$$v = dy/dt \quad \text{y} \quad \ddot{y} = \frac{dy}{dt} \frac{dv}{dy} = v \, dv/dy,$$

entonces,

$$v \frac{dv}{dy} = \frac{m_1}{\left[\frac{My + m_3 x}{m_1 + m_3} \right]^2} - \frac{m_3}{\left[\frac{m_1 x - My}{m_1 + m_3} \right]^2}$$

Integrando se tiene

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = - \frac{(m_1 + m_3)^2}{M} \left[m_1 (My + m_3 x)^{-1} + m_3 (m_1 x - My)^{-1} \right] + H$$

De aquí la energía potencial es

$$U(y) = \frac{(m_1 + m_2)^2}{M} [m_1(My + m_2x)^{-1} + m_2(m_1x - My)^{-1}]$$

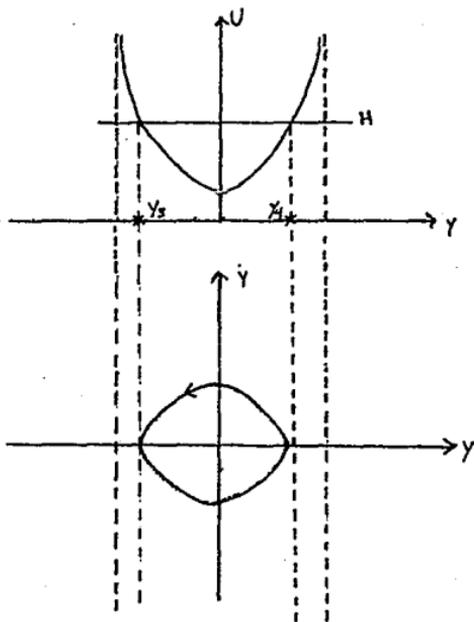
y los puntos singulares de $U(y)$ son

$$y_1 = -m_2 x / M \quad y \quad y_2 = m_1 x / M$$

$$\text{Como } \lim_{y \rightarrow -m_2 x / M} U(y) = \infty, \quad \lim_{y \rightarrow m_1 x / M} U(y) = \infty$$

$$y \quad U(0) = (m_1 + m_2) / M [m_1/m_2x + m_2/m_1x]$$

Tenemos las siguientes gráficas:



Podemos concluir que si x_1 y x_3 son fijos, entonces, la partícula de masa m_2 oscila entre las posiciones y_3 y y_4 que resuelven $-U + H = 0$ para H constante.

Al conjunto de puntos que satisfacen $H \geq U$ se le denomina Región de Hill.

2. Problema Restringido

Supóngase que $m_2 = 0$, $m_1 = \mu$ y $m_3 = 1 - \mu$ con $\frac{1}{2} \leq \mu < 1$.

Las ecuaciones de movimiento del sistema son

$$\ddot{x} = 1/x^2$$

$$2.1) \quad \ddot{y} = \frac{\mu}{[y + (1 - \mu)x]^2} - \frac{(1 - \mu)}{[\mu x - y]^2}$$

o bien

$$2.2) \quad \ddot{x} = 1/x^2$$

$$2.3) \quad \ddot{y} = \frac{(2\mu^2 - 3\mu^2 + 3\mu - 1)x^2 - (4\mu^2 - 4\mu + 2)xy + (2\mu - 1)y^2}{[y + (1 - \mu)x]^2 [\mu x - y]^2}$$

En el caso de que $0 < \mu \leq \frac{1}{2}$, hacemos los siguientes cambios :
 λ por $1 - \mu$ y y por $-y$. Quedando 2.1) como

$$\ddot{y} = \frac{1 - \lambda}{[\lambda x - y]^2} - \frac{\lambda}{[y + (1 - \lambda)x]^2}$$

con $\frac{1}{2} \leq \lambda < 1$. Esta ecuación es similar a 2.1) (ver. Apéndice).

