UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Propiedades de Whitney en el Hiperespacio C(X)

Tesis

que para obtener el título de

matemático

presenta

Fernando Orozco Zitli

Diciembre de 1992

Introducción.

Sea X un continuo, C(X) el hiperespacio de subcontinuos de X (definición 0.1) y $\mu : C(X) \to [0,\infty)$ una función de Whitney (def. 0.1.2). Estamos interesados en el siguiente problema

¿ cuáles propiedades topologícas de X son propiedades de Whitney ?

Decimos que P es una propiedad de Whitney si siempre que X tiene la propiedad P, $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad P para toda μ función de Whitney y para toda $t \in [0,\mu(X)]$.

En esta tesis estamos interesados en las siguientes propiedades de Whitney.

PROPIEDADES TOPOLOGICAS DE X	SE DEMUESTRA EN	REFERENCIA.
CONTINUO	CAPITULO 1	NADLER
LOCALMENTE CONEXO	CAPITULO 2	NADLER1
CONEXO POR ARCOS	CAPITULO 3	NADLER, PETRUS
ARCO	CAPITULO 3	NADLER
DESCOMPONIBLE	CAPITULO 4	NADLER, PETRUS
HEREDITARIAMENTE INDESCOMPONIBLE	CAPITULO 4	NADLER
APOSINDETICO	CAPITULO 5	PETRUS
FINITAMENTE APOSINDETICO	CAPITULO 5	PETRUS
MUTUAMENTE APOSINDETICO	CAPITULO 5	PETRUS

Indice

Preliminares

0.1 Hechos Básicos y Notación.

Con la palabra *continuo* denominamos a cualquier espacio métrico compacto y conexo conteniendo más de un punto. A menos que se diga otra cosa denotaremos por X un continuo con métrica d. Un *subcontinuo* A de X es un subespacio conexo y compacto de X. Sea

$$2^X = \{ A \subseteq X \mid A \text{ es no vacío y compacto}\}$$

$$C(X) = \{ A \in 2^X \mid A \text{ es conexo } \}$$

Una métrica esta definida para 2^X como sigue:

(0.1.1) **DEFINICION** Si $\epsilon > 0$ y $A \in 2^X$, entonces

$$N_d(\epsilon,A) = \{ x \in X \mid d(x,a) < \epsilon \text{ para algún } a \in A \}.$$

Note que $N_d(\varepsilon,A) = \bigcup_{a\in A} B_d(\varepsilon,a)$.

Si $A, B \in 2^X$, entonces definimos

$$\rho(A,B) = \inf\{ \epsilon > 0 \mid A \subseteq N_d(\epsilon,B) \text{ y } B \subseteq N_d(\epsilon,A) \}$$

es llamada la *Métrica de Hausdorff inducida para 2^X por d*.

Es fácil checar que la función $\rho : 2^X \times 2^X \to [0,\infty)$ es una métrica para 2^X. CONVENCION. Se denota por 2^X al conjunto que definimos arriba con la topología obtenida mediante la métrica de Hausdorff. Por C(X) al espacio con la topología relativa heredada por 2^X. Los espacios C(X) y 2^X son llamados *Hiperespacios de* X.

Es sabido (ver [Nadler,0.8]) que los espacios 2^X y C(X) son compactos.

(0.1.2) **DEFINICION.** Sea $\nabla = 2^X$ ó C(X). Por un *Mapeo de Whitney para* ∇ entendemos una función continua $\mu : \nabla \to [0,\infty)$ que satisface:

a) si $A, B \in \nabla$ son tales que $A \subseteq B$ y $A \neq B$, entonces $\mu(A) < \mu(B)$,

b) $\mu(\{x\}) = 0$ para cada $x \in X$.

Ejemplos de Mapeos de Whitney ver [Nadler]. Denotaremos μ un Mapeo de Whitney para C(X), a todo lo largo de este trabajo.

(0.1.3) **DEFINICION.** Si $A \subseteq X$, entonces $C(A) = \{ Y \in C(X) \mid Y \subseteq A \}$ es el hiperespacio de A.

Sea μ cualquier mapeo de Whitney para C(X) y dada $t \in [0,\mu(X)]$, sea $C(A,t) = \{ Y \in \mu^{-1}(t) \mid Y \subseteq A\}$ y $C^t_A = \{ Y \in \mu^{-1}(t) \mid A \subseteq Y \}$.

(0.1.4) **DEFINICION.** Sea $A_n \in 2^X$ para $n \in \mathbb{N}$. Entonces definimos:

lim inf $A_n = \{ x \in X \mid$ para toda $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$, para casi toda n (todas salvo un número finito) $\}$.

lim sup $A_n = \{ x \in X \mid$ para toda $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$, para una infinidad de n's $\}$. Observese que **lim inf** $A_n \subseteq$ **lim sup** A_n.

(0.1.5) **TEOREMA** [Nadler] $x \in \lim\inf A_n$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X tal que $x_n \to x$ y $x_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

(0.1.6) **TEOREMA** [Nadler,0.7] Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq 2^X$, entonces A_n converge con la métrica de Hausdorff a un $A \in 2^X$ si y sólo si $\lim\inf A_n = A = \lim\sup A_n$.

(0.1.7) **DEFINICION.** (PROPIEDAD DE KELLEY) Se dice que X tiene la propiedad de Kelley si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $a, b \in X$ con $d(a,b) < \delta$ y $a \in A \in C(X)$, entonces existe $B \in C(X)$ tal que $b \in B$ y $H(A,B) < \varepsilon$.

(0.1.8) **DEFINICION.** Sea X un continuo y sea $p \in X$. Definimos la *composante* K *en* X *de* p como :

$K = \{ x \in X \mid$ existe un subcontinuo propio A de X tal que $p, x \in A \}$

(0.1.9) **DEFINICION.** Una función continua, sobre $f : X \to Y$ se dice *monótona* si $f^{-1}(y)$ es conexo para cada $y \in Y$.

(0.1.10) **DEFINICION.** Sea $f : X \to Y$ y $A \subseteq X$, usaremos $f|_A$ (la restricción de f a A) para denotar la función de A sobre Y definida por $(f|_A)(x) = f(x)$, para cada $x \in A$.

(0.1.11) **TEOREMA.** Si $A \subseteq X$ y $f : X \to Y$ es continua, entonces $f|_A : A \to Y$ es continua.

(0.1.12) **TEOREMA.** Sea $f : X \to \mathbb{R}$ continua con X conexo. Si $f(x) < c < f(x)$, entonces existe $z \in X$ tal que $f(z) = c$.

(0.1.13) **LEMA.** Sea μ un mapeo de Whitney cualquiera para C(X). Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $K \in C(X)$ y $\text{diam}[K] < \delta_1$, entonces $\mu(K) < \varepsilon$.

Demostración.

Dado que μ es uniformemente continua, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $\rho(H,L) < \delta_1$, entonces $| \mu(H) - \mu(K) | < \varepsilon$. Ahora, sea $K \in C(X)$ tal que $\text{diam}[K] < \delta_1$ y sea k un punto fijo de K, entonces $\rho(K,\{k\}) < \delta_1$. Así $| \mu(K) - \mu(\{k\}) | < \varepsilon$, es decir, $\mu(K) < \varepsilon$ (pues $\mu(\{k\}) = 0$).

(0.1.14) **LEMA.** Sea $H \in C(X)$ y sea $\sigma : [0,1] \to C(X)$ una función continua. Sea $\Lambda = \{ H \cup \sigma(s) \mid 0 \leq s \leq 1 \}$ y sea $f : [0,1] \to \Lambda$ la función definida por $f(s) = H \cup \sigma(s)$. Entonces f es continua.

Demostración.

Sea $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en [0,1] que converge a s_0.

Se demostrará que $f(s_n)$ convege a $f(s_0)$, es decir, $H \cup \sigma(s_n)$ converge a $H \cup \sigma(s_0)$. Para esto basta demostrar (por terema 0.1.6) que $\liminf [H \cup \sigma(s_n)] = H \cup \sigma(s_0) = \limsup [H \cup \sigma(s_n)]$, es decir, demostrar lo siguiente :

i) $\lim\sup [H \cup \sigma(\Delta_n)] \subseteq [H \cup \sigma(\Delta_0)]$

ii) $[H \cup \sigma(\Delta_0)] \subseteq \lim\inf [H \cup \sigma(\Delta_n)]$.

Demostración de la parte (i). Sea $\alpha \in \lim\sup [H \cup \sigma(\Delta_n)]$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(\alpha) \cap [H \cup \sigma(\Delta_n)] \neq \emptyset$, para una infinidad de n's. Ahora consideremos 2 casos :

Caso I. Si $B_\varepsilon(\alpha) \cap H \neq \emptyset$ para cada $\varepsilon > 0$, entonces $\alpha \in H^- = H$. Así $\alpha \in [H \cup \sigma(\Delta_0)]$.

Caso II. Si $B_\varepsilon(\alpha) \cap \sigma(\Delta_n) \neq \emptyset$ para cada $\varepsilon > 0$, para una infinidad de n's, entonces $\alpha \in \sigma(\Delta_0)$. Así $\alpha \in [H \cup \sigma(\Delta_0)]$.

Ahora demostraremos (ii). Sea $\alpha \in [H \cup \sigma(\Delta_0)]$. Si $\alpha \in H$, entonces $B_\varepsilon(\alpha) \cap H \neq \emptyset$. Así que $B_\varepsilon(\alpha) \cap [H \cup \sigma(\Delta_n)] \neq \emptyset$, para toda $n \in \mathbb{N}$ y para toda $\varepsilon > 0$. De manera que $\alpha \in \lim\inf [H \cup \sigma(\Delta_n)]$.

Si $\alpha \in \sigma(\Delta_0) = \lim\inf \sigma(\Delta_n)$, entonces $B_\varepsilon(\alpha) \cap \sigma(\Delta_n) \neq \emptyset$, para toda $n > N$. Así $B_\varepsilon(\alpha) \cap [H \cup \sigma(\Delta_n)] \neq \emptyset$, para toda $n > N$. Demanera que $\alpha \in \lim\inf [H \cup \sigma(\Delta_n)]$.

Como $\lim\inf [H \cup \sigma(\Delta_n)] = H \cup \sigma(\Delta_0)$ (parte (i) y (ii)) y

$$\lim\inf [H \cup \sigma(\Delta_n)] \subseteq \lim\sup [H \cup \sigma(\Delta_n)],$$

$[H \cup \sigma(\Delta_0)] \subseteq \lim\sup [H \cup \sigma(\Delta_n)]$. Así por la parte (i) tenemos que limi $\sup [H \cup \sigma(\Delta_n)] = H \cup \sigma(\Delta_0)$.

Por tanto $\lim\inf [H \cup \sigma(\Delta_n)] = \lim\sup [H \cup \sigma(\Delta_n)] = H \cup \sigma(\Delta_0)$.

Así que tenemos la continuidad de f.

(0.1.15) **LEMA** [1]. Si $\varepsilon > 0$, entonces existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $A, B \in \mu^{-1}(t)$ para algún $t \in [0.1]$ y $\rho(A,B) < \delta$, entonces $\rho(A',B') < \varepsilon$ para cada $A', B' \in \mu^{-1}(t) \cap C(A \cup B)$.

(0.1.16) **TEOREMA** [Krasinkiewicz]. Sea μ un mapeo de Whitney y $t \in [0,1]$, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe un número $\eta > 0$ tal que, para $A, B \in \mu^{-1}(t)$, si $B \subseteq N_d(\eta, A)$, entonces $\rho(A,B) < \varepsilon$.

Demostración.

Supongamos lo contrario, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, existen continuos $A_n, B_n \in \mu^{-1}(t)$ tales que $B_n \subseteq N_d(1/n, A_n)$ y $\rho(A_n, B_n) \geq \epsilon$. Como $\mu^{-1}(t)$ es compacto, podemos suponer que $A_n \to A$ y $B_n \to B$, con $A, B \in \mu^{-1}(t)$. Por la continuidad de la métrica de Hausdorff $\rho(A,B) \geq \epsilon$ y $B \subseteq A$ ya que $B_n \subseteq N_d(1/n, A_n)$. Entonces B es un subcontinuo propio de A, y por tanto $\mu(B) < \mu(A)$, lo cual es una contradicción.

(0.1.17) **TEOREMA** [Nadler,20.6]. Sea (M,d) un espacio métrico compacto. Si A y B son subcontinuos cerrados de M tal que ningun subconjunto conexo de M intersecta a A y B, entonces existen subconjuntos ajenos compactos, M_1 y M_2 de M tal que $A \subseteq M_1$, $B \subseteq M_2$ y $M = M_1 \cup M_2$.

(0.1.18) **TEOREMA** [Nadler,20.1]. Sea X un continuo y sea U un subconjunto abierto no vacío de X. Si K es componente de $\overline{U}$, entonces $K \cap \mathrm{Fr}[U] \neq \emptyset$

0.2 Segmentos y Arcos Ordenados.

Iniciamos la discución de la estructura de los arcos con las siguientes definiciones.

(0.2.0) **DEFINICION.** Sea μ un Mapeo de Whitney para 2^X. Sea A_0, $A_1 \in 2^X$. Se dice que una función $\sigma : [0,1] \to 2^X$ es un *segmento con respecto a μ de A_0 a A_1*, si

i) σ es continua sobre $[0,1]$;

ii) $\sigma(0) = A_0$ y $\sigma(1) = A_1$;

iii) $\mu(\sigma(t)) = (1-t)\,\mu(\sigma(0)) + t\,\mu(\sigma(1))$ para cada $t \in [0,1]$;

iv) si $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$, entonces $\sigma(t_1) \subseteq \sigma(t_2)$.

(0.2.1) **DEFINICION** Un *arco ordenado* en 2^X es un arco α en 2^X tal que si A, $B \in \alpha$, entonces $A \subseteq B$ ó $B \subseteq A$.

(0.2.2) **TEOREMA** [Nadler 1.25]. Sean A_0, $A_1 \in 2^X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) Existe un segmento en 2^X de A_0 a A_1,

ii) $A_0 \subseteq A_1$ y cada componente de A_1 intersecta a A_0.

Además si $A_0 \neq A_1$, entonces las dos afirmaciones anteriores son equivalentes con la siguiente,

iii) existe un arco ordenado α en 2^X de A_0 a A_1.

