

5
20j



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

METODOS DE SOLUCION EN SIMULACION
NUMERICA DE YACIMIENTOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

INGENIERO PETROLERO

P R E S E N T A N :

BECERRIL MARTINEZ DARIO

RIOS GONZALEZ FERNANDO

México, D. F.

1992

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

INTRODUCCION.....	1
-------------------	---

CAPITULO I

MODELOS MATEMÁTICOS.....	3
I.1 Ecuaciones fundamentales.....	3
I.1.1 Ecuación de continuidad.....	3
I.1.2 Ecuación de movimiento.....	4
I.1.3 Ecuación de estado.....	4
I.2 Flujo monofásico.....	4
I.2.1 Fluido incompresible (agua).....	4
I.2.2 Fluido ligeramente compresible (aceite).....	5
I.2.3 Fluido compresible (gas).....	6
I.3 Flujo multifásico.....	7

CAPITULO II

MODELOS NUMÉRICOS.....	13
II.1 Expansión en diferencias finitas.....	13
II.2 Discretización de las ecuaciones de flujo.....	15
II.2.1 Ecuación del gas.....	15
II.2.2 Ecuación del fluido ligeramente compresible (aceite).....	21
II.2.3 Ecuación de flujo multifásico.....	21
II.2.4 Cálculo de las transmisibilidades.....	22

CAPITULO III

ESQUEMAS DE SOLUCIÓN.....	25
III.1 Esquema explícito.....	26
III.2 Esquema mixto.....	26
III.3 Esquema implícito.....	27
III.4 Esquema de Crank - Nicolson.....	28

CAPITULO IV

MÉTODOS DE SOLUCIÓN.....	30
IV.1 Métodos directos.....	30
IV.1.1 Eliminación Gaussiana.....	30
IV.1.2 Gauss Jourdan.....	33
IV.1.3 Descomposición L x U.....	34
IV.1.4 Algoritmo de Thomas.....	38
IV.1.5 Ordenamiento D2.....	41
IV.1.6 Ordenamiento D4.....	45
IV.1.7 NSPIV.....	49
IV.2 Métodos iterativos.....	51
IV.2.1 Jacobi.....	51
IV.2.2 Gauss Seidel.....	54
IV.2.3 Sobre-relajación puntual sucesiva (PSOR).....	54
IV.2.4 Sobre-relajación lineal sucesiva (LSOR).....	55
IV.2.5 Dirección alternante (ADIP).....	59

IV.2.6 Procedimiento fuertemente implícito (SIP).....	66
IV.2.7 Orthomin.....	72

CAPITULO V

COMPARACIÓN DE RESULTADOS.....	79
--------------------------------	----

CAPITULO VI

CONCLUSIONES.....	83
NOMENCLATURA.....	86
REFERENCIAS.....	90

INTRODUCCION

La evolución y desarrollo de la industria petrolera ha traído como consecuencia la aplicación de técnicas cada vez más depuradas y sofisticadas, orientadas a maximizar la producción de hidrocarburos, pero al mismo tiempo, llevando a cabo una explotación racional de los mismos ; entre dichas técnicas se encuentra la simulación numérica de yacimientos, la cual es una herramienta sumamente útil para predecir el comportamiento de los yacimientos.

En la ingeniería de yacimientos tradicional se trata al yacimiento en forma burda, considerándolo como un tanque con propiedades promedio, mientras que la simulación de yacimientos por medio de computadoras permite un estudio detallado al poder dividir a dicho yacimiento en un número finito de celdas o bloques y aplicar las ecuaciones fundamentales de flujo de fluidos en medios porosos conjugadas a la ecuación de balance de materia para cada celda.

Siempre que una ecuación diferencial parcial se expresa en diferencias finitas al aplicarla a cada una de las celdas que constituyen la malla con la que se aproxima el yacimiento, da como resultado un sistema de ecuaciones algebraicas. Este sistema de ecuaciones generalmente forma algún tipo especial de matriz siendo tridiagonal, pentadiagonal, heptadiagonal o nonadiagonal para flujo en una, dos o tres dimensiones respectivamente. Para resolverlo se han desarrollado métodos directos e iterativos ya que normalmente el mayor

consumo de tiempo es el ocupado en la solución del sistema.

El objetivo del presente trabajo es describir en forma breve algunos de los métodos de solución más aplicables en la simulación de yacimientos, ya que de la buena selección de éste dependerá el tiempo de cómputo y la precisión de los resultados dados por el simulador.

Se probaron varios de éstos en un simulador de gas variando algunas propiedades del yacimiento tales como porosidad, permeabilidad, etc. con la intención de manejar condiciones extremas y con esto poder presentar una comparación en cuanto a la eficiencia de ellos. Por último se presentan algunas sugerencias de como seleccionar adecuadamente el método de solución.

CAPITULO I

MODELOS MATEMÁTICOS

I.1 Ecuaciones Fundamentales

Para representar matemáticamente el flujo de fluidos a través de un medio poroso, primeramente se debe establecer la ecuación fundamental de flujo o la ecuación de difusividad, la cual se compone de la combinación de las siguientes ecuaciones :

- Principio de conservación de masa o la ecuación de continuidad.
- Ecuación de movimiento del fluido en el medio poroso.
- Ecuación de estado que represente el comportamiento PVT del fluido.

I.1.1 Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad describe el principio de conservación de masa y establece que :

masa que entra al sistema — masa que sale del sistema \pm término fuente o sumidero = masa que se acumula en el sistema

cuya expresión matemática es la siguiente :

$$\nabla \cdot (\rho_f \bar{v}_f) \pm \frac{q_f^* \rho_f}{V_c} = - \frac{\partial (\theta \rho_f S_f)}{\partial t} \quad (I.1)$$

Nomenclatura y referencias al final.

I.1.2 Ecuación de movimiento

El movimiento de los fluidos en un medio poroso se puede representar por medio de la ecuación de Darcy, la cual establece que el gasto es proporcional al gradiente de presiones.

La forma más usual de la ecuación de Darcy es :

$$\bar{u}_f = - \frac{k_f}{\mu} \nabla \phi_f \quad (I.2)$$

I.1.3 Ecuación de estado

La ecuación de estado es una expresión que relaciona a la densidad como una función de la presión y la temperatura.

$$\rho = \rho (P, T) \quad (I.3)$$

I.2 Flujo Monofásico

I.2.1 Fluido Incompresible (agua)

En este caso la densidad del fluido (ρ) es constante, por lo que la ecuación queda :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial P}{\partial z} \right)$$

$$\pm \frac{\mu q_{xyz}^*}{V_c} = 0 \quad (I.4)$$

Expresando la ecuación (I.4) en forma vectorial :

$$\nabla \cdot [K \nabla P] \pm \frac{\mu q_{xyz}^*}{V_c} = 0 \quad (I.5)$$

I.2.2 Fluido ligeramente compresible (aceite)

En el caso de fluido ligeramente compresible, la compresibilidad definida como :

$$c = - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \quad (I.6)$$

es tomada para ser independiente de la presión, como resultado se tiene que la densidad es ;

$$\rho = \rho_o e^{c(P - P_o)} \quad (I.7a)$$

$$\rho = \rho_o (1 + c [P - P_o]) \quad (I.7b)$$

Sustituyendo las ecuaciones (I.2) y (I.7b) en la ecuación (I.1) y sabiendo que k_r y $S = 1$ se obtiene :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \frac{\mu q^*}{V_c} = \mu c \theta \frac{\partial P}{\partial t} \quad (I.8)$$

Expresando la ecuación (I.8) en forma vectorial :

$$\nabla \cdot [K \nabla P] + \frac{\mu q^*}{V_c} = \mu c \theta \frac{\partial P}{\partial t} \quad (I.9)$$

I.2.3 Fluido compresible (gas)

Considerando la ecuación de estado para un gas real :

$$\rho = \frac{P M}{z R T} \quad (I.10)$$

Suponiendo un medio poroso incompresible y saturación de gas constante por la expansión del mismo y sustituyendo las ecuaciones (I.10) y (I.2) en la ecuación (I.1) se obtiene :

$$\nabla \cdot \left(\frac{P M}{z R T} \frac{k}{\mu} \nabla P \right) + \frac{q^*}{V_c} \frac{P M}{z R T} = \theta S_g \frac{\partial \left(\frac{P M}{z R T} \right)}{\partial t} \quad (I.11)$$

Definiendo al potencial de los gases reales como¹:

$$m(P) = 2 \int \frac{P}{\mu z} dP$$

continuando el desarrollo² se llega a la ecuación siguiente :

$$\nabla \cdot (k \nabla m(P)) \pm \frac{2 q_{cs} P_{cs} T_{cy}}{V_c T_{cs}} = \emptyset S_o c \mu \frac{\partial m(P)}{\partial t} \quad (I.12)$$

La ecuación (I.12) es el modelo matemático que representa el movimiento del gas en el medio poroso, en términos del potencial de los gases reales.

I.3 Flujo Multifásico

Al desarrollar el modelo matemático para flujo multifásico se sustituye la ecuación (I.2) en la ecuación (I.1) y sabiendo que :

$$\rho_{fcy} = \frac{\rho_{fcs}}{B_f}$$

se tiene :

$$\nabla \cdot \left[\frac{\rho_{fcs}}{B_f} \frac{k k_{rf}}{\mu_f} \nabla \phi_f \right] \pm \frac{q_f^* \rho_{fcs}}{V_c B_f} = \frac{\partial \left(\frac{\rho_{fcs}}{B_f} \emptyset S_f \right)}{\partial t} \quad (I.13)$$

por lo que la ecuación para la fase aceite queda :

$$\nabla \cdot \left[\frac{\rho_{oca}}{B_o} \frac{k k_{ro}}{\mu_o} \nabla \phi_o \right] \pm \frac{q_o^* \rho_{oca}}{V_c B_o} = \frac{\partial \left(\frac{\rho_{oca}}{B_o} \emptyset S_o \right)}{\partial t} \quad (I.14)$$

siendo la densidad del aceite a condiciones estandar (ρ_{oc}) una constante, esta se puede eliminar en ambos miembros quedando la ecuación (I.14) como :

$$\nabla \cdot \left[\frac{k k_{ro}}{\mu_o B_o} \nabla \bar{S}_o \right] + \frac{q_{oc}}{V_c} = \frac{\partial \left(\frac{S_o}{B_o} \theta \right)}{\partial t} \quad (I.15)$$

Realizando el desarrollo de manera análoga para el agua se tiene :

$$\nabla \cdot \left[\frac{k k_{rw}}{\mu_w B_w} \nabla \bar{S}_w \right] + \frac{q_{wc}}{V_c} = \frac{\partial \left(\frac{S_w}{B_w} \theta \right)}{\partial t} \quad (I.16)$$

Para la fase gas se considera lo siguiente :

$$q_{gT} = q_{gl} + q_{gdo} + q_{gdv}$$

suponiendo que no existe gas disuelto en el agua :

$$q_{gT} = q_{gl} + \frac{B_g R_{go}}{B_o} q_o$$

en términos de velocidad se tiene ;

$$v_{gT} = v_{gl} + v_{gdo}$$

$$v_{gl} = - \frac{k k_{rg}}{\mu_g} \nabla \bar{S}_g \quad (I.17)$$

$$v_{gdo} = - \frac{k k_{ro}}{\mu_o} \nabla \bar{\phi}_o \left(\frac{B_g R_{so}}{B_o} \right) \quad (I.18)$$

sustituyendo las ecuaciones (I.17) y (I.18) en la ecuación (I.1) y sabiendo que ;

$$\rho_{gcy} = \frac{\rho_{gcw}}{B_g}$$

se tiene :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[\frac{\rho_{gcw}}{B_g} \left[\frac{k k_{rg}}{\mu_g} \nabla \bar{\phi}_g + \frac{k k_{ro}}{\mu_o} \frac{B_g R_{so}}{B_o} \nabla \bar{\phi}_o \right] \right] + \frac{q_{gr}^* \rho_{gcw}}{V_c B_g} \\ = \frac{\partial \left(\frac{\rho_{gcw}}{B_g} \theta S_{gt} \right)}{\partial t} \quad (I.19) \end{aligned}$$

simplificando términos se tiene :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[\frac{k k_{rg}}{\mu_g B_g} \nabla \bar{\phi}_g \right] + \nabla \cdot \left[\frac{k k_{ro} R_{so}}{\mu_o B_o} \nabla \bar{\phi}_o \right] + \frac{q_{glc} + q_{ocw} R_{so}}{V_c} \\ = \frac{\partial \left(\frac{\rho_{gcw}}{B_g} \theta S_{gt} \right)}{\partial t} \quad (I.20) \end{aligned}$$

junto con las siguientes relaciones adicionales :

$$S_o + S_g + S_v = 1 \quad (I.21)$$

$$P_{c_{g_o}} = P_g - P_o \quad (I.22a)$$

$$P_{c_{v_o}} = P_o - P_v \quad (I.22b)$$

Para definir adecuadamente el problema matemático, además de las ecuaciones de flujo (I.15), (I.16) y (I.20) es necesario especificar las condiciones iniciales y de frontera :

Condiciones iniciales :

$$P_f(x, y, z, 0) = P_{i_f}(x, y, z)$$

$$S_f(x, y, z, 0) = S_{i_f}(x, y, z)$$

lo anterior implica un equilibrio gravitacional y capilar.