De (2.2), obtenemos la ecuación de la energía

$$h = \frac{1}{2}(\dot{x})^2 + 1/x$$

La energía h en el problema repulsivo siempre es positiva y en la proposición 1.3 se demuestra que las partículas m_1 y m_2 escapan a $-\infty$ y ∞ respectivamente cuando $t \rightarrow \infty$.

Al fijar el valor de h , las posibles trayectorias en \mathbb{R}^2 quedan confinadas a la región de Hill que se obtiene del modo siguiente:

$$\text{de } (\dot{x})^2 + 2/x = 2h, \text{ tenemos}$$

$$2/x \leq 2h, \text{ o bien}$$

$$x \geq 1/h.$$

Entonces la región de Hill está dada por $H = \{(x,y) \mid x \geq 1/h\}$.

Utilizando las técnicas de $[L,R]$ podemos dar una descripción del comportamiento de m_2 cuando $t \rightarrow \infty$. Este no se puede obtener directamente de la ecuación (2.3).

Consideremos el cambio

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}.$$

Cambiamos el tiempo físico por x motivados por (1.20).

Entonces
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{dy}{dx} \frac{d^2x}{dt^2},$$

que al substituir en (2.3) da

$$(2.4) \quad \frac{d^2y}{dx^2} \left(2h - \frac{2}{x} \right) + \frac{dy}{dx} \left(-\frac{1}{x^2} \right) =$$

$$= \frac{(2\mu^2 - 3\mu^2 + 3\mu - 1)x^2 - (4\mu^2 - 4\mu + 2)xy + (2\mu - 1)y^2}{[y + (1 - \mu)x]^2 [\mu x - y]^2}$$

Al igual que en [L,R] queremos ver si esta ecuación tiene soluciones asintóticas, es decir, que tengan una determinada pendiente cuando $x \rightarrow \infty$.

Para ello utilizamos la transformación $(x,y) \rightarrow (x,y/x)$ por medio del cambio $y = ux$ (Ver fig. 3). La nueva variable dependiente u es la pendiente.

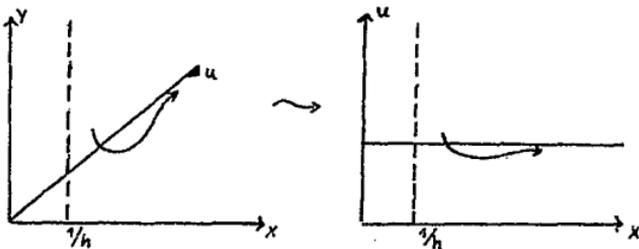


FIGURA 3

Para introducir el cambio en (2.4), utilizamos la regla de la cadena en $y = ux$. Así

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{du}{dx} + u \quad ; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = x \frac{d^2u}{dx^2} + 2 \frac{du}{dx} \quad ,$$

que al substituir en (2.4) nos da

$$(2.5) \quad (2hx - 2) \frac{d^2u}{dx^2} + (4h - \frac{4}{x} + \frac{1}{x}) \frac{du}{dx} + \frac{u}{x^2} =$$

$$= \frac{(2\mu - 1)u^2 - (4\mu^2 - 4\mu + 2)u + (2\mu^3 - 3\mu^2 + 3\mu - 1)}{x^2(u + (1 - \mu))^2 [\mu - u]^2}$$

Con la transformación $(x,y) \rightarrow (1/x, y/x)$ mediante el cambio $v = 1/x$ podemos hacer el estudio alrededor de los puntos $v = 0$, que corresponden a $x \rightarrow \infty$ (Ver fig. 4).

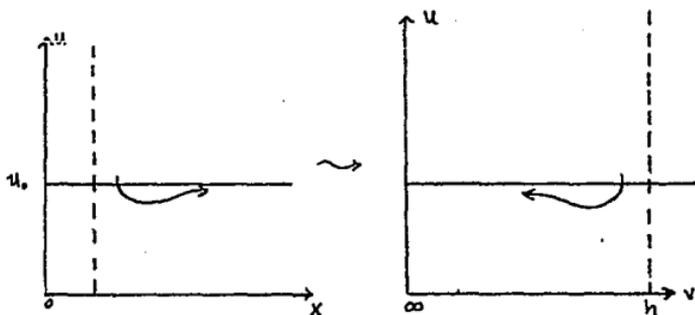


FIGURA 4

Nuevamente por regla de la cadena, tenemos

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \frac{dv}{dx} \quad , \quad \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dv^2} \left[\frac{dv}{dx} \right]^2 + \frac{du}{dv} \frac{d^2v}{dx^2} \quad ,$$