(0.2.3) **TEOREMA** [Nadler 1.26]. Si $\sigma : [0,1] \to 2^X$ es un segmento tal que $\sigma(t_0) \in C(X)$ para algún $t_0 \in [0,1]$, entonces $\sigma(t) \in C(X)$ para cada $t \in [t_0,1]$. Por tanto, si $\sigma(0) \in C(X)$, entonces $\sigma([0,1]) \subseteq C(X)$.

(0.2.4) **LEMA** [Nadler,1.3] Sea $\nabla \subseteq 2^X$ tal que para cada A, B $\in \nabla$, se tiene que A $\subseteq$ B o B $\subseteq$ A. Entonces μ es uno auno sobre ∇ y por tanto, si ∇ es compacto, la restricción de μ a ∇ es un homeomorfismo.

(0.2.5) **TEOREMA** [Nadler,1.4]. Sea ∇ un subcontinuo de 2^X. Entonces ∇ es un arco ordenado si y sólo si A, B $\in \nabla$ implica A $\subseteq$ B o B $\subseteq$ A.

(0.2.6) **LEMA** [Nadler,1.5]. Si α es un arco ordenado en 2^X, entonces $[\cap\alpha] \in \alpha$ y $[\cup\alpha] \in \alpha$.

(0.2.7) **TEOREMA** [Nadler,1.6] Si α es un arco ordenado en 2^X, entonces los dos puntos extremos de α son $[\cap\alpha]$ y $[\cup\alpha]$.

(0.2.8) **DEFINICION**. S α es un arco ordenado en 2^X, entonces se dice que α es un arco ordenado de (o, empieza con) $[\cap\alpha]$ a (o, termina con) $[\cup\alpha]$.

(0.2.9) **TEOREMA** [Nadler,1.8].

Sean A_0, $A_1 \in 2^X$ tales que $A_0 \neq A_1$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) Existe un arco ordenado en 2^X de A_0 a A_1;

ii) $A_0 \subseteq A_1$ y cada componente de A_1 intersecta a A_0.

Demostración

i) $\Rightarrow$ ii)] Sea α un arco ordenado en 2^X de A_0 a A_1, por 0.2.7 y 0.2.8, $A_0 = \bigcap \alpha$ y $A_1 = \bigcup \alpha$, así $A_0 \subseteq A_1$.

Ahora supóngase que existe una componente L de A_1 tal que $L \cap A_0 = \emptyset$. Entonces ningún subconjunto conexo de A_1 intersecta a A_0 y L (Pues si existiera H conexo en A_1 tal que $H \cap A_0 \neq \emptyset$ y $H \cap L \neq \emptyset$, entonces

$H \cup L$ es conexo, pero L es un conexo máximo, así que $H \subseteq L$, de aquí que $L \cap A_0 \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción).

Por el teorema (0.1.17), existen subconjuntos ajenos compactos B_0 y B_1 de A_1 tal que $A_0 \subseteq B_0$, $L \subseteq B_1$ y $A_1 = B_0 \cup B_1$. Sea $\beta_0 = \{A \in \alpha \mid A \subseteq B_0\}$ y $\beta_1 = \{ A \in \alpha \mid A \cap B_1 \neq \emptyset \}$. Claramente β_0 y β_1 son distintos del vacío (pues $A_0 \in \beta_0$ y $A_1 \in \beta_1$). Dado que $B_0 \cap B_1 = \emptyset$, entonces $\beta_0 \cap \beta_1 = \emptyset$. Ahora se asegura que β_0, β_1 son cerrados en 2^X (en efecto, si $\{ C_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en β_0 tal que $C_n \to C$, como α es cerrado, $C \in \alpha$; ahora como $C_n \subseteq B_0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $C \subseteq B_0$. De manera similar se prueba que β_1 es cerrado). Ahora verifiquemos que $\beta_0 \cup \beta_1 = \alpha$. Dado que $A \subseteq A_1$ y $A_1 = B_0 \cup B_1$, por cada $A \in \alpha$, se tiene que $\alpha \subseteq \beta_0 \cup \beta_1$. Y dado que $\beta_0 \cup \beta_1 \subseteq \alpha$ tenemos que $\alpha = \beta_0 \cup \beta_1$, así tendría una separación de α. Lo cual es imposible pues α es un conexo. Por tanto, cada componente de A_1 intersecta a A_0.

ii $\Rightarrow$ i] Supóngase que $A_0 \neq A_1$.

Sea $\mathcal{F}$, la familia de todos los subconjuntos Γ de 2^X que tienen las siguientes tres propiedades:

1) Si $G \in \Gamma$, entonces $A_0 \subseteq G \subseteq A_1$.

2) Si $G \in \Gamma$, entonces cada componente de G intersecta a A_0.

3) Si $G, H \in \Gamma$, entonces $H \subseteq G$ ó $G \subseteq H$.

Note que $\mathcal{F}$ es no vacío pues $\{ A_0, A_1 \} \in \mathcal{F}$.

Dado que la unión de cualquier cadena ascendente de elementos de $\mathcal{F}$, es de nuevo un elemento de $\mathcal{F}$, se sigue por el lema de Zorn, existe un elemento Γ_0 maximal de $\mathcal{F}$.

Se probará que Γ_0 es un arco ordenado de A_0 a A_1.

Afirmación: si $\Gamma \in \mathcal{F}$, entonces $\overline{\Gamma} \in \mathcal{F}$.

Demostraremos que $\overline{\Gamma}$ cumple (1), (2), (3).

Sea $G \in \overline{\Gamma}$, entonces existe una sucesión $\{ G_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ con $G_n \in \Gamma$ tal que

$G_n \to G$. Como $A_0 \subseteq G_n \subseteq A_1$, por cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $A_0 \subseteq G \subseteq A_1$. Así se cumple (1).

Sea K cualquier componente de G. Sea $k \in K$, entonces existen $k_n \in G_n$ tal que $\{ k_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a k.

Sea K_n componente de G_n tal que $k_n \in K_n$. Dado que 2^X es compacto se puede suponer que $\{ K_n \}$ converge, digamos a K_0. Así $k \in K_0$, pero K es el máximo conexo que contiene a k, así que $K_0 \subseteq K$. Ahora dado que $K_n \cap A_0 \neq \emptyset$, por cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $K_0 \cap A_0 \neq \emptyset$. Por tanto $K_0 \cap A_0 \neq \emptyset$. Así se cumple (2).

Sean $G, H \in \Gamma^-$, y sean $\{ G_n \}$, $\{ H_n \}$ sucesiones, con G_n, $H_n \in \Gamma$, tal que $G_n \to G$, y $H_n \to H$. Dado que G_n, $H_n \in \Gamma$, se tiene que $G_n \subseteq H_n$ ó $H_n \subseteq G_n$. Ahora considremos dos casos:

Caso I. Supongamos que $G_n \subseteq H_n$ para cualquier $n \in \Xi \subseteq \mathbb{N}$ (Ξ infinito), así

$\lim\inf G_n = \lim\sup G_n = G \subseteq \lim\inf H_n = \lim\sup H_n = H$, es decir, $G \subseteq H$.

Caso II. Supongamos que $H_n \subseteq G_n$ para cualquier $n \in O \subseteq \mathbb{N}$ (O infinito), así

$\lim\inf H_n = \lim\sup H_n = H \subseteq \lim\inf G_n = \lim\sup G_n = G$, es decir, $H \subseteq G$. Así, considerando los dos casos anteriores se tiene que se cumple (3).

Por lo anterior $\Gamma_0^- \in \mathcal{F}$, pero Γ_0 es un elemento máximo de $\mathcal{F}$, así que $\Gamma_0 = \Gamma_0^-$, es decir, Γ_0 es cerrado en 2^X. Por tanto Γ_0 es compacto (pues 2^X es compacto).

Sea $W_0 = \mu|_{\Gamma_0}$. Se afirma que W_0 es un homemorfismo sobre su imagen.

Primero se verá que W_0 es inyectiva.

Sean $G, H \in \Gamma_0$, $G \neq H$, entonces $G \subsetneq H$ ó $H \subsetneq G$. Así que $W_0(G) < W_0(H)$ o

$W_0(H) < W_0(G)$, es decir, para cada G, $H \in \Gamma_0$, se tiene que $W_0(H) \neq W_0(G)$ por tanto W_0 es inyectiva.

Dado que Γ_0 es compacto, $W_0(\Gamma_0)$ es T_2 y W_0 es continua, entonces W_0 es una función cerrada. Así W_0 es un homeomorfismo sobre su imagen.

Note que, por ser Γ_0 elemento máximo, se debe tener que A_0, $A_1 \in \Gamma_0$.

Puesto que W_0 es un mapeo de Whitney, y Γ_0 satisface la condición (1) tenemos que :

$$W_0(\Gamma_0) \subseteq [\ W_0(A_0), W_0(A_1)\ ].$$

Para ver que Γ_0 es un arco ordenado, sólo hay que mostrar que :

$$(**)\ldots[\ W_0(A_0), W_0(A_1)\ ] \subseteq W_0(\Gamma_0).$$

Supóngase que es falso (**).

Entonces existe $k \in [\ W_0(A_0), W_0(A_1)\ ]\backslash W_0(\Gamma_0)$, y como $[\ W_0(A_0), W_0(A_1)\ ]\backslash W_0(\Gamma_0)$ es un abierto en $[W_0(A_0), W_0(A_1)]$ (pues $W_0(\Gamma_0)$ es cerrado), existe un intervalo abierto (r_0, t_0) contenido en $[\ W_0(A_0), W_0(A_1)\ ]\backslash W_0(\Gamma_0)$. Podemos suponer además que r_0, $t_0 \in W_0(\Gamma_0)$.

$$\underset{W_0(A_0)}{[}\!\!\text{———————}\!\!\underset{r_0}{(}\quad \underset{s}{+}\quad \underset{t_0}{)}\!\!\text{——————————————}\!\!\underset{W_0(A_1)}{]}$$

Así sean R_0, $T_0 \in \Gamma_0$ tal que $W_0(R_0) = r_0$, $W_0(T_0) = t_0$.

Ahora a partir de R_0 y T_0 construiremos un elemento Γ_1 de $\mathcal{F}$ que contiene propiamente a Γ_0, lo cual nos llevará a una contradicción.

Dado que $r_0 < t_0$, entonces la contención $R_0 \subset T_0$ es propia. Ya que μ es un Mapeo de Whitney.

Ya que $R_0 \subseteq T_0$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $N(\varepsilon, R_0)^{-}$, no contiene a T_0. Sea $\mathbf{p} \in [T_0 \backslash N(\varepsilon, R_0)^{-}]$ y K la componente de T_0 que contiene a $\mathbf{p}$.

Por (2) $K \cap A_0 \neq \emptyset$. Dado que $A_0 \subseteq R_0$ pues Γ_0 cumple (1), $K \cap R_0 \neq \emptyset$.

Sea $\mathbf{q} \in K \cap R_0$ y $U = N(\varepsilon, R_0) \cap K$. Claramente $U \neq \emptyset$, pues $\mathbf{q} \in U$. Además U es abierto en K. Así sea M la componente de U^{-} que contiene a $\mathbf{q}$.

Por teorema (0.1.18), tenemos que

[a] $M \cap Fr_K(U) \neq \emptyset$, donde Fr_K denota la frontera en K.

Sea $G_0 = R_0 \cup M$. Sea $\Gamma_1 = \Gamma_0 \cup \{ G_0 \}$. Se demostrará que Γ_1 satisface desde (1) hasta (3), es decir, $\Gamma_1 \in \mathcal{F}$.

Para esto, primero note que:

(i) $R_0 \subseteq G_0$

y por [a] se tiene que

(ii) $R_0 \neq G_0$.

También, dado que $M \subseteq K \subseteq T_0$ y $R_0 \subseteq T_0$, se tiene que

(iii) $G_0 \subseteq T_0$

y ya que $p \in [T_0 \setminus G_0]$, se obtiene que

(iv) $G_0 \neq T_0$.

Dado que R_0, $T_0 \in \Gamma_0$ y $R_0 \subseteq T_0$, se tiene que

(v) $A_0 \subseteq R_0 \subseteq G_0 \subseteq T_0 \subseteq A_1$ (pues $\Gamma_0 \in \mathcal{F}$).

Ahora por (i), (ii) y (v), $A_0 \subseteq G_0 \subseteq A_1$. Así Γ_1 cumple (1).

Dado que $G_0 = R_0 \cup M$ y dado que M es conexo y $M \cap R_0 \neq \emptyset$ (pues $q \in M \cap R_0$) se tiene que cada componente de G_0 contiene una componente de R_0.

Pero cada componente de R_0 intersecta a A_0, ya que por (2), cada componente de G_0 intersecta a A_0. Así Γ_1 cumple (2).

Dado que Γ_0 cumple (3), W_0 es un mapeo de Whitney y por la propiedad (*), si $G \in \Gamma_0$, entonces $G \subseteq R_0$ ó $T_0 \subseteq G$. Y Como $R_0 \subseteq G_0$ y $G_0 \subseteq T_0$ (por (i) y (iii)), $G \subseteq G_0$ ó $G_0 \subseteq G$. Así Γ_1 cumple (3).

Dado que $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1$ y Γ_0 es elemento máximo en $\mathcal{F}$, se tiene que $\Gamma_1 = \Gamma_0$. Por tanto $G_0 \in \Gamma_0$. Por (i) hasta (iv) se tiene que $r_0 < W_0(G_0) < t_0$, lo cual contradice la propiedad de que, $s \notin W_0(\Gamma_0)$ siempre que $r_0 < s < t_0$.

Por tanto $W(\Gamma_0) = [\ W_0(A_0), W(A_1)\ ]$. Así la prueba queda completa.

(0.2.10) **TEOREMA** [Nadler,1.11].

Si α es un arco ordenado en 2^X tal que su elemento mínimo $A_0 \in C(X)$, entonces $\alpha \subseteq C(X)$.

Demostración

Sea $B \in \alpha$ tal que $B \neq A_0$. Considere α' el subarco de α con extremos A_0 y B. Por definición, A' es un arco ordenado de A_0 a B. Así por el teorema (0.2.9), $A_0 \subseteq B$ y cada componente de B intersecta a A_0.

Afirmamos que $B = \bigcup \{ A_0 \cup K \mid K \text{ es componente de } B \}$. En efecto, es inmediato que $\bigcup \{ A_0 \cup K \mid K \text{ componente de } B \}$ está contenido en B. Ahora, sea $b \in B$ y consideremos K_b la componente de B que contiene a b, así $b \in (K_b \cup A_0)$, por lo que $B \subseteq \bigcup \{ A_0 \cup K \mid K \text{ es una componente de } B\}$.

