

28  
24



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES  
ACATLAN**

**PARAMETROS DE DISEÑO EN CIMENTACIONES SUPERFICIALES DE MAQUINARIA SUJETA A VIBRACION.**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
INGENIERO CIVIL  
P R E S E N T A**

**JORGE RODRIGUEZ VALDES**

**ASESOR: ING. JORGE GAMBOA FLORES**



**MEXICO, D. F.**

**1992**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

- INTRODUCCION.....	I
- SIMBOLOGIA.....	IV
1. FUNDAMENTOS DE LAS VIBRACIONES.....	1
1.1. INTRODUCCION.	
1.1.1 SISTEMAS EQUIVALENTES .....	3
1.1.2 CONCEPTOS FUNDAMENTALES .....	4
1.2. SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD.	
1.2.1 VIBRACION LIBRE DE UN SISTEMA DE MASA Y RESORTE .....	5
1.2.2 VIBRACION FORZADA DE UN SISTEMA DE MASA Y RESORTE .....	8
1.2.3 VIBRACION LIBRE CON AMORTIGUAMIENTO VISCOSO .....	13
1.2.4 VIBRACION FORZADA CON AMORTIGUAMIENTO VISCOSO ...	18
1.2.5 EXCITACION POR MASA ROTATORIA .....	22
2. TEORIA DEL SEMIESPACIO ELASTICO .....	35
2.1. VIBRACION VERTICAL DE CIMENTACIONES CIRCULARES APOYADAS EN UN SEMIESPACIO ELASTICO .....	36
2.2. CABECEO EN CIMENTACIONES .....	40

2.3. VIBRACION HORIZONTAL EN UNA CIMENTACION.....	42
2.4. TORSION EN CIMENTACIONES .....	43
3. SISTEMA DE PARAMETROS DEL SUELO .....	59
3.1. SISTEMA DE PARAMETROS DEL SUELO PARA VIBRACION VERTICAL.	
3.1.1 RELACIONES GENERALES .....	60
3.1.2 CIMENTACIONES CIRCULARES RIGIDAS .....	64
3.2. CABECEO EN CIMENTACIONES RIGIDAS CIRCULARES .....	68
3.3. VIBRACION HORIZONTAL EN CIMENTACIONES RIGIDAS CIRCULARES .....	70
3.4. TORSION EN CIMENTACIONES .....	71
3.5 COMENTARIOS SOBRE LOS PARAMETROS DEL SUELO PARA LA SOLUCION DE CIMENTACIONES SUJETAS A VIBRACION.	
3.5.1 MASA Y MOMENTO DE INERCIA .....	73
3.5.2 CONSTANTE K DEL RESORTE .....	74
3.5.3 RELACION DE POISSON ( $\mu$ ) .....	77
3.5.4 RELACION DE AMORTIGUAMIENTO (D) .....	77
3.5.5 MODULO DE ESFUERZO CORTANTE DEL SUELO (G) .....	78
4. APLICACIONES .....	92
4.1 AMPLITUDES DE VIBRACION PERMISIBLES .....	93

4.2 COMENTARIOS SOBRE EL DISEÑO DE CIMENTACIONES PARA EVITAR RESONANCIAS .....	93
4.3 ELEMENTOS QUE DEBEN PROPORCIONARSE PARA EL DISEÑO .....	95
4.4 PROCEDIMIENTO DE DISEÑO .....	96
4.5 EJEMPLOS .....	96
- CONCLUSIONES .....	102
- BIBLIOGRAFIA.....	104

## **INTRODUCCION.**

El presente trabajo titulado " Parámetros de diseño en cimentaciones superficiales de maquinaria sujeta a vibración " tiene por objetivo fundamental, proporcionar una síntesis de los parámetros más importantes que son necesarios para un análisis correcto de las cimentaciones superficiales de maquinaria, así como la metodología más común empleada en la determinación de estos parámetros .

Este objetivo se pretende alcanzar dando un breve repaso a los diferentes análisis que se emplean en el diseño de este tipo de cimentaciones; dichos análisis se tratarán de la forma más simple que sea posible, ya que en muchas ocasiones es un poco difícil el empleo de estos análisis para la gente que no esta familiarizada con este tipo de problemas.

La primera limitante que surge en un problema de esta naturaleza, es el tipo de cimentación que se desea utilizar para controlar la vibración, por lo tanto, este trabajo se limita al estudio de las cimentaciones superficiales, tal y como se conocen en la ingeniería civil.

En el capítulo 1 se determinan los tipos y características más importantes de los sistemas equivalentes de un grado de libertad, estos sistemas equivalentes son los ideales para el análisis de las vibraciones ya que son sencillos y permiten conocer de una manera más clara las características de este tipo de movimiento. No se tratan los sistemas de dos grados de libertad, ya que sólo se controlará la vibración con la cimentación, y los sistemas de dos grados de libertad se utilizan cuando se disipa la energía del movimiento por otros medios como un resorte o cojinetes de corcho o madera.

La información necesaria para el diseño se comienza a tratar en el capítulo 2, en el cual se observa la determinación de los distintos parámetros de diseño basados en la respuesta que ofrece

un semiespacio elástico a la vibración, sin embargo, este tipo de análisis no representa fielmente lo que sucede en la realidad, ya que el comportamiento del suelo no es propiamente el de una material elástico, pero debido a su sencillez es el que más se ha utilizado.

Posteriormente, en el capítulo 3, se muestra una técnica mejor que la anterior para evaluar los parámetros de diseño, esta técnica es denominada sistema de parámetros del suelo (lumped parameter system), el cual se basa en las consideraciones observadas en los dos primeros capítulos. Además en este capítulo se trata de una forma breve, las propiedades mecánicas del suelo, como lo son el modulo al cortante ( $G$ ) y la relación de Poisson ( $\mu$ ), que son necesarios para el diseño de este tipo de cimentaciones.

Los modos de vibración que se analizan son los fundamentales: horizontal, vertical, torsión y cabeceo; sin embargo, sólo se desarrollan los fundamentos matemáticos para la vibración vertical, ya que sólo se trata de mostrar las bases de lo que son este tipo de análisis.

Una vez conocidos estos parámetros, en el capítulo 4 se realizan algunos ejemplos de aplicación de la metodología apropiada para cada tipo de vibración, sin embargo, los ejemplos que se muestran son sólo para dos tipos de vibración, torsión y vibración vertical, ya que estos son representativos y que según algunos autores (Richart, Hall y Woods) son frecuentemente encontrados en la realidad. -

**SIMBOLOGIA.**

$a_0$  = frecuencia adimensional.  
 $A$  = Área de la cimentación ( $\text{cm}^2$ ) o constante de cálculo.  
 $A_1, A_2, \dots$  = constantes de cálculo (adimensional).  
 $A_z$  = amplitud de vibración vertical (m).  
 $A_x$  = amplitud de vibración horizontal (m).  
 $b$  = relación adimensional de masa.  
 $b_i$  = relación adimensional de inercias.  
 $b_t$  = relación de masas para torsión (adimensional).  
 $B$  = ancho de cimentación (m); relación adimensional de masa.  
 $c$  = constante de amortiguamiento ( $\text{N seg} / \text{m}$ ).  
 $c_e$  = constante de amortiguamiento crítico ( $\text{N seg} / \text{m}$ ).  
 $D$  = relación de amortiguamiento (adimensional).  
 $e$  = radio de giro de la masa rotatoria (m).  
 $f$  = frecuencia (cps).  
 $f_1, f_2$  = funciones de desplazamiento (adimensional).  
 $f_n$  = frecuencia natural no amortiguada (cps).  
 $f_m$  = frecuencia de resonancia (cps).  
 $F_{din}$  = fuerza dinámica (Newton).  
 $F, F_1, F_2$  = funciones adimensionales.  
 $g$  = aceleración de la gravedad ( $9.81 \text{ m/seg}^2$ ).  
 $G$  = módulo al cortante del suelo ( $\text{N/cm}^2$ ).  
 $I_0$  = momento de inercia de la masa del sistema ( $\text{kg m}^2$ ).  
 $J_{zz}$  = momento de inercia de la masa del sistema con respecto a  $z$  ( $\text{kg m}^2$ ).  
 $K, k$  = constante del resorte equivalente del sistema (Newton/cm).  
 $L$  = largo de la cimentación (m).  
 $m$  = masa del sistema (kg).  
 $m_0$  = total de masas que giran en un sistema de masas rotatorias (kg).  
 $M$  = factor de amplificación (adimensional).  
 $M_y$  = momento con respecto al eje  $y$  (Newton m).  
 $n$  = número entero positivo.  
 $P$  = fuerza vertical periodica (Newton).  
 $P_0$  = amplitud de fuerza vertical periodica (Newton).

$q$  = carga transmitida al suelo (Newton/cm<sup>2</sup>).  
 $Q_0$  = amplitud de la fuerza de vibración (Newton).  
 $r$  = velocidad angular para vibración libre con amortiguamiento viscoso (rad); valor del radio menor a  $r_0$  (m).  
 $r_0$  = radio equivalente del área de la cimentación (m).  
 $t$  = tiempo (seg).  
 $T$  = período (seg); torque estático (Newton m).  
 $T_0$  = torque (Newton m).  
 $v_0$  = velocidad inicial del sistema (m/seg).  
 $v_w$  = velocidad de ondas cortantes (m/seg).  
 $W$  = peso del sistema (Newton).  
 $X, X'$  = factores adimensionales.  
 $\ddot{z}$  = aceleración del sistema equivalente (m/seg<sup>2</sup>).  
 $\dot{z}$  = velocidad del sistema equivalente (m/seg).  
 $z$  = desplazamiento del sistema (m).  
 $z_0$  = desplazamiento inicial (m).  
 $z_s$  = desplazamiento estático vertical (m).  
 $Z$  = constante para el cálculo (adimensional).  
 $\alpha$  = constante para el cálculo (adimensional); ángulo de rotación (rad).  
 $\alpha'$  = factor de amplitud adimensional.  
 $\beta$  = desfase entre la vibración de la máquina y la cimentación (rad).  
 $\omega_n$  = velocidad (o frecuencia) natural del sistema (rad/seg).  
 $\omega$  = velocidad (o frecuencia) natural de la máquina sobre la cimentación (rad/seg).  
 $\omega_d$  = velocidad (o frecuencia) natural amortiguada del sistema (rad/seg).  
 $\delta$  = decremento logarítmico (adimensional).  
 $U$  = constante de cálculo.  
 $\gamma$  = peso unitario del suelo (Newton/m<sup>3</sup>).  
 $\mu$  = relación de Poisson (adimensional).  
 $\rho$  = densidad del suelo (kg/m<sup>3</sup>).  
 $\theta$  = rotación de la cimentación (rad).

$\theta'$  = frecuencia adimensional.

$\tau_{\theta z}$  = esfuerzo transmitido al suelo (Newton cm).

**CAPITULO 1. FUNDAMENTOS DE LAS VIBRACIONES.**

## 1.1 INTRODUCCION.

El diseño de cimentaciones sujetas a vibración está restringido, principalmente, a los posibles desplazamientos debidos a las cargas producidas por vibraciones, estos desplazamientos se clasifican en:

1. Desplazamiento cíclico debido a la respuesta elástica del sistema suelo-cimentación a la carga que produce la vibración.
2. Desplazamiento permanente debido a la compactación del suelo debajo de la cimentación, provocado también por la vibración.

En este trabajo se establecen las relaciones matemáticas para los primeros.

### 1.1.1 SISTEMAS EQUIVALENTES.

Para tratar los desplazamientos mencionados anteriormente, es necesario conocer el tipo de vibración que actúa en la cimentación. En la fig. (1.1) se muestran los seis tipos diferentes de vibración que pueden actuar en una cimentación; para facilitar el análisis y diseño de las cimentaciones, se pueden tratar los diferentes modos por separado y posteriormente conjuntar los resultados, lo cual da una suficiente aproximación de lo que sucede si se analizan en conjunto.

Los análisis de los problemas de vibración se puede hacer por medio de sistemas equivalentes; estos sistemas equivalentes son de gran utilidad, ya que las consideraciones matemáticas para los desplazamientos se realizan tratando al suelo como un material viscoelástico. Esto se puede visualizar claramente en la fig. (1.2), donde se aprecia una cimentación sujeta a vibración y su correspondiente sistema equivalente; en esta figura también se observa que las características viscoelásticas de los suelos, que

pueden representarse por un sistema constituido por un resorte y por un amortiguador; a este tipo de sistema se le denomina sistema vibratorio de parámetros del suelo. A partir del apartado 1.2 se tratan las consideraciones matemáticas necesarias para la solución de este tipo de sistemas, de una forma sencilla, puesto que se considera al suelo como un material elástico, pero como se sabe su comportamiento real es bastante complejo.

### 1.1.2 CONCEPTOS FUNDAMENTALES.

Cuando se habla de dinámica por lo general se tratan términos con los cuales no se está muy familiarizado, máxime si se trata de vibraciones, ya que en la vida profesional del ingeniero a la mayoría de los problemas se les trata en forma estática, por lo cual, en este trabajo se tratan los temas concernientes con la máxima sencillez posible. A continuación se definen algunos conceptos básicos que se utilizarán con alguna frecuencia dentro del texto.

**Vibración.** Es simplemente un movimiento repetitivo de una máquina o una estructura desde su posición de reposo.

**Vibración libre.** Es la vibración de un sistema bajo la acción de sus fuerzas propias, tales como el peso, sin la imposición de fuerzas externas; un ejemplo de este tipo de sistema se muestra en la fig. (1.4); también se le conoce como vibración espontánea.

**Vibración forzada.** Es la vibración de un sistema debido a fuerzas externas; estas fuerzas pueden ser causadas por motores, impactos, etc., este tipo de sistemas se muestra en la fig. (1.6); también se le conoce como vibración inducida.

**Grado de libertad.** Es el número de coordenados independientes que son requeridos para la solución de un sistema vibratorio. Por ejemplo, el coordinado de la fig (1.3a), está formado por una masa

m y restringido a un desplazamiento z por un resorte, por lo cual puede decirse que se trata de un sistema de un grado de libertad; en la fig. (1.3b) muestra que para describir el movimiento del sistema se necesitan dos coordenados ( $m_1$  y  $z_1$ ,  $m_2$  y  $z_2$ ) por lo cual se le denomina de dos grados de libertad, y en la fig (1.3c) también se tiene dos grados de libertad, ya que se necesitan dos valores ( $z$  y  $\theta$ ) para describir el movimiento.

Un coordinado es un subsistema independiente que tiene sus propios desplazamientos, así como sus propias fuerzas actuantes; no está restringido por otro sistema.

Algunos otros conceptos que se utilizarán en este trabajo se definirán posteriormente y conforme se traten.

## 1.2 SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD.

### 1.2.1 VIBRACION LIBRE DE UN SISTEMA DE MASA Y RESORTE.

En esta sección se obtienen las fórmulas para estimar los valores de las frecuencias naturales de un sistema no amortiguado, que posteriormente serán muy útiles para encontrar frecuencias de resonancia y otros valores importantes para análisis de cimentaciones sujetas a vibración.

En la fig. (1.4) se observa una cimentación apoyada en un resorte, el cual representa las condiciones elásticas del suelo. El peso  $W$  representa el peso total del sistema (Newtons),  $A$  es el área de la cimentación ( $m^2$ ), por lo cual se tiene que la carga transmitida al subsuelo ( $N/m^2$ ) es

$$q = W / A \quad \dots(1.1)$$

Por ley de Hooke se sabe que debido a la carga  $W$  se producirá una deflexión  $z = (\delta)$ , de aquí

$$k = W / z_0 \quad \dots(1.2)$$

donde  $k$  es la constante elástica del resorte, y sus unidades son N/m.

El coeficiente de reacción del subsuelo  $k_0$  estático puede determinarse como

$$k_0 = q / z_0 \quad \dots(1.3)$$

Si cambia la posición de equilibrio estático del sistema, este vibrará; la ecuación de movimiento del sistema puede expresarse con la segunda ley de Newton, quedando como

$$m \ddot{z} + k z = 0$$

o como

$$\ddot{z} + (k / m) z = 0 \quad \dots(1.4)$$

$$\ddot{z} = d^2 z / dt^2 \quad (\text{aceleración del sistema, m/seg}^2)$$

donde  $m$  es la masa ( $W/g$ ) en N,  $t$  es el tiempo (seg) y  $g$  es la aceleración de la gravedad (en  $m/seg^2$ ).

Una solución particular de la ec. (1.4) es

$$z = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t \quad \dots (1.5)$$

donde  $A_1$  y  $A_2$  son constantes adimensionales y  $\omega_n$  es la velocidad natural angular del sistema (o frecuencia natural circular no amortiguada).

Sustituyendo la ec. (1.5) en la ec. (1.4) se obtiene

$$-\omega_n^2 (A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t) + (k/m)(A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t) = 0$$

efectuando operaciones se tiene

$$\omega_n = \pm \sqrt{k/m} \quad \dots(1.6)$$

Las unidades de  $\omega_n$  son los radianes sobre segundo. Con la ec. (1.6) se puede expresar la ec. (1.5) como

$$z = A_1 \cos(\sqrt{k/m} t) + A_2 \sin(\sqrt{k/m} t) \quad \dots(1.7)$$

Para poder determinar los valores de  $A_1$  y  $A_2$ , se deben utilizar algunas condiciones de frontera. Así, se tiene que para

- tiempo,  $t=0$
- desplazamiento,  $z = z_0$
- velocidad,  $dz / dt = \dot{z} = v_0$

con las condiciones de frontera anteriores y para para la ec. (1.7) se tiene

$$z_0 = A_1 \quad \dots(1.8)$$

de nuevo con la ec. (1.7)

$$\dot{z} = -A_1 \sqrt{k/m} \sin(\sqrt{k/m} t) + A_2 \sqrt{k/m} \cos(\sqrt{k/m} t) \quad \dots(1.9)$$

y con las condiciones de frontera anteriores

$$\dot{z} = v_0 = A_2 \sqrt{k/m}$$

con lo cual

$$A_2 = v_0 / \sqrt{k/m} \quad \dots(1.10)$$

combinando las ecs. (1.7), (1.8) y (1.10)

$$z = z_0 \cos(\sqrt{k/m} t) + (v_0/\sqrt{k/m}) \sin(\sqrt{k/m} t) \quad \dots(1.11)$$

Para poder tratar esta última ecuación de una forma más sencilla, se pueden relacionar los valores de  $v_0/\sqrt{k/m}$  y  $z_0$ , con lo que se tiene

$$z_0 = Z \cos \alpha \quad \dots(1.12)$$

y

$$v_0 / \sqrt{k/m} = Z \sin \alpha \quad \dots(1.13)$$

Sustituyendo las ecs. (1.12) y (1.13) en la ec. (1.11), esta queda como

$$z = Z \cos (\omega_n t - \alpha) \quad \dots(1.14)$$

donde

$$\alpha = \tan^{-1} [ v_0 / ( z_0 \sqrt{k/m} ) ] \quad \dots(1.15)$$

$$Z = \sqrt{ z_0^2 + (m/k) v_0^2 } \quad \dots(1.16)$$

La relación para desplazamientos de la cimentación obtenida con la ec. (1.14) puede graficarse como se muestra en la fig. (1.5), en la cual se aprecia que la manera de efectuarse los desplazamientos es sinusoidal, y la magnitud del desplazamiento máximo es Z, al cual se le denomina amplitud sencilla. La amplitud de pico a pico de la gráfica es 2Z a la cual se le conoce como amplitud doble; el tiempo necesario para que el movimiento se repita se le denomina como período de vibración, en la figura se aprecia que el período T es

$$T = 2\pi / \omega_n \quad \dots(1.17)$$

La frecuencia de oscilación  $f$  se define como el número de ciclos por unidad de tiempo, por lo cual

$$f = 1 / T = \omega_n / 2\pi \quad \dots(1.18)$$

A partir de la ec. (1.6) y para este tipo de sistemas

$$f = f_n = ( 1 / 2\pi ) ( \sqrt{k/m} ) \quad \dots(1.19)$$

al término  $f_n$  comunmente se le llama frecuencia natural no amortiguada y considerando lo anterior también puede representarse como

$$f_n = ( 1 / 2\pi ) ( \sqrt{g/z_0} ) \quad \dots(1.20)$$

La variación de la velocidad y de la aceleración también se puede graficar, de la ec. (1.14) pueden obtenerse las respectivas variaciones

$$z = Z \omega_n \cos ( \omega_n t - \alpha + \pi/2 ) \quad \dots(1.21)$$

$$z = Z \omega_n \cos ( \omega_n t - \alpha + \pi ) \quad \dots(1.22)$$

las gráficas de estas variaciones también se aprecian en la fig. (1.5).

#### 1.2.2 VIBRACION FORZADA DE UN SISTEMA DE MASA Y RESORTE.

A continuación se plantean las formas de obtener desplazamientos máximos, así como la fuerza dinámica máxima transmitida al subsuelo por este tipo de sistemas.