que al substituir en (2.5) lo transforma en

$$(2.6) \quad v \frac{d^2u}{dv^2} = \frac{v}{2(h-v)} \frac{du}{dv} - \frac{u}{2(h-v)} + \frac{(2\mu - 1)u^2 - (4\mu^2 - 4\mu + 2)u + (2\mu^3 - 3\mu^2 + 3\mu - 1)}{2(h-v) [u + (1-\mu)]^2 [\mu - u]^2}$$

Esta es una ecuación de la forma $vu'' = F(u', u, v)$ con F analítica alrededor de $v = 0$, $u(0) = \alpha$ y $u'(0) = \beta$. Un estudio detallado de este tipo de ecuaciones se encuentra en [F].

Una condición necesaria para que (2.6) tenga soluciones analíticas en $v = 0$, $u(0) = \alpha$ y $u'(0) = \beta$ es que $F(\beta, \alpha, 0) = 0$. Es decir,

$$-\frac{\alpha}{2h} + \frac{(2\mu - 1)\alpha^2 - (4\mu^2 - 4\mu + 2)\alpha + (2\mu^3 - 3\mu^2 + 3\mu - 1)}{2h [\alpha + (1-\mu)]^2 [\mu - \alpha]^2} = 0$$

o equivalentemente

$$2\alpha^3 - (8\mu - 4)\alpha^4 + (12\mu^2 - 12\mu + 2)\alpha^3 - (8\mu^3 - 12\mu^2 + 8\mu - 2)\alpha^2 + (2\mu^4 - 4\mu^3 + 10\mu^2 - 8\mu + 4)\alpha - (4\mu^3 - 6\mu^2 + 8\mu - 2) = 0 \quad ,$$

este polinomio tiene una única raíz real $\alpha^* > 0$ si $0 < \mu < 1$ (ver apéndice) .

Recordando que $u = \alpha^*$ es una pendiente fija en las coordenadas x, y , esto corresponde a la única configuración central del problema colineal [W].

Por otro lado, una condición suficiente para la existencia de soluciones de (2.6) es que la cuadrática crítica

$$\left[\lambda - \frac{\partial F}{\partial u'}(\beta, \alpha, 0) \right] \lambda = 0$$

tenga soluciones que no sean enteros positivos [F]. La única solución para nuestro caso es $\lambda = 0$, pues $\partial F / \partial u'(\beta, \alpha, 0) = 0$. Con esto, obtenemos el siguiente resultado.

PROPOSICION 2.1. La ecuación diferencial (2.6) definida en las coordenadas (u, v) , tiene soluciones analíticas $u = u(v)$ sólo para las condiciones iniciales $v = 0$, $u(0) = \alpha^*$ y $u'(0) = \beta$ arbitraria.

Las soluciones analíticas para las condiciones iniciales $v = 0$, $u(0) = \alpha$ y $u'(0) = \beta$ arbitrario, se pueden expresar en series de Taylor

$$u(v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{(k)}(0)}{k!} v^k,$$

como $u(0) = \alpha$ y $u'(0) = \beta$, entonces,

$$u(v) = \alpha + \beta v + \frac{u''(0)}{2!} v^2 + \frac{u'''(0)}{3!} v^3 + \dots$$

Que en las variables originales queda como

$$(2.7) \quad y(x) = \alpha^* x + \beta + \frac{1}{2!} u''(0) \frac{1}{x} + \frac{1}{1 \cdot 2} u'''(0) \frac{1}{x^2} + \dots$$

Cuando $x \rightarrow \infty$ la solución (2.7) tiende asintóticamente a la recta $y = \alpha^* x + \beta$ (Ver fig. 5).

