

01188 1
zej



**DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA**

**FLUJO DE TRAZADORES EN YACIMIENTOS
NATURALMENTE FRACTURADOS**

JETZABETH RAMIREZ SABAG

TESIS DOCTORAL

PRESENTADA A LA DIVISION DE ESTUDIOS DE

POSGRADO DE LA

FACULTAD DE INGENIERIA

DE LA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

COMO REQUISITO PARA OBTENER

EL GRADO DE

DOCTOR EN INGENIERIA

(PETROLERA)

CIUDAD UNIVERSITARIA

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

octubre, 1992

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

RESUMEN

Este trabajo presenta tres modelos matemáticos, los cuales fueron desarrollados para predecir el flujo de trazadores radioactivos o químicos en yacimientos naturalmente fracturados, considerando flujo lineal, o sea fracturas verticales, y flujo radial para los casos de fracturas horizontales y bloques cúbicos de matriz-fractura, para los diferentes tipos de inyección, continua, finita o bache y pico o instantánea.

El sistema idealizado del yacimiento, para los tres modelos, está constituido por dos regiones: una región móvil donde los mecanismos de dispersión y convección están presentes y una región estancada o inmóvil donde se consideran los mecanismos de difusión y adsorción. En ambas regiones es considerada la pérdida de masa por decaimiento radioactivo. Los modelos propuestos fueron comparados bajo condiciones simplificadas a los presentados previamente en la literatura.

La solución que considera fracturas verticales es semianalítica, lo que evita el problema de la doble inversión numérica, utilizada en estudios previos. Otra importante ventaja es que se evita también la dispersión numérica reportada por otros investigadores cuando el algoritmo de Stehfest es empleado como invertidor numérico. Las soluciones para los modelos de flujo radial son presentadas en el espacio de Laplace, las cuales son invertidas numéricamente por medio del algoritmo de Crump.

Se presenta también, una validación detallada de las soluciones propuestas en este estudio con respecto a las soluciones presentadas previamente y/o a las soluciones bajo condiciones físicas simplificadas (caso homogéneo) o soluciones límite (yacimientos naturalmente fracturados cercanos a homogéneos). La influencia de los principales parámetros adimensionales que intervienen en las soluciones es cuidadosamente estudiada. Una comparación de los resultados para los tres diferentes sistemas naturalmente fracturados es investigada, indicando que puede surgir un problema de no unicidad en la interpretación de una prueba de trazadores, especialmente para los casos radiales, siendo este problema

menos importante para los casos de inyección finita o bache.

Los resultados de este estudio pueden ser aplicables para interpretar pruebas de trazadores en yacimientos naturalmente fracturados, permitiendo la estimación de los parámetros de interés, tanto del sistema de fracturas como de la matriz, por medio de un proceso de optimización basado en el método de regresión no lineal de Rosenbrock. Logrando obtener la estimación de 2, 4 y 6 parámetros, obteniendo así el valor de las variables reales de estudio de manera prácticamente directa, para el caso del modelo que considera geometría matriz-fractura cúbica. El problema de no unicidad de los parámetros está presente, por lo que es necesario disponer de mayor información del yacimiento proveniente de otras fuentes tales como pruebas de presión, análisis de núcleos, registros geofísicos, etc.

Las soluciones presentadas en este estudio ofrecen una alternativa práctica para la interpretación de pruebas de trazadores a otras técnicas, como son el uso de simuladores numéricos o en general procedimientos más complejos, por ejemplo, la doble inversión numérica del espacio de Laplace, como ya se mencionó. Se considera que la interpretación de la respuesta del trazador con estas soluciones es mejor, más sencilla y práctica que otras reportadas previamente en la literatura.

RESUMEN**CONTENIDO**

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN.	1
CAPÍTULO 2: REVISIÓN DE LOS PRINCIPALES MODELOS QUE DESCRIBEN EL FLUJO DE TRAZADORES EN MEDIOS POROSOS.	4
2.1 Flujo Lineal.	4
2.1 Flujo Radial.	6
2.2.1 Medios Homogéneos.	7
2.2.2 Medios No Homogéneos.	15
CAPÍTULO 3: PLANTEAMIENTO Y SOLUCIÓN DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS PARA EL FLUJO DE TRAZADORES EN YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS.	20
3.1 Flujo Lineal.	21
3.1.1 Ecuación de flujo para el sistema de fracturas.	21
3.1.2 Solución de la ecuación de flujo para el sistema de fracturas.	28
3.2 Flujo Radial para un Yacimiento Estratificado.	30
3.2.1 Modelo matemático.	30
3.2.2 Solución del modelo.	35
3.3 Flujo Radial para un Yacimiento Fracturado (Geometría Matriz-Fractura Cúbica).	40
3.3.1 Modelo matemático.	40
3.3.2 Solución del modelo.	44

CAPÍTULO 4: VALIDACIÓN DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS.	51
4.1 Modelo para Flujo Lineal.	51
4.2 Modelo para Flujo Radial en un Yacimiento Estratificado.	54
4.3 Modelo para Flujo Radial en un Yacimientos Fracturado, (Geometría Matriz-Fractura Cúbica)	58
CAPÍTULO 5: DISCUSIÓN DE RESULTADOS.	65
5.1 Método de Análisis	65
5.2 Modelo para Flujo Lineal.	67
5.3 Modelo para Flujo Radial en un Yacimiento Estratificado.	80
5.4 Modelo para Flujo Radial en un Yacimiento Fracturado (Geometría Matriz-Fractura Cúbica).	85
5.5 Aspectos prácticos.	96
5.6 Interpretación de una prueba de trazadores.	116
5.7 Interpretación de una prueba de trazadores bajo la influencia de ruido aleatorio.	139
CAPÍTULO 6: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	148
NOMENCLATURA	150
REFERENCIAS	154
APÉNDICE A: DERIVACIÓN DE LA SOLUCIÓN SEMIANALÍTICA PARA FLUJO LINEAL	157

APÉNDICE B: DERIVACIÓN Y SOLUCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO PARA FLUJO RADIAL, YACIMIENTO ESTRATIFICADO.	163
APÉNDICE C: DERIVACIÓN Y SOLUCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO PARA FLUJO RADIAL, CONSIDERANDO GEOMETRÍA MATRIZ-FRACTURA CÚBICA.	181
APÉNDICE D: DATOS UTILIZADOS Y RANGO DE LOS PARÁMETROS ADIMENSIONALES QUE INTERVIENEN EN LA SOLUCIÓN DE LOS MODELOS.	197

LISTA DE FIGURAS

Figura	Página
3-1 Modelo Propuesto para Flujo Lineal.	22
3-2 Modelo Propuesto para la Representación del Medio Naturalmente Fracturado (Yacimiento Estratificado).	31
3-3 Modelo Propuesto para la Representación del Medio Naturalmente Fracturado (Geometría Matriz-Fractura Cúbica).	41
4-1 Solución de la Ec. 3-19. Obtenida a través de la Inversión Numérica Empleando el Algoritmo de Stehfest, Inyección Pico.	52
4-2 Solución Semianalítica, Ec. 3-30, Inyección Continua.	53
4-3 Comparación de las soluciones de Chen (1985) y de este Estudio para Inyección Continua de un Trazador Químico	59
4-4 Comparación de las Soluciones de Chen (1986) y de este Estudio para Inyección Continua de un Trazador Químico.	60
5-1 Inyección Continua de Trazador para Distintos XD.	68
5-2 Inyección Continua de Trazador para Distintos Alfas.	69
5-3 Influencia del Número de Peclet sobre la Inyección Continua de Trazador, para Tiempos Cortos.	71
5-4 Influencia de el Número de Peclet Sobre la Inyección Continua de Trazador, para Tiempos Largos.	72
5-5 Influencia del Parámetro Alfa Sobre la Inyección Finita de Trazador para un Período de Inyección $t_p = 0.3$.	74

Lista de Figuras (Cont.)

Figura	Página
5-6 Influencia del Número de Peclet Sobre la Inyección Límite de Trazador para un Período de Inyección $t_0 = 0.3$.	75
5-7 Influencia del Número de Peclet Sobre la Inyección Límite de Trazador para Períodos de Inyección $t_0 = 0.1$.	76
5-8 Influencia de el Período de Inyección Sobre la Inyección Finita de Trazador.	78
5-9 Influencia del Parámetro Alfa sobre la Inyección Continua de Trazador Radioactivo (Iridio).	79
5-10 Influencia del Parámetro Alfa sobre la Inyección Finita de Trazador Radioactivo (Iridio) t_0 Inyección = 0.3.	81
5-11 Influencia del Parámetro Gamma Representado a Través de la Constante de Decaimiento Radioactivo, Lambda.	82
5-12 Inyección Continua de Trazador, Concentración Contra Distancia Radial, para Distintos Valores de t_0 .	83
5-13 Inyección Continua de Trazador, Concentración Contra Distancia Radial, para varios Valores de Radio del Pozo, $t_0 = 1$.	84
5-14 Inyección Continua de Trazador, Concentración Contra Tiempo, para $R_0 = 0$ y $R_0 = 1$.	86
5-15 Influencia del Período de Inyección en la Inyección Finita de Trazador.	87
5-16 Comparación de las Soluciones para Flujo Radial, en el Caso de Inyección Continua de Trazador.	88
5-17 Comparación de las Soluciones para Flujo Lineal (Fracturas Verticales) y Radial, en el Caso de Inyección Continua.	90
5-18 Comparación de las Soluciones para Flujo Lineal (Fracturas Verticales) y Radial, en el Caso de Inyección Finita.	91

Lista de Figuras (Cont.)

Figura	Página
5-19 Influencia de las Características de la Matriz sobre la Respuesta del Trazador, para los modelos de Flujo Radial.	93
5-20 Influencia del Tamaño de Bloque de Matriz sobre la Respuesta del Trazador, Inyección Continua.	94
5-21 Influencia del Ancho de Fractura sobre la Respuesta del Trazador, para los Modelos de Flujo Radial.	95
5-22 Influencia del Coeficiente de Dispersividad, Alfa, sobre la Respuesta del Trazador, Inyección Continua.	98
5-23 Influencia del Coeficiente de Dispersividad, Alfa, sobre la Respuesta del Trazador, C_0 contra T_D/R_{02} .	100
5-24 Influencia de R_0 sobre el Perfil de Concentraciones. Para el caso de Inyección Continua.	101
5-25 Influencia de R_0 sobre el Perfil de Concentraciones. Para el caso de Inyección Continua.	102
5-26 Influencia del Ancho de Fractura W sobre el Perfil de Concentraciones. Para el caso de Inyección Continua.	104
5-27 Influencia de la Porosidad de la Matriz, Para el caso de Inyección Continua.	105
5-28 Influencia del Coeficiente de Difusión de la Matriz. Para el caso de Inyección Continua.	107
5-29 Influencia del Número de Bloques de Matriz. para el caso de Inyección Continua.	108
5-30 Influencia de la Constante de adsorción, representada a Través del Factor de Retardamiento R .	111
5-31 Influencia de la Constante de Decaimiento Radioactivo del Trazador, para el caso de una Inyección Continua.	112

Lista de Figuras (Cont.)

Figura	Página
5-32 Influencia de la Constante de decaimiento Radioactivo del Trazador, para el caso de una Inyección Continua.	114
5-33 Solución Finita o Bache para un Período de Inyección $T_0 = 970$ y Diferentes Números de Bloques.	115
5-34 Comparación de los Tres Modelos Propuestos, Incluyendo el caso de Flujo Radial Homogéneo, para una Inyección Finita.	117
5-35 Solución Finita o Bache para los Tres Modelos Propuestos.	118
5-36 Caso 1, Ajuste de Dos Parámetros, T_0 Inyección = 204.	126
5-37 Caso 1, Ajuste de Dos Parámetros, con Valores Estimados Iniciales más Alejados de los Reales. T_0 Inyección = 204.	127
5-38 Caso 2, Ajuste de Cuatro Parámetros, Inyección Continua.	129
5-39 Caso 2, Ajuste de Cuatro Parámetros, Inyección Finita.	130
5-40 Caso 2, Ajuste de Cuatro Parámetros, con Valores Estimados Iniciales más Alejados a los Reales, T_0 Inyección = 204.	132
5-41 Caso 2, Ajuste de Cuatro Parámetros, con una Precisión Mayor, $1E-8$.	134
5-42 Caso 3, Ajuste de Seis Parámetros, Inyección Finita.	135
5-43 Caso 3, Ajuste de Seis Parámetros, con Valores Estimados Iniciales más Alejados de los Reales, T_0 Inyección = 204.	137
5-44 Caso 1. Ajuste de Dos Parámetros con Datos Bajo la Influencia de Ruido Aleatorio.	142
5-45 Caso 2. Ajuste de Cuatro Parámetros con Datos Bajo la Influencia de Ruido Aleatorio.	143

Lista de Figuras (Cont.)

Figura	Página
5-46 Caso 3. Ajuste de Seis Parámetros con Datos Bajo la influencia de Ruido Aleatorio.	144

LISTA DE TABLAS

Tabla	Página
Tabla 4-1 Comparación de la Solución Analítica Límite para Sistemas Homogéneos (Ec. 3-25), y la Integración Numérica de la Solución Límite (Ec. 4-1).	55
Tabla 4-2 Comparación de los Resultados de Hsieh (1986), G, y los de este estudio, C _D .	57
Tabla 5-1 Características del Yacimiento del Ejemplo	124
Tabla 5-2 Caso 1, Dos Parámetros de Ajuste	125
Tabla 5-3 Caso 2, Cuatro Parámetros de Ajuste	128
Tabla 5-4 Caso 2, Cuatro Parámetros de Ajuste con Valores Iniciales más Alejados de los Reales	131
Tabla 5-5 Caso 3, Seis Parámetros de Ajuste	136
Tabla 5-6 Variación de los Parámetros χ_i 's	138
Tabla 5-7 Datos Utilizados en el Proceso de Ruido Aleatorio.	145
Tabla 5-8 Comparación de los Parámetros Reales, Iniciales y Ajustados.	146
Tabla 5-9 Variación de los Parámetros χ_i 's.	146
Tabla 5-10 Parámetros χ_i 's Ajustados sin Ruido Aleatorio.	147
Tabla D-1 Grupo 1: Datos tomados de Tang y cols. (1981); Moench y Ogata (1981); Chen (1985 y 1986) y Hsieh (1986).	197
Tabla D-2 Grupo 2: Datos tomados de Pickens y Grisak (1981); Koenraad y Baker (1981) y Hensel (1989)	197
Tabla D-3 Grupo 2: Rango de los Parámetros.	198

CAPITULO 1:

INTRODUCCIÓN

Un porcentaje importante de los yacimientos en el mundo (geotérmicos y petrolíferos) se encuentran en formaciones naturalmente fracturadas (*Aguilera, 1980; van Golf-Rach, 1982; Saidi, 1987*). El flujo de fluidos en estos sistemas es más complejo que en los yacimientos convencionales no fracturados), para los cuales la teoría de flujo de fluidos en medios porosos está más desarrollada. La determinación de un esquema de explotación óptimo para yacimientos fracturados, depende de la caracterización adecuada de estos sistemas heterogéneos, lo cual resultará de extrema importancia para la predicción del comportamiento del yacimiento y para proyectos de reinyección. El esfuerzo para realizar esta tarea es mayor que el requerido para yacimientos convencionales, ya que el medio poroso está constituido por dos sistemas, que son detenidamente estudiados, el sistema de fracturas y el de la matriz. La interpretación de pruebas de trazadores contribuyen de manera importante en la caracterización de este tipo de yacimientos .

Las pruebas de trazadores, adicionalmente a las pruebas de presión, constituyen una herramienta adecuada para obtener mayor información sobre las heterogeneidades del yacimiento. Durante las últimas dos décadas varios artículos aparecen en la literatura relacionados con flujo lineal de trazadores en sistemas naturalmente fracturados (*Grave y Beeten, 1971; Grisak y Pickens, 1980 y 1981; Neretnieks, 1980; Tang y cols., 1981; Fossum y Horne, 1982; Tester y cols., 1983; Horne y Rodríguez, 1983; Jensen, 1983; Hugakorn y cols., 1983; Abbaszadeh, 1984; Maloszewski y cols., 1985; Rasmuson, 1985; Okandan, 1987; Rivera y cols., 1987; Ramírez y cols., 1988*). Es importante saber que el número de estudios que consideran una determinación cuantitativa de los parámetros del yacimiento es limitado (*Grove y Beetem, 1971; Tang y cols., 1981; Walkup y Horne, 1985; Rivera y cols., 1987; Ramírez y cols.*). La literatura técnica existente que considera flujo radial de trazadores está orientada en su mayoría al caso homogéneo (*Bailey y Gogarty, 1961; Brigham y Smith, 1966; Moench y Ogata, 1981; Píkens y cols., 1981; Chen, 1985; Guven*

y cols., 1985; Hsieh, 1986; Guvasen y Guvasen , 1987; Chen, 1987; Falade y Brigham, 1989). Una revisión indica que, muy pocos artículos discuten el flujo radial de trazadores en sistemas naturalmente fracturados (Chen, 1986; Stephenson y cols., 1989).

Los trabajos antes mencionados fueron desarrollados considerando flujo lineal (representando el caso de un yacimiento con fracturas verticales o confinado) y flujo radial (fracturas horizontales o estratos de alta permeabilidad). Una visualización más realista de los sistemas naturalmente fracturados ha sido planteada por Barenblatt (1960), discutida posteriormente por Warren y Root (1963), la cual representa al yacimiento naturalmente fracturado como un sistema idealizado formado por cubos de igual tamaño, separados por una malla de fracturas ortogonales. Se considera, que el flujo ocurre en la malla de fracturas, en tanto que la matriz continuamente alimenta al sistema de fracturas. Suponiendo flujo transitorio de la matriz hacia las fracturas y geometría cúbica de los bloques de matriz, Lai y cols. (1983) presentaron un modelo de flujo y su solución para el problema anteriormente mencionado. Una revisión de la literatura técnica no muestra una solución para el flujo radial de trazadores considerando una geometría matriz-fractura cúbica, del tipo usado en la teoría de análisis transitorio de presión de Lai y cols.

En este trabajo se presentan tres modelos matemáticos y sus soluciones correspondientes, los cuales consideran los tres tipos de geometría antes mencionadas, los cuales han sido desarrollados con el propósito de determinar la influencia de los principales parámetros del sistema naturalmente fracturado en la respuesta del trazador. Estos modelos están representados matemáticamente por dos ecuaciones diferenciales parciales, su solución se presenta en el espacio de Laplace y se utilizó el algoritmo de Crump para su inversión, con excepción del modelo para flujo lineal, para el cual se obtuvo una solución semianalítica del tipo integral. Es importante mencionar que los modelos propuestos consideran los mecanismos de transporte de masa más relevantes que se presentan en la realidad (difusión, convección, adsorción y decaimiento radioactivo), siendo su solución sencilla en comparación con los modelos precedentes (Walkup y Horne, 1985; Chen, 1986). Se presentan soluciones para las inyecciones continua, finita y pico de trazadores radioac-

tivos en yacimientos naturalmente fracturados. Estas soluciones se presentan para flujo lineal para un yacimiento con fracturas verticales o confinado, flujo radial para el caso de fracturas horizontales y bloques de matriz de geometría cúbica. Estas consideran como caso particular el flujo de un trazador químico. Adicionalmente se presentan algunos casos particulares como el comportamiento de un yacimiento homogéneo y soluciones límite que consideran al yacimiento naturalmente fracturado tendiendo a homogéneo.

CAPITULO 2:

REVISIÓN DE LOS PRINCIPALES MODELOS QUE DESCRIBEN EL FLUJO DE TRAZADORES EN MEDIOS POROSOS.

En este capítulo se mencionan brevemente los principales modelos reportados en la literatura. En esta descripción se incluyen tanto los modelos que gobiernan el comportamiento del trazador en medios porosos fracturados así como no fracturados. Es conveniente hacer notar que los modelos desarrollados para flujo lineal han sido previamente descritos con detalle por *Ramírez (1988)*.

2.1 Modelos representativos del flujo lineal

La ecuación básica que rige el comportamiento de flujo del trazador en un medio poroso homogéneo ha sido formulada por varios autores: *Coats y Smith (1963)*, *Deans (1963)*, *Brigham (1974)*, entre otros. Si $C(x, t)$, (o de aquí en adelante C), es la concentración del trazador en un punto x a un tiempo t , entonces la variación de concentración está descrita por la siguiente ecuación (*Perkins y Johnson, 1963*):

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - v \frac{\partial C}{\partial x} \quad (2-1)$$

Utilizando el siguiente cambio de variable $x' = x - vt$, se obtiene la ecuación de difusión:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x'^2} \quad (2-2)$$

En estas ecuaciones el coeficiente promedio de difusión D , engloba los efectos debidos a la difusión y a las fluctuaciones de la velocidad convectiva.

A las Ecs. 2-1 y 2-2 se les conoce como "Modelo de Difusión". Una revisión con detalle de las principales soluciones reportadas en la literatura, empleando el modelo de difusión con diferentes tipos de condiciones de frontera se presenta en *Ramírez, 1988*. En este estudio se presentan algunos modelos que incluyen efectos adicionales con respecto al modelo de difusión, como la adsorción del trazador en los granos de la roca, y para el caso de un trazador radioactivo, el decaimiento radioactivo (*Gershon y Nir, 1969*).

El efecto de "retardamiento" en la irrupción de las concentraciones de trazador ha sido estudiado por varios investigadores, por ejemplo *Deans (1963)*, los cuales han dividido en dos partes la región a través de la cual fluye el trazador, una en la que el fluido se mueve continuamente y otra en que permanece estancada; a este tipo de modelos se les conoce como "Modelos de Capacitancia". Los modelos más conocidos son; el modelo de capacitancia de *Deans (1963)*, el de *Coats y Smith (1963)* y el de *Brigham (1974)*. Estos autores han modificado el modelo básico de difusión con objeto de tomar en cuenta la asimetría que frecuentemente presenta el perfil de concentraciones, tanto en la parte inicial como en la final de una prueba de trazadores.

Por otra parte, las formaciones con fracturas naturales presentan discontinuidades extremas en propiedades físicas, tales como porosidad y permeabilidad. Cuando se tiene un proceso de flujo de trazador a través del sistema naturalmente fracturado, los procesos dominantes serán la dispersión y el transporte convectivo y difusión en la red de fracturas y la difusión en los bloques de matriz. Normalmente, el proceso de difusión hacia la matriz, actuará como un efecto retardador de la aparición del trazador en el pozo productor, lo cual se agudizará si existe algún tipo de adsorción del soluto en la roca, debido a que al considerarse la matriz, se incrementa el área efectiva de contacto entre los granos de la roca y del soluto.

A continuación se mencionan las soluciones al problema de flujo de trazadores en medios naturalmente fracturados propuestas por algunos investigadores.

Tang y asociados (1981) desarrollaron una solución semianalítica para el problema de transporte de un contaminante en un sistema de una sola fractura, considerando los fenómenos de dispersión y difusión.

Jensen y Horne (1983) formularon un modelo de doble porosidad, tomando en cuenta los procesos de convección en la fractura, y simultáneamente, difusión y adsorción en los poros de la roca.

Walkup y Horne (1985) desarrollaron un modelo bidimensional representando el sistema de fracturas del yacimiento a través de dos regiones, una región móvil en la que se incluyen los fenómenos de convección en dirección x , difusión en dirección y , y adsorción del trazador en las paredes de la roca, y una región inmóvil en la que actúan los procesos de difusión en dirección y , así como la adsorción en las paredes de la roca.

Ramírez (1988) presenta un modelo lineal de doble porosidad también representando al sistema fracturado por medio de dos regiones, una región móvil donde los fenómenos de difusión y convección están presentes y una región estancada ó inmóvil donde sólo se presentan los fenómenos de difusión y adsorción. Ambas regiones están interconectadas por medio de una capa muy delgada de fluido, que forma parte de la región estancada, la cual controla la transferencia de masa de las dos regiones.

Las soluciones de los dos últimos modelos mencionados se presentan en el espacio de Laplace y en ambos casos se utilizó el algoritmo de *Stehfest (1970)* para su inversión. *Walkup y Horne* emplearon este algoritmo para antitransformar tanto en espacio como en tiempo y *Ramírez y asociados* lo utilizaron sólo para antitransformar en tiempo. Todos los modelos anteriormente mencionados se presentan con detalle en *Ramírez (1988)*.

2.2 Modelos representativos del flujo radial

En esta sección se describen brevemente algunos de los modelos reportados en la literatura para flujo radial. Estos se pueden clasificar de acuerdo al medio poroso a través del

cual está viajando el trazador, así se pueden tomar dos casos, medios porosos homogéneos y heterogéneos. Se presentan a continuación los modelos representativos para flujo radial en medios porosos homogéneos y más adelante se describen algunos de los modelos correspondientes a medios naturalmente fracturados. Cabe mencionar, que los modelos que se describen en esta sección fueron elegidos de acuerdo con el tratamiento de la solución al problema de dispersión en medios porosos, es decir aquí se describen los principales modelos matemáticos que emplean métodos analíticos para su solución. En cuanto a los modelos que utilizan esquemas numéricos para resolver el problema de dispersión en medios porosos, se discuten parcialmente en este trabajo debido a que el tratamiento matemático que se emplea en los modelos que aquí se proponen son conceptualizados analíticamente.

2.2.1. Modelos representativos de medios porosos homogéneos

El problema de dispersión, convección-difusión, en medios porosos para el caso de flujo radial, es diferente sustancialmente al problema de dispersión en flujo lineal. Esta diferencia estriba en que para el caso de flujo radial la velocidad es variable, y por consecuencia, el coeficiente de dispersión ($D_r \cong \alpha v_r$), también lo es, siendo que para el caso de flujo lineal la velocidad se puede considerar constante.

La velocidad, v_r , se expresa en términos del gasto de inyección, q , de la geometría del sistema y del radio, r :

$$v_r = \frac{q}{2\pi h\phi r} = \frac{a}{r} \quad (2-3)$$

donde:

$$a = \frac{q}{2\pi h\phi}$$

La ecuación que describe el comportamiento de un trazador que se inyecta a gasto

volumétrico constante en el pozo de radio r_w , a un medio poroso homogéneo e isotrópico, es la siguiente:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v_r \frac{\partial C}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r D_r \frac{\partial C}{\partial r} \right) \quad (2-4)$$

o bien:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{A}{r} \frac{\partial C}{\partial r} = \frac{\alpha A}{r} \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} \quad (2-5)$$

La Ec. 2-4 se deriva en base a un balance de materia, considerando que el coeficiente de difusión molecular es pequeño comparado con el coeficiente de dispersión.

La solución al problema de dispersión para flujo radial, Ec. 2-4, con distintos tipos de condiciones de frontera, ha sido reportada en la literatura por diversos autores (Tang y Babú, 1979; Moench y Ogata, 1981; Hsieh, 1986; Tang y Peaceman, 1987; Falade y Brigham, 1989). Estas soluciones pueden clasificarse de acuerdo a los métodos empleados en su desarrollo como numéricos o analíticos.

Debido a que los modelos que se presentan en esta sección se expresan en función de parámetros adimensionales, y éstos son similares entre sí, se definen previamente las siguientes variables adimensionales:

$$r_D = \frac{r}{\alpha} \quad (2-6)$$

$$r_{D0} = \frac{r_w}{\alpha} \quad (2-7)$$

$$C_D = \frac{C}{C_0} \quad (2-8)$$

$$t_D = \frac{qt}{2\pi h\alpha^2} \quad (2-9)$$

donde α es la dispersividad en las fracturas.

Expresando la Ec. 2-5 en forma adimensional:

$$\frac{\partial C_{Dr}}{\partial t_D} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial C_{Dr}}{\partial r_D} = \frac{1}{r_D} \frac{\partial^2 C_{Dr}}{\partial r_D^2} \quad (2-10)$$

La ecuación anterior es la expresión básica que describe el comportamiento de un trazador químico en un medio poroso homogéneo con flujo radial, las condiciones iniciales y de frontera más comunmente empleadas para definir por completo este problema son las siguientes:

Condición inicial:

$$C_D(r_{D0}, 0) = 0$$

Condiciones de Frontera:

$$C_D(r_{D0}, t_D) = 1 \quad (2-11)$$

$$C_D(r_D \rightarrow \infty, t_D) \rightarrow 0$$

En el caso de que algunos autores hayan utilizado condiciones iniciales y de frontera diferentes a las anteriores, éstas se aclararán apropiadamente.

2.2.1.1 Modelo de Tang y Babú (1979)

Estos autores fueron prácticamente los primeros en presentar una solución analítica para el problema de dispersión en medios porosos para flujo radial. Hasta 1970, no existían soluciones analíticas exactas para el problema de dispersión con velocidad variable, esto es coeficiente de dispersión dependiente de la velocidad. Tang y Babú presentan la solución exacta para la Ec. 2-10 con las Ecs. 2-11 expresadas en función de las variables

reales. Esta solución es reportada por *Hildebrand (1976)* en el espacio de Laplace; Tang y Babú invierten analíticamente esta solución aplicando la teoría de variable compleja y llegan a una solución en el espacio real en términos de tres integrales, las que a su vez, dependen de las funciones Bessel Modificadas. Esta solución se comparó con la solución aproximada de *Raimondi y asociados (1959)* y la solución numérica de *Hoopes y Harleman (1965)*, concluyéndose de lo anterior que la solución presentada por Tang y Babú reporta excelentes resultados con respecto a la solución numérica; por consiguiente la solución de Tang y Babú satisfizo la necesidad existente hasta esa fecha, de no disponer de una solución analítica para el problema de dispersión radial en medios porosos. En esta sección no se presenta esta solución debido a que las integrales que la conforman son bastante complejas y se requeriría adicionalmente definir un gran número de variables involucradas en esta solución, sin embargo, es importante mencionarla debido a que algunas de las soluciones posteriormente reportadas se han derivado con base en la solución analítica de Tang y Babú.

2.2.1.2 Modelo de Moench y Ogata (1981)

Moenh y Ogata reportan una solución al problema de dispersión radial en un medio poroso homogéneo en el espacio de Laplace e invierten esta solución por medio del algoritmo de *Stehfest (1970)*, presentando así una ecuación que describe el flujo de un trazador químico en un medio poroso, la cual se evalúa fácilmente y que permite una buena predicción de lo que ocurre en la práctica..

Aplicando el método de transformada de Laplace a la Ec. 2-9, se llega a la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d^2 \bar{C}_D}{dr_D^2} - \frac{d\bar{C}_D}{dr_D} - r_D s \bar{C}_D = 0 \quad (2-12)$$

donde \bar{C}_D es la concentración adimensional en el espacio transformado y s es la variable de transformación de Laplace.

Las condiciones de frontera para la Ec. 2-12 son las siguientes:

$$\bar{C}_D(r_{D0}, s) = \frac{1}{s}$$

$$\bar{C}_D(r_D \rightarrow \infty, s) = 0 \quad (2-13)$$

La solución general de la Ec. 2-12 está reportada por *Hildebrand (1976)*. Moench y Ogata aplican las condiciones de frontera expresadas por las Ecs. 2-13 a ésta solución y reportan la siguiente solución:

$$\bar{C}_D = \frac{1}{s} \exp\left(\frac{r_D - r_{D0}}{2}\right) \frac{A_i(Y)}{A_i(Y_0)} \quad (2-14)$$

donde A_i es la Función de Airy y su argumento está dado por:

$$Y = \frac{1}{s^{2/3}} \left(sr_D + \frac{1}{4} \right)$$

$$Y_0 = \frac{1}{s^{2/3}} \left(sr_{D0} + \frac{1}{4} \right)$$

La transformada inversa de la Ec. 2-14 es obtenida aplicando el algoritmo de *Stehfest (1970)*; las funciones de Airy se calcularon utilizando la siguiente expansión en serie para $|z| > 1$ (*Abramowitz y Stegun, 1970*):

$$A_i(z) \cong \frac{1}{\pi^{1/2} z^{1/4}} \exp(-\zeta) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k \zeta^{-k} \quad (2-15)$$

donde $\zeta = \frac{2}{3} z^{3/2}$, $c_0 = 1$ y

$$c_k = \frac{(2k+1)(2k+3)\cdots(6k-1)}{216^k k!}$$

Los resultados de la inversión numérica de la Ec. 2-14 fueron comparados con la solución al mismo problema presentada por Hoopes y Harleman (1965), quienes la desarrollaron a través de un esquema de diferencias finitas. La conclusión de esta comparación es que la técnica de inversión utilizada por Moench y Ogata (1981) converge a la solución numérica. Sin embargo, es importante hacer notar que la aproximación de la solución obtenida depende del valor de N empleado en la inversión numérica, así como también del valor del tiempo adimensional.

2.2.1.3 Modelo de Hsieh (1986)

Hsieh presenta una solución analítica de tipo integral para el problema de dispersión de un trazador en un acuífero confinado de espesor uniforme y de extensión lateral infinita. El modelo matemático en el espacio de Laplace que resuelve Hsieh está constituido por las Ecs. 2-10 con las condiciones 2-11, cuya solución en el espacio de Laplace corresponde a la Ec. 2-14.

La transformada inversa de la Ec. 2-14 es la siguiente:

$$C_D(r_D, t_D) = \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st_D} \bar{C}_D(r_D, s) ds \quad (2-16)$$

donde γ es un número real y s es complejo. El cálculo de la Ec. 2-16 se efectuó de la siguiente forma:

$$C(r_D, t) = 1 - \int_0^\infty F(v) dv \quad (2-17)$$

donde:

$$F(v) = \left\{ \frac{2 \exp[-v^2 t_D + (r_D - r_{D0})/2]}{\pi v} \right\} \left\{ \frac{A_i(y) B_i(y_w) - A_i(y_w) B_i(y)}{[A_i(y_w)]^2 + [B_i(y_w)]^2} \right\} \quad (2-18)$$

$$y = \frac{1 - 4r_D v^2}{4v^{4/3}}$$

$$y_w = \frac{1 - 4r_{D0} v^2}{4v^{4/3}}$$

Las funciones de Airy, $A_i(z)$ y $B_i(z)$ fueron evaluadas con las fórmulas reportadas por Abramowitz y Stegun (1970). Estas fórmulas se utilizaron dividiendo el argumento en tres intervalos: $(-\infty, -5.0)$, $(-5.0, 4.8)$, y $(4.8, \infty)$. Para argumentos $z > 4.8$, las funciones $A_i(z)$ se calculan de acuerdo a la Ec. 2-15 y las funciones $B_i(z)$ se evalúan como sigue:

$$B_i(z) = \frac{1}{\pi^{1/2} z^{1/4}} \exp(\zeta) \sum_{k=0}^{\infty} c_k \zeta^{-k} \quad (2-19)$$

Para $-5.0 \leq z \leq 4.8$:

$$A_i(z) = \beta_1 f(z) + \beta_2 g(z) \quad (2-20)$$

$$B_i(z) = \sqrt{3} [\beta_1 f(z) + \beta_2 g(z)] \quad (2-21)$$

donde:

$$f(z) = 1 + \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1 \times 4}{6!} z^6 + \frac{1 \times 4 \times 7}{9!} z^9 + \dots$$

y

$$g(z) = z + \frac{2}{4!} z^4 + \frac{2 \times 5}{7!} z^7 + \frac{2 \times 5 \times 8}{10!} z^{10} + \dots$$

donde $\beta_1 = .035502805$ y $\beta_2 = .25881940$.

Para $z < -5.0$, se define $z^* = -z$:

$$A_i(-z^*) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{z^*}} \left\{ \operatorname{sen} \left(\zeta^* + \frac{\pi}{4} \right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_{2k} (\zeta^*)^{-2k} \right\} \\ - \left\{ \operatorname{cos} \left(\zeta^* + \frac{\pi}{4} \right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_{2k+1} (\zeta^*)^{-2k-1} \right\}$$

$$B_i(-z^*) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{z^*}} \left\{ \operatorname{cos} \left(\zeta^* + \frac{\pi}{4} \right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_{2k} (\zeta^*)^{-2k} \right\} \\ + \left\{ \operatorname{sen} \left(\zeta^* + \frac{\pi}{4} \right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_{2k+1} (\zeta^*)^{-2k-1} \right\}$$

donde: $\zeta^* = 2/3 z^{3/2}$ y c_k está definida inmediatamente después de la Ec. 2-15. La integral de la Ec. 2-17 fué calculada por un método descrito por *Longman (1956)* basado en la transformación de Euler, *Bromwich (1942)*. *Hsieh* compara los resultados de su solución semianalítica con los obtenidos a través de métodos numéricos por *Hoopes y Harleman (1965)* y llega a la conclusión que ambas soluciones proporcionan resultados muy aproximados. También reporta la comparación de la evaluación de la Ec. 2-17 con la inversión numérica de la Ec. 2-14, empleando el algoritmo de *Stehfest (1970)*, que corresponde a la solución de *Moench y Ogata (1981)*, encontrando que los resultados presentados por estos autores son muy similares a los de su solución analítica; sin embargo, se observó que para tiempos adimensionales grandes la solución invertida numéricamente presenta dispersión numérica.

2.2.1.4 Modelo de Tang y Peaceman (1987)

Tang y Peaceman presentan una solución analítica para el problema de dispersión en medios porosos para flujo radial e inyección tipo bache, la cual es similar a la reportada por *Tang y Babú (1979)* para inyección continua, es decir, estos autores presentan una solución constituida por tres integrales que a su vez, están en términos de las funciones Bessel Modificadas. También presentan una solución basada en diferencias finitas, la cual se compara con la obtenida por medios analíticos para verificarla. De lo anterior se concluye que la solución numérica presenta excelentes resultados con respecto a la analítica, es decir, la dispersión numérica prácticamente es despreciable.

2.2.1.5 Modelo de Falade y Brigham (1989)

Falade y Brigham incluyen en la ecuación básica que describe el comportamiento de flujo de un trazador en un medio poroso homogéneo, Ec. 2-10, el término correspondiente a la reacción química de primer orden y a la adsorción del trazador en los granos de la roca. Estos autores presentan tres soluciones que corresponden a una concentración baja, moderada y alta del trazador inyectado, en donde para cada caso se considera distinto coeficiente de dispersión hidrodinámico, según la relevancia de los procesos que lo componen. Estas soluciones las presentan en el espacio de Laplace y están en términos de las funciones de Airy. Falade y Brigham consideran tanto la inyección continua de trazador como la inyección tipo bache, sus soluciones las invierten numéricamente por medio del algoritmo de *Stehfest (1970)* y reportan dos figuras con los resultados, una para la inyección continua y otra figura para la inyección tipo bache. Sin embargo, estos autores no presentan la comparación de sus soluciones con datos de campo o con otros modelos reportados en la literatura, es por esta razón que en esta sección sólo se mencionan brevemente las soluciones reportadas por *Falade y Brigham (1989)*.

2.2.2. Modelos representativos de medios porosos no homogéneos

Con respecto a este tópico existen pocos modelos reportados en la literatura, en esta sección se presentan sólo dos modelos para flujo radial a través de medios no homogéneos; el primero de ellos es presentado por *Chen (1985)* el cual considera inyección continua de un contaminante químico en un acuífero con una fractura horizontal discreta, el segundo es una extensión del primero y adicionalmente incluyen la opción de un contaminante radioactivo, este último también es presentado por *Chen (1986)*.

2.2.2.1 Modelo de Chen (1985)

Chen visualiza el problema de flujo radial de un contaminante en un medio poroso con una fractura horizontal por medio de dos regiones: (1) una región representando a la

fractura, comprendida entre $r_{D0} \leq r_D \leq \infty$ y (2) otra región representado la matriz del medio poroso, limitada por $0 \leq z_D \leq \infty$. Efectuando un balance de materia en estas dos regiones, Chen llega a las siguientes ecuaciones expresadas en forma adimensional:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial^2 C_{D1}}{\partial r_D^2} - \frac{1}{r_D} \frac{\partial C_{D1}}{\partial r_D} + \frac{w_1^2}{l} \left(\frac{\partial C_{D2}}{\partial z_D} \right)_{z_D=0} = \frac{\partial C_{D1}}{\partial t_D} \quad (2-22)$$

$$\frac{\partial^2 C_{D2}}{\partial z_D^2} = \frac{1}{w_2^2} \frac{\partial C_{D2}}{\partial t_D} \quad (2-23)$$

Con las siguientes condiciones iniciales y de frontera:

$$C_{D1}(r_D, 0) = C_{D2}(z_D, 0) = 0$$

$$C_{D1}(r_{D0}, t_D) = 1$$

$$C_{D1}(\infty, t_D) = 0$$

$$C_{D2}(\infty, t_D) = 0$$

$$C_{D1}(0, t_D) = C_{D2}(0, t_D)$$

donde $w_1 = w_2 \left(\frac{\phi_2}{\phi_1} \right)^{1/2}$, $w_2 = \left(\frac{D_{m2}}{A} \right)^{1/2}$, $l = \frac{b}{2\alpha}$ y b es el espesor de la fractura.

Aplicando el método de la transformada de Laplace a las Ecs. 2-22 y 2-23, empleando las condiciones iniciales, resolviendo la ecuación para la matriz, evaluándola en $z_D = 0$ y acoplándola con la ecuación para la fractura se llega a la expresión en el espacio de Laplace que gobierna la distribución de concentración en la fractura:

$$\bar{C}_{D1} = \frac{1}{s} \exp\left(\frac{Y - Y_0}{2}\right) \left\{ \frac{A_i(\beta^{1/3}Y)}{A_i(\beta^{1/3}Y_0)} \right\} \quad (2-24)$$

donde $\beta = s + \alpha_1 s^{1/2}$ y $\alpha_1 = \phi_2 w_2 / \phi_1 l$

La solución aproximada que presenta *Chen (1985)* consiste en utilizar tan sólo el primer término de la expansión de la serie de la Ec. 2-15, para valores muy grandes del argumento de la función de Airy, $A_i(z)$, con lo anterior la expresión en el espacio de Laplace permite, a través de algunos teoremas y fórmulas de inversión, *Erdélyi (1954)*, llegar a la siguiente solución en el espacio real:

$$C_{D1} = F(r_D) \int_u^\infty \frac{\exp(-x)}{\sqrt{\pi x}} \operatorname{erfc} \left[\frac{\eta \sqrt{u}}{\sqrt{x(x-u)}} \right] dx \quad (2-25)$$

donde:

$$F(r_D) = \sqrt{\frac{r_{D0}}{r_D}} \exp\left(\frac{r_D - r_{D0}}{2}\right)$$

$$\eta = m\alpha_1/4 \quad u = m^2/(4t_D)$$

y

$$m = \frac{2}{3}(r_D^{3/2} - r_{D0}^{3/2})$$

La ecuación anterior es válida para tiempos adimensionales pequeños, lo cual corresponde a $t_D \ll 4r_{D0}$. *Chen* invierte la Ec. 2-24 por medio de *Stehfest (1970)*, utilizando para el cálculo de las funciones de Airy que intervienen en esta ecuación la siguiente identidad, *Abramowitz y Stegun (1970)*:

$$A_i(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{x}{3}} K_{1/3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) \quad (2-26)$$

donde $K_{1/3}$ son las funciones Bessel. *Chen* presenta los resultados de ambas soluciones, la analítica y la invertida por *Stehfest (1970)*, concluyendo que las dos soluciones reportan prácticamente los mismos resultados.