En la fig. (1.6) se observa un sistema de masa y resorte, donde  $W$  es el peso total de la cimentación y  $k$  es la constante del

resorte. Esta cimentación esta sujeta a una fuerza alternante  $Q_0 \sin(\omega t + \beta)$ , donde  $Q_0$  es la amplitud de la fuerza actuante (N),  $\omega$  es la frecuencia de operación del sistema (cps) y  $\beta$  es el desfaseamiento del sistema. La ec. de movimiento de este sistema puede representarse como

$$m \ddot{z} + k z = Q_0 \sin(\omega t + \beta) \quad \dots (1.23)$$

tomando  $z = A_1 \sin(\omega t + \beta)$  como solución particular de la ec. (1.23) ( $A_1 = \text{const}$ ); y sustituyendola en esta ecuación obtenemos

$$-\omega^2 m A_1 \sin(\omega t + \beta) + k A_1 \sin(\omega t + \beta) = Q_0 \sin(\omega t + \beta)$$

$$A_1 = (Q_0 / m) / [(k/m) - \omega^2] \quad \dots (1.24)$$

Con esto tenemos que la solución particular de la ec. (1.23) queda como

$$z = \frac{(Q_0 / m)}{(k / m) - \omega^2} \sin(\omega t + \beta) \quad \dots (1.25)$$

la solución complementaria a la ec. (1.23) debe satisfacer

$$m \ddot{z} + k z = 0$$

y como hemos visto en la sección anterior, la solución a la ec. antes mencionada es

$$z = A_2 \cos(\omega t) + A_3 \sin(\omega t) \quad \dots (1.26)$$

por lo que la solución general de la ec. (1.23) se obtiene sumando las ecs. (1.25) y (1.26) con lo cual

$$z = A_1 \sin(\omega t + \beta) + A_2 \cos \omega t + A_3 \sin \omega t \quad \dots (1.27)$$

Considerando las siguientes condiciones de frontera

$$t = 0$$

$$z = z_0 = 0 \quad \dots(1.28)$$

$$dz / dt = \text{velocidad} = v_0 = 0 \quad \dots(1.29)$$

y conjuntandolas con las ecs. (1.27) y (1.28), se tiene

$$A_1 \text{ sen } \beta + A_2 = 0$$

$$A_2 = -A_1 \text{ sen } \beta \quad \dots(1.30)$$

de nuevo con la ec. (1.27)

$$dz / dt = \dot{z} = A_1 \omega \cos(\omega t + \beta) - A_2 \omega_n \text{ sen } \omega_n t + A_3 \omega_n \cos \omega_n t$$

sustituyendo la condición de frontera dada en la ec. (1.29) en la ec. anterior

$$A_3 = - (A_1 \omega / \omega_n) \cos \beta \quad \dots(1.31)$$

combinando las ecs. (1.27), (1.30) y (1.31)

$$z = A_1 [\text{sen}(\omega t + \beta) - \cos(\omega t) \text{sen} \beta - (\omega / \omega_n) \text{sen}(\omega_n t) \cos \beta] \quad \dots(1.32)$$

Si la función de fuerza esta en fase con el sistema vibratorio ( $\beta=0$ ), entonces

$$z = \frac{Q_0 / k}{1 - \omega^2 / \omega_n^2} [\text{sen } \omega t - (\omega / \omega_n) \text{sen } \omega_n t] \quad \dots(1.33)$$

tomando en cuenta que  $Q_0 / k = z_0$ , la cual es una deflexión estática y considerando

$$\frac{1}{1 - \omega^2 / \omega_n^2} = M$$

la ec. (1.33) puede expresarse como

$$z = z_0 M [ \text{sen } \omega t - (\omega/\omega_n) \text{sen } \omega n t ] \quad \dots(1.34)$$

la variación del factor de amplificación M con respecto a  $\omega/\omega_n$  se muestra en la fig. (1.7a). Hay que notar que M tiende a infinito cuando  $\omega/\omega_n = 1$ , a lo cual se le conoce como condición de resonancia; para esta condición, el miembro de la derecha de la ec. (1.34) quedaría 0 / 0 ; pero aplicando la regla de L'Hôpital se tiene

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_n} (z) = \lim_{\omega \rightarrow \omega_n} (z) \frac{(d/d\omega) [ \text{sen } \omega t - (\omega/\omega_n) \text{sen } \omega n t ]}{(d/d\omega) (1 - \omega^2/\omega_n^2)} z_0$$

con lo que resulta

$$z = (1/2) z_0 ( \text{sen } \omega n t - \omega n t \text{cos } \omega n t ) \quad \dots(1.35)$$

La velocidad en condiciones de resonancia puede expresarse, a partir de la ec. (1.35) como

$$\dot{z} = (1/2) ( z_0 \omega_n^2 t ) \text{sen } \omega n t \quad \dots(1.36)$$

teniendo en cuenta que para velocidad igual a cero el desplazamiento es máximo, por lo cual, para el máximo desplazamiento

$$(1/2) ( z_0 \omega_n^2 t ) \text{sen } \omega n t = 0$$

con lo que

$$\text{sen } \omega n t = 0 \quad ; \quad \omega n t = n\pi \quad \dots(1.37)$$

donde n es un número entero.

Para la condición dada en la ec. (1.37), la ec. (1.35) de desplazamiento queda como

$$[z_{\max}]_{res} = (1/2) \pi n z_0 \dots(1.38)$$

donde  $[z_{\max}]_{res}$  = máximo desplazamiento en condiciones de resonancia.

Hay que notar que cuando  $n$  tiende a infinito, también  $[z_{\max}]$ , por lo que estos puntos no afectan a la cimentación; esto puede verse en la fig (1.7b) donde se tiene la variación  $z/z_0$  vs. tiempo para condiciones de resonancia.

La fuerza máxima y mínima transmitida al suelo ocurrirá en el instante en que la amplitud es máxima, es decir, cuando la velocidad sea igual a cero.

Esto puede obtenerse de la ec. (1.33), para la cual la velocidad a cualquier tiempo es

$$z = \frac{Q / k}{(1 - \omega^2 / \omega_n^2)} (\omega \cos \omega t - \omega \cos \omega_n t)$$

para máxima deflexión  $\dot{z} = 0$

$$\omega \cos \omega t - \omega \cos \omega_n t = 0$$

teniendo en cuenta que  $\omega$  desigual a cero

$$\cos \omega t - \cos \omega_n t = 2 \operatorname{sen} (\omega/2 - \omega_n/2)t \operatorname{sen} (\omega/2 + \omega_n/2)t = 0$$

con lo que

$$(\omega/2 - \omega_n/2)t = n\pi \quad ; \quad t = 2n\pi / (\omega_n - \omega) \dots(1.39)$$

$$y \quad (\omega_n/2 + \omega)t = m\pi \quad ; \quad t = 2m\pi / (\omega_n + \omega) \quad \dots(1.40)$$

donde  $m, n = 1, 2, 3, \dots$

La ec. (1.39) no es relevante para nuestro propósito; sustituyendo la ec. (1.40) en la ec. (1.33) y simplificando se tiene

$$z = z_{\max} = [(Q_0/k)/(1-\omega/\omega_n)] \text{ sen } [2\pi m\omega/(\omega_n+\omega)] \quad \dots(1.41)$$

con esto tenemos que la fuerza dinámica máxima se obtiene cuando  $z_{\max}$  es máximo, por lo que

$$z_{\max(\max)} = (Q_0 / k) / (1 - \omega / \omega_n) \quad \dots(1.42)$$

con lo que

$$F_{\text{dinám(max)}} = Q_0 / (1 - \omega / \omega_n) \quad \dots(1.43)$$

por lo que se puede decir que la fuerza total máxima transmitida al subsuelo variará entre los límites

$$W - Q_0 / (1 - \omega / \omega_n) \quad \text{y} \quad W + Q_0 / (1 - \omega / \omega_n)$$

### 1.2.3 VIBRACION LIBRE CON AMORTIGUAMIENTO VISCOSO.

En esta sección se aborda el caso del amortiguamiento y como obtener las frecuencias amortiguadas para el caso de la vibración libre, además se obtiene la ecuación de desplazamientos para este tipo de sistemas.

En las secciones anteriores se trató un movimiento libre, donde al comenzar el movimiento, este se prolonga indefinidamente, lo cual no sucede en la realidad, ya que la amplitud de vibración decrece con el tiempo, a lo cual se le conoce como amortiguamiento. En la

fig. (1.2b) se puede observar una cimentación soportada por un resorte y un amortiguador, el cual representa las características de amortiguamiento del suelo. El coeficiente del amortiguador es  $c$  (kg seg/m). Para vibración libre la ecuación de movimiento esta representada por

$$m \ddot{z} + c \dot{z} + k z = 0 \quad \dots(1.44)$$

Teniendo  $z = A e^{rt}$  como solución de la ec. (1.44), donde  $A$  es una constante. Sustituyendola en esta ec. obtenemos

$$r^2 + (c/m) r + k/m = 0 \quad \dots(1.45)$$

con solución

$$r = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} \quad \dots(1.46)$$

De la ec. (1.46) se obtienen tres condiciones generales:

1. Si  $c/2m > \sqrt{k/m}$ , las raíces de la ec. (1.45) son reales y negativas. A este caso se le denomina caso sobreamortiguado.

2. Si  $c/2m = \sqrt{k/m}$ ,  $r = -c/2m$ . Este caso se le llama de amortiguamiento crítico, y para este caso

$$c = c_c = 2 \sqrt{km} \quad \dots(1.47a)$$

3. Si  $c/2m < \sqrt{k/m}$ , las raíces de la ec. (1.45) son complejas:

$$r = \frac{-c}{2m} \pm i \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$$

a este caso se le denomina de bajo amortiguamiento.

Con lo anterior puede definirse la relación de amortiguamiento como

$$D = c / c_0 = c / (2 \sqrt{km}) \quad \dots(1.47b)$$

utilizando esta relación podemos reescribir la ec.(1.46) como

$$r = \omega_n ( -D \pm \sqrt{D^2 - 1} ) \quad \dots(1.48)$$

donde  $\omega_n = \sqrt{k/m}$ .

Para la condición de sobreamortiguamiento ( $D > 1$ ),

$$r = \omega_n ( -D \pm \sqrt{D^2 - 1} )$$

con esta condición, la ecuación de desplazamiento puede escribirse como

$$z = A_1 \exp[\omega_n t (-D + \sqrt{D^2 - 1})] + A_2 \exp[\omega_n t (-D - \sqrt{D^2 - 1})] \quad \dots(1.49)$$

donde  $A_1$  y  $A_2$  son dos constantes. Considerando

$$A_1 = ( A_3 + A_4 ) / 2 \quad \dots(1.50)$$

y

$$A_2 = ( A_3 - A_4 ) / 2 \quad \dots(1.51)$$

sustituyendo las ecuaciones anteriores en la ec. (1.49) y reordenandola queda

$$z = e^{-D\omega_n t} [A_3 \cosh(\omega_n \sqrt{D^2 - 1} t) + A_4 \sinh(\omega_n \sqrt{D^2 - 1} t)] \quad \dots(1.52)$$

para  $D > 1$ .

Las constantes  $A_3$  y  $A_4$  de la ec. (1.52) pueden evaluarse conociendo las condiciones iniciales de frontera; al tiempo  $t=0$

tenemos  $z=z_0$  y la velocidad  $dz/dt = v_0$ , con esto obtenemos

$$z = z_0 = A_0 \quad \dots(1.53)$$

y

$$A_1 = \frac{v_0 + D \omega_n z_0}{\omega_n \sqrt{D^2 - 1}} \quad \dots(1.54)$$

sustituyendo las dos ecuaciones anteriores en la ec.(1.52)

$$z = e^{-D\omega_n t} \left[ z_0 \cosh(\omega_n \sqrt{D^2 - 1} t) + \frac{v_0 + D\omega_n z_0}{\omega_n \sqrt{D^2 - 1}} \sinh(\omega_n \sqrt{D^2 - 1} t) \right] \quad \dots(1.55)$$

Para condiciones de amortiguamiento crítico ( $D=1$ ) y con la ec.(1.48)

$$r = -\omega_n \quad \dots(1.56)$$

con esta ecuación la ecuación de desplazamiento puede expresarse como

$$z = (A_0 + A_1 t) e^{-\omega_n t} \quad \dots(1.57)$$

donde  $A_0$  y  $A_1$  son dos constantes; los valores de estas dos constantes pueden obtenerse para las condiciones iniciales de vibración que se han manejado anteriormente, con lo cual se tiene

$$A_0 = z_0 \quad \dots(1.58)$$

y

$$A_1 = v_0 + \omega_n z_0 \quad \dots(1.59)$$

combinando las ecs. (1.57) - (1.59) se obtiene

$$z = [z_0 + (v_0 + \omega_n z_0) t] e^{-\omega_n t} \quad \dots(1.60)$$

Por último para la condición de bajo amortiguamiento ( $D < 1$ ),

$$r = \omega_n (-D \pm i \sqrt{1 - D^2})$$

con lo cual, la ec. general de desplazamiento puede expresarse como

$$z = e^{-D\omega_n t} [A_7 \exp(i\omega_n \sqrt{1-D^2} t) + A_8 \exp(-i\omega_n \sqrt{1-D^2} t)] \quad \dots(1.61)$$

donde  $A_7$  y  $A_8$  son constantes.

La ec. (1.61) puede simplificarse a la forma

$$z = e^{-D\omega_n t} [A_9 \cos(\omega_n \sqrt{1-D^2} t) + A_{10} \operatorname{sen}(\omega_n \sqrt{1-D^2} t)] \quad \dots(1.62)$$

donde  $A_9$  y  $A_{10}$  son dos constantes, cuyos valores pueden encontrarse con las condiciones iniciales de frontera que hemos manejado hasta ahora, por lo cual, la ec. (1.62) queda como

$$z = e^{-D\omega_n t} \left[ z_0 \cos(\omega_n \sqrt{1-D^2} t) + \frac{v_0 + D\omega_n z_0}{\omega_n \sqrt{1-D^2}} \operatorname{sen}(\omega_n \sqrt{1-D^2} t) \right] \quad \dots(1.63)$$

ecuación que puede simplificarse a

$$z = Z \cos(\omega_d t - \alpha) \quad \dots(1.64)$$

donde

$$Z = e^{-D\omega_n t} \sqrt{z_0^2 + \left( \frac{v_0 + D\omega_n z_0}{\omega_n \sqrt{1-D^2}} \right)^2} \quad \dots(1.65)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left[ \frac{v_0 + D\omega_n z_0}{\omega_n z_0 \sqrt{1-D^2}} \right] \quad \dots(1.66)$$

$\omega_d$  = frecuencia natural circular amortiguada

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - D^2} \quad \dots(1.67)$$

El amortiguamiento disminuye gradualmente la amplitud de vibración con el tiempo; para evaluar el decremento de la vibración con respecto al tiempo tomamos  $Z_n$  y  $Z_{n+1}$  como dos valores sucesivos (negativos o positivos) máximos de desplazamiento para tiempos  $t_n$  y  $t_{n+1}$ , como se muestra en la fig. (1.8). De la ec. (1.65)

$$Z_{n+1} / Z_n = \exp [ -D \omega_n (t_{n+1} - t_n) ] \quad \dots(1.68)$$

de aquí se tiene que  $t_{n+1} - t_n$  es el período de vibración

$$T = 2\pi / \omega_n \sqrt{1 - D^2} \quad \dots(1.69)$$

combinando las ecs. (1.68) y (1.69)

$$\delta = \text{Ln} (Z_n / Z_{n+1}) = 2\pi D / \sqrt{1 - D^2} \quad \dots(1.70)$$

al tiempo  $\delta$  se le denomina decremento logarítmico.

Si la relación de amortiguamiento es pequeña, la ec. (1.70) se puede aproximar a

$$\delta = 2 \pi D \quad \dots(1.71)$$

#### 1.2.4 VIBRACION FORZADA CON AMORTIGUAMIENTO VISCOSO.

En esta sección se obtienen los valores de amplitud máxima y frecuencia de resonancia para este tipo de sistemas.

Una cimentación puede ser sujeta a una fuerza con variación sinusoidal  $Q = Q_0 \text{ sen } \omega t$  ; la ecuación diferencial que representa el movimiento de este sistema puede representarse como

$$m \ddot{z} + k z + c \dot{z} = Q_0 \sin \omega t \quad \dots(1.72)$$

de la cual se tiene como solución particular

$$z = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t \quad \dots(1.73)$$

donde  $A_1$  y  $A_2$  son constantes.

Sustituyendo la ec. (1.73) en la ec. (1.72)

$$m ( -A_1 \omega^2 \sin \omega t - A_2 \omega^2 \cos \omega t ) + k ( A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t ) + c ( A_1 \omega \cos \omega t - A_2 \omega \sin \omega t ) = Q_0 \sin \omega t \quad \dots(1.74)$$

agrupando las funciones en seno y coseno de la ec. anterior y separandolas

$$(-m A_1 \omega^2 + k A_1 - c A_2 \omega) \sin \omega t = Q_0 \sin \omega t \quad \dots(1.75a)$$

$$(-m A_2 \omega^2 + k A_2 + c A_1 \omega) \cos \omega t = 0 \quad \dots(1.75b)$$

de la ec. (1.75a)

$$A_1 [(k/m) - \omega^2] - A_2 [(c/m)\omega] = Q_0 / m \quad \dots(1.76)$$

y de la ec. (1.75b)

$$A_1 [(c/m)\omega] + A_2 [(k/m) - \omega^2] = 0 \quad \dots(1.77)$$

la solución de las ecs.(1.76) y (1.77) se obtiene como

$$A_1 = \frac{(k - m \omega^2) Q_0}{(k - m \omega^2) + c^2 \omega^2} \quad \dots(1.78)$$

y

$$A_z = \frac{-c \omega Q_0}{(k - m \omega^2) + c^2 \omega^2} \quad \dots(1.79)$$

sustituyendo las ecs. (1.78) y (1.79) en la ec. (1.73) y simplificando

$$z = Z \cos(\omega t + \alpha) \quad \dots(1.80)$$

donde

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{1 - (\omega^2 / \omega_n^2)}{2 D (\omega / \omega_n)} \right) \quad \dots(1.81)$$

$$Z = \frac{(Q_0 / k)}{\sqrt{(1 - \omega^2 / \omega_n^2)^2 + 4 D^2 (\omega^2 / \omega_n^2)}} \quad \dots(1.82)$$

$$\omega_n = \sqrt{k / m}$$

La ec. (1.82) puede graficarse en forma adimensional como  $Z/(Q_0/k)$  vs  $\omega/\omega_n$  como se observa en la fig. (1.9); podemos ver que el máximo valor de  $Z/(Q_0/k)$  no ocurre para  $\omega = \omega_n$ , dicho valor se puede encontrar matemáticamente como

$$\frac{Z}{Q_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 / \omega_n^2)^2 + 4 D^2 (\omega^2 / \omega_n^2)}} \quad \dots(1.83)$$

para el máximo valor de  $Z/(Q_0/k)$

$$\frac{d [Z/(Q_0/k)]}{d (\omega/\omega_n)} = 0 \quad \dots(1.84)$$

de las ecs. (1.83) y (1.84)

$$\frac{\omega}{\omega_n} \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) - 2 D^2 \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right) = 0$$

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - 2 D^2} \quad \dots(1.85)$$

de aquí

$$f_m = f_n \sqrt{1 - 2 D^2} \quad \dots(1.86)$$

donde  $f_m$  es la frecuencia para máxima amplitud (la frecuencia resonante con amortiguamiento) y

$$f_n = (\pi/2) \sqrt{k/m}$$

La amplitud de vibración para resonancia se obtiene sustituyendo la ec. (1.85) en la ec. (1.82)

$$Z_{res} = (Q_0/k) (2 D \sqrt{1 - D^2})^{-1} \quad \dots(1.87)$$

La máxima fuerza dinámica transmitida al subsuelo puede obtenerse sumando la fuerza desarrollada en el resorte y en el amortiguador, causadas por el movimiento relativo, con lo cual

$$F_{din} = k z + c \dot{z} \quad \dots(1.88a)$$

de la ec. (1.80)

$$z = Z \cos (\omega t + \alpha)$$

se obtiene

$$\dot{z} = -\omega Z \sin (\omega t + \alpha)$$

$$F_{din} = k Z \cos (\omega t + \alpha) + c \omega Z \sin (\omega t + \alpha) \quad \dots(1.88b)$$

tomando

$$k Z = A \cos \phi \quad \text{y} \quad c \omega Z = A \sin \phi$$

reescribiendo la ec. (1.88) se tiene

$$F_{din} = A \cos (\omega t + \phi + \alpha) \quad \dots(1.89)$$

donde

$$A = Z \sqrt{k^2 + (c \omega)^2} \quad \dots(1.90)$$

de aquí se tiene que la magnitud de la máxima fuerza dinámica transmitida al subsuelo será

$$F_{din(max)} = Z \sqrt{k^2 + (c \omega)^2}$$

### 1.2.5 EXCITACION POR MASA ROTATORIA.

En esta parte se trata el problema de equipos con masas que giran, los cuales son problemas muy comunes en equipos que producen vibración; en esta sección se encuentran las amplitudes de vibración de esta clase de equipos.