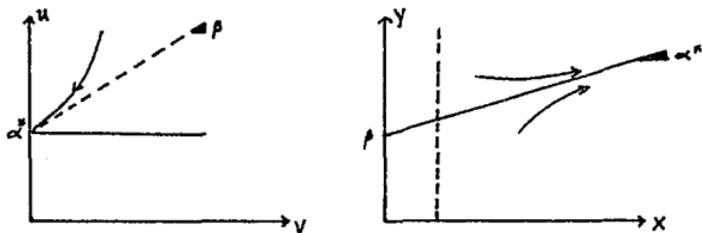


FIGURA 5

COROLARIO 2.2. Para toda solución de configuración central $y/x \rightarrow \alpha^*$; existe una subvariedad analítica de dimensión 2 formada por curvas soluciones de (2.3), que cuando se proyectan sobre la región de Hill resultan ser soluciones paralelas a tal configuración central a medida que $x \rightarrow \infty$ [L 2] (figura 5).

Hasta ahora hemos visto que sólo existen soluciones analíticas de (2.6) para condiciones iniciales de la forma $v = 0$, $u(0) = \alpha$ y $u'(0) = \beta$ arbitrario.

Para estudiar las soluciones para otras condiciones iniciales utilizamos la transformación

$$(x, y) \rightarrow \left(\frac{1}{x^{1/\rho}}, \frac{y}{x} \right) = (\tau, u) = (v^{1/\rho}, u), \quad [L, R],$$

donde $\rho \geq 2$ es un entero.

Se demuestra fácilmente que bajo esta transformación la recta $y = \alpha x + \beta$ se convierte en la curva $u = \alpha + \beta \tau^\rho$ con orden de contacto ρ (orden de tangencia) en el punto $(0, \alpha)$ con la recta $u = \alpha$ [ver fig.6].

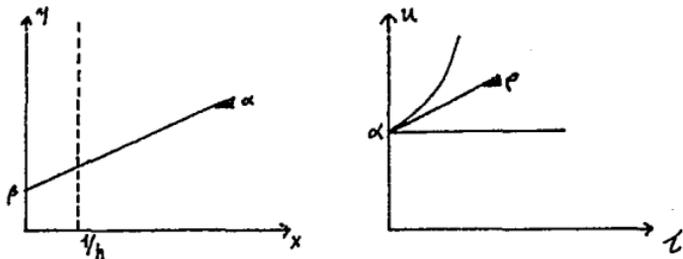


FIGURA 6

Procediendo de manera análoga como en el caso de soluciones analíticas tenemos

$$\frac{du}{dv} = \frac{\tau^{1-\rho}}{\rho} \frac{du}{d\tau}; \quad \frac{d u}{d v} = \frac{\tau^{2(1-\rho)}}{\rho} \frac{d u}{d \tau} + \frac{(1-\rho)}{\rho} \tau^{1-2\rho} \frac{d u}{d \tau}.$$

Substituyendo en (2.6)

$$(2.8) \quad \tau \frac{d^2 u}{d\tau^2} = [(\rho - 1) + \rho \frac{\tau^\rho}{2(h - \tau^\rho)}] du/d\tau - \frac{u\rho \tau^{\rho-1}}{2(h - \tau^\rho)} +$$

$$\frac{\rho^2 \tau^{\rho-1} [(2\mu - 1) u^2 - (4\mu^2 - 4\mu + 2)u + (2\mu^3 - 3\mu^2 + 3\mu - 1)]}{2(h - \tau^\rho) [u + (1 - \mu)]^2 [\mu - u]^2}$$

La ecuación (2.8) es del tipo $\tau u'' = F(u', u, \tau)$, donde F es analítica en sus argumentos.

Una condición necesaria para que (2.8) tenga soluciones analíticas en $\tau = 0$, $u(0) = \alpha$ y $u'(0) = \beta$ es $F(\beta, \alpha, 0) = 0$, o equivalentemente $(\rho - 1)\beta = 0$, es decir, $\beta = 0$ y α arbitrario. Ahora la ordenada al origen está fija y la pendiente es arbitraria.