Condiciones de frontera :

$$\left. \frac{\partial P_f}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0 \quad \text{y} \quad \left. \frac{\partial P_f}{\partial \eta} \right|_{\eta=\eta} = 0$$

Las ecuaciones (I.15), (I.16) y (I.20) generan un sistema de tres ecuaciones con seis incógnitas P_o , P_g , P_v , S_o , S_g y S_v . Este se puede reducir a tres incógnitas, acoplando las relaciones adicionales en las ecuaciones de flujo. Escogiendo como incógnitas a P_o , S_g y S_v las ecuaciones anteriores se transforman como :

Para el aceite :

$$\nabla \cdot \left[\lambda_o (\nabla P_o - \gamma_o \nabla D) \right] \pm \frac{q_{ocs}}{V_c} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\phi}{B_o} (1 - S_g - S_v) \right] \quad (I.23)$$

Para el gas :

$$\nabla \cdot \left[\lambda_g (\nabla P_o + \nabla P_{c_{go}} - \gamma_g \nabla D) \right] + \nabla \cdot \left[\lambda_o R_{so} (\nabla P_o - \gamma_o \nabla D) \right] \pm \frac{q_{glcs} + q_{ocs} R_{so}}{V_c} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi R_{so}}{B_o} (1 - S_g - S_v) \right] \quad (I.24)$$

Para el agua :

$$\nabla \cdot \left[\lambda_v (\nabla p_o - \nabla p_{c_{vo}} - \gamma_v \nabla D) \right] \pm \frac{q_{vcs}}{V_c} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial S_v}{B_v} \right]$$

(1.25)

CAPITULO II

MODELOS NUMÉRICOS

II.1 Expansión en diferencias finitas

Para dar solución numérica a una ecuación diferencial parcial no lineal, se tienen que proporcionar resultados en puntos discretos dentro del sistema, es decir, que las ecuaciones que se empleen en la simulación serán resueltas en forma numérica, esto determinará los parámetros dependientes, presiones y saturaciones en puntos discretos en espacio y tiempo.

La discretización en espacio se hace al dividir al yacimiento en un número determinado de celdas. Y con respecto al tiempo se realiza al tomar intervalos pequeños de este, para cada uno de los cuales se resuelve el problema.

La transformación de una ecuación diferencial continua a una forma discreta se hace generalmente utilizando el método de diferencias finitas que consiste en sustituir las derivadas de las ecuaciones diferenciales por fórmulas de derivación⁹. Así entonces las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales son reemplazadas por su equivalente en diferencias finitas, las cuales pueden obtenerse al expandir el polinomio de Taylor generado por una función en un punto, y después resolver para la derivada que se requiere.

Aproximación de la primera y segunda derivada en diferencias finitas:

- Primera derivada

Diferencia finita progresiva

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (\text{II.1})$$

Diferencia finita regresiva

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (\text{II.2})$$

Diferencia finita central

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2 \Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)^2 \quad (\text{II.3})$$

- Segunda derivada

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{f_{i+1} - 2 f_i + f_{i-1}}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}(\Delta x)^2 \quad (\text{II.4})$$

- Derivada con respecto al tiempo

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_t^{n+1} - f_t^n}{\Delta t} \quad (II.5)$$

II.2 Discretización de las ecuaciones de flujo

II.2.1 Ecuación del gas

Para este caso, se utilizarán diferencias regresivas para el tiempo y centrales para el espacio, para simplicidad se considerará flujo en dos dimensiones a partir de la ecuación (I.12) ;

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial m(P)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial m(P)}{\partial y} \right) + \frac{2q_{ca} P_{ca} T_y}{V_c T_{ca}} =$$

$$\emptyset \mu C S_g \frac{\partial m(P)}{\partial t}$$

haciendo :

$$U = K \frac{\partial m(P)}{\partial x} \quad (II.6)$$

tomando diferencias centrales :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{i+1/2,j} - U_{i-1/2,j}}{\Delta x} \quad (\text{II.7})$$

donde :

$$U_{i+1/2,j} = K_{i+1/2,j} \left. \frac{\partial m(P)}{\partial x} \right|_{i+1/2,j} \quad (\text{II.8})$$

$$U_{i-1/2,j} = K_{i-1/2,j} \left. \frac{\partial m(P)}{\partial x} \right|_{i-1/2,j} \quad (\text{II.9})$$

y :

$$\left. \frac{\partial m(P)}{\partial x} \right|_{i+1/2,j} = \frac{m(P)_{i+1,j} - m(P)_{i,j}}{\Delta x} \quad (\text{II.10})$$

$$\left. \frac{\partial m(P)}{\partial x} \right|_{i-1/2,j} = \frac{m(P)_{i,j} - m(P)_{i-1,j}}{\Delta x} \quad (\text{II.11})$$

Sustituyendo las ecuaciones (II.8), (II.9), (II.10) y (II.11) en la ecuación (II.7) se obtiene :

Para la dirección X :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x^2} \left[K_{i+1/2, j} [m(P)_{i+1, j} - m(P)_{i, j}] - K_{i-1/2, j} [m(P)_{i, j} - m(P)_{i-1, j}] \right] \quad (II.12)$$

Para la dirección Y :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{\Delta y^2} \left[K_{i, j+1/2} [m(P)_{i, j+1} - m(P)_{i, j}] - K_{i, j-1/2} [m(P)_{i, j} - m(P)_{i, j-1}] \right] \quad (II.13)$$

La derivada del potencial con respecto al tiempo, en términos de diferencias finitas, queda de la siguiente forma :

$$\frac{\partial m(P)}{\partial t} = \frac{m(P)_{i,j}^{n+1} - m(P)_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (\text{II.14})$$

sustituyendo las ecuaciones (II.12), (II.13) y (II.14) en la ecuación (I.12) se tiene :

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} \left[K_{i+1/2,j} [m(P)_{i+1,j} - m(P)_{i,j}] - \right.$$

$$\left. K_{i-1/2,j} [m(P)_{i,j} - m(P)_{i-1,j}] \right] +$$

$$\frac{1}{(\Delta y)^2} \left[K_{i,j+1/2} [m(P)_{i,j+1} - m(P)_{i,j}] - \right.$$

$$\left. K_{i,j-1/2} [m(P)_{i,j} - m(P)_{i,j-1}] \right] \pm \frac{2q_{ca} P_{ca} T_y}{V_c T_{ca}} =$$

$$\theta \mu C S_g \frac{m(P)_{i,j}^{n+1} - m(P)_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (\text{II.15})$$

Multiplicando la ecuación (II.15) por el volumen de la celda ($\Delta x \Delta y h$) se obtiene :

$$\frac{h \Delta y K_x}{\Delta x} \left|_{i+1/2, j} [m(P)_{i+1, j} - m(P)_{i, j}] -$$

$$\frac{h \Delta y K_x}{\Delta x} \left|_{i-1/2, j} [m(P)_{i, j} - m(P)_{i-1, j}] +$$

$$\frac{h \Delta x K_y}{\Delta y} \left|_{i, j+1/2} [m(P)_{i, j+1} - m(P)_{i, j}] -$$

$$\frac{h \Delta x K_y}{\Delta y} \left|_{i, j-1/2} [m(P)_{i, j} - m(P)_{i, j-1}] \pm \frac{2q_{co} P_{co} T_y}{T_{co}} =$$

$$\Delta x \Delta y h \theta \mu C S_g \frac{m(P)_{i, j}^{n+1} - m(P)_{i, j}^n}{\Delta t} \quad (II.16)$$

Haciendo :

$$\frac{h \Delta y K_x}{\Delta x} \left|_{i+1/2} = T_{i+1/2}$$

procediendo de manera similar los términos $i-1/2$, $j-1/2$ y $j-1/2$.

$$T_{i+1/2, j} [m(P)_{i+1, j} - m(P)_{i, j}] - T_{i-1/2, j} [m(P)_{i, j} - m(P)_{i-1, j}] +$$

$$T_{i, j+1/2} [m(P)_{i, j+1} - m(P)_{i, j}] - T_{i, j-1/2} [m(P)_{i, j} - m(P)_{i, j-1}] \dagger$$

$$\frac{2q_{c\#} P_{c\#} T_y}{T_{c\#}} = \frac{Vr_{i, j} \phi \mu c S_g}{\Delta t} [m(P)_{i, j} - m(P)_{i, j}] \quad (II.17)$$

Expresando la ecuación (II.17) en términos de operadores diferenciales se tiene :

$$\Delta T \Delta m(P) \dagger \frac{2q_{c\#} P_{c\#} T_y}{Vc T_{c\#}} = \frac{Vr_{i, j} \phi \mu c S_g}{\Delta t} \Delta_i [m(P)] \quad (II.18)$$

donde el operador Δ esta definido por :

$$\Delta T \Delta m(P) = \Delta x T \Delta x m(P) + \Delta y T \Delta y m(P)$$

$$\Delta x T \Delta x m(P) =$$

$$T_{i+1/2, j} [m(P)_{i+1, j} - m(P)_{i, j}] - T_{i-1/2, j} [m(P)_{i, j} - m(P)_{i-1, j}]$$

$$\Delta x \Delta y m(P) =$$

$$T_{i,j+1/2} [m(P)_{i,j+1} - m(P)_{i,j}] - T_{i,j-1/2} [m(P)_{i,j} - m(P)_{i,j-1}]$$

$$\Delta_t m(P) = m(P)_{i,j}^{n+1} - m(P)_{i,j}^n$$

II.2.2 Ecuación del Fluido Ligeramente Compresible (aceite)

Discretizando la ecuación (I.9) en términos de operadores diferenciales y de manera análoga al procedimiento antes visto.

$$\Delta T \Delta P \frac{1}{q^*} = \frac{Vr_{i,j} \phi \mu c S_o}{\Delta t} \Delta_t [P] \quad (II.19)$$

en donde los operadores ΔT , ΔP y $\Delta_t [P]$ ya fueron definidos anteriormente.

II.2.3 Ecuación de flujo Multifásico

Discretizando las ecuaciones (I.15), (I.16) y (I.20) en términos de operadores diferenciales :

$$\Delta T_o \Delta \bar{\phi}_o \frac{1}{q_{o,i,j}^{ca}} = \frac{Vr_{i,j}}{\Delta t} \Delta_t \left[\frac{\phi S_o}{B_o} \right] \quad (II.20)$$

$$\Delta T_v \Delta \bar{w} + q_{v,i,j}^{ca} = \frac{V_{r,i,j}}{\Delta t} \Delta_t \left[\frac{\emptyset S_v}{B_v} \right] \quad (II.21)$$

$$\Delta T_g \Delta \bar{w}_g + \Delta T_o R_e \Delta \bar{w}_o + q_{g,i,j}^{ca} = \frac{V_{r,i,j}}{\Delta t} \Delta_t \left[\frac{\emptyset S_g}{B_g} + \frac{\emptyset S_o R_e}{B_o} \right] \quad (II.22)$$

II.2.4 Cálculo de las transmisibilidades

Las transmisibilidades se definieron como :

$$T_x = \frac{\Delta y \ h \ K_x}{\Delta x}$$

$$T_y = \frac{\Delta x \ h \ K_y}{\Delta y}$$

Esta forma de evaluar las transmisibilidades resulta inadecuada cuando existen cambios drásticos de permeabilidad y/o tamaño de las celdas cercanas a la cual se están calculando las transmisibilidades, debido a lo que es necesario calcular estas con un promedio armónico. La forma de obtener este promedio se presenta a continuación :

Para la dirección x :

$$T_{x_{i,j}} = \frac{K_{i+1/2, j+1/2} h_{i,j} \Delta y_{i,j}}{[\Delta x_{i,j} + \Delta x_{i+1,j}] / 2} \quad (II.23)$$

donde $K_{i+1/2, j+1/2}$ es la permeabilidad que se obtiene con un promedio armónico :

$$\frac{\Delta x_{i,j} + \Delta x_{i+1,j}}{K_{i+1/2, j+1/2}} = \frac{\Delta x_{i,j}}{K_{i,j}} + \frac{\Delta x_{i+1,j}}{K_{i+1,j}} \quad (II.24)$$

despejando $K_{i+1/2, j+1/2}$ de la ecuación anterior se tiene :

$$K_{i+1/2, j+1/2} = \frac{[x_{i,j} + x_{i+1,j}] K_{i,j} K_{i+1,j}}{x_{i,j} K_{i+1,j} + x_{i+1,j} K_{i,j}} \quad (II.25)$$

sustituyendo la ecuación (II.25) en la ecuación (II.23) se tiene :

$$T_{x_{i,j}} = \frac{2 K_{i,j} K_{i+1,j} h_{i,j} \Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i,j} K_{i+1,j} + \Delta x_{i+1,j} K_{i,j}} \quad (II.26)$$

Siguiendo el mismo procedimiento ;

Para la dirección Y :

$$T_y(i,j) = \frac{2 K_{i,j} K_{i,j+1} h_{i,j} \Delta x_{i,j}}{\Delta y_{i,j} K_{i,j+1} + \Delta y_{i,j+1} K_{i,j}} \quad (\text{II.27})$$

CAPÍTULO III

ESQUEMAS DE SOLUCIÓN

Una vez que la(s) ecuación(es) diferencial(es) parcial(es) ha(n) sido discretizada(s), es necesario determinar el tiempo, al cual los términos de flujo serán evaluados, obteniéndose lo que se llama esquema de solución, que sirve para dar estabilidad y precisión a los sistemas de ecuaciones lineales. En general, se puede decir que mientras más implícito sea el esquema de solución, se tendrá una mayor estabilidad y se podrán utilizar intervalos de tiempo mayores, aunque entre mayor sea éste, habrá más dificultad para resolverlo.