En muchos casos de cimentaciones para maquinaria, las vibraciones verticales de la cimentación son producidas por masas rotatorias como la que se puede apreciar en la fig (1.10a).

Cuando las fuerzas horizontales se cancelan en cualquier momento, la fuerza vibratoria neta puede determinarse como

$$2 m e \omega t$$

donde  $m$  es la masa de cada elemento rotatorio,  $e$  es la excentricidad y  $\omega$  es la frecuencia angular de las masas. Para estos casos, la ec. de movimiento con amortiguamiento viscoso [ec. (1.72)] puede expresarse como

$$m \ddot{z} + k z + c \dot{z} = Q_0 \sin \omega t \quad \dots(1.91)$$

$$Q_0 = 2 m_0 e \omega^2 = U \omega^2 \quad \dots(1.92)$$

$$U = 2 m_0 e \quad \dots(1.93)$$

Las ecs. (1.91) - (1.93) se resuelven de la misma forma como se presentaron las soluciones en la sección anterior.

La solución para el desplazamiento puede obtenerse como

$$z = Z \cos (\omega t + \alpha) \quad \dots(1.94)$$

donde

$$Z = \frac{(U/m) (\omega/\omega_n)}{\sqrt{(1-\omega^2/\omega_n^2)^2 + 4 D^2 (\omega^2/\omega_n^2)}} \quad \dots(1.95)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left[ \frac{1 - \omega^2/\omega_n^2}{2 D (\omega/\omega_n)} \right] \quad \dots(1.96)$$

En la sección anterior se mostro una gráfica en la fig. (1.9), la cual se obtuvo para una vibración producida por una función sinusoidal ( $Q_0 = \text{cte.}$ ). En este caso también se muestra la gráfica correspondiente, la cual se encuentra en la fig. (1.10b). Analizando el problema como anteriormente, la frecuencia resonante puede darse, para este caso, como

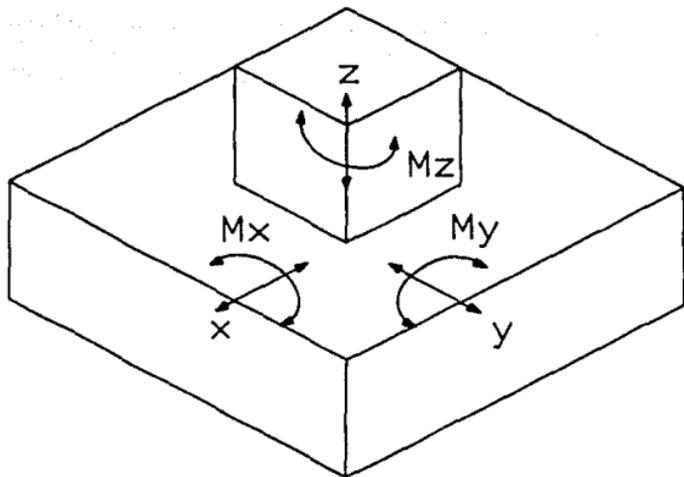
$$\omega = \omega_n / \sqrt{1 - 2 D^2} \quad \dots(1.97)$$

y

$$f_n = f_n / \sqrt{1 - 2 D^2} \quad \dots(1.98)$$

La amplitud de frecuencia resonante puede quedar como

$$Z_{res} = \frac{U / m}{2 D \sqrt{1 - 2 D^2}} \dots(1.99)$$



**FIG. 1.1 LOS SEIS MODOS DE VIBRACION DE UNA CIMENTACION.**

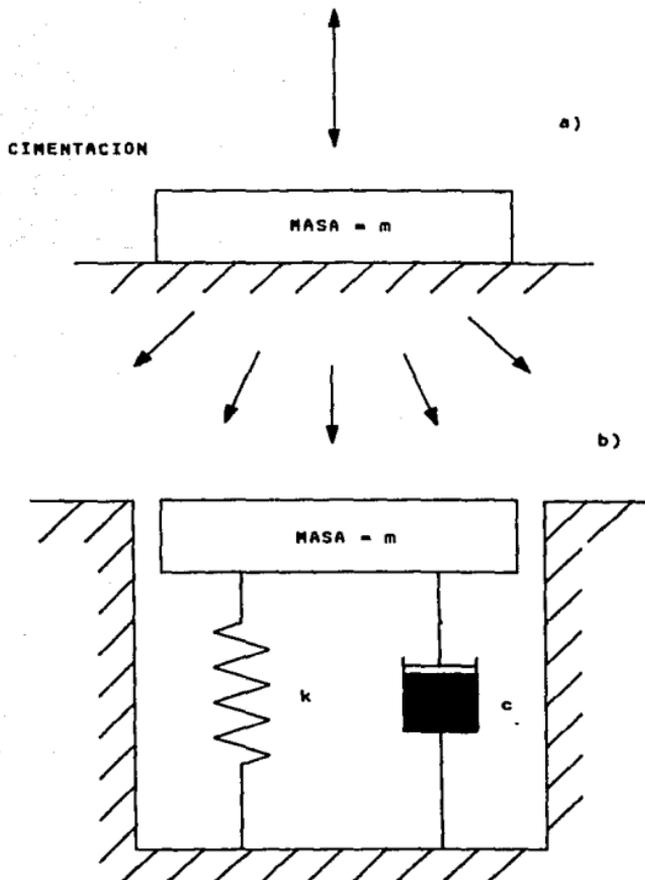


FIG. 1.2 SISTEMA DE PARAMETROS DEL SUELO.

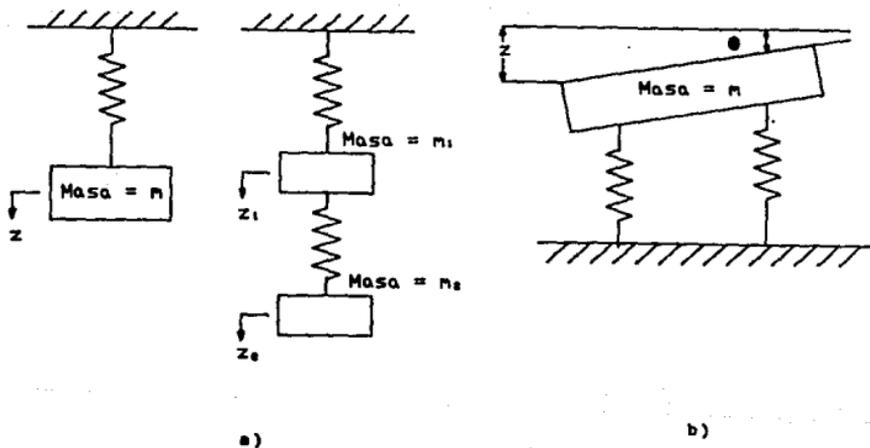


FIG. 1.3 GRADOS DE LIBERTAD DE UN SISTEMA VIBRATORIO.

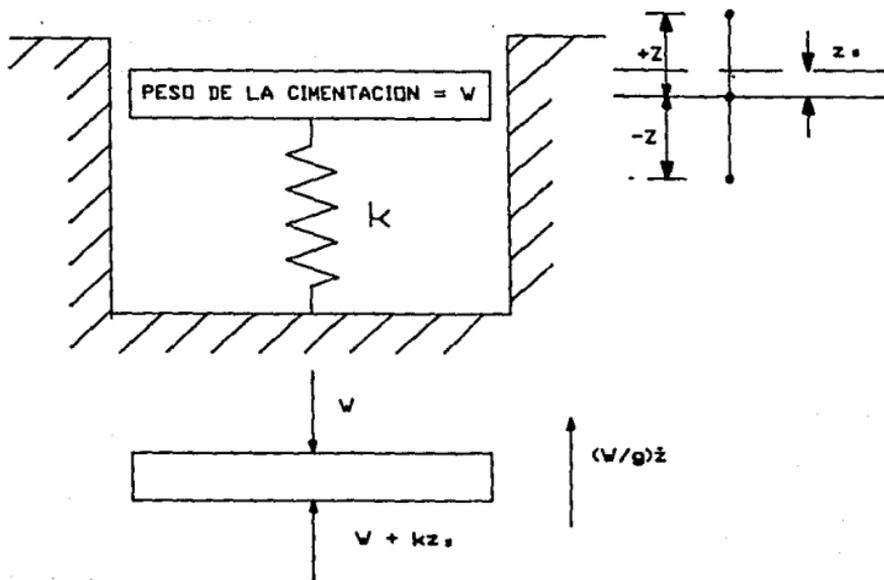


FIG. 1.4 VIBRACION LIBRE DE UN SISTEMA DE MASA Y RESORTE

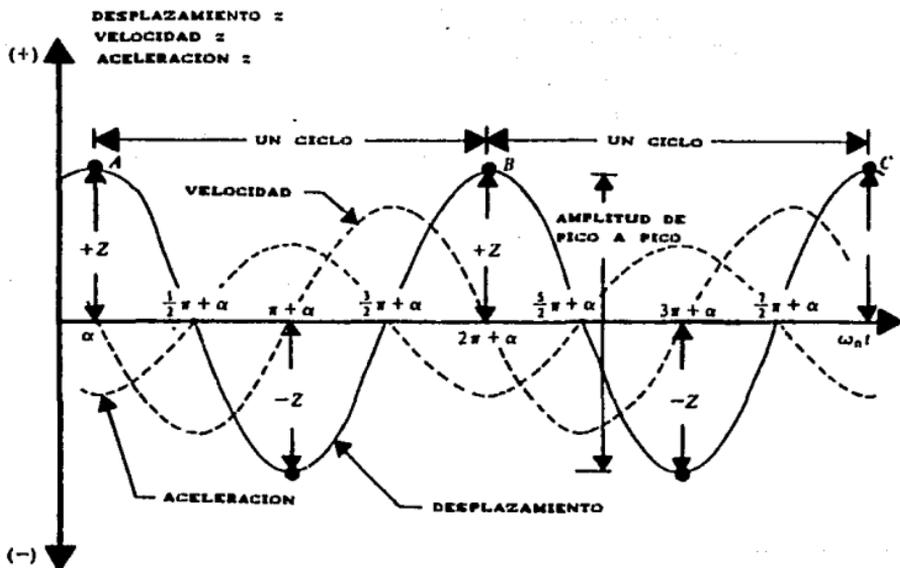


FIG. 1.5 GRAFICAS DE DESPLAZAMIENTO, ACELERACION Y VELOCIDAD PARA VIBRACION LIBRE DE UN SISTEMA DE MASA Y RESORTE.

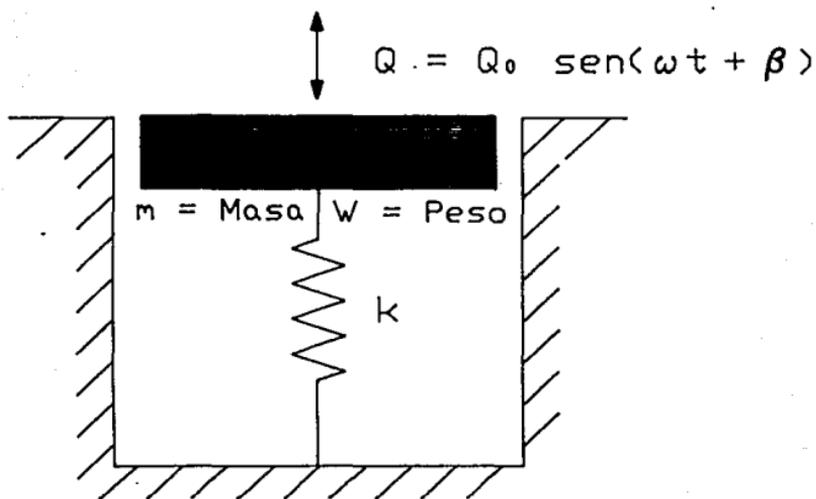


FIG. 1.6 VIBRACION FORZADA DE UN SISTEMA DE MASA Y RESORTE

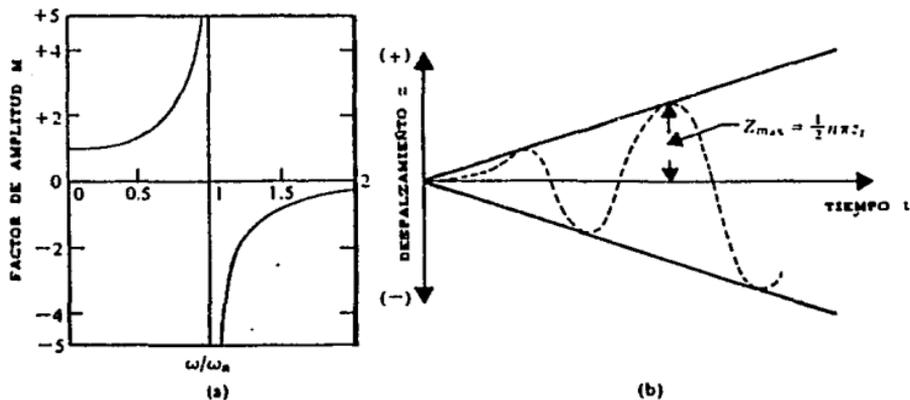


FIG. 1.7 VIBRACION FORZADA DE UN SISTEMA DE MASA Y RESORTE:  
 a) VARIACION DEL FACTOR DE AMPLITUD  $M$  VS.  $\omega/\omega_n$ ; b) VARIACION  
 DEL DESPLAZAMIENTO EN EL TIEMPO PARA CONDICIONES DE  
 RESONANCIA ( $\omega = \omega_n$ ).

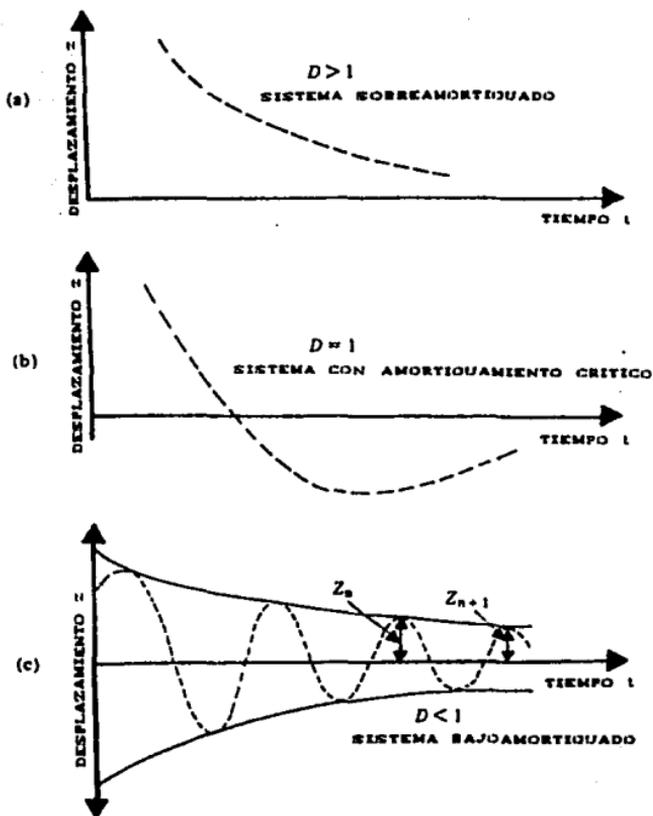


FIG. 1.8 VIBRACION LIBRE DE UN SISTEMA DE MASA-RESORTE-AMORTIGUADOR: a) SOBREAMORTIGUADO, b) CON AMORTIGUAMIENTO CRITICO Y c) BAJO AMORTIGUADO

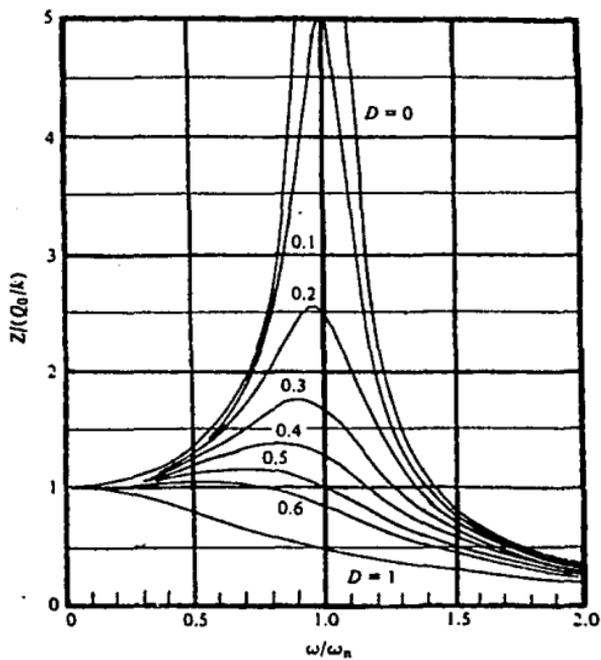


FIG. 1.9 GRAFICA DE  $Z/(Q_0/k)$  VS.  $\omega/\omega_n$

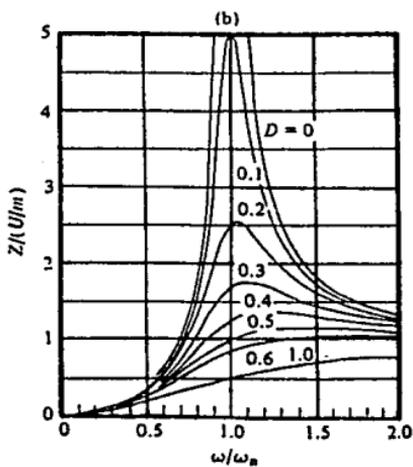
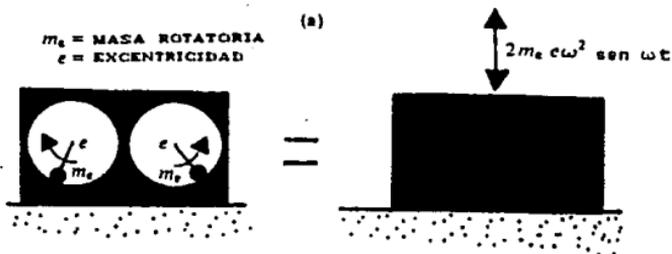


FIG. 1.10 a) EXCITACION POR MASAS ROTATORIAS  
 b) GRAFICA  $Z/(U/m)$  VS.  $\omega/\omega_n$

**CAPITULO 2 VIBRACION DE CIMENTACIONES: TEORIAS DEL SEMIESPACIO  
ELASTICO.**

En este capítulo se desarrollan los fundamentos de las vibraciones de las cimentaciones apoyadas en un semiespacio elástico; este medio elástico, el suelo en nuestro caso, es considerado como homogéneo, isotrópico y seminfinito, lo cual se aleja considerablemente de las características reales del suelo, sin embargo, para niveles bajos de vibración puede considerarse al suelo como un medio elástico con una razonable aproximación. Debido a esto las expresiones que se desarrollan a continuación son aplicables sólo para cimentaciones con bajas amplitudes de vibración.

En las siguientes secciones se muestran las ecuaciones de amplitud de vibración, así como para los radios equivalentes y las respectivas gráficas de diseño para cada uno de los diferentes modos de vibración que presenta una cimentación superficial.

## 2.1 VIBRACION VERTICAL DE CIMENTACIONES.

Lamb en 1904 estudio el problema de las vibraciones como una fuerza oscilante que actúa en un sólo punto, actuando ya sea en forma vertical u horizontal, como se aprecia en la fig. (2.1), a este estudio generalmente se le denomina como el problema dinámico de Boussinesq. Posteriormente, Reissner en 1936, analizó el problema con una carga uniformemente repartida sobre una área circular flexible apoyada en un semiespacio elástico, lo cual fue realizado integrando el problema propuesto por Lamb. Basado en esto, tenemos que el desplazamiento al centro de una área flexible y cargada, fig. (2.2a), esta dada por

$$z = \frac{Q_0 e^{i\omega t}}{G r_0} (f_1 + if_2) \quad \dots(2.1)$$

donde  $Q_0$  = amplitud total de la carga actuante en la cimentación.

$z$  = desplazamiento periódico al centro del área cargada.

$\omega$  = frecuencia circular de la aplicación de la carga.

$r_0$  = radio del área cargada.  
 $G$  = módulo al cortante del suelo.  
 $f_1$  y  $f_2$  = funciones de desplazamiento.

Considerando una cimentación flexible y circular de peso  $W$  que esta apoyada en un semiespacio elástico y sujeta a una fuerza de magnitud

$$Q_0 e^{i(\omega t + \alpha)}$$

como se muestra en la fig.(2.2b) ( $\alpha$  es la diferencia de fase entre la fuerza excitante y el desplazamiento de la cimentación).