Para la suficiencia consideremos la cuadrática crítica asociada a (2.8)

$$\left[\lambda - \frac{\partial F}{\partial u'}(\beta, \alpha, 0) \right] \lambda = 0$$

que por medio de un cálculo sencillo se transforma en $[\lambda - (\rho - 1)]\lambda = 0$, o bien, $\lambda = 0$ o $\lambda = \rho - 1$; pero $\rho \geq 2$. Por lo tanto, una de las dos soluciones es un entero positivo. Entonces, nuevamente por [F] existen una infinidad de soluciones para las

condiciones iniciales $\tau = 0$, $u(0) = \alpha$ [arbitraria] y $u'(0) = 0$, cada una analítica en las variables τ , $\tau \log \tau$.

La solución general de (2.8) con las condiciones iniciales dadas es

$$u(\tau) = \alpha + a_2 \tau^2 + a_3 \tau^3 + \dots + a_{\rho-1} \tau^{\rho-1} + \tilde{a}_{\rho} \tau^{\rho-1} \log \tau + a_{\rho} \tau^{\rho} + a_{\rho+1} \tau^{\rho+1} + \dots \quad (F) .$$

Que es analítica en los argumentos dados antes .

Si a_k es el primer coeficiente de esta serie que no se anula podemos escribir

$$u(\tau) = \alpha + a_k \tau^k + \dots + a_{\rho-1} \tau^{\rho-1} + \tilde{a}_{\rho-1} \tau^{\rho-1} \log \tau + \dots$$

donde k es el orden de contacto con la recta $u = \alpha$ en el punto $(0, \alpha)$.

PROPOSICION 2.3. Sea $\rho \geq 2$ fija y $u(\tau) = \alpha + a_k \tau^k + \dots$, una solución de (2.8). Entonces ,

- 1) Si $2 \leq k < \rho$, entonces , la solución de (2.8) en la región de Hill tiene a α como pendiente límite , pero no es asintótica a ninguna recta de la forma $y = \alpha x + b$ cuando $x \rightarrow \infty$ [Fig.7] .
- 2) Si $k = \rho$, entonces , la solución de (2.8) es asintótica a $y = \alpha x + a_k$, si $x \rightarrow \infty$ [Fig.8].
- 3) Si $k > \rho$, entonces , la solución es asintótica a $y = \alpha x$ si $x \rightarrow \infty$ [Fig.9].

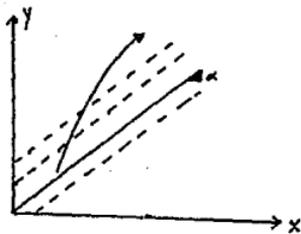


FIG. 7

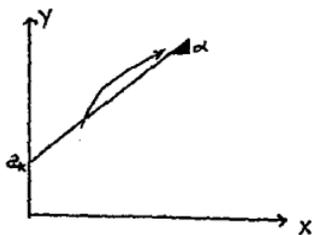


FIG. 8

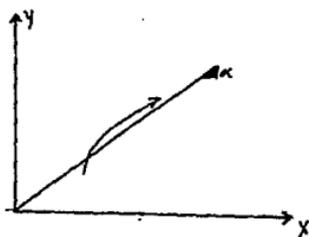


FIG. 9

Demostración .

Sea $u = \alpha + a_k \tau^k + \dots$. Como $u = y / x$ y $\tau = x^{-1/\rho}$, entonces $y/x = \alpha + a_k x^{-k/\rho} + \dots$. Por lo tanto $y = \alpha x + a_k x^{(\rho-k)/\rho} + \dots$.

Si $2 \leq k < \rho$, entonces , $0 < (\rho-k)/\rho < 1$. Por lo tanto $u(\tau)$ no es asintótica a ninguna recta de la forma $y = \alpha x + b$.

Cuando $k = \rho$, tenemos que , $(\rho-k)/\rho = 0$. Substituyendo obtenemos que $y = \alpha x + a_k + \dots$.