Los esquemas comúnmente usados son⁴;

- Explícito
- Mixto
- Implícito
- Crank Nicolson

Considerando una ecuación de flujo monofásico, se ilustrará cada uno de los esquemas :

$$\frac{\partial \left(\frac{k}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial x} \right)}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{(III.1)}$$

la cual expresada en diferencias finitas centrales sera :

$$Tx_{i+1/2} (P_{i+1} - P_i) - Tx_{i-1/2} (P_i - P_{i-1}) = \frac{Vb_i}{\Delta t} (P_i^{n+1} - P_i^n) \quad (III.2)$$

III.1 Esquema Explícito

En este caso, las presiones y transmisibilidades de los términos de flujo se evalúan al nivel de tiempo conocido " n ", razón por la cual, es el esquema más sencillo. Expresandose de la siguiente manera :

$$Tx_{i+1/2}^n (P_{i+1}^n - P_i^n) - Tx_{i-1/2}^n (P_i^n - P_{i-1}^n) = \frac{Vb_i}{\Delta t} (P_i^{n+1} - P_i^n) \quad (III.3)$$

Se puede notar que para avanzar la solución de n a n+1 se aplicara la ecuación a cada uno de los puntos de la malla. Debido a su sencillez presenta problemas de estabilidad, teniendose que evaluar a intervalos pequeños de tiempo, esto provoca que su aplicación sea impráctica en problemas de simulación.

III.2 Esquema Mixto

Para este esquema las presiones se evalúan al tiempo n+1 y las

transmisibilidades se evaluarán al tiempo " n ". Por lo que la ecuación tendrá la forma siguiente :

$$TX_{i-1/2}^n (P_{i+1}^{n+1} - P_i^{n+1}) - TX_{i-1/2}^n (P_i^{n+1} - P_{i-1}^{n+1}) = \frac{Vb_i}{\Delta t} (P_i^{n+1} - P_i^n)$$

(III.4)

Por lo que para cada celda se tienen tres incógnitas ;

$$P_{i+1}^{n+1}, P_i^{n+1} \text{ y } P_{i-1}^{n+1}$$

y la solución de " n " a " n+1 " requerirá de escribir todas las ecuaciones de las celdas y resolver el sistema de ecuaciones lineales originado.

Este esquema se usa con éxito en simuladores areales y tridimensionales, donde no se den cambios bruscos de presión y/o saturaciones de un intervalo de tiempo a otro. Sin embargo, en simuladores de conificación podría presentar problemas de estabilidad.

III.3 Esquema Implícito

En este caso se evaluarán tanto las presiones como las transmisibilidades al nivel del tiempo " n+1 " quedando la ecuación de la siguiente manera :

$$Tx_{i+1/2}^{n+1} (P_{i+1}^{n+1} - P_i^{n+1}) - Tx_{i-1/2}^{n+1} (P_i^{n+1} - P_{i-1}^{n+1}) = \frac{Vb_i}{\Delta t} (P_i^{n+1} - P_i^n)$$

(III.5)

Nuevamente se escribe la ecuación para cada celda con las incógnitas;

$$P_{i+1}^{n+1}, P_i^{n+1} \text{ y } P_{i-1}^{n+1}$$

originando otra vez un sistema de ecuaciones, pero como las transmisibilidades T_x^{n+1} dependen de presiones al nivel $n+1$, será un sistema no lineal y su solución se obtendría por medio de técnicas iterativas.

Debido a esto, el esquema involucra un mayor esfuerzo de cómputo para avanzar de un nivel a otro, aunque se tiene la ventaja de poder usar incrementos de tiempo mayores que en el mixto y tener estabilidad. Para flujo multifásico, las técnicas de solución comúnmente combinan los dos últimos esquemas presentados.

III.4 Esquema Crank - Nicolson

Además de los esquemas anteriores se tiene el de Crank-Nicolson que involucra una combinación con valores de nivel de tiempo conocido y nuevo para las variables dependientes.

$n+1$ nivel tiempo nuevo
 $n+1/2$ nivel de tiempo medio
 n nivel tiempo conocido

$$\begin{aligned}
 & \theta \left[\text{Tx}_{i+1/2}^{n+1} (P_{i+1}^{n+1} - P_i^{n+1}) - \text{Tx}_{i-1/2}^{n+1} (P_i^{n+1} - P_{i-1}^{n+1}) \right] + \\
 & (1 - \theta) \left[\text{Tx}_{i+1/2}^n (P_{i+1}^n - P_i^n) - \text{Tx}_{i-1/2}^n (P_i^n - P_{i-1}^n) \right] = \\
 & = \frac{Vb_i}{\Delta t} (P_i^{n+1} - P_i^n) \qquad \qquad \qquad \text{(III.6)}
 \end{aligned}$$

donde : $\theta = 0$ es el esquema explícito
 $\theta = 1$ es el esquema implícito
 $\theta = \frac{1}{2}$ Crank - Nicolson

CAPITULO IV

MÉTODOS DE SOLUCIÓN

Al aplicar la(s) ecuación(es) diferencial(es) ya discretizada(s) a cada una de la celdas que constituyen la malla con la que se divide al yacimiento, da como resultado un sistema de ecuaciones.

Dentro las técnicas de solución de sistemas de ecuaciones lineales se tienen los denominados métodos directos o iterativos. Se dice que un método es directo cuando da la solución del sistema en forma exacta, en cambio en los iterativos se obtienen soluciones aproximadas ya que se fija una tolerancia preestablecida que termina el procedimiento iterativo.

IV.1 Métodos Directos

IV.1.1 Eliminación Gaussiana³

Las técnicas de solución directas de sistemas de ecuaciones lineales se utilizan cuando el número de ecuaciones involucradas no son muy grandes.

Los métodos directos se basan en la manipulación de técnicas operacionales permitidas en matrices. A continuación se da una descripción del método " Eliminación Gaussiana ".

Considerando un sistema de tres ecuaciones lineales :

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 = b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 = b_2$$

$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 = b_3$$

representando el sistema en forma matricial :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$A \bar{x} = \bar{B}$$

posteriormente se aumenta a la matriz de coeficientes el vector de términos conocidos \bar{B} , para formar la matriz ampliada de orden $n \times (n + 1)$ teniendo :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right]$$

intercambiando renglones si es necesario para hacer que el valor de a_{11} tenga la mayor magnitud de cualquier coeficiente en la primera columna, ya que no se permite un cero debido a que el elemento es el " pivote " para reducir la primera columna.

Después se hace que todos los elementos de la primera columna sean cero, restando el múltiplo adecuado del renglón uno , quedando de la forma siguiente :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right]$$

Se repite el procedimiento del segundo renglón al $n - 1$, colocando el coeficiente de mayor magnitud sobre la diagonal por el intercambio de renglones, de manera que se crean ceros en todas las posiciones abajo de la diagonal principal, obteniéndose un sistema triangular superior.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & b_3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{array} \right]$$

Se observa que aplicando una sustitución regresiva se obtienen los valores de las incógnitas del sistema.

Solucionando para x_n de la n-esima ecuación por :

$$x_n = b_n / a_{nn}$$

resolviendo para $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$ desde el renglón $n - 1$ hasta el primero a su vez por :

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j}{a_{ii}} \quad i = 1, \dots, n.$$

IV.1.2 Gauss Jourdan⁵

Este es una variante de la eliminación gaussiana, en él los elementos que están arriba de la diagonal principal se hacen cero al mismo tiempo que se crean los ceros bajo la misma, los elementos diagonales se hacen unidad al mismo tiempo que se ejecuta la reducción, esto transforma la matriz de coeficientes en la matriz identidad. Cuando se ha logrado esto la columna de elementos del segundo miembro se ha transformado en el vector solución. Es importante la selección del pivote para preservar la precisión aritmética.

De acuerdo a lo dicho la matriz aumentada tendría la forma siguiente:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right]$$

donde:

$$x_i = b_i$$

$$i = 1, \dots, n.$$

La solución es esencialmente la misma que se obtendría con el método gaussiano. Los errores por redondeo crearían imprecisiones en una forma ligeramente diferente. Mientras que el esquema de Gauss Jourdan parece que duplica el trabajo hecho con el procedimiento estándar, un conteo de las operaciones aritméticas mostrará que el método requiere casi de un 50 % más por lo tanto no es recomendable su uso.

IV.1.3 Descomposición L x U ^d

Este método es otra modificación de eliminación gaussiana (también llamada algoritmo de Crout o Cholesky por sus descubridores).

La matriz de coeficientes A se transforma al producto de dos matrices llamadas L y U. En donde U es una matriz triangular superior con una diagonal principal unitaria y L es una matriz triangular inferior.

Obteniendo las reglas para tal descomposición L x U a partir de la relación que dice que L x U = A. En el caso de una matriz de 4 x 4 ;

$$\begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} & 0 \\ \ell_{41} & \ell_{42} & \ell_{43} & \ell_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Multiplicando los renglones de L por la primera columna de U se obtiene ;

$$\ell_{11} = a_{11}, \quad \ell_{21} = a_{21}$$

$$\ell_{31} = a_{31}, \quad \ell_{41} = a_{41}$$

por lo que la primera columna de L es la misma que la primera de A.

Ahora multiplicando el primer renglón de L por las columnas de U ;

$$\ell_{11} u_{12} = a_{12} \quad \ell_{11} u_{13} = a_{13}$$

$$l_{11} u_{14} = a_{14}$$

de donde :

$$u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}}$$

$$u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}}$$

$$u_{14} = \frac{a_{14}}{l_{11}}$$

y queda determinado el primer renglón de U.

En el método se alterna, la obtención de una columna de L y un renglón de U, de manera que la fórmula general para obtener los elementos de L x U correspondientes a la matriz de coeficientes para n ecuaciones simultáneas se pueden escribir como ;

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \quad j \leq i \quad i = 1, \dots, n.$$

$$u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}}{l_{ii}} \quad i < j \quad j = 2, \dots, n.$$

para $j = 1$ la regla para l se reduce a ; $l_{ii} = a_{ii}$

para $i = 1$ la regla para u es ;

$$u_{ij} = \frac{a_{ij}}{\ell_{ii}} = \frac{a_{ij}}{\ell_{ii}}$$

La solución del conjunto de ecuaciones $A \bar{x} = \bar{b}$ se obtiene con rapidez con las matrices L y U . Una vez que la matriz de los coeficientes ha sido transformada a su equivalente LU , se está preparado para encontrar la solución del sistema que corresponde a cualquier vector \bar{b} del lado derecho de la unidad. La matriz L es en realidad un registro de las operaciones requeridas para hacer que la matriz de coeficientes A se transforme en una matriz triangular superior U . La ecuación general para la reducción de b a b' es :

$$b'_1 = b_1 / \ell_{11}$$

$$b'_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} b'_k}{\ell_{ii}} \quad i = 2, \dots, n.$$

las ecuaciones para la sustitución regresiva son :

$$x_n = b'_n$$

$$x_j = b'_j - \sum_{k=j+1}^n u_{jk} b'_k \quad j = n-1, \dots, n.$$

ilustrando lo anterior ;

es decir :

$$\alpha_i = b_i$$

$$\alpha_i \beta_i = c_i \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$a_i \beta_{i-1} + \alpha_i = b_i \quad i = 2, 3, \dots, n$$

despejando α_i y β_i del conjunto de ecuaciones anterior se tiene :

$$\alpha_i = b_i$$

$$\beta_i = c_i / \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\alpha_i = b_i - a_i \beta_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

que son las ecuaciones para las α'_i y β'_i de las matrices L y U.

Entonces un sistema de ecuaciones $A X = F$ puede expresarse como $L U X = F$. Haciendo $U X = Y$ se obtendrá el sistema $L Y = F$, el cual se resuelve en forma directa por sustitución hacia delante :

$$Y_1 = F_1 / \alpha_1 \quad y$$

$$Y_i = \frac{F_i - a_i Y_{i-1}}{\alpha_i}, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

Una vez calculado el vector Y, se puede evaluar el vector X en el sistema $U X = Y$, por sustitución hacia atrás :

$$X_n = Y_n \quad y$$

$$X_i = Y_i - \beta_i X_{i+1}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1$$

IV.1.5 Ordenamiento D²^{7,8}

Este método es aplicado en simulación de yacimientos cuando se tiene un ordenamiento especial para la malla denominado D - 2.