Usando la relación de desplazamiento de la ec. (2.1) y resolviendo el equilibrio de fuerzas Reissner obtuvo

$$A_z = ( Q_0 / G r_0 ) Z \quad \dots(2.2)$$

donde  $A_z$  es la amplitud de movimiento de la cimentación y  $Z$  es un factor de amplitud adimensional dado como

$$Z = \frac{f_1^2 + f_2^2}{(1 - b a_0^2 f_1)^2 + (b a_0^2 f_2)^2} \quad \dots(2.3)$$

donde la relación adimensional de masa  $b$  es

$$b = W / \gamma r_0^3 \quad \dots(2.4)$$

y la frecuencia adimensional  $a_0$  es

$$a_0 = \omega r_0 / v_s = \omega r_0 \sqrt{\rho / G} \quad \dots(2.5)$$

en donde  $\gamma$  es el peso unitario del suelo (natural) y  $v_s$  es la velocidad de ondas cortante del suelo.

Posteriormente, Sung y Quinlan en 1953, consideraron el caso de cimentaciones rígidas y donde la distribución de la presión de contacto tiene una distribución parabólica, como se muestra en la fig. (2.3). La distribución de la presión de contacto para cada uno de los tres casos de distribución de presiones que se han mencionado, pueden expresarse como

- cimentaciones flexibles circulares, fig. (2.3a)

$$q = \frac{Q_0 e^{i(\omega t + \alpha)}}{\pi r_0^2} \quad \dots(2.6)$$

- cimentaciones rígidas circulares, fig. (2.3b)

$$q = \frac{Q_0 e^{i(\omega t + \alpha)}}{2 \pi r_0 \sqrt{r_0^2 - r^2}} ; \text{ para } r \leq r_0 \quad \dots(2.7)$$

- cimentaciones con distribución parabólica, fig. (2.3c)

$$q = \frac{Q_0 e^{i(\omega t + \alpha)} 2(r_0^2 - r^2)}{\pi r_0^4} ; \text{ para } r \leq r_0 \quad \dots(2.8)$$

donde  $q$  es la presión de contacto a una distancia  $r$  medida desde el centro de la cimentación.

Como la gran mayoría de las cimentaciones superficiales son rígidas, este es el caso que se considera más específicamente de aquí en adelante.

Para una cimentación rígida sujeta a una fuerza de excitación constante la amplitud de movimiento puede representarse con las ecs. (2.2) - (2.5). Las funciones de desplazamiento ( $f_s$  y  $f_a$ ) son las que difieren para cada tipo de cimentación; los valores de  $f_s$  y  $-f_a$  para una cimentación flexible se muestran en la tabla (2.1), en tanto que para una cimentación rígida se pueden observar en la

tabla (2.2) , estas funciones se dan en series de potencias de  $a_0$ .

La fig. (2.4) muestra una gráfica de  $Z$  vs  $a_0$  para diferentes valores de  $b$  para una vibración de base rígida ( $\mu = 0.25$ ). En la fig. (2.5) se muestra una cimentación rígida excitada por dos masas rotatorias; para este caso, la amplitud de la fuerza oscilante externa puede darse como

$$Q_0 = 2 m_0 e \omega^2 = m_1 e \omega^2 \quad \dots(2.9)$$

donde  $m_1$  es el total de masas rotatorias y  $\omega$  es la frecuencia circular de operación de estas masas.

Para esta condición, la amplitud de vibración queda como

$$A_z = \frac{m_1 e \omega^2}{G r_0} \sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{(1 - b a_0^2 f_1)^2 + (b a_0^2 f_2)^2}} \quad \dots(2.10)$$

con

$$\omega^2 = a_0^2 G / \rho r_0^2 \quad \dots(2.11)$$

sustituyendo la ec. (2.11) en la ec. (2.10)

$$A_z = \frac{m_1 e}{\rho r_0^2} Z' \quad \dots(2.12)$$

donde

$$Z' = a_0^2 \sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{(1 - b a_0^2 f_1)^2 + (b a_0^2 f_2)^2}} \quad \dots(2.13)$$

la fig. (2.5) muestra una gráfica de  $Z'$  vs  $a_0$  para distintos valores de  $b$  y  $\mu = 0.25$ . Hay que notar que las curvas de las figs. (2.4) y (2.5) son semejantes a las curvas frecuencia amplitud de

las fig. (1.9) y (1.10). El efecto del módulo de Poisson en la variación de  $Z'$  vs  $a_0$  puede observarse en la fig. (2.6b); donde se nota que con el incremento de  $\mu$ , el valor pico de  $Z'$  decrece, y cuando el  $Z'$  máximo se incrementa, también, el módulo de Poisson.

De las curvas de amplitud frecuencia, figs. (2.4) y (2.5) se obtienen los valores de  $a_0$  para máxima amplitud (condición de resonancia), y la relación masa b correspondiente, como se observa en la fig. (2.7a). Estos valores pueden ser graficados como se observa en la fig. (2.7b). La fig. (2.8), muestra gráficas similares ( $\mu = 0, 0.25$  y  $0.5$ ) para excitación por fuerza constante y por masas rotatorias.

Refiriendonos a la fig. (2.7a), se puede tomar el valor de  $Z$  para resonancia y su correspondiente  $b$  y graficarlos como se muestra en la fig. (2.7c). Con esto se obtienen las gráficas de la figs. (2.8) y (2.9), las cuales son necesarias para el diseño de las cimentaciones superficiales para controlar la vibración.

Estas curvas de diseño han sido desarrolladas para cimentaciones circulares rígidas; sin embargo, en la mayoría de las ocasiones las cimentaciones son rectangulares, con largo  $L$  y ancho  $B$ , por lo cual se debe obtener un radio equivalente para poder utilizarlas, este radio equivalente puede obtenerse igualando el área de cimentación rectangular con el área de la cimentación circular, con lo cual se puede decir que el radio equivalente es

$$r_0 = \sqrt{B L / \pi} \quad \dots(2.14)$$

## 2.2 CABECEO EN CIMENTACIONES.

Las soluciones teóricas para la vibración por cabeceo fueron presentadas por Arnold en 1955 y Bycroft en 1956.

Para cimentaciones circulares rígidas sujetas a este tipo de vibración, fig (2.10), la presión de contacto puede describirse como

$$q = \frac{3 M_y r \cos \alpha}{2 \pi r_o^3 \sqrt{r_o^2 - r^2}} e^{i\omega t} \quad \dots(2.15)$$

donde  $M_y$  es el momento impuesto externamente a la cimentación (con respecto al eje  $y$ ) y  $q$  es la presión de contacto en cualquier punto  $a$ , como se observa en la figura anterior pero en planta.

Para un momento estático externo de magnitud  $M_y$ , la rotación angular de la cimentación puede expresarse como

$$\theta_{est} = \frac{3}{8} \frac{(1-\mu) M_y}{G r_o^3} \quad \dots(2.16)$$

Para un momento dinámico  $M_y$ , la amplitud de la rotación angular se expresa como

$$\theta = [ M_y / G r_o^3 ] \theta' \quad \dots(2.17)$$

Para  $\mu = 0$ , la variación del valor de  $\theta'$  con la frecuencia adimensional  $a\omega$  se muestra en la fig. (2.13), para  $b\lambda = 2, 5, 10$  y 20. El término  $b\lambda$  es la relación de inercia que se obtiene con

$$b\lambda = I_o / \rho r_o^3 \quad \dots(2.18)$$

donde  $I_o$  es el momento de inercia de la masa del sistema con respecto al eje  $y$  de la base y  $\rho$  es la densidad del suelo.

En la fig. (2.11a) se muestra que el desarrollo de la curva envolvente es tangente a los picos de la curva amplitud vs. frecuencia para diferentes valores de  $b\lambda$ . Esta curva tangente puede utilizarse para definir la relación entre  $a\omega$  para máxima

amplitud y los valores de la relación de inercia  $b$ , fig. (2.11b).

En el caso de que las cimentaciones sean rectangulares, el radio equivalente que se debe emplear para entrar a la gráfica esta dado por

$$r_0 = \sqrt[4]{B L^3 / 3 \pi}$$

Los valores de  $B$  y  $L$  se definen en la fig. (2.13).

### 2.3 VIBRACION HORIZONTAL EN UNA CIMENTACION.

Arnold en 1955 desarrolló las soluciones para este tipo de vibración, el cual se presenta en la fig. (2.12), donde se supone que actúa una fuerza

$$Q = Q_0 e^{i\omega t}$$

con lo que la amplitud de vibración para excitación por fuerza constante puede describirse como

$$A_x = ( Q_0 / G r_0 ) X \quad \dots(2.19)$$

donde  $A_x$  es la amplitud de vibración por desplazamiento,  $Q_0$  es constante y  $X$  es un factor adimensional.

La variación de la amplitud vs frecuencia (para  $b = 2, 4, 10, 20, 40$  y  $50$ ) para la vibración por deslizamiento se muestra en la fig. (2.15a), esto es para el caso de que  $\mu = 0$ . El desarrollo de estas curvas sirven para definir la relación entre la frecuencia a máxima amplitud y la relación de masa  $b$ . Esta curva se utiliza para obtener  $b$  ( $=m/\gamma r_0^3$ ) vs  $a_0$  para amplitud resonante, fig. (2.15b).

Para excitación por masas rotatorias, la amplitud de vibración se expresa como

$$A_x = ( m_0 e / \rho r_0^3 ) X' \quad \dots(2.20)$$

donde la fuerza de excitación es  $Q_0 = m_0 e \omega^2$ , y el factor adimensional es  $X'$ . La fig. (2.15a) muestra la curva  $X'$  vs  $a_0$  para condiciones de resonancia y la fig. (2.15b) la gráfica de  $b$  vs  $a_0$  para las mismas condiciones.

## 2.5 TORSION EN CIMENTACIONES.

Reissner en 1937 propuso la solución teórica para la vibración por torsión; la fig. (2.14) muestra una cimentación circular sujeta a un torque

$$T_0 = e^{i\omega t}$$

alrededor del eje z-z. Este problema puede solucionarse considerando una distribución de esfuerzos  $\tau_{\theta z}$  como la que se muestra en la fig. (2.14b), para la cual la ecuación puede darse como

$$\tau_{\theta z} = \frac{3}{4\pi} \left[ \frac{T r}{r_0^3 \sqrt{r_0^2 - r^2}} \right] ; \text{ para } 0 \leq r \leq r_0 \quad \dots(2.21)$$

para un torque estático  $T$ , el ángulo de rotación  $\alpha$  puede expresarse como

$$\alpha = ( 3 / 16 G r_0^3 ) T e^{i\omega t} \quad \dots(2.22)$$

para un torque dinámico con  $T_0$  como antes se mencionó, la amplitud del ángulo de rotación se expresa con

$$\alpha = ( T_0 / G r_0^3 ) \alpha' \quad \dots(2.23)$$

donde  $\alpha'$  es el factor de amplitud adimensional.

La variación de la amplitud vs frecuencia ( $\alpha'$  vs  $a\omega$ ) para cimentaciones rígidas con relación de masa  $b_1 = 2, 5$  y  $10$  se muestra en la fig. (2.16a). La curva envolvente nos muestra la relación para frecuencia en condiciones de resonancia y la relación de masa  $b_1$ ; esta curva se utiliza para obtener la gráfica  $b_1$  vs  $a\omega$  en resonancia como se aprecia en la fig. (2.16b).

La relación de masa por torsión  $b_1$  esta definida por

$$b_1 = J_{zz} / \rho r_0^5 \quad \dots(2.24)$$

donde  $J_{zz}$  es el momento de inercia de la masa del sistema con respecto al eje z-z.

El radio equivalente que se emplea en caso de que se trate de una cimentación rectangular para entrar a la gráfica de diseño es

$$r_0 = \sqrt{\frac{B L ( B^2 + L^2 )}{6 \pi}} \quad \dots(2.25)$$

donde B y L son el ancho y largo de la cimentación rectangular respectivamente.

TABLA 2.1 Valores de  $f_s$  y  $-f_s$  para cimentación flexible.

Relación de Poisson	Valores de $f_s$
0.00	$0.318310 - 0.092841 a_0^2 + 0.007405 a_0^4$
0.25	$0.238733 - 0.059683 a_0^2 + 0.004163 a_0^4$
0.50	$0.159155 - 0.039789 a_0^2 + 0.002432 a_0^4$
	Valores de $-f_s$
0.00	$0.214474 a_0 + 0.295610 a_0^3 + 0.001528 a_0^5$
0.25	$0.148594 a_0 + 0.017757 a_0^3 + 0.000808 a_0^5$
0.50	$0.104547 a_0 + 0.011038 a_0^3 + 0.000444 a_0^5$

TABLA 2.2 Valores de  $f_s$  y  $-f_s$  para cimentación rígida.

Relación de Poisson	Valores de $f_s$
0.00	$0.2500 - 0.109375 a_0^2 + 0.010905 a_0^4$
0.25	$0.1875 - 0.070313 a_0^2 + 0.006131 a_0^4$
0.50	$0.1250 - 0.046875 a_0^2 + 0.003581 a_0^4$
	Valores de $-f_s$
0.00	$0.214470 a_0 + 0.039416 a_0^3 + 0.002444 a_0^5$
0.25	$0.148594 a_0 + 0.023677 a_0^3 + 0.001294 a_0^5$
0.50	$0.104547 a_0 + 0.014717 a_0^3 + 0.007170 a_0^5$

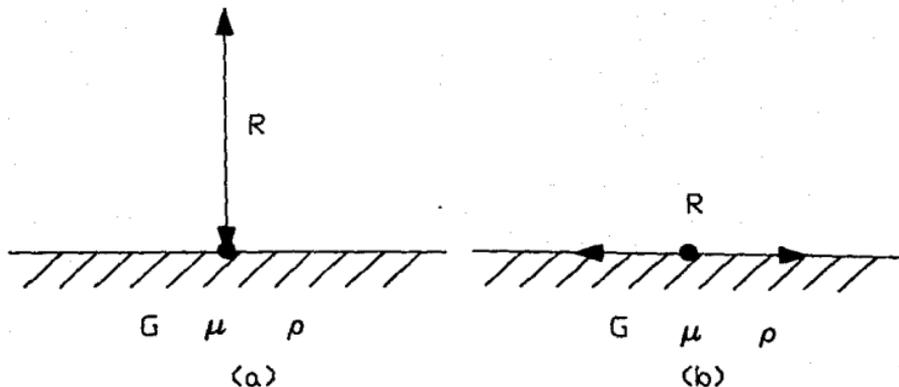
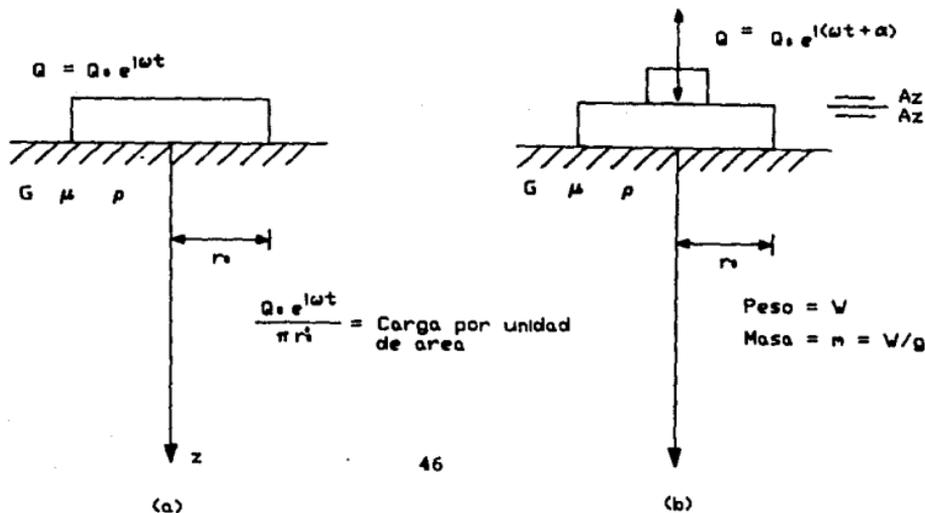


FIG. 2.1 FUERZA VIBRATORIA EN LA SUPERFICIE DE UN SEMIESPACIO ELASTICO: a) VERTICAL, b) HORIZONTAL

FIG. 2.2 a) VIBRACION SOBRE UNA AREA CIRCULAR FLEXIBLE UNIFORMEMENTE CARGADA, b) CIMENTACION CIRCULAR SUJETA A VIBRACION FORZADA



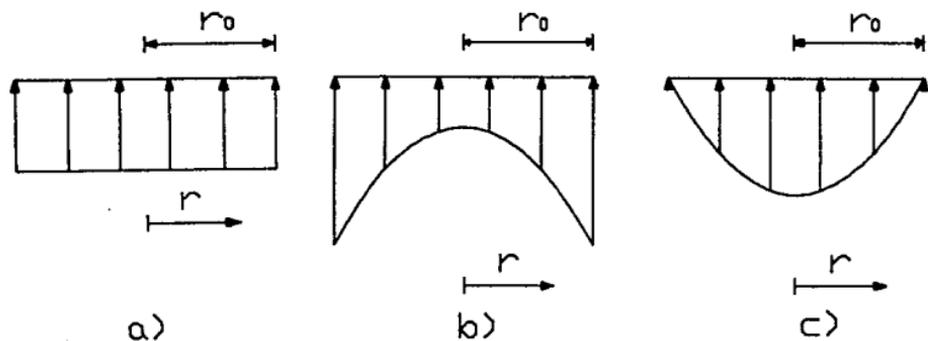


FIG. 2.3 DISTRIBUCION DE LA PRESION DE CONTACTO BAJO UNA CIMENTACION CIRCULAR DE RADIO  $r_0$ : a) FLEXIBLE, b) RIGIDA, c) PARABOLICA.