2.2.2.2 Modelo de Chen (1986)

La visualización de este modelo es muy similar al presentado anteriormente, con la diferencia que en este, Chen considera el decaimiento radioactivo así como una masa adsorbida del contaminante en los granos de la roca a través de una reacción de primer orden en sus ecuaciones, *Freeze y Cherry (1979)*. El tratamiento matemático es enteramente análogo al anterior, por lo que no se presenta en esta sección. En este artículo, el autor presenta dos modelos matemáticos: el primero considera un contaminante radiactivo transportado a través de una fractura por convección y dispersión longitudinal y el segundo, que es un caso particular del primero, considera solamente el transporte por convección. En esta sección se describe brevemente el primero de estos modelos.

Las ecuaciones resultantes de un balance de materia para la fractura y la matriz son las siguientes, expresadas en función de las variables adimensionales:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial^2 C_{D1}}{\partial r_D^2} - \frac{1}{r_D} \frac{\partial C_{D1}}{\partial r_D} + \alpha_2 \left(\frac{\partial C_{D1}}{\partial z_D} \right)_{z_D=0} - \alpha_3 C_{D1} = \frac{\partial C_{D1}}{\partial t_D} \quad (2-27)$$

y

$$\frac{\partial^2 C_{D2}}{\partial z_D^2} - \alpha_3 C_{D2} = \frac{1}{w_2^2} \frac{\partial C_{D2}}{\partial t_D} \quad (2-28)$$

Con las siguientes condiciones iniciales y de frontera:

$$C_{D1}(r_D, 0) = C_{D2}(z_D, 0) = 0$$

$$C_{D1}(r_{D0}, t_D) = \exp(-\alpha_3 t_D)$$

$$C_{D1}(\infty, t_D) = 0$$

$$C_{D2}(\infty, t_D) = 0$$

$$C_{D1}(r_D, t_D) = C_{D2}(0, t_D)$$

donde $\alpha_2 = \frac{\phi_2 \alpha}{b} \sqrt{\frac{R_2 D m^2}{R_1 A}}$, $\alpha_3 = R_1 \lambda \alpha^2 / A$, R_1 y R_2 son los factores de retardamiento tanto de la fractura como de la matriz, definidos de la siguiente forma: $R_1 = 1 + k_{d1}/b$ y $R_2 = \rho k_{d2}/\phi_2$, donde k_{d1} y k_{d2} son las constantes de adsorción de la fractura y de la matriz, respectivamente.

Aplicando el método de transformada de Laplace a las Ecs. 2-27 y 2-28, utilizando las condiciones iniciales, resolviendo la ecuación para la matriz, derivándola con respecto a z_D , evaluándola en $z_D = 0$, acoplándola en la ecuación para la fractura y resolviendo ésta con las condiciones de frontera, se obtiene la siguiente ecuación en el espacio de Laplace para la fractura:

$$\bar{C}_{D1}(r_D, s) = \frac{1}{s + \alpha_3} \exp\left(\frac{Y - Y_0}{2}\right) \left\{ \frac{A_i(\beta^{1/3} Y)}{A_i(\beta^{1/3} Y_0)} \right\} \quad (2-29)$$

donde $\beta = s + \alpha_3 + \alpha_2 \sqrt{s + \alpha_3}$

A través de un procedimiento análogo al presentado por *Chen (1985)*, utilizando la misma aproximación para las funciones de Airy, para tiempos cortos, empleadas en este trabajo previo se obtiene la expresión siguiente para la distribución de concentración en la fractura:

$$C_{D1} = F(r_D) \exp(-\alpha_3 t_D) \int_u^\infty \frac{\exp(-x)}{\sqrt{\pi x}} \operatorname{erfc} \left[\frac{\eta \sqrt{u}}{\sqrt{x(x-u)}} \right] dx \quad (2-30)$$

donde $F(r_D)$, η y u , se definieron en la sección anterior. Se puede observar que si $\alpha_3 = 0$, la Ec. 2-30 se reduce a la solución para tiempos cortos reportada por *Chen (1985)*. Las soluciones para tiempos intermedios y largos se obtienen aplicando el algoritmo de *Stehfest (1970)* a la Ec. 2-29.

CAPÍTULO 3:

PLANTEAMIENTO Y SOLUCIÓN DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS PARA EL FLUJO DE TRAZADORES EN YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS

En este capítulo se presenta el planteamiento y la solución de tres modelos matemáticos; el primero de ellos predice el comportamiento del trazador en un medio fracturado donde el flujo es lineal, representando el caso real de un yacimiento con fracturas verticales o un sistema confinado. Para este caso se presenta una solución semianalítica, para los tres tipos de pruebas de trazador que se realizan en el campo, inyección continua, finita y tipo pico o instantánea. Es importante hacer notar, que en esta sección sólo se presenta la ecuación que describe el flujo de trazador en el sistema de fracturas, partiendo de un balance de materia para cada región que compone el sistema fracturado, el desarrollo y solución de estas ecuaciones en el espacio de Laplace se presenta con detalle en el trabajo de *Ramírez (1988)*. Aquí se parte de la ecuación derivada anteriormente y se presenta una solución de tipo integral, para los tres tipos de pruebas de trazador.

Los dos modelos restantes describen el comportamiento del trazador en un yacimiento naturalmente fracturado para flujo radial. La diferencia entre estos modelos es la geometría del sistema; en el primer caso el medio fracturado es representado mediante un sistema idealizado, equivalente a un yacimiento estratificado; el segundo caso se representa el medio fracturado a través del modelo propuesto por *Warren y Root (1967)*, es decir, la geometría de la matriz fractura cúbica. En ambos casos la solución está expresada en el espacio de Laplace, para cuya inversión numérica se utilizó el algoritmo de *Crump (1976)*. Para estos casos también se presentan las tres soluciones correspondientes a los tres tipos de pruebas de trazadores.

Para los tres modelos, el yacimiento naturalmente fracturado se idealizó representándose por medio de dos regiones: una región móvil, donde los fenómenos de difusión y convección están presentes y una región estancada o inmóvil donde sólo se presentan los fenómenos de difusión y adsorción. Ambas regiones están interconectadas por medio de una capa muy delgada de fluido estancado, que forma parte de la región inmóvil, la cual controla la transferencia de masa entre las dos regiones. La región móvil representa el sistema de fracturas, donde el trazador puede alcanzar altas velocidades. La roca del yacimiento y sus heterogeneidades, tales como microfracturas y fracturas ciegas, se representan por un medio poroso equivalente donde el fluido permanece inmóvil, lo que constituye la región estancada. Esta visualización del problema ha sido usada por otros autores anteriormente (Deans, 1963; Walkup y Horne, 1985; Maloszewski y Zuber, 1985; Rivera y asociados, 1988).

3.1 Flujo lineal

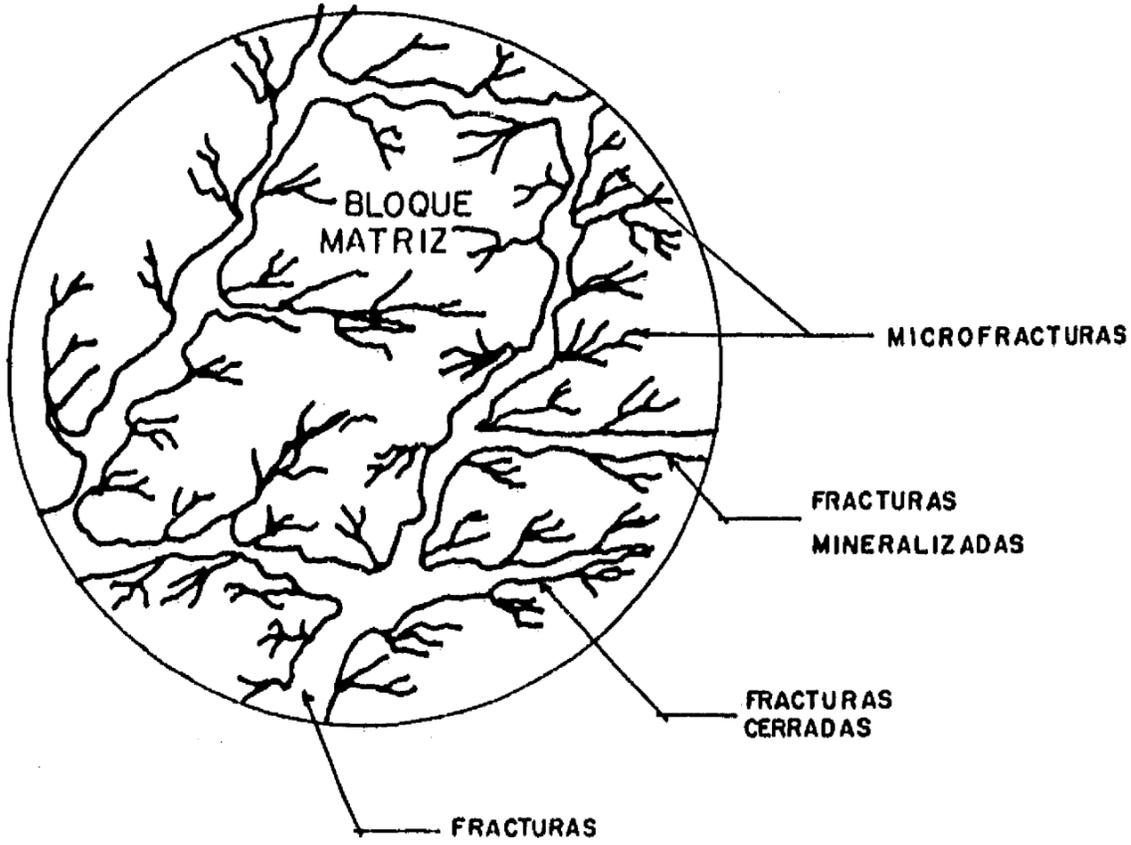
En esta sección se presenta la ecuación que gobierna el flujo del trazador en el sistema de fracturas, se hace una breve descripción del modelo, para mayor detalle se recomienda consultar Ramírez (1988) y también se incluye la solución semianalítica del problema, la cual es de tipo integral. Lo anterior se presenta para cada una de las pruebas de trazadores que se realizan en el campo, inyección continua, finita y tipo pico.

3.1.1 Ecuación de flujo para el sistema de fracturas

El modelo propuesto se muestra en la Fig. 3-1; el sistema idealizado está constituido por dos regiones: la región móvil (1) y la región estancada ó inmóvil (2). Estas dos regiones están en contacto a través de una película delgada de fluido estancado cuyo espesor es δ .

Como se puede observar de la Fig. 3 – 1b en el esquema idealizado se considera: un elemento de simetría de espesor E , el cual es repetitivo; una fractura de ancho $2w$, limitada

a. SISTEMA REAL



b. SISTEMA IDEAL

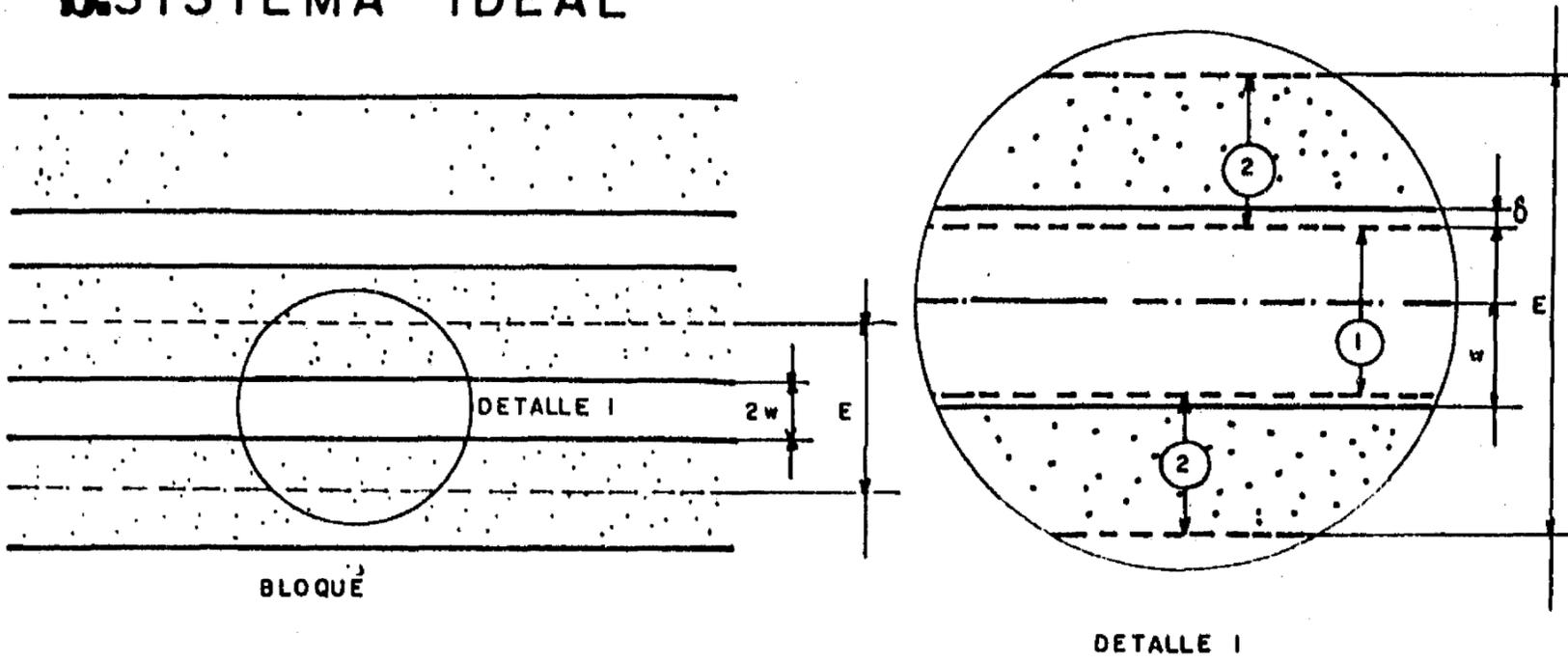


Fig. 3-1 Modelo propuesto para flujo lineal.

en ambos extremos por el medio poroso. La región móvil tiene un ancho de $2(w - \delta)$, siendo δ el espesor de una película muy delgada que limita la región móvil en dirección y , que está incluida en la zona estancada por lo que, la región estancada tiene un espesor de $E/2 - (w - \delta)$. Esta película representa la resistencia que controla la transferencia de masa entre las regiones estancada e móvil.

Con base en un balance de materia efectuado para las dos regiones se obtienen las ecuaciones que describen el flujo del trazador tanto en el sistema de fracturas como en la matriz:

$$\frac{1}{P_{e1}} \frac{\partial^2 C_{D1}}{\partial x_D^2} - \frac{\partial C_{D1}}{\partial x_D} - \gamma C_{D1} + \xi L \left(\frac{\partial C_{D2}}{\partial y_D} \right)_{\frac{y=L}{L}} = \frac{\partial C_{D1}}{\partial t_D} \quad (3-1)$$

$$\frac{R}{P_{e2}} \frac{\partial^2 C_{D2}}{\partial y_D^2} - \gamma C_{D2} - \frac{\partial C_{D2}}{\partial t_D} = 0 \quad (3-2)$$

donde los parámetros adimensionales se definen como sigue:

$$x_D = \frac{x}{L} \quad (3-3)$$

$$y_D = \frac{y}{L} \quad (3-4)$$

$$t_D = \frac{v_L t}{L} \quad (3-5)$$

$$C_{D1} = \frac{C_1 - C_i}{C_o - C_i} \quad (3-6)$$

$$C_{D2} = \frac{C_2 - C_i}{C_o - C_i} \quad (3-7)$$

$$P_{e1} = \frac{v_L L}{D_1} \quad (3-8)$$

$$P_{e2} = \frac{v_L L}{D_2} \quad (3-9)$$

$$\xi_L = \frac{\phi_2 D_2}{v_L (w - \delta)} \quad (3-10)$$

$$\gamma = \frac{L \lambda}{v_L} \quad (3-11)$$

$$R = \frac{\phi_2}{\phi_2 + \rho k_d (1 - \phi_2)} \quad (3-12)$$

Las condiciones iniciales y de frontera que completan el modelo matemático constituido por las Ecs. 3-1 y 3-2 se presentan a continuación:

condiciones iniciales:

$$C_{D1}(x_D, 0) = 0 \quad (3-13)$$

$$C_{D2}(x_D, y_D, 0) = 0 \quad (3-14)$$

Condiciones de frontera:

$$C_{D1}(0, t_D) = 1 \quad (3-15)$$

$$C_{D1}(\infty, t_D) = 0 \quad (3-16)$$

$$C_{D2}\left(x_D, \frac{w - \delta}{L}, t_D\right) = C_{D1}(x_D, t_D) \quad (3-17)$$

$$\left(\frac{\partial C_{D2}}{\partial y_D}\right)_{\left(x_D, \frac{w - \delta}{L}, t_D\right)} = 0 \quad (3-18)$$

Como puede observarse, para obtener la solución de la Ec. 3-1 es necesario resolver previamente el problema de la región estancada y a partir de la solución para $C_{D2}(y_D, t_D)$,

evaluar la derivada requerida en al Ec. 3-1 y sustituirla en ésta. Para encontrar la solución de ambas ecuaciones se empleó el método de la transformada de Laplace, se transformó el espacio (x, y, t) al espacio (x, y, s) .

La solución en el espacio de Laplace de la Ec. 3-1, empleando las condiciones iniciales y de frontera 3-13, 3-15 y 3-16, se ha presentado previamente en forma detallada (Ramírez, 1988), la cual corresponde a la siguiente ecuación:

$$\bar{C}_{D1} = \frac{1}{s} \exp\left(\frac{P_{e1} x_D}{2}\right) \exp\left\{-x_D \sqrt{\frac{P_{e1}^2}{4} + P_{e1} \left[s + \gamma + \xi_L m_1 \tanh\left(m_1 \frac{E/2 - w + \delta}{L}\right)\right]}\right\} \quad (3-19)$$

donde:

$$m_1 = \sqrt{\frac{P_{e2}}{R}(s + \gamma)} \quad (3-20)$$

Ha sido demostrado por Ramírez (1988) que el espesor E del elemento repetitivo de la Fig. 3-1 no afecta significativamente la distribución de la concentración de trazador, debido a que la tangente hiperbólica de la Ec. 3-19 es aproximadamente igual a la unidad, para el rango de los parámetros que intervienen en el argumento. Bajo esta condiciones la Ec. 3-19 se puede simplificar, produciendo la siguiente expresión:

$$\bar{C}_{D1} = \frac{1}{s} \exp\left(\frac{P_{e1} x_D}{2}\right) \exp\left\{-x_D \sqrt{\frac{P_{e1}^2}{4} + P_{e1} \left[s + \gamma + \xi_L \sqrt{\frac{P_{e2}}{R}(s + \gamma)}\right]}\right\} \quad (3-21)$$

Se puede mencionar que Tang y asociados (1981) han presentado una ecuación similar a la Ec. 3-14.

Partiendo de la Ec. 3-14 es posible definir un nuevo parámetro adimensional, α , de tal manera que permite expresar la solución en términos de sólo dos parámetros adimen-

sionales, mientras que soluciones equiparables requieren la evaluación de seis parámetros (Walkup y Horne, 1985). Considerando un trazador químico, es decir $\gamma = 0$, y despreciando la adsorción del trazador en la roca, $k_d=0$ y consecuentemente $R = 1$, la Ec. 3-21 puede escribirse como sigue:

$$\bar{C}_{D1} = \frac{1}{s} \exp\left(\frac{P_{e1}x_D}{2}\right) \exp\left\{-x_D \sqrt{\frac{P_{e1}^2}{4} + P_{e1}[s + \alpha\sqrt{s}]}\right\} \quad (3-22)$$

donde:

$$\alpha = \xi_L \sqrt{P_{e2}} = \frac{\phi_2}{v_L(w - \delta)} \sqrt{P_{e2}} = \frac{\phi_2}{(w - \delta)} \sqrt{\frac{D_2 L}{v_L}} \quad (3-23)$$

Se puede observar de la Ec. 3-22, que los efectos de la región estancada sobre la concentración de trazador en la región móvil, son función exclusivamente del parámetro α . Con base en esta observación, para valores muy pequeños de D_2 y/o de ϕ_2 , o bien valores muy altos de v_L , de tal manera que $\alpha \rightarrow 0$, el sistema se comporta como si estuviera constituido por un solo medio, ya que el trazador sólo fluye a través de la región móvil. Este caso es equivalente a considerar el flujo del trazador a través de un medio "homogéneo en fracturas" (únicamente existe el sistema de fracturas). Bajo estas condiciones, la Ec. 3-22 puede expresarse como:

$$\bar{C}_{D1} = \frac{1}{s} \exp\left(\frac{P_{e1}x_D}{2}\right) \exp\left\{-x_D \sqrt{\frac{P_{e1}^2}{4} + P_{e1}s}\right\} \quad (3-24)$$

La inversión de esta ecuación es la siguiente:

$$C_{D1} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left\{\frac{x_D \sqrt{P_{e1}}}{2\sqrt{t_D}} - \sqrt{\frac{P_{e1}t_D}{4}}\right\} + \frac{1}{2} \exp\left(\frac{P_{e1}x_D}{2}\right) \operatorname{erfc}\left\{\frac{x_D \sqrt{P_{e1}}}{2\sqrt{t_D}} + \sqrt{\frac{P_{e1}t_D}{4}}\right\} \quad (3-25)$$

La Ec. 3-25 ha sido presentada por *Coats y Smith (1964)* para sistemas homogéneos. Para el caso de este estudio de formaciones fracturadas, ésta ecuación representa una solución analítica límite, debido a que la concentración máxima de trazador en $x_D = 1$ se obtiene cuando no exista transferencia de masa a la región estancada, esto se presenta, como se mencionó, cuando los valores de D_2 , ϕ_2 y v_L sean tales que impliquen que $\alpha \cong 0$. Lo anterior equivale a decir que cuando $\alpha = 0$, el sistema se comporta como homogéneo y por tanto se obtiene la respuesta máxima del trazador en $x_D = 1$.

La Ec. 3-22 fue evaluada con diferentes valores de α y se encontró que para valores de $\alpha \leq 0.01$ presenta los mismos resultados que la solución dada por la Ec. 3-25, lo que implica que la solución límite es válida para los valores de α antes mencionados.

Con objeto de aproximarse más a lo que ocurre en un caso real, se determinó la solución pico, referida en la literatura como "spike injection", *Walkup y Horne (1985)*. Ya que el significado físico de esta solución es la inyección de trazador durante un intervalo de tiempo muy pequeño, a diferencia de la solución continua representada matemáticamente por las Ecs. 3-22 y 3-25. Se ha establecido (*Walkup y Horne, 1985*) que la solución para una prueba de inyección pico es la siguiente:

$$(C_{D1})_{pico} = \frac{\partial C_{D1}}{\partial t_D} = L^{-1} \{s\bar{C}_{D1}\} \quad (3-26)$$

Sustituyendo las Ecs. 3-22 y 3-24 en la Ec. 3-26 se obtienen las soluciones pico, para los casos general y límite:

$$(C_{D1})_{pico} = L^{-1} \left\{ \exp\left(\frac{P_{e1}x_D}{2}\right) \exp\left\{-x_D \sqrt{\frac{P_{e1}^2}{4} + P_{e1}[s + \alpha\sqrt{s}]}\right\} \right\} \quad (3-27)$$

y

$$(C_{D1})_{pico \text{ límite}} = L^{-1} \left\{ \exp\left(\frac{P_{e1}x_D}{2}\right) \exp\left\{-x_D \sqrt{\frac{P_{e1}^2}{4} + P_{e1}s}\right\} \right\} \quad (3-28)$$

Con la misma finalidad que se determinó la solución pico, se obtuvo la solución para el caso en que se inyecta un bache de trazador, tanto en medios fracturados como homogéneos. Estas soluciones se derivan aplicando el principio de superposición en tiempo a las Ecs. 3-22 y 3-25 respectivamente.

3.1.2 Solución de la ecuación de flujo para el sistema de fracturas.

Para calcular la distribución de concentración en el espacio real a partir de las Ecs. 3-21 y 3-22 se utilizó inicialmente el algoritmo de *Stehfest (1970)*, observándose dispersión numérica en los resultados, especialmente al incrementarse el tiempo adimensional, por lo que fue necesario encontrar otra alternativa para resolver este problema.

Aplicando la Ec. 7-4.3 de *Abramowitz y Stegun (1970)* a las Ecs. 3-21, 3-22 y 3-27, se obtienen las siguientes soluciones:

Inyección Continua de Trazador Radioactivo.

$$\begin{aligned}
 C_{D1}(x_D, t_D) = & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{x_D P_{e1}}{2}\right) \int_0^\infty \exp\left[-\tau^2 - \frac{P_{e1} x_D^2}{4\tau^2} \left(\frac{P_{e1}}{4} + \gamma\right)\right] \\
 & \left\{ \left\{ \exp\left(-\frac{x_D^2 P_{e1} \alpha}{4\tau^2} \sqrt{\gamma}\right) \operatorname{erfc}\left\{\frac{x_D^2 P_{e1} \alpha}{8\tau^2 \sqrt{t_D - \frac{P_{e1} x_D^2}{4\tau^2}}} - \sqrt{\gamma \left(t_D - \frac{P_{e1} x_D^2}{4\tau^2}\right)}\right\}\right\} \right. \\
 & \left. + \left\{ \exp\left(\frac{x_D^2 P_{e1} \alpha}{4\tau^2} \sqrt{\gamma}\right) \operatorname{erfc}\left\{\frac{x_D^2 P_{e1} \alpha}{8\tau^2 \sqrt{t_D - \frac{P_{e1} x_D^2}{4\tau^2}}} + \sqrt{\gamma \left(t_D - \frac{P_{e1} x_D^2}{4\tau^2}\right)}\right\}\right\} \right\} \\
 & H\left(t_D - \frac{P_{e1} x_D^2}{4\tau^2}\right) d\tau \quad (3-29)
 \end{aligned}$$

Inyección Continua de Trazador Químico, $\gamma = 0$.

$$C_{D1}(x_D, t_D) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{x_D P_{e1}}{2}\right) \int_0^{\infty} \exp\left\{-\tau^2 - \left(\frac{P_{e1} x_D}{4\tau}\right)^2\right\} \\ \operatorname{erfc}\left\{\frac{x_D^2 P_{e1} \alpha}{8\tau^2 \sqrt{t_D - \frac{P_{e1} x_D^2}{4\tau^2}}}\right\} H\left(t_D - \frac{P_{e1} x_D^2}{4\tau^2}\right) d\tau \quad (3-30)$$

Inyección pico de Trazador Químico, $\gamma = 0$.

$$C_{D1}(x_D, t_D)_{\text{pico}} = \frac{x_D^2 P_{e1} \alpha}{4\pi} \int_0^{\infty} \exp\left(-\tau^2 - \frac{P_{e1}^2 x_D^2}{4\tau^2}\right) \\ \left\{1 + \left(\frac{x_D \alpha}{2\tau}\right)^2 \left(\frac{1}{t_D - \frac{P_{e1} x_D^2}{4\tau^2}}\right)\right\} H\left(t_D - \frac{P_{e1} x_D^2}{4\tau^2}\right) d\tau \quad (3-31)$$

El desarrollo de las ecuaciones anteriores se presenta con detalle en el Apéndice A. Las integrales de estas ecuaciones fueron evaluadas numéricamente utilizando el algoritmo de O'hara y Smith (1969), el cual evalúa la integral a través de una modificación del método de Clenshaw-Curtis (1960).

3.2 Flujo Radial para un Yacimiento Estratificado

En esta sección se presenta el modelo desarrollado para flujo radial considerando un sistema idealizado similar al utilizado en el modelo presentado para flujo lineal. El modelo es equivalente al de un yacimiento estratificado, con estratos de alta y baja permeabilidad, que corresponden a las fracturas y a los bloques de matriz respectivamente. El sistema idealizado está constituido por dos regiones: la región móvil y la región inmóvil. Estas dos regiones están en contacto a través de una película delgada de fluido estancado cuyo espesor es δ ; se considera un bloque de espesor E , el cual es repetitivo; una fractura de ancho $2w$, limitada en ambos extremos por un medio poroso. La región móvil tiene un ancho de $2(w - \delta)$, siendo δ el espesor de la película delgada de fluido que limita la región móvil en dirección z , que está incluida en la zona estancada, por lo que, la región inmóvil tiene un espesor de $\frac{E}{2} - (w - \delta)$. Esta película representa la resistencia que controla la transferencia de masa entre las regiones móvil e inmóvil.

Las suposiciones básicas del modelo para flujo lineal, presentado en la sección anterior y las de este modelo, son esencialmente similares; sin embargo se detallan en esta sección para un mejor seguimiento del planteamiento del modelo. También se incluyen las soluciones para las diferentes pruebas de trazador que se efectúan en la práctica, inyección continua, pico y finita de trazador químico o radioactivo.

3.2.1 Modelo Matemático

El modelo propuesto se muestra en la Fig. 3-2, pudiendo observarse de la comparación con la Fig. 3-1, que ambos sistemas son similares. Las suposiciones y consideraciones básicas de este modelo para cada una de las regiones se mencionan a continuación:

- En la región móvil (1) de la Fig. 3.2 se consideran los siguientes fenómenos y suposiciones básicas:

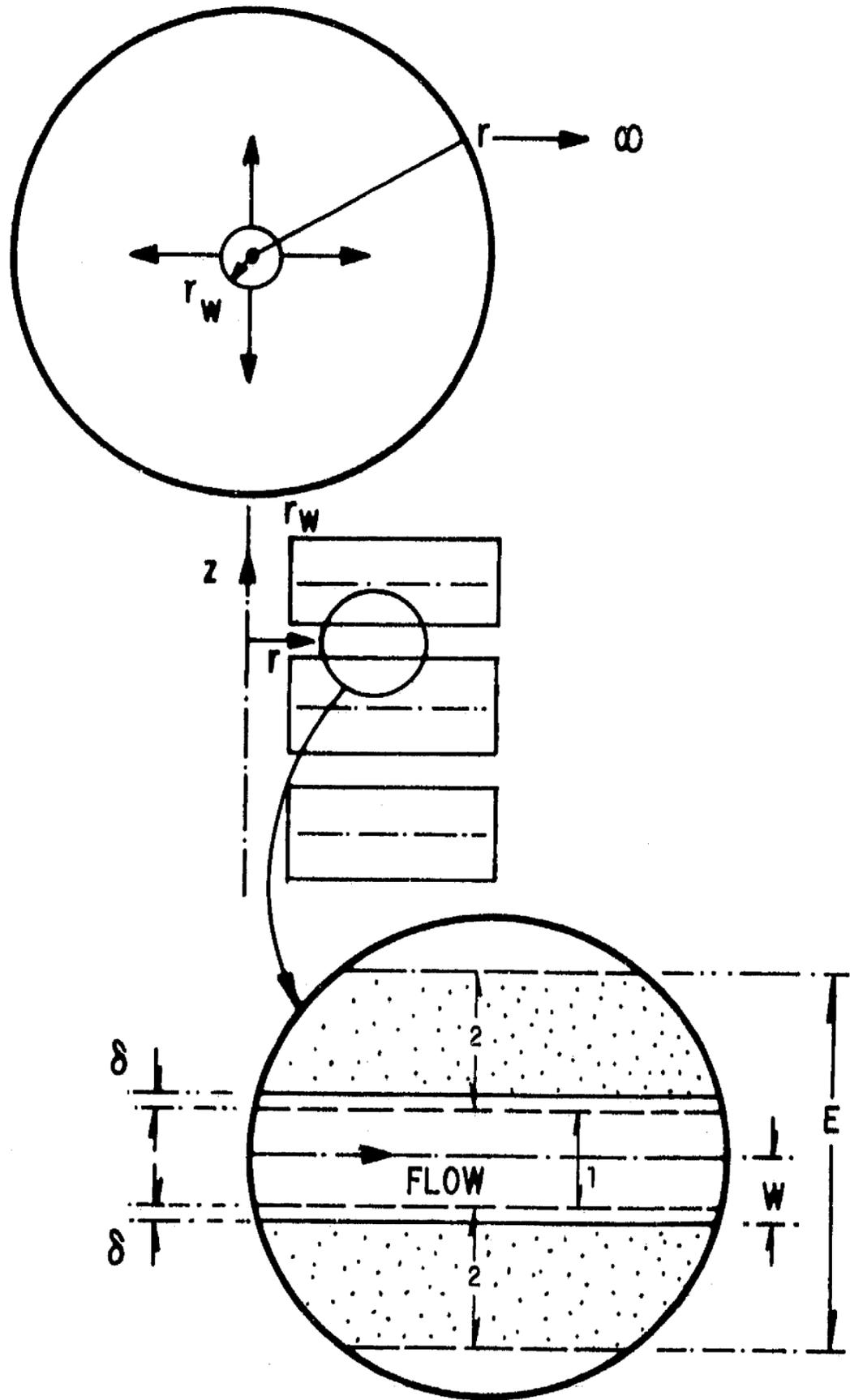


Fig. 3.2 Modelo propuesto para la representación del medio naturalmente fracturado

1. **Dispersión longitudinal que incluye difusión molecular:**

$$D_r = \alpha v_r + D_{mr} \quad (3-32)$$

No se considera la dirección z porque se supone que el ancho de fractura, $2w$, es muy pequeño, por consecuencia no existe gradiente de concentración en esta dirección.

2. **Convección.** Con base en la suposición presentada en 1), la velocidad en la dirección z es uniforme y sólo se considera su variación con respecto a la dirección r . Para el caso de gasto de inyección constante y flujo radial, la velocidad está definida como sigue:

$$v_r = \frac{a}{r} \quad (3-33)$$

donde:

$$a = \frac{q}{2\pi H \phi_1} \quad (3-34)$$

3. **Decaimiento.** Este fenómeno es considerado en el caso de que el trazador radioactivo tenga una vida media menor al tiempo de tránsito del mismo en la formación.

• Para la región inmóvil (2) de la Fig. 3.2 se consideraron los siguientes procesos:

1. **Difusión.** Este efecto sólomente se considera en la dirección z , dado que la componente longitudinal se supone despreciable.
2. **Adsorción**
3. **Decaimiento**

Con base en estas suposiciones y considerando un fluido incompresible se efectuó un balance de materia para cada región, ver Apéndice B, y se encontró que las ecuaciones

que gobiernan el comportamiento de las concentraciones de trazador en las dos regiones, son las siguientes:

Región móvil,

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial^2 C_{Dr1}}{\partial r_D^2} - \frac{1}{r_D} \frac{\partial C_{Dr1}}{\partial r_D} - \gamma C_{Dr1} + \frac{D_{D2}}{z_{D0}} \left(\frac{\partial C_{Dr2}}{\partial z_D} \right)_{z_{D0}} = \frac{\partial C_{Dr1}}{\partial t_D} \quad (3-35)$$

$$r_{D0} < r_D < \infty ; t_D > 0$$

Región inmóvil,

$$\frac{\partial C_{Dr2}}{\partial t_D} - \frac{R}{D_{D2}} \frac{\partial^2 C_{Dr2}}{\partial z_D^2} - \gamma C_{Dr2} = 0 \quad (3-36)$$

$$z_{D0} < z_D < \frac{E}{2\alpha} ; t_D > 0$$

donde α es el coeficiente de dispersividad [L].

Las definiciones de los parámetros adimensionales que intervienen en estas ecuaciones son los siguientes:

$$r_D = \frac{r}{\alpha} \quad (3-37)$$

$$r_{D0} = \frac{r_w}{\alpha} \quad (3-38)$$

$$z_D = \frac{z}{\alpha} \quad (3-39)$$

$$z_{D0} = \frac{(w - \delta)}{\alpha} \quad (3-40)$$

$$t_D = \frac{q t}{2\pi H \phi_1 \alpha^2} \quad (3-41)$$

$$C_{Dr1} = \frac{C_{r1} - C_i}{C_o - C_i} \quad (3-42)$$

$$C_{Dr2} = \frac{C_{r2} - C_i}{C_o - C_i} \quad (3-43)$$

$$D_{D2} = \frac{D_2}{a} \quad (3-44)$$

$$\gamma = \frac{\lambda \alpha^2}{a} \quad (3-45)$$

$$R = \frac{\phi_2}{\phi_2 + \rho k_d (1 - \phi_2)} \quad (3-46)$$

El último término del lado izquierdo de la Ec. 3-35 considera la interacción entre los bloques de matriz y las fracturas, y representa la transferencia de masa por difusión de la región móvil a la región estancada en z_{D0} .

Las condiciones iniciales y de frontera que completan el modelo constituido por las Ecs. 3-35 y 3-36 son las siguientes:

Condiciones iniciales:

$$C_{Dr1}(r_D, 0) = 0 \quad (3-47)$$

$$C_{Dr2}(r_D, z_D, 0) = 0 \quad (3-48)$$

Condiciones de frontera:

Interior,

$$C_{Dr1}(r_{D0}, t_D) = 1 \quad (3-49)$$

Exteriores,

$$C_{Dr1}(\infty, t_D) = 0 \quad (3-50)$$

$$\left(\frac{\partial C_{Dr2}}{\partial z_D} \right)_{(r_D, \frac{E}{2a}, t_D)} = 0 \quad (3-51)$$

Condición de interfase,

$$C_{Dr2}(r_D, z_{D0}, t_D) = C_{Dr1}(r_D, t_D) \quad (3-52)$$

3.2.2 Solución del Modelo

Para determinar la distribución de concentración de trazador en el sistema de fracturas o en la región móvil, es necesario resolver primero el problema de la región estancada y a partir de la solución para $C_{Dr2}(z_D, t_D)$ evaluar la derivada requerida en la Ec. 3-35 y sustituirla en ésta.

Aplicando el método de la transformada de Laplace a la Ec. 3-36, usando la condición inicial 3-48, resolviendo la ecuación en el espacio de Laplace, con las condiciones 3-51 y 3-52 se obtiene la solución para \bar{C}_{Dr2} , como se muestra en el Apéndice B, Ec. B-66.

Derivando esta solución con respecto a z_D y evaluándola en z_{D0} , se llega a la siguiente ecuación:

$$\left(\frac{d\bar{C}_{Dr2}}{dz_D} \right)_{z_{D0}} = -\sqrt{\beta_{rh}} \bar{C}_{Dr1}(r_D, s) \left\{ \frac{1 - \exp[-\sqrt{\beta_{rh}}(E_D - 2z_{D0})]}{1 + \exp[-\sqrt{\beta_{rh}}(E_D - 2z_{D0})]} \right\} \quad (3-53)$$

donde:

$$\beta_{rh} = \frac{s + \gamma}{RD_{D2}} \quad (3-54)$$

La Ec. 3-53 se puede expresar en términos de la tangente hiperbólica:

$$\left(\frac{d\bar{C}_{Dr2}}{dz_D}\right)_{z_{D0}} = -\sqrt{\beta_{rh}} \bar{C}_{Dr1}(r_D, s) \tanh \left\{ 4\sqrt{\beta_{rh}} \left(\frac{E_D}{2} - z_{D0} \right) \right\} \quad (3-55)$$

Ahora bién, aplicando el método de la transformada de Laplace a la Ec. 3-35, utilizando la condición inicial 3-47, y acoplado la Ec. 3-55, se obtiene la ecuación diferencial de segundo orden siguiente:

$$\frac{d^2\bar{C}_{Dr1}}{dr_D^2} - \frac{d\bar{C}_{Dr1}}{dr_D} - r_D \xi_{rh} \bar{C}_{Dr1} = 0 \quad (3-56)$$

donde:

$$\xi_{rh} = s + \gamma + \frac{D_{D2}\phi_2}{z_{D0}} \sqrt{\beta_{rh}} \tanh \left\{ 4\sqrt{\beta_{rh}} \left(\frac{E_D}{2} - z_{D0} \right) \right\} \quad (3-57)$$

Las condiciones de frontera, Ecs. 3-49 y 3-50, transformadas son:

Interior,

$$\bar{C}_{Dr1}(r_{D0}, s) = \frac{1}{s} \quad (3-58)$$

Exterior,

$$\bar{C}_{Dr1}(\infty, s) = 0 \quad (3-59)$$

La Ec. 3-56 es una ecuación diferencial de coeficientes variables, que puede expresarse en la forma de la ecuación de Airy mediante las siguientes transformaciones (*Tang y Babú, 1979*):

$$Y = r_D + \frac{1}{4\xi_{rh}}, \quad (3-60)$$

$$\bar{C} = \bar{C}_{Dr1} \exp\left(\frac{Y}{2}\right), \quad (3-61)$$

y

$$X = \xi_{rh}^{1/3} Y \quad (3-62)$$

Empleando las Ecs. 3-60 a 3-62 se obtiene la ecuación estandar de Airy (Abramowitz y Stegun, 1970):

$$\frac{d^2 \bar{C}}{dX^2} = X \bar{C} \quad (3-63)$$

La solución de la Ec. 3-63 con las condiciones 3-58 y 3-59 se obtiene en el Apéndice B. Para los casos de inyección continua y pico de trazador radioactivo se obtiene lo siguiente:

Inyección Continua,

$$\bar{C}_{Dr1} = \frac{1}{s} \exp\left(\frac{Y - Y_0}{2}\right) \left\{ \frac{A_i(\xi_{rh}^{1/3} Y)}{A_i(\xi_{rh}^{1/3} Y_0)} \right\} \quad (3-64)$$

Inyección pico,

$$\bar{C}_{Dr1} = \exp\left(\frac{Y - Y_0}{2}\right) \left\{ \frac{A_i(\xi_{rh}^{1/3} Y)}{A_i(\xi_{rh}^{1/3} Y_0)} \right\} \quad (3-65)$$

donde:

$$Y_0 = r_{D0} + \frac{1}{4\xi_{rh}} \quad (3-66)$$

Para el caso de un trazador químico, se sustituye $\gamma = 0$ en la Ec. 3-57 y se obtienen las dos soluciones análogas a las Ecs. 3-64 y 3-65, para cada una de las distintas pruebas de trazador.

Las soluciones para el caso de inyección bache o finita se obtienen aplicando el principio de superposición en tiempo (Craig, 1971) a la Ec. 3-64, ya sea para trazador químico o radioactivo. La concentración para este tipo de inyección está dada por la siguiente ecuación:

$$[C_{Dr1}(t)]_{bache} = C_{Dr1}(t) - C_{Dr1}(t - \Delta t) \quad (3-67)$$

donde $C_{Dr1}(t)$ es la concentración adimensional evaluada al tiempo t y $C_{Dr1}(t - \Delta t)$ es cero cuando $t < \Delta t$, siendo Δt el tiempo de inyección del bache.

Las concentraciones $C_{Dr1}(t)$ y $C_{Dr1}(t - \Delta t)$ son evaluadas por medio del programa de computo utilizado para el cálculo de la Ec. 3-64, solución continua, finalmente se aplica la Ec. 3-67 para obtener la respuesta del trazador en el caso de una inyección tipo bache o finita.

