12A
2 ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

REVESTIMIENTO
y
TEORIA DE FORMAS

T E S I S

Que para obtener el título de:

M A T E M A T I C O

p r e s e n t a

MANUEL FERNANDEZ VILLANUEVA MEDINA

Ciudad Universitaria México, D.F. 1992

Introducción.

En el presente trabajo se exponen las ideas generales que plantea Fox para una Teoría de Revestimientos (Overlayings) en su artículo SHAPE THEORY AND COVERING SPACES. La Tesis consistió en demostrar cierto número de proposiciones, no todas, que Fox unicamente enuncia en dicho artículo. Existen ciertos Teoremas que relacionan a los espacios cubrientes de un espacio Y con las representaciones del grupo fundamental $\pi(Y)$ en cierto grupo de permutaciones, pero hay muchas restricciones que debe cumplir Y, como conexidad, conexidad local por trayectorias y semilocal 1-conexidad. Lo que Fox hace en su artículo es modificar los conceptos de espacio cubriente y grupo fundamental por los conceptos de revestimiento y tropo fundamental, y obtiene un teorema que relaciona a los revestimientos de un espacio metrizable conexo Y, prescindiendo de propiedades locales, con las representaciones del tropo fundamental $\underline{\pi}(Y,y_0)$ en cierto grupo de permutaciones. También se modifica la noción de Tipo de homotopía de un espacio por el de forma de un espacio.

INDICE.

CAPITULO 1.

REVESTIMIENTOS

1.0 PRELIMINARES.

(1.0.1) <u>Definición</u>. Una función continua $e:X\longrightarrow Y$ es <u>proyección cubriente</u> si para cada $y \in Y$ existe un abierto U de Y tal que $e^{-1}(U)$ es unión de abiertos V^{α} de X, ajenos dos a dos, y para cada α, $e|V^{\alpha}$ es homeomorfismo de V^{α} sobre U.

Si $e:X\longrightarrow Y$ es una proyección cubriente, Y es llamado espacio base de la proyección cubriente y X espacio cubriente de Y.
Si U cumple con las condiciones establecidas en la definición de proyección cubriente, diremos que <u>U está bien cubierto por e</u>, y que cada V^{α} es <u>una hoja de U</u>. Nótese que si U es conexo (conexo por trayectorias) entonces cada hoja de U es una componente (componente por trayectorias) de $e^{-1}(U)$. Si $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de Y cuyos elementos están bien cubiertos por e y $\mathcal{V} = \{V^{\alpha}: V^{\alpha}$ es hoja de alguna $U \in \mathcal{U}\}$ entonces diremos que <u>$\mathcal{V}$ cubre bien a $\mathcal{U}$</u> o que <u>$\mathcal{U}$ está bien cubierta por $\mathcal{V}$</u>. Obsérvese que si $U' \subseteq U$, U' abierto de Y, y además U está bien cubierto por e, entonces U' está bien cubierto por e, y que $e^{-1}(U') \cap V^{\alpha}$ es una hoja de U'. Entonces, si $\mathcal{V}$ cubre bien a $\mathcal{U}$, cualquier refinamiento abierto $\mathcal{U}'$ de $\mathcal{U}$ induce un refinamiento abierto $\mathcal{V}'$ de $\mathcal{V}$ que cubre bien a $\mathcal{U}'$. Nótese que si $e:X\longrightarrow Y$ es proyección cubriente entonces e es suprayectiva y abierta, además $e^{-1}(y)$ es un subespacio

discreto de X, para cada $y \in Y$.

(1.0.2) Teorema. Si Y es conexo y $e:X \longrightarrow Y$ es proyección cubriente entonces $\#(e^{-1}(y)) = \#(e^{-1}(y'))$ para cada par y, y' de elementos de Y.

Dem: Para $y \in Y$ fijo, sea $A = \{y' \in Y : \#(e^{-1}(y)) = \#(e^{-1}(y'))\}$. $A \neq \emptyset$, pues $y \in A$. Si $y' \in A$, consideremos un entorno abierto U de y' bien cubierto por e. Si $y'' \in U$, $\#(e^{-1}(y')) = \#(e^{-1}(y''))$. Entonces $U \subseteq A$, y A es abierto. Si $y' \in Y-A$, y U es un entorno abierto de y' bien cubierto por e, por un razonamiento idéntico al anterior se sigue que $U \subseteq Y-A$. Entonces A e $Y-A$ son abiertos de Y. Como Y es conexo y A es no vacio, se tiene que $A = Y$. ∎

Por el teorema anterior, si Y es conexo y $e:X \longrightarrow Y$ es proyección cubriente, se define el grado de e como $\#e^{-1}(y)$, $y \in Y$.
También el teorema anterior nos permite variar los índices α de las hojas de cualquier U abierto de Y bien cubierto por e sobre un mismo conjunto I(d). Si I(d) es finito se dice que e tiene un número finito de hojas, o que e es de grado finito.

(1.0.3) Teorema. (a) Si $e:X \longrightarrow Y$ es proyección cubriente entonces para cada subespacio C no vacio de Y, $e|e^{-1}(C):e^{-1}(C) \longrightarrow C$ es proyección cubriente.
(b) Si Y es localmente conexo y $e:X \longrightarrow Y$ es una función continua entonces e es proyección cubriente si y sólo si para cada componente C de Y la función $e|e^{-1}(C):e^{-1}(C) \longrightarrow C$ es proyección cubriente. Además si e es proyección cubriente entonces para

cualquier componente C' de X, $e|C':C'\longrightarrow e(C')$ es proyección cubriente y $e(C')$ es componente de Y.

Dem:

(a) Dado $y \in C$ existe un entorno abierto B de y en Y bien cubierto por e, $V = B \cap C$ es un entorno abierto de y en C. Si $e^{-1}(b) = \bigcup\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ con cada A_α hoja de B, entonces $(e|e^{-1}(C))^{-1}(V) = e^{-1}(B \cap C) = e^{-1}(B) \cap e^{-1}(C) = (\bigcup A_\alpha) \cap e^{-1}(C)$ es unión ajena de abiertos $U_\alpha = A_\alpha \cap e^{-1}(C)$ de $e^{-1}(C)$. $(e|e^{-1}(C))|U_\alpha = e|U_\alpha:U_\alpha\longrightarrow V$ es suprayectiva puesto que $e(U_\alpha) = e(A_\alpha \cap e^{-1}(C)) = e(A_\alpha) \cap C = B \cap C = V$, continua e inyectiva por serlo $e|A_\alpha$ ($e|U_\alpha = (e|A_\alpha)|U_\alpha$). Veremos que $e|U_\alpha$ es abierta. Sea G un abierto de U_α . Entonces existe un abierto H de A_α tal que $G = H \cap U_\alpha$. Como es abierto en A_α , H es abierto en X. $(e|U_\alpha)(G) = (e|A_\alpha)(H \cap U_\alpha) = (e|A_\alpha)(H) \cap (e|A_\alpha)(U_\alpha)$, esta última igualdad es cierta porque $e|A_\alpha$ es inyectiva. Luego $(e|U_\alpha)(G) = (e|A_\alpha)(H) \cap V$, y como $(e|A_\alpha)(H)$ es abierto en B, es abierto en Y. Por lo tanto $(e|A_\alpha)(H) \cap V$ es un abierto de V. Hemos probado que V está bien cubierto por $e|e^{-1}(C)$.

(b)

$\Rightarrow$) Se sigue de (a).

$\Leftarrow$) Supongamos que $e|e^{-1}(C)$ es proyección cubriente para cada componente C de Y. Sean $y \in C$ y U un entorno abierto de y en C bien cubierto por $e|e^{-1}(C)$. Como Y es localmente conexo, C es abierto en Y. Por ello U es abierto en Y, y además U está bien cubierto por e. Por lo tanto e es proyección cubriente.

Supongamos ahora que $e:X\longrightarrow Y$ es proyección cubriente, y que C' es una componente de X. Primero se muestra que $e(C')$ es componente de

Y. Como e(C') es conexo, bastará probar que es abierto y cerrado en Y. Consideremos $y \in \overline{e(C')}$ y U un entorno abierto conexo bien cubierto de y en Y. Como U intersecta a e(C'), entonces $e^{-1}(U)$ intersecta a C' en un abierto conexo V homeomorfo a U bajo e. Pero entonces $V \subseteq C'$, pues $V \cup C'$ es conexo. Por lo tanto $e(V) = U \subseteq e(C')$. Entonces e(C') es abierto y cerrado y se concluye que es componente de Y. En lo anterior se ha probado que cada punto de e(C') tiene un entorno abierto U bien cubierto por e y contenido en e(C'), y que cada hoja V de U está contenida o es ajena a C'. Entonces $\{V: V \text{ es hoja de } U, V \subseteq C'\}$ cubre bien a U en $e|C'$. Por lo tanto $e|C': C' \longrightarrow e(C')$ es proyección cubriente. ∎

En virtud de lo anterior trataremos en lo sucesivo con proyecciones cubrientes $e: X \longrightarrow Y$ donde Y esconexo.

Un espacio topológico X es localmente metrizable si cada elemento de X tiene un entorno metrizable.

El siguiente resultado será utilizado posteriormente.

(1.0.4) Teorema. Si X es un espacio topológico paracompacto, T_2 y localmente metrizable, entonces X es metrizable.

Dem:

Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta de X localmente finita con cada U_i metrizable. Como U_i es metrizable, es paracompacto, entonces la cubierta de entornos de radio $\frac{1}{n}$, respecto a cualquier métrica que induzca su topología, tiene un refinamiento abierto

$\mathcal{B}_{\imath,n}$ localmente finito. Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos $\mathcal{V}_n = \bigcup\{\mathcal{B}_{\imath,n} : \imath \in I\}$. Cada $\mathcal{V}_n$ es localmente finita, pues si $x \in X$, sea N un entorno abierto de X tal que los únicos elementos de $\mathcal{U}$ que intersectan a N son $U_{\imath 1},\ldots,U_{\imath k}$, y para $n \in \mathbb{N}$, n fija, y cada $\jmath \in \{1,\ldots,k\}$, existe un entorno abierto $N_{n,\imath\jmath}$ de x, con $N_{n,\imath\jmath}$ intersectando un número finito de elementos de las $\mathcal{B}_{\imath\jmath,n}$ correspondientes. Entonces $\bigcap\{N_{n,\imath\jmath} : \jmath = 1,\ldots,k\} \cap N$ intersecta a un número finito de elementos de $\mathcal{V}_n$. Y si $x \in A$ abierto de X, $x \in U_\imath$ para alguna $\imath \in I$. Existe entonces $B_{\imath,n} \in \mathcal{V}_n$ tal que $x \in B_{\imath,n} \subseteq A \cap U_\imath$. Se concluye que $\mathcal{V} = \bigcup\{\mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base σ-localmente finita para X que por supuesto es T_3. Por lo tanto X es metrizable. ∎

(1.0.5) Definición. Sean X un conjunto y G un grupo. G actúa sobre X si existe una función de $G \times X$ en X, que denotaremos por $(g,x) \longrightarrow g.x$ tal que

(i) $1.x = x$ para cada $x \in X$ donde 1 es el elemento neutro de G,

(ii) $g.(h.x) = (gh).x$ para cada $x \in X$, $g,h \in G$.

Si además X es un espacio topológico y las funciones θ_g definidas por $x \longrightarrow g.x$ son continuas entonces X es un G-espacio.

(1.0.6) Definición. Si X es un G-espacio entonces la acción de G sobre X es propiamente discontinua si para cada $x \in X$ existe un entorno abierto V de x con $g.V \cap g'.V = \emptyset$ si $g \neq g'$. $g,g' \in G$.

El siguiente teorema está demostrado en Kosniowski, capítulo 17.

(1.0.7) Teorema. Si X es un G-espacio y la acción de G sobre X es propiamente discontinua entonces la función cociente $p:X \longrightarrow X/G$ es una proyección cubriente. ■

1.1 DEFINICIONES.

Es fácil ver que si Y es conexo entonces una función continua $e:X\longrightarrow Y$ es proyección cubriente si y sólo si existen cubiertas abiertas $\underline{A} = \{A_{\imath,\alpha}\}_{\imath \in I,\alpha \in I(d)}$ y $\underline{B} = \{B_{\imath}\}_{\imath \in I}$ de X e Y respectivamente tales que

(i) $\forall\ \imath \in I \quad \bigcup\{A_{\imath,\alpha}\}_{\alpha \in I(d)} = e^{-1}(B_{\imath})$ y $A_{\imath,\alpha} \cap A_{\imath,\beta} = \emptyset$ si $\alpha \neq \beta$, $\alpha,\beta \in I(d)$,

(ii) $\forall\ \imath \in I,\ \alpha \in I(d) \quad e|A_{\imath,\alpha}:A_{\imath,\alpha}\longrightarrow B_{\imath}$ es homeomorfismo.