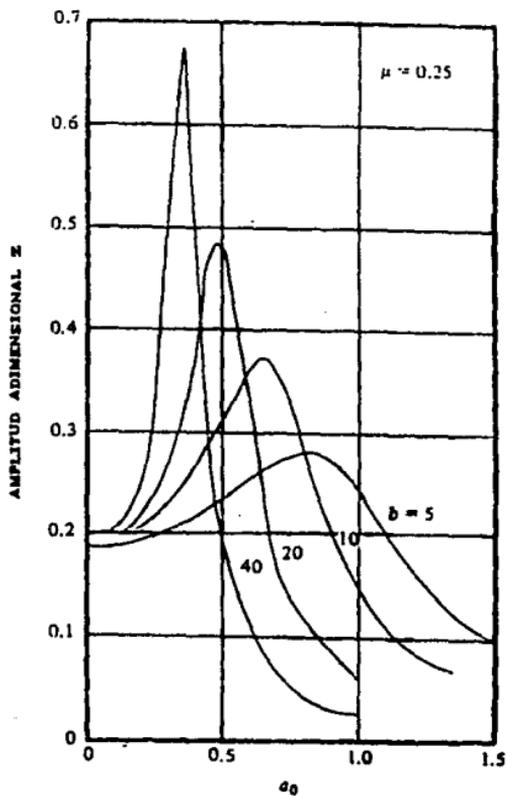


FIG. 2.4 GRAFICA DE  $Z$  VS.  $a_0$  PARA UNA CIMENTACION CIRCULAR RIGIDA (RICHART, F.E. JR; 1962)

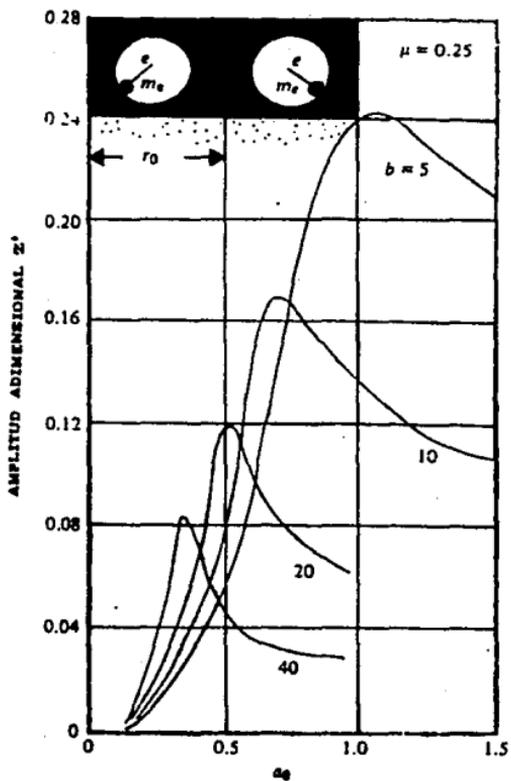


FIG. 2.5 GRAFICA DE  $z'$  VS.  $a_0$  PARA UNA CIMENTACION CIRCULAR RIGIDA (RICHART, F.E. JR; 1962)

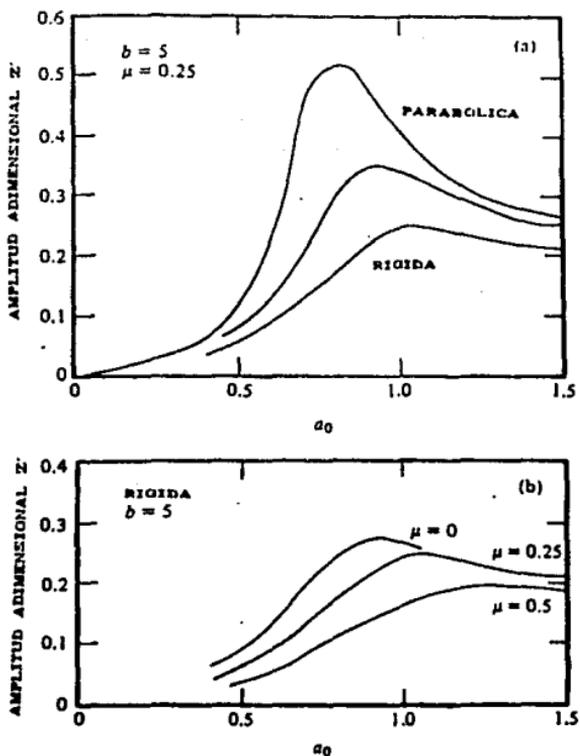


FIG. 2.6 EFECTO DE LA DISTRIBUCION DE LA PRESION DE CONTACTO EN LA VARIACION DE  $Z'$  VS.  $a_0$ , b) EFECTO DEL MODULO DE POISSON EN LA VARIACION DE  $Z'$  VS.  $a_0$

(RICHART, F.E. JR; WHITMAN, R.V.; 1962)

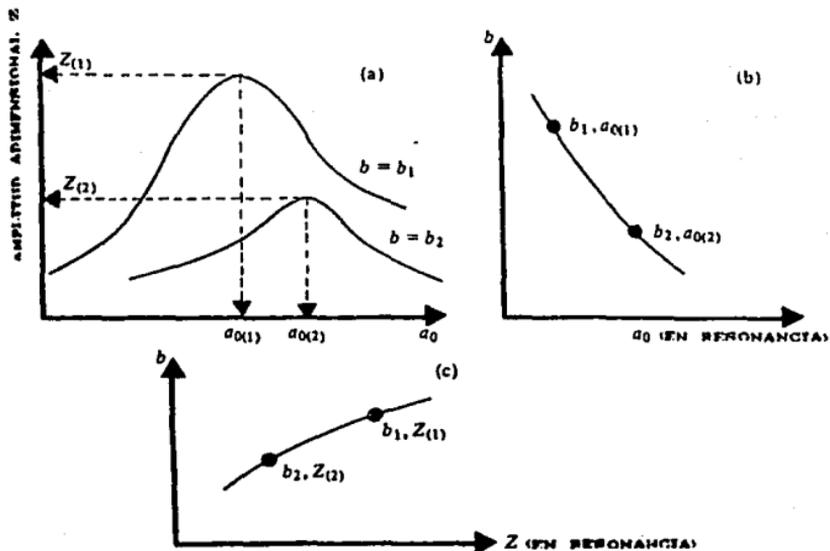


FIG. 2.7 PROCEDIMIENTO PARA ELABORAR LAS GRAFICAS DE  $b$  VS.  $a_0$  Y  $b$  VS.  $Z$  PARA CONDICIONES DE RESONANCIA.  
(DAS, BRAJA; 1984)

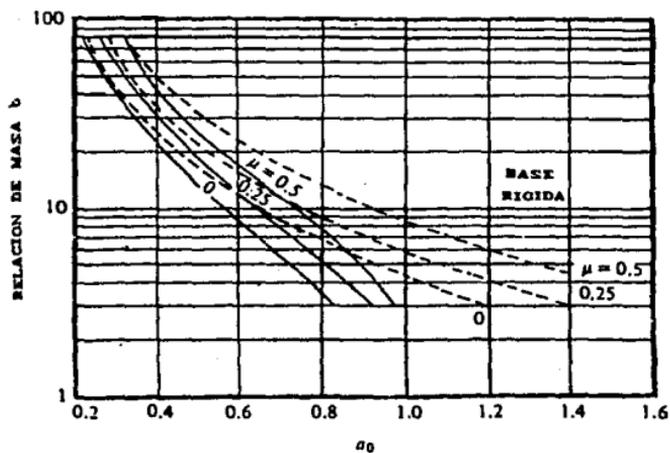


FIG. 2.8 b VS.  $a_0$  PARA CONDICIONES DE RESONANCIA PARA VIBRACION VERTICAL:

----- MASAS ROTATORIAS,  
 ——— FUERZA CONSTANTE  
 (RICHART, F.E. JR; 1962)

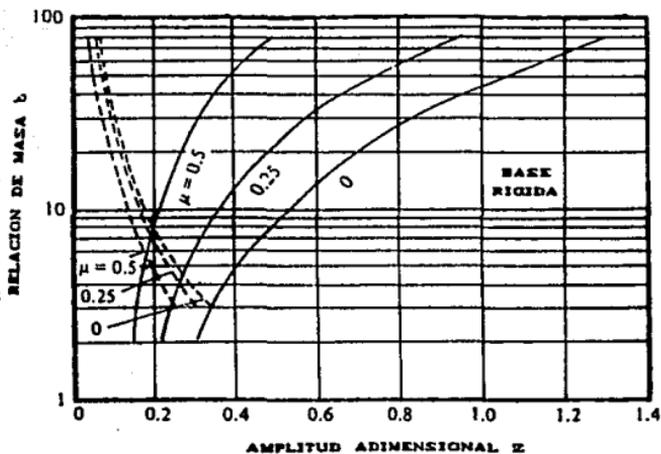


FIG. 2.9 b VS. Z PARA CONDICIONES DE RESONANCIA PARA VIBRACION VERTICAL:

-----MASAS ROTATORIAS,

—————FUERZA CONSTANTE

(RICHART, F.E. JR; 1962)

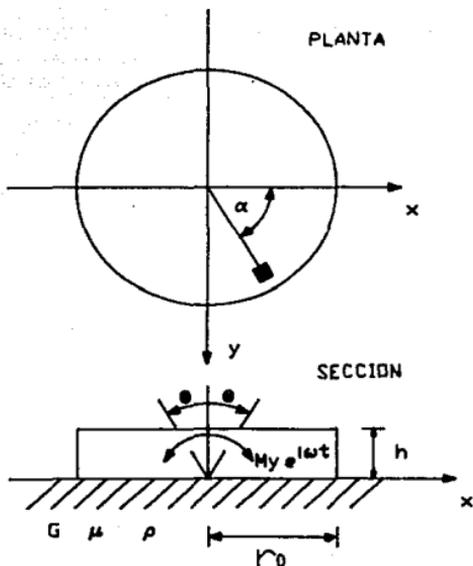


FIG 2.10 VIBRACION POR CABECEO EN UNA CIMENTACION RIGIDA CIRCULAR

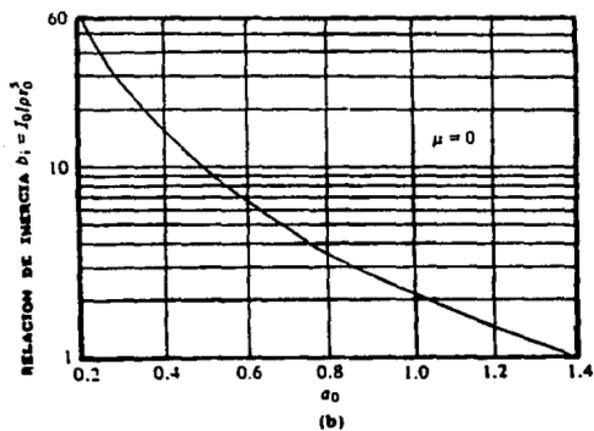
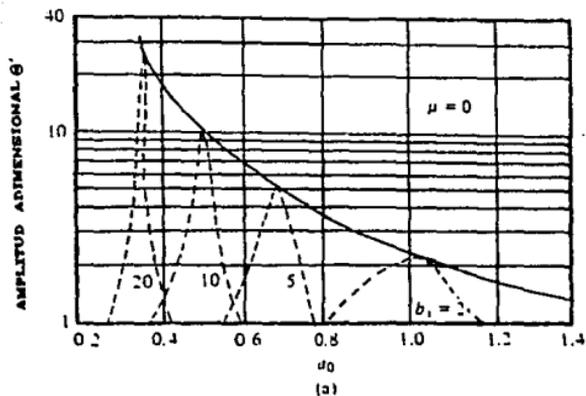


FIG. 2.11 CABECEO EN CIMENTACIONES CIRCULARES RIGIDAS:  
 a) GRAFICA  $\Theta'$  VS.  $a_0$ , b) GRAFICA  $b_1$  VS.  $a_0$   
 (RICHART, F.E. Jr; 1962)

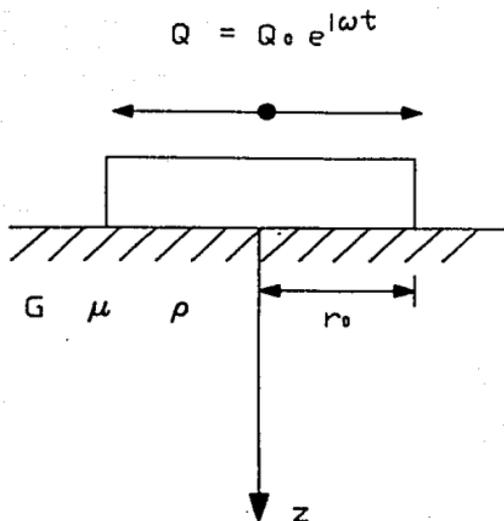


FIG. 2.12 VIBRACION HORIZONTAL DE UNA CIMENTACION CIRCULAR RIGIDA

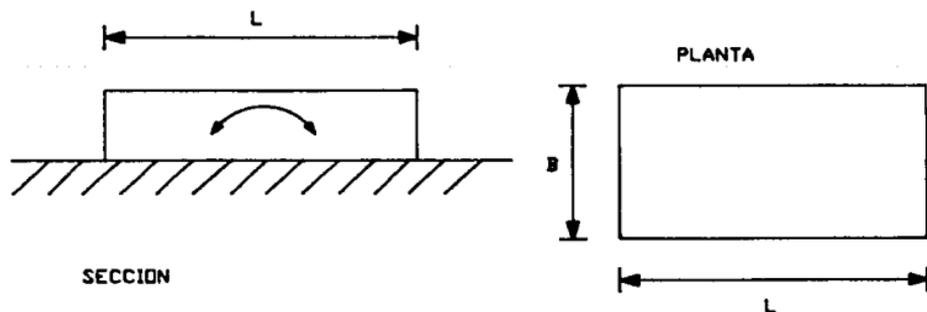


FIG. 2.13 RADIO EQUIVALENTE PARA CABECEO

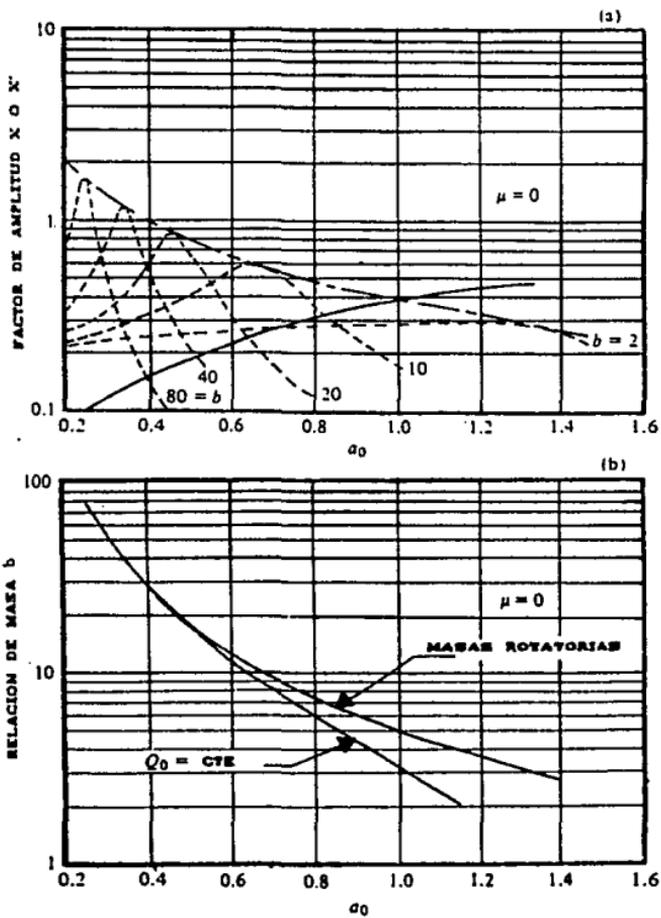


FIG. 2.15 VIBRACION HORIZONTAL EN CONDICIONES DE RESONANCIA:

— a) X VS.  $a_0$  ( $Q_0 = \text{CTE}$ ), - - - - X' VS.  $a_0$  (M.R.),

b) RELACION DE MASA b VS.  $a_0$

(RICHART, F.E. Jr; 1962)

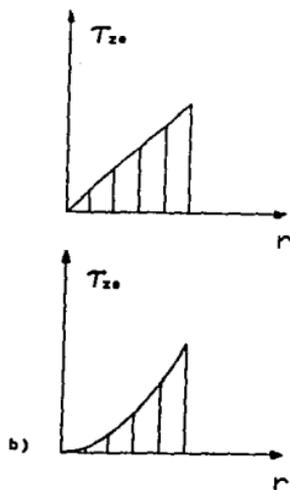
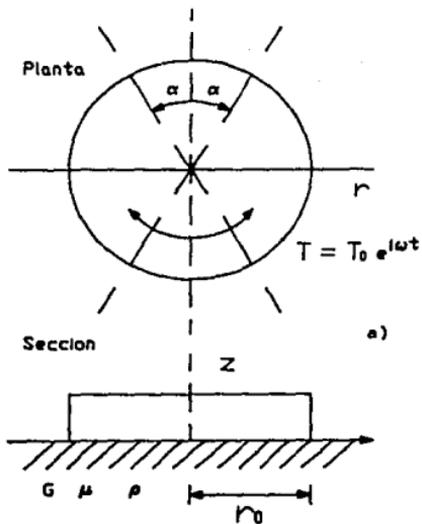


FIG. 2.14 VIBRACION POR TORSION DE UNA CIMENTACION CIRCULAR RIGIDA.

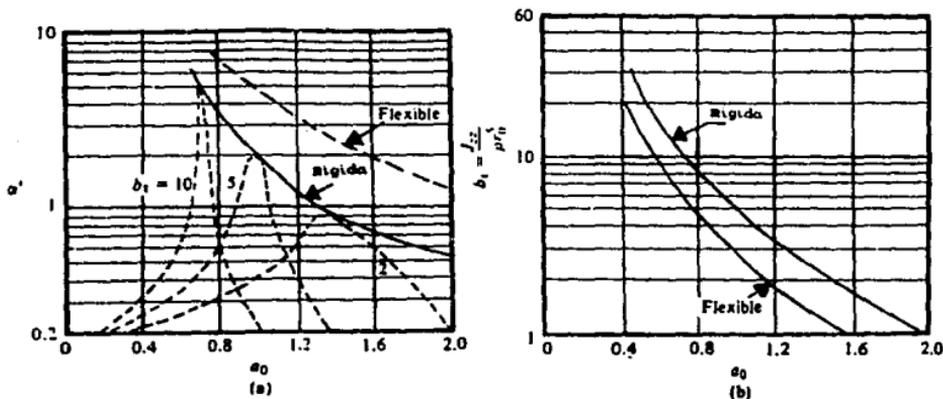


FIG. 2.16 CARACTERISTICAS DE LA VIBRACION POR TORSION (RICHART, F.E. Jr; 1962)

**CAPITULO 3. ANALISIS DE VIBRACION EN CIMENTACIONES: SISTEMA DE  
PARAMETROS DEL SUELO.**

En el capítulo anterior se presentaron los fundamentos para el diseño de cimentaciones sujetas a vibración por medio de la teoría del semiespacio elástico; sin embargo, la solución de problemas reales es un poco difícil y la teoría anterior es sólo una aproximación de lo que sucede realmente, como se ha dicho anteriormente.

Una técnica más sencilla y que resulta ser más aplicada a problemas reales, según Das (1984), es utilizar los sistemas constituidos por una masa, un resorte y un amortiguador (sistema de parámetros del suelo) para el análisis de los problemas de vibración de cimentaciones.

Los fundamentos matemáticos para este tipo de sistemas se presentaron en el capítulo 1, donde se encontró la forma de evaluar los parámetros de estos sistemas. En este capítulo se presentan los procedimientos propios para la evaluación de estos parámetros en situaciones reales, para distintos modos de vibración, apoyándose también en la teoría presentada en el capítulo anterior.

También mencionaremos algunas formas para encontrar las propiedades del suelo que son necesarias para el diseño de cimentaciones. Como lo son el módulo  $G$ , la relación de Poisson y la constante  $k$  de una forma directa.

### 3.1 SISTEMA DE PARAMETROS DEL SUELO PARA MOVIMIENTO VERTICAL.

#### 3.1.1 RELACIONES GENERALES.

En esta sección se presenta el desarrollo matemático para encontrar la ec. de desplazamiento de este tipo de vibración.

Lysmer y Richart en 1966 desarrollaron los fundamentos de este estudio para un estado de movimiento continuo; esta aproximación

se reproduce en esta sección para desarrollar las relaciones generales.

Un sistema dinámico lineal S que es excitado por una fuerza vertical periódica P como se muestra en la fig. (3.1a), esta fuerza puede expresarse como

$$P = P_0 e^{i\omega t} \quad \dots(3.1)$$

donde  $P_0$  es la amplitud de la fuerza en kg y  $\omega$  es la frecuencia natural de la vibración (cps); lo que es igual a la velocidad de operación de la máquina (e es la función exponencial e i es  $\sqrt{-1}$ ).

El desplazamiento vertical z (m) que se produce en el sistema se puede escribir como

$$z = (P_0/k) F e^{i\omega t} \quad \dots(3.2)$$

donde F es una función adimensional y k es la constante del resorte del sistema equivalente. Esta función F puede a su vez expresarse como

$$F = F_1 + iF_2 \quad \dots(3.3)$$

donde  $F_1$  y  $F_2$  son funciones de la frecuencia (notar la similitud entre la ec. (3.2) y la ec.(2.1)).

La fig. (3.1b) muestra un sistema equivalente de resorte y amortiguador sin masa S, la ecuación de movimiento para este sistema puede expresarse como

$$C \dot{z} + K z = P_0 e^{i\omega t} \quad \dots(3.4)$$

de la ec. (3.2) se tiene

$$z = (P_0/k) F_1 \omega e^{i\omega t} \quad \dots(3.5)$$

combinando las ecs. (3.2), (3.4) y (3.5)

$$C (P_0/k) F_1 \omega e^{i\omega t} + K (P_0/k) F e^{i\omega t} = P_0 e^{i\omega t} \quad \dots(3.6)$$

sustituyendo la ec. (3.3) en la ec. (3.6) y separando las partes real e imaginaria

$$-\omega F_2 C + F_1 K = k \quad \dots(3.7)$$

y

$$\omega F_1 C + F_2 K = 0 \quad \dots(3.8)$$

las ecs. (3.7) y (3.8) pueden resolverse para obtener las expresiones de C y K obteniendo

$$K = \left( \frac{F_1}{F_1^2 + F_2^2} \right) k \quad \dots(3.9)$$

$$C = \left[ \frac{-(F_2/w)}{F_1^2 + F_2^2} \right] k \quad \dots(3.10)$$

con estas ecuaciones podemos obtener los valores de las funciones  $F_1$  y  $F_2$  obteniendose

$$F_1 = \frac{K k}{K^2 + \omega^2 C^2} \quad \dots(3.11)$$

y

$$F_2 = \frac{-\omega k C}{K^2 + \omega^2 C^2} \quad \dots(3.12)$$

Si una masa rígida  $m$  se suma al sistema S como se observa en la fig. (3.2a), el sistema equivalente masa-resorte-amortiguador para el sistema que se muestra en la fig. (3.2b), teniendo para este sistema

$$z = (Q_0/k) F' e^{i\omega t} \quad \dots(3.13)$$

donde  $F'$  es una función de frecuencia.