Como A_0, K son conexos y $A_0 \cap K \neq \emptyset$ (para cualquier componente K de B), $A_0 \cup K$ es conexo. Así $\bigcup \{ A_0 \cup K \mid K \text{ es componente de } B \}$ es conexo. Por tanto $B \in C(X)$, para cualquier $B \in \alpha$, es decir $\alpha \subseteq C(X)$.

(0.2.11) **LEMA** [Nadler,14.8.1].

Sea X un continuo y $0 < t < \mu(X)$.

Si $A, B \in \mu^{-1}(t)$ tal que $A \cap B \neq \emptyset$ y $A \neq B$, entonces existe un arco α contenido en $[\ \mu^{-1}(t) \cap C(A \cup B)\ ]$ tal que α tiene extremos A y B.

Demostración.

supongamos sin pérdida de generalidad que $\mu(X) = 1$.

Sea K una componente de $A \cap B$. Como A y B son conexos, entonces existen (por los lemas 0.2.1 y 0.2.2) segmentos :

$$\sigma_1 : [0,1] \to C(A) \quad \text{de } K \text{ a } A,$$

$$\sigma_2 : [0,1] \to C(B) \quad \text{de } K \text{ a } B.$$

Sea $t \in [0,1]$ fijo.

Dado que $\mu(\sigma_1(t) \cup \sigma_2(0)) = \mu(\sigma_1(t)) \leq \mu(A) = t_0$ y

$$\mu(\sigma_1(t) \cup \sigma_2(1)) = \mu(\sigma_1(t) \cup B) \geq \mu(B) = t_0,$$

existe $s \in [0,1]$ tal que $\mu(\sigma_1(t) \cup \sigma_2(s)) = t_0$........4.1

(por el lema 0.1.14 y por el teorema 0.1.12).

Ahora por cada $t \in [0,1]$, existe s que satisface 4.1, denotemos $s = s_t$ por cada t. Entonces dado $t \in [0,1]$ tenemos $\mu(\sigma_1(t) \cup \sigma_2(s_t)) = t_0$.

Definimos:

$$g : [0,1] \to \mu^{-1}(t_0) \text{ como}$$

$$g(t) = \sigma_1(t) \cup \sigma_2(s_t), \text{ por cada } t \in [0,1]$$

Ahora se probará que g es una función continua.

Sea $t \in [0,1]$ fijo. Sea $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $[0,1]$ tal que $t_n \to t$.

Dado que la sucesión correspondiente $\{s_{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente, supongamos sin pérdida de generalidad que ella misma converge digamos a r. Por la continuidad de σ_1, σ_2 y por la forma en que se definió g, se tiene que :

$$g(t_n) = \sigma_1(t_n) \cup \sigma_2(s_{t_n}) \to \sigma_1(t) \cup \sigma_2(r) \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

Dado que $\mu(g(t_n)) = t_0$, por cada n y $\mu^{-1}(t_0)$ es cerrado, se tiene que que, $[\sigma_1(t) \cup \sigma_2(r)] \in \mu^{-1}(t_0)$.

Observe que:

$\sigma_1(t) \cup \sigma_2(r) \subseteq \sigma_1(t) \cup \sigma_2(s_t) = g(t)$ si $r \leq s_t$ (por definición de σ_2)

$\sigma_1(t) \cup \sigma_2(r) \supseteq \sigma_1(t) \cup \sigma_2(s_t) = g(t)$ si $s_t \leq r$ (por definición de σ_2).

Por tanto, $\sigma_1(t) \cup \sigma_2(r)$ y $g(t)$ son subcontinuos de X con el mismo μ-valor y uno de ellos está contenido en el otro. Por tanto por ser μ un mapeo de Whitney, se sigue que $g(t) = \sigma_1(t) \cup \sigma_2(r)$.

Así $g(t_n) \to g(t)$ cuando $n \to$. Por tanto g es continua.

Note que $g(0) = B$ y $g(1) = A$, pues $g(0) = \sigma_1(0) \cup \sigma_2(s_0) = K \cup \sigma_2(s_0)$ es un subcontinuo de B con el mismo μ-valor que B, así que $g(0) = B$, y $g(1) = \sigma_1(1) \cup \sigma_2(s_2) = A \cup \sigma_2(s_2)$ tiene el mismo μ-valor que A, así que $g(1) = A$.

Ahora como $[0,1]$ es un conexo por arcos y g es continua, se tiene que $g([0,1])$ es un conexo por arcos. Por tanto existe un arco contenido en $g([0,1])$, con extremos A y B.

Note que, por construcción $K \subseteq R$ para cada $R \in \alpha$.

(0.2.12) **LEMA** [Kelley,1.1] Sea μ cualquier mapeo de Whitney para $C(X)$. Sea $\sigma : C(C(X)) \to C(X)$ la función definida como $\sigma(\mathcal{D}) = \bigcup \{ A \mid A \in \mathcal{D} \}$. Entonces

a) Dado $\varepsilon>0$, si $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \in C(C(X))$ y $\rho^2(\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2) < \varepsilon$, entonces $\rho(\sigma(\mathcal{D}_1),\sigma(\mathcal{D}_2)) < \varepsilon$ (ρ^2 es la métrica de Hausdorff para $C(C(X))$).

b) σ es continua.

c) Sea $t \in [0,\mu(X)]$. Sea $A \in \mu^{-1}(t)$ y sea $t_0 \in [0,t)$, entonces $\sigma(C(A,t_0)) = A$.

Demostración.

(a) Está demostrada en [Kelley 1.1], (b) es inmediata de (a). Para probar (c), primero se probará que $\sigma(C(A,t_0)) \subseteq A$.

Sea $x \in \sigma(C(A,t_0))$, entonces existe un $K \in C(A,t_0)$ tal que $x \in K$. Dado que $K \subseteq A$, $x \in A$.

Ahora probaremos que $A \subseteq \sigma(C(A,t_0))$.

Sea $x \in A$, entonces existe $A_0 \in C(A,t_0)$ tal que $x \in A_0$ (por los teoremas 0.2.9, 0.2.10, 0.1.11, 0.1.12). Así $x \in \sigma(C(A,t_0))$.

CAPITULO 1

1. La propiedad de ser un continuo es una Propiedad de Whitney.

La propiedad de ser un continuo es una Propiedad de Whitney significa que, si X es un continuo, entonces $\mu^{-1}(t)$ es un continuo para cada Mapeo de Whitney μ para C(X) y cada t, $0 \leq t \leq \mu(X)$. Veamos a continuación que esto es verdadero para cualquier continuo.

(1.1) **TEOREMA** [Nadler,14.2].

Si X es un continuo, entonces $\mu^{-1}(t)$ es un continuo, para cada $t \in [0,\mu(X)]$.

Demostración

Sea $t \in [0,\mu(X)]$. Se demostrará que $\mu^{-1}(t)$ es conexo y compato.

La compacidad de $\mu^{-1}(t)$ se sigue de la continuidad de μ y la compacidad de C(X). Ahora probaremos que $\mu^{-1}(t)$ es conexo.

Supongamos que no lo es, entonces existen dos subconjuntos cerrados ajenos y no vacíos $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$ de $\mu^{-1}(t)$ tal que $\mu^{-1}(t) = \mathcal{B} \cup \mathcal{D}$.

Consideremos $B = \bigcup \{ A \mid A \in \mathcal{B} \}$ y $\Delta = \bigcup \{ A \mid A \in \mathcal{D} \}$. Afirmamos que:

i) B, Δ son subconjuntos no vacíos, cerrados de X;

ii) $B \cap \Delta = \emptyset$;

iii) $B \cup \Delta = X$.

Como $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$ son no vacíos, B y Δ son no vacíos.

Veremos que B y Δ son cerrados. Basta demostrar que B es cerrado pues la demostración para Δ es análoga.

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en B que converge a un $x_0 \in X$. Para demostrar que $x_0 \in B$, sea $B_n \in \mathcal{B}$ tal que $x_n \in B_n$. Como $\mathcal{B}$ es compacto, podemos suponer que $\{B_n\}$ converge digamos a B_0 (es decir lim inf $B_n = B_0 =$ lim-sup B_n teorema 0.1.6). Como $\mathcal{B}$ es cerrado, $B_0 \in \mathcal{B}$, ya que cada $\mathfrak{a}_n \in B_n$, $\mathfrak{a}_0 \in B_0$ (teorema 0.1.5). Por tanto $\mathfrak{a}_0 \in$ B. Queda probado que B y Δ son cerrados.

Ahora se probará que $B \cap \Delta = \varnothing$.

Supongamos que $B \cap \Delta \neq \varnothing$, elegimos $\mathfrak{a} \in [B \cap \Delta]$. Entonces $\mathfrak{a} \in A$, para algún $A \in B$ y $\mathfrak{a} \in H$, para algún $H \in \Delta$. Por el lema (0.2.11) existe un arco $\alpha \subseteq \mu^{-1}(t)$ con extremos A y H, pero esto es imposible ya que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$ son una separación de $\mu^{-1}(t_0)$. Queda demostrado que $B \cap \Delta = \varnothing$.

Falta ver que $B \cup \Delta = X$.

Claramente $B \cup \Delta \subseteq X$. Sea $\mathfrak{a} \in X$, por los teoremas (0.2.9), (0.2.10) tenemos que existe un arco ordenado $\alpha \subseteq C(X)$, con extremos $\{\mathfrak{a}\}$ y X. Como $\mu|_\alpha$ es continua (teorema 0.1.11) y $\mu|_\alpha(\ \{\mathfrak{a}\}\ ) < t < \mu|_\alpha(\ X\ )$, existe $W \in \alpha$ tal que $\mu|_\alpha(W) = t$ (teorema 0.1.12). Así $W \in [\ \mathcal{B} \cup \mathcal{D}\ ]$, es decir, $W \subseteq [\ B \cup \Delta\ ]$. Por tanto $\mathfrak{a} \in [\ B \cup \Delta\ ]$ (pues $\{\mathfrak{a}\} \subseteq W \subseteq X$). Entonces B y Δ son una separación de X, lo cual es imposible.

Por tanto $\mu^{-1}(t)$ es un continuo.

CAPITULO 2

2.1 Definiciones y Propiedades de los Localmente Conexos.

Primero daremos algunas definiciones básicas.

(2.1.1) **DEFINICION.** Decimos que un espacio métrico (X,d) es un *conexo localmente uniforme*, si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon)$ tal que para cualesquiera $x, y \in X$, con $d(x,y) < \delta$, existe C conexo que los contiene y además el diámetro de C es menor que ε (en símbolos, $\mathrm{diam}[C]<\varepsilon$).

(2.1.2) **DEFINICION.** Decimos que un espacio métrico X es *conexo en pequeño en un punto* $x \in X$. Si cada vecindad $\mathcal{U}$ de x contiene una vecindad $\mathcal{V}$ de x tal que cualquier par de puntos en $\mathcal{V}$, están contenidos en algún subconjunto conexo de $\mathcal{U}$.

(2.1.3) **TEOREMA.** Si X es un conexo localmente uniforme, entonces es conexo en pequeño. Entonces X es localmente conexo.

Demostración.

Sean $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in X$. Sea $B_\varepsilon(x_0)$ vecindad de x_0.
Consideremos $\delta^* = \min\{ \delta , \varepsilon \}$ (donde δ es como en la definición de conexo localmente uniforme). Así que $B_{\delta^*}(x_0) \subseteq B_\varepsilon(x_0)$, y como X es un conexo localmente uniforme, entonces para cualesquier par de puntos de $B_{\delta^*}(x_0)$, existe un conexo C que los contiene y con $\mathrm{diam}[C] < \varepsilon$.

Ahora probaremos que si X es conexo en pequeño en cada punto, entonces X es localmente conexo. Bastará con demostrar que cualquier componente de cualquier abierto es abierta.

Sea $\mathcal{U}$ un conjunto abierto y C una componente de $\mathcal{U}$. Para demostrar que C es abierto, sea $x \in C$. Entonces existe un subconjunto abierto $\mathcal{V}_x$ conteniendo a x y contenido en $\mathcal{U}$ (pues X es conexo en pequeño en x), tal que cualesquiera par de puntos en $\mathcal{V}_x$ están el algún subconjunto conexo de $\mathcal{U}$. Así $\mathcal{V}_x \subseteq C$ (pues, sea $y \in \mathcal{V}_x$ entonces existe C' conexo tal que $x, y \in C' \subseteq \mathcal{U}$ pero C es el máximo conexo que contiene a x, así que, $C' \subseteq C$. De manera que $y \in C$. Así $\mathcal{V}_x \subseteq C$). Por tanto C es abierto.

(2.1.4) **TEOREMA.** [Hocking,3-29] Si X es un continuo localmente conexo y $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si a, b son cualesquiera dos puntos con $d(a,b) < \delta$, entonces existe un arco con extremos a y b de diámetro menor que ε.

(2.1.5) **TEOREMA.** Si X es un continuo localmente conexo, entonces X tiene la propiedad de Kelley.

Demostración.

Por el teorema (2.1.4), existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $a, b \in X$ con $d(a,b) < \delta$, entonces existe un arco α con extremos a y b, y de $\text{diam}[\alpha] < \varepsilon$.

Sean $A \in C(X)$, y $a \in A$. Sea $B = A \cup \alpha$, claramente $b \in B \in C(X)$. Además, como $A \subseteq N_d(\varepsilon,B) = N_d(\varepsilon, A \cup \alpha)$ y $A \cup \alpha = B \subseteq N_d(\varepsilon,A)$, $\rho(A,B) < \varepsilon$.

2.2. La propiedad de ser un Continuo Localmente Conexo es una Propiedad de Whitney.

Para probar que la propiedad de ser un continuo localmente conexo es una Propiedad de Whitney, tenemos que probar que:

(2.2.1) **TEOREMA** [Nadler1].

Si X es un continuo localmente conexo, entonces $\mu^{-1}(t)$ es un continuo localmente conexo, para todo $t \in [0,\mu(X)]$.

Demostración

Por el teorema (2.1.3), bastará probar que $\mu^{-1}(t)$ es un conexo localmente uniforme. Es decir, basta mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe $\zeta > 0$ tal que si A, $B \in \mu^{-1}(t)$ y $\rho(A,B) < \zeta$, entonces existe un subcontinuo Z de $\mu^{-1}(t)$ que contiene a A y a B, con diámetro menor que ε.