Las funciones de Airy, $A_i(Z)$, que intervienen en las Ecs. 3-64 y 3-65 fueron calculadas de acuerdo a Abramowitz y Stegun (1970), p. 448, Ec. 10-4.59 y p. 446, Ec. 10-4.2, según el valor del argumento de la función:

Para $Z \geq 4.8$,

$$A_i(Z) = \frac{1}{2} \pi^{1/2} Z^{-1/4} \exp(-\zeta) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k c_k \zeta^{-k} \quad (3-68)$$

donde:

$$\zeta = \frac{2}{3} Z^{3/2}$$

$$c_0 = 1$$

$$c_k = \frac{\Gamma(3k + 1/2)}{54^k k! \Gamma(k + 1/2)}$$

Para $-5.0 \leq Z \leq 4.8$,

$$A_i(Z) = c_1 f(Z) + c_2 g(Z) \quad (3-69)$$

donde:

$$f(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} 3^k \left(\frac{1}{3}\right)_k \frac{Z^{3k}}{(3k)!}$$

$$g(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} 3^k \left(\frac{2}{3}\right)_k \frac{Z^{3k+1}}{(3k+1)!}$$

$$\left(\alpha + \frac{1}{3}\right)_0 = 1$$

$$3^k \left(\alpha + \frac{1}{3}\right)_k = (3\alpha + 1)(3\alpha + 4) \cdots (3\alpha + 3k - 2)$$

y

$$c_1 = \frac{3^{-2/3}}{\Gamma(2/3)} = .3550280538,$$

$$c_2 = \frac{3^{1/3}}{\Gamma(1/3)} = .2588194037$$

donde α para este problema es igual a cero.

Para la inversión de las Ecs. 3-64 y 3-65 al espacio real se utilizó el algoritmo de *Crump* (1976), obteniendo excelentes resultados para el rango de los parámetros utilizados, lo cual se detallará en el capítulo siguiente. Se investigó el uso del algoritmo de *Stehfest*(1979) como invertidor numérico de las Ecs. 3-64 y 3-65, encontrándose una importante dispersión numérica para valores grandes de t'_D s y r'_D s, por lo que se optó por utilizar en lo sucesivo el invertidor numérico de *Crump*.

3.3 Flujo Radial para un Yacimiento Fracturado, con geometría matriz-fractura cúbica

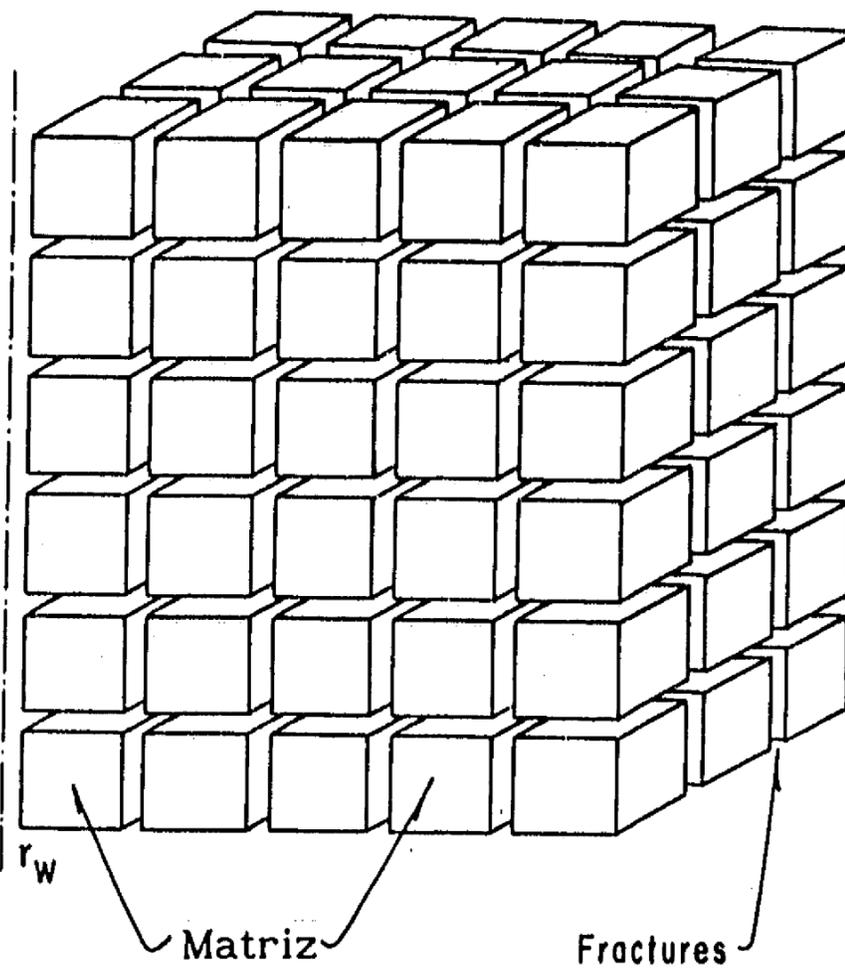
En esta sección se presenta una solución general para el flujo radial de trazadores en yacimientos naturalmente fracturados, con geometría de bloques de matriz-fractura cúbicos. Se consideran soluciones particulares para los casos de inyección continua, pico y finita de trazadores químicos o radioactivos. El yacimiento es idealizado por medio de un sistema compuesto por dos regiones: una región móvil donde los procesos de convección y dispersión están presentes y una región estancada o inmóvil donde sólo se consideran los fenómenos de difusión y adsorción. Ambas regiones están interconectadas por medio de una capa muy delgada de fluido estancado, la cual forma parte de la región inmóvil. Esta visualización del problema es similar a la considerada en los modelos presentados anteriormente en este trabajo. Es importante hacer notar, que no existen modelos reportados en la literatura para el problema de dispersión en medios porosos, donde se considere una geometría de este tipo. La conceptualización del yacimiento naturalmente fracturado es equivalente al modelo previamente presentado por *Warren y Root (1963)*, por lo que el modelo propuesto para el estudio de flujo de trazadores sería el primero en su tipo.

3.3.1 Modelo Matemático.

El modelo propuesto se muestra en la Fig. 3-3, como puede observarse de esta figura, el sistema fracturado es idealizado a través de un modelo similar al de *Warren y Root (1963)*, el cual está constituido por dos regiones: la región móvil (1), correspondiente al sistema de fracturas y la región estancada o inmóvil (2) equivalente a los bloques de matriz del yacimiento. Estas dos regiones están en contacto a través de una película delgada de fluido estancado cuyo espesor es δ .

Como puede observarse de la Fig. 3 - 3 a , en el esquema idealizado se considera

a. sistema idealizado



b. detalle del elemento de simetría

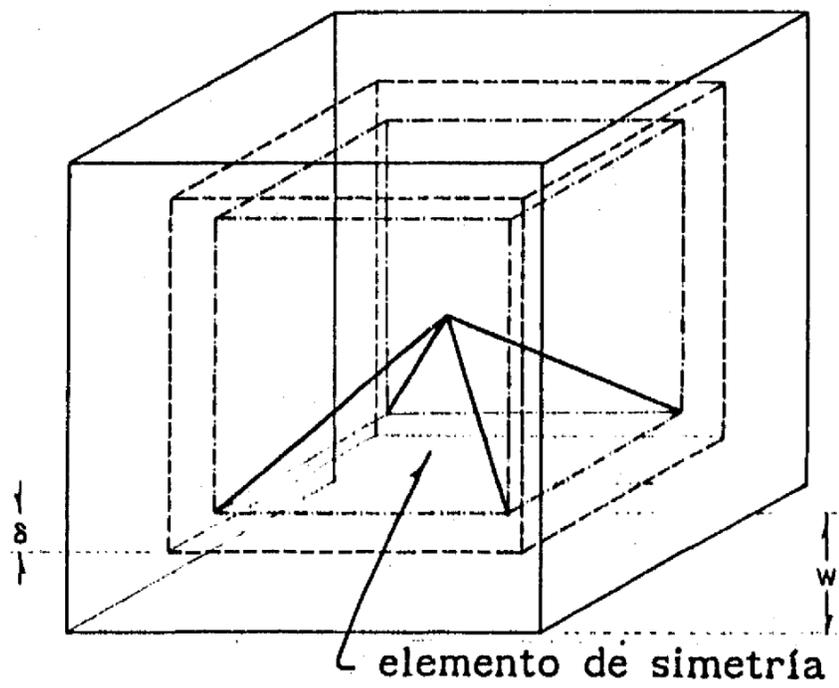


Fig. 3-3 Modelo propuesto para la representación del medio naturalmente fracturado.
(Geometría Matriz-Fractura Cúbica)

lo siguiente: bloques de matriz cuyo volumen es d^3 , los cuales son repetitivos; fracturas, envolviendo al bloque de matriz en sus 6 caras, de ancho $2w$, limitadas en ambos extremos por el medio poroso. La región móvil tiene un ancho de $2(w - \delta)$, siendo δ el espesor de una película muy delgada que limita la región móvil en dirección z y que está incluida en la región estancada por lo que esta región tiene un volumen de $(d/2 - (w - \delta))^3$. Esta capa de fluido representa la resistencia que controla la transferencia de masa entre las regiones móvil e inmóvil.

Las consideraciones y suposiciones básicas para este modelo son similares a las del modelo para flujo radial en un yacimiento estratificado, ver Sección 3.2.1 y Apéndice B. Con base en estas suposiciones y considerando un fluido incompresible se efectuó un balance de materia para cada región, ver Apéndice C, y se encontró que las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de las concentraciones de trazador en las dos regiones, son las siguientes:

Región móvil,

$$\frac{\alpha a}{r} \frac{\partial^2 C_{r1}}{\partial r^2} - \frac{a}{r} \frac{\partial C_{r1}}{\partial r} - \lambda C_{r1} + \frac{6}{d} \frac{\phi_2}{\phi_1} D_2 \left(\frac{\partial C_{r2}}{\partial z} \right)_{z=\frac{d}{2}+\delta} = \frac{\partial C_{r1}}{\partial t} \quad (3-70)$$

$$r_w < r < \infty, \quad t > 0$$

En el desarrollo de esta ecuación se consideró que la velocidad en dirección r , es función del radio, la geometría del sistema y del gasto de inyección, q ; tomando en cuenta que para este caso, el área transversal al flujo es $A = 2\pi H\phi_1 r$, por lo que la constante a está definida de la siguiente manera:

$$a = \frac{q}{2\pi H\phi_1} \quad (3-71)$$

donde H es el espesor total del sistema.

Región inmóvil,

$$\left[\frac{\phi_2}{\phi_2 + \rho k_d(1 - \phi_2)} \right] D_2 \frac{\partial^2 C_{r2}}{\partial z^2} + \left[\frac{\phi_2}{\phi_2 + \rho k_d(1 - \phi_2)} \right] \frac{2}{z} D_2 \frac{\partial C_{r2}}{\partial z} - \lambda C_{r2} = \frac{\partial C_{r2}}{\partial t} \quad (3-72)$$

$$0 < z < d/2 \quad t > 0$$

donde d es el tamaño de bloque.

Las Ecs. 3-70 y 3-72 gobiernan el comportamiento del trazador en las regiones móvil e inmóvil respectivamente, las cuales constituyen el sistema representado en la Fig. 3-3.

Las condiciones iniciales y de frontera que completan el modelo, son las siguientes:

Condiciones iniciales:

$$C_{r1}(r, 0) = 0 \quad (3-73)$$

$$C_{r2}(r, z, 0) = 0 \quad (3-74)$$

Condiciones de frontera:

Interior (inyección continua),

$$C_{r1}(r_w, t) = C_0 \quad (3-75)$$

Exteriores:

$$C_{r1}(\infty, t) = 0 \quad (3-76)$$

$$\left(\frac{\partial C_{r2}}{\partial z} \right)_{(r,0,t)} = 0 \quad (3-77)$$

Condición en la interfase,

$$C_{r2}\left(r, \frac{d}{2} + \delta, t\right) = C_{r1}(r, t) \quad (3-78)$$

El último término de la Ec. 3-70 representa la interacción entre los bloques de matriz y las fracturas. El modelo matemático para el problema de flujo de trazadores en un sistema cuya geometría de la matriz es cúbica está definido por las Ecs. 3-70 y 3-72 con las condiciones iniciales y de frontera 3-73 a 3-78.

El detalle del desarrollo de estas ecuaciones se presenta en el Apéndice C.

3.3.2 Solución del Modelo .

En este caso es necesario, una vez más, acoplar la solución de la ecuación que gobierna el comportamiento del trazador en la región inmóvil, en la ecuación de flujo para el sistema de fracturas, para obtener con ello la solución del sistema completo. En esta sección también se incluyen los tres tipos de soluciones para las distintas pruebas de trazador que se efectúan en la práctica, inyección continua, pico y finita.

Para resolver el modelo matemático definido en la sección anterior se expresaron las ecuaciones en variables adimensionales. Algunas de estas variables fueron ya definidas para el problema de flujo radial de trazadores en un yacimiento estratificado, Sección 3.2; nuevas variables son, sin embargo, definidas aquí.

Las variables adimensionales utilizadas en este modelo son las siguientes:

$$r_D = \frac{r}{\alpha} \quad (3-79)$$

$$r_{D0} = \frac{r_w}{\alpha} \quad (3-80)$$

$$z_D = \frac{z}{\alpha} \quad (3-81)$$

$$z_{D0} = \frac{d}{2\alpha} + \frac{\delta}{\alpha} \quad (3-82)$$

$$d_D = \frac{d}{\alpha} \quad (3-83)$$

$$t_D = \frac{q t}{2 \pi H \phi_1 \alpha^2} = \frac{a t}{\alpha^2} \quad (3-84)$$

$$C_{Dr1} = \frac{C_{r1} - C_i}{C_o - C_i} \quad (3-85)$$

$$C_{Dr2} = \frac{C_{r2} - C_i}{C_o - C_i} \quad (3-86)$$

$$D_{D2} = \frac{D_2}{a} \quad (3-87)$$

$$\gamma = \frac{\lambda \alpha^2}{a} \quad (3-88)$$

$$R = \frac{\phi_2}{\phi_2 + \rho k_d (1 - \phi_2)} \quad (3-89)$$

Aplicando estas definiciones a las Ecs. 3-70 y 3-72 y a las condiciones iniciales y de frontera, Ecs. 3-73 a 3-78, se obtiene el modelo matemático en función de los parámetros adimensionales:

Región móvil,

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial^2 C_{Dr1}}{\partial r_D^2} - \frac{1}{r_D} \frac{\partial C_{Dr1}}{\partial r_D} - \gamma C_{Dr1} + \frac{6}{d_D} \frac{\phi_2}{\phi_1} D_{D2} \left(\frac{\partial C_{Dr2}}{\partial z_D} \right)_{z_{D0}} = \frac{\partial C_{Dr1}}{\partial t_D} \quad (3-90)$$

$$r_{d0} < r_D < \infty \quad t_D > 0$$

Región inmóvil,

$$D_{D2} R \frac{\partial^2 C_{Dr2}}{\partial z_D^2} + \frac{2}{z_D} D_{D2} R \frac{\partial C_{Dr2}}{\partial z_D} - \gamma C_{Dr2} = \frac{\partial C_{Dr2}}{\partial t_D} \quad (3-91)$$

$$0 < z_D < \frac{d_D}{2} \quad t_D > 0$$

Las condiciones iniciales y de frontera que completan el modelo, en su forma adimensional, son las siguientes:

Condiciones iniciales:

$$C_{Dr1}(r_{D0}, 0) = 0 \quad (3-92)$$

$$C_{Dr2}(r_D, z_D, 0) = 0 \quad (3-93)$$

Condiciones de frontera:

Interior,

$$C_{Dr1}(r_{D0}, t_D) = 1 \quad (3-94)$$

Exteriores:

$$C_{Dr1}(\infty, t_D) = 0 \quad (3-95)$$

$$\left(\frac{\partial C_{Dr2}}{\partial z_D} \right)_{(r_D, 0, t_D)} = 0 \quad (3-96)$$

Condición de interfase,

$$C_{Dr2}(r_D, z_{D0}, t_D) = C_{Dr1}(r_D, t_D) \quad (3-97)$$

Para determinar la concentración en la región móvil, es necesario resolver primero la Ec. 3-91, evaluar su derivada con respecto a z_D en z_{D0} y sustituirla en la Ec. 3-90; con lo anterior la ecuación de flujo para la región móvil estará sólo en función de r_D y t_D y se podrá transformar al espacio de Laplace sólo con respecto a t_D , y así obtener una ecuación diferencial con una variable independiente.

Solución de la ecuación para la región inmóvil

El detalle de la solución del modelo matemático constituido por las Ecs. 3-90 y 3-91 con las condiciones iniciales y de frontera 3-92 y 3-97, se presenta en el Apéndice C.

Aplicando el método de la transformada de Laplace a la Ec. 3-91 y sustituyendo la condición inicial 3-93, se llega a la siguiente expresión:

$$\frac{d^2 \bar{C}_{Dr2}}{d z_D^2} + \frac{2}{z_D} \frac{d \bar{C}_{Dr2}}{d z_D} - \beta_{rc}^2 \bar{C}_{Dr2} = 0 \quad (3-98)$$

donde:

$$\beta_{rc} = \sqrt{\frac{s + \gamma}{R D_{D2}}} \quad (3-99)$$

Aplicando a la Ec. 3-98 los siguientes cambios de variables:

$$z_D = \frac{\varpi}{\beta_{rc}} \quad (3-100)$$

$$\bar{C}_{Dr2} = \frac{C(\varpi)}{\sqrt{\varpi}} \quad (3-101)$$

Se obtiene la siguiente ecuación para $C(\varpi)$:

$$\varpi^2 \frac{d^2 C}{d \varpi^2} + \varpi \frac{dC}{d \varpi} - C \left(\varpi^2 + \frac{1}{4} \right) = 0 \quad (3-102)$$

La ecuación anterior corresponde a la ecuación Bessel Modificada de orden $\nu = \frac{1}{2}$ (Ec. C-64), cuya solución general está dada por Hildebrand, (1976):

$$C = A I_{1/2}(Z) + B I_{-1/2}(Z) \quad (3-103)$$

donde $I_{(\pm 1/2)}$'s son las funciones Bessel modificadas de orden 1/2.

Las constantes A y B de la Ec. 3-103 se determinan considerando las condiciones de frontera, Ecs. 3-96 y 3-97. La solución para la región estancada en términos de las variables originales es la siguiente (ver Apéndice C, Ec. C-75):

$$\bar{C}_{Dr2} = \bar{C}_{Dr1} \frac{z_{D0}}{z_D} \left\{ \frac{\sinh(z_D \beta_{rc})}{\sinh(z_{D0} \beta_{rc})} \right\} \quad (3-104)$$

La Ec. 3-104 es la solución en el espacio de Laplace de la Ec. 3-98, correspondiente a la ecuación de flujo para los bloques de matriz o región inmóvil.

Solución de la ecuación para la región móvil.

Para acoplar el término correspondiente a la transferencia de masa debido a difusión, que pierde la región móvil y gana la región estancada en z_{D0} , es necesario derivar la Ec. 3-104 con respecto a z_D y evaluarla en z_{D0} . La derivada de \bar{C}_{Dr2} en z_{D0} es la siguiente (Apéndice C, Ec. C-78):

$$\left(\frac{d\bar{C}_{Dr2}}{dz_D} \right)_{z_D = z_{D0}} = \bar{C}_{Dr1} \left\{ \frac{1}{z_{D0}} - \beta_{rc} \coth(\beta_{rc} z_{D0}) \right\} \quad (3-105)$$

La Ec. 3-105 incluye el signo negativo de acuerdo a los ejes de referencia establecidos en la Fig. 3-3.

Aplicando el método de la transformada de Laplace a la Ec. 3-90, sustituyendo la condición inicial 3-92, y acoplando la Ec. 3-105 correspondiente al término de interacción entre las dos regiones, se obtiene la ecuación diferencial para la región móvil:

$$\frac{d^2 \bar{C}_{Dr1}}{dr_D^2} - \frac{d \bar{C}_{Dr1}}{dr_D} - r_D \xi_{rc} \bar{C}_{Dr1} = 0 \quad (3-106)$$

donde:

$$\xi_{rc} = s + \gamma + \varepsilon \left\{ \beta_{rc} \coth(\beta_{rc} z_{D0}) - \frac{1}{z_{D0}} \right\} \quad (3-107)$$

y

$$\varepsilon = \frac{6}{d_D} \frac{\phi_2}{\phi_1} D_{D2} \quad (3-108)$$

Transformando las condiciones de frontera 3-94 y 3-95, se obtienen las condiciones para la Ec. 3-106:

$$\bar{C}_{Dr1}(r_{D0}, s) = \frac{1}{s} \quad (3-109)$$

$$\bar{C}_{Dr1}(\infty, s) = 0 \quad (3-110)$$

La Ec. 3-106 con las condiciones 3-109 y 3-110, definen el modelo matemático en el espacio de Laplace para el problema de flujo radial de trazadores a través de un sistema de geometría matriz-fractura cúbica. Se puede observar que es análogo al modelo para flujo radial en un yacimiento estratificado, definido por las Ecs. 3-56 a 3-59, por lo que las soluciones de ambos son similares. Debido a lo anterior, se recomienda consultar el Apéndice B, para el desarrollo de la solución que se presenta a continuación, para los casos de inyección continua y pico de trazador radioactivo:

Inyección Continua,

$$\bar{C}_{Dr1}(r_D, s) = \frac{1}{s} \exp\left(\frac{r_D - r_{D0}}{2}\right) \frac{\left(r_{D0} + \frac{1}{4\xi_{rc}}\right)^{1/4}}{\left(r_D + \frac{1}{4\xi_{rc}}\right)^{1/4}} \left\{ \frac{\exp\left\{-\frac{2}{3}\left[\xi_{rc}^{1/2}\left(r_D - \frac{1}{4\xi_{rc}}\right)^{3/2}\right]\right\}}{\exp\left\{-\frac{2}{3}\left[\xi_{rc}^{1/2}\left(r_{D0} - \frac{1}{4\xi_{rc}}\right)^{3/2}\right]\right\}} \right\} \quad (3-111)$$

Inyección Pico,

$$\bar{C}_{Dr1}(r_D, s) = \exp\left(\frac{r_D - r_{D0}}{2}\right) \frac{\left(r_{D0} + \frac{1}{4\xi_{rc}}\right)^{1/4}}{\left(r_D + \frac{1}{4\xi_{rc}}\right)^{1/4}} \left\{ \frac{\exp\left\{-\frac{2}{3}\left[\xi_{rc}^{1/2}\left(r_D - \frac{1}{4\xi_{rc}}\right)^{3/2}\right]\right\}}{\exp\left\{-\frac{2}{3}\left[\xi_{rc}^{1/2}\left(r_{D0} - \frac{1}{4\xi_{rc}}\right)^{3/2}\right]\right\}} \right\} \quad (3-112)$$

Las Ecs. 3-111 y 3-112, se obtuvieron sustituyendo las funciones de Airy de acuerdo a la Ec. 3-59, es decir para tiempos pequeños y considerando que la serie correspondiente es aproximadamente igual a uno, para fines ilustrativos. Sin embargo, para la efectos del cálculo de la solución para este modelo se emplearon las Ecs. 3-68 y 3-69, según el valor del argumento de las funciones de Airy. En este caso también se empleó el algoritmo de *Crump (1976)* como invertidor numérico.

Para el caso de trazador químico, se sustituye $\gamma = 0$ en las Ecs. 3-99 y 3-107, y así se obtienen las dos soluciones análogas a las Ecs. 3-111 y 3-112, para cada tipo de prueba de trazador.

Las soluciones para el caso de una inyección finita se obtienen aplicando el principio de superposición en tiempo, Ec. 3-67, a la Ec. 3-114 o bien, a la solución general dada por la Ec. 3-64, sustituyendo la definición de ξ_{rc} , representada por la Ec. 3-107, en lugar de ξ_{rh} , ya sea para trazador químico o radioactivo.

CAPITULO 4:

VALIDACIÓN DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS

En este capítulo se presenta la validación de los tres modelos matemáticos propuestos en este trabajo. Se analizan y se comparan cada uno de ellos con algunos modelos reportados previamente en la literatura. La comparación se realiza considerando algunos casos especiales de los modelos propuestos, es decir, soluciones simplificadas de los modelos para el problema de flujo de trazador químico o radioactivo a través de un medio homogéneo o de un medio fracturado. Para esto se recurre a algunos de los modelos presentados en el Capítulo 2, los cuales corresponden a casos particulares de los modelos propuestos en este trabajo y éstos se validan con los mismos datos empleados por los autores respectivos.

4.1 Modelo para flujo lineal

La solución semianalítica para describir el flujo de trazadores en yacimientos naturalmente fracturados propuesta en este trabajo se comparó con la solución obtenida por *Ramírez (1988)*, tanto en base a sus aspectos analíticos como numéricos. En esta sección se presenta la solución semianalítica como una alternativa para resolver el problema de la dispersión numérica que se presenta al emplear el algoritmo de *Stehfest (1970)* para invertir la solución del modelo propuesto (*Ramírez y cols., 1988*) en el espacio de Laplace.

Las Ecs. 3-29 a 3-31 se integraron numericamente utilizando el algoritmo de *O'Hara y Smith (1969)* y se compararon con los resultados obtenidos a partir de la inversión numérica de las Ecs. 3-21, 3-22 y 3-27 algoritmo de *Stehfest (1970)*. Observándose que las respuestas obtenidas a partir de las soluciones semianalíticas, son mejores que las reportadas por medio de la inversión numérica. Las Figs. 4-1 y 4-2 muestran los resultados obtenidos con las Ecs. 3-22 y 3-30 para una inyección continua de trazador

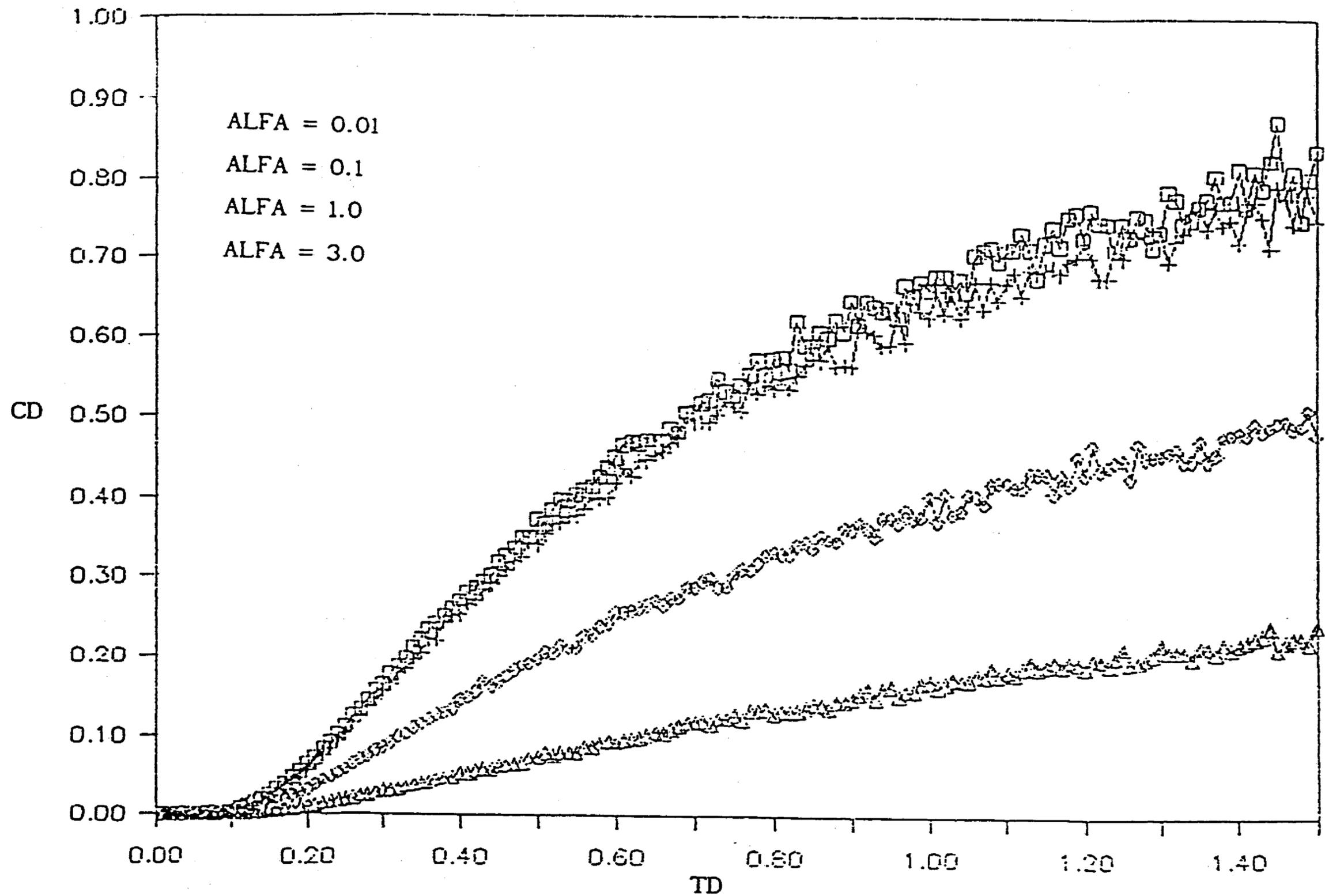


Fig. 4-1 Solución de la Ec. 3-19 obtenida a través de la inversión numérica, empleando el algoritmo de Stehfest, inyección continua.

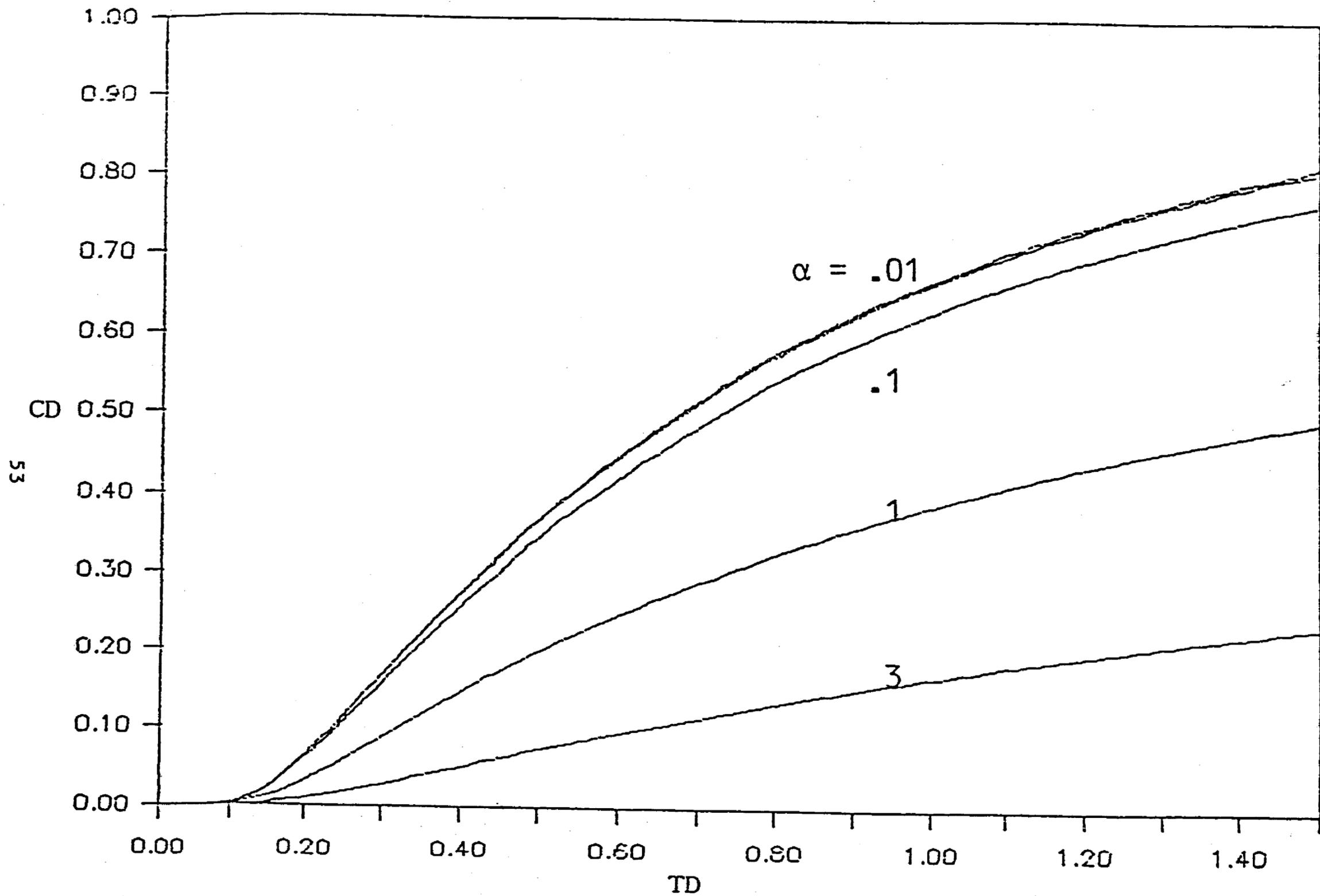


Fig. 4-2 Solución semianalítica, Ec. 3-30. inyección continua.

químico. De estas figuras se puede observar que las distribuciones de concentración de trazador obtenidas a partir de las soluciones semianalíticas son, indudablemente, mejores que las reportadas por medio de la inversión numérica.

Otro paso que se tomó con el fin de validar el método de la solución integral, consistió en obtener la solución integral límite para el caso de inyección continua de trazador a partir de la Ec. 3-24. Siguiendo un procedimiento análogo al presentado en el Apéndice A, se obtiene la solución semianalítica para el caso en que no exista transferencia de masa a la matriz, $\alpha = 0$:

$$C_{D1}(x_D, t_D) = \frac{2x_D}{\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{x_D P_{e1}}{2}\right) \int_0^{\infty} \exp\left\{-x_D^2 \tau^2 - \left(\frac{P_{e1}^2}{16\tau}\right)^2\right\} H\left(t_D - \frac{P_{e1}}{4\tau^2}\right) d\tau \quad (4-1)$$

Esta ecuación fue integrada numéricamente empleando el algoritmo de *O'Hara* y se comparó con los resultados obtenidos a partir de la solución analítica límite para sistemas homogéneos expresada por la Ec. 3-25, encontrándose una comparación excelente, ver Tabla 4-1. La Tabla 4-1 muestra los resultados de esta comparación para un valor del número de Peclet de $P_{e2} = 2$, reportándose una diferencia máxima en los resultados de 0.00015%.

Se efectuaron para los casos de inyección finita y pico validaciones similares de la solución integrales, encontrándose nuevamente buenas concordancias.

4.2 Modelo para flujo radial en un yacimiento estratificado

La solución general del modelo propuesto para flujo radial en un yacimiento estratificado, expresada por la Ec. 3-64, es posible simplificarla para ciertos casos particulares. Se puede demostrar, que la solución del modelo propuesto puede simplificarse de tal forma

que represente el problema de flujo trazadores estudiado anteriormente por diversos autores (Moench y Ogata, 1981; Hsieh, 1986; Chen 1985 y 1986). Los casos especiales de la solución del modelo propuesto corresponden a los de un medio homogéneo y de un yacimiento fracturado.

Tabla 4-1 Comparación de la solución analítica límite para sistemas homogéneos (Ec. 3-25), y la integración numérica de la solución límite (Ec. 4-1).

	$C_{D\text{ lim. anal.}}$	$C_{D\text{ lim. int}}$
t_D	(Ec. 3-25)	(Ec. 4-1)
0.10	0.004077	0.004076
0.20	0.063753	0.063753
0.30	0.165726	0.165726
0.40	0.270613	0.270613
0.50	0.364975	0.364975
0.60	0.446383	0.446383
0.70	0.515738	0.515738
0.80	0.574723	0.574723
0.90	0.625022	0.625023
1.00	0.668101	0.668102

El caso particular correspondiente a un medio homogéneo, se puede obtener excluyendo el efecto del segundo medio en la definición de ξ_{rh} , dada por la Ec. 3-57, es decir, considerando que la porosidad o el coeficiente de difusión de la región estancada son muy pequeños, de tal manera que el tercer término de esa ecuación sea aproximadamente cero. Bajo estas condiciones, sólo estaría actuando un sólo medio, o sea el sistema de fracturas. Con base en lo anterior, la Ec. 3-57 se reduce a la expresión siguiente:

$$\xi_{rh} = s + \gamma \quad (4-2)$$

Sustituyendo la Ec. 4-2 en la Ec. 3-56, se obtiene la ecuación diferencial que gobierna el flujo de un trazador radioactivo o químico en un medio homogéneo, siendo $\gamma = 0$. en el caso de un trazador químico. Bajo estas condiciones, la ecuación diferencial del modelo propuesto expresada por la Ec. 3-56 con la Ec. 4-1, para un trazador

químico, es equivalente a la Ec. 2-12 reportada por *Moench y Ogata (1981)* así como a la solución reportada por *Hsieh (1986)*. Es importante hacer notar que a pesar de que la ecuación diferencial que describe el problema de flujo de trazadores de los artículos antes mencionados y la correspondiente a un caso particular del modelo propuesto en este trabajo es la misma, los métodos empleados en su solución varían entre sí. *Moench y Ogata* invierten numéricamente su solución por medio del algoritmo de *Stehfest* y la solución presentada por *Hsieh* es del tipo integral, en tanto que la solución en el espacio de Laplace del modelo propuesto expresada en términos de las funciones de Airy es invertida numéricamente empleando el algoritmo de *Crump*. Se compararon los resultados obtenidos a través de las soluciones anteriormente mencionadas y se observó que la solución semianalítica presentada por *Hsieh* reporta una aproximación excelente con respecto a la solución numérica propuesta por *Hoopes y Harleman (1965)*, en tanto que la solución reportada por *Moench y Ogata* presenta sólo una buena aproximación ya que conforme el tiempo adimensional aumenta, se tiene una diferencia mayor en los resultados con respecto a la solución numérica antes mencionada y adicionalmente se presentan algunos problemas de dispersión numérica.

La Tabla 4-2 muestra la comparación de los resultados presentados por *Hsieh* y los de este estudio, para tiempos adimensionales, t_D 's iguales a 50 y 100, $r_{D0} = 10$ y diferentes radios adimensionales, r_D . Se puede observar muy claramente, de la comparación con la solución semianalítica de *Hsieh (1986)*, que la aproximación de los resultados del modelo propuesto en su versión simplificada al caso homogéneo considerando un trazador químico, es muy buena.

En cuanto al caso particular de la solución correspondiente a medios naturalmente fracturados, es posible obtener una solución simplificada para el caso en que la región estancada se comporte como si fuera infinita en la dirección z , para los tiempos de interés. Lo anterior implica que los efectos de la frontera externa de la región estancada no influyen en el flujo del trazador, esto se cumple cuando $s \rightarrow \infty$, o sea para t_D pequeños, cuando $RD_{D2} \rightarrow 0$ o bien cuando $E_D \gg 0$, de tal forma que la tangente hiperbólica

de la Ec. 3-57 es aproximadamente igual a uno. Bajo estas condiciones, el problema a resolver sería equivalente al que reporta *Chen (1985 y 1986)*, para trazadores químicos y radioactivos, respectivamente. Es importante hacer notar, que la ecuación diferencial del modelo propuesto, simplificado a un bloque de matriz semiinfinito en dirección z , no es igual a la propuesta por *Chen*. Esto se debe a que si bien las conceptualizaciones físicas del problema son equivalentes entre sí, las suposiciones y consideraciones básicas son diferentes para cada uno de estos modelos.

Tabla 4-2 Comparación de los resultados de *Hsieh (1986)*, G , y los de este estudio, C_D .

$t_D = 50$			$t_D = 100$		
r_D	G	C_D	r_D	G	C_D
11.0	0.964	0.96412	11.0	0.993	0.99301
12.0	0.892	0.89321	13.0	0.949	0.94875
13.0	0.775	0.77523	14.0	0.900	0.90010
14.0	0.617	0.61714	16.0	0.724	0.72402
15.0	0.439	0.43925	18.0	0.463	0.46298
16.0	0.273	0.27294	20.0	0.213	0.21295
17.0	0.145	0.14493	22.0	0.065	0.06501
18.0	0.645	0.64501	23.0	0.030	0.03005
19.0	0.023	0.02287	25.0	0.004	0.00397

La solución del modelo propuesto, simplificada para el caso de inyección continua de un trazador químico y radioactivo con una región estancada semiinfinita, corresponderá a la solución presentada por *Chen (1985 y 1986)*. Es decir, la solución general expresada por la Ec. 3-64, se reduce a los casos particulares anteriormente mencionados con las siguientes definiciones de ξ_{rh} , para cada caso:

Trazador Químico,

$$\xi_{rh} = s + \frac{D_{D2}\phi_2}{z_{D0}} \sqrt{\frac{s}{RD_{D2}}} \quad (4-3)$$

Trazador Radioactivo,

$$\xi_{rh} = s + \gamma + \frac{D_{D2}\phi_2}{z_{D0}} \sqrt{\frac{s + \gamma}{RD_{D2}}} \quad (4-4)$$

Las Figs. 4.3 y 4.4 presentan una comparación de los resultados obtenidos por *Chen* (1985 y 1986) empleando sus soluciones aproximadas, con los reportados a través de las soluciones particulares del modelo propuesto empleando el algoritmo de *Crump* (1976), para la inversión numérica de la transformada de Laplace. Se puede observar que ambas soluciones presentan prácticamente los mismos resultados. De aquí se puede concluir que a pesar de que las ecuaciones diferenciales son distintas, adicionalmente a que, los métodos de solución empleados en cada caso son diferentes, los resultados reportados son enteramente similares. Con base en lo anterior, se puede afirmar que las soluciones presentadas por *Chen* corresponden a dos casos particulares del modelo propuesto en este trabajo para un yacimiento estratificado o con fracturas horizontales.

4.3 Modelo para flujo radial en un yacimiento fracturado (geometría matriz-fractura cúbica)

En este caso, como se mencionó anteriormente, también es posible simplificar la solución general de este modelo, expresada por la Ec. 3-111, a ciertos casos particulares y con ello predecir el comportamiento del trazador en condiciones correspondientes a un medio homogéneo y al de un medio fracturado.