Es decir, $\underline{A}$ cubre bien a $\underline{B}$ y cada $A_{\imath,\alpha}$ es una hoja de $B_{\imath}$ y $d = \# I(d)$ es el grado de e.

(1.1.1) Definición. Sean X e Y espacios topológicos, supongamos que Y es conexo. Una función continua $e:X\longrightarrow Y$ es un revestimiento (Overlaying, según Fox) si existen cubiertas abiertas $\underline{A} = \{A_{\imath,\alpha}\}_{\imath \in I,\alpha \in I(d)}$, $\underline{B} = \{B_{\imath}\}_{\imath \in I}$ de X e Y respectivamente tales que satisfacen (i) y además cumplen la condición

(ii') $\forall\ \imath,\jmath \in I,\ \alpha,\beta \in I(d)$. Si $A_{\imath,\alpha} \cap A_{\jmath,\beta} \neq \emptyset$,

entonces $e|A_{\imath,\alpha} \cap A_{\jmath,\beta}:A_{\imath,\alpha} \cap A_{\jmath,\beta}\longrightarrow B_{\imath} \cap B_{\jmath}$ es un homeomorfismo.

En tal caso diremos que "$\underline{A} \cap \underline{A}$ cubre bien" a $\underline{B} \cap \underline{B}$.

(1.1.2) Lema. Sea $e:X\longrightarrow Y$ una función continua. e es un revestimiento si y sólo si e es proyección cubriente y se cumple

(*) para $\imath,\jmath \in I$, $B_{\imath} \cap B_{\jmath} \neq \emptyset$ implica que cada $A_{\imath,\alpha}$

intersecta a un único $A_{j,\beta}$.

Dem:

$\Rightarrow$) Supongamos que e es revestimiento. Si en la condición (ii') $i = j$ y $\alpha = \beta$, se obtiene la condición (ii) que debe cumplirse para que e sea proyección cubriente. Ahora hay que verificar que se cumple (*). Supongamos $i, j \in I$, tales que $B_i \cap B_j \neq \emptyset$. Es claro que cada $A_{i,\alpha}$ intersecta a un $A_{j,\beta}$. Si $A_{i,\alpha}$ intersecte a $A_{j,\beta'}$ con $\beta \neq \beta'$, sea $x' \in A_{i,\alpha} \cap A_{j,\beta'}$. Como $e|A_{i,\alpha} \cap A_{j,\beta}$ es homeomorfismo sobre $B_i \cap B_j$, existe $x \in A_{i,\alpha} \cap A_{j,\beta}$ tal que $e(x) = e(x')$. De aquí se sigue que $e|A_{i,\alpha}$ no es inyectiva !. Entonces $A_{i,\alpha}$ intersecta a un único $A_{j,\beta}$.

$\Leftarrow$) Si se cumplen (i), (ii) y (*), y se tiene $A_{i,\alpha} \cap A_{j,\beta} \neq \emptyset$, hay que probar que $e|A_{i,\alpha} \cap A_{j,\beta}: A_{i,\alpha} \cap A_{j,\beta} \longrightarrow B_i \cap B_j$ es un homeomorfismo. Supongamos lo contrario. Como e es inyectiva, continua y abierta, existirá $y \in B_i \cap B_j$ tal que $y \notin e(A_{i,\alpha} \cap A_{j,\beta})$. Sea $x \in A_{i,\alpha}$ tal que $e(x) = y$. Por (i) sabemos que existe $A_{j,\beta'}$ tal que $x \in A_{j,\beta'}$, con $\beta \neq \beta'$. Se cumple que $A_{i,\alpha} \cap A_{j,\beta'} \neq \emptyset$. Pero entonces $A_{i,\alpha}$ no intersecta a un único $A_{j,\beta'}$ lo cual contradice a la condición (*). Entonces $e|A_{i,\alpha} \cap A_{j,\beta}$ es homeomorfismo sobre $B_i \cap B_j$. Se cumple (ii'), y se concluye que e es revestimiento. ∎

1.2 PROPIEDADES TOPOLOGICAS.

(1.2.1) <u>Teorema</u>. Sea $e: X \longrightarrow Y$ una proyección cubriente. Entonces X es T_1 si y sólo si Y es T_1.

Dem:

$\Rightarrow$) Supongamos que X es T_1. Consideremos cubiertas abiertas $\underline{B}$ de Y y $\underline{A}$ de X tales que $\underline{A}$ cubre bien a $\underline{B}$. Para $B_i \in \underline{B}$ y $A_{i,\alpha}$ cualquier hoja de B_i, dado que $e|A_{i,\alpha}$ es un homeomorfismo sobre el abierto B_i de Y, $A_{i,\alpha} - \{x\}$ es abierto de X implica $B_i - \{e(x)\}$ es abierto de Y. Para cada $y \in Y$ se tiene que $Y - \{y\} = \bigcup(B_i - \{y\})$. Se concluye que Y es T_1 .

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que Y es T_1. Para cualquier $x \in X$, $e^{-1}(e(x))$ es cerrado discreto de X. $\{x\}$ es cerrado en $e^{-1}(e(x))$, por lo tanto $\{x\}$ es cerrado en X. Se concluye que X es T_1. ■

(1.2.2) Teorema. Sea $e:X \longrightarrow Y$ una proyección cubriente. Si Y es regular (o T_2) entonces X es regular (o T_2).

Dem: Sea $\underline{A}$ cubierta abierta de X que cubre bien a $\underline{B}$ cubierta abierta de Y. Supongamos que Y es regular. Sean $x \in X$ y U un entorno abierto de x. Consideremos $A_{i,\alpha} \in \underline{A}$ tal que $x \in A_{i,\alpha}$. Sea $V = U \cap A_{i,\alpha}$, V es un entorno abierto de x. Como $e|A_{i,\alpha}$ es un homeomorfismo sobre B_i, $e(V)$ es un entorno abierto de $e(x)$. Sea W un entorno abierto de $e(x)$ tal que $\overline{W} \subseteq e(V)$. Sea $L = e^{-1}(W) \cap A_{i,\alpha}$. L es un entorno abierto de x. Si $x' \in \overline{L}$, $e(x') \in e(\overline{L}) \subseteq \overline{e(L)} \subseteq \overline{W} \subseteq e(V)$. Entonces $e(x') \in e(V)$. Pero $e|A_{i,\alpha}$ es homeomorfismo, entonces $x' \in V$. Así pues, L es un entorno abierto de x, y $\overline{L} \subseteq V \subseteq U$. Por lo tanto X es regular. Ahora, si Y es T_2 , sean x, x' dos elementos distintos de X. Si $e(x) \neq e(x')$, sean U, V entornos abiertos de $e(x)$ y $e(x')$ respectivamente, los cuales son ajenos. $e^{-1}(U)$ y $e^{-1}(V)$ son entornos abiertos ajenos de x y x'. Si $e(x) = e(x') \in B_i$, x y x' están en hojas distintas de

B_i, las cuales son entornos abiertos ajenos de x, x'. Entonces X es T_2. ■

(1.2.3) <u>Teorema</u>. Sea $e:X\longrightarrow Y$ un revestimiento. Entonces Y es regular (o T_2) si y sólo si X es regular (o T_2).

Dem:

$\Rightarrow$) Todo revestimiento es proyección cubriente.

$\Leftarrow$) Sean $\underline{A}$, $\underline{B}$ cubiertas abiertas de X e Y respectivamente tales que $\underline{A} \cap \underline{A}$ cubre bien a $\underline{B} \cap \underline{B}$. Supongamos que X es regular. Sean C un cerrado de Y, $y \in Y-C$, y $B_i \in \underline{B}$ tal que $y \in B_i$. B_i-C es un entorno abierto de y. Consideremos $e^{-1}(B_i-C) \cap A_{i,\alpha}$, donde $A_{i,\alpha} \in \underline{A}$. Sea $x \in e^{-1}(y) \cap A_{i,\alpha}$. $e^{-1}(B_i-C) \cap A_{i,\alpha}$ es un entorno abierto de x. Como X es regular, existe U un abierto que contiene a x tal que $\bar{U} \subseteq e^{-1}(B_i-C) \cap A_{i,\alpha}$. $e(U)$ es un entorno abierto de y. Se afirma que $\overline{e(U)} \subseteq B_i-C$. Primero veremos que $\overline{e(U)} \subseteq B_i$. De lo contrario, existirá $y' \in \delta(B_i) \cap B_j \cap \overline{e(U)}$ para alguna $j \in I$. Pero entonces $B_i \cap B_j \neq \emptyset$. Sea $\beta \in I(d)$ el único índice tal que $A_{i,\alpha} \cap A_{j,\beta} \neq \emptyset$. Si $x' \in A_{j,\beta} \cap e^{-1}(y')$, $x' \notin \bar{U}$ pues $\bar{U} \subseteq A_{i,\alpha}$ y $x' \notin A_{i,\alpha}$. Sea L un entorno abierto de x' tal que $L \subseteq (X - \bar{U}) \cap A_{j,\beta}$, $e(L)$ es un entorno abierto de y', y $\emptyset \neq e(U) \cap e(L) \subseteq B_i \cap B_j$. Sea $y'' \in e(U) \cap e(L)$. Como $e|A_{i,\alpha} \cap A_{j,\beta}$ es homeomorfismo sobre $B_i \cap B_j$, existe $x'' \in A_{i,\alpha} \cap A_{j,\beta}$ tal que $e(x'') = y''$. Pero entonces $x'' \in L \cap U$! . Así pues, $\overline{e(U)} \subseteq B_i$. Pasamos ahora a probar que $\overline{e(U)} \cap C = \emptyset$. Sea $y' \in \overline{e(U)}$, por nuestra justificación anterior, $y' \in B_i$. Sea $x' \in e^{-1}(y') \cap A_{i,\alpha}$. $x' \in \bar{U}$, pues de lo contrario existiría un entorno abierto V' de x' tal que $V' \subseteq A_{i,\alpha}$ y $V' \cap U = \emptyset$. Pero entonces $e(V')$ sería un entorno abierto de y', de donde $e(V') \cap e(U) = \emptyset$!. Entonces $x' \in \bar{U} \subseteq e^{-1}(B_i - C) \cap A_{i,\alpha}$. Se sigue que $y' = e(x') \in e(e^{-1}(B_i - C) \cap A_{i,\alpha}) \subseteq e(e^{-1}(B_i - C)) \cap e(A_{i,\alpha}) =$ $= (B_i - C) \cap B_i = B_i - C$. Entonces $\overline{e(U)} \subseteq B_i - C \subseteq Y - C$. Se tiene que $y \in e(U)$, $C \subseteq Y - \overline{e(U)}$, $e(U) \cap (Y - \overline{e(U)}) = \emptyset$. Entonces Y es regular.

Si X es T_2. Consideremos dos elementos distintos y, y' de Y. Sean $B_i, B_j \in \underline{B}$ tales que $y \in B_i$, $y' \in B_j$. Si $B_i \cap B_j = \emptyset$ ya tenemos entornos abiertos ajenos de y, y'. Si $B_i \cap B_j \neq \emptyset$, sean $x \in A_{i,\alpha}$, $x' \in A_{j,\beta}$ tales que $e(x) = y$, $e(x') = y'$, con $A_{i,\alpha} \cap A_{j,\beta} \neq \emptyset$. Sean U y V entornos ajenos de x y x' respectivamente, con $U \subseteq A_{i,\alpha}$, $V \subseteq A_{j,\beta}$. $e(U)$ y $e(V)$ son entornos abiertos de y, y' respectivamente y son ajenos porque $e|A_{i,\alpha} \cap A_{j,\beta}$ es homeomorfismo sobre $B_i \cap B_j$. Por lo tanto Y es T_2. ∎

(1.2.4) <u>Teorema</u>. Sean Y un espacio conexo y $e : X \longrightarrow Y$ una proyección cubriente. Entonces X es 2° contable si y sólo si Y es 2° contable y e tiene grado contable.