Sea $t \in [0,1]$ y $\varepsilon > 0$. Elija $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon/2) > 0$ que satisfaga el lema (0.1.15) para $\varepsilon/2$, y elija δ_1 que satisfaga el lema (0.1.13). Ahora sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Así que,

i) si $\operatorname{diam}[K] < \delta$, entonces $\mu(K) < t$ (por el lema 0.1.13).

Por el teorema (0.1.16), existe $\eta > 0$ tal que

ii) si K, $L \in \mu^{-1}(t)$ y $L \subseteq N_d(\eta,K)$, entonces $\rho(K,L) < \delta$.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\eta \leq \delta$.

Dado que X es localmente conexo, y $\eta > 0$, existe $\lambda > 0$ tal que

iii) si x, $y \in X$ y $d(x,y) < \lambda$, entonces hay un arco con extremos x y y, con diámetro menor que η (por el teorema 2.1.4).

Sin pérdida de generalidad supongamos que $\lambda \leq \eta$.

Sean A, $B \in \mu^{-1}(t)$ tales que $\rho(A,B) < \lambda$. Entonces, dado que $A \subseteq N_d(\lambda,B)$, existen $a \in A$ y $b \in B$ tal que $d(a,b) < \lambda$. Por la parte (iii) existe un arco γ con extremos a y b tal que $\operatorname{diam}[\gamma] < \eta$. Dado que

$\eta \le \delta$, se tiene por (i) que

iv) $\mu(\gamma) < t$.

Sea σ $[0,1] \to C(B)$ un arco ordenado en $C(B)$ con extremos $\{b\}$ y B.

Definamos $f : [0,1] \to \Lambda$ por $f(s) = \sigma(s) \cup \gamma$, donde $\Lambda = \{ \gamma \cup \sigma(s) \mid 0 \le s \le 1 \}$. Se demostró en el lema (0.1.14) que f es continua. Así que la composición de $\mu|_{\Lambda}$ con f es continua (teorema 0.1.11).

Nótese que $\mu|_{\Lambda}(f(0)) = \mu|_{\Lambda}(\{b\} \cup \gamma) = \mu|_{\Lambda}(\gamma) < t$ y $\mu|_{\Lambda}(f(1)) = \mu|_{\Lambda}(B \cup \gamma) > \mu|_{\Lambda}(B) = t$, entonces existe $s_0 \in [0,1]$ tal que $\mu|_{\Lambda}(f(s_0)) = \mu|_{\Lambda}(\sigma(s_0) \cup \gamma) = t$ (por el teorema 0.1.12).

Sea $B^* = \sigma(s_0) \cup \gamma$. Como $A \cap B^* \supseteq \{a\}$ $\emptyset \ne$ y $\mu(A) = \mu(B^*) = t$, se tiene que existe un arco $\alpha_1 \subseteq [\mu^{1}(t) \cap C(A \cup B^*)]$ con extremos A y B^* y como $\{b\} \subseteq B \cap B^*$, existe un arco $\alpha_2 \subseteq [\mu^{-1}(t) \cap C(B \cup B^*)]$ con extremos B^* y B.

Ahora se probará que el $\mathrm{diam}[\alpha_1] < \varepsilon/2$, la demostración de que $\mathrm{diam}[\alpha_2] < \varepsilon/2$ es análoga.

Sabemos que A, $B^* \in \mu^{-1}(t)$ y $\sigma(s_0) \subseteq B \subseteq N_d(\eta, A)$, ya que $\mathrm{diam}[\gamma] < \eta$ y $\gamma \cap A \ne \emptyset$, $B^* \subseteq N_d(\eta, A)$. Por tanto $\rho(B^*, A) < \delta$ (por (ii)).

Sean K, L $\in \alpha_1$, entonces K, L $\subseteq [A \cup B^*]$ (K, L $\in \mu^{-1}(t)$). Pero como se eligió δ, $\rho(K,L) < \varepsilon/2$. Por tanto el $\mathrm{diam}[\alpha_1] < \varepsilon/2$.

Así el $\mathrm{diam}[\alpha_1 \cup \alpha_2] < \varepsilon$.

Resumiendo: Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\zeta = \lambda > 0$. Si A, B $\in \mu^{-1}(t)$ y $\rho(A,B)<\zeta$, tomamos $Z = \alpha_1 \cup \alpha_2$. Entonces $Z \subseteq \mu^{-1}(t)$ y A, B $\in$ Z y el $\mathrm{diam}[Z] < \varepsilon$. Es decir $\mu^{-1}(t)$ es conexo localmete uniforme.

Por tanto $\mu^{-1}(t)$ localmente conexo.

Ahora nos surge una pregunta:

¿ Si $\mu^{-1}(t_0)$ es localmente conexo para algún $t_0 \in [0,\mu(X)]$, entonces $\mu^{-1}(t)$ es localmente conexo para todo $t \in (t_0,\mu(X)]$?

La respuesta es afirmativa. A continuación damos una prueba de este resultado. Antes le recordamos las siguientes definiciones.

Si $A \in C(X)$, entonces $C(A) = \{ Y \in C(X) \mid Y \subseteq A \}$ es el hiperespacio de A. Sea μ cualquier mapeo de Whitney para $C(X)$ y dada $t \in [0,\mu(X)]$, sea $C(A,t) = \{ Y \in \mu^{-1}(t) \mid Y \subseteq A\}$ y $C_A^t = \{ Y \in \mu^{-1}(t) \mid A \subseteq Y \}$.

Es sabido (ver [Petrus]) que si $A \in C(X)$, entonces $C(A,t)$, C_A^t son continuos.

(2.2.2) **TEOREMA** [Petrus].

Si $\mu^{-1}(t_0)$ es localmente conexo, entonces $\mu^{-1}(t)$ es localmente conexo para toda $t \in (t_0,\mu(X)]$.

Demostración.

Sea $0 \leq t_0 < t \leq \mu(X)$, $A \in \mu^{-1}(t)$ y sea $B_\rho(A,\varepsilon) \cap \mu^{-1}(t)$ una vecindad de A en $\mu^{-1}(t)$. Exhibiremos una vecindad conexa de A contenida en $B_\rho(A,\varepsilon) \cap \mu^{-1}(t)$. Para esto la demostración se dividirá en cuatro pasos.

Primero. Se probará que $C(B_\rho(A,\varepsilon),t_0)$ es una vecindad de $C(A,t_0)$ en $\mu^{-1}(t_0)$.

Dado que $\mu^{-1}(t_0)$ es localmente conexo, él tiene la propiedad de Kelley (por el teorema 2.1.5), es decir, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $X_1 \in \mathcal{G}_1 \in C(\mu^{-1}(t_0))$ y $X_2 \in [\ B_\rho(X_1,\delta) \cap \mu^{-1}(t_0)\ ]$, entonces existe $\mathcal{G}_2 \in C(\mu^{-1}(t_0))$ tal que $X_2 \in \mathcal{G}_2$ y $\rho^2(\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2) < \varepsilon$ (donde ρ^2 es la métrica de Hausdorff sobre $C(C(X))$).

Dado que $N_\rho(\delta,C(A,t_0))$ es un abierto en $C(X)$, $N_\rho(\delta,C(A,t_0)) \cap \mu^{-1}(t_0)$ es un abierto en $\mu^{-1}(t_0)$. Así que nada más probaremos que

$N_\rho(\delta,C(A,t_0)) \cap \mu^{-1}(t_0)$ está contenido en $C(B_\rho(A,\varepsilon),t_0)$.

Sea $X_2 \in [\ N_\rho(C(A,t_0),\delta) \cap \mu^{-1}(t_0)\ ]$, entonces $X_2 \in [\ B_\rho(X_1,\delta) \cap \mu^{-1}(t_0)\ ]$ para algún $X_1 \in C(A,t_0) \in C(\mu^{-1}(t_0))$. Así por la elección de δ, y tomando $\mathcal{G}_1 = C(A,t_0)$, entonces existe $\mathcal{G}_2 \in C(\mu^{-1}(t_0))$ tal que $X_2 \in \mathcal{G}_2$ y $\rho^2(\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2) < \varepsilon$.

Ahora $\sigma : C(C(X)) \to C(X)$ es una función que reduce distancias (por el lema 0.2.12.b), así $\rho(\sigma(\mathcal{G}_1),\sigma(\mathcal{G}_2)) < \varepsilon$. Dado que $\sigma(\mathcal{G}_1) = A$ (lema 0.2.12.c) se tiene que $\rho(A,\sigma(\mathcal{G}_2)) < \varepsilon$. Así $\sigma(\mathcal{G}_2) \in B_\rho(A,\varepsilon)$ y ya que $C(B_\rho(A,\varepsilon),t_0) = \cup \{ C(Z,t_0) \mid Z \in B_\rho(A,\varepsilon) \}$, entonces $C(\sigma(\mathcal{G}_2),t_0) \subseteq C(B_\rho(A,\varepsilon),t_0)$.

Además $X_2 \in C(\sigma(\mathcal{G}_2),t_0) \subseteq C(B_\rho(A,\varepsilon),t_0)$, por tanto $[\ N_\rho(\delta,C(A,t_0)) \cap \mu^{-1}(t_0)\ ] \subseteq C(B_\rho(A,\varepsilon),t_0)$.

Así $C(B_\rho(A,\varepsilon),t_0)$ es una vecindad de $C(A,t_0)$ en $\mu^{-1}(t_0)$.

Segunda : Obtener un continuo U^- el cual sea vecindad de $C(A,t_0)$ en $\mu^{-1}(t_0)$ y está contenido en $C(B_\rho(A,\varepsilon),t_0)$.

Sea $\gamma = \min\{\ \eta,\ \delta\ \}$, donde η es el que asegura el teorema (0.1.16). Sea $N_\rho(\ \delta,C(A,t_0)) \cap \mu^{-1}(t_0)$ una vecindad de $C(A,t_0)$. Dado que $\mu^{-1}(t_0)$ es localmente conexo y $C(A,t_0)$ un continuo, existe una vecindad conexa U de $C(A,t_0)$ en $\mu^{-1}(t_0)$ tal que $U \subseteq [\ N_\rho(\ \gamma,C(A,t_0)) \cap \mu^{-1}(t_0)\ ]$.

Por tanto U^- es un continuo y $U^- \subseteq [\ N_\rho(\gamma,C(A,t_0)) \cap \mu^{-1}(t_0)\ ] \subseteq [\ N_\rho(\delta,C(A,t_0)) \cap \mu^{-1}(t_0)\ ] \subseteq C(B_\rho(A,\varepsilon),t_0)$ (esta última contención esta en la demostración de la primera parte).

Tercera : Se probará que $C(\sigma(U^-),t) \subseteq [\ B_\rho(A,\varepsilon) \cap \mu^{-1}(t)\ ]$.

Sea $B \in C(\sigma(U^-),t)$. Entonces $B \subseteq \sigma(U^-)$, así para cualquier $b \in B$, existe $B_b \in U^-$ tal que $b \in B_b$. Pero $U^- \subseteq N_\rho(\gamma,C(A,t_0))$, así $B_b \in [\ B_\rho(A_b,\gamma) \cap \mu^{-1}(t_0)\ ]$ para algún $A_b \in C(A,t_0)$, entonces $\rho(B_b,A_b) < \gamma$, así $B_b \subseteq N_d(\gamma,A_b)$, pero $b \in B_b$, así $b \in N_d(\gamma,A_b)$. Como

$A_b \subseteq A$, $N_d(\gamma,A_b) \subseteq N_d(\gamma,A)$, por tanto $b \in N_d(\gamma,A)$. Así se sigue que $B \subseteq N_d(\gamma,A) \subseteq N_d(\eta,A)$.

Ahora por la elección de η (en el teorema 0.1.16) se sigue que $\rho(A,B) < \varepsilon$. Así $B \in [\ B_\rho(A,\varepsilon) \cap \mu^{-1}(t)\ ]$ y por tanto $C(\sigma(U^-),t) \subseteq [\ B_\rho(A,\varepsilon) \cap \mu^{-1}(t)\ ]$.

Cuarto : Dado que $C(\sigma(U^-),t)$ es un continuo, la demostración queda completa sí se demuestra que $A \in \mathrm{int}C(\sigma(U^-),t)$.

Supongamos que $A \notin \mathrm{int}C(\sigma(U^-),t)$.

Entonces existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\ \mu^{-1}(t) \setminus C(\sigma(U^-),t)\ ]$ tal que $A_n \to A$.

Dado que $A_n \ \ \sigma(U^-)$, por cada n existe $a_n \in [\ A_n \setminus \sigma(U^-)\ ]$ y $E_n \in \mu^{-1}(t)$ tal que $a_n \in E_n \subseteq A_n$ (esto último es por los teoremas 0.2.9, 0.2.10, 0.1.11 y 0.1.12).

Ahora alguna subsucesión de $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge (pues $\mu^{-1}(t)$ es compacto) digamos a E, entonces $E \in \mu^{-1}(t)$.

Así para cualquier $\psi \in E$, existe una sucesión $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\psi_n \in E_n$ y $\psi_n \to \psi$ (por teorema 0.1.5).

Pero $\psi_n \in E_n \subseteq A_n$ y $A_n \to A$, así $\psi \in A$. De manera que $E \subseteq A$, es decir, $E \in C(A,t_0)$.

Como U^- es una vecindad de $C(A,t_0)$ en $\mu^{-1}(t_0)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ implica $E_n \in U^-$ y por tanto $a_n \in \sigma(U^-)$, esto contradice la supocisión de que $a_n \notin [\ A_n \setminus \sigma(U^-)\ ]$. Por tanto, $A \in \mathrm{int}C(\sigma(U^-),t)$.

CAPITULO 3

3.1. La propiedad de ser un Continuo Conexo por Arcos es una Propiedad de Whitney.

La propiedad de ser un continuo conexo por arcos es una Propiedad de Whitney significa que, si X es un continuo conexo por arcos, entonces $\mu^{-1}(t)$ es un continuo conexo por arcos para cada Mapeo de Whitney μ para C(X) y cada t, $0 \leq t \leq \mu(X)$.

Antes de probar el teorema central de este capítulo, primero probaremos que la propiedad de ser un arco es una propiedad de Whitney.

(3.1.1) **TEOREMA** [Nadler].

Si I es un arco, entonces $\mu^{-1}(t)$ es un arco.

Demostración.

Sea $\mu : C(I) \to \mathbb{R}$ un mapeo de Whitney y sea $t \in [0,\mu(X)]$, mostraremos que $\mu^{-1}(t)$ es un punto o un arco.

Daremos un homemorfismo $\beta : \mu^{-1}(t) \to J$ donde J es un intervalo cerrado o un conjunto de un sólo punto.