La ec. de movimiento para la masa  $m$  puede escribirse como

$$m \ddot{z} = Q_0 e^{i\omega t} - P_0 e^{i\omega t} \quad \dots(3.14)$$

con la ec. (3.2) se puede expresar la ec. anterior como

$$m \ddot{z} = -m (\omega^2/k) F P_0 e^{i\omega t} \quad \dots(3.15)$$

y con la ec. (3.13)

$$m \ddot{z} = -m (\omega^2/k) F' Q_0 e^{i\omega t} \quad \dots(3.16)$$

combinando las ecs. (3.14) y (3.15) se tiene que

$$-m (\omega^2/k) F' Q_0 e^{i\omega t} = (Q_0 - P_0) e^{i\omega t}$$

de donde

$$P_0 = \frac{Q_0}{1 - (m \omega^2 / k) F} \quad \dots(3.17)$$

combinando las ecs. (3.15) y (3.17) se obtiene

$$F' = \frac{F}{1 - (m \omega^2 / k) F} \quad \dots(3.18)$$

El desplazamiento que se muestra en la fig. (3.2a) puede escribirse como

$$z = \frac{Q_0}{k} \frac{F}{1 - (m\omega^2/k) F} e^{i\omega t} \quad \dots(3.19)$$

si el sistema  $S + m$  es excitado por una fuerza real como  $Q = Q_0 e^{i\omega t}$  entonces se puede decir que

$$Q = Q_0 \cos \omega t \quad \dots(3.20)$$

la parte real del desplazamiento [ec. (3.19)] puede obtenerse por un proceso de separación, con lo cual

$$z = (Q_0 / k) M \cos (\omega t + \alpha) \quad \dots(3.21)$$

donde

$$M = \frac{\sqrt{F_1^2 + F_2^2}}{\sqrt{[1 - (m\omega^2/k) F_1]^2 + [(m\omega^2/k) F_2]^2}} \quad \dots(3.22)$$

y

$$\alpha = \tan^{-1} \left[ \frac{F_2}{F_1 - (m\omega^2/k) (F_1^2 + F_2^2)} \right] \quad \dots(3.23)$$

### 3.1.2 CIMENTACIONES CIRCULARES RIGIDAS.

Basados en el concepto presentado en la sección anterior Das en 1984 desarrolló las relaciones para la vibración de una cimentación circular rígida. La fig (3.3a) muestra una cimentación circular rígida sin masa apoyada en una superficie de un semiespacio elástico y sujeta a una fuerza

$$P = P_0 e^{i\omega t};$$

el desplazamiento periódico de esta cimentación puede ser igual a la ecuación

$$z = (P_0/k) F e^{i\omega t} \quad \dots(3.24)$$

donde  $k = 4 G r_o / (1 - \mu)$  es la constante del resorte,  $\mu$  es la relación de Poisson,  $F = F_1 + iF_2$  es una función adimensional y  $r_o$  es el radio de la cimentación con lo cual

$$z = \frac{P_o}{G r_o} \left[ \frac{(1-\mu) F_1}{4} + \frac{i(1-\mu) F_2}{4} \right] e^{i\omega t} \quad \dots(3.25)$$

comparando la ec. precedente con la ec. (2.1), los términos adimensionales  $f_1$  y  $f_2$  en la ec. (2.1) son

$$f_1 = 0.25 (1 - \mu) F_1 \quad \dots(3.26)$$

y

$$f_2 = 0.25 (1 - \mu) F_2 \quad \dots(3.27)$$

En la fig. (3.4) se observa la variación de  $F_1$  y  $F_2$  con respecto a  $a_o$  y su relación con  $\mu$ .

Como en el caso del sistema mostrado en la fig. (3.1a), puede escribirse la ec. de movimiento de este sistema como

$$C \dot{z} + K z = P_o e^{i\omega t} \quad \dots(3.28)$$

los valores de C y K de la ec. anterior se dan en las ecs. (3.9) y (3.10), considerando a la frecuencia adimensional

$$\omega = (a_o / r_o) \sqrt{G / \rho} \quad \dots(3.29)$$

y sustituyendo la ec. (3.29) en la ec. (3.10) se tiene

$$C = c_1 k r_o \sqrt{\rho / G} \quad \dots(3.30)$$

donde

$$c_1 = \frac{-(F_2 / a_o)}{F_1^2 + F_2^2} \quad \dots(3.31)$$

Si la cimentación tiene masa  $m$  como se muestra en la fig. (3.3b), el desplazamiento se representa por la expresión

$$z = (Q_0/k) F' e^{i\omega t}$$

la ec. de movimiento para la cimentación con masa  $m$  es similar a la ec. (3.14); con lo cual

$$m \ddot{z} = Q_0 e^{i\omega t} - P_0 e^{i\omega t} \quad \dots(3.32)$$

sin embargo

$$P_0 e^{i\omega t} = C \dot{z} + K z = c_1 k r_0 \sqrt{\rho/g} \dot{z} + k_s k_e \quad \dots(3.33)$$

además

$$Q_0 e^{i\omega t} = c_1 k r_0 \sqrt{\rho/g} \dot{z} + k_s k_e \quad \dots(3.34)$$

sustituyendo la ec. (3.13) en la (3.34), el valor de  $F'$  puede obtenerse como

$$F' = \frac{1}{k_s - B a \omega^2 + i C_1 a \omega} \quad \dots(3.35)$$

donde la relación adimensional de masa  $B$  es

$$B = 0.25 (1 - \mu) m / \rho r_0^3$$

comparando esta última ec. con la ec.(2.4) se tiene que

$$B = 0.25 (1 - \mu) b \quad \dots(3.36)$$

donde  $b$  es la relación adimensional de masa tratado en el capítulo anterior

$$b = m / \rho r_0^3$$

Como en la ec. (3.21), la parte real del desplazamiento de la cimentación puede expresarse como

$$z = (Q_0/k) M \cos(\omega t + \alpha) \quad \dots(3.37)$$

donde

$$M = \sqrt{[(k_1 - B a_0^2)^2 + (c_1 a_0)^2]}^{-1} \quad \dots(3.37a)$$

$$\alpha = \tan^{-1} [c_1 a_0 / (k_1 - B a_0^2)] \quad \dots(3.37b)$$

utilizando las ecs. precedentes, y para casos prácticos, Lysmer y Richart en 1966 obtuvieron resultados satisfactorios tomando a  $c_1 = 0.85$  y  $k_1 = 1$ .

Refiriendonos ahora a la ec. (3.34) se obtiene

$$m \ddot{z} + \frac{3.4}{1-\mu} r_0^2 \sqrt{G \rho} \dot{z} + \frac{4 k G r_0}{1-\mu} z = Q_0 \cos \omega t \quad \dots(3.38)$$

Si se compara la ec. (3.38) con la ec.(1.72) se puede observar que son similares con

$$c = (3.4 / 1 - \mu) r_0^2 \sqrt{G \rho} \quad \dots(3.39)$$

$$k = 4 G r_0 / (1 - \mu) \quad \dots(3.40)$$

Una vez que se ha determinado la ec. de movimiento de la cimentación es fácil obtener la frecuencia de resonancia y la amplitud de vibración del sistema basados en los conceptos matemáticos tratados en el capítulo 1; el procedimiento de cálculo para el diseño de cimentaciones puede quedar como

1. Cálculo de la frecuencia natural:

$$f_n = (1 / 2\pi) \sqrt{k / m} \quad \dots(3.41)$$

2. Cálculo de la relación de amortiguamiento:

$$D = 0.425 / \sqrt{B} \quad \dots(3.42)$$

3. Cálculo de la frecuencia de resonancia:

$$f_m = f_n \sqrt{1-2D^2} \quad (\text{excitación por fuerza constante}) \quad \dots(3.43)$$

$$f_m = f_n / \sqrt{1-2D^2} \quad (\text{excitación por masa rotatoria}) \quad \dots(3.44)$$

4. Amplitud máxima de vibración:

$$A_z = \frac{(Q_0/k)}{2 D \sqrt{1 - D^2}} \quad (\text{excitación por fuerza constante}) \quad \dots(3.45)$$

$$A_z = \frac{(U / m)}{2 D \sqrt{1 - D^2}} \quad (\text{excitación por masa rotatoria}) \quad \dots(3.46)$$

[ U = m e, m es el total de las masas en rotación y e es la excentricidad con la que giran ]

Para evaluar amplitudes de vibración para frecuencias diferentes a la de resonancia, es necesario calcular f/f<sub>n</sub> y se entra a la fig. (3.5) o (3.6), según sea el caso, y se lee el valor que aparece en la escala vertical y se evalúa A<sub>z</sub>.

### 3.2 CABECEO EN CIMENTACIONES RIGIDAS CIRCULARES.

La ec. para este tipo de movimiento [fig. (3.7)] fue desarrollada por Hall en 1967, de la misma forma en que lo hicieron Lysmer y

Richart en 1966 para la vibración vertical. La ec. de movimiento para este tipo de cimentación puede ser

$$I_{\theta} \ddot{\theta} + C_{\theta} \dot{\theta} + k_{\theta} \theta = My e^{i\omega t} \quad \dots(3.47)$$

donde  $\theta$  es el giro del eje vertical de la cimentación a cualquier tiempo  $t$ ,  $I_{\theta}$  es el momento de inercia con respecto al eje  $y$ , dado en la ec. (2.20), la constante  $k_{\theta}$  se define como

$$k_{\theta} = (8/3) G r o^3 / (1-\mu) \quad \dots(3.48)$$

el coeficiente  $c_{\theta}$  puede definirse como

$$c_{\theta} = 0.8 r o^4 \sqrt{G} / [ (1-\mu) (1+Bi) ] \quad \dots(3.49)$$

donde la relación adimensional de masa  $Bi$  es

$$Bi = (3/8) (1-\mu) I_{\theta} / \rho r o^5$$

el procedimiento de cálculo para el diseño de este tipo de cimentaciones se da como

1. Cálculo de la frecuencia natural:

$$f_n = ( 1 / 2\pi ) \sqrt{k_{\theta} / I_{\theta}} \quad \dots(3.50)$$

2. Cálculo de la relación de amortiguamiento:

$$D = 0.15 / [ \sqrt{Bi (1 + Bi)} ] \quad \dots(3.51)$$

3. Cálculo de la frecuencia de resonancia:

Ver formulas de la sección 3.1.2

4. Amplitud máxima de vibración:

$$\theta_r = \frac{M_y / k_\theta}{2 D \sqrt{1 - D^2}} \quad (\text{excitación por fuerza constante}) \quad \dots(3.52)$$

$$\theta_r = \frac{(m_a e z' / I_o)}{2 D \sqrt{1 - D^2}} \quad (\text{excitación por masa rotatoria}) \quad \dots(3.53)$$

[  $m_a$  es el total de las masas en rotación,  $e$  es la excentricidad con la que giran y  $z'$  se define en la fig. (3.8) ]

Para evaluar amplitudes de vibración para frecuencias diferentes a la de resonancia, es necesario calcular  $f/f_n$  y se entra a la fig. (3.5) o (3.6), según sea el caso, y se lee el valor de la escala vertical y se evalúa  $\theta$ .

### 3.3 VIBRACION HORIZONTAL DE CIMENTACIONES RIGIDAS CIRCULARES.

En esta sección se considerará la vibración horizontal de la cimentaciones y se observa como obtener los parámetros de diseño que se necesitan para la vibración horizontal.

La ec. para este movimiento fue elaborado por Hall en 1967 y se expresa como

$$m \ddot{x} + c_x \dot{x} + k_x x = Q_0 e^{i\omega t} \quad \dots(3.54)$$

donde  $m$  es la masa del sistema, la constante  $k_x$  del resorte para este caso es

$$k_x = 32 (1-\mu) G r_o / (7 - 8\mu) \quad \dots(3.55)$$

y el coeficiente  $c_x$  del amortiguador queda como

$$c_x = 18.4 (1-\mu) r_o^2 \sqrt{\rho G} / (7 - 8\mu) \quad \dots(3.56)$$

La fig. (3.9) muestra una cimentación que presenta estas características, para este caso la frecuencia natural es

$$f_n = (1/2\pi) \sqrt{k_x / m} \quad \dots(3.57)$$

el amortiguamiento crítico y la relación de amortiguamiento son

$$c_{xc} = 2 \sqrt{k_x m} \quad \dots(3.58)$$

$$D = 0.288 / \sqrt{B_x} \quad \dots(3.59)$$

donde la relación adimensional de masa es

$$B_x = \frac{(7 - 8 \mu) m}{32 (1 - \mu) \rho r_o^3} \quad \dots(3.60)$$

La frecuencia de resonancia se puede calcular como anteriormente se ha hecho y la amplitud de vibración con

$$A_{x(res)} = \frac{(Q_0 / k_x)}{2D \sqrt{1 - D^2}} \quad (\text{excitación por fuerza constante}) \dots(3.61)$$

$$A_{x(res)} = \frac{(m_s s / m)}{2D \sqrt{1 - D^2}} \quad (\text{excitación por masa rotatoria}) \dots(3.62)$$

Para evaluar amplitudes de vibración para frecuencias diferentes a la de resonancia, es necesario calcular  $f/f_n$  y entramos a la fig. (3.5) o (3.6), según sea el caso, y leamos el valor de la escala vertical y se evalúa  $A_x$ .

#### 3.4 TORSION EN CIMENTACIONES.

La ec. de movimiento [fig. (3.10)] para este tipo de vibración (presentada por Richart et al., 1970) se describe como

$$J_{zz} \ddot{\alpha} + c_{\alpha} \dot{\alpha} + k_{\alpha} \alpha = T_0 e^{i\omega t} \quad \dots(3.63)$$

donde  $J_{zz}$  es el momento de inercia con respecto al eje  $zz$ ,  $c_{\alpha}$  es el coeficiente del amortiguador equivalente, la constante  $k_{\alpha}$  del resorte para torsión es

$$k_{\alpha} = ( 16 / 3 ) G r_0^3 \quad \dots(3.64)$$

y  $\alpha$  es el giro de la cimentación en cualquier momento debido a la aplicación del torque  $T = T_0 e^{i\omega t}$ .

La relación de amortiguamiento  $D$  para este tipo de vibración es

$$D = 0.5 / ( 1 + 2 Bt ) \quad \dots(3.65)$$

donde la relación de masa adimensional es

$$Bt = J_{zz} / ( \rho r_0^3 ) \quad \dots(3.66)$$

para este tipo de vibración y como se aprecia en el capítulo 2, la relación de Poisson no tiene influencia para este tipo de vibración.

La frecuencia natural queda como

$$f_n = ( 1 / 2\pi ) \sqrt{ k_{\alpha} / J_{zz} } \quad \dots(3.67)$$

la frecuencia de resonancia puede calcularse como en los anteriores tipos de vibración.

La amplitud de vibración para resonancia por excitación por fuerza constante queda como

$$\alpha_{res} = (T_0/k_{\alpha}) (2 D \sqrt{1-2D^2})^{-1} \quad \dots(3.68)$$

y para excitación por masa rotatoria

$$\alpha_{res} = [(m_s e x/2) / J_{sz}] (2D \sqrt{1-2D^2})^{-1} \dots(3.69)$$

[x se define en la fig. (3.11)]

Para evaluar amplitudes de vibración para frecuencias diferentes a la de resonancia, es necesario calcular  $f/f_n$  y entramos a la fig. (3.5) o (3.6), según sea el caso, y leemos el valor de la escala vertical y se evalúa  $\alpha$ .

### 3.5 COMENTARIOS A LOS PARAMETROS DEL SUELO PARA LA SOLUCION DE CIMENTACIONES SUJETAS A VIBRACION.

Las ecs. de los diferentes tipos de vibración que se han tratado en las pasadas secciones han sido encontrados de acuerdo a las diferentes propiedades del suelo, sin embargo, en la practica se deben hacer elecciones apropiadas, por lo tanto en esta sección se trata el comportamiento de estos parámetros en los problemas reales y como se deben de utilizar.

#### 3.5.1 Masa y momento de inercia.

La masa  $m$  que se ha utilizado en las secciones precedentes es la suma de la masa de la cimentación ( $m_c$ ) y de la masa de la maquinaria ( $m_m$ ). Sin embargo cuando se produce la vibración existe una masa de suelo bajo la cimentación que vibra junto con todo el sistema, por esto, es razonable considerar el término  $m$  como la suma de

$$m = m_m + m_m + m_s \dots(3.68)$$

donde  $m_s$  es la masa del suelo que vibra junto con el sistema.

De igual forma se tiene que para los términos  $I_0$  y  $J_{xx}$  es necesario agregar el momento de inercia de la masa del suelo que vibra junto con la maquinaria y la cimentación, quedando estos términos como

$$I_0 = I_{oc} + I_{om} + I_{os} \quad \dots(3.70)$$

y

$$J_{xx} = J_{xoc} + J_{xom} + J_{xos} \quad \dots(3.71)$$

Hsieh en 1962 proporcionó valores para  $m_s$ ,  $I_{os}$  y  $J_{xos}$  de una manera teórica, los cuales se observan en la tabla (3.1).

### 3.5.2 Constate k del resorte.

Las constantes encontradas hasta ahora son para cimentaciones circulares, pero en la realidad las cimentaciones que más se presentan son rectangulares y por lo tanto se obtuvieron radios equivalentes para poder utilizar las gráficas y formulas matemáticas que han sido desarrolladas, lo cual es una suposición buena para los problemas que se consideran en esta tesis.

No obstante, soluciones más exactas se han tratado para cimentaciones rectangulares basadas en la teoría de la elasticidad, las cuales se presentan en la tabla (3.2).

Otro hecho bastante importante es el que las cimentaciones, por lo general, no se localizan en la superficie; Kaldjian en 1969 demostró que el valor de k aumenta de acuerdo a la profundidad en que se desplanta, en este caso para la vibración vertical se da la gráfica en la fig. (3.13) donde se observa que la curva  $\alpha$  es para el caso en que la cimentación se adhiere a la superficie vertical y al curva  $\beta$  en la que no ocurre esto.

Además de las técnicas empleadas hasta el momento, Whitman y Richart en 1967 sugirieron otras tres alternativas para evaluar k,

las cuales son:

1. Uso de pruebas de placa. Esta prueba es similar a las utilizadas para medir la capacidad de carga de los suelos, pero consiste en aplicar una carga cíclica, con las mismas características que las que se esperan en el sistema; el lapso de aplicación de la carga debe ser tan rápido como sea posible para evitar la consolidación y algunos efectos secundarios de la compresión, pero debe dar la oportunidad de tomar las lecturas necesarias, el lapso de este tiempo puede ser de 10 a 20 minutos.

La constante que se obtiene mediante este método se evalúa como

$$k_p = q A / z \quad \dots(3.72)$$

donde  $q$  es la carga aplicada por unidad de área,  $A$  es el área de la placa y  $z$  es la deformación vertical producida al suelo.

A partir de esta  $k_p$  podemos obtener la  $k$  que se utilizará en el diseño de la cimentación de la siguiente manera (Terzaghi 1955):

$$k = k_p \left[ \frac{\text{Ancho de cimentación}}{\text{Ancho de placa}} \right] \quad \dots(3.73)$$

(suelos cohesivos)

$$k = k_p \left[ \frac{\text{Ancho de cimentación} + \text{Ancho de placa}}{2 * \text{Ancho de placa}} \right] \quad \dots(3.74)$$

(suelos friccionantes)

el ancho utilizado, tanto de la placa como de la cimentación es el menor.

2. Uso de pruebas vibratorias. Este método consiste en colocar un vibrador en una placa de 12 a 30 plg. de diámetro, operado a diferentes frecuencias hasta encontrar la de resonancia, con lo

cual podemos calcular  $k_p$  como

$$k_p = (2 \pi f)^2 \mu \quad \dots(3.74)$$

En este método existen algunas dificultades que hay que tener en cuenta:

a) Con una placa pequeña, la masa de suelo efectiva que vibra en fase con la placa es considerable y debe tomarse en cuenta.

b) Para obtener una amplitud suficientemente grande para ser medida es necesario tener una aceleración elevada, pero si sobre pasa 0.5g el suelo se sobreesforzará y los efectos no lineales, no elásticos, son considerables.

c) Para una vibración pequeña, los efectos de amortiguamiento por radiación probablemente sean grandes, lo cual produce una imprecisión en la frecuencia de resonancia.

d) El valor de  $k$  debe correlacionarse para este caso de la misma forma que en el método anterior.

3. Uso de tablas empíricas. Barkan en 1962 sugirió las siguientes ecs. para calcular los valores de  $k$ :

$k = S_z A$  para vibración vertical.

$k_x = S_x A$  para vibración horizontal.

$k_\theta = S_\theta I_\theta$  para cabeceo.

$k_\alpha = S_\alpha J_\alpha$  para torsión.

donde  $A$  es el área de la cimentación,  $I_\theta$  y  $J_\alpha$  son los momento de inercia de la masa del sistema y  $S_z$ ,  $S_x$ ,  $S_\theta$  y  $S_\alpha$  son módulos de subgrado para los diferentes modos de vibración; la relación aproximada entre  $S_z$  y  $S_x$ ,  $S_\theta$  y  $S_\alpha$  esta dada por

$S_x = 0.5 S_z$  [los valores recomendados para  $S_z$  se  
 $S_\theta = 2.5 S_z$  pueden apreciar en la tabla 3.3]  
 $S_a = 1.5 S_z$

Podemos observar que los valores de  $S_z$  sólo dependen de le tipo de suelo, pero como ya hemos visto también es necesario considerar para el diseño la geometría de la cimentación, por lo cual el empleo de estos módulos queda sólo para un diseño preeliminar.