Dem:

$\Rightarrow$) Supongamos que X es 2°contable. Sea $\mathcal{L}$ una base contable para la topología de X. Sean $\underline{A}$, $\underline{B}$ cubiertas abiertas de X e Y respectivamente tales que $\underline{A}$ cubre bien a $\underline{B}$. Fijemos $\imath \in I$. Para cada $\alpha \in I(d)$ se elige $L_\alpha \in \mathcal{L}$, con $L_\alpha \subseteq A_{\imath,\alpha}$. $L_\alpha \neq L_{\alpha'}$, si $\alpha \neq \alpha'$, entonces $\#(L) \geq \#(I(d))$. Así pues, el grado de e es contable. Obtenemos $\mathcal{S} = \{e(L) : L \in \mathcal{L}\}$, una cubierta abierta contable de Y. Dados $y \in Y$ y U un entorno abierto de y en Y. Supongamos que $y \in B_i$. Sea $V = U \cap B_i$. Se considera $\alpha \in I(d)$. Sea

$x \in A_{\iota,\alpha} \cap e^{-1}(y)$. Se tiene que $e^{-1}(V) \cap A_{\iota,\alpha}$ es un entorno abierto de x. Sea $L \in \mathscr{L}$ tal que $x \in L \subseteq e^{-1}(V) \cap A_{\iota,\alpha}$. $y \in e(L) \subseteq e(e^{-1}(V) \cap A_{\iota,\alpha}) \subseteq V \cap B_{\iota} \subseteq U$. Entonces $\mathscr{S}$ es una base contable para la topología de Y. Y se concluye que Y es 2^{o} contable.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que Y es 2^{o} contable y que el grado de e es contable. Sea $\mathscr{S}$ una base contable para la topología de Y. Sea $\underline{S} = \{S \in \mathscr{S}: S \subseteq B_{\iota}$ para alguna $\iota \in I\}$. $\underline{S}$ es también base para la topología de Y. Digamos que $\underline{S} = \{S_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$, donde Λ es contable. El refinamiento abierto $\underline{S}$ de $\underline{B}$ induce un refinamiento abierto $\underline{L} = \{L_{\lambda,\alpha}: \lambda \in \Lambda, \alpha \in I(d)\}$ contable de $\underline{A}$ y $\underline{L}$ cubre bien a $\underline{S}$. Sean $x \in X$ y U un entorno abierto de x en X. Sean λ, α tales que $x \in L_{\lambda,\alpha}$, $V = L_{\lambda,\alpha} \cap U$ es un entorno abierto de x y e(V) lo es de e(x). Existe $S_{\mu} \in \underline{S}$ tal que $e(x) \in S_{\mu} \subseteq e(V) \subseteq S_{\lambda}$. Como$e|L_{\lambda,\alpha}$ es un homeomorfismo existe una hoja $L_{\mu,\beta}$ de S_{μ}contenida en V, entonces $x \in L_{\mu,\beta} \subseteq U$. Se concluye que $\underline{L}$ es una base contable para la topología de X, y entonces X es 2^{o} contable. ∎

De la demostración anterior se tiene para una proyección cubriente $e:X \longrightarrow Y$ y cubiertas $\underline{A}$ y $\underline{B}$ tales que $\underline{A}$ cubre bien a $\underline{B}$ que $\underline{A}$ es una base de X si y sólo si $\underline{B}$ es una base de Y; y en caso de no serlo existen $\underline{B}'$ refinamiento abierto de $\underline{B}$ y $\underline{A}'$ refinamiento abierto de $\underline{A}$ tales que $\underline{A}'$ cubre bien a $\underline{B}'$, $\underline{B}'$ es base de Y y $\underline{A}'$ es base de X.

(1.2.5) <u>Corolario</u>. Si $e:X \longrightarrow Y$ es revestimiento con Y conexo, entonces X puede ser encajado en el cubo de Hilbert si y sólo si Y puede ser encajado en el cubo de Hilbert y el grado de e es contable.

Dem: X puede encajarse en el cubo de Hilbert si y sólo si X es T_3 y 2° contable lo cual equivale por los Teoremas 1.2.1 ,1.2.3 y 1.2.4 a que Y es T_3, 2° contable, y el grado de e es contable. ∎

(1.2.6) <u>Teorema</u>. Sea $e:X \longrightarrow Y$ una proyección cubriente. Supongamos que Y es conexo. Entonces X es compacto y T_2 si y sólo si Y es compacto y T_2 y el grado de e es finito.

Dem:

$\Rightarrow$) Supongamos que X es compacto y T_2. Y es T_1 porque X es T_1 (Teorema 1.2.1), además Y es compacto por ser imagen continua de un compacto. Sean $\underline{A}$ y $\underline{B}$ cubiertas abiertas de X e Y respectivamente tales que $\underline{A}$ cubre bien a $\underline{B}$ Sea $y \in Y$ y supongamos que $y \in B_i \in \underline{B}$. $e^{-1}(y)$ es cerrado, y por lo tanto compacto. Además $e^{-1}(y)$ es discreto. Por lo tanto e es de grado finito. Ahora, sean $y, y' \in Y$ tales que $y \neq y'$. Supongamos que $y \in B_i$, $y' \in B_j$. Se tiene que $e^{-1}(y) \cap e^{-1}(y') = \emptyset$. Además $e^{-1}(y) \cup e^{-1}(y')$ es finito. Para cada $x \in e^{-1}(y) \cup e^{-1}(y')$ elegimos un entorno abierto U_x de x de tal manera que $U_x \cap U_{x'} = \emptyset$ si $x \neq x'$. Ahora, si $x \in A_{i,\alpha} \cap e^{-1}(y)$, sea $V_\alpha = A_{i,\alpha} \cap U_x$. Si $x' \in A_{j,\beta} \cap e^{-1}(y')$, sea $W_\beta = A_{j,\beta} \cap U_x$. Obsérvese que $V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$ si $\alpha \neq \beta$, $W_\alpha \cap W_\beta = \emptyset$ si $\alpha \neq \beta$, y $V_\alpha \cap W_\beta = \emptyset$ $\forall\ \alpha,\beta$. Sean $L = \bigcap \{e(V_\alpha):\alpha \in I(d)\}$, $S = \bigcap \{e(W_\alpha):\alpha \in I(d)\}$. Si existe y'' tal que $y'' \in L \cap S \subseteq B_i \cap B_j$, sea $x'' \in e^{-1}(y'')$. $x'' \in A_{i,\alpha} \cap A_{j,\beta}$ para alguna α y alguna β. Pero $e^{-1}(L) \cap A_{i,\alpha} \subseteq V_\alpha$ y $e^{-1}(S) \cap A_{j,\beta} \subseteq W_\beta$. Se sigue que $x'' \in V_\alpha \cap W_\beta$! Por lo tanto $L \cap S = \emptyset$. y,y' eran arbitrarios. Entonces Y es T_2. Y como imagen continua de compactos es compacta, Y es compacto.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que Y es compacto y T_2, y que e es de grado finito n. X es T_2 porque Y es T_2 y e es continua. Sea ahora $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Definimos $\mathcal{V} = \{U \cap A\colon U \in \mathcal{U},\ A \in \underline{A}\}$. $\mathcal{V}$ es un refinamiento abierto de $\underline{A}$ y de $\mathcal{U}$. Para cada $x_\alpha \in e^{-1}(y)$ sea $V_{y,\alpha} \in \mathcal{V}$ tal que $x_\alpha \in V_{y,\alpha}$ y $V_{y,\alpha} \cap V_{y,\beta} = \emptyset$ si $\alpha \neq \beta$. Entonces $y \in W_y = \bigcap \{e(V_{y,\alpha})\colon \alpha = 1,\ldots,n\}$. $\{W_y : y \in Y\}$ es una cubierta abierta de Y y tiene una subcubierta finita $\{W_{y_1},\ldots,W_{y_m}\}$. $\{V_{y_i,\alpha} : i = 1,\ldots,m,\ \alpha = 1,\ldots,n\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{V}$. Para cada $V_{y_i,\alpha}$ se elige $U_{i,\alpha} \in \mathcal{U}$ tal que $V_{y_i,\alpha} \subseteq U_{i,\alpha}$. La familia $\{U_{i,\alpha} : i = 1,\ldots,m,\ \alpha = 1,\ldots,n\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$. Se concluye que X es compacto. ■

(1.2.7) <u>Teorema</u>. Sea $e\colon X \longrightarrow Y$ una proyección cubriente y supongamos que Y es metrizable. Entonces X es metrizable.

Dem:

Primero probaremos que X es paracompacto. Sea $\mathcal{G}$ una cubierta abierta de X. Sean $\underline{A} = \{A_{i,\alpha}\}_{i\in I,\alpha\in I(d)}$, $\underline{B} = \{B_i\}_{i\in I}$ cubiertas abiertas de X e Y respectivamente tales que $\underline{A}$ cubre bien a $\underline{B}$ y $\underline{B}$ es localmente finita. Para cada $i \in I$, $\alpha \in I(d)$, sea $\mathcal{G}_{i,\alpha} = \{G \cap A_{i,\alpha} : G \in \mathcal{G},\ A_{i,\alpha} \in \underline{A},\ G \cap A_{i,\alpha} \neq \emptyset\}$. y sea $\mathcal{U}_{i,\alpha}$ un refinamiento abierto localmente finito de $\{e(H) : H \in \mathcal{G}_{i,\alpha}\}$ que a su vez es una cubierta abierta de B_i. Consideramos $\mathcal{V}_{i,\alpha} = \{e^{-1}(U) \cap A_{i,\alpha} : U \in \mathcal{U}_{i,\alpha}\}$. $\mathcal{V}_{i,\alpha}$ es un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{G}_{i,\alpha}$. Sea $\mathcal{K} = \bigcup \{\mathcal{V}_{i,\alpha} : i \in I,\ \alpha \in I(d)\}$. $\mathcal{K}$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{G}$. Sean $x \in X$ y U un entorno abierto de $e(x)$ tal que U intersecta únicamente a los elementos

$B_{i1},\ldots,B_{in}$ de $\underline{B}$. Existen entonces $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ tales que $x \in \bigcap \{A_{ij,\alpha j} : j = 1,\ldots,n\}$. Consideremos entornos abiertos $V_1,\ldots,V_n$ de x tales que V_j intersecta a un número finito de elementos de $\mathcal{V}_{ij,\alpha j}$, $j = 1,\ldots,n$. Entonces $\bigcap \{V_j : j = 1,\ldots n\} \cap \bigcap \{A_{ij,\alpha j} : j = 1,\ldots,n\}$ intersecta a un número finito de elementos de $\mathcal{K}$. Se concluye que $\mathcal{K}$ es un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{G}$. Entonces X es paracompacto. Además, X paracompacto, T_2 y localmente metrizable, implica X metrizable (Teorema (1.0.3)). ■

1.3 UN TEOREMA IMPORTANTE.

Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ cubiertas abiertas de Y. $\mathcal{V}$ es un <u>refinamiento baricéntrico</u> de $\mathcal{U}$ si para cada $y \in Y$ el conjunto $V_y = \bigcup \{V \in \mathcal{V}: y \in V\}$ está contenido en algún elemento de $\mathcal{U}$.

(1.3.1) <u>Teorema</u>. Si Y es paracompacto y T_2 entonces cada cubierta abierta de Y tiene un refinamiento baricéntrico. ■

(1.3.2) <u>Teorema</u>. Sea $e:X \longrightarrow Y$ una proyección cubriente. Supongamos que Y es conexo y metrizable. Entonces e es revestimiento si

(a) Y es localmente conexo

ó

(b) e es de grado finito.

Dem:

(a) Sean $\underline{A}$ y $\underline{B}$ cubiertas abiertas de X e Y tales que $\underline{A}$ cubre bien a $\underline{B}$. Sea $\underline{G}$ un refinamiento abierto de $\underline{B}$ tal que cada elemento de $\underline{G}$ es conexo y tal que $G_i \cap G_j \neq \emptyset$ implica $G_i \cup G_j \subseteq B_k$ para alguna

$k \in I$. Sea $\underline{F}$ el refinamiento de $\underline{A}$ inducido por $\underline{G}$. Se sabe que $\underline{F}$ cubre bien a $\underline{G}$. Para que $\underline{F} \cap \underline{F}$ cubra bien a $\underline{G} \cap \underline{G}$ basta con que se cumpla (*). Sean $G_i, G_j \in \underline{G}$ tales que $G_i \cap G_j \neq \emptyset$, existe B_k tal que $G_i \cup G_j \subseteq B_k$. Sean ahora $F_{i,\alpha}$, $F_{j,\beta}$, $F_{j,\beta'}$ tales que $F_{i,\alpha} \cap F_{j,\beta} \neq \emptyset$ y
$F_{i,\alpha} \cap F_{j,\beta'} \neq \emptyset$. Existe γ tal que $F_{i,\alpha} \subseteq A_{k,\gamma}$. Pero entonces $F_{j,\beta}, F_{j,\beta'} \subseteq A_{k,\gamma}$ (por la conexidad de los elementos de $\underline{G}$). Si $\beta \neq \beta'$, como $F_{j,\beta} \cap F_{j,\beta'} \neq \emptyset$ se tendría que $e|A_{k,\gamma} : A_{k,\gamma} \longrightarrow B_k$ no es homeomorfismo !. Por lo tanto $\beta = \beta'$, y se cumple (*). Se concluye que $\underline{F} \cap \underline{F}$ cubre bien a $\underline{G} \cap \underline{G}$, y e es revestimiento.