Definimos $\beta : \mu^{-1}(t) \to \mathbb{R}$ por $\beta([a,b]) = a$. Claramente β es continua. Para probar que β es inyectiva, supongamos que $\beta([a,b]) = \beta([c,d])$, con $[a,b]$, $[c,d] \in \mu^{-1}(t)$. Entonces $a = c$, así que $[a,b] \subseteq [c,d]$ o $[c,d] \subseteq [a,b]$. Pero ambos conjuntos están en $\mu^{-1}(t)$ de modo que la contención no puede ser propia. De aquí que $[a,b] = [c,d]$. Por tanto β es inyectiva.

Notemos que $\mathrm{Im}\beta \subseteq [0,1]$. Además $\mu^{-1}(t)$ es cerrado en C(I) y C(I) es compacto (teorema 0.1.17), entonces $\mu^{-1}(t)$ es compacto. Por tanto $\mathrm{Im}\beta$ es compacto y $\beta : \mu^{-1}(t) \to \mathrm{Im}\beta$ es un homemorfismo.

Sea $b_0 = \text{máx } \mathrm{Im}\beta$. Veremos que $\mathrm{Im}\beta = [0,b_0]$. Como $b_0 = \text{máx } \mathrm{Im}\beta$, tenemos que $\mathrm{Im}\beta \subseteq [0,b_0]$ y existe un elemento en $\mu^{-1}(t)$ de la forma

$[b_0,b_1]$. Dada $a \in [0,b_0]$, consideremos la función $\gamma : [a,1] \to C(I)$ dada por $\gamma(s) = [a,s]$. Entonces γ es continua, $\mu(\gamma(a)) = \mu(\gamma(\{a\})) = 0$ y $\mu(\gamma(1)) = \mu([a,1] \geq \mu([b_0,b]) = t$ (porque $[b_0,b] \subseteq [a,1]$). Aplicando el teorema (0.1.12) obtenemos que existe $s \in [a,1]$ tal que $\mu(\gamma(s)) = t$. Es decir, $\mu([a,s]) = t$. De manera que existe $[a,s] \in \mu^{-1}(t)$ tal que $\beta([a,s]) = a$. Por tanto $a \in \mathrm{Im}\beta$. Esto prueba que $[0,b_0] \subseteq \mathrm{Im}\beta$. Por tanto $\mathrm{Im}\beta = [0,b_0]$.

De aquí que $\beta : \mu^{-1}(t) \to [0,b_0]$ es un homemorfismo. Por tanto $\mu^{-1}(t)$ es homeomorfo a un intervalo o aun punto.

Demostraremos el siguiente lema antes de probar el teorema centreal.

(3.1.2) **LEMA** [Nadler,14.11.1].

Sea X cualquier continuo, $A \in C(X)$, y $0 \leq t \leq \mu(X)$.

Sea $X(A,t) = \{ M \in \mu^{-1}(t) : M \cap A \neq \emptyset \}$, entonces $X(A,t)$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t)$. Además:

i) Si $\mu(A) \leq t$, entonces $X(A,t)$ es un subcontinuo conexo por arcos de $\mu^{-1}(t)$.

ii) Si $\mu(A) > t$, entonces $\Lambda = \mu^{-1}(t) \cap C(A)$ es un subcontinuo de $X(A,t)$ y cada elemento de $X(A,t)\setminus\Lambda$ puede ser conectado con un elemento de Λ por un arco $\alpha \subseteq X(A,t)$.

Demostración de i

Supóngase que $\mu(A) \leq t$.

Por el teorema (0.2.9) existe α un arco ordenado con extremos A y X. Por el teorema (0.2.10), $\alpha \subseteq C(X)$. Por el lema (0.1.11) $\mu|_\alpha$ es continua. Como $\mu|_\alpha(A) \leq t \leq \mu|_\alpha(X)$, existe $M_0 \in \alpha$ tal que $\mu|_\alpha(M_0) = \mu(M_0) = t$ (por teorema 0.1.12). Así $M_0 \in X(A,t)$.

Sea $M \in X(A,t)$, $M \neq M_0$ y $p \in [M \cap A]$, entonces $p \in [M \cap M_0]$

(pues $A \subseteq M_0$).

Dado que M_0, $M \in \mu^{-1}(t)$, $M_0 \neq M$ y $M \cap M_0 \neq \emptyset$, por el lema (0.2.11) existe un arco α contenido en $\mu^{-1}(t) \cap C(M \cup M_0)$ con extremos M_0 y M, tal que $p \in L$ para cualquier $L \in \alpha$. Como $p \in A$, $\alpha \subseteq X(A,t)$ para todo M. Esto prueba que todos los elementos de $X(A,t)$ pueden ser conectados con M_0, de manera que $X(A,t)$ es conexo por arcos (y por tanto conexo)

Demostración de ii

Supóngase que $\mu(A) > t$.

Sea $\mu' = \mu|_{C(A)} : C(A) \to \mathbb{R}$, sabemos que μ' es un mapeo de Whitney y $\mu'^{-1}(t) = \Lambda$ es un subcontinuo de $C(A)$. Por tanto $\Lambda = \mu^{-1}(t) \cap CA)$ es un subcontinuo de $X(A,t)$.

Ahora $\bigcup \Lambda = A$, pues $\bigcup \Lambda \subseteq A$, y si $a \in A$ es arbitrario, como A es un continuo y por teoremas (0.2.9) y (0.2.10), existe α arco contenido en $C(X)$ con puntos extremos $\{a\}$ y A. Ahora, como $\mu|_\alpha(\{a\}) \leq t \leq \mu|_\alpha(A)$ y $\mu|_\alpha$ es continua (por teorema 0.1.11), existe $B \in \alpha$ tal que $\mu(B) = t$ (teorema 0.1.12). Así que $B \in [\ \mu^{-1}(t) \cap C(A)\ ]$. Pero $a \in B$, es decir, $a \in \bigcup \Lambda$, por tanto $A \subseteq \bigcup \Lambda$.

Sea $M \in X(A,t)\setminus\Lambda$, entonces $M \cap A \neq \emptyset$. Dado que $A = \bigcup \Lambda$ y $M \cap A \neq \emptyset$, existe $M_1 \in \Lambda$ tal que $M_1 \cap M \neq \emptyset$.

Sea $p \in M \cap M_1$, por el lema (0.2.11) existe un arco α con extremos M y M_1, $\alpha \subseteq [\ \mu^{-1}(t) \cap C(M \cap M_1)\ ]$ y $p \in L$ para cada $L \in \alpha$.

Dado que $M_1 \subseteq A$, $p \in A$ (pues $p \in [\ M \cap M_1\ ]$), así que, $L \cap A \neq \emptyset$, para cada $L \in \alpha$. Por tanto $\alpha \subseteq X(A,t)$.

Ahora probaremos que $X(A,t)$ es compacto.

Basta probar que $X(A,t)$ es cerrado.

Sea $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos en $X(A,t)$ que converge a K, por demostrar que $K \in X(A,t)$, es decir, $K \cap A \neq \emptyset$.

Sea $a_n \in [\ K_n \cap A\ ]$, para cada $n \in \mathbb{N}$, como A es compacto podemos suponer que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a a, para algún $a \in A$. Como $a_n \in K_n$ por cada $n \in \mathbb{N}$, y $a_n \to a$, $a \in K$ (teorema 0.1.5), así que $K \cap A \neq \emptyset$.

Por tanto tenemos que X(A,t) es cerrado.

De los casos (i) y (ii) tenemos que X(A,t) es conexo. De modo que X(A,t) es un continuo en $\mu^{-1}(t)$.

Ahora probaremos que la propiedad de ser un continuo conexo por arcos es una propiedad de Whitney

(3.1.3) **TEOREMA** [Nadler,14.8].

Sea X un continuo conexo por arcos, entonces $\mu^{-1}(t)$ es un continuo conexo por arcos, para cada $t \in [0,\mu(X)]$.

Demostración

Sean $A, B \in \mu^{-1}(t)$. Si $A \cap B \neq \emptyset$ y $A \neq B$, el teorema se sigue del lema (0.2.11). Así supongamos que $A \cap B = \emptyset$.

Como X es conexo por arcos existe un arco γ en X de un punto $a \in A$ a un punto $b \in B$. Consideremos dos casos.

Caso I. $\mu(\gamma) < t$.

Dado que $\{b\} \subseteq B$ y B es conexo, existe un arco ordenado $\eta \subseteq C(X)$, con extremos $\{b\}$ y B (por teoremas 0.2.9 y 0.2.10).

Como $\mu(\ \gamma \cup \{b\}\ ) = \mu(\gamma) \leq t$ y $t = \mu(B) \leq \mu(\ \gamma \cup B\ )$, existe $B_0 \in \eta$ (por lema 0.1.14) tal que $\mu(\gamma \cup B_0) = t$ (por teoremas 0.1.11 y 0.1.12). Sea $B^* = \gamma \cup B_0$, $\mu(B^*) = t$. Dado que $A, B^* \in \mu^{-1}(t)$ y $A \cap B^* \supset \{a\} \neq \emptyset$; $A \neq B^*$ (pues $b \in B^*$, $A \cap B = \emptyset$) y por el lema (0.2.11) existe un arco δ con extremos A y B^*, contenido en $[\ \mu^{-1}(t) \cap C(A \cup B^*)\ ]$.

Análogamente para B y B^*, se tiene λ un arco con extremos B y B^*, contenido en $[\mu^{-1}(t) \cap C(B \cup B^*)]$.

Por tanto se tiene la afirmación del teorema para este caso.

Caso II. $\mu(\gamma) > t$.

Sean γ_a, γ_b subarcos de γ tales que $a \in \gamma_a$, $b \in \gamma_b$ y γ_a, $\gamma_b \in \mu^{-1}(t)$ (por ser $\mu|_{C(\gamma)}$ una función continua, cuya imagen es $[0,\mu(\gamma)]$ y $\mu(\gamma) > t$)).

Dado que $\mu|_{C(\gamma)}$ es un mapeo de Whitney, y como γ es un arco, entonces $[\ \mu|_{C(\gamma)}\ ]^{-1}(t)$ es un arco (teorema 3.1.1). Por tanto existe un arco en $[\ \mu|_{C(\gamma)}\ ]^{-1}(t)$ con puntos extremos γ_a y γ_b.

Supongamos que $A \neq \gamma_a$. Dado que $[\ A \cap \gamma_a\ ] \supset \{a\} \neq \emptyset$, existe un arco α contenido en $[\ \mu^{-1}(t) \cap C(A \cup \gamma_a)^{\cdot}\ ]$ con extremos A y γ_a (por el lema 0.2.11).

Análogamente para $B \neq \gamma_b$, existe un arco α' contenido en $\mu^{-1}(t) \cap C(B \cup \gamma_b)$, y así existe un arco con extremos A y B. Ya que, por el teorema (1.1), $\mu^{-1}(t)$ es un continuo, si $t \in [0,\mu(X)]$, el teorema (3.1.3) queda probado.

Ahora nos surge una pregunta análoga a la del capítulo dos:

¿ Si $\mu^{-1}(t)$ es conexo por arcos para algún $t_0 \in [0,\mu(X)]$, entonces $\mu^{-1}(t)$ es conexo por arcos para todo $t \in (t_0,\mu(X)]$?

La respuesta es afirmativa. A continuación demostraremos el teorema respectivo.

Nota. σ denota la función definida en el lema (0.2.12).

(3.1.4) **TEOREMA** [Petrus].

Si $\mu^{-1}(t_0)$ es conexo por arcos, entonces $\mu^{-1}(t)$ es conexo por arcos para toda $t \in (t_0,\mu(X)]$.

Demostración.

Sea $0 \leq t_0 < t \leq \mu(X)$ y A, B $\in \mu^{-1}(t)$.

Sea $A' \in C(A,t_0)$ y $B' \in C(B,t_0)$. Dado que $\mu^{-1}(t_0)$ es conexo por arcos, existe un arco γ en $\mu^{-1}(t_0)$ con extremos A', B'. Consideremos dos casos.

Caso I. Supóngase que $\mu(\sigma(\gamma)) \leq t$.

Dado que $B' \subset B$, existe un arco ordenado α con extremos B' y B (por los teoremas 0.2.9 y 0.2.10). Como $\mu(\sigma(\gamma) \cup B') = \mu(\sigma(\gamma)) \leq t$ y $t = \mu(B) \leq \mu(\sigma(\gamma) \cup B)$, existe $B_0 \in \alpha$ tal tal que $\mu(\sigma(\gamma) \cup B_0) = t$ (por el lema 0.1.14 y los teoremas 0.1.11 y 0.1.12).

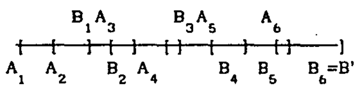
Así, dado que $\mu(A) = t$ y $\emptyset \neq A' \subseteq [\, A \cap (\, \sigma(\gamma) \cup B_0) \,]$, existe un arco en $\mu^{-1}(t)$ con extremos A y $\sigma(\gamma) \cup B_0$ (por el lema 0.2.11).

Análogamente, existe un arco en $\mu^{-1}(t)$ con extremos $\sigma(\gamma) \cup B_0$ y B. Por tanto existe un arco en $\mu^{-1}(t)$ con extremos A y B.

Caso II. Supóngase que $\mu(\sigma(\gamma)) > t$.

Por la continuidad uniforme de μ existe δ tal que si $R, S \in C(X)$ y $\rho(R,S) < \delta$, entonces $|\, \mu(R) - \mu(S) \,| < t-t_0$. Ya que γ es localmente conexo, para cada $\psi \in \gamma$, la vecindad $B_\rho(\psi, \delta) \cap \gamma$ de ψ en γ contiene una vecindad $U(\psi)$ conexa en γ. Alguna colección finita $\{U(\psi_1), U(\psi_2), \ldots, U(\psi_n)\}$, para $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n \in \gamma$, cubre a γ.

Por cada i, $\overline{U(\psi_i)}$ es un subintervalo $[A_i, B_i]$ de γ (ver figura).