Por último , tomamos $k > \rho$, entonces , $(\rho-k)/\rho < 0$. Por lo tanto , $y = \alpha x + a_k x^{(\rho-k)/\rho}$ que tiende a $y = \alpha x$ cuando $x \rightarrow \infty$. ■

Por lo tanto , las soluciones de (2.3) para cualesquiera condiciones iniciales de la forma $\tau = 0$, $u(0) = \alpha$ (arbitrario) y $u'(0) = 0$, siempre escapan a infinito en forma asintótica o paralela a una recta .

3. Ejemplo

Substituyendo $\mu = \frac{4}{z}$ en (2.8) obtenemos un caso con cierta simetría

$$(2.9) \quad v \frac{d^2 u}{dv^2} = \frac{vu'}{2(h-v)} - \frac{u}{2(h-v)} - \frac{16u}{2(h-v)(1-4u^2)^2}$$

donde h es un nivel de energía prefijado.

La ecuación (2.9) tiene soluciones analíticas únicas $u = u(v)$ para las condiciones iniciales $v = 0$, $u(0) = (0, (\frac{h}{4} + 4)^{1/2}, -(\frac{h}{4} + 4)^{1/2}, (\frac{h}{4} - 4)^{1/2}, -(\frac{h}{4} - 4)^{1/2})$ y $u'(0) = \beta$ arbitrario.

La solución para (2.9) con $v = 0$, $u(0) = 0$ y $u'(0) = \beta$ arbitrario (solución Euleriana) en serie de Taylor en las variables x , y está dada por

$$(2.10) \quad y = \beta + \frac{1}{2} u''(0) \frac{1}{x} + \frac{1}{12} u'''(0) \frac{1}{x^2} + \dots$$

La solución (2.10) tiende a $y = \beta$ cuando $x \rightarrow \infty$. [fig.10].

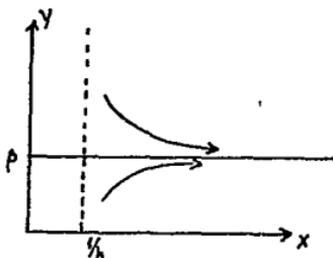


FIG. 10

PROPOSICION 2.5. Para cada configuración $y = \beta$ existe una subvariedad analítica de dimensión 2 formada por las soluciones de (2.9) tales que cuando se proyectan sobre la región de Hill, son asintóticas a $y = \beta$.

Para buscar las soluciones para otras condiciones iniciales substituímos $\mu = \frac{1}{2}$ en (2.8). Así, obtenemos

$$(2.11) \quad \tau \frac{d^2 u}{d\tau^2} = \left[(\rho-1) + \frac{\tau^\rho \rho}{2(h-\tau^\rho)} \right] \frac{du}{d\tau} - \frac{u\rho^2 \tau^{\rho-1}}{2(h-\tau^\rho)} - \frac{8\rho^2 \tau^{\rho-1} u}{(h-\tau^\rho)(1-4u^2)^2}$$

Seguendo los argumentos generales de antes concluimos que :

1) $F(\beta, \alpha, 0) = 0$, si y sólo si $\beta = 0$ y α arbitrario.

2) $(\lambda - \frac{\partial F}{\partial u})|_{(\beta, \alpha, 0)} \lambda = 0$ si y sólo si $\lambda = 0$ o $\lambda = \rho + 1$.

De 1) y 2) se concluye que existen una infinidad de soluciones para las condiciones iniciales $\tau = 0$, $u(0) = \alpha$ (arbitrario) y $u'(0) = 0$ cada una analítica en las variables τ , $\tau \log \tau$.

Todos los resultados obtenidos para (2.8) se aplican a (2.11).

Conclusiones

En el movimiento colineal repulsivo restringido de tres cuerpos, la partícula central m_2 puede presentar los siguientes comportamientos :

1) La partícula m_2 siempre escapa a infinito paralela o asintóticamente a una recta si m_1 y m_3 tienen masas diferentes.