Considérese el caso en que tanto la porosidad como el coeficiente de difusión de los bloques de matriz son muy pequeños, de tal manera que no se transfiere masa a la región estancada y por consiguiente sólo actúa un sólo medio, el sistema de fracturas. En este caso, $\epsilon \approx 0$ y el tercer término de la Ec. 3-107, que define ξ_{rc} , puede considerarse despreciable. La Ec. 3-107 se reduce así a la Ec. 4-2 y por consiguiente la solución del modelo es la misma que la del modelo para flujo radial en un yacimiento estratificado, Ec. 3-56. Bajo estas condiciones, el comportamiento del trazador en un medio tendiendo a homogéneo, partiendo de una geometría matriz-fractura cúbica, es igual al comportamiento del trazador para el caso homogéneo, partiendo de un yacimiento estratificado. Por lo anterior, lo discutido en la Sección 4-2 para el caso particular en que el segundo medio o

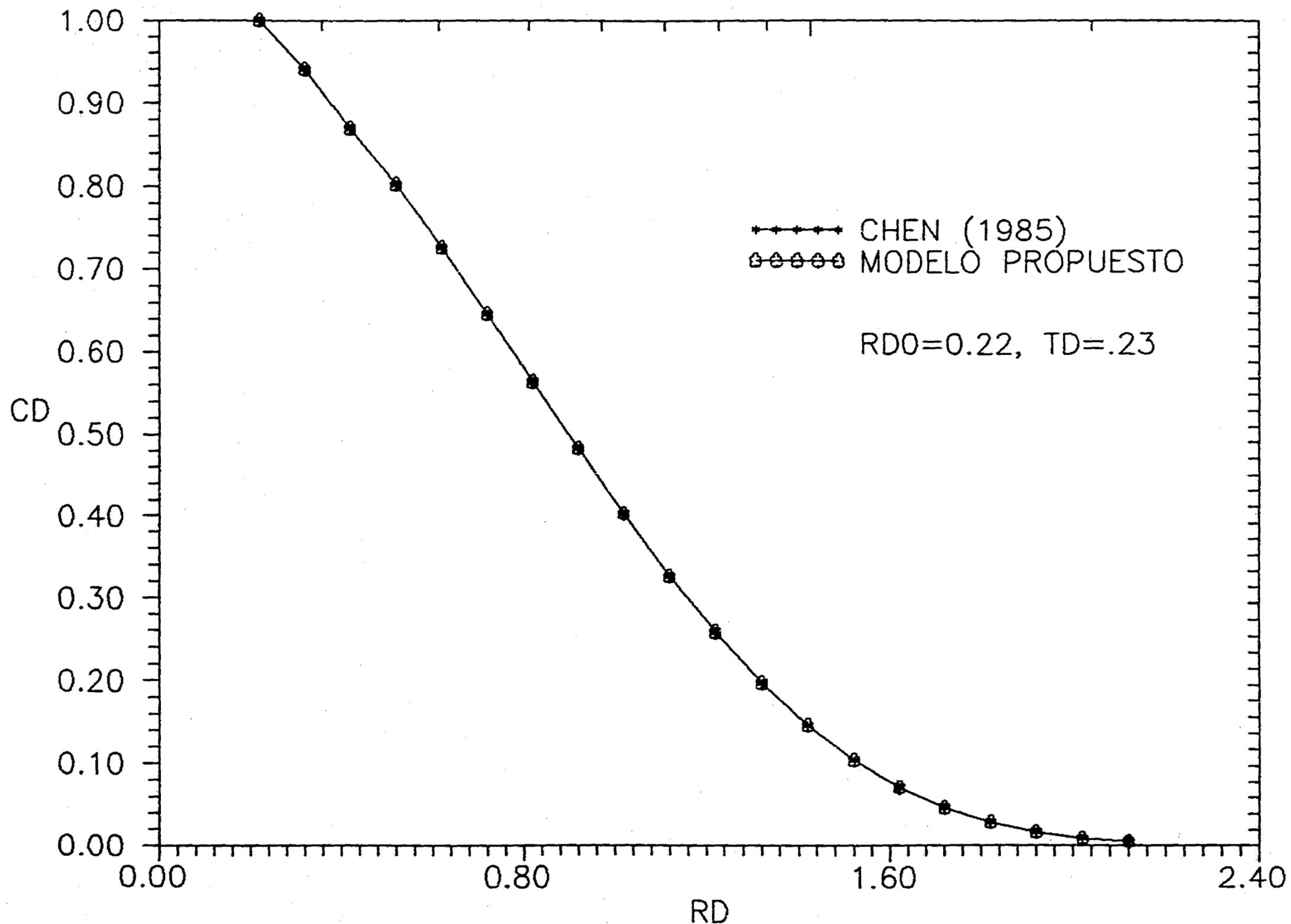


Fig. 4-3 Comparación de las soluciones de Chen (1985) y de este estudio para inyección continua de un trazador químico.

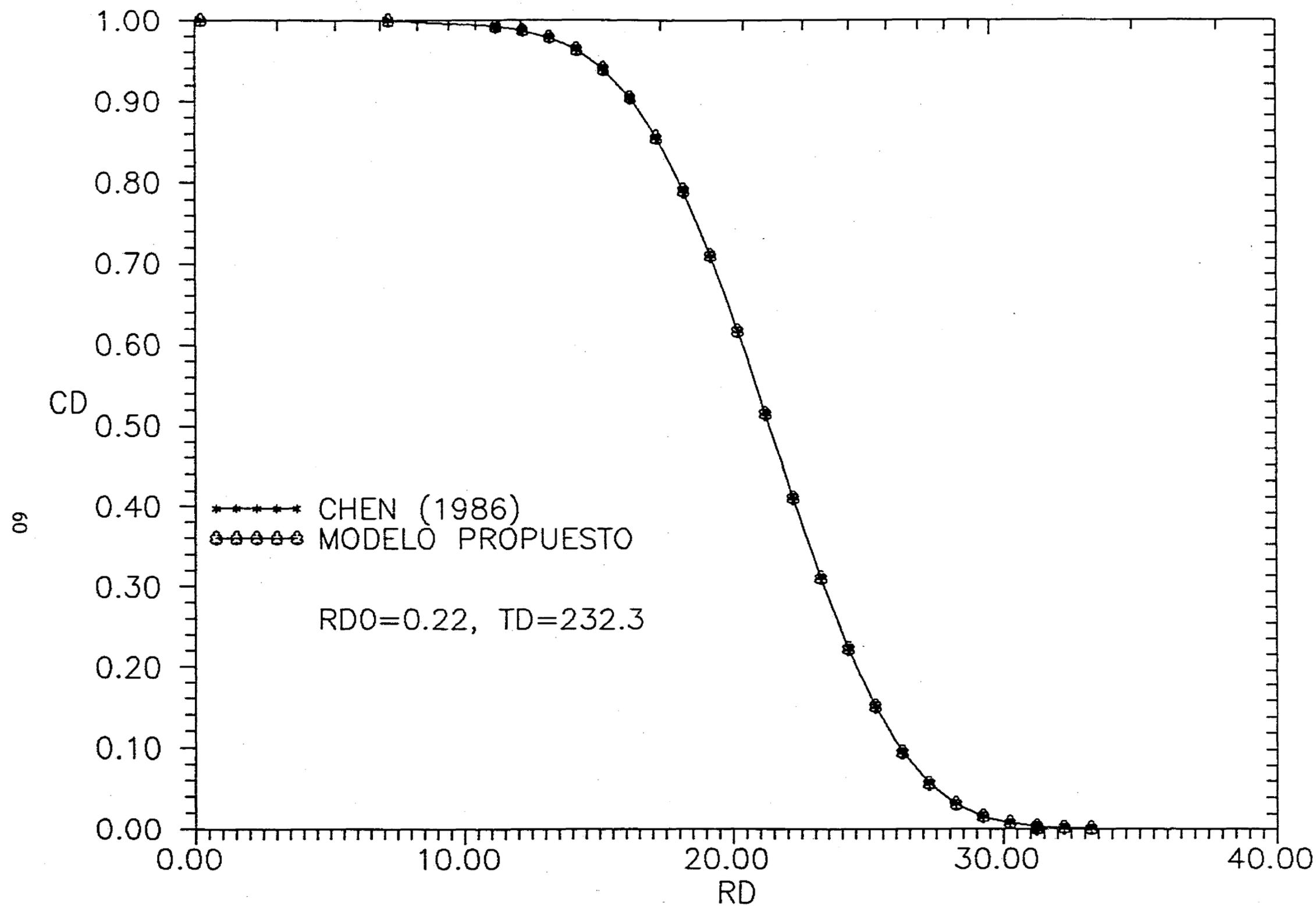


Fig. 4-4 Comparación de las soluciones de Chen (1986) y de este estudio para inyección continua de un trazador químico.

la región estancada no actua, es también aplicable a este modelo. Con base en lo anterior se puede concluir que los dos modelos para flujo radial propuestos en esta tesis, reportan los mismos resultados en el caso en que el trazador sólo viaja a través del sistema de fracturas, ya que no existe el término de interacción matriz-fracturas.

Por otra parte, en el caso de tener el término de interacción matriz-fracturas, es decir, que existe una transferencia de masa de trazador hacia los bloques de matriz, se puede establecer una equivalencia con el modelo propuesto en la Sección 3-2, en la forma siguiente. Las ecuaciones diferenciales en el espacio de Laplace que gobiernan el flujo de trazador en las fracturas en un yacimiento estratificado y en un yacimiento con geometría matriz-fractura cúbica están dadas por las Ecs. 3-56 y 3-106, respectivamente. Se puede observar de estas ecuaciones que la diferencia entre ellas está en la definición de ξ_r , en el primer caso expresada por medio de la Ec. 3-57 y en el segundo caso expresada por la Ec. 3-107. El tercer término de estas ecuaciones corresponde a la interacción matriz-fractura, los cuales son distintos por tratarse de geometrías diferentes, sin embargo para el caso particular en que el espesor de yacimiento, H , sea igual al tamaño de bloques, d , es posible establecer una equivalencia entre los términos de interacción, es decir entre las Ecs. 3-57 y 3-107. Lo anterior es con el fin de lograr una analogía entre los modelos para flujo radial propuestos en este trabajo y con ello validar el modelo para flujo radial considerando una geometría matriz-fractura cúbica.

Para simplificar el análisis de ambos modelos, en esta sección se considerará el caso de un trazador químico, es decir $\gamma = 0$. Para este caso las Ecs. 3-57 y 3-107 se reducen a las siguientes expresiones:

$$\xi_{rh} = s + \frac{D_{D2}\phi_2}{z_{D0}} \sqrt{\beta_{rh}} \tanh \left\{ 4\sqrt{\beta_{rh}} \left(\frac{E_D}{2} - z_{D0} \right) \right\} \quad (4-5)$$

$$\xi_{rc} = s + \varepsilon \left\{ \beta_{rc} \coth(\beta_{rc} z_{D0}) - \frac{1}{z_{D0}} \right\} \quad (4-6)$$

donde,

$$\varepsilon = \frac{6}{d_D} \frac{\phi_2}{\phi_1} D_{D2} \quad (4-7)$$

De acuerdo al comportamiento de las funciones hiperbólicas, la $\tanh(x)$ y la $\coth(x)$ que intervienen en las Ecs. 4-5 y 4-6 convergen al valor de la unidad cuando sus argumentos corresponden a un valor de $x \geq 5$. Con base en lo anterior, la influencia de estas funciones en las ecuaciones antes mencionadas está condicionada a que sus argumentos respectivos sean mayores al valor de 5, lo que da origen a las siguientes desigualdades:

$$\left\{ 4\sqrt{\beta_{rh}} \left(\frac{E_D}{2} - z_{D0} \right) \right\} \geq 5 \quad (4-8)$$

$$(\beta_{rc} z_{D0}) \geq 5 \quad (4-9)$$

Si las Ecs. 4-8 y 4-9 se satisfacen, las Ecs. 4-5 y 4-6 se reducen a las siguientes:

$$\xi_{rh} = s + \frac{D_{D2}\phi_2}{z_{D0}} \sqrt{\beta_{rh}} \quad (4-10)$$

$$\xi_{rc} = s + \varepsilon \left\{ \beta_{rc} - \frac{1}{z_{D0}} \right\} \quad (4-11)$$

Las soluciones de las Ecs. 3-56 y 3-106 fueron evaluadas mediante un programa de computo, utilizando el algoritmo de *Crump (1970)* como subrutina de inversión, y se analizaron las distintas combinaciones de los valores prácticos de las variables, que intervienen en el proceso de estudio. En todos los casos se presentó la misma solución para las Ecs. 4-5 y 4-10, y para las Ecs. 4-6 y 4-11, lo que implica que para tiempos prácticos y para los valores de los parámetros considerados en este trabajo, las funciones

hiperbólicas de las Ecs. 4-5 y 4-6 no tienen influencia significativa en el comportamiento de las soluciones para el problema de flujo radial de trazadores en yacimientos naturalmente fracturados, por lo que las definiciones de ξ' s pueden ser expresadas por las Ecs. 4-10 y 4-11.

Con base en lo anterior, la equivalencia entre los dos modelos para flujo radial presentados en este trabajo se establece a través de la comparación de las Ecs. 4-10 y 4-11 expresadas en términos de las variables originales que intervienen en cada uno de los modelos. Sustituyendo las Ecs. 3-34, 3-40, 3-44 y 3-54 en la Ec. 4-10, y las Ecs. 3-71, 3-72 (considerando que $\frac{d}{\alpha} \ll 1$), 3-87, 3-99 y 3-107 en la Ec. 4-11, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\xi_{rh} = s + \phi_2 \alpha \sqrt{\frac{D_2 2\pi H \phi_1 s}{(w - \delta)^2 q}} \quad (4-12)$$

$$\xi_{rc} = s + 6\phi_2 \alpha \left\{ \sqrt{\frac{2\pi D_2 s H}{q \phi_1 d^2}} - \frac{4\pi D_2 \alpha H}{q d d} \right\} \quad (4-13)$$

Considerando el caso particular en que el trazador viaje a través de una sola fractura, el área transversal al flujo es igual en ambos modelos y por consecuencia $H\phi_1 = 2(w - \delta)$ y $H = d$. Bajo estas condiciones las Ecs. 4-13 y 4-14 se pueden escribir como sigue:

$$\xi_{rh} = s + 2\phi_2 \alpha \sqrt{\frac{\pi D_2 s}{(w - \delta) q}} \quad (4-14)$$

$$\xi_{rc} = s + 6\phi_2 \alpha \left\{ \sqrt{\frac{D_2 \pi s}{(w - \delta) q}} - \frac{4\pi D_2 \alpha}{q H} \right\} \quad (4-15)$$

Se puede observar que las Ecs. 4-14 y 4-15 son muy similares entre sí, observándose que la superficie de contacto matriz-fractura para el caso particular de considerar un sólo bloque, es tres veces la superficie de contacto correspondiente al problema de un yacimiento estratificado, por lo que la concentración de trazador en el caso de considerar geometría cúbica es más baja que la correspondiente al considerar estratos.

Por otra parte, en cuanto al tercer término de la Ec. 4-15, se puede decir que éste es pequeño en comparación con el término que le antecede, debido a los valores de los parámetros que intervienen en los mismos. Con el fin de analizar la verdadera influencia del grupo $\frac{4\pi D_2 \alpha}{qH}$ de la Ec. 4-15, se evaluaron por separado cada uno de los términos con una amplia gamma de valores de los parámetros que intervienen explícitamente, así como del tiempo adimensional. De lo anterior se concluyó que el tercer término de la Ec. 4-15 es muy pequeño con respecto al segundo, siendo aproximadamente del orden de 10^{-4} para el caso más crítico, es decir, para tiempos adimensionales muy grandes y espesores de yacimiento muy pequeños. Por lo que el tercer término de la Ec. 4-15 puede considerarse despreciable para fines prácticos. Sin embargo, para radios adimensionales muy grandes este tercer término tiene una pequeña influencia sobre la respuesta del trazador, como se analizará en la última parte de la siguiente sección.

Con base en lo anterior, es posible concluir que el modelo para flujo radial considerando geometría matriz-fractura cúbica, tiene como caso particular el modelo para flujo radial para un yacimiento estratificado presentado en la Sección 3-2 de este trabajo.

CAPÍTULO 5:

DISCUSION DE RESULTADOS

En este capítulo se presentan los resultados de este estudio. En la primera sección se presenta una breve descripción del método que se utilizó para analizar los resultados. Las tres secciones siguientes discuten los resultados para cada uno de los modelos por separado, en la última de estas tres secciones se incluye una comparación de los tres modelos con propósitos cualitativos o semicuantitativos de determinar las características del medio poroso naturalmente fracturado. La penúltima sección presenta un análisis de sensibilidad de los principales parámetros que intervienen en la solución del modelo que considera una geometría matriz-fractura cúbica, con datos de campo. Las últimas dos secciones de este capítulo discuten el problema inverso, es decir, cuando se tienen datos obtenidos de una prueba de trazadores a la cual se debe aplicar el modelo matemático y del ajuste resultante obtener algunos de los parámetros físicos del yacimiento de interés.

5.1 Método de Análisis

Los modelos matemáticos presentados en el Capítulo 3 involucran varios grupos adimensionales, los cuales gobiernan el flujo de trazadores en yacimientos naturalmente fracturados. Estos grupos adimensionales están definidos a través de la combinación de algunas de las variables físicas del problema en cuestión. Algunas de ellas dependen de la geometría del sistema, otras de las características intrínsecas del yacimiento y otras del fluido inyectado. Dentro de estas variables físicas se pueden listar las siguientes:

1. Distancia adimensional, x_D o r_D
2. Espesor del yacimiento, H
3. Ancho de fractura, w
4. Porosidad de la matriz, ϕ_2

5. Coeficiente de difusión de la matriz, D_2
6. Constante de adsorción o de equilibrio, k_d
7. Constante de decaimiento radioactivo, λ
8. Gasto de inyección, q

El número de combinaciones posibles de estas variables, de acuerdo a la definición de los parámetros adimensionales, es infinito; en este capítulo sólo se muestran algunas de ellas. Sin embargo, se estudió un amplio rango de las variables involucradas, en un esfuerzo para lograr que los resultados sean de aplicabilidad lo más general posible.

Se utilizaron dos métodos para estudiar el efecto de los parámetros sobre el comportamiento del trazador: 1) Se cambió un sólo parámetro en tanto los otros permanecieron constantes, de tal forma de poder estudiar su efecto sobre la respuesta del trazador; 2) Se usaron varias combinaciones de los parámetros para determinar la forma en que afectan el flujo del trazador.

Para lograr que los resultados cubran un mayor número de las combinaciones posibles de los valores de las variables, y que su presentación sea lo más sencilla posible, las ecuaciones fundamentales de flujo de los modelos matemáticos fueron transformadas a su forma adimensional previamente a obtener su solución. Esto simplifica las expresiones para las soluciones y también proporciona una mejor idea de la forma en que los diferentes parámetros influyen en el problema de flujo de trazadores.

Los valores de los parámetros utilizados en este estudio se pueden dividir en dos grupos: 1) Los que fueron utilizados por *Moench y Ogata (1981)*, *Tang y cols. (1981)*, *Hsieh (1986)* y *Chen (1986)* y 2) Los que corresponderían al rango de valores que se pueden presentar en los yacimientos naturalmente fracturados (*Pickens y Grisak, 1981*, *Koenraad y Baker, 1981* y *Hensel, 1989*). Estos valores se presentan con detalle en el Apéndice D. Para obtener los resultados de las secciones siguientes se utilizó el primer grupo de valores. En la sección correspondiente a la discusión de resultados del modelo matemático radial con

geometría matriz-fractura cúbica se utilizaron los dos grupos de datos antes mencionados.

5.2 Modelo para Flujo lineal

En esta sección se presenta una discusión de la respuesta del trazador para los casos de inyección continua, bache y pico, dadas para el primero y último caso por las Ecs. 3-29 y 3-31, respectivamente. Una parte importante de la discusión estará basada en el caso de inyección tipo bache, que es la más frecuentemente usada en aplicaciones de campo.

Es importante tener presente que la solución integral de este estudio, usada para describir el flujo de trazadores en yacimientos naturalmente fracturados, se expresa en términos de sólo dos parámetros básicos: el parámetro α y el número de Peclet para la región móvil, o sea el sistema de fracturas, P_{e1} . Lo anterior da como resultado que el estudio del efecto de cada uno de estos parámetros sobre la respuesta de trazador sea más sencillo.

La Fig. 5-1 muestra el comportamiento del trazador químico ($\lambda = 0 \Rightarrow \gamma = 0$) para diferentes distancias entre los pozos inyector y productor, para valores de $P_{e1} = 1$ y $\alpha = .01$. Para propósitos prácticos, la concentración de trazador es importante para una distancia $x_D = 1$, lo cual corresponde al pozo de observación, y consecuentemente los resultados de este estudio corresponderán a esta distancia.

Se ha discutido previamente (*Ramírez, 1988*) que la influencia de la región inmóvil o estancada sobre el flujo de trazador en el sistema de fracturas depende exclusivamente del parámetro α , debido a que su definición dada por la Ec. 3-23 involucra las variables correspondientes al segundo medio, la porosidad ϕ_2 y el coeficiente de difusión D_2 de la matriz. Con base en lo anterior, para valores muy pequeños de α ($\alpha \rightarrow 0$), el sistema se comporta como si estuviera constituido sólo por la región móvil.

La Fig. 5-2 muestra la influencia de este parámetro α sobre la concentración de trazador. De esta figura se puede notar que al incrementarse α , la concentración de

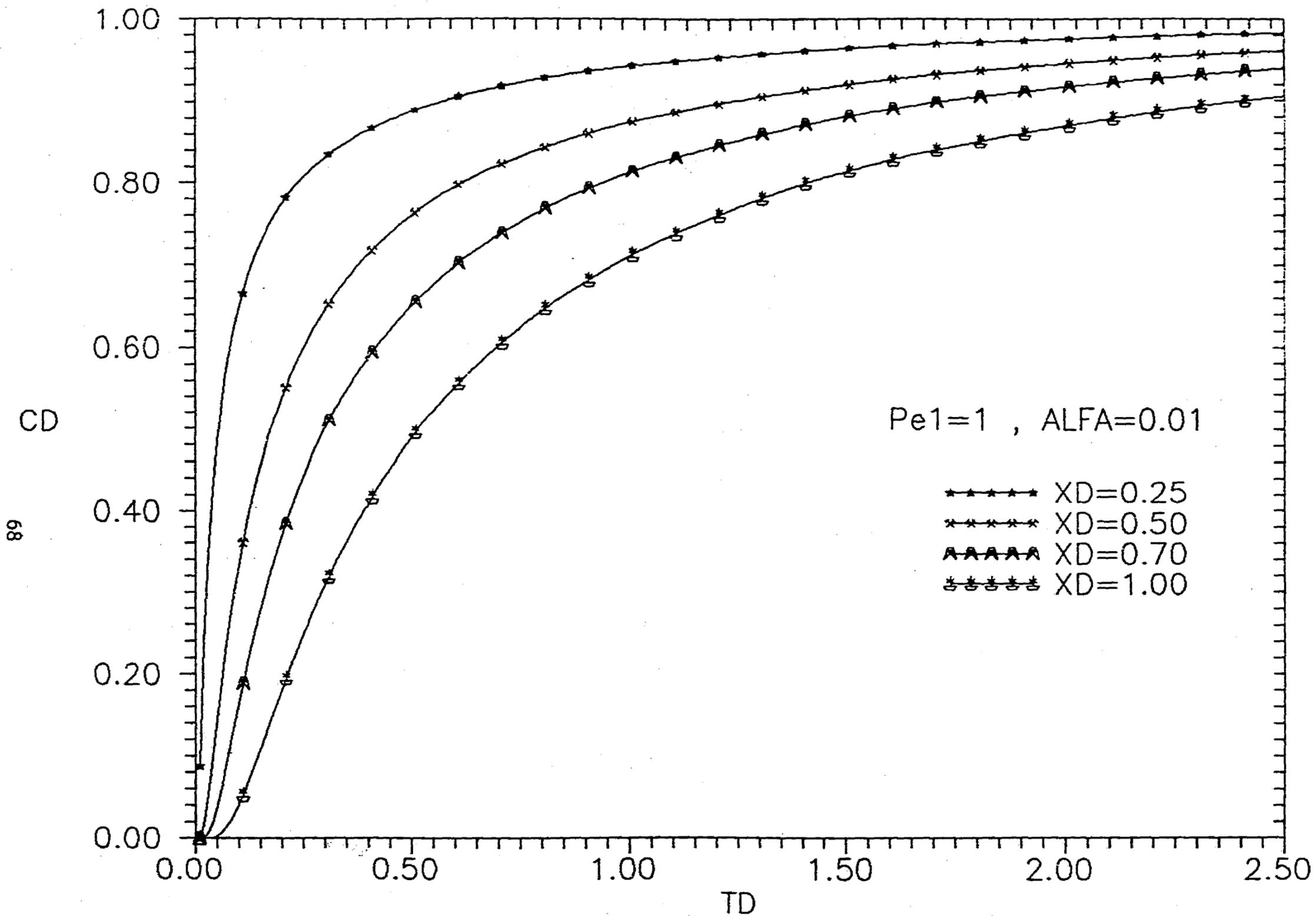


Fig. 5-1 Inyección continua de trazador para diferentes XD

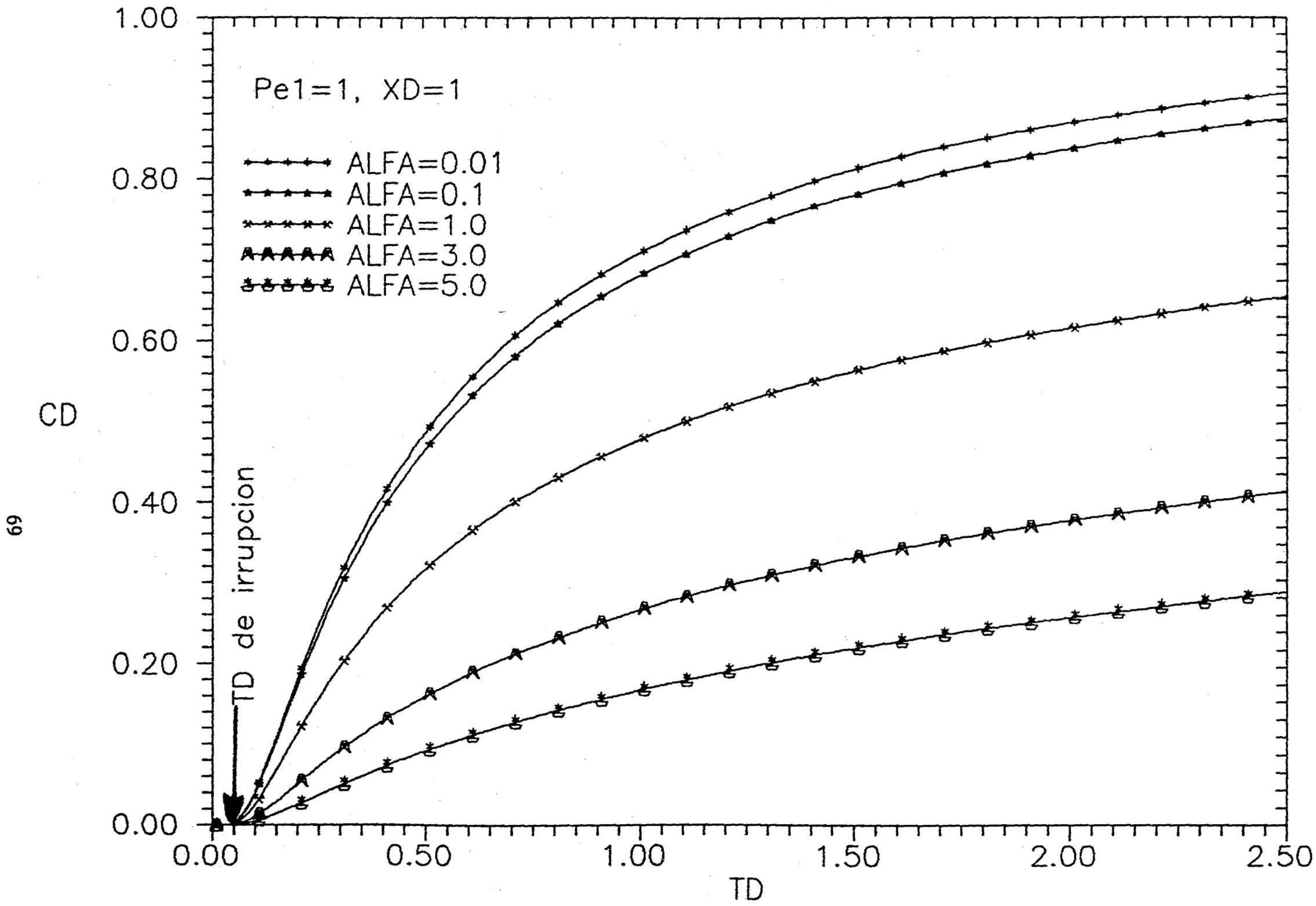


Fig. 5-2 Inyección continua de trazador para distintos alfas.

trazador en $x_D = 1$ decrece y también que el tiempo de irrupción del trazador es esencialmente el mismo para todos los valores de α . Adicionalmente, esta figura indica que para la curva correspondiente a la concentración máxima, $\alpha = .01$, es el límite superior de todas las soluciones y que la respuesta del trazador para los diferentes valores de α tenderá a una concentración máxima por abajo de $C_{D1} = 1$. Por supuesto, esto se debe a la transferencia de trazador a la región inmóvil o estancada y que la máxima concentración se obtiene cuando no existe esta transferencia al segundo medio.

Las Figs. 5-3 y 5-4 ilustran, para el caso de inyección continua, la influencia del número de Peclet de la región móvil sobre la concentración del trazador. Si analizamos la definición de este parámetro (Ec. 3-8) se puede concluir que para propósitos prácticos la variación de P_{e1} se debe a la dispersión en la región móvil representada por D_1 ;

$$D_1 = D_L v_L + D^* \quad (5-1)$$

donde D_L es el coeficiente de dispersión longitudinal o de las fracturas y D^* es el coeficiente de difusión molecular del trazador.

Los valores del coeficiente de difusión molecular del trazador son normalmente mucho más pequeños que los valores de D_L y consecuentemente, el número de Peclet es inversamente proporcional a D_L .

La Fig. 5-3 también indica que el tiempo de irrupción del trazador es una función del número de Peclet de la región móvil o del sistema de fracturas, P_{e1} . Como es de esperarse, si P_{e1} se incrementa se obtienen mayores tiempos de irrupción. Esto puede explicarse a partir de la definición del número de Peclet, Ec. 3-8, ya que para un gasto determinado, el incremento este parámetro es debido a una disminución del coeficiente D_1 y como consecuencia el tiempo de irrupción es mayor. Sin embargo, después del tiempo de irrupción, el incremento de la concentración de trazador es más rápido para los valores mayores de P_{e1} ; esto significa que la pendiente de la respuesta de concentración de

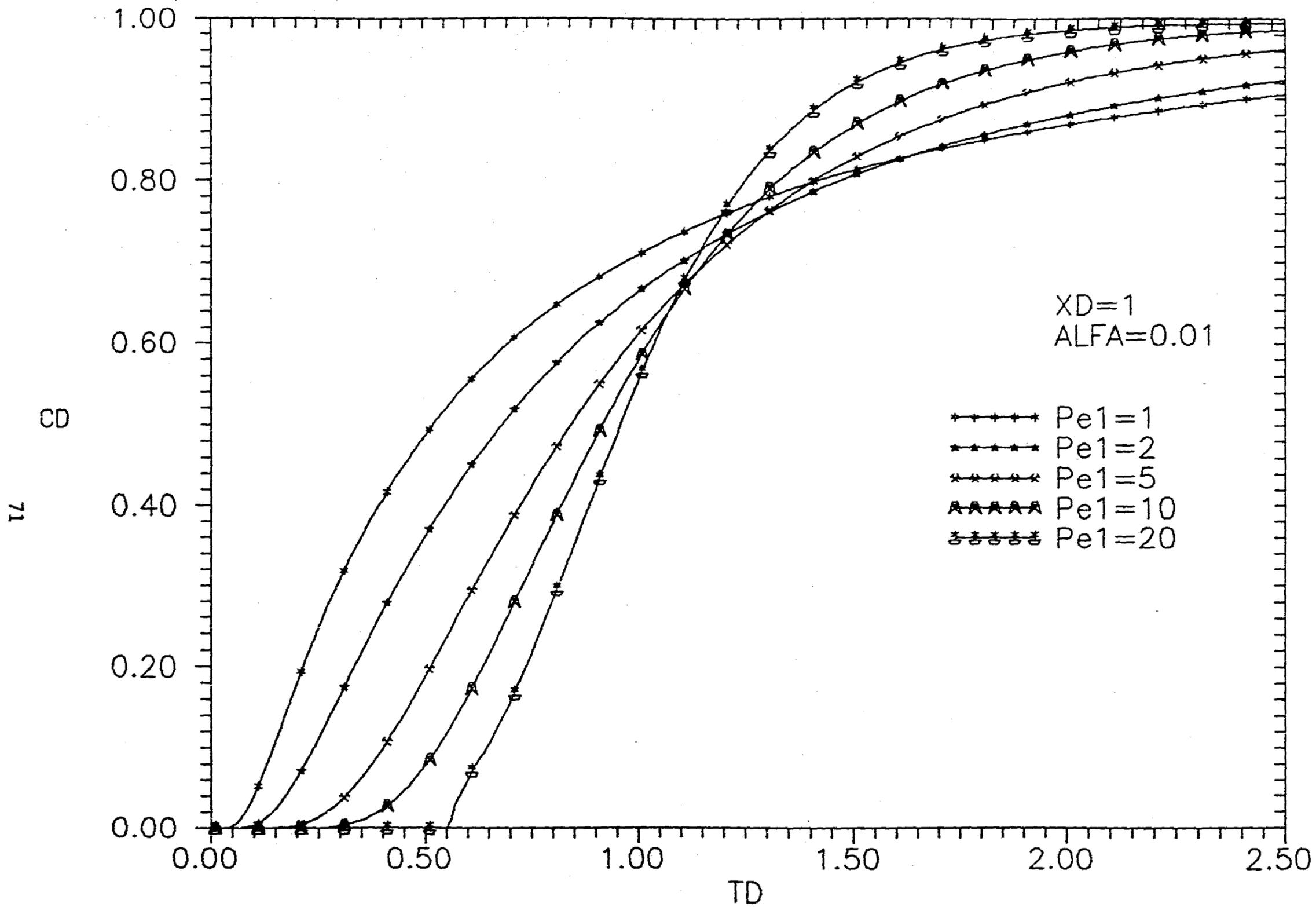


Fig. 5-3 Influencia de el número de Peclet sobre la inyección continua de trazador, para tiempos cortos.

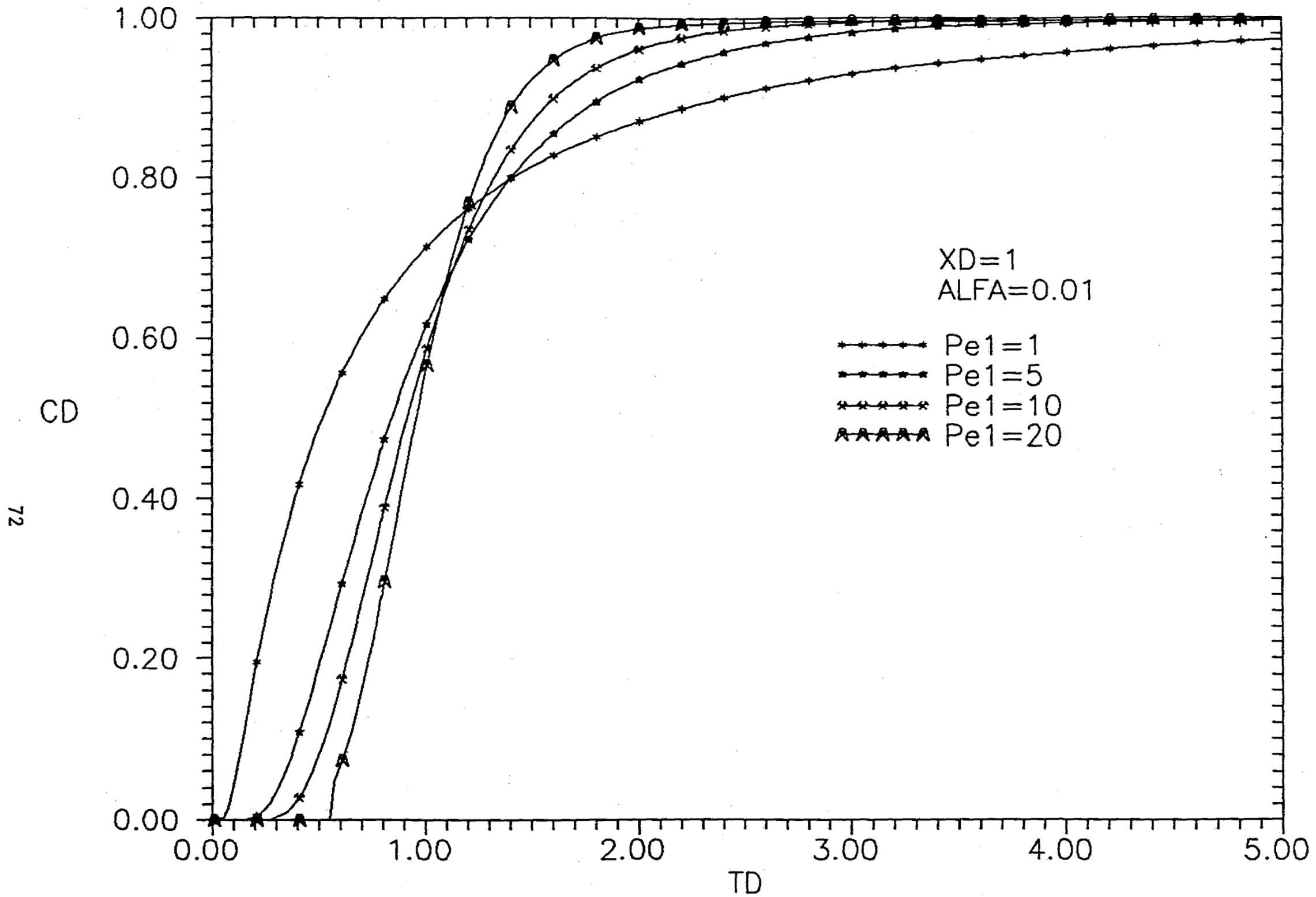


Fig. 5-4 Influencia de el número de Peclet sobre la inyección continua de trazador, para tiempos largos.

trazador se incrementa y como se muestra en la Fig. 5-4, para valores de P_{e1} mayores que 5 la respuesta será similar a la que se obtendría de un desplazamiento tipo pistón imperfecto predicho por la teoría de flujo frontal de Buckley-Leverett para el desplazamiento lineal de flujo de agua en yacimientos de aceite (Craig, 1971).

Resumiendo, de acuerdo a lo discutido previamente se ha concluido que para valores fijos de α , el número de Peclet, P_{e1} , tiene un efecto sobre la respuesta de concentración de trazador, tanto en la forma de la curva como en el tiempo de irrupción del trazador. Para un valor constante de P_{e1} , las respuestas para distintos valores de α muestran curvas de forma similar, siendo la solución para $\alpha \leq 0.01$ el límite superior de todas las soluciones. Estas conclusiones también son válidas para los casos de inyección finita o bache y la tipo pico, que se discutirán más adelante.

Con respecto a la inyección tipo bache o finita, la Fig. 5-5 muestra los resultados para un período de inyección expresado en tiempo adimensional igual a 0.3, $P_{e1} = 1$ y varios valores de α . Puede observarse que el tiempo para alcanzar condiciones de concentración máxima es independiente de α ; lo cual significa que la difusión y adsorción del trazador en la región inmóvil no tiene influencia sobre la concentración máxima que se obtiene en el pozo productor.

La Fig. 5-6 presenta los resultados de la concentración de trazador para el caso de la inyección finita o bache, para $\alpha = 0.01$ y varios valores del parámetro P_{e1} para un período de inyección de 0.3; se puede notar que el tiempo al cual se alcanzan condiciones de concentración máxima en el pozo productor se incrementa al aumentar de P_{e1} .