$C_1 = A_1$

$C_2 = A_2$

$C_3 = B_1$

$C_4 = A_3$

$C_5 = B_2$

Sea $\{C_i \mid i=1,\ldots,2n\} = \{A_i, B_i \mid i=1,\ldots,n\}$ con
$0 = \gamma^{-1}(A') = \gamma^{-1}(C_1) < \gamma^{-1}(C_2) < \gamma^{-1}(C_3) < \ldots < \gamma^{-1}(C_{2n}) < \gamma^{-1}(B') = 1$ como se muestra en la figura. entonces cada intervalo $[C_i, C_{i+1}]$, $i = 1,\ldots,2n-1$, está contenido en algún $\overline{U(\psi_{j(i)})} \subseteq B_\rho(\psi_{j(i)}, \delta)$. Así $\rho(\psi_{j(i)}, \sigma([C_i, C_{i+1}]) < \delta$, para todo i (por la elección de δ) y por lo

tanto $| \mu(\sigma([C_i,C_{i+1}])) - t_0 | = | \mu(\sigma([C_i,C_{i+1}])) - \mu(\psi_{j(i)}) | < t-t_0$.
Y así $\mu(\sigma([C_i,C_{i+1}])) < t$.
Dado que $\mu(\sigma(\gamma)) > t$, existe un continuo $\mathcal{D}_i$ tal que $[C_i,C_{i+1}] \subseteq \mathcal{D}_i \subseteq \gamma$ y $\mu(\sigma(\mathcal{D}_i)) = t$ (esto es por los teoremas 0.2.9, 0.2.10, 0.1.11, 0.1.12). Así que para cada $i = 1,\dots,2n-1$, tenemos que $\sigma(\mathcal{D}_i) \in \mu^{-1}(t)$ y $C_{i+1} \subseteq [\sigma(\mathcal{D}_i) \cap \sigma(\mathcal{D}_{i+1})] \neq \emptyset$, de manera que por el lema (0.2.11) existen arcos con extremos $\sigma(\mathcal{D}_i)$ y $\sigma(\mathcal{D}_{i+1})$ y contenidos en $\mu^{-1}(t)$.
Dado que $A' \subseteq [A \cap \sigma(\mathcal{D}_1)]$ y $B' \subseteq [B \cap \sigma(\mathcal{D}_{2n-1})]$, existen arcos en $\mu^{-1}(t)$ de A a $\sigma(\mathcal{D}_1)$ y de $\sigma(\mathcal{D}_{2n-1})$ a B. Por lo tanto existe un arco en $\mu^{-1}(t)$ con extremos A y B.

Recordamos la definición de un continuo descomponible. Se dice que un continuo es *descomponible*, si es la unión de dos subcontinuos propios.

(3.1.5) **COROLARIO** [Petrus].

Si X es un continuo descomponible, entonces existe $t_0 \in [0,\mu(X)]$ tal que $\mu^{-1}(t)$ no es conexo por arcos si $t < t_0$ y conexo por arcos si $t_0 < t$.

Demostración.

Probaremos que si X es descomponible, entonces existe $t^* < \mu(X)$ tal que $\mu^{-1}(t)$ es conexo por arcos para cada $t \geq t^*$.
Sean A, B subcontinuos propios de X tal que $X = A \cup B$. Sea $t^* = \max\{ \mu(A), \mu(B) \}$. Sea $t > t^*$.
Para nuestro propósito supongamos que $t^* = \mu(A)$. Dado que $\mu(B) \leq t$ y $A \cap B \neq \emptyset$ se sigue que $X(A,t) = \mu^{-1}(t)$. Por tanto por el lema (3.1.2) $\mu^{-1}(t)$ es conexo por arcos.
Ahora bién, si X es conexo por arcos (por 3.1.3), tomo $t_0 = 0$.

Si X no es conexo por arcos, entonces por la afirmación anterior existe $t^{\bullet}$ tal que $\mu^{-1}(t)$ es conexo por arcos para $t \geq t^{\bullet}$. Sea $t_0 = \inf\{\, t^{\bullet} \mid \mu^{-1}(t)$ es conexo por arcos para $t \geq t^{\bullet}\}$. Es claro que t_0 satisface lo que se enuncia en el corolario.

CAPITULO 4

4.1. Continuos Descomponibles, continuos Hereditariamente Indescomponibles y propiedades.

Se darán algunas definiciones y hechos básicos.

(4.1.1) **DEFINICION.** Se dice que un continuo es *descomponible* si es la unión de dos subcontinuos propios.

(4.1.2) **DEFINICION.** Se dice que un continuo es *indescomponible* si no es descomponible. Es *hereditariamente indescomponible* si cada uno de sus subcontinuos es indescomponible.

(4.1.3) **LEMA.** Sea X cualquier continuo y sea μ cualquier mapeo de Whitney para C(X). Entonces $\bigcup \mu^{-1}(t) = X$, por cada $t \in [0,\mu(X)]$.

Demostración.

Claramente $\bigcup \mu^{-1}(t) = \bigcup \{ A \mid A \in \mu^{-1}(t) \} \subseteq X$.

Sea $x \in X$, se mostrará que $x \in \bigcup \mu^{-1}(t)$.

Como $\{x\} \subseteq X$ y por teorema (0.2.9) existe α un arco ordenado con puntos extremos $\{x\}$ y X.

Ahora como $\mu|_{\alpha}$ es un mapeo de Whitney y $\mu|_{\alpha}(\{x\}) = 0 \leq t \leq \mu|_{\alpha}(X)$, existe $B \in \alpha$ tal que $\mu|_{\alpha}(B) = t$ (por el teorema 0.1.12). Así $\{x\} \subseteq B \subseteq X$ (pues α es un arco ordenado) y $B \in \mu^{-1}(t)$. Por tanto $x \in \bigcup \mu^{-1}(t)$.

Recordamos la definición de la composante de un punto. Sea X un continuo y sea $p \in X$. Definimos la *composante* K *en* $\mathcal{X}$ *de* p como

$K = \{ x \in X \mid$ existe un subcontinuo propio A de X tal que $p, x \in A \}$.

(4.1.4) **LEMA.** Si X es un continuo conexo por arcos, entonces X es un continuo descomponible.

Demostración.

Supongamos que X es un continuo indescomponible.

Sea $p \in X$, y C_p la composante de p en X. Sea $q \in [\, X \setminus C_p \,]$, y C_q la composante de q en X (note que $C_p \neq C_q$ pues $q \notin C_p$). Dado que X es conexo por arcos, existe un arco $\alpha \subseteq X$ con extremos p y q. Si $\alpha \neq X$, entonces $\alpha \subseteq C_p$ y $\alpha \subseteq C_q$ (pues α es un subcontinuo propio de X, que contiene a p y q), es decir, $C_p \cap C_q \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción (pues, dado que X es indescomponible, X tiene una infinidad de composantes y estas tendrían que ser ajenas ver [Kuratowski]). Por tanto X es un continuo descomponible.

(4.1.5) **LEMA.** Sea X es un espacio hereditariamente indescomponible. Sean A, B subcontinuos cualesquiera de X, con $A \cap B \neq \emptyset$. Entonces $A \subseteq B$ ó $B \subseteq A$.

Demostración.

Supongamos que A no esta contenido en B y que B no esta contenido en A. Como $A \cap B \neq \emptyset$, $A \setminus B \neq \emptyset$ y $B \setminus A \neq \emptyset$. Entonces $A \cup B$ es un subcontinuo de X que se puede descomponer en dos subcontinuos propios (A y B). Esto contradice la hipótesis y prueba que $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$.

(4.1.6) **LEMA.** Sea X un continuo hereditariamente indescomponible, μ cualquier Mapeo de Whitney para C(X). Si A, B $\in \mu^{-1}(t)$, entonces $A \cap B = \emptyset$ o $A = B$.

Demostración

Supongamos que A, B $\in \mu^{-1}(t)$ y $A \cap B \neq \emptyset$.

Como X es hereditariamente indescomponible, $A \subseteq B$ ó $B \subseteq A$ (lema 4.1.5). Dado que $\mu(A) = \mu(B)$ (por hipotesis) y μ es un mapeo de Whitney, $A = B$. Por tanto si A, B $\in \mu^{-1}(t)$, entonces $A \cap B = \emptyset$ o $A = B$.

Antes de probar el teorema siguiente daremos la definición de función monótona. Se dice que una función continua f de X sobre Y es *monótona* si $f^{-1}(y)$ es conexo para cada $y \in Y$.

(4.1.7) **TEOREMA** [Nadler,1.80.2]. Sea X un continuo hereditariamente indescomponible. Sea μ cualquier mapeo de Whitney para C(X), sea $\eta_t : X \to \mu^{-1}(t)$ la función que a cada $x \in X$, le asigna el subcontinuo de X con μ-valor t que lo contiene. Entonces para cada $t \in [0,\mu(X))$

i) η_t esta bién definida;

ii) η_t es continua;

iii) η_t es monótona.

Demostración.

Como $\mu^{-1}(t)$ es un descomposición de X (por los lemas 4.1.6. y 4.1.3), η_t esta bién definida. Esto demuestra (i).

Sea $x_0 \in X$. Demostraremos que η_t es continua en x_0. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X que converge a x_0. Entonces demostraremos que $\eta_t(x_n) \to \eta_t(x_0)$.

Ahora, sea $\eta_t(x_n) = A_n$ y $\eta_t(x_0) = A_0$; dado que $\mu^{-1}(t)$ es compacto

existe una subsucesión de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, digamos $\{A_{n_k}\}_{k\in\Xi\subseteq\mathbb{N}}$ tal que $A_{n_k} \to B$.
Como $x_{n_k} \in A_{n_k}$ y $x_{n_k} \to x_0$, $x_0 \in B$ (por teorema 0.1.5). Además como $\mu(A_{n_k}) = t$ y μ es continua $\mu(A) = t$. Así que $A_0 = B$ (por lema 4.1.6). Esto demuestra (ii).

Afirmamos que por cada $A \in \mu^{-1}(t)$, $\eta_t^{-1}(A) = A$ (por lema 4.1.6). Así que η_t es monótona. Esto demuestra (iii).

4.2. La propiedad de ser un Continuo Descomponible y de ser un Continuo Hereditariamente Indescomponible son Propiedades de Whitney.

En el siguiente teorema probaremos que la propiedad de ser un continuo descomponible es una propiedad de Whitney.

(4.2.1) **TEOREMA** [Nadler,14.11].

Sea X un continuo descomponible, entonces $\mu^{-1}(t)$ es descomponible, para toda $t \in [0,\mu(X)]$.

Demostranción.

Sean A, B subcontinuos propios de X tal que $X = A \cup B$.

Consideremos $X(A,t) = \{ K \in \mu^{-1}(t) \mid K \cap A \neq \emptyset \}$ y

$$X(B,t) = \{ K \in \mu^{-1}(t) \mid K \cap B \neq \emptyset \}.$$

Dado que $X = A \cup B$, $\mu^{-1}(t) = X(A,t) \cup X(B,t)$. Por el lema (3.1.2), $X(A,t)$ y $X(B,t)$ son subcontinuos de $\mu^{-1}(t)$.

Por tanto si consideramos que $X(A,t) \neq \mu^{-1}(t) \neq X(B,t)$, entonces está completa la demostración.

Sin embargo puede suceder que alguno de los conjuntos sea todo $\mu^{-1}(t)$, es decir, (sin pérdida de generalidad) $X(A,t) = \mu^{-1}(t)$.

Consideremos el caso cuando $\mu(A) \leq t$. Entonces por la parte 1 del lema (3.1.2), $X(A,t)$ es conexo por arcos. Así $\mu^{-1}(t)$ conexo por arcos. Pero cualquier espacio conexo por arcos es descomponible (lema 4.1.4). De modo que $\mu^{-1}(t)$ es descomponible.

Ahora consideremos el caso cuando $\mu(A) > t$.

Hacemos $\Lambda = C(A) \cap \mu^{-1}(t)$. Como $A \neq X$, $\mu^{-1}(t) \neq \Lambda$.

Supongamos que $\mu^{-1}(t)$ es indescomponible. Entonces existen $a, b, c \in \mu^{-1}(t)$ tales que $\mu^{-1}(t)$ es irreducible alrrededor de cada dos de ellos (ver [Kuratowski], se dice un conjunto $A \subseteq X$ es irreducible alrededor de $\{x, y\}$, si A es el máximo conexo de X que los contiene). Encontraremos una contradicción probando que existe un subcontinuo $\mathcal{D}$ propio de $\mu^{-1}(t)$ tal que contiene al menos dos de ellos.

Como $X(A,t) = \mu^{-1}(t)$ es irreducible alrededor de cada dos puntos (a, b, c), $a, b, c \notin \Lambda$, y además $a, b \notin \Lambda$.

Por la parte (ii) del lema (3.1.2), existen arcos α y $\gamma \subseteq X(A,t)$, con extremos a y a^* (donde $a^* \in \Lambda$), b y b^* (donde $b^* \in \Lambda$) respectivamente.

Así que $\alpha \cup \Lambda \cup \gamma$ es un subcontinuo propio de $X(A,t)$ (pues $X(A,t)$ es un continuo indescomponible) que contiene a a y b, lo cual contradice que $X(A,t)$ es irreducible alrededor de a y b. Por tanto $\mu^{-1}(t)$ es descomponible.

Antes de probar que la propiedad de ser un continuo hereditariamente indescomponible es una propiedad de Whitney, probaremos el siguiente lema.

(4.2.2) **LEMA.** Sea X un continuo indescomponible (resp. hereditariamente indescomponible) y Y un continuo. Si $f : X \to Y$ es una función de X sobre Y continua y monótona, entonces Y es indescomponible (resp. hereditariamente indescomponible).

Demostración

Supongamos que $Y = A \cup B$, donde A, B son subcontinuos propios de Y. Como f es monótona $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ son conexos en X y por ser f continua $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ son compactos en X. Así que $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ son subcontinuos propios de X (pues si $f^{-1}(A) = X$, entonces $A = f(f^{-1}(A)) = f(X) = Y$, lo cual es imposible). Dado que $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = X$ se tiene que X es descomponible, lo cual es imposible. La demostración para un continuo X hereditariemente indescomponoble es análoga a la anterior.

(4.2.3) **TEOREMA** [Nadler,14.1].

Si X es un continuo hereditariamente indescomponible, entonces $\mu^{-1}(t)$ es un continuo hereditariamente indescomponible.

Demostración.

Por el teorema (1.1), $\mu^{-1}(t)$ es un continuo.

Dado que la función $\eta_t : X \to \mu^{-1}(t)$ es continua y monótona (por el teorema 4.1.7), el lema 4.2.2 demuestra que $\mu^{-1}(t)$ es hereditariamente indescomponible.

(4.2.4) **LEMA** [Petrus].