### 3.5.3 RELACION DE POISSON.

Richart y Whitman han recomendado los siguientes valores para la relación de Poisson

Arena (seca, húmeda o parcialmente saturada)  $\mu = 0.35 - 0.40$   
Arcilla (seca o saturada)  $\mu = 0.50$

en tanto que Barkan propone

Suelos arenosos  $\mu = 0.15 - 0.25$   
Arcilla con arena  $\mu = 0.30 - 0.35$   
Arcilla  $\mu = 0.35 - 0.40$

de lo cual Das (1984) considerará un buen valor de diseño para  $\mu$  de 0.4

### 3.5.4 RELACION DE AMORTIGUAMIENTO (D).

Existen dos tipo de amortiguamiento en los suelos: el amortiguamiento geométrico (por radiación) y el amortiguamiento interno. El amortiguamiento geométrico es el que se ha manejado hasta ahora; en tanto que los valores para el amortiguamiento interno se puede apreciar en la tabla (3.4), este tipo de amortiguamiento depende del tipo de suelo y de las condiciones en las que se encuentra.

Se puede observar que los valores del amortiguamiento interno van de 0.01 a 0.1, con lo cual se puede decir que un buen valor para el diseño es de 0.05 por lo que la relación D de amortiguamiento puede quedar como

$$D = D_{rad} + 0.05 \quad \dots(3.75)$$

Según Das para movimientos horizontales la contribución del amortiguamiento interno puede despreciarse, sin embargo, para torsión y cabeceo puede llegar a ser muy importante.

### 3.5.5 MODULO DE ESFUERZO CORTANTE (G).

La determinación del módulo G puede realizarse por medio de los siguientes métodos:

#### a) Pruebas de laboratorio.

\* Resonancia en una columna de suelo. Este método consiste en aplicar un momento en la parte superior de una probeta cilíndrica de suelo, y obtener las frecuencias en las que ocurren los valores de respuesta máximos, es decir, las frecuencias de resonancia. Para el caso en que la probeta este fija en su base y libre en su parte superior, las frecuencias de resonancia de resonancia están dadas por

$$f_n = (2n - 1) (C_s / 4H) \quad \dots(3.76)$$

donde  $n = 1$  (para casos fundamentales).

H = altura de la probeta.

C<sub>s</sub> = velocidad de la onda cortante.

de la ec. (3.75) despejamos C<sub>s</sub> y obtenemos G con

$$G = \rho Cs^2 \quad \dots(3.77)$$

\* Técnica pulsativa. Consiste en colocar varios cristales piezoeléctricos en cada extremo de una probeta de suelo, y aplicar un pulso eléctrico en uno de los extremos de la probeta. Dichos cristales están hechos en forma tal que producen una distorsión al cortante cuando se aplica un pulso eléctrico, con lo que se origina una onda transversal de esfuerzos que pasa a través de la probeta de suelo. La onda registrada en el otro extremo y su velocidad se determina con

$$Cs = H / dt \quad \dots(3.78)$$

donde dt es el tiempo que tarda en ir la onda de un extremo al otro de la probeta; G se determina con la ec. (3.76).

#### b) Métodos geofísicos.

Mediante los procedimientos que se emplean para determinar las velocidades de propagación de ondas dilatantes, se puede hacer uso de las relaciones existentes entre Cd y Cs. La relación está dada por

$$Cs = [ ( 1-2\mu / 2 ( 1-\mu ) ) ] Cd \quad \dots(3.78)$$

hay que tener presente que se debe conocer el módulo de Poisson del suelo. El valor de G también se determina con la ec. (3.77).

Para finalizar diremos que existen otras formas para calcular los parámetros del suelo que se emplean en el diseño; aquí sólo se mostrarán algunas de las más comunes. Para mayor información sobre estos métodos se puede consultar la bibliografía que se presenta al final de este trabajo.

TABLA 3.1 VALORES PARA  $m_a$ ,  $I_{oa}$  y  $J_{za}$  PROPUESTOS POR HSIEH.

RELACION DE POISSON M	VIBRACION VERTICAL $m_a$	VIBRACION HORIZONTAL $m_a$	TORSION $J_{za}$	CABECEO $I_{oa}$
0.00	$0.5\rho r_o^3$	$0.2\rho r_o^3$	$0.3\rho r_o^3$	$0.4\rho r_o^3$
0.25	$1.0\rho r_o^3$	$0.2\rho r_o^3$	$0.3\rho r_o^3$	$0.4\rho r_o^3$
0.50	$2.0\rho r_o^3$	$0.1\rho r_o^3$	$0.3\rho r_o^3$	$0.4\rho r_o^3$

TABLA 3.2 CONSTANTE K PARA LOS DIFERENTES TIPOS DE VIBRACION.

MOVIMIENTO	CONSTANTE K	REFERENCIA
CIMENTACIONES CIRCULARES		
Vertical	$k=4Gr_o/(1-\mu)$	Timoshenko y Goodier (1951)
Horizontal	$k_x=32(1-\mu)Gr_o^3/(7-8\mu)$	Bycroft (1956)
Cabeceo	$k_\theta=8Gr_o^3/3(1-\mu)$	Borowicko (1943)
Torsión	$k_\alpha=16Gr_o^3/3$	Reissner y Sagoci (1944)
CIMENTACIONES RECTANGULARES		
Vertical	$k=[G/(1-\mu)]F_x BL$	Timoshenko y Goodier (1951)
Horizontal	$k_x=2(1-\mu)GF_x BL$	Bycroft (1956)
Cabeceo	$k_\theta=[G/(1-\mu)]F_\theta BL^2$	Borowicko (1943)

[Para los valores  $F_z$ ,  $F_x$  y  $F_\theta$  remitirse a la fig. (3.12)]

TABLA 3.3 VALORES DE  $S_z$  PARA LOS DISTINTOS TIPOS DE SUELO.

TIPO DE SUELO	CAPACIDAD DE CARGA ESTATICA ( $kg/cm^2$ )	$S_z$ ( $kg/cm^3$ )
Suelos debiles	1.53	3.05
Suelos de resistencia media	1.53 - 3.47	3.05 - 4.98
Suelos resistentes	3.47 - 4.90	4.98 - 9.95
Rocas	4.90	9.95

**TABLA 3.4 AMORTIGUAMIENTO INTERNO DE LOS SUELOS.**

<b>TIPO DE SUELO</b>	<b>AMORTIGUAMIENTO INTERNO</b>	<b>REFERENCIA</b>
<b>Arena y grava seca</b>	<b>0.03 - 0.07</b>	<b>Weissmann &amp; Hart (1961)</b>
<b>Arena seca o saturada</b>	<b>0.01 - 0.03</b>	<b>Hall &amp; Richart (1963)</b>
<b>Arena seca</b>	<b>0.03</b>	<b>Whitman (1963)</b>
<b>Arenas y gravas secas o saturadas</b>	<b>0.05 - 0.06</b>	<b>Barkan (1962)</b>
<b>Arcilla</b>	<b>0.02 - 0.05</b>	<b>Barkan (1962)</b>
<b>Arena limosa</b>	<b>0.03 - 0.01</b>	<b>Stevens (1966)</b>
<b>Arena seca</b>	<b>0.01 - 0.03</b>	<b>Hardin (1965)</b>

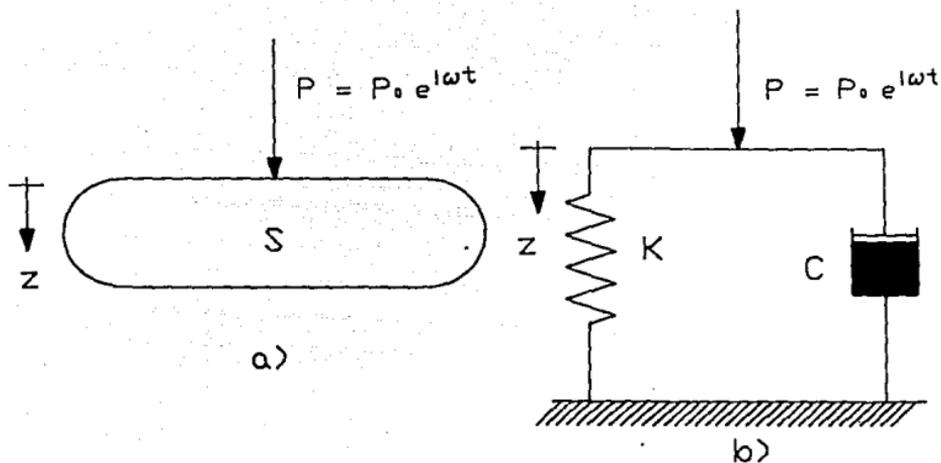


FIG. 3.1 SISTEMA DINAMICO TIPICO LINEALE

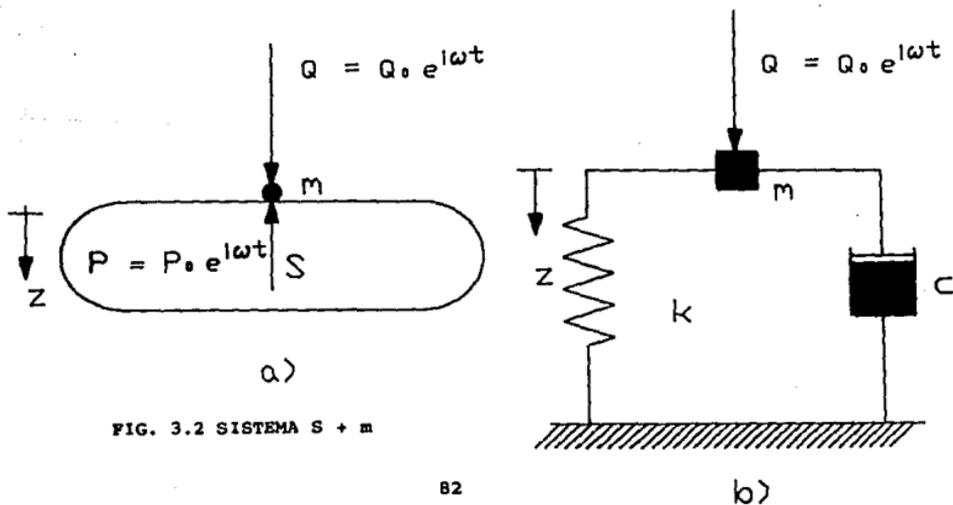


FIG. 3.2 SISTEMA S + m

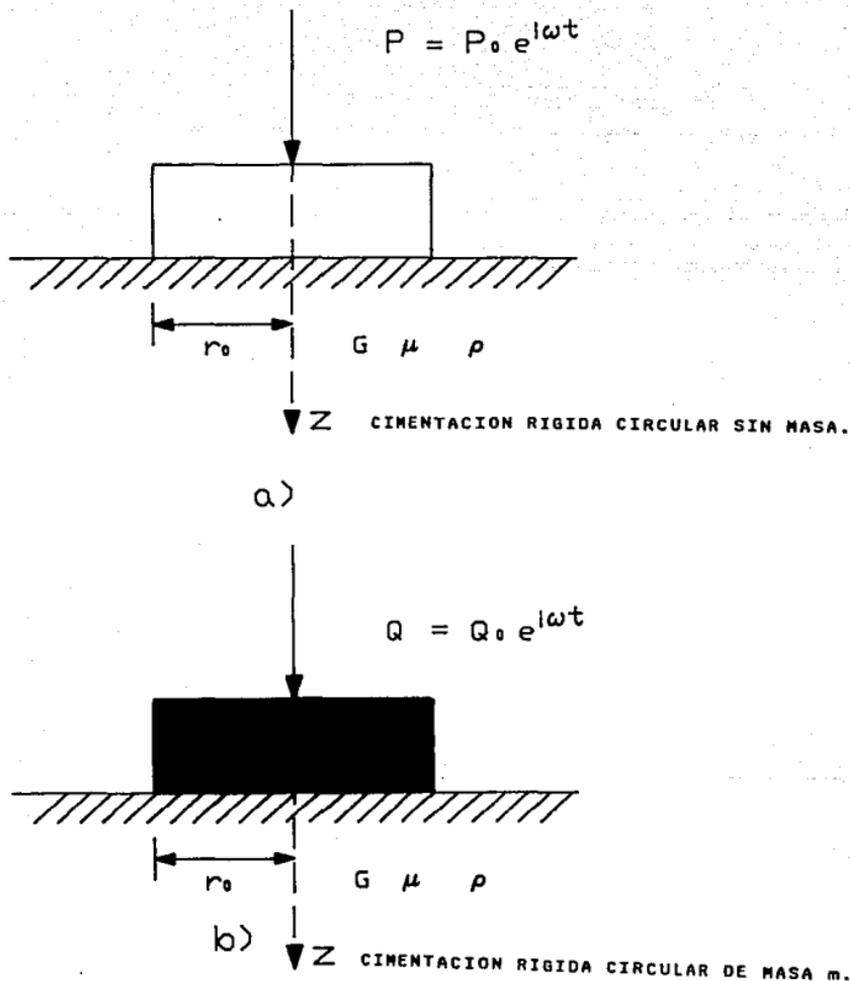


FIG. 3.3 SISTEMA DE PARAMETROS DEL SUELO PARA VIBRACION VERTICAL

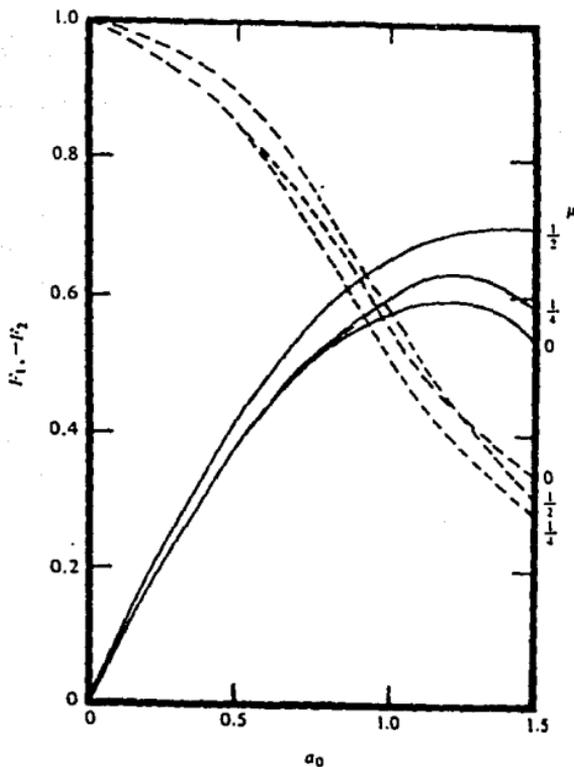


FIG. 3.4 GRÁFICA DE  $F_1$  (—) Y  $F_2$  (---) PARA UNA CIMENTACION CIRCULAR RIGIDA SUJETA A VIBRACION VERTICAL (LYSMER, J.; RICHART, F.E. Jr; 1966)

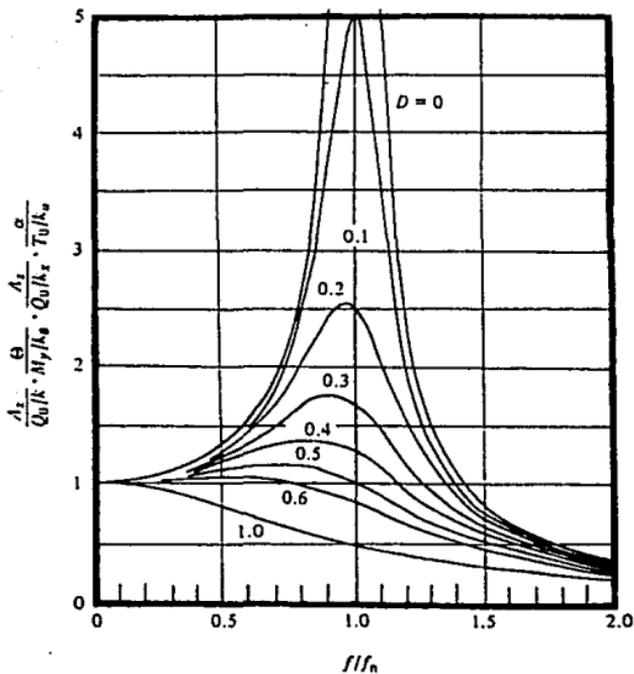


FIG. 3.5 GRAFICA PARA ENCONTRAR VALORES DE AMPLITUD A FRECUENCIAS DIFERENTES A LA DE RESONANCIA, PARA LOS DISTINTOS TIPOS DE VIBRACION POR FUERZA CONSTANTE

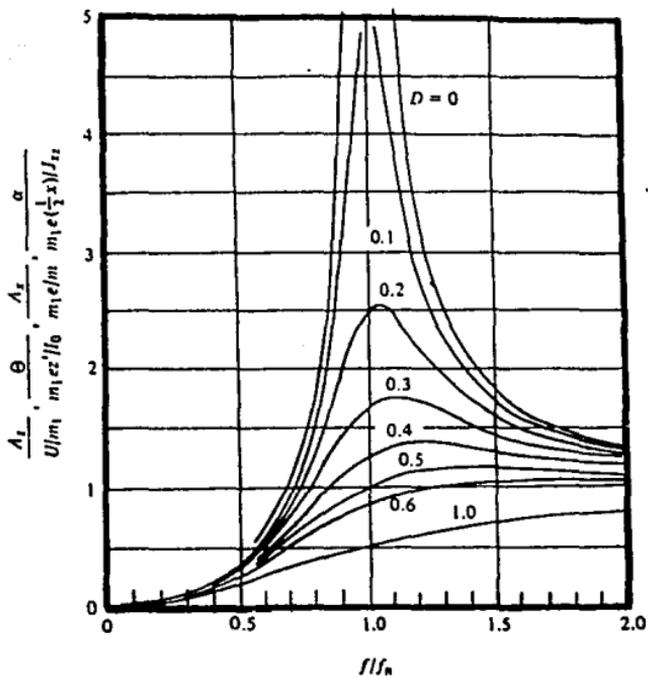


FIG. 3.6 GRAFICA PARA ENCONTRAR VALORES DE AMPLITUD A FRECUENCIAS DIFERENTES A LA DE RESONANCIA, PARA LOS DISTINTOS TIPOS DE VIBRACION POR MASAS ROTATORIAS