La Fig. 5-7 ilustra los resultados de la concentración de trazador para el caso de la inyección finita o bache para el mismo valor de α y los mismos números de Peclet iguales a los de la Fig. 5-6, pero para un período de inyección de 0.1; comparando estas dos figuras se puede observar, como es de esperarse, que al disminuir el tiempo de inyección se reduce tanto la concentración máxima como el tiempo al cual se alcanza esta concentración, de

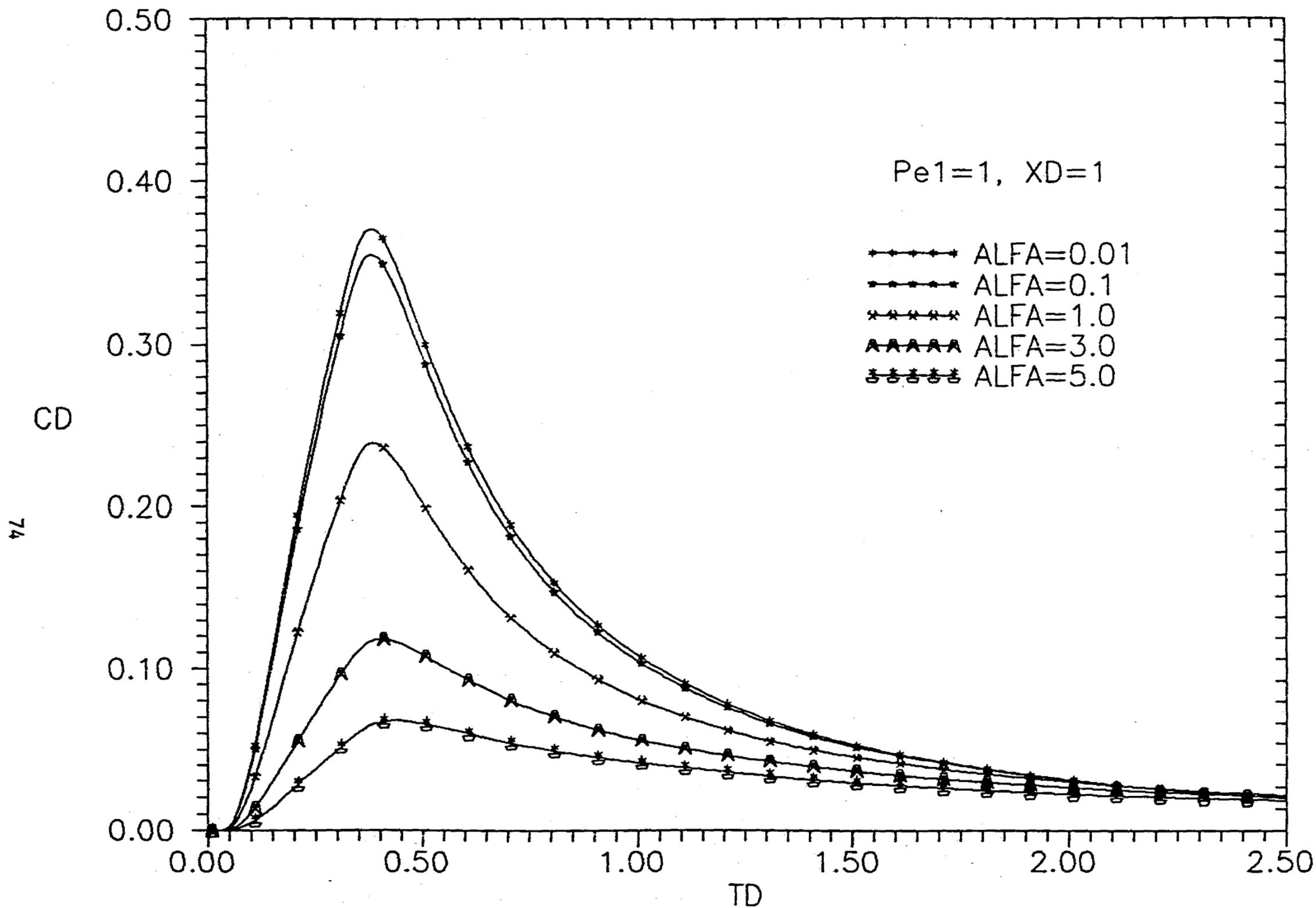


Fig. 5-5 Influencia del parámetro alfa sobre la inyección finita de trazador para un período de inyección TD=0.3

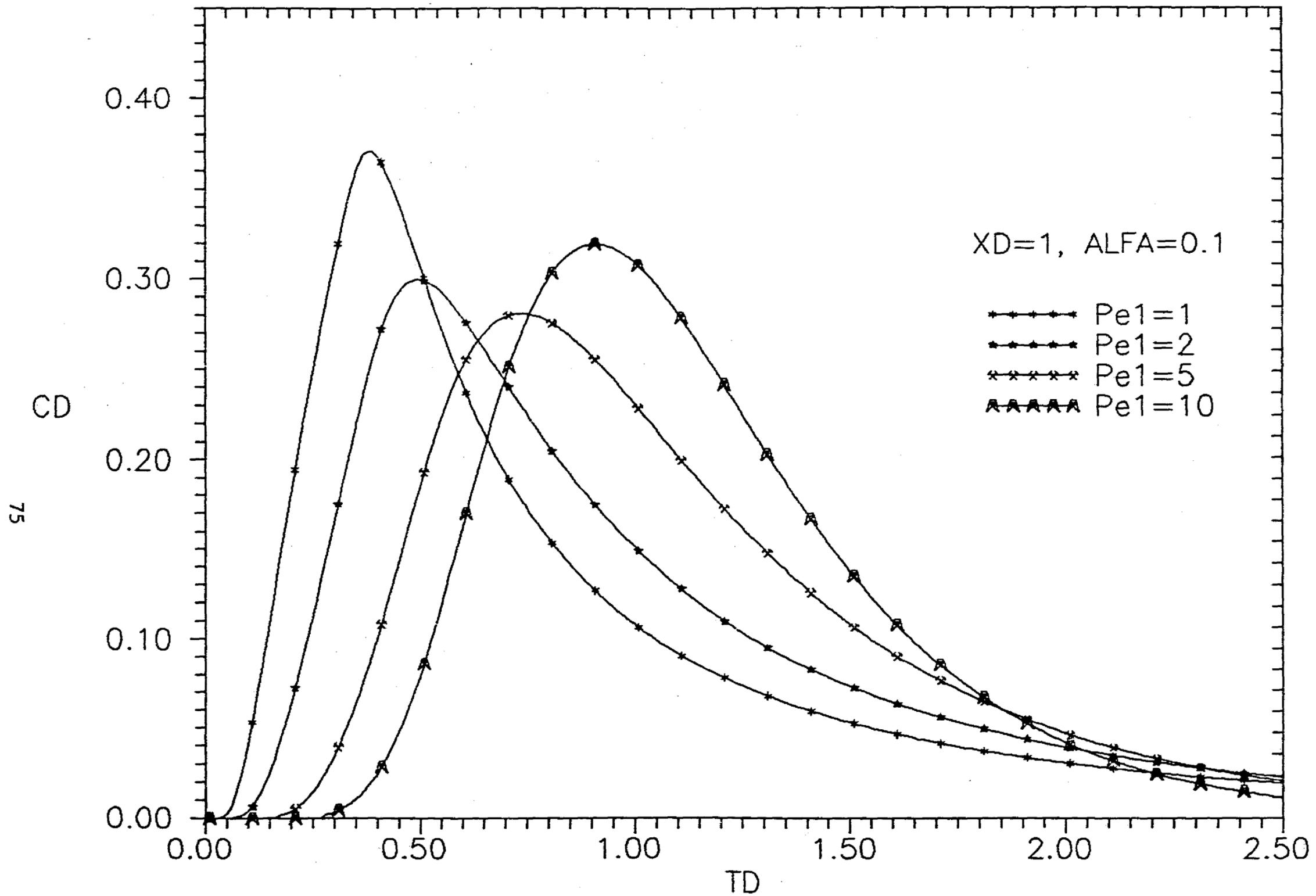


Fig. 5-6 Influencia de el número de Peclet sobre la inyección finita de trazador para un período de inyección TD=0.3

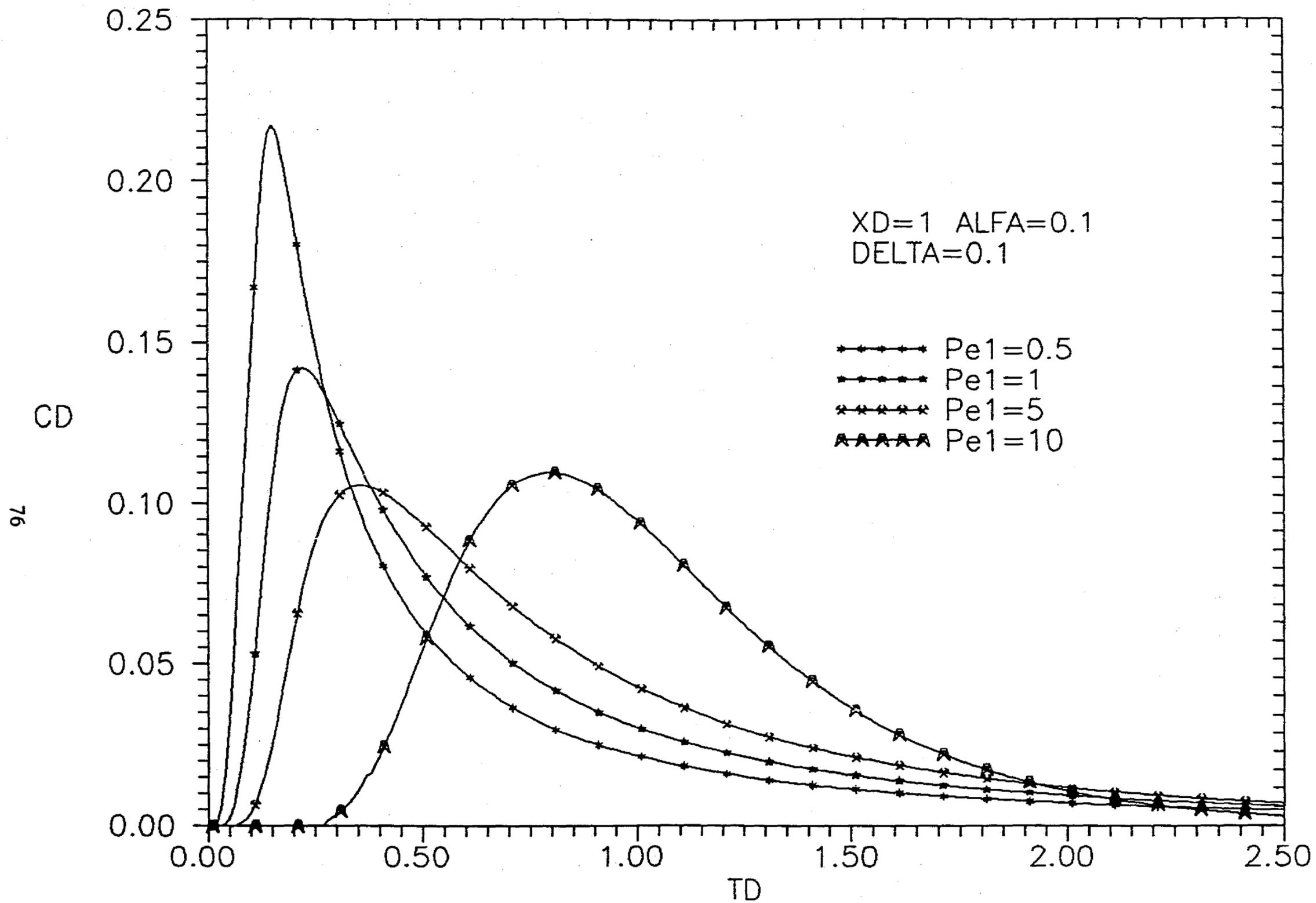


Fig. 5-7 Influencia de el número de Peclet sobre la inyección finita de trazador, para períodos de inyección $TD=0.1$

aquí se puede inferir que la solución finita para tiempos de inyección muy pequeños convergerá a la solución pico para tiempos adimensionales grandes.

Los resultados de concentración de trazador para el caso de inyección finita para valores de $\alpha = 0.01$ y $P_{e1} = 2$ y diferentes períodos de inyección (0.1, 0.3 y 0.5), se ilustran en la Fig. 5-8. Como es de esperarse, se observa de los resultados de esta figura, que conforme el período de inyección se incrementa, la concentración máxima alcanzada también se incrementa y que el tiempo al cual se obtiene esta concentración es mayor que el período de inyección, debido a los efectos de dispersión, que son considerados en el número de Peclet P_{e1} . También se puede observar que el perfil de concentraciones para diferentes períodos de inyección es el mismo para tiempos más pequeños que el tiempo de inyección. Esto implica que para tiempos más pequeños que el período de inyección, la solución continua es aplicable para analizar la respuesta de concentración del trazador. Esto puede verificarse si los resultados de esta figura para un período de inyección de 0.5 son comparados con los de la Fig. 5-3 para $\alpha = 0.01$, encontrándose que ambas respuestas son las mismas para tiempos menores al período de inyección.

Es importante hacer notar que los resultados mostrados en las Figs. 5-1 a 5-8, corresponden a la respuesta de concentración de un trazador químico y que las observaciones referidas a estas figuras también son válidas para el caso de trazadores radioactivos. Con el fin de no presentar resultados repetitivos, tan sólo se presentan tres figuras par el caso de trazadores radioactivos, bajo la premisa de que la influencia, de los dos parámetros previamente analizados, sobre el comportamiento del flujo de trazadores es esencialmente la misma para el caso de trazadores químicos o radioactivos.

En la Fig. 5-9 se puede observar el perfil de concentraciones para el trazador radioactivo Iridio, cuya vida media es de 8.05 días, para el caso de una inyección continua y para los mismos valores de los parámetros x_D , α y P_{e1} empleados en la Fig. 5-2. De la comparación de estas dos figuras es posible concluir que el decremento en la respuesta de concentraciones de la Fig. 5-9 con respecto a la obtenida en la Fig. 5-2, se debe

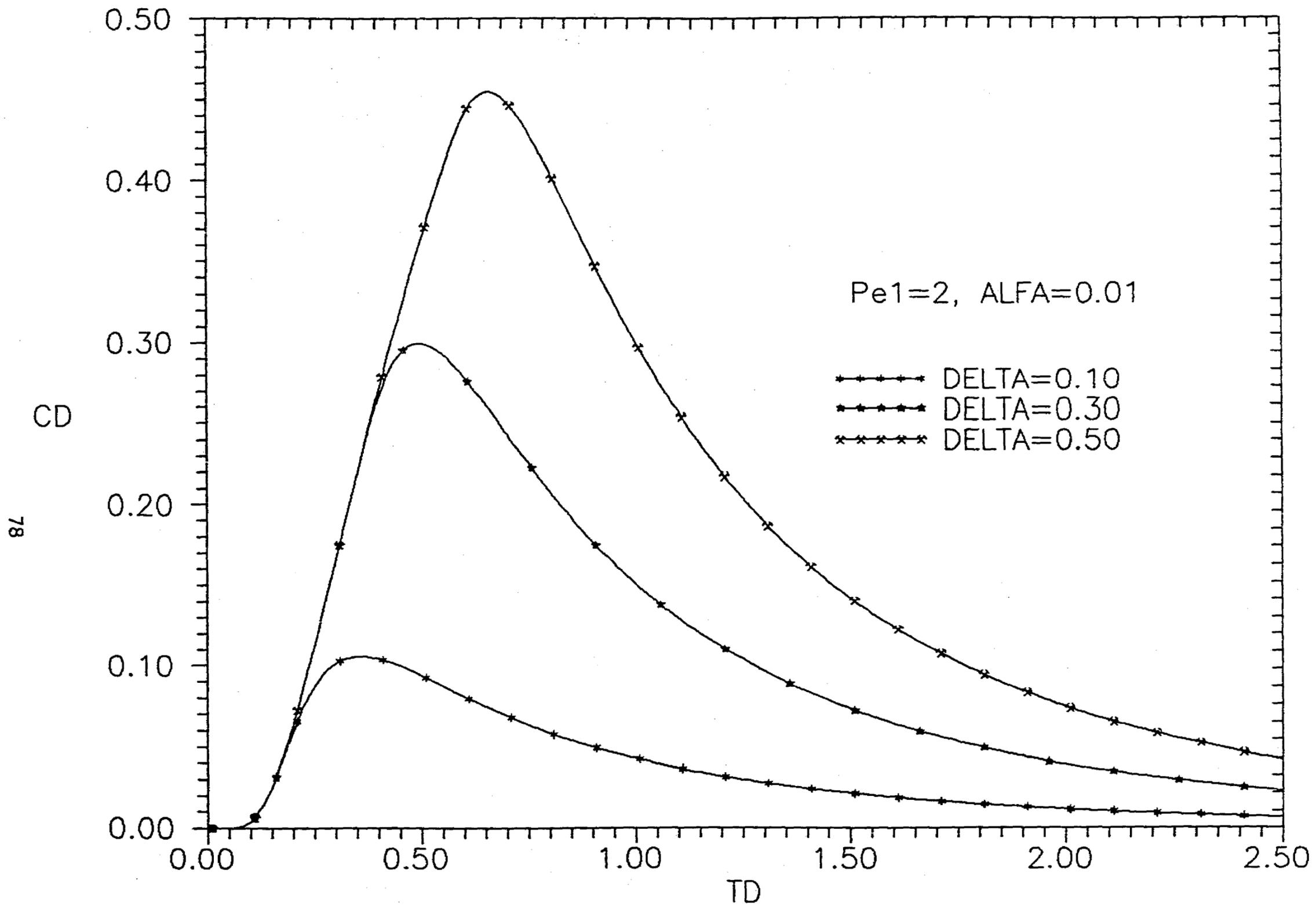


Fig. 5-8 Influencia de el período de inyección sobre la inyección finita de trazador.

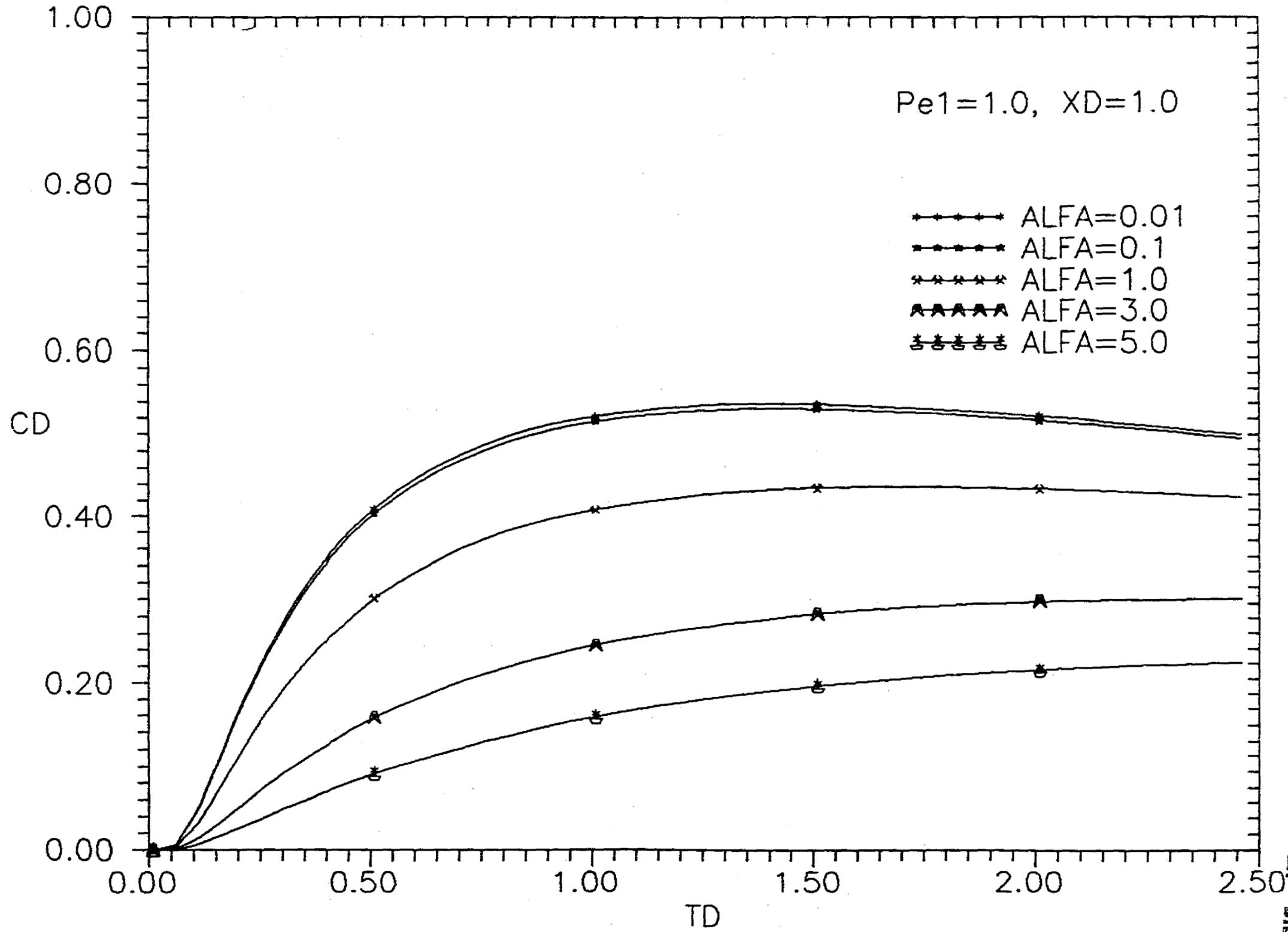


Fig. 5-9 Influencia del parámetro alfa sobre la inyección continua de trazador radioactivo (Iridio).

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

precisamente a la pérdida de masa del trazador por efecto de su decaimiento radioactivo y que el comportamiento del trazador respecto al parámetro α es el mismo que el discutido para la Fig. 5-2.

De igual manera, la Fig. 5-10 presenta resultados análogos a los de la Fig. 5-5, para el caso del trazador radioactivo. De estas dos figuras también se puede observar que la concentración reportada para el caso de un trazador radioactivo (Fig. 5-10) es menor que la de un trazador químico (Fig. 5-5).

La Fig. 5-11 muestra la influencia del parámetro γ , que como puede concluirse de su definición (Ec. 3-11), para determinados valores de v_L y L , corresponde básicamente al tipo de trazador radioactivo utilizado representado por λ que es inversamente proporcional a la vida media del trazador, esto es, $\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$. La Fig. 5-11 se obtuvo para los trazadores Tritio, Stroncio e Iridio, cuyas vidas medias son 4520, 65.4 y 8.05 días, respectivamente, pudiendo observarse la dependencia de la respuesta de concentración del trazador con respecto a λ , a mayor λ menor concentración.

5.3 Modelo para Flujo radial en un yacimiento estratificado

Los datos usados para obtener los resultados presentados en esta sección corresponden a los utilizados por *Chen, (1986)*, ver Tabla D-1.

La Fig. 5-12 muestra los resultados de la concentración del trazador contra la distancia radial para los tiempos adimensionales de 1.0, 5.0 y 10.0. La concentración decrece gradualmente con la distancia radial.

La Fig. 5-13 presenta los resultados de la concentración de trazador contra la distancia radial para valores del radio del pozo adimensional de 0.0 (línea fuente), 0.5, 1.0 y 1.5, para un tiempo adimensional de 1.0. Estos resultados son similares a los publicados

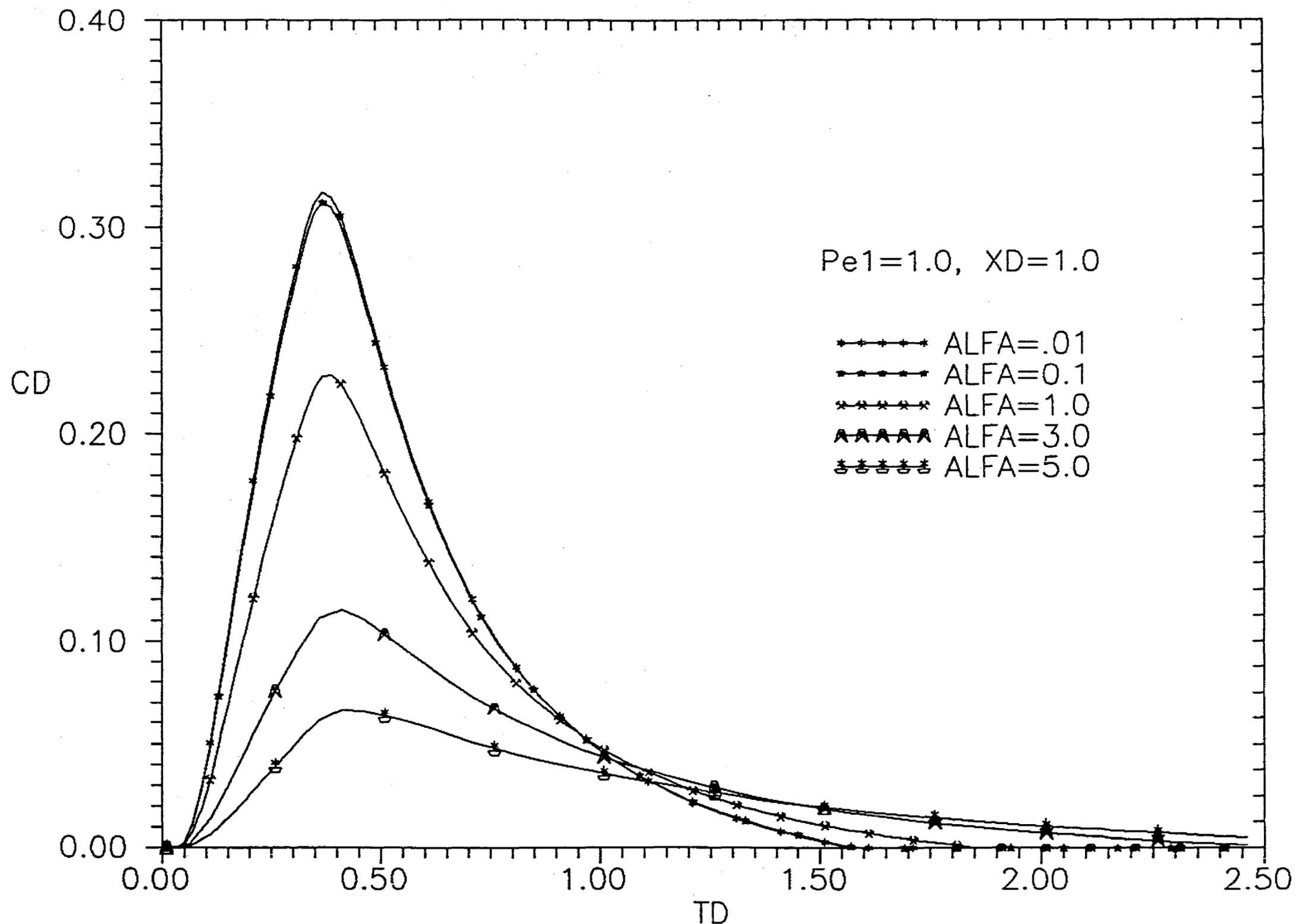


Fig. 5-10 Influencia del parámetro alfa sobre la inyección finita de trazador radioactivo (Iridio), TD inyección = 0.3.

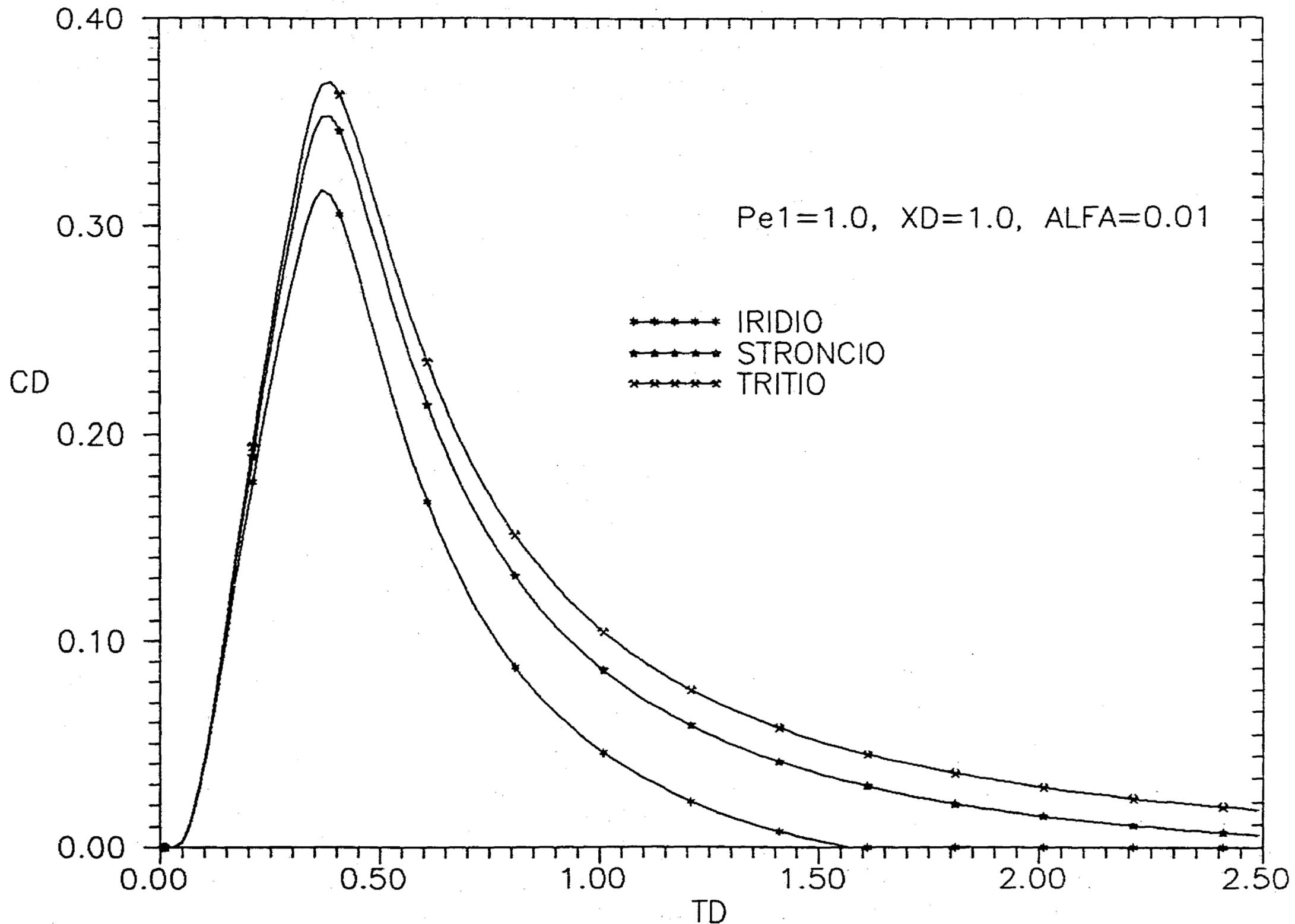


Fig. 5-11 Influencia del parámetro gamma, representado a través de la constante de decaimiento radioactivo, lambda.

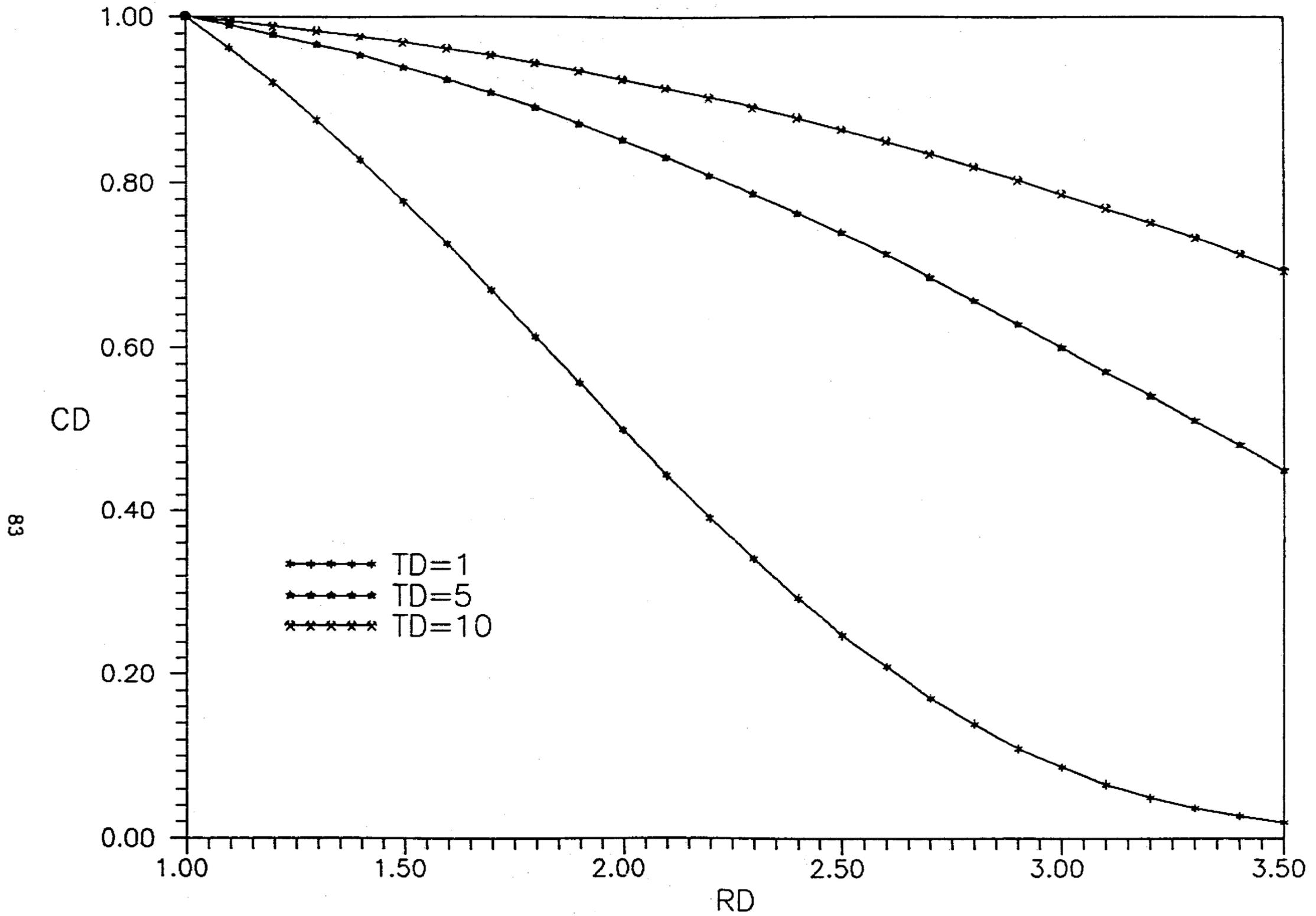


Fig. 5-12 Inyección continua de trazador, concentración contra distancia radial, para distintos valores de TD.

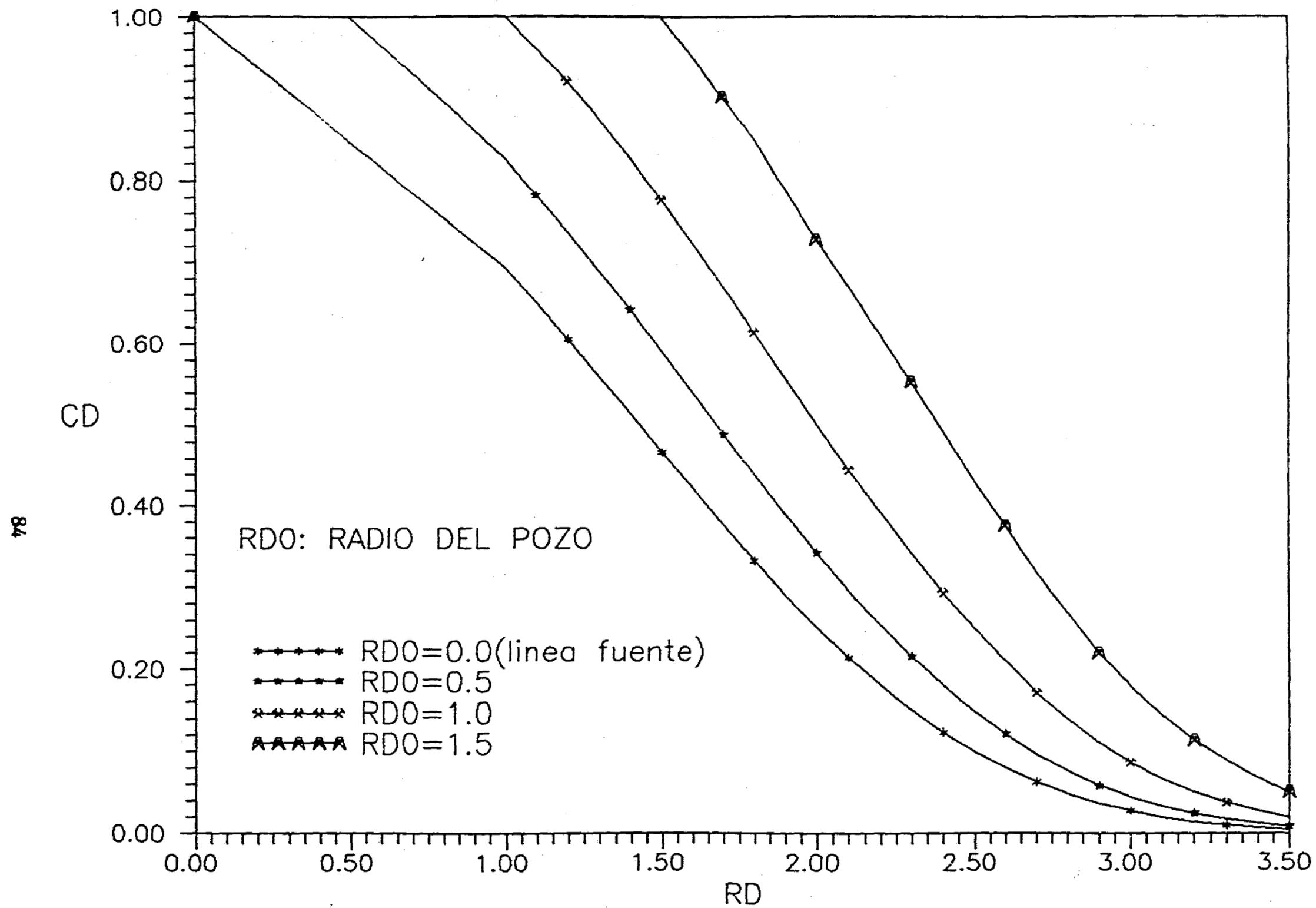


Fig. 5-13 Inyección continua de trazador, concentración contra distancia radial, para varios valores de radio del pozo, TD=1.

por Hsieh(1986) para el caso de un medio homogéneo, concluyendo que la respuesta del trazador tienen una fuerte dependencia del radio del pozo.

La Fig. 5-14 muestra una gráfica de concentración de trazador contra el tiempo, para el caso de inyección continua, considerando una línea fuente como radio del pozo de cero ($r_{D0} = 0$) y una distancia radial adimensional de 1. Esta gráfica puede compararse con la Fig. 5-2 correspondiente al flujo lineal, concluyéndose que puede surgir un problema de unicidad, si se pretende distinguir el tipo de flujo por la forma de las curvas, si la interpretación de la prueba se realiza sin la información adicional proveniente de otras fuentes (es decir, estudios geológicos, análisis de núcleos, registros de pozos, etc.).

La Fig. 5-15 presenta la respuesta de concentración de trazador en $r_D = 4$, para el caso de inyección finita o bache, para períodos de inyección, de $t_D = 0.3$ y 0.5 . Como es de esperarse, se observa que al aumentar el tiempo de inyección se incrementa la concentración máxima, y que el tiempo al cual se alcanza esta concentración máxima de trazador es más grande que el período de inyección, debido a los efectos de dispersión. Una vez más, como se ha discutido previamente en relación a la Fig. 5-14, se puede presentar un problema de unicidad, en cuanto a la forma de las curvas, si la interpretación de la prueba no se realiza empleando la información adicional proveniente de otras fuentes.

5.4 Modelo para Flujo radial en un yacimiento fracturado (geometría matriz-fractura cúbica)

Los resultados presentados en esta sección fueron obtenidos usando en lo posible los datos de Chen, (1986) (ver Tabla D-1).

En primer término se presenta en la Fig. 5-16 una comparación de los resultados del modelo radial con fracturas horizontales, discutido en la Sección 3-2 de este trabajo y los resultados del modelo para flujo radial, considerando una geometría matriz-fractura

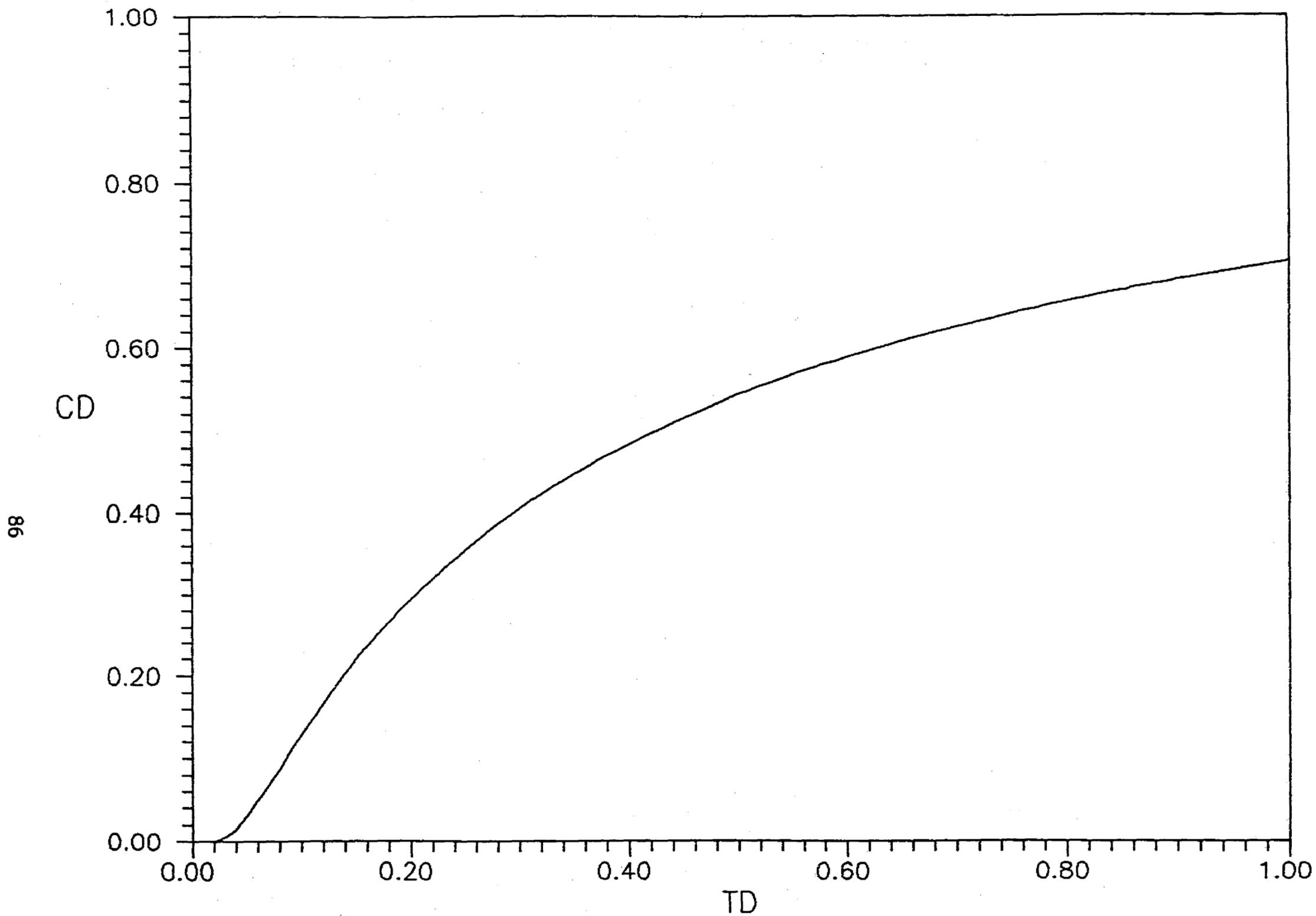


Fig. 5-14 Inyección continua de trazador, concentración contra tiempo, para $RW=0$ y $RD=1$.

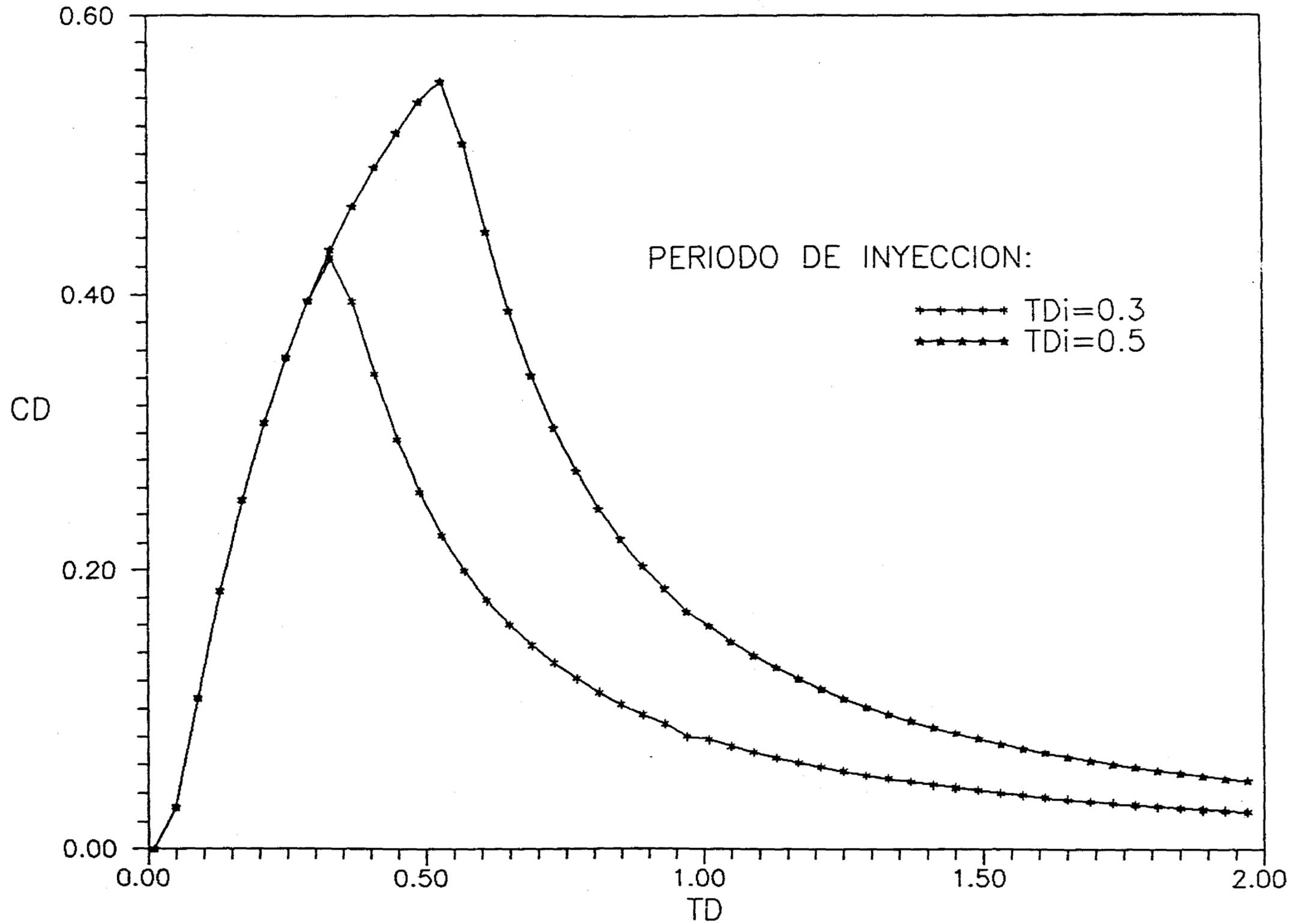


Fig. 5-15 Influencia del período de inyección en la inyección finita de trazador (RD=4).