Si $\mathcal{D} \in C(\mu^{-1}(t_0))$ y $t \in (t_0,\mu(X)]$, entonces $X(\mathcal{D},t) = \bigcup \{ C^t_A \mid A \in \mathcal{D} \}$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t)$. Si $\mu(\sigma(\mathcal{D})) \leq t$, entonces $X(\mathcal{D},t)$ es conexo por arcos.

Demostración.

Primero probaremos que $X(\mathcal{D},t)$ es compacto. Basta demostrar que es cerrado en $\mu^{-1}(t)$. Sea $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $X(\mathcal{D},t)$ tal que $K_n \to K$, con $K \in \mu^{-1}(t_0)$, demostraremos que $K \in X(\mathcal{D},t)$.

Dado que $K_n \in \bigcup \{ C^t_A \mid A \in \mathcal{D}\}$ para toda n, existe $A_n \in \mathcal{D}$ tal que $A_n \subseteq K_n$ para cada n. Como $\mathcal{D}$ es compacto, existe una subsucesión convergente de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Supongamos, sin pérdida de generalidad que $A_n \to A$, con $A \in \mathcal{D}$. De manera que

$\lim\inf A_n = \lim\sup A_n \subseteq \lim\inf K_n = \lim\sup K_n$, es decir $A \subseteq K$. Así que $K \in C^t_A$, es decir $K \in X(\mathcal{D},t)$. Por tanto $X(\mathcal{D}.t)$ es cerrado.

Supóngase que $X(\mathcal{D},t) = \mathcal{C} \cup \mathcal{H}$ donde $\mathcal{C}$ y $\mathcal{H}$ son cerrados ajenos y no vacíos en $X(\mathcal{D},t)$. Dado que $X(\mathcal{D},t) = \bigcup \{ C_A^t \mid A \in \mathcal{D}\}$ y C_A^t es un continuo para cada $A \in \mathcal{D}$, se puede escribir $\mathcal{D} = \mathcal{E}' \cup \mathcal{H}'$ donde $\mathcal{E}' = \{ A \in \mathcal{D} \mid C_A^t \subseteq \mathcal{E}\} \neq \emptyset$, $\mathcal{H}' = \{ A \in \mathcal{D} \mid C_A^t \subseteq \mathcal{H} \} \neq \emptyset$ y $\mathcal{E}' \cap \mathcal{H}' = \emptyset$ (pues $\mathcal{E} \cap \mathcal{H} = \emptyset$). Ahora demostraremos que $\mathcal{E}'$, $\mathcal{H}'$ son cerrados. Para esto bastará probar que $\mathcal{E}'$ es cerrado pues la demostración de que $\mathcal{H}'$ es cerrado es análoga.

Sean $A_n \in \mathcal{E}'$, $n \in \mathbb{N}$, y supongamos que $A_n \to A$, con $A \in \mathcal{D}$. Demostraremos que $A \in \mathcal{E}'$, es decir $C_A^t \subseteq \mathcal{E}'$.

Como $C_{A_n}^t \subseteq \mathcal{E}$, para cada n, elegimos una $Y_n \in C_{A_n}^t \subseteq \mathcal{E}$, así que $A_n \subseteq Y_n$ pero $\mathcal{E}$ es compacto, de modo que podemos suponer que Y_n converge digamos a Y, con $Y \in \mathcal{E}$. Por tanto $A \subseteq Y$. Así $Y \in C_A^t$, entones $C_A^t \subseteq \mathcal{E}$ (pues C_A^t es un continuo). Así que tenemos un separación de $\mathcal{D}$, pero esto es imposible dado que $\mathcal{D}$ es un continuo. Así $X(\mathcal{D},t)$ es un conexo y por tanto un subcontinuo de $\mu^{-1}(t)$.

Ahora demostraremos la última afirmación del lema

Supongamos que $\mu(\sigma(\mathcal{D})) \leq t$. Sea $D \in \mu^{-1}(t)$ tal que $\sigma(\mathcal{D}) \subseteq D$ (se puede elegir tal elemento por la existencia de un arco ordenado α con extremos $\sigma(\mathcal{D})$ y X; teoremas 0.2.9, 0.2.10, y aplicando el teorema 0.1.12 a $\mu|_\alpha$).

Si $B \in X(\mathcal{D},t)$, entonces $B \in C_A^t$ para algún $A \in \mathcal{D}$. Pero $A \subseteq \sigma(\mathcal{D}) \subseteq D$, así $A \subseteq [B \cap D] \neq \emptyset$. Por el lema (0.2.11) existe un arco en $\mu^{-1}(t)$ de B a D. Por tanto $X(\mathcal{D},t)$ es conexo por arcos.

Nuevamente haremos la pregunta:

Si $\mu^{-1}(t)$ es un continuo descomponible para algún $t_0 \in [0,\mu(X)]$, entonces ¿ para qué $t \in [t_0,\mu(X)]$ se puede garantizar que $\mu^{-1}(t)$ es un continuo descomponible ?.

La respuesta está en el teorema siguiente.

(4.2.5) **TEOREMA** [Petrus].

Si $\mu^{-1}(t_0)$ es un continuo descomponible, entonces existe $t_1 \in (t_0,\mu(X)]$ tal que $\mu^{-1}(t)$ es un continuo descomponible para $t_0 \le t \le t_1$.

Demostración.

Sean $\mathcal{D}$, β subcontinuos propios de $\mu^{-1}(t_0)$ tales que $\mu^{-1}(t_0) = \mathcal{D} \cup \beta$. Sea $B \in [\ \beta\backslash\mathcal{D}\ ]$ y $\varepsilon = \rho(B.\mathcal{D})$.

Por el lema (0.1.16) existe $\eta > 0$ tal que si R, $S \in \mu^{-1}(t_0)$ y $R \subseteq N_d(\eta,S)$, entonces $\rho(R,S) < \varepsilon$.

Sea $B^{\bullet} \in C(X)$ tal que $B \subseteq B^{\bullet} \subset N_d(\eta,B)$. Entonces $B^{\bullet}$ no contiene a ningún elemento de $\mathcal{D}$ (pues si existiera $A \in \mathcal{D}$ tal que $A \subseteq B^{\bullet}$, entonces $A \subseteq N_d(\eta,B)$. Así que $\rho(B,A)<\varepsilon$ pero esto contradice la elecccíón de $\varepsilon = \min\{\ \rho(B,A)\ \mid\ A \in \mathcal{D}\ \} = \rho(B,\mathcal{D})$).

Análogamente, si $A \in [\ \mathcal{D}\backslash\beta\ ]$, entonces existe $A^{\bullet} \in C(X)$ tal que $A \subset A^{\bullet}$, $A \ne A^{\bullet}$ y $A^{\bullet}$ no contiene ningún elemento de β. Sea $t_1 = \min\{\ \mu(A^{\bullet}), \mu(B^{\bullet})\ \}$.

Sea $t_0 \le t \le t_1$. Entonces existen A_t, $B_t \in \mu^{-1}(t)$ tal que $A \subseteq A_t \subseteq A^{\bullet}$ y $B \subseteq B_t \subseteq B^{\bullet}$ (por los teoremas 0.2.9, 0.2.10, 0.1.11, 0.1.12).

Dado que $\mu^{-1}(t_0) = \mathcal{D} \cup \beta$, se tiene que $\mu^{-1}(t) = X(\mathcal{D},t) \cup X(\beta,t)$ (pues dados $A \in \mu^{-1}(t)$ y $b \in A$, sea α un arco ordenado con extremos b y A. Sabemos que existe $B_0 \in \alpha$ tal que $\mu(B_0) = t_0$ y $\{b\} \subseteq B_0 \subseteq A$. Por tanto $A \in X(\mathcal{D},t)$ o $A \in X(\beta,t)$ dependiendo de que $B_0 \in \mathcal{D}$ o $B_0 \in \beta$)

pero $X(\mathcal{D},t)$, $X(\beta,t)$ son subcontinuos de $\mu^{-1}(t)$ y $A_t \in [\ X(\mathcal{D},t)\setminus X(\beta,t)\ ]$ y $B_t \in [\ X(\beta,t)\setminus X(\mathcal{D},t)\ ]$ (esto último es porque si $A_t \in X(\beta,t)$, entonces existe $B' \in \beta$ tal que $B' \subseteq A_t \subseteq A^{*}$, contradiciendo la elección de $\mathcal{E}$. Análogamente para B_t). Por tanto, $\mu^{-1}(t)$ es descomponible.

(4.2.6) **TEOREMA** [Petrus].

Si $\mu^{-1}(t_0)$ es hereditariamente indescomponible y $t \in (t_0,\mu(X)]$, entonces $\mu^{-1}(t)$ es hereditariamente indescomponible.

Demostración.

Observemos que si $A \in \mu^{-1}(t)$, para $t \in (t_0,\mu(X)]$ y A es descomponible en X, entonces $\mu|_A^{-1}(t_0) = C(A,t_0)$ es un subcontinuo descomponible de $\mu^{-1}(t_0)$ (por teorema 4.2.1), pero esto es una contradicción ya que $\mu^{-1}(t_0)$ es hereditariamente indescomponible. Así, si $A \in C(X)$ y A es descomponible, entonces $\mu(A) \leq t_0$.

Sea $\mathcal{D} \in C(\mu^{-1}(t))$ y sean $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ subcontinuos propios de $\mathcal{D}$ tales que $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$. Dado que $\mu(\sigma(\mathcal{D})) > t_0$, $\sigma(\mathcal{D})$ es indescomponible (por la observación que hicimos al principio). Así que para al menos uno de los dos $\mathcal{D}_1$ o $\mathcal{D}_2$, digamos $\mathcal{D}_1$, se debe tener que $\sigma(\mathcal{D}) = \sigma(\mathcal{D}_1)$.

Sea $A_2 \in [\ \mathcal{D}_2\setminus\mathcal{D}_1\ ]$. Entonces $A_2 \subseteq \sigma(\mathcal{D}) = \sigma(\mathcal{D}_1)$, así que existe $A_1 \in \mathcal{D}_1$ tal que $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Entonces dado que $A_1 \neq A_2$, $A_1 \cup A_2$ es un continuo descomponible y $\mu(A_1 \cup A_2) > t > t_0$, lo cual contradice la observación que hicimos al principio. Por tanto $\mu^{-1}(t)$ es hereditariamente indescomponible.

CAPITULO 5

5.1. Definiciones.

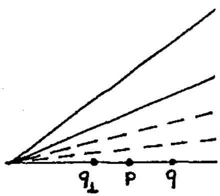
Primero daremos algunas definiciones.

(5.1.1) **DEFINICION.** Si p, $q \in X$, $p \neq q$, entonces se dice que X es *aposindético en p con respecto a q*, si existe un subcontinuo M de X tal que $p \in \text{int}M$ y $q \in [\, X \setminus M \,]$.

Si X es aposindético en p con respecto a cada $q \in [\, X \setminus \{p\} \,]$, entonces X es *aposindético en p.* Si X es aposindético en cada uno de sus puntos, entonces X es *aposindético.*

Ejemplos

1. [a,b] el intervalo es aposindético.

2. 

Es aposindético en p con respecto a q. Notese que X no es aposindético en p con respecto a q_1.

3. El circulo unitario S^1 es aposindético.

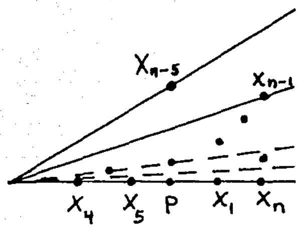
(5.1.2) **DEFINICION.** Se dice que un continuo X es *finitamente aposindético* Si para cada $x \in X$ y $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\} \subseteq X$ con $x \neq x_i$, existe un subcontinuo M de X tal que $x \in \text{int}M$ y

$$M \cap \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\} = \emptyset.$$

Ejemplos

1. El intervalo [a,b] es finitamente aposindético.

2.

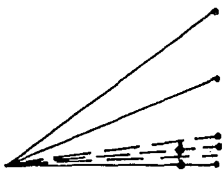


Este espacio no es finitamente aposindético en p con respecto a $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_n\}$

(5.1.3) **DEFINICION.** Si dados dos puntos p y q $\in$ X, X es aposindético en al menos uno de los dos puntos con respecto al otro, entonces X es *semiaposindética*.

Ejemplos

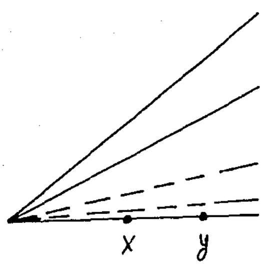
1. Este es continuo semiaposindético.



(5.1.4) **DEFINICION.** Se dice que un continuo X es *mutuamente aposindético* si para cualesquier p, q $\in$ X, p $\neq$ q, existen subcontinuos ajenos M y N de X, con p $\in$ intN y q $\in$ intM.

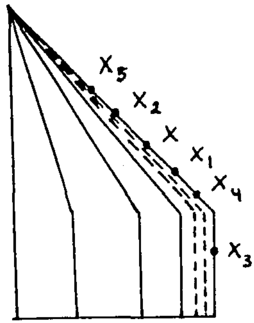
Ejemplos

1.



Es un continuo semiaposindético, es decir es aposindético en x con respecto a y pero no alreves. Así tal continuo no es Aposindético

2.



Es un continuo Mutuamente aposindético.

Pero no es finitamente aposindético con respecto a x y $\{x_1, x_2, \ldots, x_5\}$.

Con el primer ejemplo se observa :

a) que un continuo sea semiaposindético no implica que sea localmente conexo;

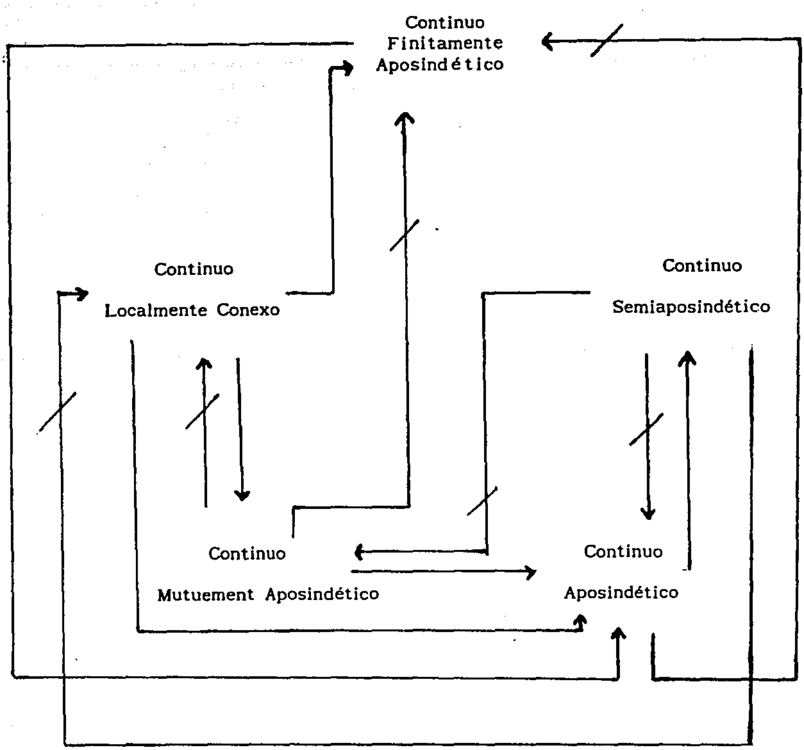
b) que un continuo sea semiaposindético no implica que sea mutuamente aposindético.