En la Fig. (IV.1) se muestra un ordenamiento normal y el ordenamiento D - 2, así como las matrices que genera cada uno respectivamente ;

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Ord. Normal

1	3	6
2	5	8
4	7	9

Ord. D - 2



Fig. IV.1

Para resolver los sistemas de ecuaciones que se generan, nótese la estructura de banda en ambos ordenamientos. Se utiliza el algoritmo de solución en bandas (bandsolve) que se explicará observando el procedimiento de eliminación gaussiana estándar. El primer paso de este, es el proceso de eliminación progresiva en el cual , mediante la resta de una ecuación de otra, se transforma a la matriz A en una matriz triangular superior U. Nótese que durante el proceso se introducen elementos diferentes de cero y son representados con un símbolo.

Para el método es ineficiente el manejar los ceros repetitivamente una vez que la matriz toma la forma triangular superior entonces la solución es simplemente calcular directamente renglón por renglón la presión como una sola incógnita en cada uno . Este proceso es llamado sustitución regresiva .En notación matricial se puede decir que el problema se convierte a :

en la i-ésima ecuación para la diagonal derecha . Esto da la siguiente relación :

$$W = (IJ - 2j + 1) [(J + 1)^2 + J] + \frac{J (J - 1) (2J - 1)}{3} + 3J (J - 1) + (J + 2)^2 + (J - 9) \quad (IV.1)$$

$$S = IJ^2 \quad (IV.2)$$

Para simplificar la expresión del trabajo para valores grandes de I + J, la notación para W se reduce a :

$$W = I J^3 \quad (IV.3)$$

Se puede ver de las ecuaciones (IV.2) y (IV.3) que el trabajo requerido y las etapas se incrementan drásticamente con la banda intermedia o más específicamente con la variable J , la cual es la dimensión mas corta de la malla, se toma ventaja con una orientación adecuada de la malla . Se ve de las ecuaciones (IV.2) y (IV.3) que Bandsolve podría ser muy efectivo para problemas tales como I = 20 y J = 2, en cuyo caso el requerimiento de etapas sería igual a 800 y el de trabajo a 16000. De otra manera para problemas de 20 por 20 los términos J² y J³ hacen a este método impráctico y menos competitivo que los métodos iterativos.

La ventaja de los métodos directos tales como Bandsolve es que dan una solución exacta, la cual no depende de un criterio de convergencia además están sujetos a errores por redondeo. En algunos casos el trabajo y etapas requeridas son más prácticos que en los métodos iterativos.

La cantidad de trabajo y etapas para métodos directos es predecible y podría ser idéntico en cada paso de tiempo, donde los iterativos dependen de un criterio de convergencia específico. El número de iteraciones requerido para encontrar este criterio depende, no solo de la malla sino también de las propiedades físicas del yacimiento, problema que cambia de una etapa de tiempo a otra.

IV.1.8 Ordenamiento D4^{7,8}

Este es otra forma de eliminación gaussiana, el cual toma ventaja de un reordenamiento de ecuaciones previo a la solución del vector. Fue publicado por Price y Coats y ahora usado ampliamente en la simulación de yacimientos. La matriz es reordenada mediante el ordenamiento de la malla en la siguiente forma:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Ord. Normal

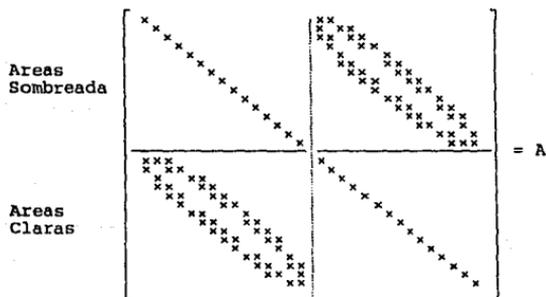
1	8	4	11
7	3	10	6
2	9	5	12

Ord. D - 4

Fig. IV.2

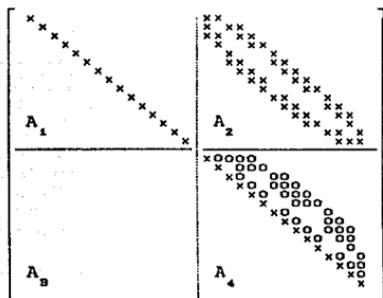
La Fig. (IV.2) ha sido sombreada en forma de tablero con las áreas blancas representando la primer mitad de los puntos de la malla y las áreas sombreadas la segunda mitad. Note que ninguna de las áreas claras o negras toca a otra misma para el flujo de fluidos dentro de la malla.

Mediante el reordenamiento de los puntos de la malla se puede cambiar a la matriz A (usando la misma nomenclatura para simplificar la matriz) se tiene la forma siguiente :



El procedimiento de solución D-4 es esencialmente igual a la eliminación gaussiana, pero nótese el orden para triangularizar la matriz o eliminar los elementos debajo de la diagonal principal , se puede saltar la primera mitad de la matriz puesto que no aparecen

elementos diferentes de cero . Por lo tanto se disminuye la cantidad de trabajo durante la eliminación progresiva, en por lo menos un factor de dos. Después de completarla se tiene ahora una matriz superior de la siguiente forma :



donde :

$$A \bar{x} = \bar{b}$$

Eliminación progresiva :

$$A_4 \bar{x}_2 = \bar{b}_2$$

lo cual transforma a A_3 en una matriz nula. Nótese que A_1 , A_2 y \bar{b}_1 no han cambiado, mientras que A_4 se transforma a una matriz bandeda.

Eliminación regresiva :

$$\bar{x}_1 = A_1^{-1} B_1 - A_1^{-1} A_2 \bar{x}_2$$

Note que las etapas requeridas tambien se redujeron considerablemente (por un factor de dos) despues solo la mitad inferior de la matriz necesita ser almacenada en la banda media.

La cantidad de trabajo y etapas para el D-4 es dado mediante las siguientes ecuaciones :

$$W_4 = \frac{I}{2} J (J + 1)^2 - \frac{J (J + 1)^2 (J - 2)}{2}$$
$$+ \frac{J^2 (J - 2) (J - 4)}{4} + \frac{5}{3} J (J - 1) (J - 2)$$
$$+ \frac{7}{4} J (J - 2) + \frac{I}{J} (J + 29)$$

$$S_4 = \left(\frac{I}{2} - \frac{J}{2} + 1 \right) J^2 + \frac{1}{3} J (J - 1) (J - 2)$$
$$+ \frac{1}{2} J (J - 2)$$

Para I, J mayores se simplifica a :

$$W_4 = \frac{IJ^3}{2} - \frac{J^4}{4}$$

$$S_4 = \frac{IJ^2}{2} - \frac{J^3}{6}$$

Para problemas grandes el método D-4 es aproximadamente dos veces más rápido que Bandsolve , si la malla es altamente alargada, será cuatro veces más rápida si la malla es areal con aproximadamente una etapa y media requerida comparada con Bandsolve .

IV.1.7 NSPIV^P

Es un método para resolver sistemas de ecuaciones lineales $A \bar{x} = \bar{b}$ cuyas matrices son dispersas, mediante la eliminación gaussiana por medio del intercambio de columnas sobre una matriz triangular de $n \times n$ para obtener una factorización de la forma :

$$A Q = L U$$

donde L es una matriz triangular inferior, U es una triangular superior y Q es una permutación de la matriz correspondiente a los intercambios de columnas. Para optimizar el almacenamiento, solamente el factor U es almacenado, por lo que durante la eliminación , las operaciones se

ejecutan sobre el lado derecho, para tener la solución " y " del sistema

$$L y = b$$

Una vez que U ha sido obtenida " x " es calculada para resolver el sistema triangular superior:

$$U Q^T x = y$$

Se han realizado varias pruebas en las cuales se muestra que el NSPIV es más eficiente que otros métodos actualmente usados para la eliminación gaussiana dispersa con pivoteo parcial.

Frecuentemente los sistemas de ecuaciones lineales dispersos con una estructura de banda natural en la cual todos los elementos diferentes de cero están agrupados a la diagonal principal de la matriz A. En problemas tales en que se tiene un pobre ordenamiento inicial, el NSPIV podría ser peor que algunas otras rutinas disponibles para la eliminación gaussiana en banda con pivoteo parcial. Sin embargo para una matriz dispersa con un ordenamiento de renglón dado, NSPIV requerirá de menos almacenamiento y también de menor tiempo de cálculo que una subrutina de banda.

IV.2 Métodos iterativos

IV.2.1 Jacobi⁵

Es un método de aproximaciones sucesivas en forma iterativa, que cuando converge, se aproxima a la solución en cada iteración partiendo de un valor inicial.

Supóngase un sistema $A \bar{x} = \bar{b}$; donde la matriz A se sustituye por :

$$A = D + R$$

donde D es una matriz de diagonal principal y R una que contiene ceros en su diagonal principal y los restantes son elementos de A.

Se tiene :

$$(D + R) \bar{x} = \bar{b}$$

$$D \bar{x} + R \bar{x} = \bar{b}$$

$$D \bar{x} = \bar{b} - R \bar{x}$$

premultiplicando por D^{-1} ;

$$\bar{x} = D^{-1} \bar{b} - D^{-1} R \bar{x}$$

ecuación que puede manejarse como fórmula de recurrencia de la siguiente manera :

$$\bar{x}^{(k+1)} = D^{-1} \bar{b} - D^{-1} R \bar{x}^{(k)} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (\text{IV.4})$$

Otra manera de describir la ecuación (IV.4) es a partir del sistema dado como : $A \bar{x} = B$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

despejando a x_1 de la primera ecuación, x_2 de la segunda etc..., se tiene :

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}} [b_1 - a_{12} x_2^k - a_{13} x_3^k - \dots - a_{1n} x_n^k]$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{a_{22}} [b_2 - a_{21} x_1^k - a_{23} x_3^k - \dots - a_{2n} x_n^k]$$

$$\vdots$$

$$x_n^{k+1} = \frac{1}{a_{nn}} [b_n - a_{n1} x_1^k - a_{n2} x_2^k - \dots - a_{nn-1} x_{n-1}^k]$$

$$\bar{x}^0 = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix}$$

Vector inicial

El proceso iterativo consiste en que a partir de un vector inicial, en donde se asignan valores a cada una de las incógnitas, se resuelven las ecuaciones y mediante este proceso mejorar los valores supuestos por medio de iteraciones. El proceso se continúa hasta que dos valores consecutivos de todas las variables presentan una variación menor a una tolerancia predeterminada.

Convergencia del método de Jacobi

El método tiene la desventaja de que no siempre converge a la solución del sistema y algunas veces lo hace , pero lentamente.

La condición necesaria para que el método converja consiste en que cada uno de los elementos que se encuentran en la diagonal principal de la matriz de coeficientes sean mayores , en valor absoluto , que los demás elementos del renglón correspondiente. Con esta condición no se garantiza que el método converge , sin embargo sino se cumple , si se puede asegurar la no convergencia del mismo.

La condición suficiente para la convergencia consiste en que los coeficientes de la diagonal principal sean mayores , en valor absoluto, que la suma de los demás elementos del renglón . Cuando ésta se cumple puede asegurarse que converge y, en caso contrario, no es posible asegurar nada.

En algunas ocasiones se presentan sistemas en los que se cumplen las condiciones anteriores solamente en algunas ecuaciones y , en tal caso, no se puede afirmar nada sobre la convergencia.

IV.2.2 Gauss Seidel⁵

Este método es similar al de Jacobi, pero permite acelerar la convergencia, al tomar ventaja del hecho de que cuando se calculan las incógnitas variables, éstas se sustituyen inmediatamente en la ecuación posterior.

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}} \left[b_1 - a_{12} x_2^k - a_{13} x_3^k - \dots - a_{1n} x_n^k \right]$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{a_{22}} \left[b_2 - a_{21} x_1^{k+1} - a_{23} x_3^k - \dots - a_{2n} x_n^k \right]$$

$$x_n^{k+1} = \frac{1}{a_{nn}} \left[b_n - a_{n1} x_1^{k+1} - a_{n2} x_2^{k+1} - \dots - a_{n,n-1} x_{n-1}^{k+1} \right]$$

El criterio de convergencia es el mismo que el de Jacobi.

IV.2.3 Sobre-relajación puntual sucesiva (PSOR)⁴

El concepto de sobre-relajación es un método de aceleramiento en la convergencia de los anteriores procesos iterativos. En este caso el nuevo valor de iteración " k+1 " se obtiene como parte del nuevo y parte del anterior " k ".

$$x_1^{k+1} = \frac{w}{a_{11}} \left[b_1 - a_{12} x_2^k - a_{13} x_3^k - \dots - a_{1n} x_n^k \right] + (1-w) x_1^k$$

$$x_2^{k+1} = \frac{w}{a_{22}} \left[b_2 - a_{21} x_1^{k+1} - a_{23} x_3^k - \dots - a_{2n} x_n^k \right] + (1-w) x_2^k$$

$$\vdots$$

$$x_n^{k+1} = \frac{w}{a_{nn}} \left[b_n - a_{n1} x_1^{k+1} - a_{n2} x_2^{k+1} - \dots - a_{nn-1} x_{n-1}^{k+1} \right] + (1-w) x_n^k$$

donde ; w es el parametro de relajación.

Durante la sobre-relajación, se amplifica la magnitud del cambio de presión durante cada iteración multiplicando este cambio por un parametro de relajación $w > 1$.