2) Si m_1 y m_3 tienen masas iguales, entonces, m_2 no siempre escapa a infinito, es decir, existen condiciones iniciales para (2.3) tal que m_2 tiende asintóticamente a una distancia fija del centro de masas. [Fig.11].

Con esto hemos descrito el movimiento de la partícula central , lo cual quedaba abierto en la proposición 1.3 .

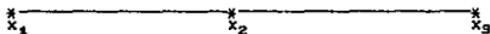
APENDICE

En esta sección demostraremos , utilizando coordenadas relativas , que el polinomio

$$(A.1) \quad 2\alpha^5 - (8\mu-4)\alpha^4 + (12\mu^2-12\mu+2)\alpha^3 - (8\mu^3-12\mu^2-8\mu-2)\alpha^2 + (2\mu^4-4\mu^3+10\mu^2-8\mu+4)\alpha - (4\mu^3-6\mu^2+6\mu-2) = 0$$

tiene exactamente una raíz real positiva .

Sean $\rho_{12} = x_1 - x_2$, $\rho_{13} = x_3 - x_1$, y $\rho_{23} = x_3 - x_2$ (Figura 1) .



Entonces , nuestras coordenadas originales se pueden escribir como $x = \rho_{13}$, $y = \rho_{13}\mu - \rho_{23}$.

Realizando los cambios correspondientes en (2.3) , (2.4) , (2.5) , (2.6) , vemos que el último término del segundo miembro de (2.6) puede reescribirse , obteniendo

$$\frac{d^2 u}{d v^2} v = \frac{v}{2(h-v)} \frac{d u}{d v} - \frac{u}{2(h-v)} + \frac{1}{2(h-v)} \left[\frac{\mu}{\rho_{12}^2} - \frac{1-\mu}{\rho_{23}^2} \right] x^2 .$$

Para la existencia de soluciones analíticas tenemos que

$$\frac{-u}{2h} + \frac{1}{2h} \left[\frac{\mu}{\rho_{12}^2} - \frac{1-\mu}{\rho_{23}^2} \right] x^2 = 0$$

Como $u = y/x$, entonces

$$(A.2) \quad \frac{\rho_{23} - \rho_{13}\mu}{\rho_{13}} + \left[\frac{\mu}{\rho_{12}^2} - \frac{1-\mu}{\rho_{23}^2} \right] \rho_{13}^2 = 0$$

Si definimos $\lambda = \rho_{12} / \rho_{23}$, entonces $1+\lambda = \rho_{13} / \rho_{23}$ [W].

Substituyendo en (A.2) y simplificando tenemos que encontrar los ceros del polinomio

$$(A.3) \quad (1-\mu)\lambda^5 + 3(1-\mu)\lambda^4 + 3(1-\mu)\lambda^3 - 3\mu\lambda^2 - 3\mu\lambda - \mu = P(\lambda)$$

El polinomio (A.3) tiene una raíz real entre 0 y 1 si $0 < \mu \leq \frac{3}{2}$ o una raíz mayor que 1 si $\frac{3}{2} \leq \mu < 1$. De hecho, el caso $\frac{3}{2} \leq \mu < 1$ puede reducirse al caso $0 < \mu \leq \frac{3}{2}$. Basta con hacer los siguientes cambios en $P(\lambda)$: definimos $\alpha = 1 - \mu$ y por lo tanto $0 < \alpha \leq \frac{3}{2}$; con esto, $\mu > 1 - \mu$ y $\lambda = \rho_{12} / \rho_{23} > 1$. Introducimos $k = 1/\lambda = \rho_{23} / \rho_{12} < 1$ y el polinomio $P(\lambda)$ se transforma en

$$\alpha (3k^2 + 3k + 1) - (1-\alpha) (3k^3 + 3k^4 + k^5) = -P(k)$$

Este polinomio es el mismo que $P(\lambda)$ (con signo cambiado) para $0 < \alpha \leq \frac{3}{2}$ y $0 < k < 1$ [W].