(b) De nuevo sean $\underline{A}$ y $\underline{B}$ cubiertas abiertas de X e Y tales que $\underline{A}$ cubre bien a $\underline{B}$. Si $y \in B_i \subseteq Y$, definimos $\varepsilon_y = \frac{1}{4}\min\{d(x,x') : x,x' \in e^{-1}(y) ; x \neq x'\}$. Se considera el abierto $V_{y,i} = \bigcap \{e(V\varepsilon_y(x) \cap A_{i,\alpha}) : x \in e^{-1}(y) \cap A_{i,\alpha}\}$. La familia $\underline{V} = \{V_{y,i} : y \in B_i \in \underline{B}\}$ es un refinamiento abierto de $\underline{B}$ e induce un refinamiento abierto $\underline{F}$ de $\underline{A}$ tal que $\underline{F}$ cubre bien a $\underline{A}$. Consideremos ahora $V_{y,i}$, $V_{y',j} \in \underline{V}$ tales que $V_{y,i} \cap V_{y',j} \neq \emptyset$. Supongamos que $F_{y,i,\alpha} \cap F_{y',j,\beta} \neq \emptyset$ y que $F_{y,i,\alpha} \cap F_{y',j,\beta'} \neq \emptyset$, con $\beta \neq \beta'$.
Sin pérdida de generalidad supongamos que $\varepsilon_y \leq \varepsilon_{y'}$. Sean $x \in F_{y',j,\beta} \cap e^{-1}(y')$, $x' \in F_{y',j,\beta'} \cap e^{-1}(y')$, $w \in F_{y,i,\alpha} \cap F_{y',j,\beta}$, $r \in F_{y,i,\alpha} \cap F_{y',j,\beta'}$.

$$
\begin{aligned}
d(x,x') &\leq d(x,w) + d(w,r) + d(r,x') \\
&< \varepsilon_{y'} + 2\varepsilon_y + \varepsilon_{y'} \\
&\leq 4\varepsilon_{y'} = \min\{d(x_1,x_2) : x_1,x_2 \in e^{-1}(y) ; x_1 \neq x_2\}. \qquad !
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\underline{F} \cap \underline{F}$ cubre bien a $\underline{V} \cap \underline{V}$. ∎

1.4 UN EJEMPLO.

Sea $\overline{X} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}$, subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Considérese el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = \cos^2 x$$

$$\frac{dy}{dt} = \operatorname{sen} x.$$

Las curvas integrales son de la forma $\mathscr{C} = \{(x , \sec x + c): -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$, además de las rectas $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$.

Se puede considerar este sistema de ecuaciones diferenciales como las ecuaciones del movimiento de una partícula; t representa el tiempo y (x,y) son las coordenadas de la partícula en el instante t. La partícula se desplaza sobre una sola de las curvas integrales. El que se mueva sobre una curva u otra depende de la posición inicial. Se define $. : \mathbb{R} \times \overline{X} \longrightarrow \overline{X}$ de la siguiente manera: Para $t \in \mathbb{R}$ y (x,y) un punto de $\overline{X}$, $t.(x,y)$ será la posición en el instante t de la partícula que estaba en el punto (x,y) en el instante 0. La operación así definida resulta ser una acción de $\mathbb{R}$ sobre $\overline{X}$. Es decir,

$$0.(x,y) = (x,y) \ , \ y$$

$$(s + t).(x,y) = s.(t.(x,y)) \ .$$

En realidad la que nos interesa es la acción del subgrupo aditivo $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$ sobre $\overline{X}$.

Se prueba que la acción de $\mathbb{Z}$ sobre $\overline{X}$ es propiamente discontinua. Dado un punto cualquiera $P = (x,y) \in \overline{X}$, Sea C la única curva integral que pasa por P. Si $x \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ sean C_1 y C_2 dos curvas integrales próximas, una por cada lado de C (si $x \in \{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\}$ se considera sólo una) . Sea T_0 una curva suficientemente regular que pase por P y sea ortogonal a todas las curvas integrales entre C_1 y C_2. Para cada número real t, Pongamos $T_t = t.T_0$. Sea U un entorno abierto de P acotado por $T_{-\frac{1}{3}}$, $T_{\frac{1}{3}}$ y las curvas C_1 y C_2. Los sucesivos "traslados" de U

$$\{n.U : n \in \mathbb{Z}\}$$

son ajenos dos a dos.

Sea $X = \tilde{X}/\mathbb{Z}$. Se prueba que X no es de Hausdorff. Sean $P = (-\frac{\pi}{2},0)$, $Q = (\frac{\pi}{2},0)$. Se verá que [P] y [Q] no poseen entornos disjuntos. Para ello consideremos entornos de radio ε de P y Q, con $\frac{\pi}{2} > \varepsilon$ 0. Si la curva integral C es $C = \{(x, \sec x + C) : x \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\}$, supongamos que $(x',0) \in C$. Se considera $\alpha \in \mathbb{Z}^-$ con $\alpha < C$. Si $C_1 = -(\alpha^2 + 1)^{1/2}$, $[(0,1 + C_1)] \in V_\varepsilon[P] \cap V_\varepsilon[Q]$. Por lo tanto X no es de Hausdorff. Entonces $\pi:\tilde{X}\longrightarrow X$, la función cociente, no puede ser revestimiento, aunque es proyección cubriente. ■

1.5 PLANES.

Sean Y un espacio conexo, $e:X\longrightarrow Y$ una proyección cubriente de d hojas y $\underline{A}$, $\underline{B}$ cubiertas abiertas de X e Y respectivamente tales que $\underline{A}$ cubre bien a $\underline{B}$. Para cada $i \in I$, $e^{-1}(B_i) = \bigcup\{A_{i,\alpha} : \alpha \in I(d)\}$, con I(d) el conjunto de índices cuyos elementos son permutados por el grupo simétrico Σ_d. Si $B_i \cap B_j \neq \emptyset$, podemos asociar a cada $y \in B_i \cap B_j$ la permutación

$$\omega_{i,j}(y) = (\dots {\alpha \atop \beta} \dots)$$

donde α y β varían sobre los pares de índices para los cuales $A_{i,\alpha} \cap A_{j,\beta}$ tiene un elemento de $e^{-1}(y)$. Por supuesto $\omega_{i,j}(y)$ es un elemento del grupo simétrico Σ_d. La colección de funciones $\omega_{i,j}:B_i \cap B_j\longrightarrow\Sigma_d$ es un objeto al cual llamaremos el <u>plan</u> de la proyección cubriente $e:X\longrightarrow Y$ inducido por $\underline{A}$ y $\underline{B}$. Este plan tiene las siguientes propiedades:

(Ω_3) $\omega_{i,j}(y)\omega_{j,k}(y) = \omega_{i,k}(y)$ cuando $y \in B_i \cap B_j \cap B_k$.

$(\omega_{i,j}(y)\omega_{j,k}(y) = \omega_{j,k}(y) \circ \omega_{i,j}(y))$.

(Ω_0) Para i,j,α,β dados, el conjunto $\{y \in Y : \omega_{i,j}(y)(\alpha) = \beta\}$ es abierto (y por lo tanto cerrado) en $B_i \cap B_j$.

De (Ω_3) se siguen

(Ω_1) $\omega_{i,i}(y)$ es la permutación identidad para cada $y \in Y$.

(Ω_2) $\omega_{j,i}(y) = (\omega_{i,j}(y))^{-1}$ para cada $y \in B_i \cap B_j$

Observación. $\underline{A} \cap \underline{A}$ cubre bien a $\underline{B} \cap \underline{B}$ si y sólo si cada una de las funciones $\omega_{i,j}:B_i \cap B_j \longrightarrow \Sigma_d$ es constante.

Si $\underline{B}$ es cualquier cubierta abierta de un espacio Y conexo, una colección de funciones $\omega_{i,j}:B_i \cap B_j \longrightarrow \Sigma_d$ ($\omega_{i,j}$ definida si $B_i \cap B_j \neq \emptyset$) es un <u>plan</u> (basado en $\underline{B}$) si satisface las condiciones (Ω_3) y (Ω_0).

(1.5.1) <u>Teorema</u> (de existencia). Si $\underline{B}$ es una cubierta abierta de Y conexo y $\{\omega_{i,j}\}$ es un plan basado en $\underline{B}$, existe entonces una única proyección cubriente (salvo equivalencias) $e:X\longrightarrow Y$ y una cubierta abierta $\underline{A}$ de X, que cubre bien a $\underline{B}$, cuyo plan es $\{\omega_{i,j}\}$.

Dem: Para cada $i \in I$, $\alpha \in I(d)$, sean $\hat{A}_{i,\alpha}$ un espacio topológico homeomorfo a B_i y $\hat{e}_{i,\alpha}$ un homeomorfismo de $\hat{A}_{i,\alpha}$ sobre B_i. Se

define una relación $\approx$ (que resulta ser de equivalencia) entre los puntos de $\overline{X} = \bigsqcup \hat{A}_{i,\alpha}$ como sigue:
Si $a \in \hat{A}_{i,\alpha}$ y $a' \in \hat{A}_{j,\beta}$ entonces $a \approx a'$ si $\hat{e}_{i,\alpha}(a) = \hat{e}_{j,\beta}(a')$ y $\omega_{i,j}(\hat{e}_{i,\alpha}(a))(\alpha) = \beta$. Se define $X = \overline{X}/\approx$. Por el teorema de transgresión existe una función continua única $e:X \longrightarrow Y$ tal que

$$\begin{tikzcd} \overline{X} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\hat{e}"'] & X \arrow[dl, "e"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Definimos para i,α $A_{i,\alpha} = \pi(\hat{A}_{i,\alpha})$, y sea $\underline{A} = \{A_{i,\alpha} : i \in I, \alpha \in I(d)\}$. Se verificará que $\underline{A}$ cubre bien a $\underline{B}$, y que $\{\omega_{i,j}\}$ es el plan de e inducido por $\underline{A}$ y $\underline{B}$. Primero se prueba que para cada $i \in I$, $e^{-1}(B_i) = \bigcup\{A_{i,\alpha} : \alpha \in I(d)\}$, donde cada $A_{i,\alpha}$ es abierto y $A_{i,\alpha} \cap A_{i,\beta} = \emptyset$ si $\alpha \neq \beta$. Sea $[x] \in e^{-1}(B_i)$. Entonces $e[x] \in B_i$. Si $[x] \in \hat{A}_{j,\beta}$, $\hat{e}(x) \in B_i \cap B_j$. Como $\omega_{i,j}(\hat{e}(x)) \in \Sigma_d$, existe $\alpha \in I(d)$ tal que $\omega_{i,j}(\hat{e}(x))(\alpha) = \beta$. Sea $x' \in \hat{A}_{i,\alpha}$ tal que $\hat{e}(x) = \hat{e}(x')$. Entonces $x' \approx x$, y $[x] = [x'] \in A_{i,\alpha}$. Se sigue que $e^{-1}(B_i) \subseteq \bigcup A_{i,\alpha}$.
Por otra parte, si $[x] \in A_{i,\alpha}$ con $x \in \hat{A}_{i,\alpha}$, $e[x] \in B_i$, entonces $\bigcup A_{i,\alpha} \subseteq B_i$. Así pues, $e^{-1}(B_i) = \bigcup\{A_{i,\alpha} : \alpha \in I(d)\}$. Ahora se prueba que $A_{i,\alpha} \cap A_{i,\beta} \neq \emptyset$ implica $\alpha = \beta$. Si $[x] \in A_{i,\alpha} \cap A_{i,\beta}$, con $x \in \hat{A}_{i,\alpha}$, se sigue que existe $x' \in \hat{A}_{i,\beta}$ con $x \approx x'$. Es decir, $\hat{e}(x) = \hat{e}(x')$ y $\omega_{i,i}(\hat{e}(x'))(\alpha) = \beta$. Por (Ω_1), $\alpha = \beta$. Como $e^{-1}(B_i) = \bigcup\{A_{i,\alpha} : \alpha \in I(d)\}$ y $A_{i,\alpha} \cap A_{i,\beta} = \emptyset$ si $\alpha \neq \beta$, se concluye que cada $A_{i,\alpha}$ es abierto. Ahora se verifica que $e|A_{i,\alpha}:A_{i,\alpha} \longrightarrow B_i$ es homeomorfismo para cada α. Sean $[x]$, $[x'] \in A_{i,\alpha}$ con $[x] \neq [x']$ y x, $x' \in \hat{A}_{i,\alpha}$. Se sigue que $x \neq x'$, y por lo tanto $e[x]\ \hat{e}(x) \neq \hat{e}(x') = \hat{e}[x']$, esto último

porque $\hat{e}|\hat{A}_{i,\alpha}$ es homeomorfismo sobre B_i. Entonces $e|A_{i,\alpha}$ es 1-1. Es sencillo probar que $e|A_{i,\alpha}$ es sobre B_i. $e|A_{i,\alpha}$ es abierta porque $\hat{e}$ es abierta. Entonces $e|A_{i,\alpha}$ es homeomorfismo de $A_{i,\alpha}$ sobre B_i . Por lo tanto $\underline{A}$ cubre bien a $\underline{B}$ y e es proyección cubriente. Por construcción $\{\omega_{i,j}\}$ es el plan de e inducido por $\underline{A}$ y $\underline{B}$. Si $e':X' \longrightarrow Y$ es otra proyección cubriente y $\underline{A}'$ es una cubierta abierta de X' tal que $\{\omega_{i,j}\}$ es el plan de e' inducido por $\underline{A}'$ y $\underline{B}$, entonces $f:X \longrightarrow X'$ definida por $f:X \longrightarrow X' : f(x) = x'$ si $x \in A_{i,\alpha}$, $x' \in A'_{i,\alpha}$ y $e(x) = e'(x')$, es un homeomorfismo tal que $e'f = e$. ∎

(1.5.2) Teorema. Si Y es metrizable y $e:X \longrightarrow Y$ es una proyección cubriente entonces X es metrizable . Si e es revestimiento entonces existen métricas para X e Y para las cuales e es una isometría local.∎

(1.5.3) Lema. Si $\underline{B} = \{B_i\}$ es una cubierta abierta localmente finita de Y subespacio de Q metrizable, entonces se puede extender cada B_i a un abierto V_i en Q de tal forma que $Y \cap V_i = B_i$, y que el nervio de $\underline{V} = \{V_i\}$ de $V = \bigcup V_i$ sea idéntico al nervio de $\underline{B}$.