Si w estuviese comprendido entre cero y uno, se tendría bajo-relajación. Este procedimiento no es efectivo para el tipo de problemas bifásicos en la simulación de yacimientos.

Cuando $w = 1$, el PSOR se reduce al de Gauss Siedel.

IV.2.4 Sobre-relajación lineal sucesiva (LSOR)¹⁰

Este método es analogo al PSOR en muchas propiedades matemáticas y son utilizados para una, dos y tres dimensiones respectivamente.

Así la siguiente discusión de SOR (sobre-relajación sucesiva) podrá ser aplicada a PSOR, LSOR y SSOR. El único requerimiento para que SOR converja es que la matriz A sea diagonalmente dominante y que el valor del parámetro de iteración w sea menor que dos. La diagonal dominante se refiere a que el valor absoluto de la diagonal principal sea mayor o igual que la suma de los valores absolutos de los demás coeficientes para el mismo punto de la malla. El ritmo de convergencia puede ser analizado mediante un termino llamado factor de relajación , ω .

El concepto de sobre-relajación es un método para acelerar la convergencia de los procesos iterativos. Durante la sobre-relajación se amplifica la magnitud del cambio de presión durante cada iteración mediante la simple multiplicación de este cambio de presión por el parámetro de relajación w .

La aplicación óptima de LSOR seria a un problema bidimensional.

Debido a las consideraciones del problema se genera una matriz pentadiagonal y la ecuación general para cada punto de la malla es :

$$a_v P_{i-1,j} + a_n P_{i,j-1} + a_o P_{i,j} + a_e P_{i,j+1} + a_s P_{i,j+2} = b_{i,j}$$

En la Fig. (IV.3) se muestra una malla la cual será resuelta utilizando el metodo LSOR. Esta solución para todos los puntos en la linea i se aproximan a la solución de una matriz tridiagonal la cual es resuelta por el Algoritmo de Thomas.



Fig. IV.3

A continuación se muestra la representación esquemática del método :
 sea el siguiente un sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix}
 \begin{array}{c|c|c}
 \begin{array}{c} ao \ ae \\ aw \ ao \ ae \\ aw \ ao \end{array} & \begin{array}{c} as \\ as \\ as \end{array} & \\
 \hline
 \begin{array}{c} an \\ an \\ an \end{array} & \begin{array}{c} ao \ ae \\ aw \ ao \ ae \\ aw \ ao \end{array} & \begin{array}{c} as \\ as \\ as \end{array} \\
 \hline
 & \begin{array}{c} an \\ an \\ an \end{array} & \begin{array}{c} ao \ ae \\ aw \ ao \ ae \\ aw \ ao \end{array}
 \end{array} & = & \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ x \\ x \\ x \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} b \\ b \\ b \\ b \\ b \\ b \end{bmatrix}
 \end{bmatrix}$$

donde :

aw son los coeficientes en (i,j) de la matriz de incógnitas,
 ae son los coeficientes en $(i+1,j)$ de la matriz de incógnitas,
 an son los coeficientes en $(i,j-1)$ de la matriz de incógnitas,
 as son los coeficientes en $(i,j+1)$ de la matriz de incógnitas,
 ao son los coeficientes en (i,j) de la matriz de incógnitas,
 x es el vector de incógnitas, y

b es el vector de términos independientes,

el procedimiento LSOR transforma la matriz de la siguiente forma :

$$\begin{bmatrix} A_1 & C_1 & & \\ B_1 & A_2 & C_2 & \\ & B_2 & A_3 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

donde :

A_1 , A_2 y A_3 son matrices tridiagonales,

B_1 , B_2 , C_1 y C_2 son matrices diagonales,

V_1 , V_2 y V_3 son vectores de incógnitas,

U_1 , U_2 y U_3 son vectores de términos independientes.

Despejando V_1 , V_2 y V_3 :

$$A_1 V_1^* = -C_1 V_2 + U_1,$$

resolviendo por el método de Thomas y aplicando la relajación se obtiene:

$$V_i^{n+1} = w V_i^* + (1 - w) V_i ;$$

$$A_2 V_2^* = -B_1 V_1^{n+1} - C_2 V_3 + U_2$$

resolviendo por el método de Thomas y aplicando la relajación se obtiene:

$$V_2^{n+1} = w V_2^* + (1 - w) V_2 \quad ;$$

$$A_3 V_3^* = -B_2 V_2^{n+1} + U_3$$

resolviendo por el método de Thomas y aplicando la relajación se obtiene:

$$V_3^{n+1} = w V_3^* + (1 - w) V_3 \quad ;$$

Si los valores de V_1 , V_2 y V_3 coinciden con una tolerancia predeterminada, estos serán la solución real, en caso contrario se hacen las iteraciones necesarias hasta cumplir con la tolerancia.

IV.2.5 Dirección alternante (A D I P)^{11,12}

El método se basa en una técnica iterativa para la solución de ecuaciones diferenciales parciales implícitas, este al igual que los anteriores tiene por objetivo aproximar la solución de la ecuación en el menor tiempo de cómputo posible. Para la explicación del método considerese la siguiente ecuación :

$$\nabla^2 P = \frac{\partial P}{\partial t} \quad (IV.5)$$

si se discretiza esta para dos dimensiones se tiene ;

$$\Delta x^2 P^{n+1} + \Delta y^2 P^{n+1} = \frac{\Delta t P^n}{\Delta t} = \frac{P^{n+1} - P^n}{\Delta t} \quad (\text{IV.6})$$

$$P_{i+1,j}^{n+1} + P_{i-1,j}^{n+1} + P_{i,j+1}^{n+1} + P_{i,j-1}^{n+1} - (4 + \alpha) P_{i,j}^{n+1} = b_{i,j} \quad (\text{IV.7})$$

donde ;

$$\alpha = \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \quad \text{y} \quad \Delta y = \Delta x$$

$$b_{i,j} = -\alpha P_{i,j}^n$$

El procedimiento implícito de dirección alternante (ADIP) aproxima la ecuación (IV.6) como :

$$\Delta x^2 P^* + \Delta y^2 P^n = \frac{2}{\Delta t} (P^* - P^n) \quad (\text{IV.8a})$$

$$\Delta x^2 P^* + \Delta y^2 P^{n+1} = \frac{2}{\Delta t} (P^* - P^n) \quad (\text{IV.8b})$$

el término $P^* \rightarrow P^{n+1/2}$. Cada una de las ecuaciones involucra la solución de un problema en una dimensión (una matriz tridiagonal) en contraposición al problema en dos dimensiones correspondiente a una forma implícita de la ecuación (IV.7).

Procedimiento implícito de Douglas - Rachford

Se trata de una extensión de la ecuación (IV.8) en tres dimensiones, por lo que resulta inestable.

$$\Delta x^2 P^* + \Delta y^2 P^n + \Delta z^2 P^n = \frac{3}{\Delta t} (P^* - P^n) \quad (IV.9a)$$

$$\Delta x^2 P^* + \Delta y^2 P^{**} + \Delta z^2 P^n = \frac{3}{\Delta t} (P^{**} - P^*) \quad (IV.9b)$$

$$\Delta x^2 P^* + \Delta y^2 P^{**} + \Delta z^2 P^{n+1} = \frac{3}{\Delta t} (P^{n+1} - P^{**}) \quad (IV.9c)$$

Douglas y Rachford propusieron la forma estable :

$$\Delta x^2 P^* + \Delta y^2 P^n + \Delta z^2 P^n = \frac{1}{\Delta t} (P^* - P^n) \quad (IV.10a)$$

$$\Delta x^2 P^* + \Delta y^2 P^{**} + \Delta z^2 P^n = \frac{1}{\Delta t} (P^{**} - P^n) \quad (IV.10b)$$

$$\Delta x^2 P^* + \Delta y^2 P^{**} + \Delta z^2 P^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} (P^{n+1} - P^n) \quad (IV.10c)$$

esta forma es también estable en dos dimensiones, pero involucra mayor error de truncamiento que la ecuación (IV.8). Los términos P^* y P^{**} pueden ser vistos como la primera y segunda aproximación de P^{n+1} .

Técnica iterativa de dirección alternante

de (ADIPIT) Douglas - Rachford

Para evitar la labor de resolver directamente, empleando el procedimiento ADIP de Douglas - Rachford, ecuación (IV.10), esta se puede resolver como :

$$\Delta x^2 P^* + \Delta y^2 P^k + \Delta z^2 P^k = H_k (P^* - P^k) \quad (\text{IV.11a})$$

$$\Delta x^2 P^* + \Delta y^2 P^{**} + \Delta z^2 P^k = H_k (P^{**} - P^k) \quad (\text{IV.11b})$$

$$\Delta x^2 P^* + \Delta y^2 P^{**} + \Delta z^2 P^{k+1} = H_k (P^{k+1} - P^k) \quad (\text{IV.11c})$$

para asegurar la convergencia, el mismo parámetro de iteración de H_k es usado en cada uno de los tres pasos. Sin embargo, H_k es variado de una iteración a otra.

La solución de P^* , P^{**} , P^{k+1} de las ecuaciones (IV.11) respectivamente, constituye una iteración , donde K iteraciones constituyen un ciclo. De este modo, un ciclo involucra la solución de las ecuaciones (IV.11) para $k = 1, 2, 3, \dots, K$ usando los parámetros H_1, H_2, \dots, H_k . Los ciclos se repiten hasta que la convergencia es obtenida. Considere la ecuación :

$$\nabla^2 P + q(x, y, z) = \alpha \frac{\partial P}{\partial t}$$

en diferencias finitas :

$$\Delta^2 P^{n+1} + Q = \frac{\alpha}{\Delta t} (P^{n+1} - P^n) \quad \Delta$$

$$\Delta^2 P^{n+1} - \frac{\alpha}{\Delta t} P^{n+1} = -\frac{\alpha}{\Delta t} P^n - Q = -B_{t,j}$$

entonces :

$$\Delta x^2 P^* + \Delta y^2 P^k + \Delta z^2 P^k - \frac{\alpha}{\Delta t} P^* = H_k (P^* - P^k) - B$$

$$\Delta x^2 P^* + \Delta y^2 P^{**} + \Delta z^2 P^k - \frac{\alpha}{\Delta t} P^{**} = H_k (P^{**} - P^k) - B$$

$$\Delta x^2 P^* + \Delta y^2 P^{**} + \Delta z^2 P^{k+1} - \frac{\alpha}{\Delta t} P^{k+1} = H_k (P^{k+1} - P^k) - B$$

donde P^k , P^* , P^{**} , P^{k+1} son aproximaciones a los valores al nuevo paso de tiempo, P^{n+1} .

Para dos dimensiones quedaría como :

$$\Delta x^2 P^* + \Delta y^2 P^k - \frac{\alpha}{\Delta t} P^* = H_k (P^* - P^k) - B$$

$$\Delta x^2 P^* + \Delta y^2 P^{k+1} - \frac{\alpha}{\Delta t} P^{k+1} = H_k (P^{k+1} - P^k) - B$$

ADIP iterativo de Peaceman - Rachford

Para dos dimensiones :

$$\Delta x^2 P^* + \Delta y^2 P^k - \frac{\alpha}{\Delta t} P^* = H_K (P^* - P^k) - B$$

$$\Delta x^2 P^* + \Delta y^2 P^{k+1} - \frac{\alpha}{\Delta t} P^{k+1} = H_K (P^{k+1} - P^*) - B$$

Nótese que la única diferencia entre este método y el de Douglas - Rachford en dos dimensiones es el uso de P^* en vez de P^k en el lado derecho de la segunda ecuación (barrido en Y).