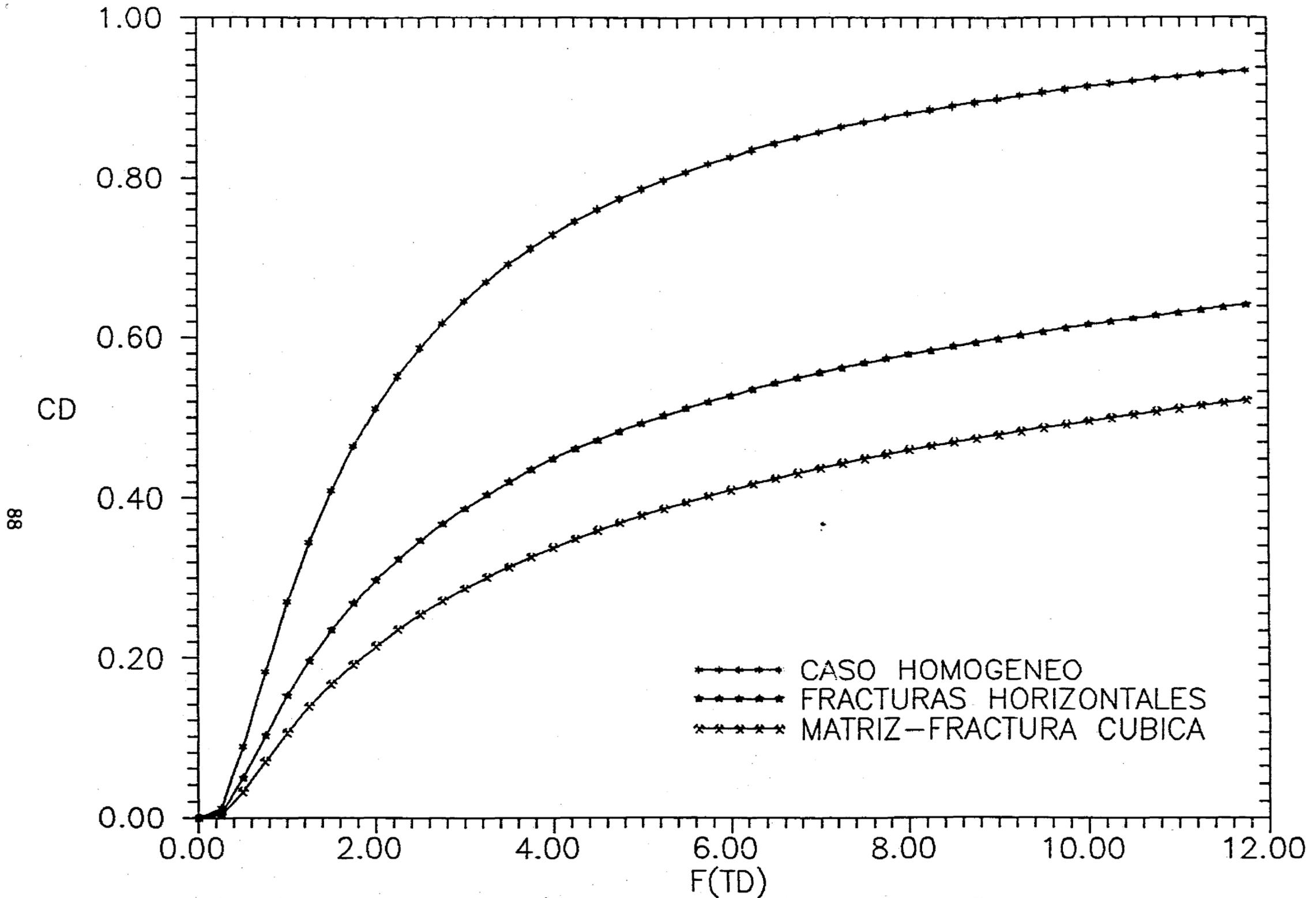


Fig. 5-16 Comparación de las soluciones para flujo radial, en el caso de inyección continua de trazador.

cúbica. Los datos empleados en esta figura se detallan en el Apéndice D (Tabla D-1) y establecer la equivalencia entre ambos modelos, se consideró que el trazador fluye a través de una sola fractura, es decir, $H = d$ y para este ejemplo se utilizó un espesor unitario. La función $F(t_D)$ del eje de las abscisas de esta figura corresponde a las diferentes definiciones del tiempo adimensional para cada uno de los modelos estudiados, así, para el modelo radial con fracturas horizontales, t_D está dado por la Ec. 3-41 y para el modelo radial con geometría matriz-fractura cúbica, t_D está definido por la Ec. 3-84. Siendo iguales para este caso particular debido a que al considerar el flujo de trazador a través de una sola fractura, el área transversal al flujo es igual para ambos modelos. En esta figura también se incluye la curva correspondiente al caso homogéneo, es decir, cuando no existe transferencia de masa hacia la matriz los dos casos.

De esta figura se puede observar, como se mencionó en la discusión referente a la validación del modelo presentada en la Sección 4.3 relacionada con una área mayor de contacto, que la concentración para el modelo cúbico es inferior a la correspondiente para el modelo de fracturas horizontales. Desafortunadamente para propósitos de caracterización, la forma de las curvas es similar, concluyéndose que para la interpretación de una prueba de trazadores es necesario contar con la información adicional proveniente de otras fuentes (es decir, estudios geológicos, análisis de núcleos, registros de pozos, etc).

Es de gran interés comparar los resultados de los modelos propuestos considerando geometría radial, con el modelo de fracturas verticales presentado en la Sección 3.1. Con el propósito de simplificar esta discusión, el tamaño del bloque de matriz, para el caso del modelo que considera geometría matriz-fractura cúbica, es igual al espesor H . Esta simplificación también se aplica a los otros dos modelos.

Los resultados para una inyección continua de trazador se muestran en la Fig. 5-17. Una vez más como es de esperarse, si se parte de la base de los principios físicos de estos problemas, la concentración del trazador para el modelo de fracturas verticales es la más alta de los tres casos. La Fig. 5-18 muestra resultados similares para una inyección finita

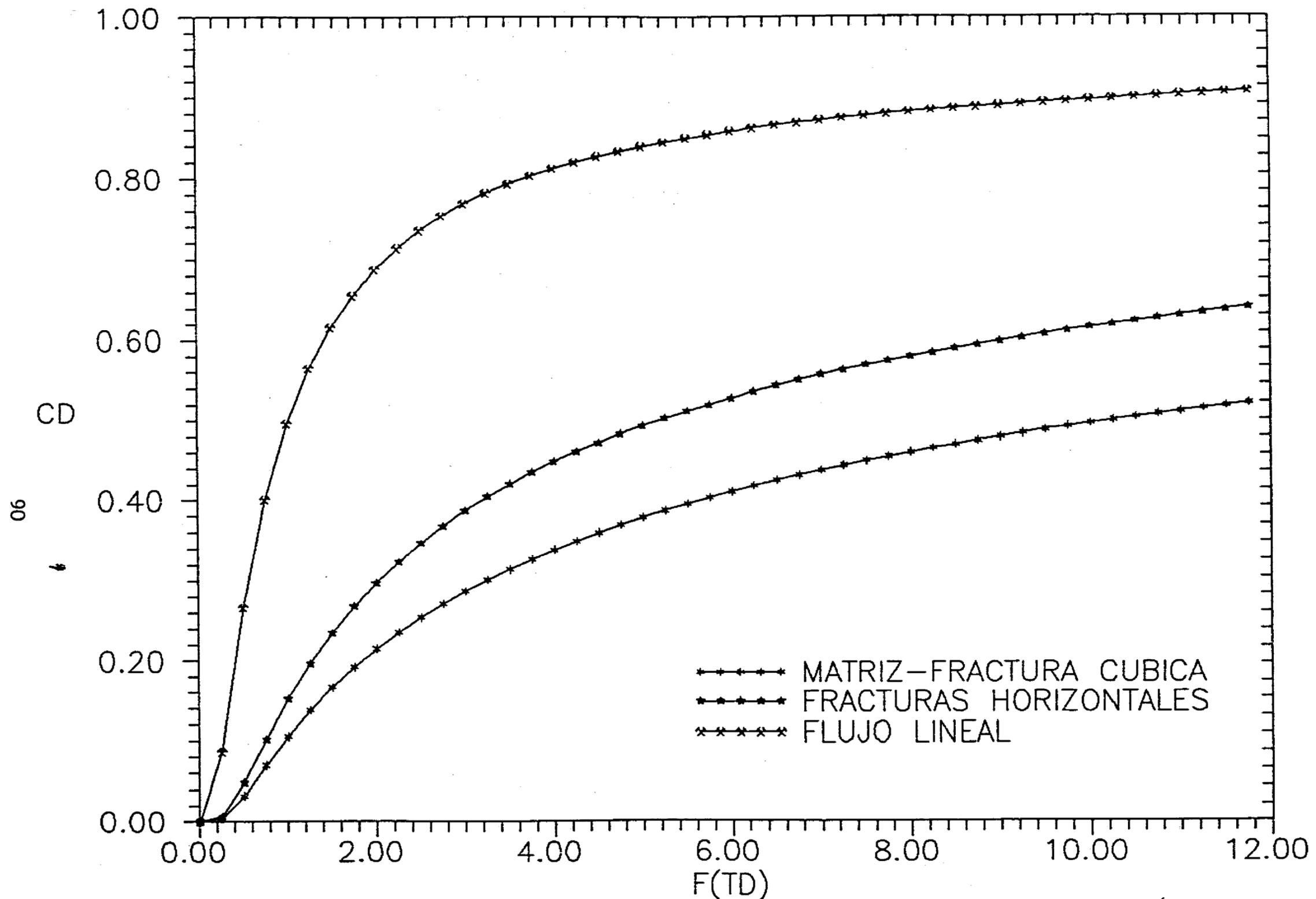


Fig. 5-17 Comparación de las soluciones para flujo lineal (fracturas verticales) y radial, en el caso de inyección continua.

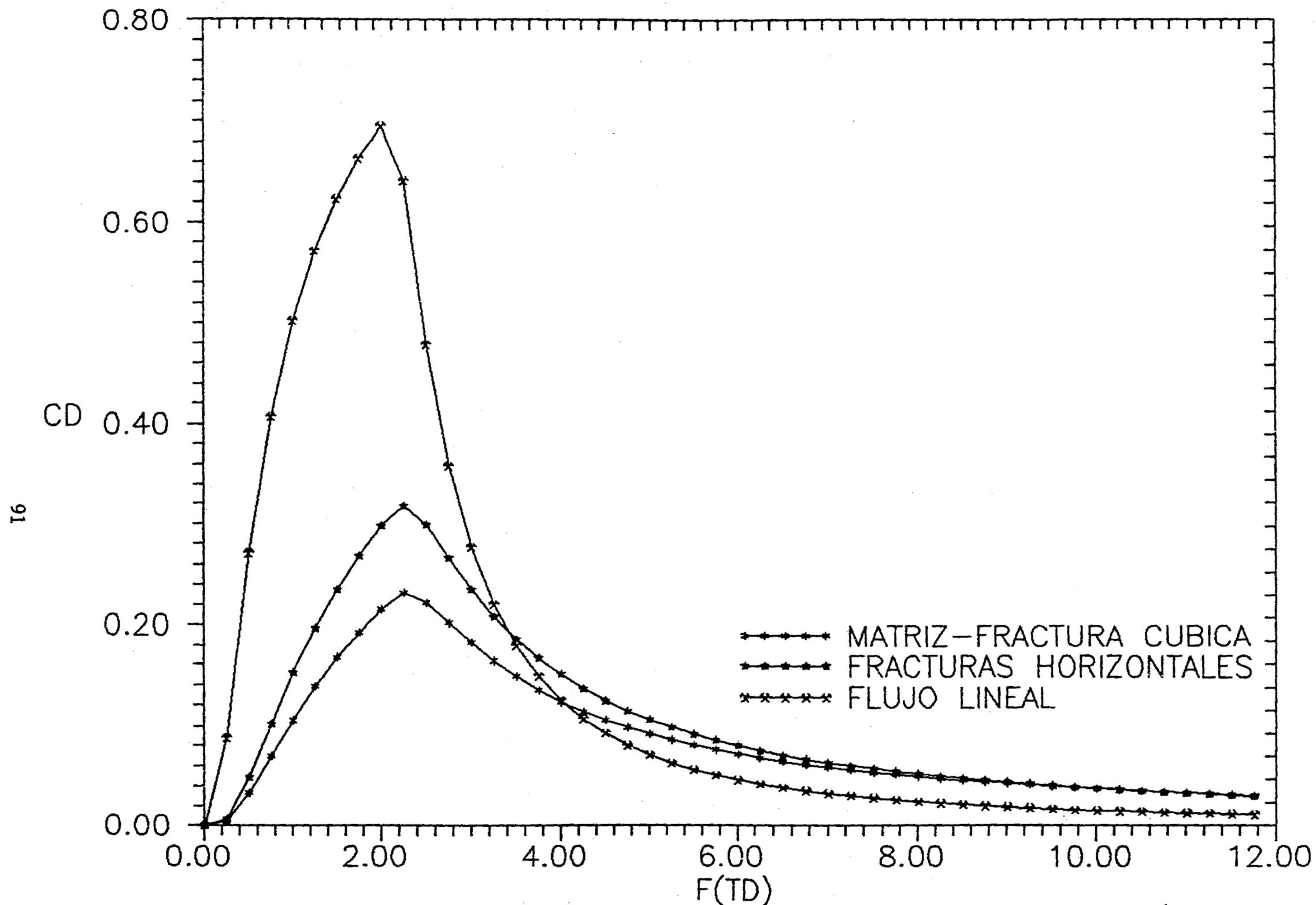


Fig. 5-18 Comparación de las soluciones para flujo lineal (fracturas verticales) y radial, en el caso de inyección finita.

del trazador, para un período de inyección de $t_D = 2.01$. Escencialmente las condiciones relacionadas a la Fig. 5-17 se aplican a este caso. Adicionalmente se puede notar de las Figs. 5-17 y 5-18 que la conclusión referente al problema ya mencionado de unicidad en la caracterización de yacimientos naturalmente fracturados, a través de la interpretación de pruebas de trazadores, prevalece.

Por otro lado, en la Fig. 5-19 se muestra la influencia de la matriz en el perfil de concentraciones, para una inyección continua del trazador, representada por el producto $\phi_2\sqrt{D_{D2}}$ que interviene en las definiciones de ξ_{rh} y ξ_{rc} (Ecs. 3-57 y 3-107).

El valor máximo usado para este grupo en los modelos de fracturas horizontales y de bloques cúbicos, fueron $1.13E-4$ y $7.2E-4$, respectivamente. De esta figura se puede observar que para valores de $\phi_2\sqrt{D_{D2}} < 10^{-6}$, el sistema formado por los bloques de matriz se comporta como en el caso homogéneo.

La influencia del tamaño de los bloques de matriz para el caso de inyección continua de trazador se ilustra en la Fig. 5-20; la curva correspondiente al perfil de mayor concentración representa el caso homogéneo, las curvas que siguen hacia abajo, corresponden a diferentes tamaños de bloque, hasta un valor máximo de 100 bloques de matriz. Estos resultados indican que de acuerdo al incremento en el área de contacto matriz-fractura, es decir, a mayor número de bloques, la concentración del trazador disminuye debido a que existe mayor transferencia de masa hacia los bloques de la matriz. Por último, la Fig. 5-21 presenta la influencia del ancho de fractura para los modelos de fracturas horizontales y de bloques cúbicos, para un rango de ancho de fractura de 10^{-4} a 10^{-2} m. El efecto de este parámetro es bastante importante ya que, como se puede observar en esta figura, un incremento en el ancho de fractura corresponde a un incremento en la respuesta de concentración de trazador.

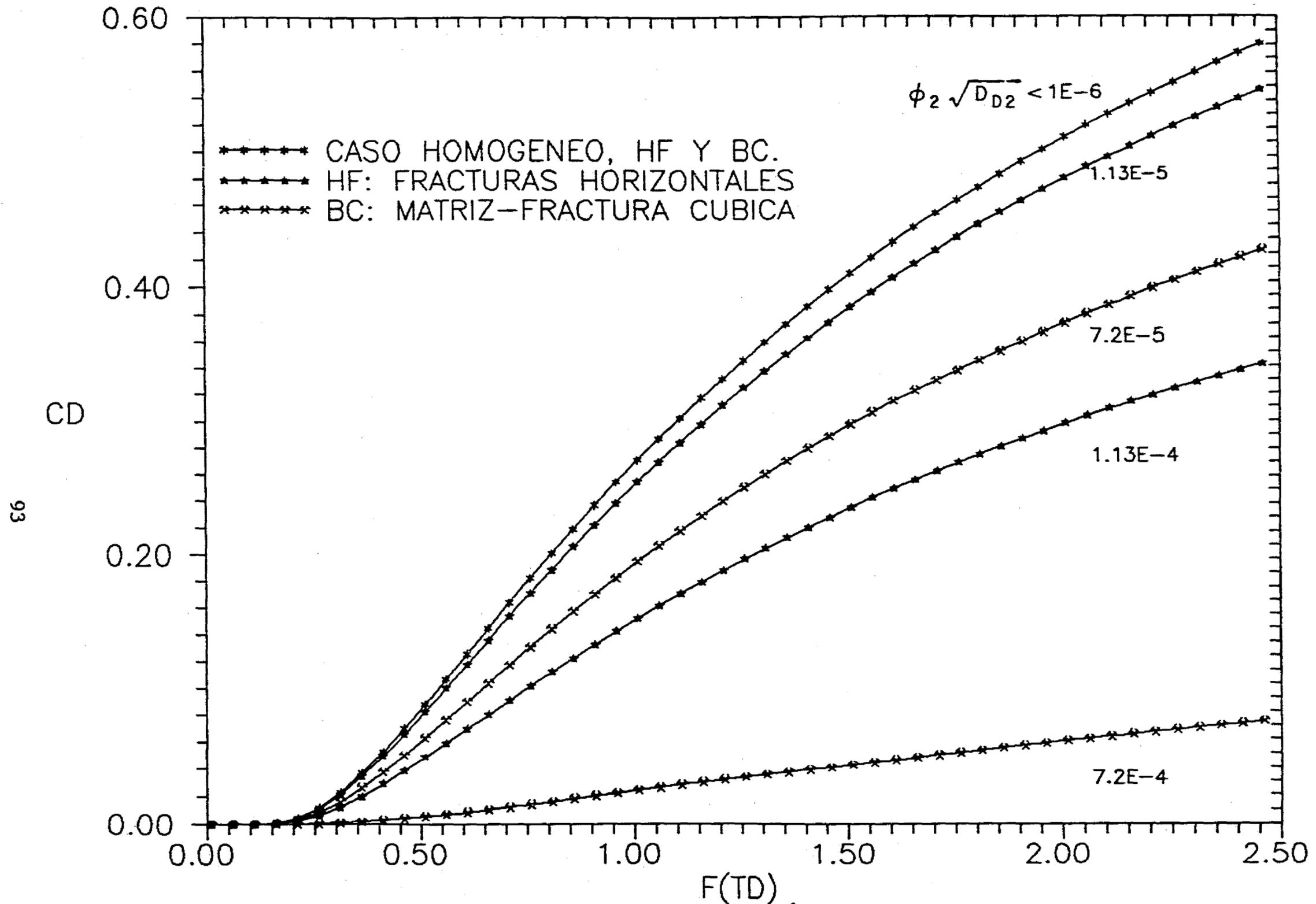


Fig. 5-19 Influencia de las características de la matriz sobre la respuesta del trazador, para los modelos de flujo radial.

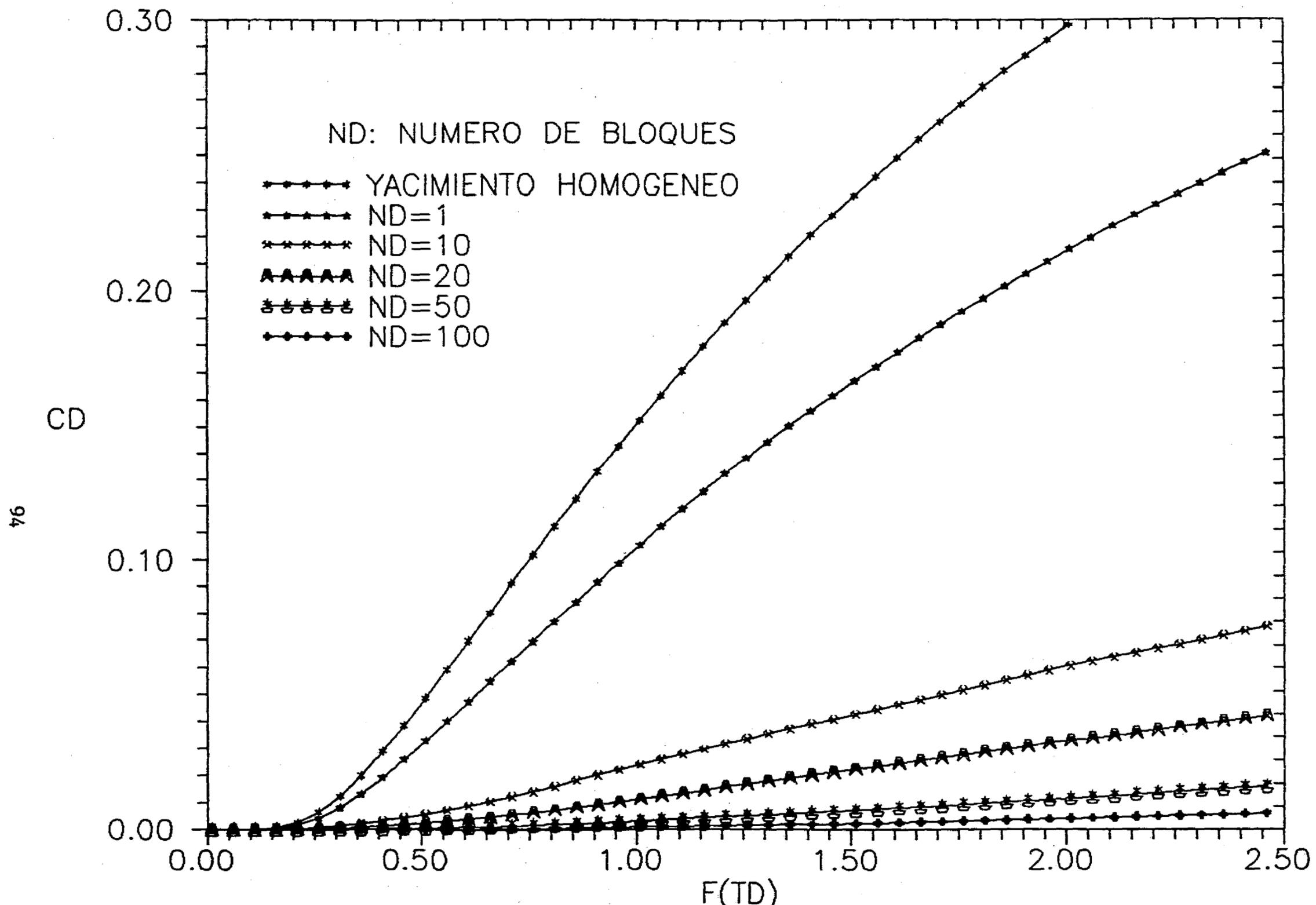


Fig. 5-20 Influencia del tamaño de bloque de matriz sobre la respuesta del trazador, inyección continua.

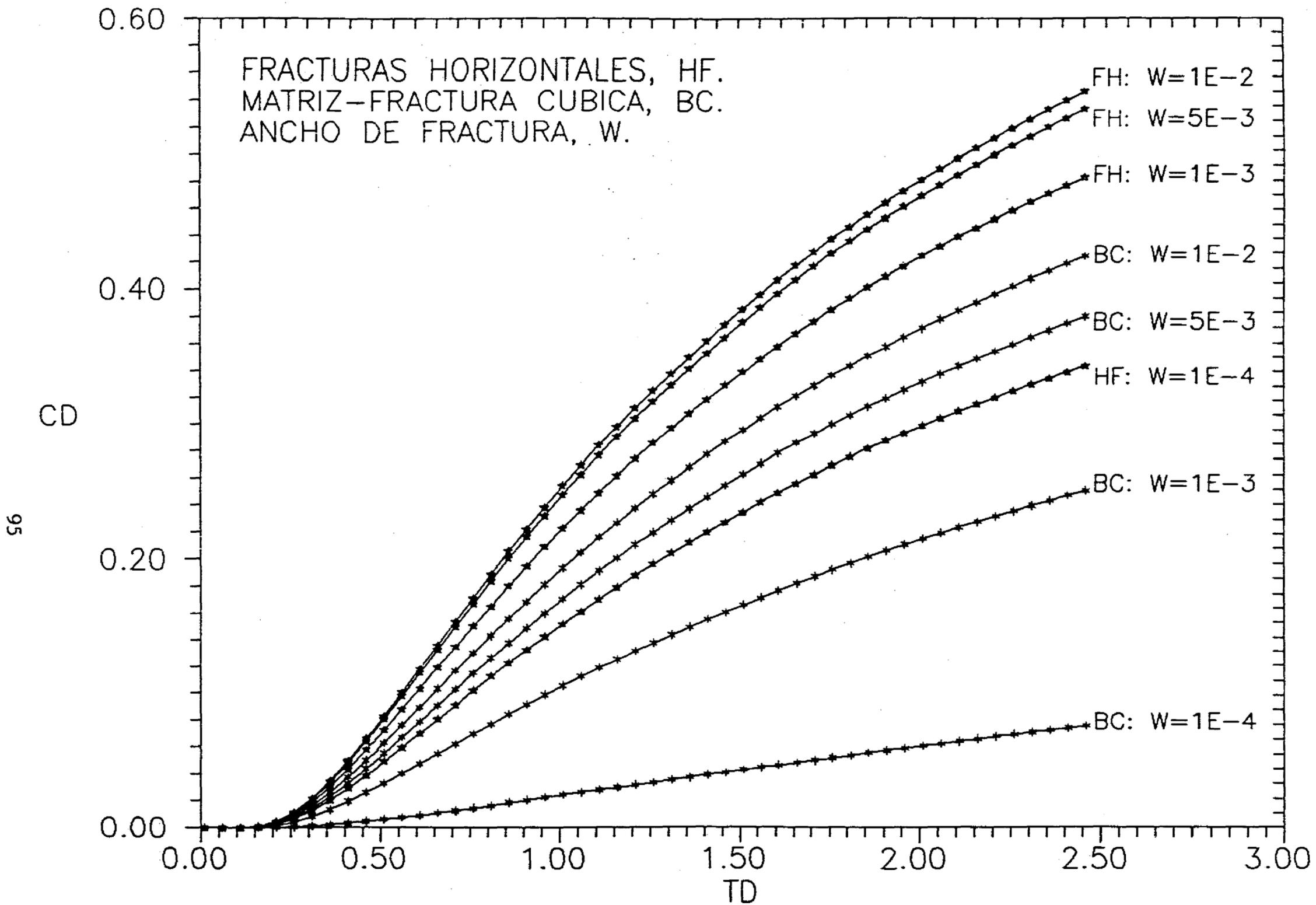


Fig. 5-21 Influencia del ancho de fractura sobre la respuesta del trazador, para los modelos de flujo radial.

5.5 Aspectos Prácticos

Con el fin de acercarse un poco más a las condiciones reales en el campo, en esta sección se presentan resultados obtenidos en base a datos representativos, en lo posible, de yacimientos petrolíferos. La mayoría de los resultados que se discuten a continuación se refieren al modelo de geometría matriz-fractura cúbica, debido a que este tipo de geometría es el más adecuado de los tres modelos propuestos en este trabajo para representar un yacimiento naturalmente fracturado. Sin embargo, también se presentan algunos resultados para los otros dos modelos, pensando en que existen casos especiales de yacimientos naturalmente fracturados que pueden ser representados por medio de la conceptualización de estos modelos. Adicionalmente, en esta sección también se discute una comparación de los tres modelos propuestos en esta tesis para diferentes casos.

Como se mencionó en la Sección 3-3 la solución general en el espacio de Laplace para el modelo de fracturas horizontales está representada por la Ec. 3-64, es también la solución del modelo de bloques cúbicos de matriz sustituyendo en lugar de ξ_{rh} la definición de ξ_{rc} dada por la Ec. 3-107 en las Ecs. 3-60 y 3-66.

Efectuando lo anterior, y aplicando las definiciones de los parámetros adimensionales r_D , r_{D0} , d_D y D_{D2} , Ecs. 3-79, 3-80, 3-83 y 3-87, la solución del modelo de bloques de matriz cúbica se expresa de la siguiente manera:

$$\bar{C}_{Dr1} = \frac{1}{s} \exp\left(\frac{Y - Y_0}{2}\right) \left\{ \frac{A_i(\xi_{rc}^{1/3} Y)}{A_i(\xi_{rc}^{1/3} Y_0)} \right\} \quad (5-2)$$

donde,

$$Y = \frac{r}{\alpha} + \frac{1}{4\xi_{rc}} \quad (5-3)$$

$$Y_0 = \frac{r_w}{\alpha} + \frac{1}{4\xi_{rc}} \quad (5-4)$$

y de la Ec. 3-107

$$\xi_{rc} = s + \gamma + \alpha\phi_2 \sqrt{\frac{12qHD_2}{d\omega R} \sqrt{s + \gamma}} - \frac{24\pi HD_2\phi_2\alpha^2}{q d^2} \quad (5-5)$$

A continuación se presenta el análisis de sensibilidad de la solución a las principales variables físicas involucradas.

Con fines de simplificar este análisis, la variación de los parámetros se estudian para el caso de inyección continua, teniendo en mente que la influencia de cada parámetro sobre la respuesta del trazador no depende del tipo de inyección. Sin embargo, al final de esta sección se presentan algunos resultados para el caso de inyección finita. Los rangos de variación de los parámetros para este estudio, fueron obtenidos de diversas fuentes, (*Grisak y Pickens, 1980; Pickens y Grisak, 1981; Koenraad y Baker, 1981 y Hensel, 1989*), los cuales se detallan en el Apéndice D.

Efecto del coeficiente de dispersión longitudinal, (α)

Pickens y Grisak (1981) estudiaron el efecto aparente del escalamiento en procesos de dispersión en medios porosos estratificados. Con base en este estudio se analizó la influencia del coeficiente de dispersión longitudinal α , el cual se emplea en los modelos propuestos para flujo radial, como longitud característica en los parámetros adimensionales. La Fig. 5-22 ilustra la influencia del parámetro α sobre la respuesta del trazador a una distancia radial de 1000 m, pudiendo observarse que el coeficiente de dispersión longitudinal determina el tiempo de irrupción del trazador, concluyéndose que el retardamiento del trazador para un $\alpha = 0.5m$ es de cuatro órdenes de magnitud mayor que el retardamiento del trazador para un $\alpha = 50m$, sin embargo, la forma de los perfiles de concentración es esencialmente la misma para todos los α 's. De aquí se puede concluir que el efecto del coeficiente de dispersión longitudinal sólo se refleja en el tiempo de irrupción del trazador y que posteriormente, el comportamiento del trazador es muy similar para cualquier α .

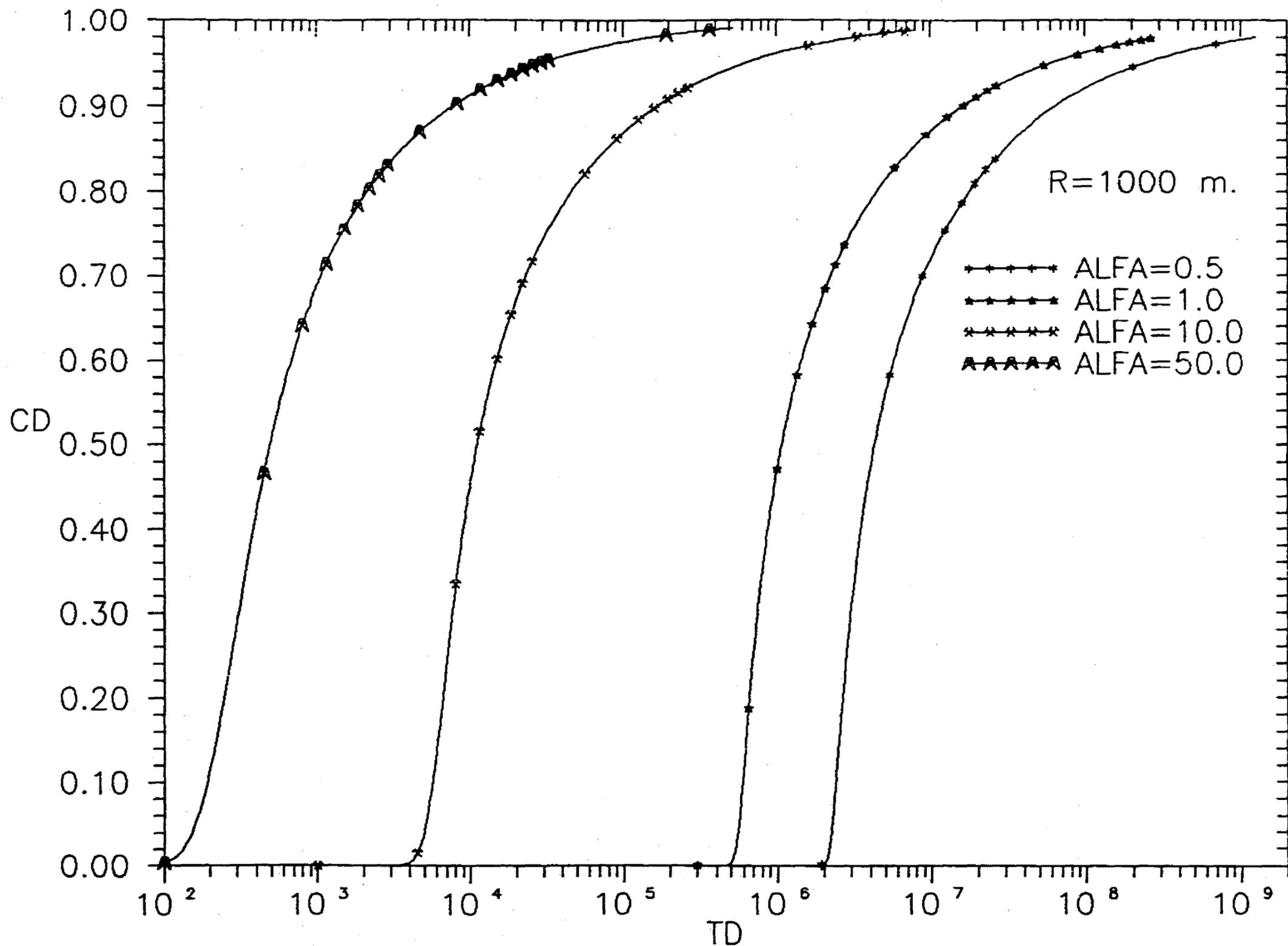


Fig. 5-22 Influencia del coeficiente de dispersividad, alfa, sobre la respuesta del trazador, inyección continua.

Es importante notar que dadas las características de la función que representa la solución del modelo matemático propuesto, Ec. 5-2, el coeficiente de dispersión longitudinal tiene su mayor efecto en la definición de r_D , de tal manera que para una misma distancia radial, r , r_D disminuye de acuerdo al incremento de α . De acuerdo a *Pickens y Grisak (1981)* el coeficiente de dispersión longitudinal es una función lineal de la distancia media de flujo del trazador; por ejemplo, para un medio poroso estratificado $\alpha = 0.043L$. Bajo estas condiciones es posible manejar distancias muy grandes (500 a 1000 m) con r_D pequeños; sin embargo en la Fig. 5-23 se puede observar que es posible obtener prácticamente un sólo perfil de concentraciones para la misma distancia ($r = 1000m$) y diferentes valores del coeficiente de dispersión longitudinal (α), graficando la relación t_D/r_D^2 en el eje de las abscisas. Sustituyendo en esta relación las definiciones dadas por las Ecs. 3-79 y 3-84 se llega a la relación at/r^2 , por lo que la influencia de α se elimina del problema, resultando así, prácticamente un sólo perfil de concentraciones. Lo anterior corrobora la discusión referente a la Fig. 5-22 y con esto se puede concluir que en efecto, existe un factor de escalamiento en el problema de flujo de trazadores en medios porosos fracturados.

Influencia de la distancia radial, (r)

En este caso, para determinar el efecto de la distancia radial (r), en forma independiente del coeficiente de dispersividad (α), se mantuvo fijo este último a un valor de $\alpha = 0.5$ y se cambiaron los valores de r a 250, 500 y 1000 m, que corresponden a los valores que se pueden tener en una prueba de campo, en general. La Fig. 5-24 ilustra como el parámetro r_D no sólo influye en el tiempo de irrupción del trazador, sino también en la forma de la curva, es decir, una vez que irrumpe el trazador a mayor distancia, el tiempo que se requiere para llegar a una concentración cercana a la unidad será cada vez mayor. Lo anterior se puede observar mejor en una gráfica de C_D contra t_D/r_D^2 , Fig. 5-25, observándose que a pesar de amortiguar el factor de escalamiento al dividir por r_D^2 , las pendientes de las curvas correspondientes a r_D 's altos son menores respecto a las de r_D 's bajos. Esto indica que a medida que se incrementa la distancia radial los factores que

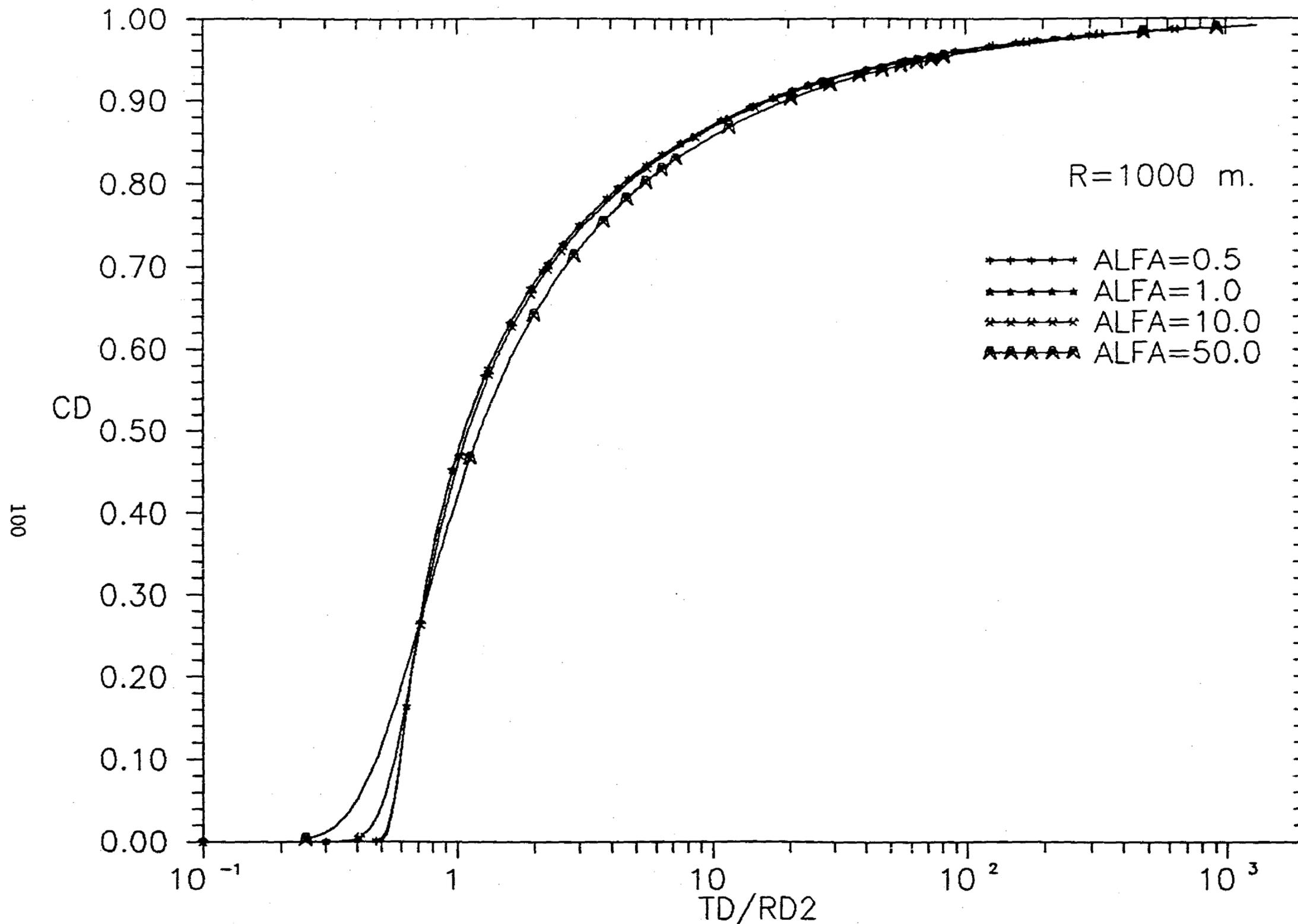


Fig. 5-23 Influencia del coeficiente de dispersividad, alfa, sobre la respuesta del trazador, CD contra TD/RD2.