Dem: Si $B_i \in \underline{B}$, sea $V_i = \{q \in Q : \rho(q,B_i) < \rho(q,Y-B_i)\}$, donde ρ es la métrica de Q. Primero se verifica que cada V_i es abierto. Sea $q \in V_i$. Se considera $\varepsilon = \frac{1}{2}(\rho(q,Y-B_i) - \rho(q,B_i))$. Si $p \in V_\varepsilon(q)$, $\rho(p,q) < \varepsilon$ implica $2\rho(p,q) < \rho(q,Y-B_i) - \rho(q,B_i)$. Entonces
$\rho(p,B_i) \leq \rho(p,q) + \rho(q,B_i) < \rho(q,Y-B_i) - \rho(p,q) \leq \rho(p,Y-B_i)$.
Por lo tanto V_i es abierto. En seguida se prueba que $Y \cap V_i = B_i$. $B_i \subseteq Y$ y $B_i \subseteq V_i$ implican $B_i \subseteq Y \cap V_i$. Por otra parte, $q \in Y \cap V_i$

, entonces $q \in Y$ y $\rho(q,B_i) < \rho(q,Y-B_i)$. Se sigue que $q \notin Y-B_i$ y por lo tanto $q \in B_i$. Por lo tanto, $Y \cap V_i \subseteq B_i$. Se concluye que $Y \cap V_i = B_i$. Ahora, si $\bigcap\{B_{ij} : j = 1,\ldots,n\} \neq \emptyset$, directamente $\bigcap\{V_{ij} : j = 1,\ldots,n\} \neq \emptyset$, pues cada $B_{ij} \subseteq V_{ij}$. Inversamente, si $q \in \bigcap\{V_{ij} : j = 1,\ldots,n\}$, supongamos que $\rho(q,B_{i1}) \leq \rho(q,B_{ij})$ para $j = 2,\ldots n$.

Entonces $\rho(q,B_{i1}) < \rho(q,Y-B_{ij})$ para $j = 1,\ldots,n$ Sea $p \in B_{i1}$ tal que $\rho(q,p) \leq \rho(q,Y-B_{ij})$ para $j = 1,\ldots,n$. Por lo tanto $p \in \bigcap\{B_{ij} : j = 1,\ldots,n\}$. Se concluye que $\bigcap\{V_{ij} : j = 1,\ldots,n\} \neq \emptyset$ implica $\bigcap\{V_{ij} : j = 1,\ldots,n\} \neq \emptyset$. ■

(1.5.4) <u>Teorema</u> (de extensión). Si Y es subconjunto de Q metrizable, y $e:X \longrightarrow Y$ es una revestimiento, entonces e puede ser extendida a una revestimiento $f:U \longrightarrow V$, donde V es un apropiado entorno de Y en Q Y U es un superespacio apropiado de X.

Dem: Es directa utilizando el lema (1.5.3) y el teorema (1.5.1).

■

(1.5.5) <u>Ejemplo</u>. Sean $F = \{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots\}$, $C_0 = I \times 0 \cup F \times [0,\frac{1}{2}]$, $C_1 = I \times 1 \cup F \times [\frac{1}{2},1]$, $Y = C_0 \cup C_1$. Sea X el espacio cociente de $C_0 \times \mathbb{N} \times 0 \cup C_1 \times \mathbb{N} \times 1$ al hacer las identificaciones $(\frac{1}{m},\frac{1}{2},m,i) \sim ((\frac{1}{m},\frac{1}{2},m+1,1-i)$ para $m \in \mathbb{N}$, $i \in \{0,1\}$, $(y,\frac{1}{2},1,0) \sim (y,\frac{1}{2},1,1)$ para $y \in F-\{1\}$, y $(y,\frac{1}{2},m,0) \sim (y,\frac{1}{2},m,1)$ para $y \in F - \{\frac{1}{m-1},\frac{1}{m}\}$. Sea $e:X \longrightarrow Y:e[x,y,m,i] = (x,y)$. e es una proyección cubriente. Si e fuese un revestimiento, sea $Q = I \times I$. Por el teorema (1.5.4) existiría una extensión $f:U \longrightarrow V$ de e, para un entorno abierto V de Y en $I \times I$ y un superespacio U de X. Como

$\{0\} \times I$ es compacto en $I \times I$, existiría $W = [0,s) \times I \subseteq V$. W contraible implicaría $e|e^{-1}(W):e^{-1}(W) \longrightarrow W$ sería trivial ! Por lo tanto e no es revestimiento.

CAPITULO 2.

FORMAS.

2.1 RETRACTOS ABSOLUTOS DE ENTORNOS.

(2.1.1) Definición. Una categoria $\mathcal{C}$ consta de una clase $OB(\mathcal{C})$ de objetos y de un conjunto de morfismos $hom(X,Y)$ para cada par de objetos X,Y de $\mathcal{C}$ de tal manera que

(i) Si $f \in hom(X,Y)$ y $g \in hom(Y,Z)$ existe un único morfismo $gf \in hom(X,Z)$ llamado composición de f y g,

(ii) Para cada $X \in OB(\mathcal{C})$ existe $1_x \in hom(X,X)$ tal que si $f \in hom(X,Y)$, $f1_x = f$, y si $g \in hom(Y,X)$, $1_x g = g$,

(iii) Si $f \in hom(X,Y)$, $g \in hom(Y,Z)$ y $h \in hom(Z,W)$, $h(gf) = (hg)f$.

(2.1.2) Definición. Una dirección $\leq$ en un conjunto Λ es un preorden $\leq$ en Λ que además cumple con lo siguiente: Dados $\lambda,\lambda' \in \Lambda$ existe $\lambda'' \in \Lambda$ tal que $\lambda \leq \lambda''$ y $\lambda' \leq \lambda''$. En tal caso $(\Lambda,\leq)$ es un conjunto dirigido, y si no hay confusión posible, diremos simplemente que Λ es un conjunto dirigido.

(2.1.3) Definición. Sea $\mathcal{C}$ una categoria arbitraria. Un sistema inverso en $\mathcal{C}$ consiste en un conjunto dirigido Λ, llamado conjunto de indices, un objeto X_λ de $\mathcal{C}$ para cada $\lambda \in \Lambda$ y un morfismo $p_{\lambda\lambda'}: X_{\lambda'} \longrightarrow X_\lambda$ de $\mathcal{C}$ para cada par $\lambda \leq \lambda'$, de tal forma que $p_{\lambda\lambda} = 1_{X_\lambda}$ y $\lambda \leq \lambda' \leq \lambda''$ implica $p_{\lambda\lambda'}p_{\lambda'\lambda''} = p_{\lambda\lambda''}$.

Escribiremos 1_λ en lugar de 1_{X_λ}, y $\underline{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ para referirnos a un sistema inverso. Los conjuntos X_λ son llamados términos y los morfismos $p_{\lambda\lambda'}$, morfismos de enlace de $\underline{X}$.

(2.1.4) Definición. Sean X un espacio topológico, Y un subespacio de X. Cualquier función continua $r:X \longrightarrow Y$ tal que $ri = 1_Y$ (donde $i:Y \longrightarrow X$ es la inclusión) es una retracción.

Si existe una retracción $r:X \longrightarrow Y$, decimos que Y es un retracto de X.

(2.1.5) Definición. Un subespacio Y de X es un retracto de entornos de X si existe un entorno U de Y en X tal que Y es retracto de U.

Cualquier retracto de X es un retracto de entornos de X, pero lo inverso no es válido. Por ejemplo, $\mathbb{S}^n$ es un retracto de entornos de $\mathbb{B}^{n+1}$ y no es un retracto de $\mathbb{B}^{n+1}$ ($\mathbb{B}^{n+1}$ es la n + 1 esfera unitaria en $\mathbb{R}^{n+1}$ y $\mathbb{S}^n$ es su frontera).

Denotaremos con μ a la clase de los espacios metrizables.

(2.1.6) Definición. Un espacio metrizable Y es un retracto absoluto (retracto absoluto de entornos para espacios metrizables) y se abrevia $Y \in AR(\mu)$ $(Y \in ANR(\mu))$, si cada vez que Y es sumergido como cerrado de un espacio metrizable, la imagen de Y es retracto (retracto de entornos) del espacio en el cual Y fue sumergido.

(2.1.7) Definición. Un espacio topológico Y es un extensor para el par (X,A) si cada función continua $f:A\longrightarrow Y$ tiene una extensión continua $\bar{f}:X\longrightarrow Y$. Y es un extensor de entornos para (X,A) si para cada función continua $f:A\longrightarrow Y$ existe un entorno U_f de Y en X y una extensión continua $\bar{f}:U_f\longrightarrow Y$ de f.

(2.1.8) Definición. Un espacio Y es un extensor absoluto para espacios metrizables

(extensor absoluto de entornos para espacios metrizables), y se abrevia $Y \in AE(\mu)$ $(Y \in ANE(\mu))$, si es un extensor (extensor de entornos) para cada par (X,A), donde $X \in \mu$ y A es un cerrado de X.

Nótese que $Y \in \mu$ e $Y \in AE(\mu)$ $(Y \in ANE(\mu))$ implica $Y \in AR(\mu)$ $(Y \in ANR(\mu))$.

(2.1.9) Teorema. (Teorema de inmersión de Kuratowski-Wojdysławski). Para cada espacio metrizable Y existe un espacio vectorial normado L y un encaje $h:Y\longrightarrow L$ tal que $h(Y)$ es un cerrado de su envoltura convexa K.

Dem:

Sea d una métrica acotada para Y. Sea L el espacio de todas las funciones continuas acotadas $f:Y\longrightarrow \mathbb{R}$, con $\|f\| = \sup\{|f(y)| : y \in Y\}$. Para cada $y \in Y$ consideramos la función continua acotada $f_y:Y\longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_y(x) = d(x,y)$. Sea $h:Y\longrightarrow L$ dada por $h(y) = f_y$. Claramente
$\|h(y_1) - h(y_2)\| = \sup\{|d(y,y_1) - d(y,y_2)| : y \in Y\} \le d(y_1,y_2)$.

Además, para $y = y_1$, $|d(y_1,y_1) - d(y_1,y_2)| = d(y_1,y_2)$. Entonces $||h(y_1) - h(y_2)|| = d(y_1,y_2)$, lo cual muestra que h es una isometría. Sea ahora K la envoltura convexa de h(Y) en L. Se probará que K - h(Y) es abierto en K. Sea $g \in K - h(Y)$. Existen puntos $y_0,\ldots,y_n \in Y$ y números reales $\lambda_0,\ldots\lambda_n \geq 0$, $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$, tales que $g = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i h(y_i)$. Como $g \neq h(y_0),\ldots,h(y_n)$, existe $\delta > 0$ tal que $2\delta < ||g - h(y_i)||$, $i = 0,\ldots,n$. Sea $V = V_\delta(g) \cap K$. Se probará que $V \subseteq K - h(Y)$. Si $f \in V$, se tiene que $||f - h(y_i)|| \geq \delta$, $i = 0,\ldots,n$. Si para alguna $y \in Y$ se tuviera que $f = h(y)$, entonces $f(y) = h(y)(y) = d(y,y) = 0$, y $d(y,y_i) = ||h(y) - h(y_i)|| = ||f - h(y_i)|| \geq \delta$, $i = 0,\ldots,n$. Se seguiría que

$g(y) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i h(y_i)(y) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i d(y,y_i) \geq \delta$. Pero entonces $||f - g|| \geq |f(y) - g(y)| = g(y) \geq \delta$! Se concluye que $f \in K - h(Y)$, y como f era arbitraria, $V \subseteq K - h(Y)$. ∎

(2.1.10) <u>Lema</u>. Sea X un espacio metrizable y A un cerrado de X. Existe una cubierta abierta localmente finita $\mathcal{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de X - A tal que para cada $a \in A$ y cada entorno V de a en X existe un entorno W de a en X con la propiedad de que $U_\lambda \cap W \neq \emptyset$ implica $U_\lambda \subseteq V$.