Parámetros de iteración

$$h_{min} = M_{in} \left[\frac{\pi^2}{2 N x^2} \frac{1}{1 + \frac{Ky}{Kx} \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}}, \frac{\pi^2}{2 N y^2} \frac{1}{1 + \frac{Kx}{Ky} \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}} \right]$$

Los parámetros de iteración, pueden ser asociados en una secuencia geométrica, esto es ;

$$\frac{h_{k+1}}{h_k} = \alpha$$

Si un número total de parámetros son seleccionados por ciclo, entonces :

$$\frac{h_k}{h_i} = \alpha^{K-1} \quad \text{ó} \quad \left[\frac{h_k}{h_i} \right]^{1/(K-1)} = \alpha$$

En la práctica los parámetros de iteración son normalizados y están definidos como :

$$H_k = h_k (\Sigma T)$$

donde la ; $\Sigma T = T_{x_{i+1/2}} + T_{x_{i-1/2}} + T_{y_{j+1/2}} + T_{y_{j-1/2}}$

Si h_i, h_k (parámetro mínimo y máximo respectivamente) y el número de parámetros por ciclo, K , son conocidos, entonces α puede ser calculado como :

$$\text{Ln } \alpha = \frac{\text{Ln} (h_k / h_i)}{K - 1}$$

4 - 5 parámetros implica un rango pequeño (0.01 - 2.0)

6 - 8 parámetros implica uno grande (0.0001 - 2.0)

Ejemplo : Estime un conjunto de parámetros de iteración para un problema de sección transversal con los siguientes datos :

$N_x = 30$	$K_y = 20$ [md]
$N_y = 8$	$L_x = 6000$ [pie]
$K_x = 100$ [md]	$L_y = 160$ [pie]

Solución

$$\Delta x = 6000 / 30 = 20$$

$$\Delta y = 160 / 8 = 30$$

por lo tanto se calcula a :

$$h_{min} = h_1 = 0.0003$$

Ya que $T_y \gg T_x$, $h_k = 2$ y usando $k = 7$ parámetros por ciclo:

$$\ln \alpha = \frac{\ln (2 / 0.0003)}{6} = 1.47 \quad \text{implica} \quad \alpha = 4.35$$

por lo que se tiene:

$$h_1 = 0.0003$$

$$h_2 = 4.35 (0.0246) = 0.107$$

$$h_2 = 4.35 (0.0003) = 0.0013$$

$$h_3 = 4.35 (0.107) = 0.466$$

$$h_3 = 4.35 (0.0013) = 0.00566$$

$$h_4 = 4.35 (0.466) = 2.0$$

$$h_4 = 4.35 (0.00566) = 0.0246$$

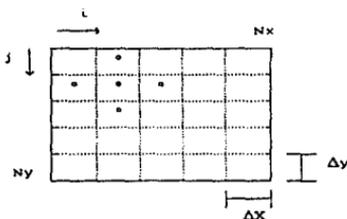
IV.2.6 Procedimiento fuertemente implícito (S I P)^{13,14}

Este método ha sido desarrollado para resolver los sistemas de ecuaciones que surgen de la solución aproximada de ecuaciones diferenciales parciales multidimensionales por medio de técnicas numéricas implícitas . Tiene sus ventajas , el ritmo de convergencia no

depende fuertemente de la naturaleza de la matriz de coeficientes para solucionarla, también no es sensible a la elección de parámetros de iteración y como resultado éstos pueden ser calculados de la matriz de coeficientes, finalmente reduce significativamente el trabajo computacional necesario para resolverlo.

El SIP involucra la solución del sistema de ecuaciones lineales mediante un proceso de eliminación trabajando sobre una versión modificada del sistema matricial original. La matriz M es transformada a la matriz $M + N$ la cual es más fácilmente factorizable en un producto de $L U$. Las matrices L y U contienen solamente tres elementos diferentes de cero en cada renglón ; esto minimiza el trabajo requerido para resolver el sistema (para un problema bidimensional).

Por ejemplo para un sistema bidimensional



Se genera un sistema matricial pentadiagonal al cual se le aplica el método para una solución más rápida.

$$L U = (M + N) = \begin{bmatrix} x & x & 0 & x & & & \\ x & x & x & 0 & x & & \\ 0 & x & x & x & 0 & x & \\ x & 0 & x & x & x & 0 & x \\ & x & 0 & x & x & x & 0 \\ & & x & 0 & x & x & x \\ & & & x & 0 & x & x \end{bmatrix}$$

La matriz resultante $M + N$ tiene 7 diagonales diferentes de cero, incluyendo 5 en las localizaciones correspondientes a M y a otras dos que están dentro de las diagonales B y H .

La factorización de $M + N$ puede referirse como una factorización aproximada de M . Las matrices L y U son entonces usadas en un procedimiento de solución secuencial progresiva y regresiva. Quedando el algoritmo para la solución final de la siguiente manera :

$$b_{ij} = \frac{B_{ij}}{1 + \alpha e_{i,j-1}}$$

$$c_{ij} = \frac{D_{ij}}{1 + \alpha f_{i-1,j}}$$

$$d_{ij} = E_{ij} + \alpha (C_{ij} + G_{ij}) - c_{ij} e_{i-1,j} - b_{ij} f_{i,j-1}$$

$$e_{ij} = \frac{F_{ij} - \alpha C_{ij}}{d_{ij}}$$

$$f_{ij} = \frac{H_{ij} - \alpha G_{ij}}{d_{ij}}$$

$$C_{ij} = b_{ij} e_{i,j-1}$$

$$G_{ij} = c_{ij} f_{i-1,j}$$

Procedimiento Iterativo

Con la matriz $M + N$ definida, el proceso iterativo es derivado adicionando en ambos lados NP y del lado derecho ($MP - MP$)

$$M\bar{P} = q$$

$$M\bar{P} + N\bar{P} = q + N\bar{P} + MP - MP$$

$$(M + N) \bar{P} = q + (M + N) \bar{P} - NP \quad (IV.12)$$

Así $M + N$ es fácilmente factorizada, el término izquierdo puede ser solucionado para P si el término derecho es conocido. La ecuación (IV.12) por tanto provee la base general del procedimiento de iteración cuando se escribe en la forma ;

$$(M + N) P^{n+1} = (M + N) P^n - (MP^n - q)$$

Los valores de P para las $n + 1$ iteraciones pueden ser calculados de conocer la P a la iteración anterior n , así definiendo los vectores :

$$\Delta P^{n+1} = P^{n+1} - P^n$$

$$R^n = q - MP$$

por lo tanto ;

$$(M + N) \Delta P^{n+1} = R^n$$

Reemplazando $M + N$ por LU se tiene:

$$L U \Delta P^{n+1} = R^n$$

y definiendo el vector como :

$$V = U \Delta P^{n+1}$$

quedará :

$$L V = R^n$$

por último para el punto (i, j) las soluciones progresiva y regresiva son respectivamente:

$$b_{i,j} V_{i,j-1} + c_{i,j} V_{i-1,j} + d_{i,j} V_{i,j} = R_{i,j}^n$$

donde :

$$V_{i,j} = (R_{i,j}^n - b_{i,j} V_{i,j-1} - c_{i,j} V_{i-1,j}) / d_{i,j}$$

$$\Delta P_{i,j}^{n+1} + e_{i,j} \Delta P_{i+1,j}^{n+1} + f_{i,j} \Delta P_{i,j+1}^{n+1} = V_{i,j}$$

donde :

$$\Delta P_{i,j}^{n+1} = V_{i,j} - e_{i,j} \Delta P_{i+1,j}^{n+1} - f_{i,j} \Delta P_{i,j+1}^{n+1}$$

IV.4.1. Método implícito

En el método implícito propuesto para la solución de ecuaciones diferenciales en estado estacionario del tipo que son comunes en simulaciones transitorias de yacimientos, el método utiliza aproximaciones sucesivas para lograr una representación de la concentración.

Algunas modificaciones muestran que el método es altamente convergente comparado con otros métodos iterativos. El costo de computación es insignificante al usar los parámetros de saturación variables de saturación y relaciones de absorción de fluidos diagonales en matrices simétricas.

Parte del consumo de tiempo en los cálculos en simuladores numéricos de yacimientos es la solución de grandes sistemas de ecuaciones simultáneas.

$$A X = B \quad (IV.14)$$

Por ejemplo cuando se realiza una solución por el método IMPES (Implicit Pressure - Explicit Saturation), X representa la presión o el potencial, mientras A seta la matriz de coeficientes de transmisibilidades que describen el interflujos de fluidos entre bloques. En la aproximación de diferencias finitas, "A" es una matriz bandedada dispersa, como se muestra en la Fig. (IV.4), para un sistema en dos dimensiones. A menudo, el elemento de la diagonal principal es aproximadamente igual a la suma negativa de los elementos de las otras diagonales en un renglón dado.

IV.2.7 Orthomin¹⁵

Es un método iterativo propuesto para la solución de matrices dispersas estructuradas en banda, del tipo que son común en simuladores numéricos de yacimientos. El método utiliza ortogonalizaciones y minimizaciones para lograr más rápidamente la convergencia.

Pruebas realizadas muestran que el método es altamente competitivo comparado con otras técnicas iterativas. El ritmo de convergencia es insensible al uso de parámetros de iteración, matrices no simétricas y relaciones de anchos de bandas diagonales en matrices simétricas.

Parte del consumo de tiempo en los cálculos en simuladores numéricos de yacimientos es la solución de grandes sistemas de ecuaciones simultáneas.

$$A \bar{x} = \bar{b} \quad (IV.13)$$

Por ejemplo cuando se realiza una solución por el método IMPES (Implicit Pressure - Explicit Saturation), x representa la presión o el potencial, mientras A será la matriz de coeficientes de transmisibilidades que describen el interflujo de fluidos entre bloques. En la aproximación de diferencias finitas, " A " es una matriz bandeada dispersa, como se muestra en la Fig. (IV.4), para un sistema en dos dimensiones. A menudo, el elemento de la diagonal principal es aproximadamente igual a la suma negativa de los elementos de las otras diagonales en un renglón dado.

Aquí el problema es encontrar una técnica de minimización competitiva aplicable a matrices dispersas no simétricas.

El método que ha sido desarrollado es el Orthomin, llamado así porque usa ambas, ortogonalizaciones y minimizaciones para lograr un alto ritmo de convergencia. Es similar a otras técnicas iterativas en el uso de una aproximación L D U a la matriz original A. Donde difiere radicalmente, es en las medidas tomadas para incrementar el ritmo de convergencia, esto es, ortogonalizaciones y minimizaciones contra parámetros de estimación.

Descomposición L D U

Durante las etapas dadas en el proceso de solución es necesario invertir la ecuación (IV.13) o equivalentemente, la ecuación residual:

$$A \delta x = r^n \quad (IV.14)$$

donde r es el residual restante en la n-ésima iteración y δx es el vector de cambio.

La matriz A es descompuesta en forma L D U como se muestra en la Fig. (IV.5). La descomposición de Dupont et al fué utilizada por su simplicidad, aunque alguna descomposición L D U sería suficiente. En este caso, en dos dimensiones el i-ésimo elemento de la diagonal de D está dada por :

$$d_i = 1 / (\alpha_{ii} d_i' \alpha_{zi}' + \alpha_{gi} d_i'' \alpha_{4i}'') \quad (IV.15)$$

en la matriz original A.

En lugar de resolver la ecuación (IV.14) :

$$L D U \delta x^n = r^n \quad (\text{IV.16})$$

es resuelta por un vector cambio δx^n , por sustitución progresiva y regresiva, el cual es un proceso eficiente.

$$Z = L^{-1} r^n \quad (\text{IV.17})$$

$$Y = D^{-1} Z \quad (\text{IV.18})$$

$$\delta x^n = U^{-1} Y \quad (\text{IV.19})$$

La iteración de ORTHOMIN

En la n-ésima iteración un vector cambio ha sido producido por la inversión L D U, y de las iteraciones previas un conjunto de vectores $\delta x^{n-1}, \delta x^{n-2} \dots \delta x^1$ han sido obtenidos. Se supone que de los vectores cambio un conjunto de vectores ortogonales $Aq^{n-1}, Aq^{n-2} \dots Aq^1$ han sido construidos. Usando el último vector cambio δx^n , un nuevo vector q^n es producido, por lo que Aq^n es ortogonal para todos los Aq^i 's previos.

$$A q^n = A \delta x^n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i A q^i \quad (\text{IV.20})$$

donde los a_i 's son los coeficientes de ortogonalidad.

Por ortogonalidad :

$$(A q^n / A q^t) = 0 \quad (IV.21)$$

Por lo tanto

$$a_t = \frac{(A \delta x^n / A q^t)}{(A q^t / A q^n)} \quad (IV.22)$$

Siguiendo, es deseado minimizar $\| r^n - w A q^n \|$ donde w es un parámetro de minimización. En la norma segunda (un ajuste por mínimos cuadrados).

$$w = \frac{(A q^n / r^n)}{(A q^n / A q^n)} \quad (IV.23)$$

Evidentemente, en principio un método directo ha sido construido después de N iteraciones (N = número de ecuaciones), hay N vectores linealmente independientes para cubrir totalmente el espacio. Sin embargo, en la práctica, serios errores numéricos de redondeo ocurren, si también algunas ortogonalizaciones son ejecutadas. Además, el trabajo requerido por iteración se incrementa debido a que hay más coeficientes de ortogonalidad para evaluar en la ecuación (IV.22).

Pruebas numéricas han demostrado que 4 ó 5 ortogonalizaciones es óptimo.

Haciendo solamente una o dos ortogonalizaciones resulta también en un ritmo de convergencia lento, sin embargo, después de cinco ortogonalizaciones no hay un incremento apreciable en el ritmo de convergencia.

El significado de minimización y ortogonalización

El significado de minimización es bastante obvio. Un nuevo vector q^n fue producido y su longitud ajustada por un factor w , para minimizar el nuevo residual $r^n - wAq^n$. El efecto de minimización no es pequeño. En problemas típicos el rango de magnitud de w fue de 0.1 a 300 y puede ser positivo o negativo. Debido a que es ejecutada una minimización durante cada iteración, el nuevo residual no puede ser mayor que uno precedente. Por lo tanto, el método no puede diverger, pero una prueba definitiva de convergencia no ha sido encontrada.

El efecto de ortogonalización no es directo. La descomposición $L D U$ no es exactamente lo mismo que A . La inversión $L D U$ tiene una tendencia a producir vectores δx^i en ciertas direcciones y no en otras.

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

CAPITULO V

COMPARACIÓN DE RESULTADOS

Con la finalidad de aplicar los métodos antes vistos, se utilizó un modelo en coordenadas ($r - z$) para flujo de gas que permite simular el comportamiento de un yacimiento en las cercanías de un pozo.