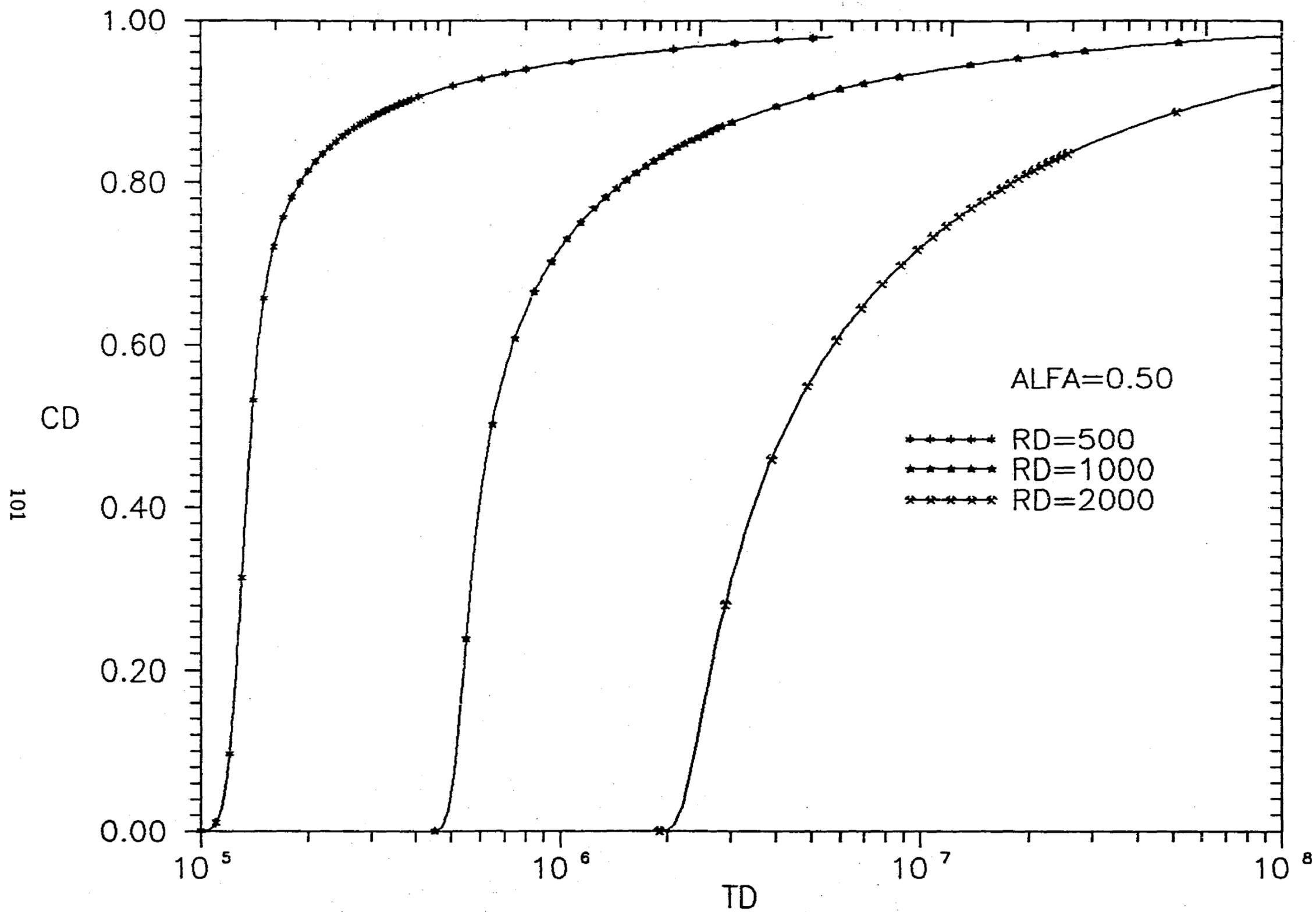


Fig. 5-24 Influencia de RD sobre el perfil de concentraciones.
Para el caso de inyección continua.

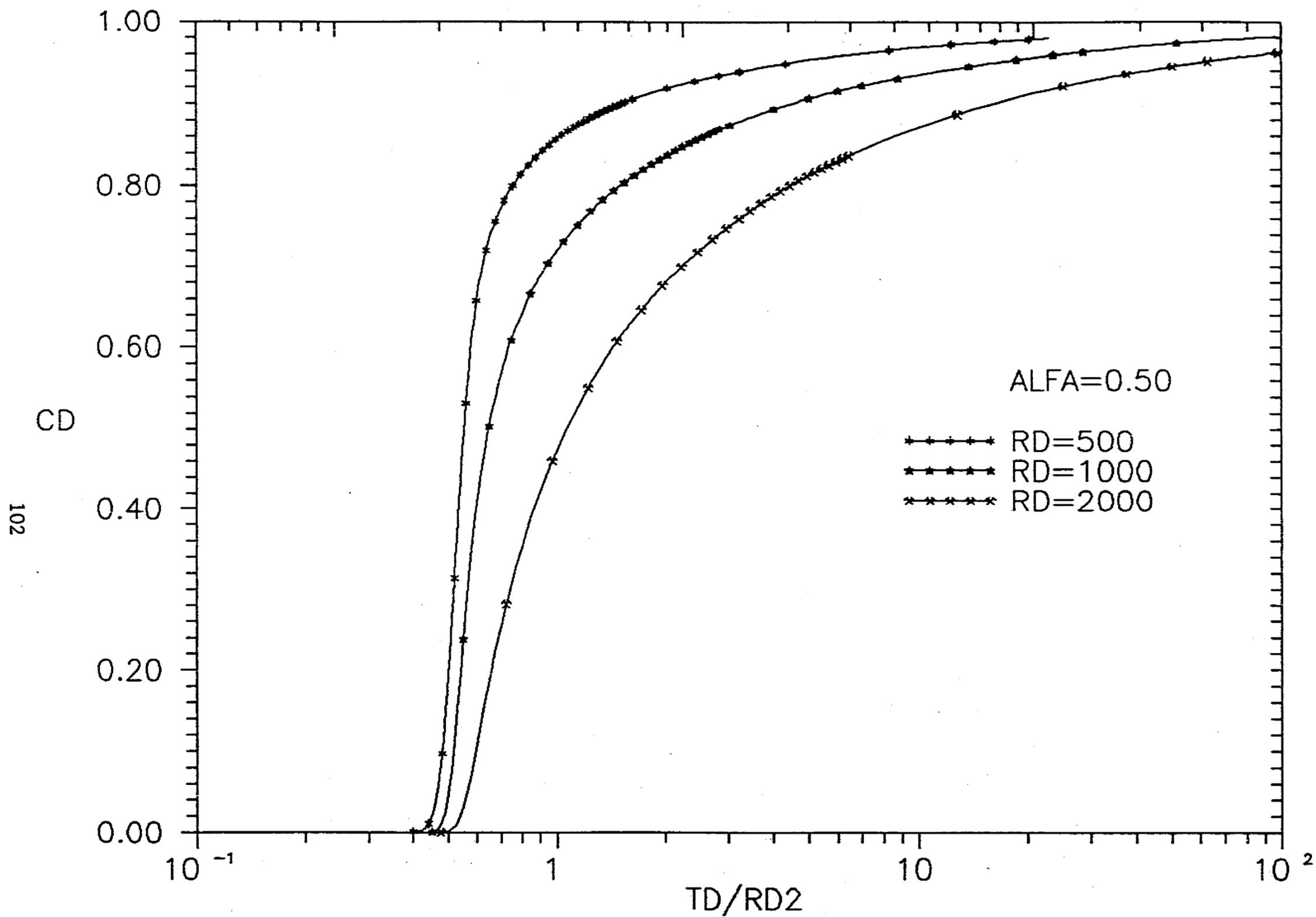


Fig. 5-25 Influencia de RD sobre el perfil de concentraciones.
Para el caso de inyección continua.

intervienen en el fenómeno de difusión-convección en medios porosos fracturados tienen mayor oportunidad de actuar y, por consiguiente se presenta una diferencia en la respuesta del trazador, la interacción matriz-fractura es mayor.

Influencia del ancho de fractura, (w)

La Fig. 5-26 ilustra la influencia del ancho de fractura (w) sobre el comportamiento del trazador, observándose que el parámetro w no afecta notablemente al tiempo de irrupción del trazador, ya que éste irrumpe prácticamente a tiempos muy similares, para un rango de ancho de fractura de 10^{-6} a 10^{-2} m. Sin embargo, esta figura muestra como el trazador se comporta prácticamente para anchos de fractura grandes (10^{-2} o 10^{-3} m) como si se tratase de una función tipo escalón, hasta obtener una concentración de 0.8, es decir que debido a la alta canalización de trazador, la transferencia de masa hacia la matriz es casi nula. Por el contrario, para anchos de fractura muy pequeños, esta transferencia de masa hacia la matriz es grande, por lo que la elongación del perfil de concentración aumenta conforme disminuye el ancho de fractura.

Influencia de la porosidad de la matriz, (ϕ_2)

En la Fig. 5-27 se muestra la influencia de la porosidad de la matriz en la respuesta del trazador. En esta figura se puede observar que cuando la porosidad de la matriz es muy pequeña, el perfil de concentraciones corresponde a la de una función escalón, en la cual, el intervalo de tiempo necesario para alcanzar la concentración máxima es muy pequeño. De esta figura se puede concluir que a medida que la porosidad de la matriz aumenta, se incrementa la difusión en el segundo medio y como consecuencia disminuye la concentración en la fractura, independientemente del valor del coeficiente de difusión de la matriz, D_2 , que para los resultados de esta figura es de $1.385E-5$ m²/d. La curva correspondiente al valor de $\phi_2 = 0.00001$ indica que a pesar del alto valor del coeficiente de difusión antes mencionado, no existe transferencia de masa hacia la matriz, siendo

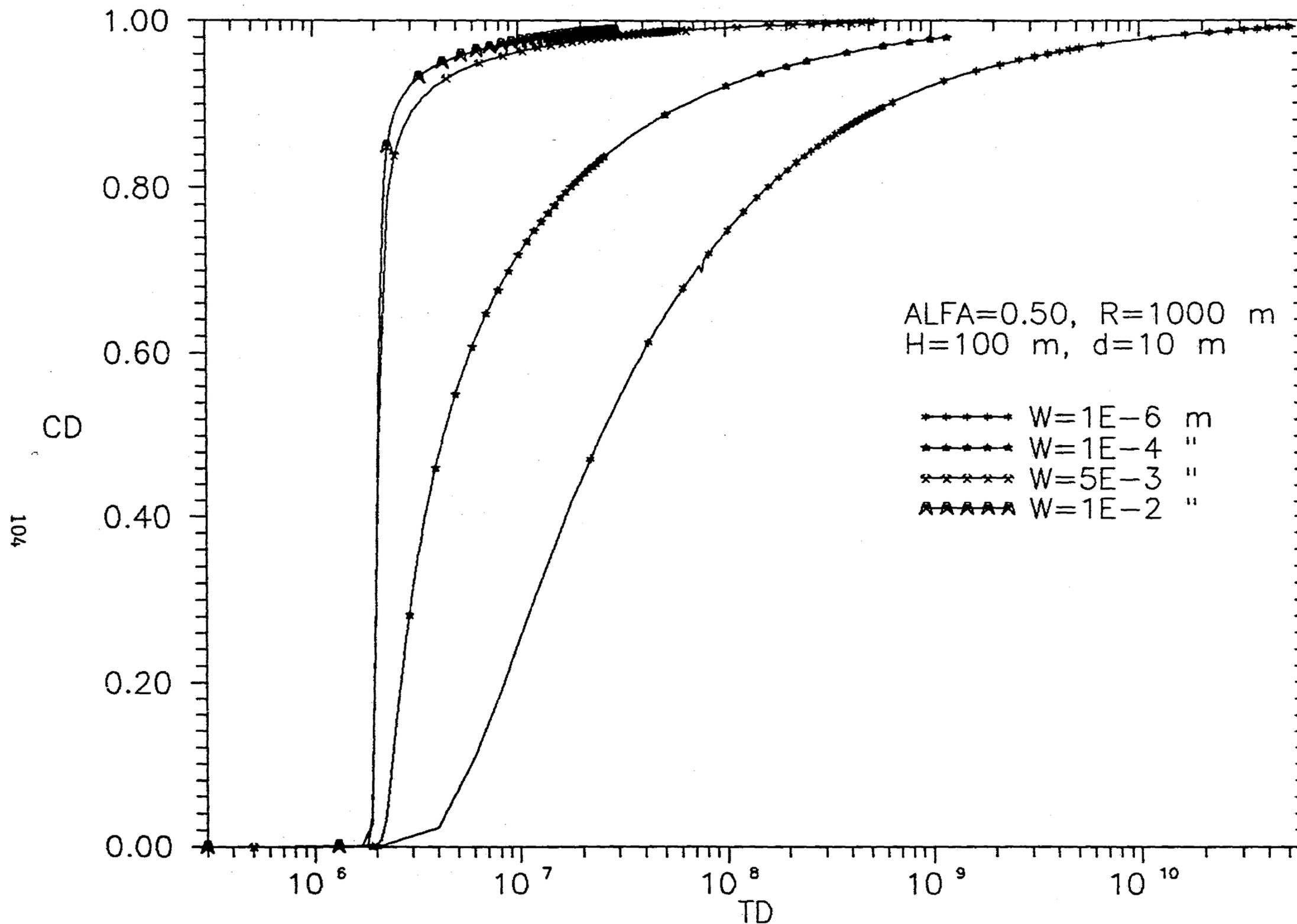


Fig. 5-26 Influencia del ancho de fractura W sobre el perfil de concentraciones. Para el caso de inyección continua.

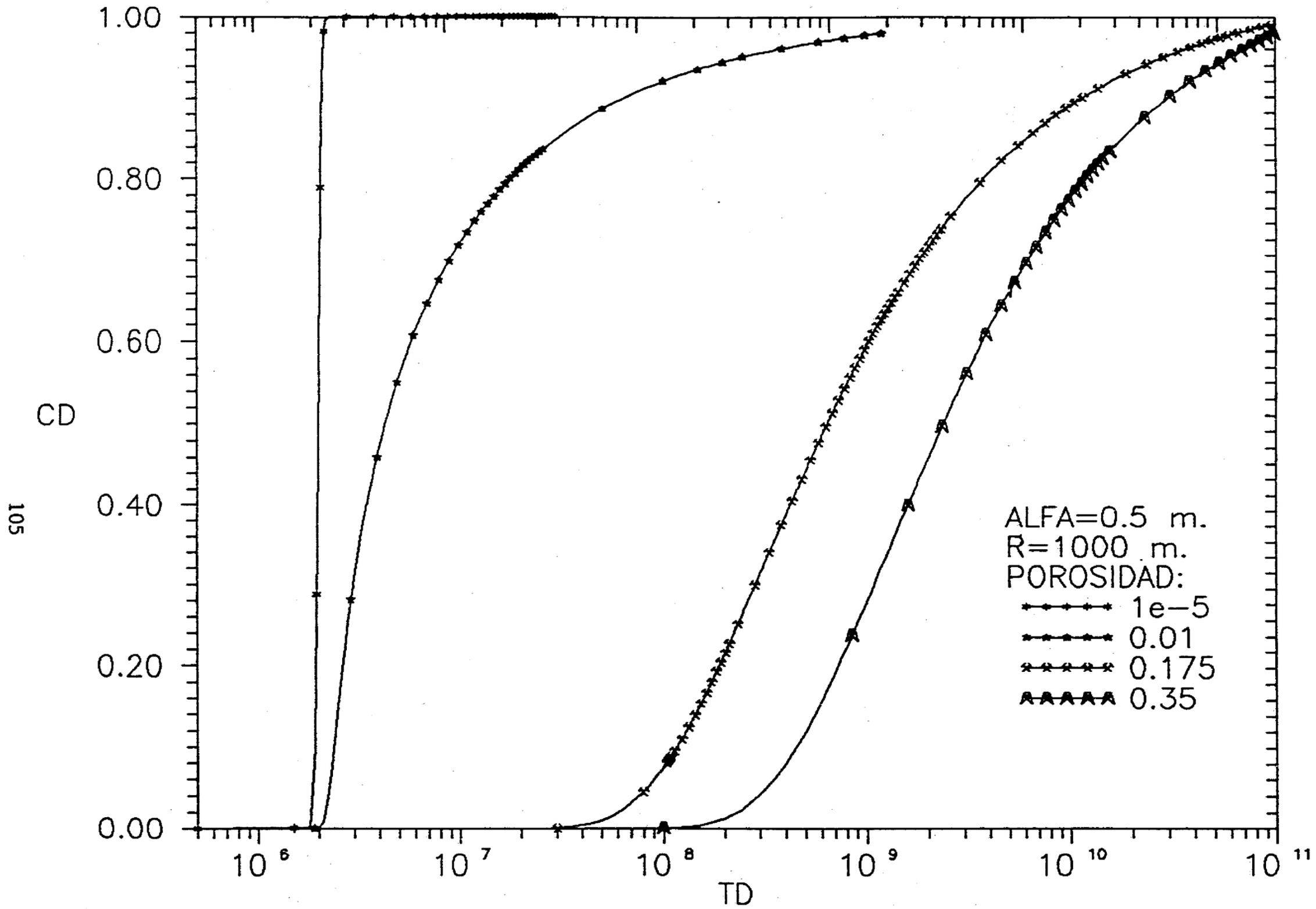


Fig. 5-27 Influencia de la porosidad de la matriz.
Para el caso de inyección continua.

este efecto, como se espera, similar al caso de un valor muy pequeño del coeficiente de difusión con un valor alto de porosidad de la matriz, como se discutirá más adelante. Por lo que respecta a valores altos de porosidad en la matriz, se puede decir como se muestra en la Fig. 5-27 que los perfiles del trazador tienden a una elongación similar, aunque el retardamiento en la irrupción sea de acuerdo al incremento de la porosidad, es decir a mayor porosidad mayor será el tiempo necesario para la irrupción del trazador.

Influencia del coeficiente de difusión de la matriz, (D_2)

La Fig. 5-28 ilustra la influencia del coeficiente de difusión de la matriz, D_2 , sobre el perfil de concentraciones, pudiendo observarse, como se explicó anteriormente, que para valores muy pequeños de este parámetro (10^{-12} y 10^{-10}), prácticamente no existe transferencia de masa al segundo medio, es decir, sólo actúa el sistema de fracturas. Sin embargo, en esta figura se puede observar, que el coeficiente de difusión prácticamente no tiene ninguna influencia sobre el retardamiento en la irrupción, dado que para el rango de valores de D_2 el tiempo de irrupción del trazador esencialmente es el mismo. A excepción de la conclusión anterior, las observaciones realizadas con respecto a la Fig. 5-27 son válidas también para esta figura, lo que sugiere que la influencia de ϕ_2 y D_2 sobre la respuesta del trazador es en la misma dirección, es decir que se puede tener una combinación de valores de $\phi_2\sqrt{D_2} < 10^{-6}$, de acuerdo a la definición de ξ_{rc} dada por la Ec. 5-5, que logran que el comportamiento del sistema fracturado sea el de un medio homogéneo.

Influencia del número de bloques de matriz, (ND)

La Fig. 5-29 ilustra el efecto del número de bloques de matriz, $ND = H/d$, en la respuesta de concentración del trazador. El caso evaluado corresponde a un medio poroso fracturado con un espesor $H = 100$ m, para diferentes tamaños de bloque, 5, 10, 50 y 100 m, que corresponde a 20, 10, 2 y 1 número de bloques, respectivamente. Tomando

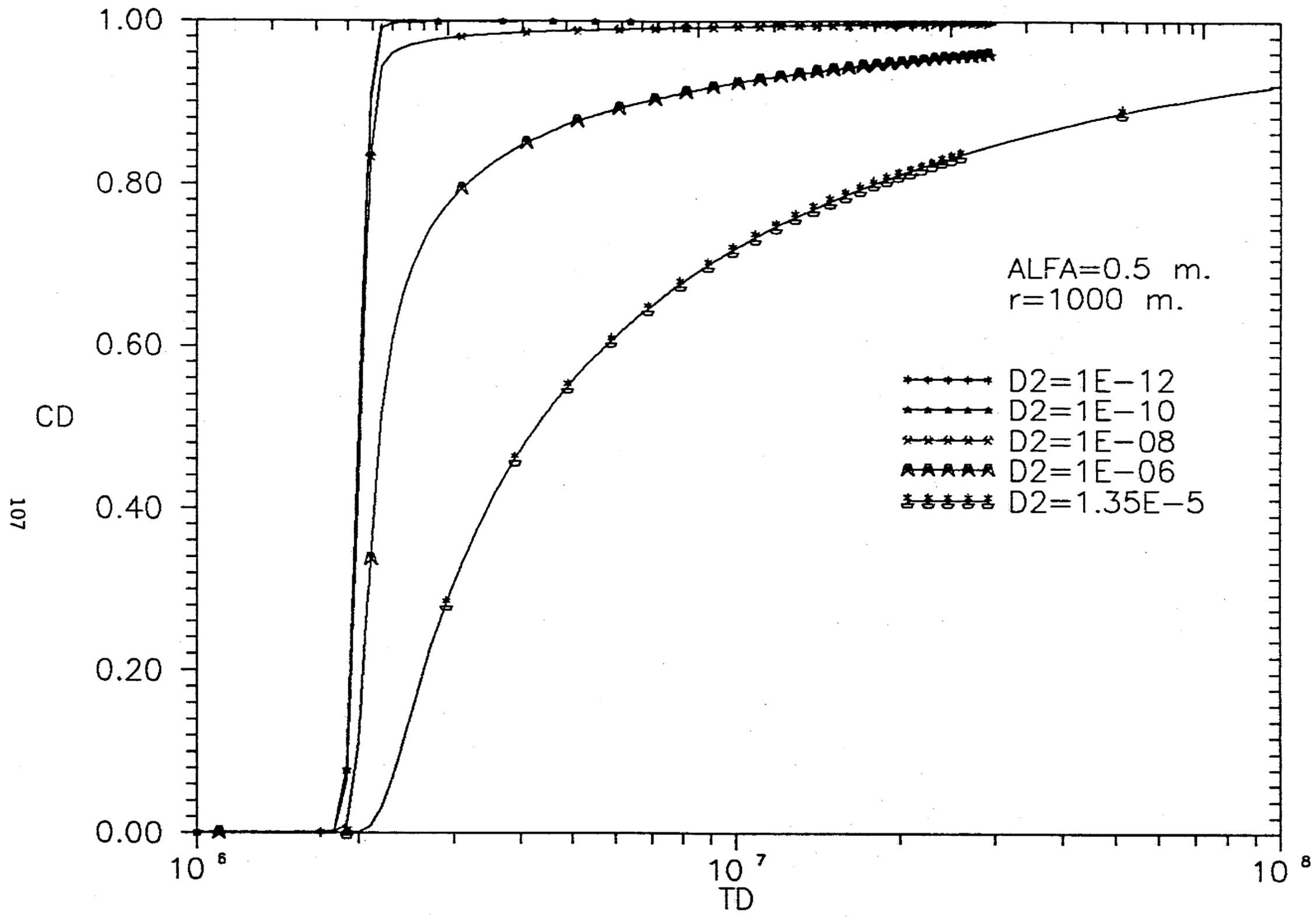


Fig. 5-28 Influencia del coeficiente de difusión de la matriz.
Para el caso de inyección continua.

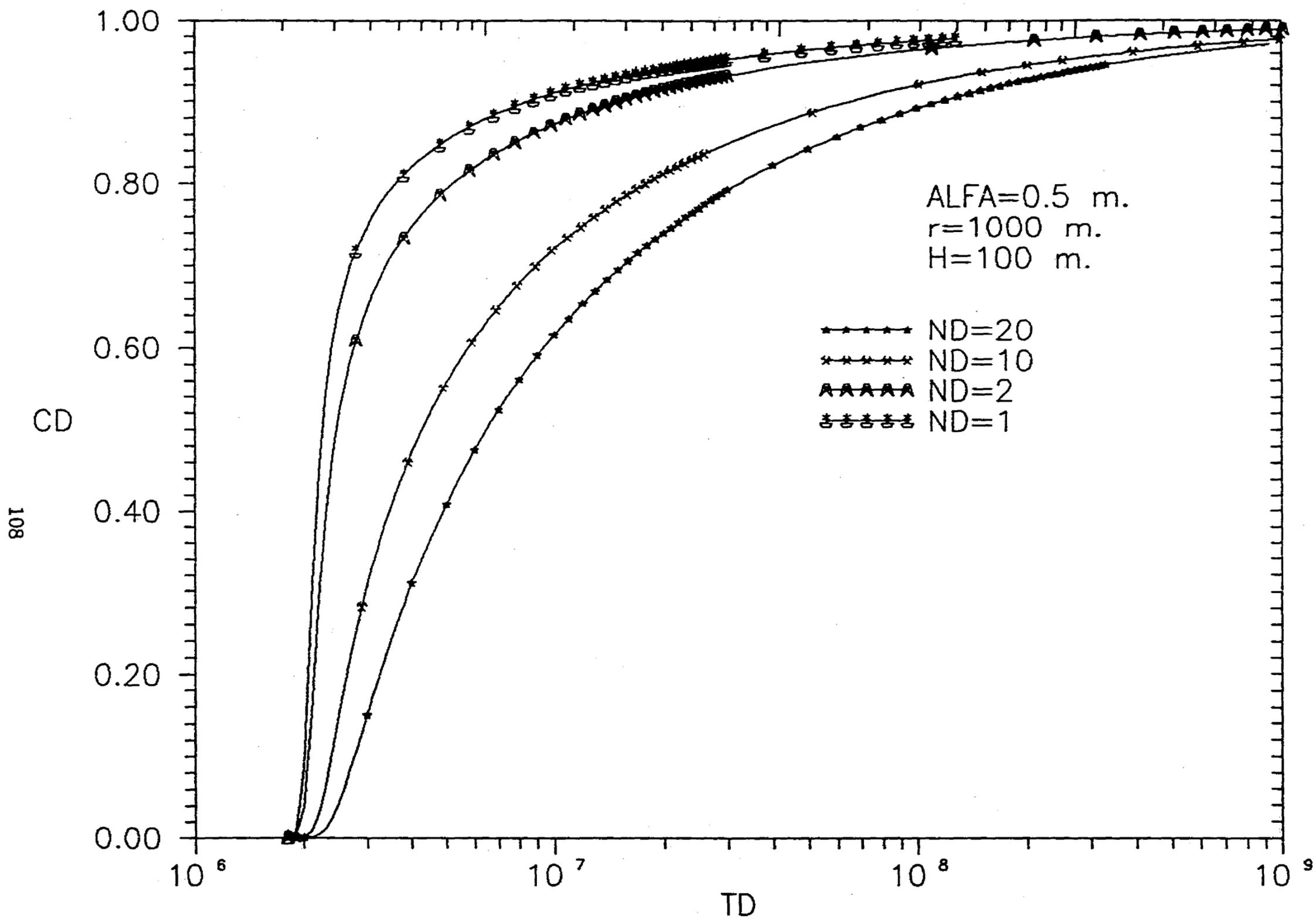


Fig. 5-29 Influencia del número de bloques de matriz.
Para el caso de inyección continua

en cuenta que para el modelo que considera una geometría matriz-fractura cúbica, la porosidad de las fracturas es aproximadamente igual a la siguiente expresión:

$$\phi_1 \cong \frac{6(w - \delta)}{d} \quad (5-6)$$

Se puede concluir de la Ec. 5-6 que a mayor tamaño de bloque, menor porosidad del sistema de fracturas. Por otro lado, cuanto menor es el tamaño de bloque mayor es el área de contacto matriz-fractura. En la Fig. 5-29 se puede observar como disminuye el perfil de concentraciones al incrementarse el número de bloques o bien, al disminuir el tamaño de bloque de matriz. De aquí se puede concluir, que para las características de la matriz evaluada, $\phi_2 = 0.01$ y $D_2 = 1.35E-5 \text{ m}^2/d$, es más importante la transferencia de masa hacia los bloques de matriz debida al área de contacto matriz-fractura grande, por ejemplo para $ND = 20$, que la aparente canalización del trazador debida al incremento de la porosidad de las fracturas. De lo anterior se puede inferir que la respuesta del trazador refleje un incremento de concentración al disminuir la porosidad de las fracturas o bien, al aumentar el tamaño de bloque, cuando existe transferencia de masa hacia la matriz.

Influencia de la constante de adsorción, (k_d)

La constante de adsorción o también llamada constante de equilibrio o de distribución, k_d (Bear y Verruijt, 1987), causa un efecto de retardamiento en el avance del trazador en el medio poroso. Al parámetro R , definido por la Ec. 3-89, se le puede llamar factor de retardamiento, el cual es función de la porosidad de la matriz, de la densidad de la roca y de la constante de adsorción (k_d). Como se puede observar de esta ecuación un factor de retardamiento igual a la unidad, implica que no existe adsorción del trazador en la matriz, lo que correspondería a no tener disminución de concentración en el sistema de fracturas, por efecto del fenómeno de adsorción. Para estudiar el efecto de k_d sobre el perfil de concentraciones se evaluaron diferentes valores de R , como se puede observar

en la Fig. 5-30, en que se presentan 4 perfiles de concentración para $R = 1.0, 0.5, 0.1$ y 0.01 . Se puede observar que la curva correspondiente a $R = 1.0$ es la que resulta en la mayor respuesta del trazador para $\phi_2 = 0.01$, constituyendo una envolvente para todos los perfiles de concentración para $R < 1$. Se puede concluir que la constante de adsorción (k_d) en efecto, es determinante en el tiempo de irrupción así como también en la concentración máxima obtenida en el extremo productor.

Influencia de la constante de decaimiento radioactivo, (λ)

Este parámetro depende exclusivamente del tipo de trazador que se utilice, siendo una propiedad de la sustancia inyectada. Para un trazador radiactivo, la concentración a un tiempo determinado está dada por ley de decaimiento radioactivo Chrien, 1972:

$$N = N_0 \exp(-\lambda t) \quad (5-7)$$

donde:

N : Número de núcleos de la especie radioactiva al tiempo t

N_0 : Número original de núcleos de la especie radioactiva ($t = 0$)

λ : constante de decaimiento radioactivo, definida por

la siguiente expresión:

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}}$$

donde $t_{1/2}$ se le conoce como *vida media* de la sustancia radioactiva, la cual se define como el tiempo requerido para que N núcleos decaiga a $N/2$ núcleos.

La Fig. 5-31 ilustra la variación en el perfil de concnetraciones para 4 tipos de trazadores: Tritio ($t_{1/2} = 4507.75$ días), Estroncio ($t_{1/2} = 64.7$ días), Iridio ($t_{1/2} = 8.07$ días) y un trazador químico ($\lambda = 0$). En esta figura se puede observar que se tiene el

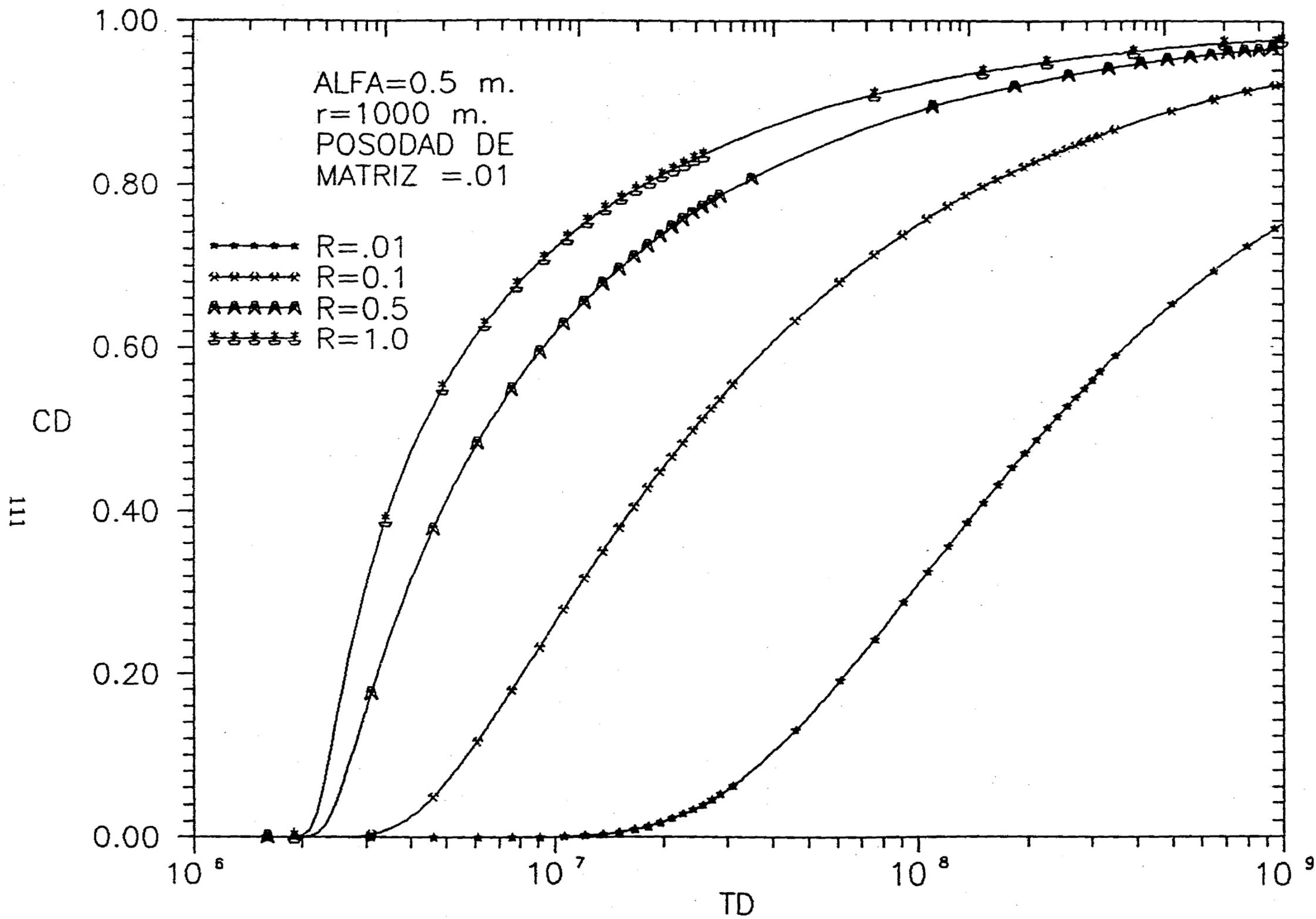


Fig. 5-30 Influencia de la constante de adsorción, representada a través del factor de retardamiento R.

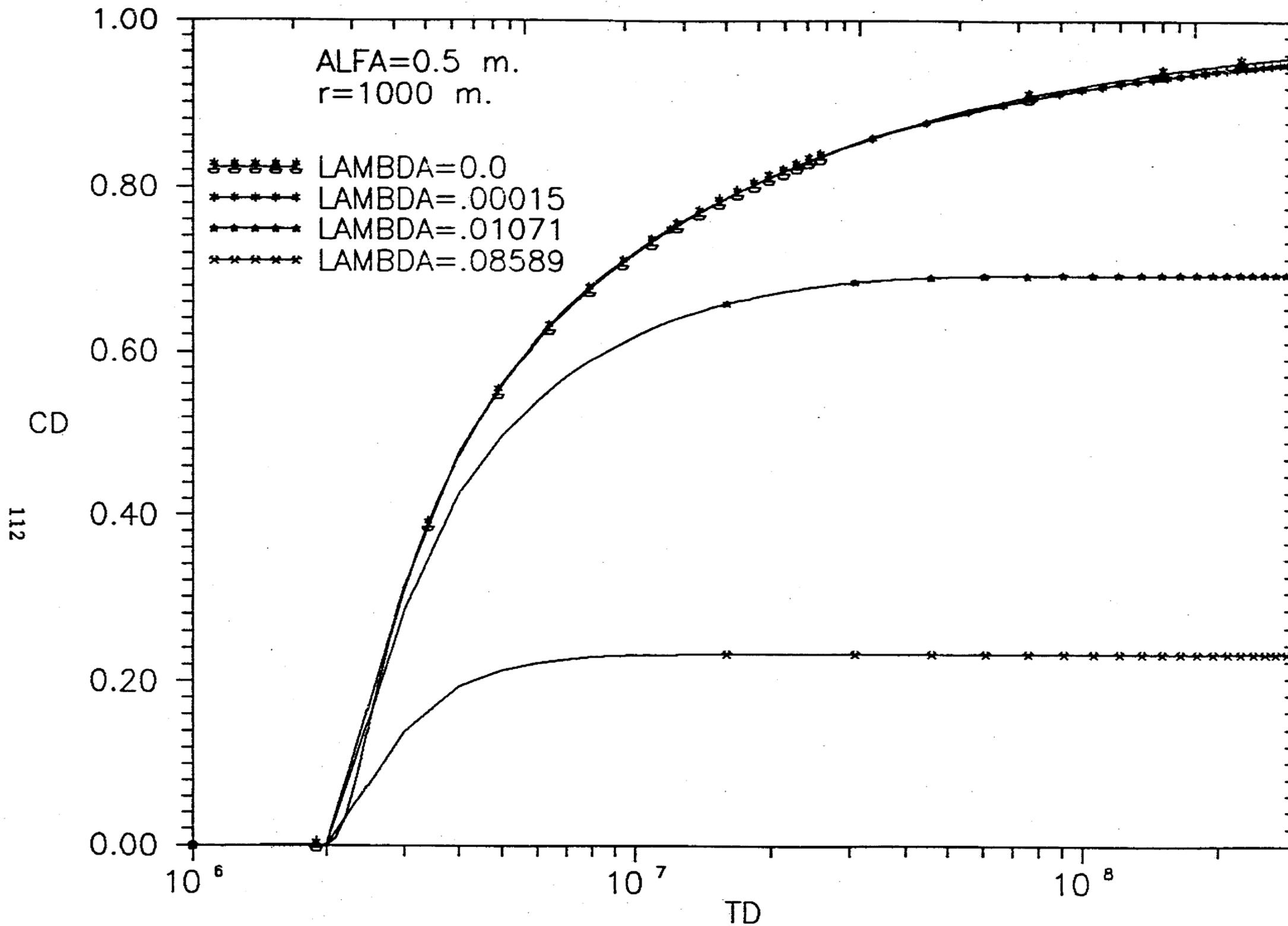


Fig. 5-31 Influencia de la constante de decaimiento radioactivo del trazador, para el caso de una inyección continua.

mismo perfil de concentraciones para el caso del Tritio y del trazador químico, lo cual indica que el tiempo de vida media del Tritio es lo suficientemente grande para que no exista pérdida de masa en la concentración del sistema de fracturas por efecto de su decaimiento, para el rango de tiempos evaluados $10^6 < t_D < 10^8$. Sin embargo, para los casos de las curvas correspondientes al Estroncio e Iridio, se puede decir que si existe un efecto importante en la respuesta del trazador, ya que sus respectivas *vidas medias* no son lo suficientemente grandes para evitar la pérdida de trazador por efecto de sus constantes de decaimiento, de tal forma que la respuesta de concentración para el Iridio, como se puede observar en la Fig. 5-31, es muy pequeña. De esta figura se puede concluir, como es de esperarse, que a mayor λ mayor pérdida de masa del trazador y por consecuencia menor concentración en las fracturas.

Es importante hacer notar que los modelos propuestos en este trabajo, también incluyen el efecto de adsorción de la masa del trazador radioactivo, el cual ha perdido sus propiedades, o en otras palabras, de la masa del trazador que pierde el sistema de fracturas por efecto del decaimiento radioactivo. Considerando lo anterior, es interesante ilustrar el caso del comportamiento de un trazador radioactivo cuando se tiene una constante de adsorción diferente de cero. La Fig. 5-32 muestra los perfiles de concentración para los trazadores radioactivos de la Fig. 5-31, considerando un valor para el parámetro R de 0.1. De la comparación de esta dos figuras, se puede concluir que el efecto de la masa pérdida por decaimiento radioactivo, que es adsorbida por los granos de la roca, es muy importante en la respuesta del trazador.

Inyección finita

La Fig. 5-33 muestra el caso de una inyección finita o bache de trazador radioactivo para un período de inyección $t_D = 970$, para diferentes tamaños de bloque, observándose que a mayor número de bloques menor concentración, como se explicó anteriormente para el caso de las Figs. 5-20 y 5-27. Con el fin de no ser repetitivos, no se presenta la influencia

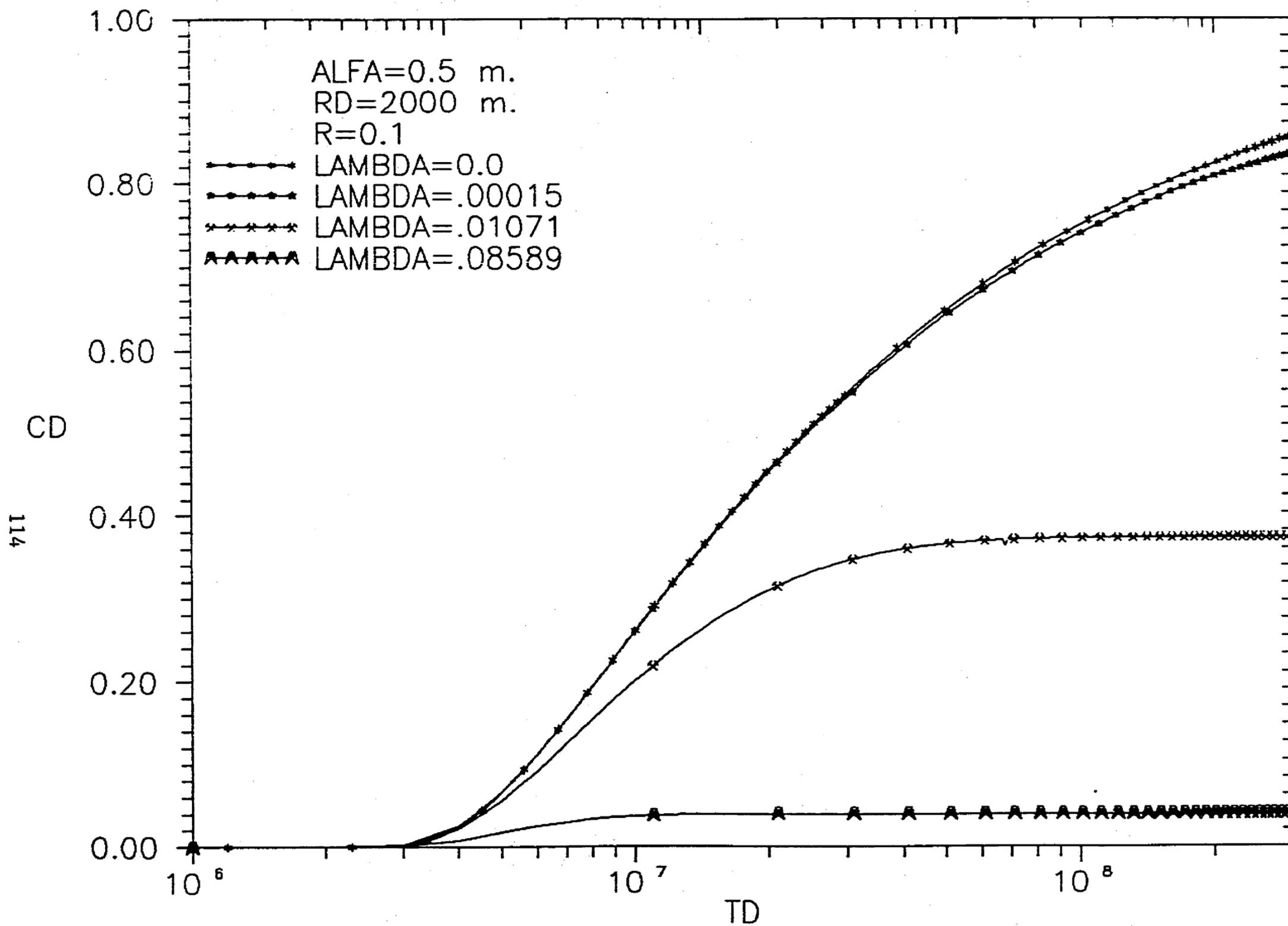


Fig. 5-32 Influencia de la constante de decaimiento radioactivo del trazador, para el caso de una inyección continua.