Dem:

Supongamos que A es no vacío, se considera para cada $x \in X - A$ el ε_x entorno V_x de x en X - A, donde $\varepsilon_x = \frac{1}{2}d(x,A) > 0$. Como X - A es metrizable, y por ello paracompacto, la cubierta abierta $\{V_x : x \in X - A\}$ de X - A tiene un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Sean $a \in A$, V un entorno de a en X y $\varepsilon > 0$

lo suficientemente pequeño para que $V_{\varepsilon}(a)$ en X esté contenido en V. Entonces se define W como el $\frac{\varepsilon}{3}$-entorno de a en X. Se afirma que $W \cap U_{\lambda} \neq \emptyset$ implica $U_{\lambda} \subseteq V$. Sean $z \in W \cap U_{\lambda}$ y V_x tal que $U_{\lambda} \subseteq V_x$, $x \in X - A$. Entonces para cualquier $y \in U_{\lambda}$

$$d(a,y) \le d(a,z) + d(z,x) + d(x,y) < \frac{\varepsilon}{3} + 2\varepsilon_x.$$

Además, $2\varepsilon_x = d(x,A) \le d(x,a) \le d(x,z) + d(z,a) < \varepsilon_x + \frac{\varepsilon}{3}$, entonces $\varepsilon_x < \frac{\varepsilon}{3}$. Por lo anterior, $d(a,y) < \varepsilon$, entonces $y \in V$. Se concluye que $U_{\lambda} \subseteq V$. ∎

(2.1.11) Teorema. (Teorema de extensión de Dugundji). Cada subconjunto convexo K de un espacio vectorial normado L es un AE para espacios métricos.

Dem:

Sean X un espacio metrizable y A un cerrado de X. Sea $f:A \longrightarrow K$ una función continua. Sea $\mathcal{U} = \{U_{\lambda}: \lambda \in \Lambda\}$ una cubierta abierta y localmente finita de X - A que satisface las condiciones del lema anterior. Consideremos una partición de la unidad $\{\phi_{\lambda}:X - A \longrightarrow I\}_{\lambda \in \Lambda}$ subordinada a $\mathcal{U}$. Para cada $\lambda \in \Lambda$ se elige $x_{\lambda} \in U_{\lambda}$ y $a_{\lambda} \in A$ tales que $d(x_{\lambda},a_{\lambda}) \le 2d(x_{\lambda},A)$. Entonces se define $g:X \longrightarrow K$ como sigue:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in A \\ \sum_{\lambda \in \Lambda} \phi_{\lambda}(x) f(a_{\lambda}), & \text{si } x \in X\text{-}A. \end{cases}$$

Por la finitud local de $\mathcal{U}$ cada punto $x \in X\text{-}A$ tiene un entorno para el cual la suma $\sum \phi_{\lambda}(x)f(a_{\lambda})$ se reduce a una suma finita. En consecuencia, g está bien definida y es continua en X-A. Falta probar que g es continua en cualquier punto arbitrario a_0 de A. Sea U un entorno convexo de $g(a_0) = f(a_0)$ en K. Sea $\varepsilon > 0$ tal que si $a \in A$ y $d(a,a_0) < 3\varepsilon$ entonces $f(a) \in U$. Sea $V = \{x \in X: d(x,a_0) < \varepsilon\}$ y sea W un entorno de a_0 elegido como en el lema anterior. Tenemos que probar que para $x \in W-A$ y $\phi_\lambda(x) \neq 0$ se cumple $f(a_\lambda) \in U$; por ello y la convexidad de U, $g(x) = \sum \phi_\lambda(x)f(a_\lambda) \in U$. De hecho, si $x \in W-A$ y $\phi_\lambda(x) \neq 0$, entonces $x \in U_\lambda \subseteq V$. En consecuencia,

$d(a_0,a_\lambda) \leq d(a_0,x_\lambda) + d(x_\lambda,a_\lambda) \leq d(a_0,x_\lambda) + 2d(x_\lambda,A) \leq$

$\leq 3d(a_0,x_\lambda) < 3\varepsilon$. Entonces, por la elección de ε, se concluye que $f(a_\lambda) \in U$. ■

Consecuencia de los teoremas anteriores es que cada espacio metrizable puede encajarse como un cerrado en un ANR para espacios metrizables.

2.2 ESPECTROS, MUTACIONES Y FORMAS.

(2.2.1) <u>Definición</u>. Un <u>espectro</u> $\underline{U} = \{U,u\}$ es un sistema inverso de retractos absolutos de entornos para espacios métricos U dirigidos por la inclusión $u:U_1 \subseteq U_2$.

Aquí se prescinde de los subíndices para que el trabajo sea menos engorroso.

(2.2.2) <u>Definición</u>. Una <u>mutación</u> $\underline{f}:\underline{U} \longrightarrow \underline{V}$ es una colección de funciones continuas $f:U \longrightarrow V$ tal que

(1) Cada $V \in \underline{V}$ es el codominio de al menos una $f \in \underline{f}$

(2) Si $f:U \longrightarrow V \in \underline{f}$ y $u:U_1 \subseteq U \in \underline{U}$, $v:V \subseteq V_1 \in \underline{V}$, entonces $vfu:U_1 \longrightarrow V_1 \in \underline{f}$.

(3) Si $f:U\longrightarrow V$ y $f':U\longrightarrow V$ pertenecen a $\underline{f}$, existe $u:U_1 \subseteq U \in \underline{U}$ tal que fu es homotópica a $f'u$.

(2.2.3) Definición. Dos mutaciones $\underline{f},g:\underline{U}\longrightarrow\underline{V}$ son homotópicas, y se escribe $\underline{f}\approx g$, si

(4) Dadas $f:U\longrightarrow V \in \underline{f}$, $g:U\longrightarrow V \in \underline{g}$, existe $u:U_1 \subseteq U \in \underline{U}$ tal que fu es homotópica a gu. Diremos que U_1 es el igualador homotópico de f y g.

La mutación formada por todas las inclusiones de $\underline{U}$ es denotada por $\underline{u}:\underline{U}\longrightarrow\underline{U}$.

La composición de mutaciones se define de la manera obvia y es una mutación.

(2.2.4) Definición. Dos espectros $\underline{U}$ y $\underline{V}$ son homotópicos, y se escribe $\underline{U}\approx\underline{V}$, si

(5) Existen mutaciones $\underline{f}:\underline{U}\longrightarrow\underline{V}$ y $\underline{g}:\underline{U}\longrightarrow\underline{V}$ tales que $\underline{gf} \approx \underline{u}$ y $\underline{fg} \approx \underline{v}$.

Por (2.1.9) y (2.1.11), cualquier espacio métrizable X puede ser encajado como un cerrado en al menos un retracto absoluto de entornos para espacios métrizables P. Cada entorno abierto U de X en P es un retracto absoluto de entornos para espacios métrizables, y la colección de tales entornos es el espectro de entornos $\underline{U}(X,P)$. A continuación se probará que salvo homotopía, $\underline{U}(X,P)$ depende sólo de X, sin importar cuál espacio es P ni el encaje de X en P.

Si $\underline{U} = \{U_\lambda\}$ es un espectro de entornos abiertos de X en P tal que para cada $U \in \underline{U}(X,P)$ existe $U_\lambda \in \underline{U}$ con $U_\lambda \subseteq U$ entonces diremos que $\underline{U}$ es <u>cofinal</u> en $\underline{U}(X,P)$, y se cumple que $\underline{U} \approx \underline{U}(X,P)$.

(2.2.5) <u>Definición</u>. Sean

(i) $X = \overline{X} \subseteq P$, $Y = \overline{Y} \subseteq Q$,

(ii) $P,Q \in ANR$,

(iii) $f:X \longrightarrow Y$ una función continua.

Una mutación $\underline{f}:\underline{U}(X,P) \longrightarrow \underline{V}(Y,Q)$, donde $\underline{U}(X,P)$ y $\underline{V}(Y,Q)$ son los espectros de entornos de X en P y de Y en Q respectivamente, es una <u>extensión</u> de f si existe una extensión continua $f':U \longrightarrow Q$, donde $U \in \underline{U}(X,P)$, de la función $jf:X \longrightarrow Q$ ($j:Y \longrightarrow Q$, la inclusión) tal que

$\underline{f} = \{f'|U':U' \longrightarrow V' \ : \ U' \in \underline{U}(X,P), V' \in \underline{V}(Y,Q), \ U' \subseteq U, \ f'(U') \subseteq V' \}$.

En tal caso decimos que $\underline{f}$ es una extensión de f determinada por f', y está constituida por las "restricciones expandidas" de f'.

(2.2.6) <u>Teorema</u>. "Siempre existen las extensiones". Si

(i) $X = \overline{X} \subseteq P$, $Y = \overline{Y} \subseteq Q$,

(ii) $P,Q \in ANR$,

(iii) $f:X \longrightarrow Y$ una función continua,

entonces existe una extensión $\underline{f}:\underline{U}(X,P) \longrightarrow \underline{V}(Y,Q)$ de f.

Dem: Supongamos que se cumplen (i), (ii), (iii), y que $j:Y \longrightarrow Q$ es la inclusión. Se tiene que $jf:X \longrightarrow Q$ es una función continua de X cerrado de P metrizable en $Q \in ANR$. Entonces existe $f':U \longrightarrow Q$ una extensión continua de f, con U un entorno abierto de X en P. f' determina una mutación $\underline{f}:\underline{U}(X,P) \longrightarrow \underline{V}(Y,Q)$ que es por definición extensión de f. Esto concluye la demostración. ∎

(2.2.7) Teorema. "Composición de extensiones es una extensión"

(Para abreviar escribiremos $\underline{U}$ en lugar de $\underline{U}(X,P)$, etc.)

Sean

(i) $X = \overline{X} \subseteq P$, $Y = \overline{Y} \subseteq Q$, $Z = \overline{Z} \subseteq R$,

(ii) $P,Q,R \in ANR$,

(iii) $f:X \longrightarrow Y$, $g:Y \longrightarrow Z$ funciónes continuas,

(iv) $\underline{f}:\underline{U} \longrightarrow \underline{V}$, $\underline{g}:\underline{V} \longrightarrow \underline{W}$ extensiones de f y g respectivamente, determinadas por $f':U \longrightarrow Q$ y $g':V \longrightarrow R$ respectivamente.

Entonces $\underline{gf}$ es una extensión de gf.

Dem: Definimos $(gf)' = g'f'|f'^{-1}(V):f'^{-1}(V) \longrightarrow R$. Si $g_1f_1 \in \underline{gf}$, entonces $f_1:U' \longrightarrow V'$ y $g_1:V' \longrightarrow W'$, donde $U' \in \underline{U}$, $V' \in \underline{V}$, $W' \in \underline{W}$. Por la definición de extensión se tendrá

$f_1 = f'|U':U' \longrightarrow V'$, $U' \subseteq U$ y $f'(U') \subseteq V'$,

$g_1 = g'|V':V' \longrightarrow W'$, $V' \subseteq V$ y $g'(V') \subseteq W'$.

Hay que probar que

(a) $U' \subseteq f'^{-1}(V)$,

(b) $g_1f_1 = (gf)'|U'$,

(c) $(gf)'(U') \subseteq W'$.

(a) es directo, pues $f'(U') \subseteq V' \subseteq V$. La primera contención es consecuencia de la definición de extensión y la segunda de que $\underline{g}$ está determinada por g'. Por lo tanto $U' \subseteq f'^{-1}(V)$.

(b) Si $u \in U'$, $g_1f_1(u) = g_1(f'(u)) = g'(f'(u)) = (gf)'(u)$. Por lo tanto $g_1f_1 = (gf)'|U'$.

(c) $(gf)'(U') = g'(f'(U')) \subseteq g'(V') \subseteq W'$.

Entonces $\underline{gf}$ es una extensión de gf determinada por $(gf)'$. ∎

(2.2.8) Teorema. Si

(i) $X = \overline{X} \subseteq P$, $Y = \overline{Y} \subseteq Q$,

(ii) $P, Q \in ANR$,

(iii) $f, g: X \longrightarrow Y$ son funciónes continuas y homotópicas, (iv) $\underline{f}, \underline{g}$ son extensiones de f y g,

entonces $\underline{f} \approx \underline{g}$.