Las características y consideraciones generales del modelo son :

- Yacimiento cilíndrico con radio igual a r_w .
- Pozo en el centro del cilindro con radio igual a r_w .
- Flujo laminar e isotérmico.
- Se desprecian efectos gravitacionales y capilares.
- No existen reacciones químicas entre el fluido y el medio poroso.
- Utiliza una malla con nodos centrados y espaciamiento logarítmico en la dirección r .
- En la dirección z , la malla tiene una distribución uniforme con nodos centrados.
- Se considera término fuente o sumidero.
- La viscosidad y compresibilidad, sólo son función de la presión y se evalúan al inicio de cada paso de tiempo.
- Las condiciones de frontera se simulan igualando a cero las transmisibilidades.
- Se emplea el potencial de los gases reales definido por :

$$m(p) = \int_{p_b}^p \frac{P}{\mu(p) z(p)} dp$$

Finalmente se tiene que :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r k \frac{\partial m(P)}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[k \frac{\partial m(P)}{\partial z} \right] + \frac{P_{cs} q_{cs} T_y}{T_{cs} V_c} =$$

$$\emptyset \mu_g C_g S_g \frac{\partial m(P)}{\partial t}$$

es la ecuación diferencial que representa el flujo de gas en un medio poroso considerando el termino fuente o sumidero y expresado en función del potencial de los gases reales.

Los datos con los que se alimenta el modelo son los siguientes:

- Diámetro de la tubería de producción.
- Profundidad del pozo.
- Valor de rugosidad de la tubería de producción.
- Gasto de gas por producir.
- Numero de bloques en la dirección r.
- Número de bloques en la dirección z.
- Número de cambios para abrir o cerrar pozos.
- Presión inicial del yacimiento.

- Tiempo total de simulación.
- Incremento de tiempo.
- Radio del pozo.
- Radio de drenaje.
- Longitud del yacimiento en la dirección z.
- Temperatura del yacimiento.
- Longitud de las celdas en la dirección r.
- Longitud de las celdas en la dirección z.
- Intervalo del potencial del gas.
- Presión a condiciones estándar.
- Temperatura a condiciones estándar.
- Porosidad.
- Permeabilidad en la dirección r.
- Permeabilidad en la dirección z.
- Saturación del gas.

Se realizaron varias corridas variando el dimensionamiento de la malla, el incremento del tiempo (Δt) y el tiempo total de simulación (TOTIME) con la finalidad de comparar los resultados obtenidos al aplicar cada uno de los métodos de solución más utilizados en la simulación numérica de yacimientos, tales como: LSOR, SIP, ADIP y ORTHOMIN (métodos iterativos), D-2, D-4, NSPIV (métodos directos).

Cabe mencionar que en las pruebas efectuadas se consideró al yacimiento homogéneo e isótropo. En vista que los resultados obtenidos al aplicar los métodos directos fueron muy aproximados entre sí y de

igual manera para los métodos iterativos, se toman como representativos de cada uno de los métodos al D-4 y al SIP para fines de comparación.

En las Figs. (V.1) a (V.8) se presentan los resultados en forma gráfica.