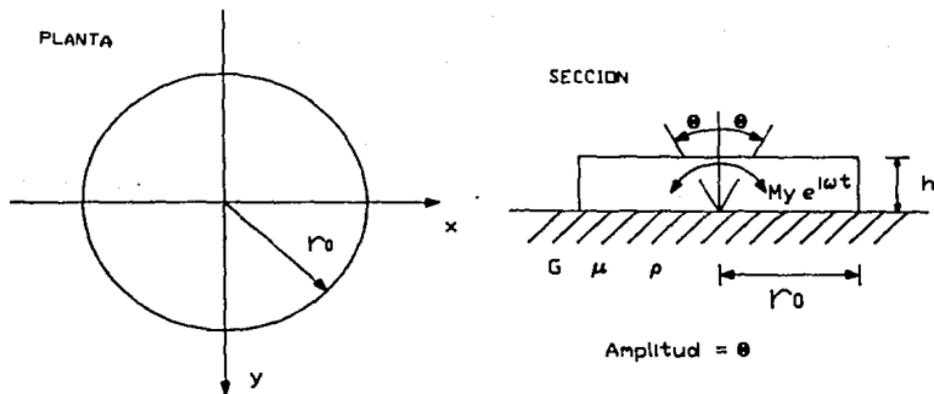


FIG. 3.7 SISTEMA DE PARAMETROS DEL SUELO PARA CABECEO

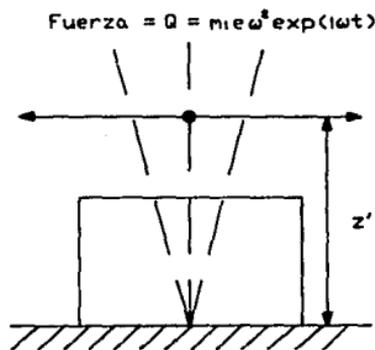


FIG. 3.8

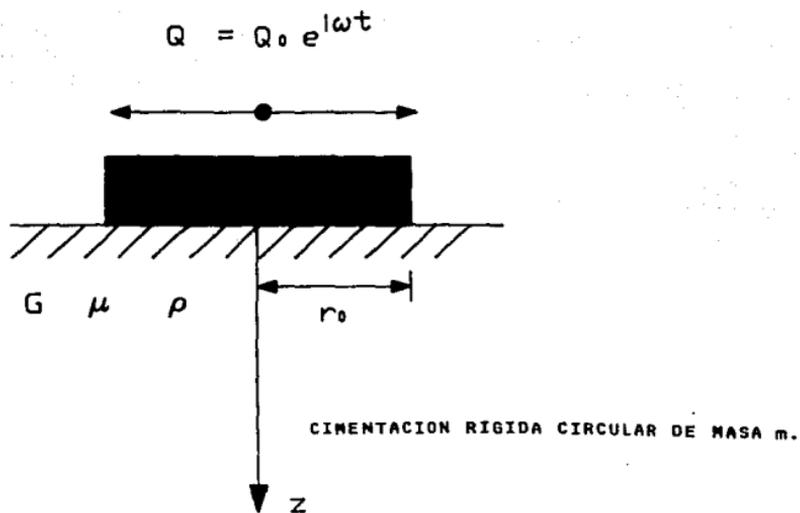


FIG. 3.9 VIBRACION HORIZONTAL

FIG. 3.10 VIBRACION POR TORSION

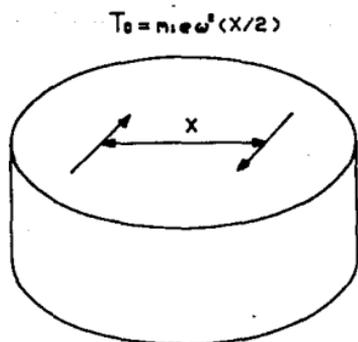
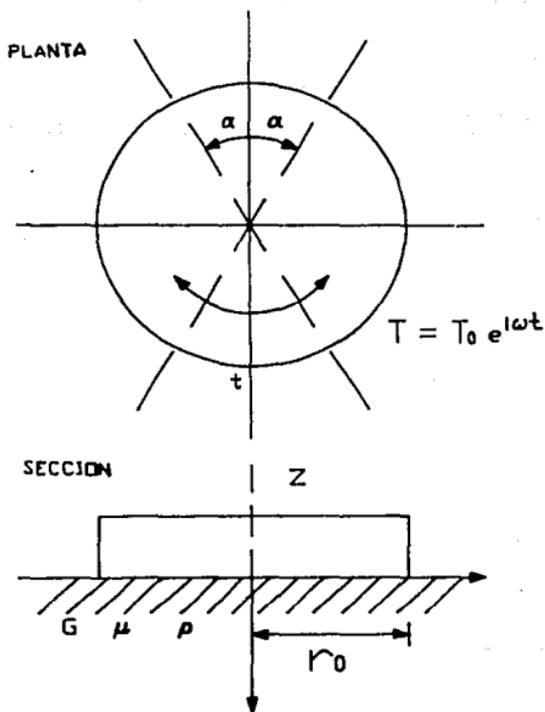


FIG. 3.11

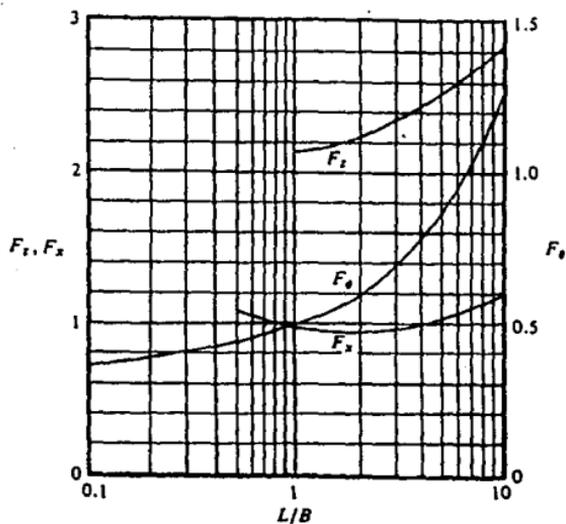


FIG. 3.12 GRAFICA DE  $F_z$ ,  $F_x$  Y  $F_y$  VS.  $L/B$   
 (WHITMAN, R.V.; RICHART, F.E. Jr; 1966)

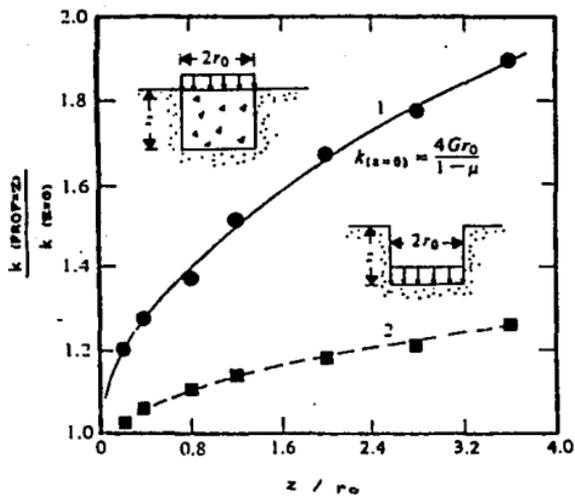


FIG.3.13 VARIACION DE LA CONSTANTE K CON LA PROFUNDIDAD DE LA CIMENTACION.

(KALDJIAN, M.H.; 1969)

## **CAPITULO 4. APLICACIONES.**

En este capítulo se muestran algunos ejemplos de lo que son los problemas de cimentaciones de maquinaria; los análisis que se realizan en estos ejemplos se basan en los sistemas de parámetros del suelo, método que se mostró en el capítulo 3.

Aunado a esto se presentan algunos comentarios sobre vibraciones admisibles hechos por autores como Das, Richart y la Comisión Federal de electricidad.

#### 4.1 AMPLITUDES DE VIBRACION PERMISIBLES.

Es casi imposible eliminar la vibración en las zonas cercanas a la cimentación, por lo cual el diseño de una cimentación se enfoca a reducir hasta donde sea posible dicha vibración.

En 1962, Richart elaboró una gráfica para obtener la amplitud de vibración permisible, en base a experiencias propias y de otros autores, para una frecuencia en particular, esta guía se basa en experiencias propias del autor y de información recabada por él. Esta guía se muestra en la fig. (4.1).

Los datos de amplitud de vibración pueden transformarse en aceleraciones máximas permisibles con  
aceleración máxima permisible = máximo desplazamiento  $\times \omega^2$   
...(4.1)

#### 4.2 COMENTARIOS SOBRE EL DISEÑO DE CIMENTACIONES PARA EVITAR LA RESONANCIA.

Para evitar la resonancia Das (1984) propone las siguientes consideraciones para cimentaciones de maquinaria:

1. La frecuencia de resonancia del sistema maquina-suelo-cimentación debe ser menor que la mitad de la frecuencia de operación de la maquina para equipos de alta

velocidad (frecuencia de operación  $\geq 1000$  cpm). Para este caso, cuando se enciende o detiene la maquina, es cuando el sistema vibra brevemente en resonancia.

2. Para maquinas de baja velocidad (frecuencia de operación  $\geq 350 - 400$  cpm), la frecuencia de resonancia debe ser de por lo menos del doble que la frecuencia de operación.

3. En todos los tipos de cimentación, el incremento del peso de la cimentación disminuye la frecuencia de resonancia.

4. El incremento del radio equivalente ( $r_0$ ) incrementa la frecuencia de resonancia de la cimentación.

5. Un incremento del módulo al cortante (G) del suelo, aumenta la frecuencia de resonancia de la cimentación.

Por otra parte, el Manual de Diseño de la Comisión Federal de Electricidad marca las siguientes consideraciones de servicio para este tipo de cimentaciones:

1. Máquinas de velocidad (o frecuencia) de operación baja, menor que 500 rpm. Para esta clase de máquinas, se debe utilizar un cimiento de alta frecuencia; es decir que la frecuencia natural del sistema sea del 40 al 50 por ciento mayor que a frecuencia de operación de la máquina.

2. Máquinas de velocidad (o frecuencia) de operación intermedia, 500 a 1000 rpm. Se puede utilizar un cimiento de alta o baja frecuencia, el que resulte más practico. En el primer caso la frecuencia natural del sistema es del 40 al 50 por ciento menor que la frecuencia de operación y del 40 al 50 por ciento mayor que la frecuencia de operación para el segundo caso.

3. Máquinas de velocidad (o frecuencia) de operación alta, mayor

que 1000 rpm. Se debe utilizar un cimiento de baja frecuencia; la frecuencia natural del sistema para este caso deberá ser del 40 al 50 por ciento más baja que la frecuencia de operación de la máquina.

4. Máquinas de velocidad variable. Para una máquina de velocidad variable la mejor solución es utilizar un cimiento de alta frecuencia

#### 4.3 ELEMENTOS QUE DEBEN PROPORCIONARSE PARA EL DISEÑO.

Los datos proporcionados por el constructor de la máquina es información básica para diseñar una cimentación, aunados a las características del suelo y las cargas dinámicas que se le imponen a la cimentación, son los datos imprescindibles para el buen diseño de una cimentación. Por lo cual, la información básica para el diseño que se debe tener presente será:

1. Velocidad o frecuencia de operación de la máquina y su potencia.

2. El carácter, magnitud y punto de aplicación de las cargas dinámicas que se desarrollan durante la operación de la máquina.

3. La distribución de cargas estáticas impuestas por la máquina sobre la superficie de cimentación.

4. El tamaño y la forma de la placa soporte de la máquina, así como el momento de inercia de masa con respecto al eje que pasa con respecto al centro de gravedad y es paralelo al eje de rotación.

5. La localización de conexiones en la cimentación para conexiones de la máquina.

6. Los datos de las propiedades del suelo donde se desplantará la cimentación, como son el módulo de Poisson, el módulo G y el peso volumétrico natural.

#### 4.4 PROCEDIMIENTO DE DISEÑO.

El procedimiento que deberá de seguirse para un buen diseño de una cimentación de este tipo puede ser como el siguiente:

a) Determinar las características de la vibración que se va a controlar incluyendo la magnitud de la fuerza dinámica que transmite la máquina.

b) Decidir la amplitud de vibración permisible, ya sea en base a la fig. (4.1) o consideraciones hechas por el fabricante de la máquina.

c) Determinar las propiedades del suelo de cimentación.

d) Determinar el peso de la máquina y suponer el peso, tamaño y forma de la cimentación.

e) Calcular la frecuencia y amplitud máxima del sistema máquina-suelo-cimentación y comparalas con la amplitud permisible y la frecuencia de operación de la máquina.

Para evaluar estos parámetros se utilizan los análisis que se muestran en el capítulo 3

#### 4.5 EJEMPLOS.

##### Ejemplo 1.

Se desea determinar la cimentación más adecuada para un martinete

de acción vertical que tiene las siguientes características:

$$Q = 907 \text{ kg}$$

$$W_0 = 22\,600 \text{ kg}$$

$$f_{op} = 200 \text{ rpm}$$

$$\text{placa base} = 4.88 \times 2.44 \text{ m}$$

Las propiedades del suelo de cimentación son:

$$\gamma_n = 1920 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu = 0.42$$

$$G = 198 \text{ kg/cm}^2$$

Solución:

#### 1. Radio equivalente

$$r_0 = \sqrt{B L / \pi} = \sqrt{4.88 \times 2.44 / \pi} = 1.95 \text{ m}$$

#### 2. Constante k del resorte.

$$k = 4 G r_0 / (1 - \mu) = 4 \times 198 \times 195 / (1 - 0.42)$$

$$k = 266.3 \times 10^3 \text{ kg/cm} = 261.24 \times 10^6 \text{ N/m}$$

#### 4. Masa del sistema.

Suponiendo un peso de la cimentación de 490.5 kN tenemos

$$W = 490500 + 22600 \times 9.81 = 712206 \text{ N}$$

$$m = 712206 / 9.81 = 72600 \text{ kg}$$

#### 5. Frecuencia natural del sistema

$$f_n = (1/2\pi) \sqrt{k/m} = (1/2\pi) \sqrt{261.24 \times 10^6 / 72600} = 9.55 \text{ cps}$$

la cual es mayor que 1.5 veces la frecuencia de operación, y por lo tanto esta del lado de la seguridad según C.F.E.

#### 4. Relación de masas

$$B = \frac{(1-\mu)m}{4 \rho r_0^3} = \frac{(1-0.42) \times 72600}{4 \times 1920 \times 1.95^3} = 0.74$$

#### 5. Relación de amortiguamiento.

$$D = 0.425 / \sqrt{B} = 0.425 / \sqrt{0.74} = 0.49$$

#### 6. Frecuencia de resonancia.

$$f_m = f_n \sqrt{1 - 2D^2} = 9.55 \times \sqrt{1 - 2 \times 0.49^2} = 6.89 \text{ cps} = 413.4 \text{ cpm}$$
$$f_m / f_{op} = (413.4 / 200) > 2$$

con lo cual estamos del lado de la seguridad, según Das.

#### 7. Amplitud máxima.

$$A_z = (Q_0 / k) / (2D \sqrt{1 - D^2})$$
$$A_z = \frac{907 / 26.63 \times 10^6}{2 \times 0.49 \times \sqrt{1 - 0.49^2}} = 0.00004 \text{ m} = 0.004 \text{ cm} = 0.002 \text{ plg}$$

Para observar si se trata de una amplitud permisible, se lleva este valor de amplitud máxima, junto a la frecuencia de operación, a la gráfica que se muestra en la fig. (4.1), y se aprecia que esta vibración es fácilmente apreciable por las personas, sin embargo se da por buena ya que no afecta a la máquina. Por lo que las dimensiones de la cimentación quedan como 2.44 x 4.88 x 1.75 m.

#### Ejemplo 2.

Una antena de radar se apoya en una cimentación circular con diámetro de 16 m, para vibración torsional con

$$T_0 = 25000 \text{ kg m} \quad (\text{debido al movimiento del radar})$$

$$T_0 = 8400 \text{ kg m} \quad (\text{debido al viento})$$

el momento de inercia de la masa de la torre del radar  $13.73 \times 10^6 \text{ kg m}^2$ , el espesor de la cimentación es de 3 m. Se desea conocer la frecuencia de resonancia y la deflexión angular que se produce en el sistema. Los datos del suelo de cimentación son:

$$\mu = 0.25$$

$$G = 1350 \text{ kg/cm}^2$$

$$\gamma = 1760 \text{ kg/m}^3$$

La frecuencia de operación de la maquina es de 50 rpm.

Solución:

1. Momento de inercia de la masa de la cimentación

$$J_{cm} = m r^2 / 2$$

$$m = 8^2 \pi \times 3 \times 2400 = 1.45 \times 10^6 \text{ kg}$$

$$J_{cm} = 1.45 \times 10^6 \text{ kg} \times 8^2 / 2 = 46.4 \times 10^6 \text{ kg m}^2$$

3. Constante  $k_{\alpha}$

$$k_{\alpha} = (16/3) G r_0^3$$

$$k_{\alpha} = (16/3) \times 1350 \times 800^3 = 3.69 \times 10^{12} \text{ kg cm} = 3.62 \times 10^{14} \text{ N m}$$

4. Relación de masa  $B_1$

$$B_1 = J_{cm} / \rho r_0^6$$

$$J_{cm} = (46.4 + 13.73) \times 10^6 = 60.13 \times 10^6 \text{ kg m}^2$$

$$B_1 = 60.13 \times 10^6 / (1760 \times 8^3) = 1.04$$

5. Relación de amortiguamiento D

$$D = 0.5 / ( 1 + 2 Bt )$$

$$D = 0.5 / ( 1 + 2 \times 1.04 ) = 0.16$$

6. Frecuencia natural del sistema

$$f_n = (1/2\pi) \sqrt{k_{\alpha} / J_{ms}}$$

$$f_n = (1/2\pi) \sqrt{3.62 \times 10^{11} / 60.13 \times 10^6} = 12.35 \text{ cps}$$

7. Frecuencia de resonancia

$$f_m = f_n \sqrt{1 - 2 D^2}$$

$$f_m = 12.35 \times \sqrt{1 - 2 \times 0.16^2} = 12.03 \text{ cps}$$

8. Amplitud máxima de vibración

$$T_0 = 25000 + 8400 = 33400 \text{ kg m} = 327654 \text{ N/m}$$

$$\alpha = T_0 / k_{\alpha} 2D \sqrt{1 - 2 D^2}$$

$$\alpha = 327654 / ( 3.62 \times 10^{11} \times 2 \times 0.16 \sqrt{1 - 2 \times 0.16^2} )$$

$$\alpha = 2.9 \times 10^6 \text{ rad}$$

Podemos observar que el desplazamiento angular es muy pequeño, lo cual se debe a que la cimentación es muy pesada y el valor de G es alto también. Por lo que respecta a la frecuencia de resonancia resulta menor que la de operación ( $f_{op}/f_m \leq 0.5$ , ya que es un equipo de baja velocidad) con lo cual se está del lado de la seguridad.

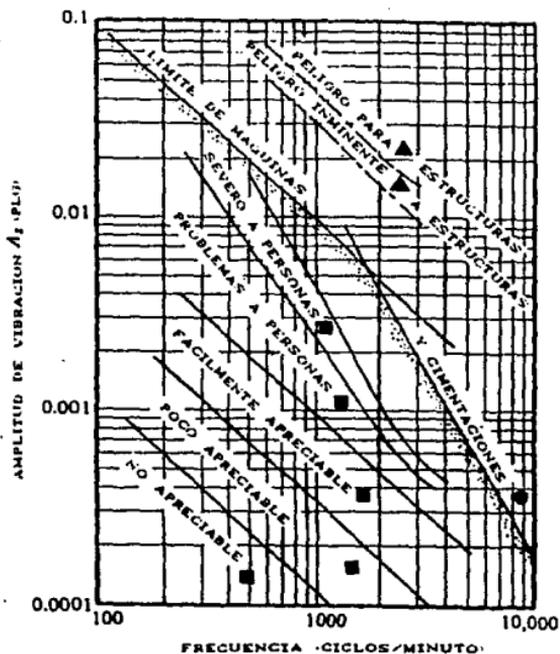


FIG. 4.1 AMPLITUD DE VIBRACION VERTICAL PERMISIBLES.

(RICHART, F.E. Jr; 1962)

(■ REIHER Y MEISTER, 1931)

(● RAUSCH, 1943)

(▼ CRANDELL, 1949)

## **CONCLUSIONES.**

Los parámetros de diseño más importantes que arrojan este tipo de análisis son:

- La frecuencia natural de vibración del sistema ( $f_n$ ).
- La frecuencia de resonancia del sistema ( $f_m$ ).
- La relación de amortiguamiento  $D$ .
- El coeficiente  $k$  del sistema (rigidez del mismo).

Estas propiedades se evalúan a través de los siguientes datos:

Del fabricante de la máquina:

1. Peso de la máquina.
2. Velocidad o frecuencia de operación.
3. Fuerzas dinámicas, magnitud, dirección y localización.
4. Momento de inercia de la masa con respecto al eje que pasa por el centro de gravedad y es paralelo al eje de rotación.

Del estudio de mecánica de suelos:

1. Módulo al cortante del suelo ( $G$ ).
2. Módulo de Poisson ( $\mu$ ).
3. Peso volumétrico natural ( $\gamma_n$ ).

Estos parámetros se evalúan empleando la metodología que presenta el denominado sistema de parámetros del suelo, ya que es el más común y sencillo que se presenta para los análisis dinámicos.

## **BIBLIOGRAFIA.**

LAMBE AND WHITMAN.  
SOIL MECHANIC.  
JOHN WILEY & SONS INC, NEW YORK, 1969.

DAS, BRAJA.  
FUNDAMENTALS OF SOIL DINAMICS.  
ELSEVIER, NEW YORK, 1984.

WOLF, JOHN.  
SOIL STRUCTURE INTERACTION, ANALYSIS IN TIME DOMAIN.  
PRENTICE HALL, NEW JERSEY, 1970.

RICHART, HALL AND WOODS.  
VIBRATION OF SOIL AND FOUNDATION.  
PRENTICE HALL, NEW JERSEY, 1970.

PRAKASH, SHAMSHER.  
FOUNDATIONS FOR MACHINES.  
WILEY INTERSCIENCE, NEW YORK, 1988.

W.J. HALL, ET.AL.  
STRUCTURAL AND GEOTECHNICAL MECHANICS.  
PRENTICE HALL, NEW JERSEY, 1977.

NASHIF; JONES; HENDERSON.  
VIBRATION DAMPING.  
WILEY INTERSCIENCE, NEW YORK, 1985.

BREBBIA; CAKMAK; ABDEL GHAFFAR.  
SOIL DYNAMICS AND EARTHQUAKE ENGINEERING.  
SPRINGER-VERLAG, NEW YORK, 1985.

SOIL BEHAVIOR UNDER EARTHQUAKE LOADING CONDITIONS.  
OAK RIDGE NATIONAL LABORATORY.  
NATIONAL TECHNICAL INFORMATION SERVICE, TENNESSE, 1972.

COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD.  
MANUAL DE DISEÑO DE OBRAS CIVILES.  
DISEÑO ESTRUCTURAL DE CIMENTACIONES.  
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES ELECTRICAS, MEXICO, 1981.