Dem: Supongamos $\underline{f}$ determinada por $f': U_1 \longrightarrow Q$, $\underline{g}$ determinada por $g': U_2 \longrightarrow Q$. Sean $f_1 \in \underline{f}$, $g_1 \in \underline{g}$, $f_1, g_1: U_0 \longrightarrow V$, y sea $H: X \times I \longrightarrow Y$ una homotopía tal que $H_0 = f$, $H_1 = g$. Sea $L = (U_0 \times \{0\}) \cup (X \times I) \cup (U_0 \times \{1\})$. L es un cerrado de $U_0 \times I$. Definimos $k: L \longrightarrow V$ así:

$$k: L \longrightarrow V: k(u,t) = \begin{cases} f'(u) \text{ si } t = 0 \\ g'(u) \text{ si } t = 1 \\ H(u,t) \text{ si } u \in X,\ t \in I \end{cases}$$

k es continua de L cerrado de $U_0 \times I$ en $V \in ANR$. Entonces existe $\overline{k}: S \longrightarrow V$ una extensión de k, con S entorno abierto de L en $U_0 \times I$. Por la compacidad de I existe un entorno abierto U de X en P tal que $U \times I \subseteq S$. Esto porque para cada $x \in X$, x fijo existe $U_{(x,t)} \times V_{(x,t)}$ un entorno abierto básico de (x,t) en S. La familia $\{V_{(x,t)}: t \in I\}$ es una cubierta abierta de I y tiene una subcubierta finita $\{V_{(x,t_1)}, \dots, V_{(x,t_n)}\}$. Consideremos $U_x = \bigcap \{U_{(x,t_i)}: i = 1, \dots, n\}$, luego $U_x \times I \subseteq S$. Finalmente $U = \bigcup \{U_x: x \in X\}$ es tal que $X \times I \subseteq U \times I \subseteq S$ Sea $H' = \overline{k}|U \times I: U \times I \longrightarrow V$. U es el igualador homotópico de f_1 y g_1, pues $U \subseteq U_0$. ■

(2.2.9) Teorema. Si

(i) $X = \overline{X} \subseteq P$, $Y = \overline{Y} \subseteq Q$,

(ii) $P, Q \in ANR$, (iii) X, Y tienen el mismo tipo de homotopía, entonces $\underline{U} \approx \underline{V}$.

Dem: Sean $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow X$ continuas tales que gf es homotópica a 1_X y fg es homotópica a 1_Y. Consideremos $\underline{f}, \underline{g}$ extensiones de f y g determinadas por $f': U \longrightarrow Q$, y $g': V \longrightarrow P$ respectivamente. Sabemos que $\underline{gf}$ es extensión de gf. $\underline{u}$ (la familia de todas las inclusiones) es una extensión de 1_X determinada por 1_P. Por el teorema anterior $\underline{gf} \approx \underline{u}$. Analogamente $\underline{fg} \approx \underline{v}$. Por lo tanto $\underline{U} \approx \underline{V}$. ■

(2.2.10) Definición. Dos espacios metrizables X, Y tienen la misma forma si $\underline{U}(X,P) \approx \underline{V}(Y,Q)$. En tal caso se escribe $Sh\, X = Sh\, Y$.

(2.2.11) Teorema. Retractos absolutos de entornos (para espacios metrizables) tienen la misma forma si y sólo si pertenecen al mismo tipo de homotopía.

Dem: Sean $X, Y \in ANR(\mu)$.

$\Rightarrow$) Supongamos $Sh\, X = Sh\, Y$. Sean $\underline{U} = \{X, 1_X\}$, $\underline{V} = \{Y, 1_Y\}$. Entonces $\underline{U} \approx \underline{V}$. Consideramos $\underline{f}: \underline{U} \longrightarrow \underline{V}$, $\underline{g}: \underline{V} \longrightarrow \underline{U}$ tales que $\underline{gf} \sim \underline{u}$ y $\underline{fg} \sim \underline{v}$. Sean $f \in \underline{f}$ y $g \in \underline{g}$. Se probará que $gf \sim 1_X$ y $fg \sim 1_Y$. Veamos, se tiene que $f: X \longrightarrow Y$ y $g: Y \longrightarrow X$. Como $\underline{gf} \sim \underline{u}$, existe $U \in \underline{U}$, $i: U \longrightarrow X$ tal que $gfi \sim 1_X i$. Como el único ANR de $\underline{U}$ es X y el único morfismo de $\underline{U}$ es 1_X, se tiene que $i = 1_X$ y $U = X$. Entonces $gf1_X \sim 1_X 1_X$, $gf \sim 1_X$. Analogamente $fg \sim 1_Y$.

$\Leftarrow$) Si X, Y tienen el mismo tipo de homotopía, por el teorema (2.3.9), $\underline{U}(X,P) \approx \underline{V}(Y,Q)$. Por lo tanto $Sh\, X = Sh\, Y$. ■

Espacios metrizables tienen la misma forma si pertenecen al mismo tipo de homotopía (teorema (2.3.9)). Por lo tanto una forma es la unión de uno o más tipos de homotopía.

2.3 TROPOS.

(2.3.1) <u>Definición</u>. Un <u>Tropo</u> es un sistema inverso $\underline{\Gamma}$ de grupos Γ y homomorfismos γ.

Prescindimos aquí también de los subíndices, como lo hace Fox. Pero observamos que para Γ_1, $\Gamma_2 \in \underline{\Gamma}$ existen Γ_0, $\gamma_1:\Gamma_0 \longrightarrow \Gamma_1$, $\gamma_2:\Gamma_0 \longrightarrow \Gamma_2 \in \underline{\Gamma}$.

(2.3.2) <u>Definición</u>. Un <u>morfismo de tropos</u> $\underline{\varphi}:\underline{\Gamma} \longrightarrow \underline{\Delta}$ es una colección de homomorfismos $\varphi:\Gamma \longrightarrow \Delta$ tal que

(1) Cada $\Delta \in \underline{\Delta}$ es el codominio de al menos una $\varphi \in \underline{\varphi}$,

(2) Si $\varphi:\Gamma \longrightarrow \Delta \in \underline{\varphi}$, $\gamma:\Gamma_1 \longrightarrow \Gamma \in \underline{\Gamma}$, $\delta:\Delta \longrightarrow \Delta_1 \in \underline{\Delta}$, entonces $\delta\varphi\gamma:\Gamma_1 \longrightarrow \Delta_1 \in \underline{\varphi}$,

(3) Si $\varphi, \varphi':\Gamma \longrightarrow \Delta \in \varphi$, existe $\gamma:\Gamma_1 \longrightarrow \Gamma \in \underline{\Gamma}$ tal que $\varphi\gamma = \varphi'\gamma$.

(2.3.3) <u>Definición</u>. Dos morfismos de tropos $\underline{\varphi}:\underline{\Gamma} \longrightarrow \underline{\Delta}$, $\underline{\psi}:\underline{\Gamma} \longrightarrow \underline{\Delta}$ son <u>equivalentes</u>, y se escribe $\underline{\varphi} \sim \underline{\psi}$ si

(4) Cuando $\varphi:\Gamma \longrightarrow \Delta \in \underline{\varphi}$, $\psi:\Gamma \longrightarrow \Delta \in \underline{\psi}$, entonces existe $\gamma:\Gamma_1 \longrightarrow \Gamma \in \underline{\Gamma}$ tal que $\varphi\gamma = \psi\gamma$.

(2.3.4) <u>Definición</u>. Dos tropos $\underline{\Gamma}$, $\underline{\Delta}$ son <u>equivalentes</u>, se escribe $\underline{\Gamma} \sim \underline{\Delta}$, si

(5) Existen morfismos de tropos $\underline{\varphi}:\underline{\Gamma}\longrightarrow\underline{\Delta}$ y $\underline{\psi}:\underline{\Delta}\longrightarrow\underline{\Gamma}$ tales que $\underline{\psi\varphi} \sim \underline{\gamma}$ y $\underline{\varphi\psi} \sim \underline{\delta}$, donde $\underline{\gamma}$, $\underline{\delta}$ son los morfismos identidad de $\underline{\Gamma}$ y $\underline{\Delta}$ respectivamente.

2.4 EL TROPO FUNDAMENTAL.

(2.4.1) <u>Definición</u>. Un grupo G junto con 1_G es un <u>tropo rudimentario</u>.

(2.4.2) <u>Definición</u>. Una representación de un tropo $\underline{\Gamma}$ en un grupo simétrico Σ_d (permutaciones de d elementos) es un morfismo de tropos $\underline{W}:\underline{\Gamma}\longrightarrow\Sigma_d$, donde Σ_d se considera un tropo rudimentario.

(2.4.3) <u>Definición</u>. Si $\underline{U}$ es un espectro de entornos abiertos conexos de un espacio X conexo por trayectorias cofinal en $\underline{U}(X,P)$ y x_0 es un punto de X , la colección de grupos fundamentales y homomorfismos $\{\pi(U,x_0),i_*\}$, donde los morfismos de enlace son de la forma $i_*:\pi(U,x_0)\longrightarrow\pi(U_1,x_0)$, con $i:U\longrightarrow U_1$ la inclusión,es un <u>tropo fundamental</u> $\underline{\pi}_{\underline{U}}(X,x_0)$ de X .

Si $\underline{U'}$ es otro espectro de entornos conexos abiertos de X cofinal en P, $\underline{\pi}_{\underline{U}}(X,x_0)$ es equivalente a $\underline{\pi}_{\underline{U}'}(X,x_0)$, razón por la cual escribiremos $\underline{\pi}(X,x_0)$ en lugar de $\underline{\pi}_{\underline{U}}(X,x_0)$.

Salvo equivalencia, $\underline{\pi}(X,x_0)$ depende sólo de X, no de P, no de x_0, ni de la forma de encajar a X en P. Justifico lo anterior. En primer lugar se prueba que si X se encaja de la misma manera en el mismo espacio $P \in ANR(\mu)$, el tropo fundamental no depende del punto base x_0. Considero $\underline{\pi}(X,x_0)$ y $\underline{\pi}(X,x_1)$. Sea α una trayectoria en X de x_0 a x_1. Para cada $U \in \underline{U}$, $f_u:\pi(U,x_0) \longrightarrow \pi(U,x_1): f_u[h] = [\bar{\alpha} * h * \alpha]$, y $g_u:\pi(U,x_1) \longrightarrow \pi(U,x_0): f_u[h] = [\alpha * h * \bar{\alpha}]$ es un isomorfismo. Las familias $\{f_u\}$ y $\{g_u\}$ determinan de manera natural dos morfismos de tropos $\varphi:\underline{\pi}(X,x_0) \longrightarrow \underline{\pi}(X,x_1)$ y $\underline{\psi}:\underline{\pi}(X,x_1) \longrightarrow \underline{\pi}(X,x_0)$ cuyas composiciones son equivalentes a la identidad en $\underline{\pi}(X,x_0)$ y $\underline{\pi}(X,x_1)$. Por lo tanto, $\underline{\pi}(X,x_0)$ y $\underline{\pi}(X,x_1)$ son equivalentes. En segundo lugar, supongamos X encajado como cerrado en dos espacios $P,Q \in ANR(\mu)$. Sea f el homeomorfismo natural de la copia de X en P a la copia de X en Q. Se probará que $\underline{\pi}(X,x_0) \sim \underline{\pi}(X,f(x_1))$. Sean $\underline{f}:\underline{U}(X,P) \longrightarrow \underline{V}(Y,Q)$ y $\underline{f}^{-1}:\underline{V}(Y,Q) \longrightarrow \underline{U}(X,P)$ extensiones de f y f^{-1} respectivamente. Se cumple $\underline{f}^{-1}\underline{f} \sim 1_{\underline{U}}$ y $\underline{f}\underline{f}^{-1} \sim 1_{\underline{V}}$. Se definen $\underline{f}_*:\underline{\pi}(X,x_0) \longrightarrow \underline{\pi}(X,f(x_0))$ y $\underline{f}_*^{-1}:\underline{\pi}(X,f(x_0)) \longrightarrow \underline{\pi}(X,x_0)$ nuevamente de la manera obvia. $\underline{f}_*$ y $\underline{f}_*^{-1}$ hacen equivalentes a $\underline{\pi}(X,x_0)$ y $\underline{\pi}(X,f(x_1))$.

CAPITULO 3

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA TEORIA DE REVESTIMIENTOS.

(3.1) Definición. Un espacio topológico Y es semilocalmente 1-conexo si cada punto $y \in Y$ tiene un entorno U tal que si $i:U \longrightarrow Y$ es la inclusión, entonces $i_*:\pi(U,y) \longrightarrow \pi(Y,y)$ es trivial.

La demostración del siguiente teorema puede verse en Spanier.