Consideremos ahora el polinomio $P(\lambda)$ con $0 < \mu \leq \frac{3}{2}$. Tenemos $P(1) = 7 - 14\mu > 0$ porque $0 \leq 7 - 14\mu < 7$ y $P(0) < 0$. Por lo tanto el polinomio tiene al menos una raíz real entre 0 y 1.

Que es la única raíz entre 0 y 1 se sigue del criterio de la primera derivada:

$P'(\lambda) = 5(1-\mu)\lambda^4 + 12(1-\mu)\lambda^3 + 9(1-\mu)\lambda^2 - 6\mu\lambda - 3\mu$,
como $0 < \mu \leq \frac{3}{2}$ y $0 < \lambda < 1$ tenemos que

$0 < (65/16) (1-\mu) - 3\mu \leq (1-\mu)(5\lambda^4 + 12\lambda^3 + 9\lambda^2) - 3\mu(2\lambda-1)$,
 esto es , el polinomio $P(\lambda)$ es creciente en el intervalo $(0,1)$.

Para la demostración de que no hay más raíces reales consideramos dos casos : $\lambda < 0$ y $\lambda > 1$.

Supongamos $\lambda < 0$ y $0 < \mu \leq \frac{1}{2}$. (A.3) se puede escribir como

$$(1-\mu) (\lambda^5 + 3\lambda^4 + 3\lambda^3) - (3\lambda^2 + 3\lambda + 1) \mu = P(\lambda) ;$$

entonces $3\lambda^2 + 3\lambda + 1 > 0$ y $\lambda^5 + 3\lambda^4 + 3\lambda^3 < 0$. Por lo tanto ,
 $P(\lambda) < 0$.

Si $\lambda > 1$ y $0 < \mu \leq \frac{1}{2}$, entonces

$(1-\mu) (\lambda^5 + 3\lambda^4 + 3\lambda^3) - \mu(3\lambda^2 + 3\lambda + 1) \geq \frac{1}{2} (\lambda^5 + 3\lambda^4 + 3\lambda^3) - \frac{1}{2} (3\lambda^2 + 3\lambda + 1)$, pero $\frac{1}{2} (\lambda^5 + 3\lambda^4 + 3\lambda^3) - \frac{1}{2} (3\lambda^2 + 3\lambda + 1) > 0$ ya que $\lambda^5 + 3\lambda^4 + 3\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = (\lambda^5 - 1) + 3\lambda(\lambda + 1)(\lambda^2 - 1)$ y cada término es mayor que 0 . ■

BIBLIOGRAFIA

[Ar] Arnold V . I . , Mathematical Methods of Classical Mechanics . Springer Verlag , New York , Heidelberg - Berlin , 1978 .

[F] Forsyth A . R . , Theory of Differential Equations Vol . - III . Dover 1900 .

[L 2] Lacomba , E . A . , Infinity Manifolds of Positive Energy in Celestial Mechanics , Contemp . Math . , Vol . 58 , part III , pp 193 - 201 , 1987 .

[L,P] Lacomba , E . A . , Peredo , F . , Escape - Equilibrium Solutions in the Repulsive Coulombian Isosceles 3-Body Problem , Geometrie Symplectique et Mecanique , Springer - Verlag , lect .Notes in Math . 1416 , pp . 178 - 191 , 1989 .

[L,R,II] Lacomba ,E.A., Reyes , J.G . Parallel Escapes in the Restricted Repulsive Coulombian Isosceles 3-Body Problem , Proceedings , Workshop on Dynamical Systems , oct . 1990 Barcelona, 1992 .

[Mo] Moser ,J., The Scattering Problem For Some Particle Systems on the Line . Springer - Verlag . Lecture Notes in Math . 597 , pp. 441-463 , 1977 .

[P] Pollard , A Mathematical Introduction to Celestial Mechanics , Prentice Hall , 1967 .

[Pe] Peredo , F., El Problema Isósceles Restringido con Fuerzas Repulsivas , Ph .D .dissertation at the Cinvestav , México City , 1984 .

[W] Witner , A . 1947 , Analytical Foundations of Celestial Mechanics (Princeton University Press , Princeton , New Jersey .)