Con el segundo ejemplo se observa :

a) un continuo que es mutuamente aposindético no implica que sea localmente conexo;

b) un continuo que es aposindético no implica que sea finitamente aposindético.

EL SIGUIENTE CUADRO ES VALIDO PARA. CONTINUOS.



5.2. La propiedad de ser un Continuo Aposindético, la de ser un Continuo Finitamente Aposindético y la de ser un Continuo Mutuamente Aposindético son Propiedades de Whitney.

Antes de probar el teorema que relaciona aposindesis con niveles de Whitney, probaremos el siguiente lema.

(5.2.0) **LEMA.** Sea μ cualquier mapeo de Whitney para $C(X)$. Sea $A \in \mu^{-1}(t)$, $t \in [0,\mu(X)]$, y sea $A' \in C(X)$ tal que $A \subseteq \text{int}A'$. Entonces $A \in \text{int } C(A',t)$.

Demostración.

Se probará que $A \in \text{int } C(A',t)$.

Como $A \subseteq \text{int } A' \subseteq A'$, existe $\delta > 0$ tal que $A \subseteq N_d(\delta,A) \subseteq A'$. Sea $B_\rho(A,\delta) \cap \mu^{-1}(t)$ la vecindad de A en $\mu^{-1}(t)$. Veremos que $[B_\rho(A,\delta) \cap \mu^{-1}(t)] \subseteq C(A',t)$.

Sea $Y \in [B_\rho(A,\delta) \cap \mu^{-1}(t)]$, entonces $\rho(A,Y) < \delta$, así $Y \subseteq N_d(\delta,A)$. De manera que $Y \subseteq A'$, es decir $A \in \text{int } C(A',t)$.

En el siguiente teorema mostramos que la propiedad de ser un continuo aposindético es una propiedad de Whitney.

(5.2.1) **Teorema** [Petrus].

Si X es aposindético, entonces $\mu^{-1}(t)$ es aposindético, para cada $t \in [0,\mu(X)]$.

Demostración

Sean A, $B \in \mu^{-1}(t)$, se probará que $\mu^{-1}(t)$ es aposindético en A con respecto a B, es decir, mostraremos que existe un continuo $\mathfrak{F}$ en $\mu^{-1}(t)$ tal que $A \in \text{int}\mathfrak{F}$ y $B \notin \mathfrak{F}$.

Sea $y \in$ [$B\setminus A$]. Por cada $x \in A \subseteq X$ existe un continuo A_x tal que $x \in \mathrm{int}A_x$ y $y \notin A_x$ (Pues X es aposindético).

La familia $\{ \mathrm{int}A_x \mid x \in A \}$ es una cubierta abierta de A, por ser A un compacto, extraemos una subcubierta finita $\{ \mathrm{int}A_{x_i} \mid i=1,2,3,\ldots,n \}$.

Sea $A' = \bigcup_{i=1}^{n} A_{x_i}$. Entonces $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}(\mathrm{int}A_{x_i}) \subseteq \mathrm{int}\bigcup_{i=1}^{n} A_{x_i} = \mathrm{int}A'$, así que $A \in \mathrm{int}(\ C(A',t)\ )$ (por el lema 5.1.5).

Dado que $y \in B\setminus A_x$, por cada $x \in A$, B no está contenido en A', por tanto $B \in [\ \mu^{-1}(t)\setminus C(A',t)\ ]$. Así que si tomamos $\mathfrak{J} = C(A',t)$ ($\mathfrak{J}$ es un continuo pues A' lo es) entonces $A \in \mathrm{int}\mathfrak{J}$ y $B \notin \mathfrak{J}$.

En el siguiente teorema se expresa el hecho de que la propiedad de ser un continuo finitamente aposindético es una propiedad de Whitney.

(5.2.2) **Teorema** [Petrus].

Si X es finitamente aposindético, entonces $\mu^{-1}(t)$ es finitamente aposindético, para cada $t\in[0.\mu(X)]$.

Demostración.

Sea $t \in (0,\mu(X)]$ y sea $\{ A,A_1,A_2,\ldots,A_n \} \subseteq \mu^{-1}(t)$, con $A_i \neq A$ para todo $i = 1,2,\ldots,n$. Por cada $i = 1,2,\ldots,n$, elíjase $a_i \in [\ A_i\setminus A\ ]$. Entonces para cada $a \in A$ existe un continuo M_a tal que $a \in \mathrm{int}M_a$ y $M_a \cap \{ a_1,a_2,\ldots,a_n \} = \emptyset$ (Pues X es finitamente aposindético).

Ahora $\{ \mathrm{int}M_a \mid a \in A \}$ es una cubierta abierta de A, por ser A un compacto, extraemos una subcubierta finita $\{ \mathrm{int}M_{a_i} \mid a_i \in A,\ i = 1,\ldots,m \}$. Sea $A' = \bigcup_{j=1}^{m} M_{a_j}$, entonces $A \subseteq \mathrm{int}A'$, así que $A \in \mathrm{int}C(A',t)$ (por el lema 5.2.0). Es claro que $A_i \notin C(A',t)$, para todo $i = 1,2,\ldots,n$ (pues $a_i \in [\ A_i \setminus A\ ]$ y $M_{a_j} \cap \{\ a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \emptyset$ por cada $j = 1, 2, \ldots, m$). Hemos exhibido entonces un continuo $C(A', t) = \mathfrak{F}$ tal que $A \in \operatorname{int}\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{F} \cap \{\ A_1, A_2, \ldots, A_n\ \} = \emptyset$.

A continuación veremos que también la propiedad de ser un continuo mutuamente aposindético es una propiedad de Whitney.

(5.2.3) **Teorema** [Petrus].

Si X es mutuamente aposindético, entonces $\mu^{-1}(t)$ es mutuamente aposindético, para $t \in [0,\mu(X)]$.

Demostración.

Sea $t \in (0,\mu(X)]$ y sean $A_1, A_2 \in \mu^{-1}(t)$. Sean $a_1 \in [\ A_1 \setminus A_2\ ]$, $a_2 \in [\ A_2 \setminus A_1\ ]$, entonces existen continuos ajenos M_1 y M_2, tales que para algún $\eta > 0$, $B_d(a_i,\eta) \subseteq M_i$, para $i = 1,2$ (por ser X un continuo mutuamente aposindético).

Sea $\delta < \min\{\ \eta,\ d(a_1,M_2),\ d(a_2,M_1),\ d(a_2,A_1)\ \}$. Ahora construiremos continuos ajenos $\mathfrak{S}_1$ $\mathfrak{S}_2$ en $\mu^{-1}(t)$ tales que $A_1 \in \operatorname{int}\mathfrak{S}_1$, $A_2 \in \operatorname{int}\mathfrak{S}_2$.

Para esto último bastará que mostremos que $[\ B_\rho(A_i,\delta') \cap \mu^{-1}(t)\ ] \subseteq \mathfrak{S}_i$, $i = 1,2$. Fijemos $i = 1$ o 2 y consideremos dos casos.

Caso I. Supóngase que $\mu(M_i) < t$.

Sea $B_i = \{\ M_i'\ \}$, donde M_i' es algún elemento de $\mu^{-1}(t)$ tal que $M_i \subseteq M_i' \subseteq [\ M_i \cup A_i\ ]$ (M_i' existe por los teoremas 0.2.9, 0.2.10 y por el teorema 0.1.12).

Para cada $D \in [\ B_\rho(A_i,\delta) \cap \mu^{-1}(t)\ ]$, existe $g_D \in [\ B_d(a_i,\delta) \cap D\ ] \subseteq [\ D \cap M_i'\ ]$ (En efecto, como $D \in B_\rho(A_i,\delta)$, $A_i \subseteq N_d(\delta,D)$). Claramente tenemos :

$[\ B_d(a_i,\delta) \cap D\ ] \subseteq [\ D \cap B_d(a_i,\eta)\ ] \subseteq [\ D \cap M_i\ ] \subseteq [\ D \cap M_i'\ ]$). Así,

$D \cap M_1' \neq \emptyset$ y por el lema (0.2.11), podemos elegir un arco $\alpha_D \subseteq [\mu^{-1}(t) \cap C(D \cup M_1')]$, con extremos D y M_1', tal que $g_D \in L$, para cada $L \in \alpha$. Sea $\mathfrak{D}_1 = \bigcup \{ \alpha_D \mid D \in [\mu^{-1}(t) \cap B_\rho(A_1,\delta)] \}$. Como todos los arcos terminan en M_1', $B_1 \cup \mathfrak{D}_1$ es conexo. Para este caso definimos $\mathfrak{G}_1 = B_1 \cup \mathfrak{D}_1^-$. Entonces $\mathfrak{G}_1$ es un continuo, que contiene a $B_\rho(A_1,\delta) \cap \mu^{-1}(t)$ (Por construcción).

Caso II. Supóngase que $\mu(M_1) \geq t$.

Para cada $D \in [B_\rho(A_1,\delta) \cap \mu^{-1}(t)]$, existe $g_D \in [B_d(a_1,\delta) \cap D] \subseteq [D \cap M_1]$. Así que existe $D' \in \mu^{-1}(t)$ tal que $g_D \in D' \subseteq M_1$ (esto es por los teoremas 0.2.9, 0.2.10, 0.1.11, 0.1.12). De manera que pedemos elegir un arco $\alpha_D \subseteq [\mu^{-1}(t) \cap C(D \cup D')]$ con extremos D y D' (por el lema 0.2.11) tal que $g_D \in \subseteq D \cup D'$, para cada $L \in \alpha_D$.

Sea $B_1 = C(M_1,t)$ y sea $\mathcal{D}_1 = \bigcup \{ \alpha \mid D \in [\mu^{-1}(t) \cap B_\rho(A_1,\delta)] \}$. En este caso definimos $\mathfrak{G}_1 = B_1 \cup \mathfrak{D}_1^-$. De nuevo tenemos que $[\mu^{-1}(t) \cap B_\rho(A_1,\delta)] \subseteq \mathfrak{G}_1$.

Como B_1 es un continuo y todos los todos los arcos intersectan a B_1, $B_1 \cup \mathfrak{D}_1$ es conexo. Por tanto, $\mathfrak{G}_1 = B_1 \cup \mathfrak{D}_1^-$ es un continuo.

Esto termina la construcción de $\mathfrak{G}_1$ y $\mathfrak{G}_2$, ahora se demostrará que $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 = \emptyset$.

Note que para $i = 1, 2$ y para cada $L \in \mathfrak{G}_i$, se tiene que $L \subseteq M_1$ o $L \cap B_d(a_1,\delta) \neq \emptyset$. Para el caso I, se cumplen la segunda condición.

Para el caso II, se cumple una u la otra.

Sea $F \in \mathfrak{G}_1$. Se probará a continuación que $F \notin \mathfrak{G}_2$.

Si $F \in B_1$, sabemos que $F \in C(M_1,t)$ ó $F = M_1'$.

Si $F \in C(M_1,t)$, entonces $F \subseteq M_1$, de manera que $F \cap \overline{B_d(a_2,\delta)} = \emptyset$ dado que $\delta < d(a_2,M_1)$ y $F \notin C(M_2,t)$ (dado que $M_1 \cap M_2 = \emptyset$), entonces $F \notin \mathfrak{G}_2$.

Si $F = M_1'$. Entonces $M_1 \subsetneq F \subseteq M_1 \cup A_1$.

De manera que F no está contenido en M_2 dado que $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. También $F \cap \overline{B_d(a_2,\delta)} = \emptyset$ (dado que $d(a_2,A_1) > \delta$ y $d(a_2,M_1) > \delta$), entonces $F \notin \mathfrak{G}_2$. Si $F \in \mathcal{D}_1^-$, entonces $F \subseteq [\, N_d(\delta,A_1) \cup M_1]$. Así que F no está contenido en M_2 (pues $d(a_1,M_2) > \delta$). Dado que $d(a_2,M_1) > \delta$, $M_1 \cap \overline{B_d(a_2,\delta)} = \emptyset$, $\overline{N_d(\delta,A_1)} \cap \overline{B_d(a_2,\delta)} = \emptyset$ dado que $\delta < 1/3\ d(a_2,A_1)$. Así $F \cap \overline{B_d(a_2,\delta)} = \emptyset$ (pues $F \subseteq [\overline{V_\delta(A_1)} \cup M_1]$). Por tanto $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 = \emptyset$. Por tanto $\mu^{-1}(t)$ es mutuamente aposindético.

Bibliografía

[Hocking] Hocking, J. G y Young, G. S.,Topology, Addison Wesley, Reding, Mass 1961.

[Kelley] J. L. Kelley, Hiperspace of a continuum, Transactions of the American Mathematical Society, 52 (1942)22-36.

[Krasinkiewicz] J. Krasinkiewicz, On the Hiperspace of snake-like and circle-like continua, Fund. Math. 83(1974), 155-164.

[Kuratowski] Kuratowski, K.,Topology II, Academic Press, Nueva York, (1968) 212-216.

[Nadler] S. B. Nadler, Jr, Hiperspaces of Sets, Marcel Dekker, INC, New York and Basel, 1978.

[Nadler1] ______________, Some basic connectivity properties of Whitney map inverses in C(X), Proc. Charlotte Topoloy Conference (University of North Carolina at Charlotte, 1974), Stidies in Topology, Academic Press, New York, 1975, Nick M. Stavrakas and Keith. Allen, Edotiors , 393-410.

[Petrus] Ann Petrus, Whitney maps y Whitney Properties of C(X), Topology Proceedings (Proceedings of 1976 Topology conference, Auburn University), 1(1976),147-172.