(3.2) Teorema. Sea $e:(X,x_0) \longrightarrow (Y,y_0)$ una proyección cubriente y sea Z un espacio conexo y localmente conexo por trayectorias. Una función continua $f:(Z,z_0) \longrightarrow (Y,y_0)$ tiene un levantamiento $\bar{f}:(Z,z_0) \longrightarrow (X,x_0)$ si y sólo si $f_*\pi(Z,z_0) \subseteq e_*\pi(X,x_0)$. ∎

Dos proyecciones cubrientes $e:(X,x_0) \longrightarrow (Y,y_0)$, $e':(X',x_0') \longrightarrow (Y,y_0)$ son equivalentes si existe un homeomorfismo $h:X \longrightarrow X'$ tal que $e = e'h$ y además $e_*\pi(X,x_0) = e'_*\pi(X',x_0')$.

(3.3) Teorema. Sea Y un espacio conexo, metrizable, localmente conexo por trayectorias y semilocalmente 1-conexo. Existe una correspondencia biunívoca entre los espacios cubrientes conexos por trayectorias (X,x_0) de (Y,y_0) de d hojas y los subgrupos de índice d de $\pi(Y,y_0)$, salvo equivalencias de espacios cubrientes de (Y,y_0) ∎

Si d es un cardinal mayor que 0, sea $D = \{1,\ldots,d\}$. $\sum_d$ es el grupo depermutaciones de D. Cualquier homomorfismo de $\pi(Y,y_0)$ en $\sum_d$ es llamado <u>representación</u> de $\pi(Y,y_0)$ en $\sum_d$. Una representación φ de $\pi(Y,y_0)$ en $\sum_d$ es <u>transitiva</u> si para cada par α , $\beta \in D$ existe $[w] \in \pi(Y,y_0)$ tal que $\varphi\ [w]\ (\alpha) = \beta$. Es fácil comprobar que una representación φ de $\pi(Y,y_0)$ en $\sum_d$ es transitiva si y sólo si para cada $\alpha \in D$ existe $[w] \in \pi(Y,y_0)$ tal que $\varphi\ [w]\ (1) = \alpha$.

(3.4) <u>Lema</u>. Sea $e:X \longrightarrow Y$ una proyección cubriente con Y conexo, localmente conexo por trayectorias y semilocalmente 1-conexo. Si $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de Y cuyos elementos son conexos y además la inclusión i de U en Y induce el homomorfismo $i_*:\pi(U,y) \longrightarrow \pi(Y,y)$ trivial para cada $U \in \mathcal{U}$, $y \in U$, entonces $\mathcal{U}$ está bien cubierta por e.

Dem: Consideremos $y \in U \in \mathcal{U}$. Por el teorema (3.3) existe para cada $x_\alpha \in e^{-1}(y)$ un levantamiento $f_\alpha:U \longrightarrow X$ de la inclusión $i:U \longrightarrow Y$ con $f_\alpha(y) = x_\alpha$. La familia $\{f_\alpha(U)\}$ cubre bien a U. ∎

(3.5) <u>Lema</u>. Sea Y un espacio metrizable, conexo, localmente conexo por trayectorias y semilocalmente 1-conexo. Existe una correspondencia biunívoca entre las representaciones transitivas de $\pi(Y,y_0)$ en $\sum_d$ (salvo automorfismos internos de $\sum_d$) y los espacios cubrientes conexos por trayectorias (X,x_0) de (Y,y_0) de d hojas (salvo equivalencias de espacios cubrientes de (Y,y_0)).

Dem: Dada una representación transitiva $\varphi:\pi(Y,y_0) \longrightarrow \sum_d$ consideremos $H^\varphi = \{[w] \in \pi(Y,y_0) : \varphi\ [w]\ (1) = 1\}$. H^φ es subgrupo de índice d de $\pi(Y,y_0)$, pues $[w'] \in [w]H^{\varphi}$ si y sólo si $\varphi\ [w']\ (1) = \varphi\ [w]\ (1)$. Supongamos ahora que $H^{\varphi} = H^{\psi}$. Entonces definimos $\sigma \in \sum_d$ como sigue: $\sigma(\alpha) = \beta$ si existe $[w] \in \pi(Y,y_0)$ tal que $\varphi\ [w]\ (1) = \alpha$ y $\psi\ [w]\ (1) = \beta$. σ está bien definida pues si $\varphi\ [w]\ (1) = \varphi\ [w']\ (1)$, se cumple entonces que $\varphi\ [w'^{-1} * w]\ (1) = 1 = \psi\ [w'^{-1} * w]\ (1)$, pues $H^{\varphi} = H^{\psi}$. Se sigue que $\psi\ [w]\ (1) = \psi\ [w']\ (1)$. Nótese que $\sigma\ \varphi\ [w]\ (1) = \psi\ [w]\ (1)$. Por otra parte, dado $\alpha \in D$ y $[w'] \in \pi(Y,y_0)$ con $\varphi\ [w']\ (1) = \alpha$,

$$\sigma\ \varphi\ [w * w']\ (1) = \psi\ [w * w']\ (1),$$

$$\sigma\ \varphi\ [w]\ (\alpha) = \psi\ [w]\ \sigma(\alpha),$$

$$\text{de donde } \varphi\ [w]\ (\alpha) = \sigma^{-1}\ \psi\ [w]\ \sigma\ (\alpha),$$

se tiene entonces que φ y ψ difieren por un automorfismo interno de $\sum_d$, y para nuestros fines serán consideradas como la misma representación. Entonces se tiene una función inyectiva que asocia a cada representación transitiva φ de $\pi(Y,y_0)$ en $\sum_d$ el subgrupo H^{φ} de $\pi(Y,y_0)$ de índice d. Por otra parte, si H es un subgrupo de índice d de $\pi(Y,y_0)$, utilizando el teorema (3.2), existe una proyección cubriente $e:(X,x_1) \longrightarrow (Y,y_0)$ con X conexo por trayectorias y $e_*(\pi(X,x_1) = H$. Se define $\varphi_e : \pi(Y,y_0) \longrightarrow \sum_d$ como sigue: $\varphi_e\ [w]\ (\alpha) = \beta$ si el levantamiento de w que inicia en x_{α} termina en x_{β}. φ_e es una representación transitiva y $H^{\varphi_e} = H$. Entonces la correspondencia $\varphi \longrightarrow H^{\varphi}$ es biyectiva entre las representaciones transitivas de $\pi(Y,y_0)$ en $\sum_d$ y los subgrupos de índice d de $\pi(Y,y_0)$, y en virtud del teorema (3.2), hay también una correspondencia biyectiva entre las representaciones transitivas de $\pi(Y,y_0)$ en $\sum_d$ y los espacios cubrientes conexos por trayectorias de d hojas de $\pi(Y,y_0)$. ■

(3.6) <u>Teorema</u> (Teorema fundamental de la teoría de los espacios cubrientes). Sea Y un espacio conexo, localmente conexo por trayectorias y semilocalmente 1-conexo. Existe entonces una correspondencia biunívoca entre los espacios cubrientes (X,x_0) de (Y,y_0) de d hojas y las representaciones de $\pi(Y,y_0)$ en $\sum_d$ (salvo automorfismos internos de $\sum_d$ y equivalencias de espacios cubrientes de (Y,y_0)).

Dem: Dada una representación arbitraria $\varphi:\pi(Y,y_0)\longrightarrow\sum_d$ se define una relación $\sim$ entre los elementos de D como sigue: $\alpha \sim \beta$ si existe $[w] \in \pi(Y,y_0)$ tal que $\varphi\,[w]\,(\alpha) = \beta$. La relación $\sim$ es de equivalencia y determina una partición $\{D_{\eta 1},\ldots,D_{\eta k}\}$ de D. Sea $\sum_{d_i}$ el grupo de permutaciones de los elementos de $D_{\eta i}$ para cada $i \in \{1,\ldots,k\}$. φ determina $\varphi_i:\pi(Y,y_0)\longrightarrow\sum_{d_i}$ que es una representación transitiva para cada i. Para cada φ_i hay asociado por el lema (3.3) un único espacio cubriente $e_i:(X_i,x_i)\longrightarrow(Y,y_0)$ conexo por trayectorias de $\#\,(D_{\eta i})$ hojas. Definimos X como $X = \coprod X_i$ y $e:X\longrightarrow Y$ dada por $e(x) = e_i(x)$ si $x \in X_i$. e es una función continua y de hecho es una proyección cubriente, pues por el lema (3.4) existe una cubierta abierta $\mathcal{U}$ bien cubierta por cada e_i y por lo tanto $\mathcal{U}$ está bien cubierta por e. Supongamos que $1 \in D_{\eta 1}$, sea entonces $x_0 = x_1$. $e:(X,x_0)\longrightarrow(Y,y_0)$ es única salvo automorfismos y equivalencias porque así es componente a componente. ∎

(3.7) <u>Teorema</u> (Teorema fundamental de la teoría de revestimientos). Sea Y cualquier espacio metrizable y conexo por trayectorias. Existe entonces una correspondencia biunívoca entre los revestimientos (X,x_0) de (Y,y_0) de d hojas y las representaciones de $\underline{\pi}(Y,y_0)$ en $\sum_d$ (salvo automorfismos internos de $\sum_d$ y equivalencias de revestimientos de (Y,y_0)).

Dem: Sea Y metrizable y conexo por trayectorias. Supongamos Y encajado como cerrado de $Q \in ANR(\mu)$, con Q convexo y localmente convexo. Q y cualquier abierto conexo de Q que contenga a Y es conexo, localmente conexo por trayectorias y semilocalmente 1-conexo. Sea $\underline{\varphi}:\underline{\pi}(Y,y_0)\longrightarrow\sum_d$ una representación. Considérese cualquier $\varphi:\pi(V,y_0)\longrightarrow\sum_d \in \underline{\varphi}$. Por el teorema (3.6) existe salvo equivalencias una única proyección cubriente $e_0:(U,x_0)\longrightarrow(V,y_0)$ asociada a φ. Por (1.3.2) e_0 es revestimiento. Aplicando ahora (1.0.3) se tiene que $e_0|e_0^{-1}(Y):e_0^{-1}(Y)\longrightarrow Y$ es proyección cubriente, y de hecho revestimiento. Escribiendo $e_{\underline{\varphi}} = e_0|e_0^{-1}(Y)$ y $X = e_0^{-1}(Y)$ se tiene que $e_{\underline{\varphi}}$ es el revestimiento asociado a $\underline{\varphi}$. Veremos que $e_{\underline{\varphi}}$ está bien definido. Si hacemos otra elección $\varphi':\pi(V',y_0)\longrightarrow\sum_d \in \underline{\varphi}$, existen $\pi(V'',y_0)$, i_*, $i'_* \in \underline{\pi}(Y,y_0)$ tales que $\varphi i_* = \varphi i'_*$. De ahí se sigue que $e_0|e_0^{-1}(U''):(e_0^{-1}(U''),x_0)\longrightarrow(U'',y_0)$ y $e'_0|e_0'^{-1}(U''):(e_0'^{-1}(U''),x'_0)\longrightarrow(U'',y_0)$ son equivalentes y por lo tanto $e_{\underline{\varphi}}$ y $e_{\underline{\varphi}'}$ son equivalentes. Por lo tanto la correspondencia $\underline{\varphi} \longrightarrow e_{\underline{\varphi}}$ está bien definida. De manera similar se prueba que es uno a uno. Por otra parte, si $e:(X,x_0)\longrightarrow(Y,y_0)$ es un revestimiento, por el teorema de extensión e puede extenderse a un revestimiento $f:(U,x_0)\longrightarrow(V_0,y_0)$ con V_0 abierto conexo de Q.

La familia de las restricciones $f|f^{-1}(V):(f^{-1}(V),x_o)\longrightarrow(V,y_o)$ donde V es abierto conexo contenido en V' determina de manera natural una representación $\underline{\varphi}:\underline{\pi}(Y,y_o)\longrightarrow\sum_d$ tal que e es equivalente a $e_{\underline{\varphi}}$. ■

Bibliografía.

[1] García, Armando. Metrización y particiones de la unidad. Tesis de licenciatura, UNAM, 1991

[2] Kelley, John L. General Topology, Van Nostrand, 1955.

[3] Kosniowski, Czes. Topología Algebráica, Reverté, 1986.

[4] Mardešic S. Segal J. Shape theory. The inverse sistem approach, North Holland, 1982.

[5] Massey, William S. Introducción a la Topología Algebráica, Reverté, 1982.

[6] Willard, Stephen. General Topology, Addison-Wesley, 1970.

[7] Spanier, Edwin H. Algebraic Topology, McGraw Hill, 1966.

Artículos.

[8] Fox, Ralph H. On Shape, Fundamenta Mathematicae, LXXIV, 1972, p.p. 47-71.

[9] Fox, Ralph H. Shape Theory and Covering Spaces, Lecture Notes in Mathematics 375, 1974, p.p. 77-90.

[10] Moore, Thomas T. On Fox's Theory of Overlays, Fundamenta Mathematicae XCIX, 1978, p.p. 205-211.

[11] Zabrodsky, A. Covering spaces of paracompact spaces, Pacific Journal of Mathematics, Vol, 14, 1964, p.p. 1489-1503.