PRESION DE FONDO FLUYENDO VS. RADIO

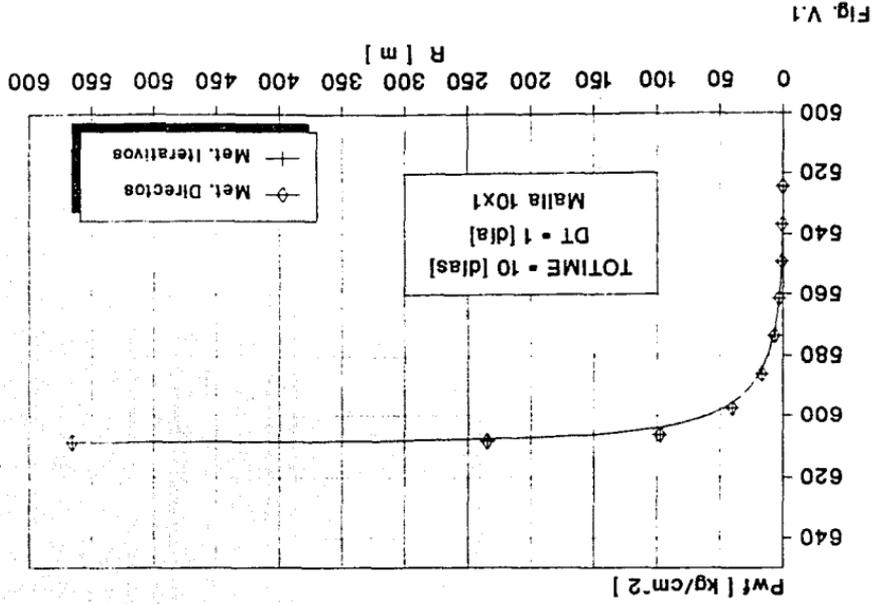


Fig. V.1

PRESION DE FONDO FLUYENDO VS.
TIEMPO

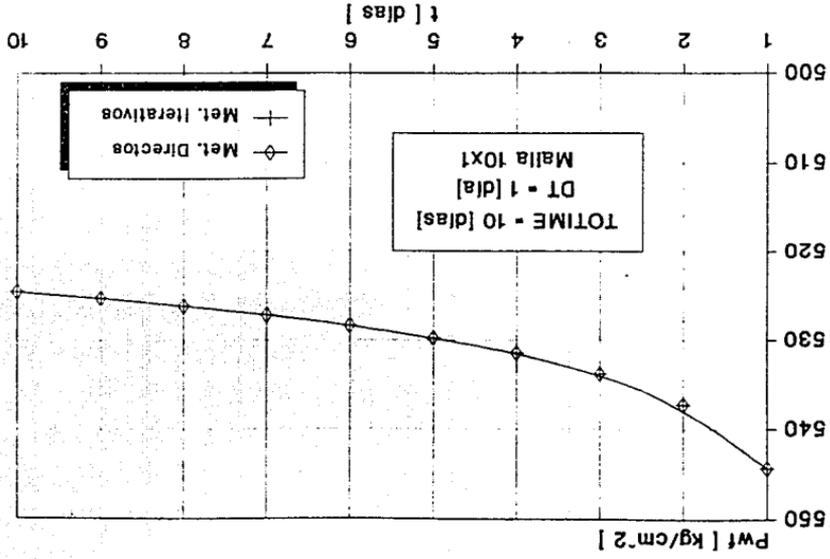


Fig. V.2

PRESION DE FONDO FLUYENDO VS. RADIO

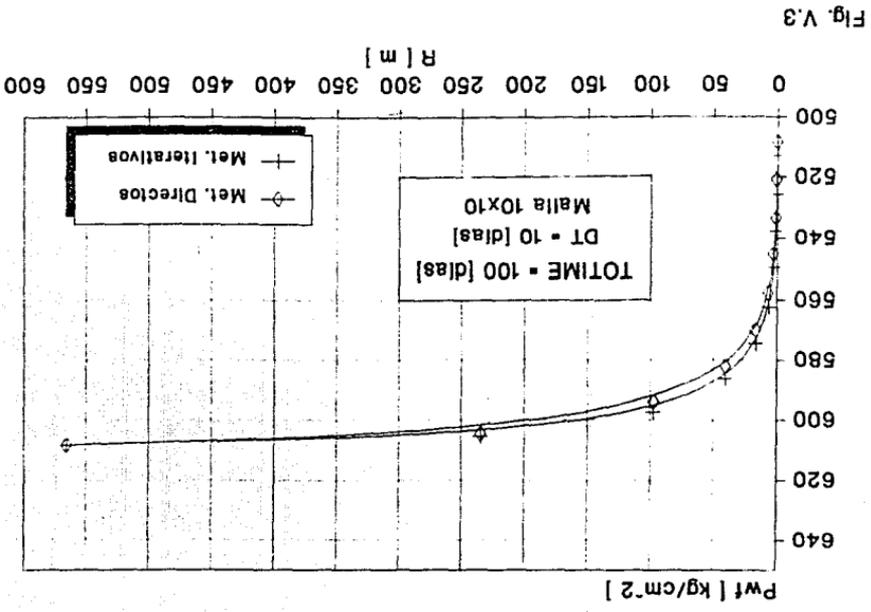


Fig. V.3

PRESION DE FONDO FLUYENDO VS. TIEMPO

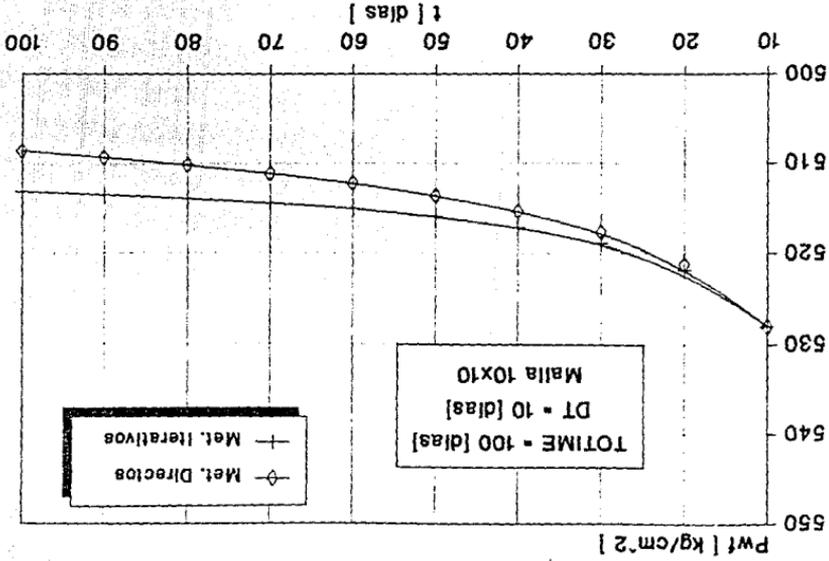


Fig. V.4

PRESION DE FONDO FLYENDO VS. RADIO

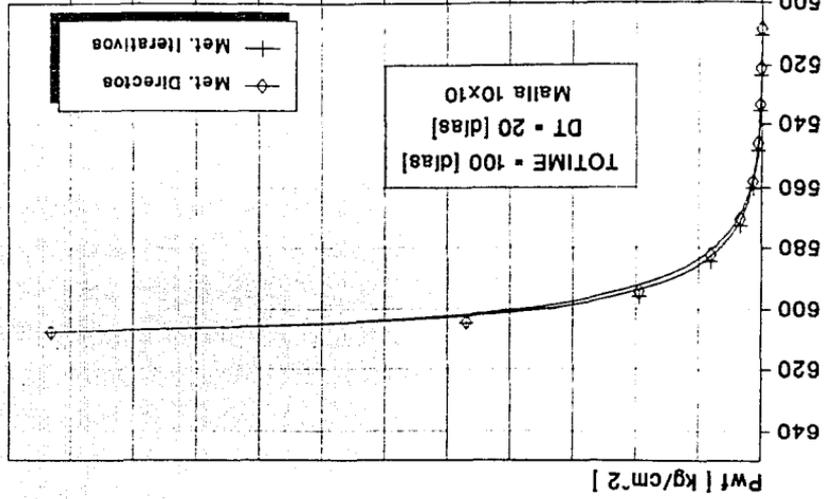


Fig. V.6

PRESION DE FONDO FLUYENDO VS. TIEMPO

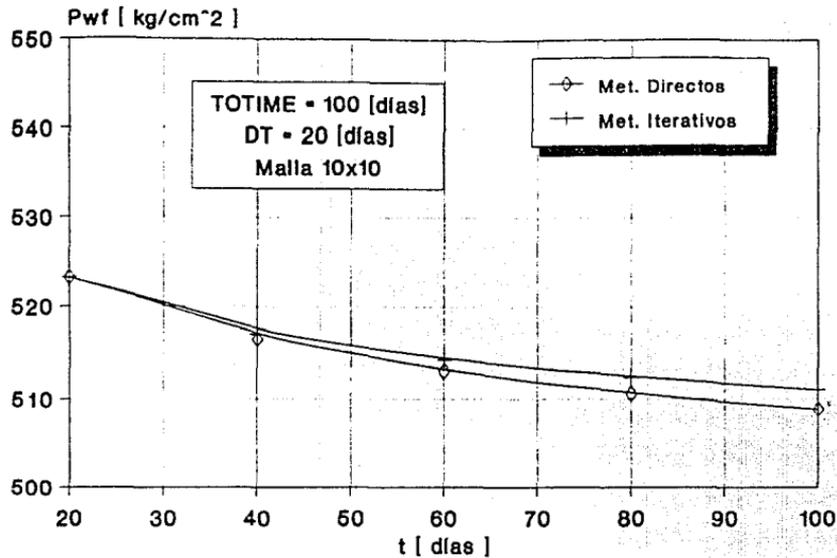


Fig. V.6

PRESION DE FONDO FLUYENDO VS. RADIO

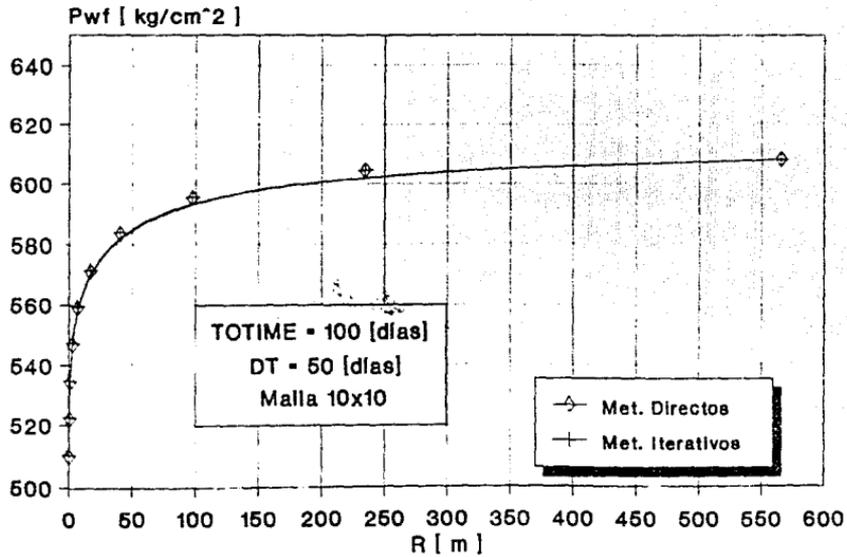


Fig. V.7

PRESION DE FONDO FLUYENDO VS. TIEMPO

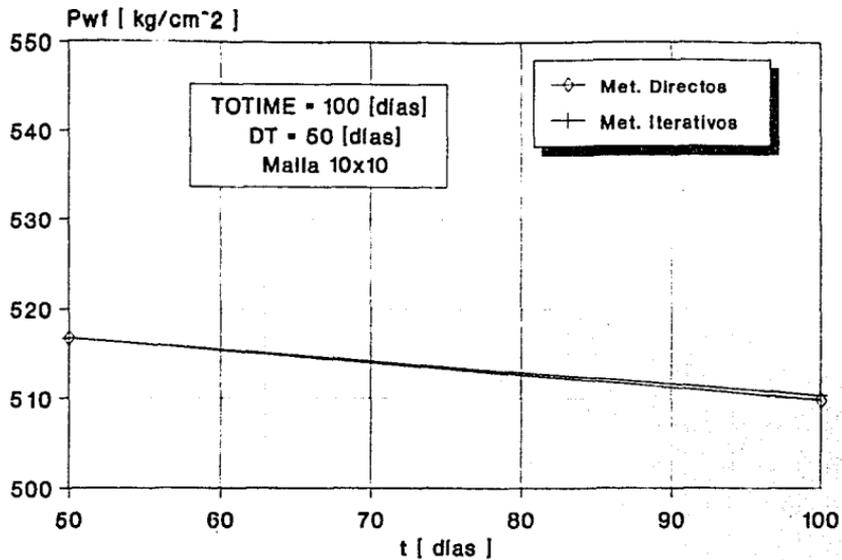


Fig. V.8

CAPITULO VI

CONCLUSIONES

En base a los resultados obtenidos y con el analisis de la literatura se presentan las siguientes conclusiones :

- La solución del sistema de ecuaciones puede ser muy simple o muy compleja, dependiendo del problema físico en estudio.
- Para problemas en donde se generan sistemas de ecuaciones pequeños se recomienda algún método directo para que la solución sea con mayor rapidez y en forma más precisa. Para sistemas grandes puede ser ventajoso utilizar algún método iterativo para obtener su solución, aunque no se descarta el uso de uno directo.
- Para problemas en una dimensión, que generan matrices tridiagonales se recomienda utilizar el Algoritmo de Thomas ya que el número de operaciones se reduce al igual que el tiempo de cómputo.
- Los métodos D - 2 y D - 4 son muy parecidos en cuanto a su solución ya que utilizan una eliminación gaussiana optimizada, pero su eficiencia se debe a un reordenamiento especial de la matriz. Para dimensiones de malla grandes (20 x 20) se hacen impracticos y menos competitivos con respecto a los métodos iterativos. D - 4

toma ventaja sobre el D - 2 debido a que trabaja con la mitad de la matriz y reduciendo así el número de etapas como el trabajo de cómputo.

- NSPIV es eficiente para la eliminación gaussiana dispersa con pivoteo parcial. En el caso de que tenga un pobre ordenamiento inicial, es decir, que todos los elementos diferentes de cero están agrupados cerca de la diagonal principal, el NSPIV trabaja pobremente a diferencia de cuando se tiene un ordenamiento por renglón adecuado, ya que requerirá menor almacenamiento así como menor tiempo de cómputo que alguna otra subrutina de banda.

- Los métodos iterativos están ligados a un cierto criterio de convergencia. Para encontrar este criterio dependerá del número de parámetros de iteración (SIP, ADIP) o de relajación (LSOR), de las características de la malla y de las propiedades físicas del yacimiento cuyas condiciones cambian de una etapa a otra.

- En yacimientos homogéneos e isotrópicos el método LSOR trabaja más lentamente que otras técnicas iterativas disponibles (SIP, ADIP, etc.) aunque para yacimientos fuertemente anisotrópicos resulta muy competitivo.

- En problemas probados SIP requiere menos esfuerzo de cómputo que el ADIP y es menos propenso a errores de redondeo. A medida que la máxima relación de transmisibilidad se incrementa, la relación de

trabajo de cómputo se incrementa. El tiempo de iteración del SIP es moderadamente mayor que el ADIP, sin embargo, generalmente requiere menos iteraciones para converger. Para el SIP y el ADIP representa un efecto significativo en la convergencia la modificación del orden de la secuencia de los parámetros de iteración. Por lo que se puede enfatizar que el SIP es un procedimiento iterativo rápido y confiable para resolver problemas en la simulación numérica de yacimientos.

- ORTHOMIN es un método iterativo de solución para matrices bandedas dispersas : es fácil de codificar y la descomposición LDU sólo necesita ser hecha una vez y no en cada iteración como en el caso del SIP. El método utiliza minimizaciones y ortogonalizaciones para lograr un rápido ritmo de convergencia, el cual es insensitivo a los parámetros de iteración, a las relaciones de transmisibilidad y a la no simetría de la matriz, aunque requiere de un mayor almacenamiento en la computadora.

- La buena selección de un método de solución (directo o iterativo) dependerá del tiempo de cómputo, del almacenamiento, así como de la precisión de los resultados arrojados por el simulador.

NOMENCLATURA

B	: Factor de volumen
B _r	: Factor de volumen del fluido
B _g	: Factor de volumen del gas
B _o	: Factor de volumen del aceite
B _v	: Factor de volumen del agua
c	: Compresibilidad
C _g	: Compresibilidad del gas
C _o	: Compresibilidad del aceite
C _v	: Compresibilidad del agua
h	: Altura
K	: Permeabilidad absoluta
k	: Permeabilidad efectiva
K _g	: Permeabilidad efectiva del gas
K _o	: Permeabilidad efectiva del aceite
k _v	: Permeabilidad efectiva del agua
k _r	: Permeabilidad relativa
K _{rg}	: Permeabilidad relativa del gas
K _{ro}	: Permeabilidad relativa del aceite
k _{rv}	: Permeabilidad relativa del agua
M	: Masa molecular
m(p)	: Potencial de los gases reales
P	: Presión
P _c	: Presión capilar
P _{c_{o-g}}	: Presión capilar aceite - gas

$P_{c_{v-a}}$: Presión capilar agua - aceite
 $P_{c_{v-g}}$: Presión capilar agua - gas
 q_{vol} : Ritmo de inyección y/o producción
 q : Gasto
 q_{gdo} : Gasto de gas disuelto en aceite
 q_{gdv} : Gasto de gas disuelto en agua
 q_{gl} : Gasto de gas libre
 q_{gT} : Gasto de gas total
 R : Constante universal de los gases
 R_a : Relación gas disuelto - aceite
 S_r : Saturación del fluido
 S_g : Saturación del gas
 S_o : Saturación del aceite
 S_v : Saturación del agua
 T : Temperatura
 T : Transmisibilidad
 t : Tiempo
 v : Velocidad
 v_{gdo} : Velocidad del gas disuelto en aceite
 v_{gl} : Velocidad del gas libre
 v_{gT} : Velocidad del gas total
 V : Volumen
 V_c : Volumen de celda
 V_b : Volumen bruto de roca
 z : Factor de compresibilidad de los gases reales

SÍMBOLOS

θ_{cs}	: Medido a condiciones estándar
θ_{cy}	: Medido a condiciones de yacimiento
θ	: Porosidad
μ	: Viscosidad
μ_g	: Viscosidad del gas
μ_o	: Viscosidad del aceite
μ_w	: Viscosidad del agua
ρ	: Densidad
ρ_g	: Densidad del gas
ρ_o	: Densidad del aceite
ρ_w	: Densidad del agua
ψ_f	: Potencial de flujo
∇	: Operador nabla (gradiente)
d	: Derivada
∂	: Derivada parcial
\int	: Integral
λ	: Movilidad
γ	: Peso específico
η	: Límite direccional de los x, y, z
θ	: Esquema de solución
ω	: Coeficiente de relajación
ϕ	: Factor de relajación

SUBINDICES

f : Fluido en general

g : Gas

n : Nivel de tiempo actual

n + 1 : Nivel de tiempo nuevo (superíndice)

o : Aceite

w : Agua

x, y, z : Direcciones ortogonales en los ejes x, y, z

i, j, k : Direcciones ortogonales en los ejes x, y, z

REFERENCIAS

- 1.- Al Hussainy, R. Ramey, H.J. Jr. and Crawford, P.B. : "The Flow of Real Gases Through Porous Media", JPT (May 1966).
- 2.- Mares R.E.: "Modelo Numerico Bidimensional (x,y) para Yacimientos de Gas", tesis Fac. de Ingenieria, UNAM 1990.
- 3.- Miguel A. Hernández ; Guillermo C. Domínguez: "Apuntes de Simulación Matemática de Yacimientos", Fac. de Ingeniería, UNAM.
- 4.- Ayala G.L. y Serrano L.J. : "Simulación Numérica de Yacimientos", tesis Fac. de Ingeniería, UNAM 1982.
- 5.- Rafael Iriarte V., Hugo E. Borrás, Rossynela Durán ; "Apuntes de Métodos Numéricos", Fac. de Ingeniería , UNAM.
- 6.- Berlanga J.M. : "Apuntes de Computación Aplicada a la Ingeniería Petrolera", Fac. de Ingeniería, UNAM 1981.
- 7.- Price, H.S. and Coats, K.H. : "Direct Methods in Reservoir Simulation", paper SPEJ (Jun 1974).
- 8.- Wattenberger and Associates : "Reservoir Simulation Manual", prepared by Scientific Software Corporation 1975.
- 9.- Andrew H. Sherman : "NSPIV, A Fortran Subroutine for Sparse Gaussian Elimination with Partial Pivoting", Algorithm 533, Collected Algorithms from ACM.
- 10.- J.W. Watts : "An Iterative Matrix Solution Method Suitable for Anisotropic Problems", SPEJ (March 1971).
- 11.- Peaceman D.W. and Rachford H.H., Jr. : "The Numerical Solution of Parabolic and Elliptic Differential Equations", JSIAM (1955).

- 12.- J. Bjordammen and K.H. Coats : "Comparison of Alternating - Direction and Successive Overrelaxation Techniques in Simulation of Reservoir Fluid Flow", SPEJ (March 1969).
- 13.- H.G. Weinstein, H.L. Stone and T.V. Kwan : "Simultaneous Solution of Multiphase Reservoir Flow Equations", paper SPE 2597.
- 14.- H. Dale Steen and S.M. Farouq Ali : "Comparative Evaluation of the Strongly Implicit Procedure (SIP) for Gas Reservoir Simulation", JCP (Oct-Dec 1971).
- 15.- P.K.W. Vinsome : "Orthomin, an Iterative Method for Solving Sparse Sets of Simultaneous Linear Equations", SPE 5729.
- 16.- Osorno M.J.A., Moctezuma B.A. : "Modelo Tridimensional R - θ - Z para Predecir el Comportamiento del Yacimiento en las Cercanías de un Pozo de Gas cuya Formación se Encuentra con o sin Fractura", revista IMP (Octubre 1986).
- 17.- Carrasco Ortiz L.C. : "Simulador Numerico en Coordenadas R - Z para Yacimientos de Aceite Bajosaturado", tesis Fac. de Ingeniería, UNAM 1990.
- 18.- Azis K. and Settari A. : "Petroleum Reservoir Simulation", Aplied Science Publishers L.T.D., 1979.
- 19.- Rodriguez Nieto R. : "Apuntes de Principios de Mecánica de Yacimientos", Fac. de Ingeniería, UNAM 1980.
- 20.- Coats K.H. : "Use and Misuse of Reservoir Simulation Models", SPE-AIME.
- 21.- Garaicochea Petrirena, F. : "Apuntes de Comportamiento Primario de Yacimientos", Fac. de Ingeniería, UNAM.

22.- Thomas G.W. : "Principles of Reservoir Simulation", Englewood
Colorado 1981.