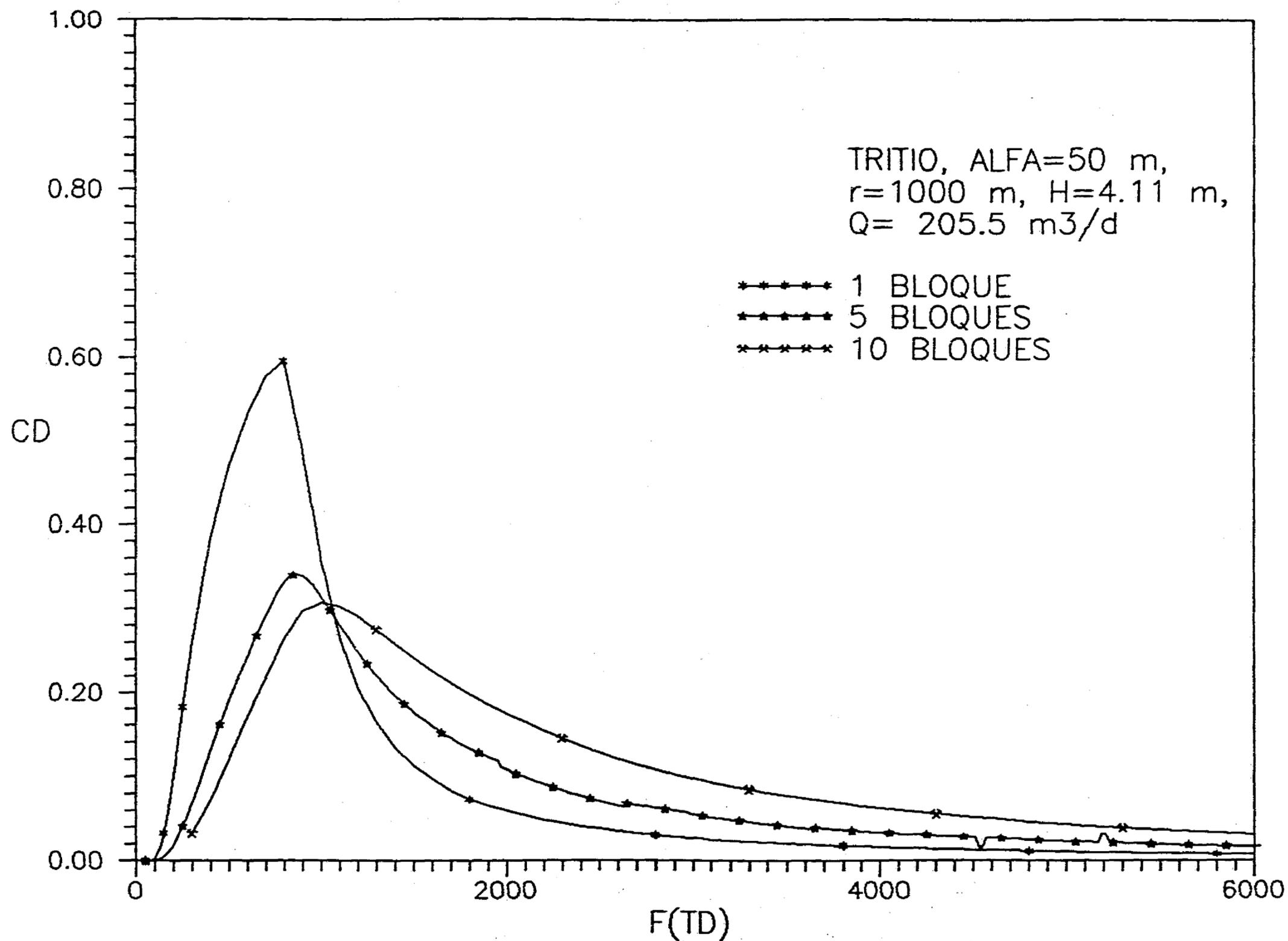


Fig. 5-33 Solución finita o bache para un período de inyección TD=970 y diferentes números de bloques.

de cada uno de los parámetros que intervienen en el modelo para el caso de inyección finita, ya que la influencia de estos parámetros sobre la respuesta del trazador no depende del tipo de inyección. Sin embargo para fines de caracterización, es importante establecer una equivalencia entre los tres modelos propuestos. La Fig. 5-34 ilustra el caso de inyección finita de trazador para los tres modelos propuestos en este trabajo, incluyendo el caso de flujo radial homogéneo, observándose que para el flujo lineal se obtiene un perfil de concentraciones del tipo de una función escalón, debido a que el tiempo de inyección es muy grande para este modelo, dando como resultado que en una gráfica de este tipo no se pueda apreciar un aumento gradual en la concentración para flujo lineal. Sin embargo se puede notar que para los modelos radiales se conserva la forma clásica de la solución para el caso de inyección finita, obteniéndose para un medio homogéneo el mayor perfil de concentraciones, para el radial de estratos el perfil intermedio y para el modelo de bloques, para el cual $ND = 1$, la menor respuesta de trazador.

La Fig. 5-35 muestra las respuestas del trazador para un tiempo de inyección correspondiente al tiempo necesario para obtener una $C_D = 0.2$ en la distancia radial considerada de $R = L = 1000$ m, observándose que la respuesta obtenida para el caso de fracturas verticales (flujo lineal) es mayor y mucho más rápida que la de los modelos radiales. Como se comentó previamente, la función del tiempo adimensional $F(t_D)$ para cada modelo corresponde a la definición particular de t_D los modelos lineal, radial de estratos y radial cúbico, dadas por las Ecs. 3-5, 3-41 y 3-84, respectivamente. La rápida respuesta obtenida para el flujo lineal se explica, considerando que el volumen poroso para este modelo es muy pequeño comparado con los volúmenes porosos de los otros dos modelos.

5.6 Interpretación de una Prueba de Trazadores

En esta sección se trata el problema inverso con respecto al flujo de trazadores en medios porosos naturalmente fracturados, es decir, aquí se determinan cuantitativamente los parámetros básicos del yacimiento naturalmente fracturado a través de la interpretación

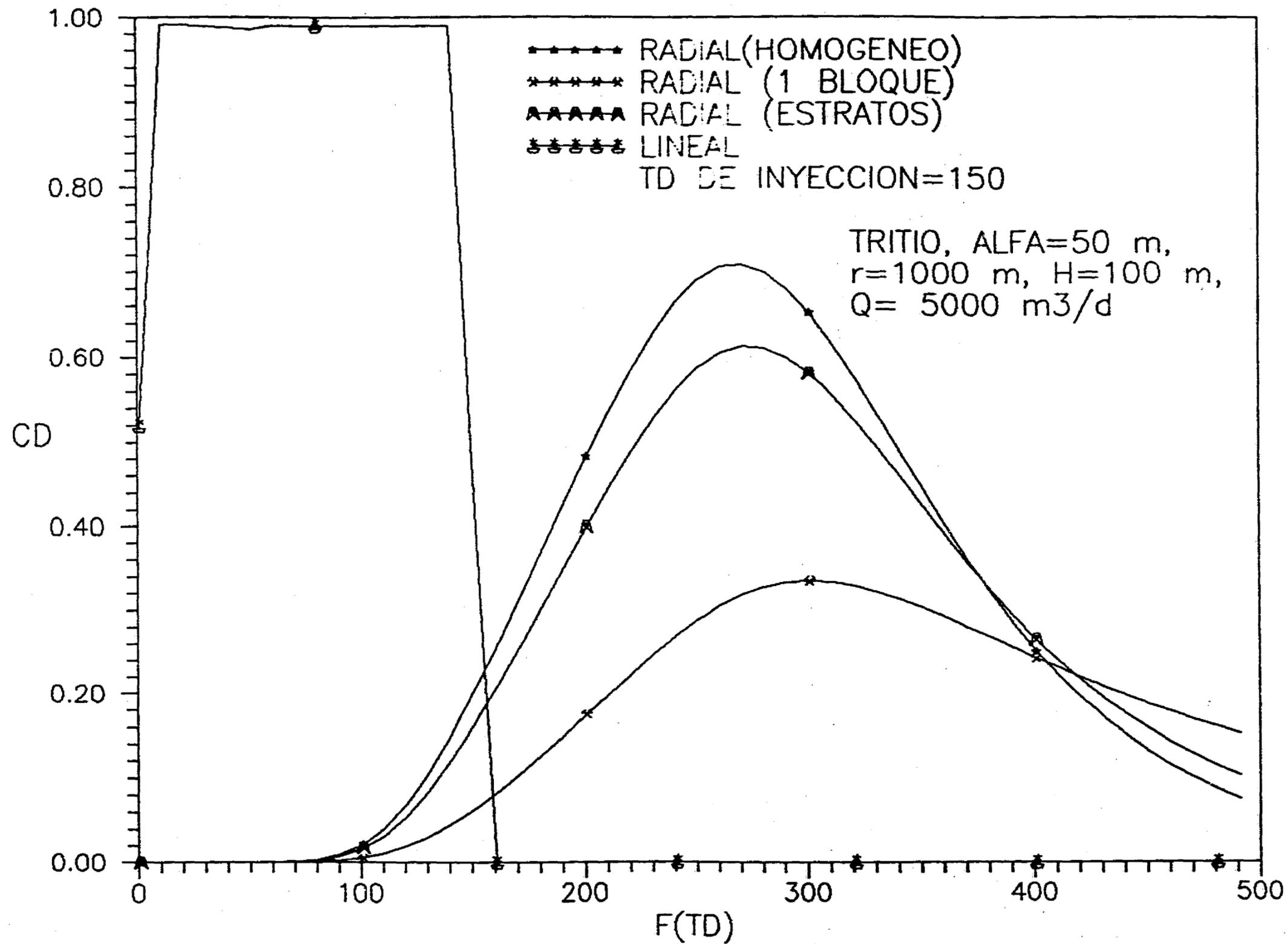


Fig. 5-34 Comparación de los tres modelos propuestos, incluyendo el caso de flujo radial homogéneo, para una inyección finita.

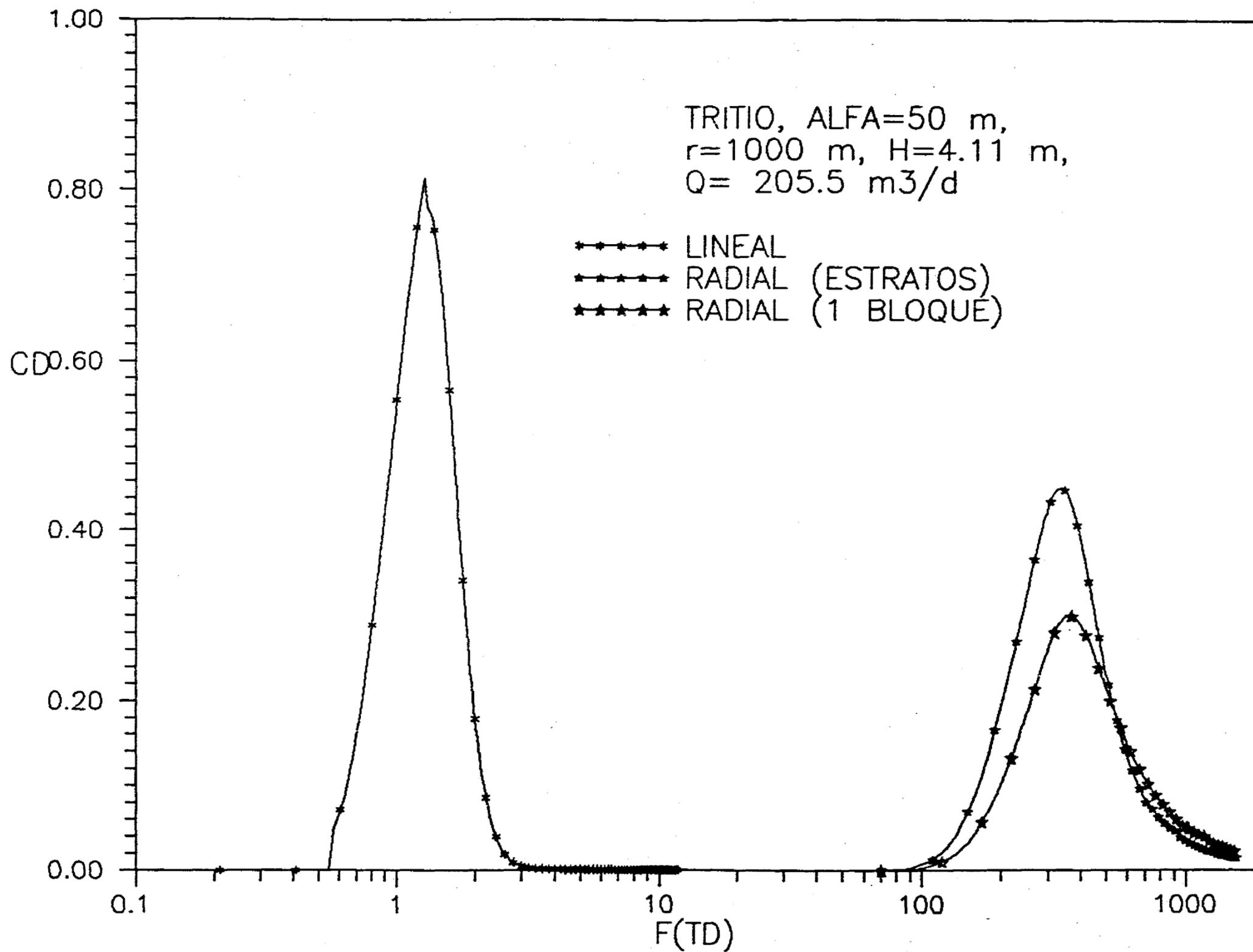


Fig. 5-35 Solución finita o bache para los tres modelos propuestos.

de una prueba de trazadores. La interpretación de este tipo de pruebas se hace con base en los modelos matemáticos desarrollados para predecir el comportamiento del trazador en estos yacimientos, de tal manera que se ajustan los parámetros del modelo, α , ϕ_2 , w , d , D_2 y k_d , para reproducir los datos de concentración de trazador medidos en el pozo durante la prueba. Los parámetros del modelo se ajustan empleando el criterio de Mínimos Cuadrados, que considera la suma del cuadrado de las diferencias entre las concentraciones medidas y las calculadas con el modelo. La función a minimizar es la siguiente:

$$FO(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6) = \sum_{i=1}^{nd} [C(t_i) - C^*(t_i; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6)]^2 \quad (5-8)$$

donde:

$C(t_i)$: concentraciones medidas

$C^*(t, \alpha_j)$: concentraciones calculadas con el modelo

α_j : parámetros de ajuste, $j = 1, 2, \dots, 6$

t : variable independiente

nd : número de datos

Es importante hacer notar que los parámetros del yacimiento que se pueden determinar de una prueba de trazadores, dependen del modelo empleado para su interpretación. Los parámetros anteriormente mencionados corresponden al modelo de geometría matriz-fractura cúbica. En esta sección se presentan tres tipos de ajuste: 1) Caso 1, ajuste con dos parámetros, 2) Caso 2, ajuste con cuatro parámetros y 3) Caso 3, ajuste con seis parámetros. Estos tres casos se detallan posteriormente, haciendo énfasis en el Caso 2 debido a que sería el de mayor aplicación en la interpretación de pruebas de trazadores.

Algoritmo de optimización:

El algoritmo que se utilizó para minimizar la función objetivo representada por la Ec. 5-8, está basado en el método "automático" propuesto por *Rosenbrock, 1960*. Este

procedimiento encuentra el máximo o mínimo de una función no lineal multivariable sujeta a restricciones no lineales.

Las variables que se eligieron como parámetros de ajuste son las siguientes:

$$\alpha(1) = \alpha : \text{coeficiente de dispersividad} \quad (5-9)$$

$$\alpha(2) = \phi_2 : \text{porosidad de la matriz} \quad (5-10)$$

$$\alpha(3) = w : \text{ancho de fractura} \quad (5-11)$$

$$\alpha(4) = d : \text{tamaño de bloque de matriz} \quad (5-12)$$

$$\alpha(5) = D_2 : \text{coeficiente de difusión de la matriz} \quad (5-13)$$

$$\alpha(6) = R : \text{factor de retardamiento} \quad (5-14)$$

La solución del modelo matemático dada por la Ec. 5-2 con las Ecs. 5-3 a 5-5, puede expresarse en términos de los parámetros de ajuste:

$$\bar{C}_{Dr1} = \frac{1}{s} \exp\left(\frac{Y - Y_0}{2}\right) \left\{ \frac{A_i(\xi_{rc}^{1/3} Y)}{A_i(\xi_{rc}^{1/3} Y_0)} \right\} \quad (5-15)$$

$$Y = \frac{r}{\chi_1} + \frac{1}{4\xi_{rc}} \quad (5-16)$$

$$Y_0 = \frac{r_w}{\chi_1} + \frac{1}{4\xi_{rc}} \quad (5-17)$$

$$\xi_{rc} = s + \gamma + \chi_2 \chi_3 \sqrt{s + \gamma} - \chi_2 \quad (5-18)$$

donde:

$$\chi_1 = \alpha(1) \quad (5-19)$$

$$\chi_2 = \frac{2c[\alpha(1)]^2\alpha(2)\alpha(5)}{[\alpha(4)]^2} \quad (5-20)$$

$$\chi_2\chi_3 = \alpha(1)\alpha(2)\sqrt{\frac{c\alpha(5)}{\alpha(3)\alpha(4)\alpha(6)}} \quad (5-21)$$

y de la Ec. 3-88:

$$\gamma = \frac{c\lambda\alpha(1)^2\alpha(3)}{\alpha(4)} \quad (5-22)$$

donde:

$$c = \frac{12\pi H}{q} [m^2/d] \quad (5-23)$$

Las restricciones que se emplearon para los parámetros de ajuste, se determinaron tomando en cuenta su rango de variación de acuerdo a lo reportado en la literatura (Grisak y Pickens, 1981, Koenraad y Baker, 1981 y Hensel, 1989):

$$1 \leq \alpha(1), m \leq 60 \quad (5-24)$$

$$.01 \leq \alpha(2), fraccion \leq .35 \quad (5-25)$$

$$10^{-5} \leq \alpha(3), m \leq .01 \quad (5-26)$$

$$.03 \leq \alpha(4), m \leq 5 \quad (5-27)$$

$$10^{-12} \leq \alpha(5), m^2/d \leq 10^{-5} \quad (5-28)$$

$$.5 \leq \alpha(6), adimensional \leq 1 \quad (5-29)$$

El programa de cómputo que se utilizó para minimizar la función objetivo representada por la Ec. 5-8, consiste en un programa principal y cuatro subprogramas correspondientes a las siguientes funciones: Función Objetivo, Función CX, Función CG y Función CH; donde la Función CX determina los valores de los parámetros α_j y las Funciones CG y CH corresponden a las restricciones de cada uno de los parámetros α_j 's, inferior y superior, respectivamente. Es importante hacer notar que este algoritmo permite emplear como restricciones funciones de los parámetros de ajuste, en caso de que exista interdependencia entre ellos; sin embargo esto requiere de un tratamiento mucho más riguroso. Para el problema de estudio se evitó la interdependencia entre las variables a ajustar, es por esto que los parámetros de ajuste corresponden directamente a las variables reales del problema de flujo, a excepción de $\alpha(6)$ que requiere del valor de la densidad de la roca para determinar la constante de adsorción, k_d . El método de optimización utilizado no limita el número de parámetros de ajuste, ni tampoco el número ni el tipo de restricciones, es decir éstas pueden ser constantes o funciones de los mismos parámetros. Las derivadas parciales con respecto a cada uno de los parámetros de ajuste requeridas para establecer el mínimo de la función, se calculan numéricamente, por ejemplo:

$$\frac{\partial FO}{\partial \alpha(1)} = \frac{FO[\alpha(1) + h, \alpha(2) \dots \alpha(6)] - FO[\alpha(1), \alpha(2) \dots \alpha(6)]}{h} \quad (5-30)$$

donde h debe ser lo suficientemente pequeño.

Los componentes del vector unitario ξ^0 en la dirección de búsqueda del mínimo de la función objetivo ξ_i se calculan en la forma siguiente (Rosenbrock, 1960):

$$\xi_i = - \frac{\frac{\partial FO}{\partial \alpha_i}}{\left\{ \sum_{j=1}^{nd} \left(\frac{\partial FO}{\partial \alpha_j} \right)^2 \right\}^{1/2}} \quad (5-31)$$

Este método requiere la estimación inicial de los parámetros de ajuste y la longitud del

paso, e , a ser considerada en la dirección deseada, la cual puede ser arbitraria. Se evalúa la función tanto con los parámetros iniciales como con los parámetros incrementados en e ; si la función decrece, e se multiplica por $\alpha_R > 1$. Si la función se incrementa, e es multiplicado por $-\beta_R$, donde $0 < \beta_R < 1$ y la dirección del movimiento es en sentido contrario. Este procedimiento continua para todos los parámetros de ajuste α_j 's. A cada uno de estos desplazamientos se les llama "ensayos" y al conjunto de los intentos o "ensayos" hechos con un conjunto de direcciones, se les llama "etapas". El algoritmo continua hasta que se alcanza la convergencia o se presenta una zona de frontera en la vecindad de las restricciones. Las zonas de frontera se definen como sigue:

Zona inferior:

$$G_j \leq \alpha_j \leq (G_j + (H_j - G_j)10^{-4}) \quad (5-32)$$

Zona superior:

$$H_j \leq \alpha_j \leq (H_j + (H_j - G_j)10^{-4}) \quad (5-33)$$

donde G_j y H_j son las restricciones inferior y superior del parámetro α_j , respectivamente.

El método requiere que la estimación inicial de los parámetros satisfaga las restricciones y que no tiendan a las zonas de frontera.

Ejemplos:

Los ejemplos que se presentan en esta sección son del tipo sintético, correspondiendo a la inyección del trazador radioactivo Tritio a un yacimiento naturalmente fracturado. Las concentraciones fueron calculadas con la solución general dada por la Ec. 5-2, usando los parámetros del yacimiento y datos presentados en la Tabla 5-1, utilizando un programa de cómputo constituido por varios subprogramas: Inversión numérica (algoritmo de Crump),

Función en el espacio de Laplace, Función de Airy (para cinco rangos de los argumentos), Función Gamma, entre otros.

Tabla 5-1 Características del yacimiento del ejemplo.

Gasto de inyección,	$q = 205 \text{ m}^3/d$
Distancia radial,	$r = 1000 \text{ m}$
Espesor del yacimiento,	$H = 4.11 \text{ m}$
Ancho de fractura,	$w = .0001 \text{ m}$
Tamaño de bloque,	$d = 2.05 \text{ m}$
Dispersividad longitudinal,	$\alpha = 50 \text{ m}$
Porosidad de la matriz,	$\phi_2 = 0.01$, fraccion
Coefficiente de difusión de la matriz,	$D_e = 1.38E-5 \text{ m}^2/d$
Parámetro de adsorción,	$R = 1.0$

Se probaron los casos de inyección continua y finita de trazador, siendo ésta última de un período de inyección $t_D = 204$, el cual corresponde a un tiempo real de 449 horas. Para minimizar la función objetivo representada por la Ec. 5-22 se utilizaron 40 de las concentraciones obtenidas y el cálculo de las concentraciones $C(t; \alpha_j)$ fué de acuerdo a los valores iniciales estimados para los parámetros α_j 's, diferentes a los presentados en la Tabla 5-1.

Inicialmente se tuvieron algunos problemas, debido al rango y valor de los parámetros de ajuste, ya que sus magnitudes son muy diferentes y el criterio de convergencia del algoritmo se basa en la diferencia entre el valor de la función objetivo actual y la evaluada en la etapa previa. También, la magnitud de la función objetivo puede ser insensible a uno o más de los parámetros, ocasionando que el procedimiento de optimización termine prematuramente. Los problemas anteriormente mencionados se resolvieron parcialmente a través de una homogenización de los rangos de variación de los parámetros, por mencionar alguno, $\alpha(3)$ se multiplicó por 10^4 , con el fin de que tanto su longitud de paso, e , como su propio valor fueran magnitudes semejantes a los otros parámetros, ya que los valores de ancho de fractura son muy pequeños y por consecuencia la longitud del paso, e , a tomar en la dirección deseada tendría que ser del orden de $1/200$ el valor de la magnitud del parámetro, y para este caso estaría fuera del alcance de la precisión deseada, a menos

que ésta fuera de 10^{-8} , lo cual implicaría mayor tiempo de cómputo. Lo anterior sería impráctico para el tipo de función y para la determinación de los parámetros restantes, como es el caso del coeficiente de dispersividad α que corresponde al parámetro de mayor magnitud.

Tomando en cuenta la discusión previa se eligió una precisión de 10^{-5} y se homogeneizaron los parámetros como sigue: $\alpha(1) = \alpha(1)$, $\alpha(2) = .01\alpha(2)$, $\alpha(3) = .0001\alpha(3)$, $\alpha(4) = .1\alpha(4)$, $\alpha(5) = 10^{-6}\alpha(5)$ y $\alpha(6) = .1\alpha(6)$.

Caso 1, dos parámetros de ajuste

Para este ejemplo, se eligieron como parámetros de ajuste la porosidad de la matriz y el tamaño de bloque, esto es: $\alpha(1) = \phi_2$ y $\alpha(2) = d$, debido a que son dos de los parámetros más importantes de un medio naturalmente fracturado. La Fig. 5-36 presenta el ajuste de una prueba de inyección finita de trazador a un yacimiento, cuyas características se presentan en la Tabla 5-1 y los parámetros iniciales y ajustados se incluyen en la Tabla 5-2. En este ajuste se obtuvo un valor mínimo de la función objetivo de $2.18E-6$, en 2 etapas y 43 evaluaciones. La Fig. 5-37 muestra el mismo caso de la figura anterior, con la diferencia de que el ajuste se realizó a partir de parámetros estimados iniciales más alejados de los reales, de acuerdo a la Tabla 5-2, obteniéndose para este caso una función objetivo minimizada de $4.6E-6$, en 3 etapas y 69 evaluaciones, lo que requirió un tiempo de cómputo de más o menos 45% mayor que el necesario para el ajuste de la Fig. 5-36.

Tabla 5-2 Caso 1, dos parámetros de ajuste.

	Fig. 5-36	Fig. 5-36	Fig. 5-37	Fig.5-37
parámetros reales	iniciales	ajustados	iniciales	ajustados
$\alpha(1) = \phi_2 = .01$	0.015	0.010	0.025,	.0095
$\alpha(2) = d = 2.05m$	1.0	2.26	0.5	1.814

De los resultados presentados en las Figs. 5-36 y 5-37, y en la Tabla 5-2, se puede concluir, que los errores en la determinación de la porosidad y del tamaño de bloque de

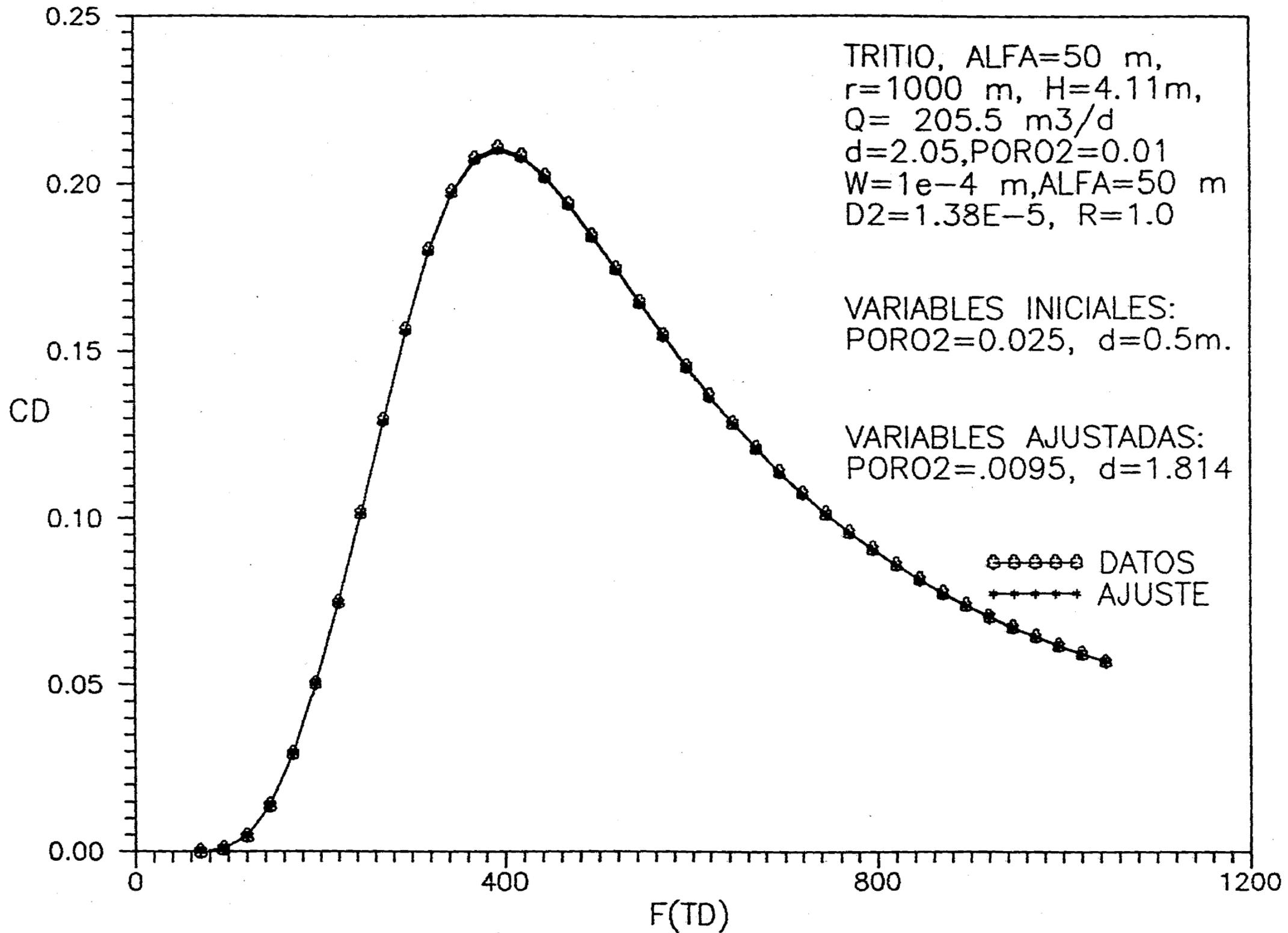


Fig. 5-37 Caso 1, ajuste de dos parametros, con valores estimados iniciales más alejados de los reales. TD inyección = 204.

la matriz son del orden 5% y 11%, respectivamente, y que resultan independientes de la estimación inicial de los parámetros, esto es, para el caso de ajustar dos variables el proceso iterativo permite mayor "libertad" o error de la estimación inicial.

Caso 2, cuatro parámetros de ajuste

Para este caso se eligieron como parámetros de ajuste las cuatro variables reales dadas por las Ecs. 5-9 a 5-12.

La Fig. 5-38 muestra el ajuste de una prueba de trazadores para el caso de inyección continua, la cual fue optimizada en 2 etapas con 49 evaluaciones de la función objetivo, obteniéndose un valor para la función minimizada de $FO = 0.00112$. Esta solución se obtuvo empleando un número de datos $nd = 40$, la estimación inicial y el valor resultante de los parámetros de ajuste se presenta en la Tabla 5-3.

Tabla 5-3 Caso 2, cuatro parámetros de ajuste.

	reales	iniciales	Fig. 5-38 ajustados	Fig.5-39 ajustados
$\alpha(1) = \alpha, m$	50.0	40.0	52.1	50.002
$\alpha(2) = \phi_2$	0.01	0.015	0.0131	.0131
$\alpha(3) = w, m$	0.0001	0.0001	0.00015	.00016
$\alpha(4) = d, m$	2.05	1.5	2.047	2.23

La Fig. 5-39 presenta el ajuste obtenido de una prueba de trazadores inyectado durante un período de $t_D = 204$ a partir de los valores estimados iniciales de la Tabla 5-3, obteniéndose un valor para la función objetivo de $FO = 5.8E-7$, obtenida en 3 etapas con 79 evaluaciones de la función. Los valores de las variables ajustadas se presentan también en la Tabla 5-3. De esta figura 5-39 se puede decir que se logró un ajuste excelente a diferencia de la figura anterior. De estas dos figuras se puede concluir, de acuerdo al punto de vista de optimización, que en efecto, como se mencionó anteriormente, la magnitud de la función genera un problema de insensibilidad "aparente" a algunos de los parámetros

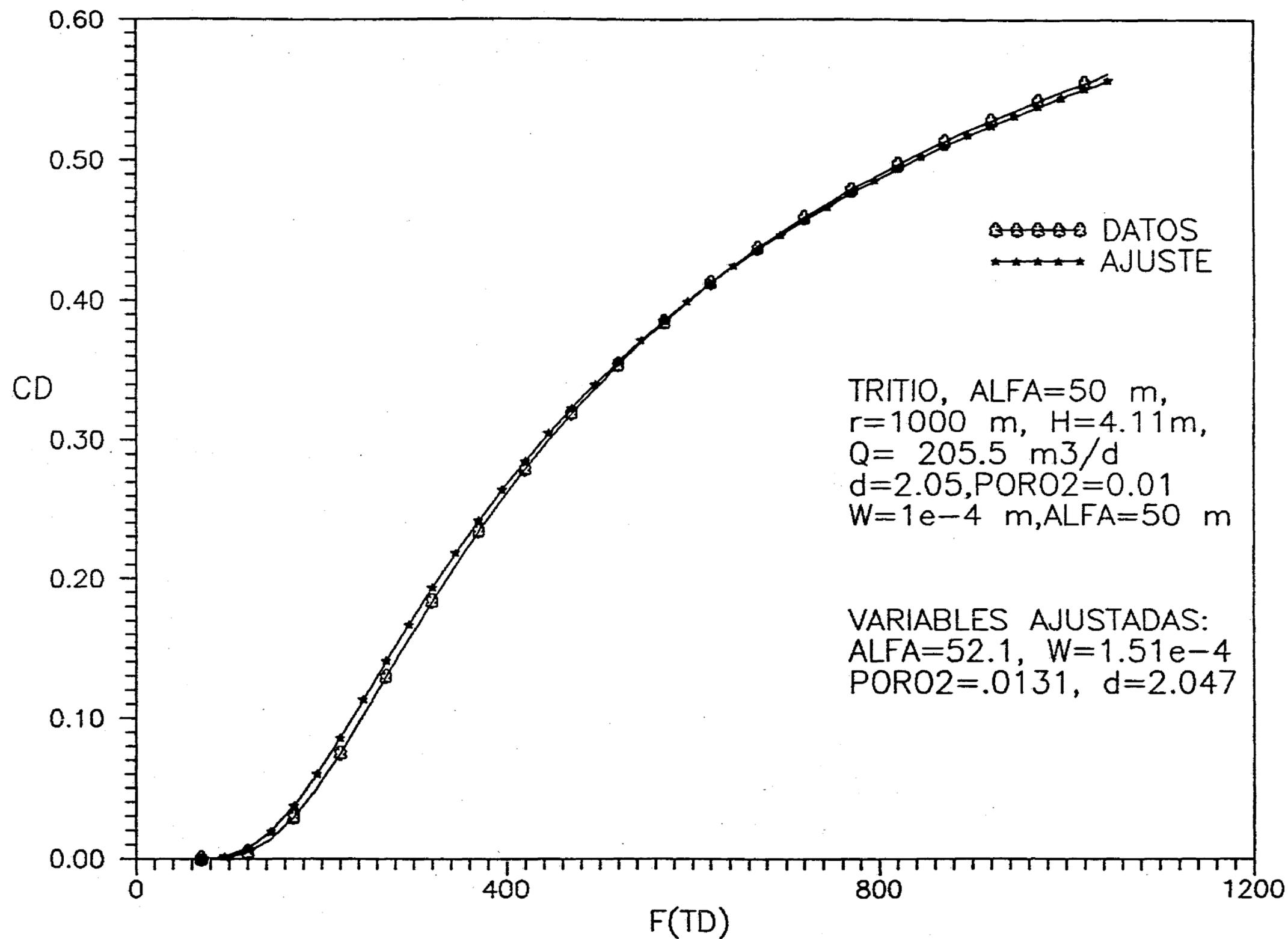


Fig. 5-38 Caso 2, ajuste de cuatro parámetros, inyección continua.

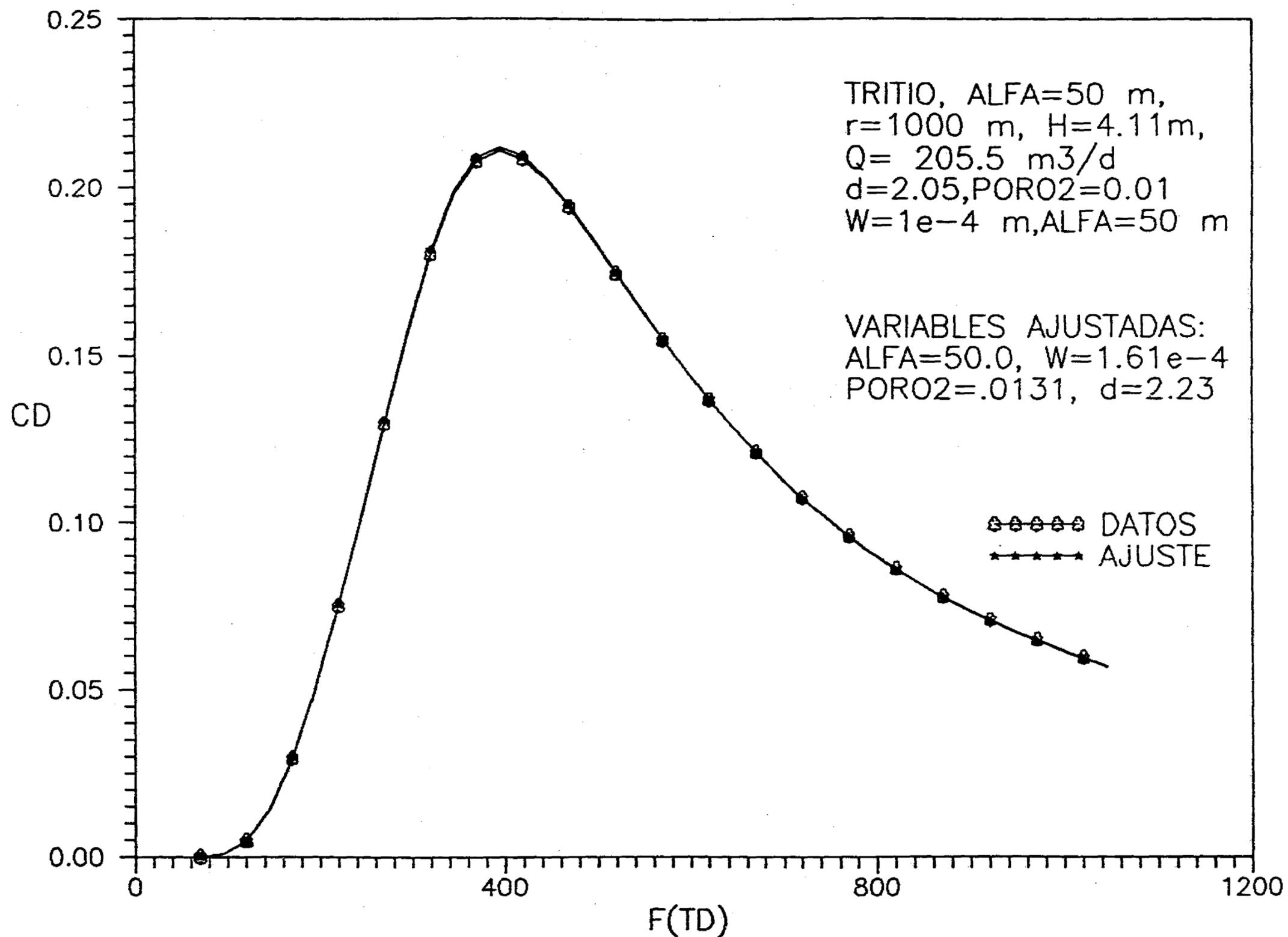


Fig. 5-39 Caso 2, ajuste de cuatro parámetros, inyección finita.

de ajuste, ocasionando que el procedimiento de optimización termine prematuramente. De acuerdo a la interpretación física de la prueba, se puede concluir, que la respuesta del yacimiento es más sensible en el caso de de la inyección finita o bache que en el caso de inyección continua de trazador.

La Fig. 5-40 muestra el mismo caso de la Fig. 5-39 con la diferencia de que para esta última todas las estimaciones iniciales de los parámetros de ajuste fueron cambiados, de acuerdo a la Tabla 5-4. Obteniéndose las variables ajustadas que se presentan en esta tabla en 3 etapas con 55 evaluaciones de la función objetivo, cuyo valor mínimo fue de $FO = 4.36E-5$.

Tabla 5-4 Caso 2, cuatro parámetros de ajuste, con valores iniciales más alejados de los reales.

		Fig. 5-40	Fig.5-41
parámetros reales	iniciales	ajustados	ajustados
$\alpha(1) = \alpha = 50m$	30	50.072	51.08
$\alpha(2) = \phi_2 = .01$.02	0.0272	0.027
$\alpha(3) = w = .0001m$.001	.0011	0.00112
$\alpha(4) = d = 2.05m$	1.0	1.19	1.181

De las Figs. 5-39 y 5-40 se puede observar que para un $t_D < 400$, los parámetros ajustados para cada caso, reportan prácticamente la misma respuesta del trazador y también se puede notar que existe una pequeña diferencia entre ambas respuestas para tiempos mayores a este. Aquí se refleja el problema de de la insensibilidad del modelo a algunos parámetros o el de la "buena estimación inicial" de los parámetros de ajuste, ya que si ésta se logra, frecuentemente permite la convergencia de la solución del proceso iterativo sea más aproximada que el caso contrario. También, si existen mínimos múltiples o varios mínimos locales adicionales a un mínimo absoluto, valores iniciales "pobres", es decir alejados de los valores, frecuentemente pueden conducir a la convergencia del proceso iterativo con parámetros ajustados "no deseados" los cuales pueden ser físicamente imposibles o reportan un valor no absoluto del mínimo de la función objetivo (*Draper y Smith, 1966*).

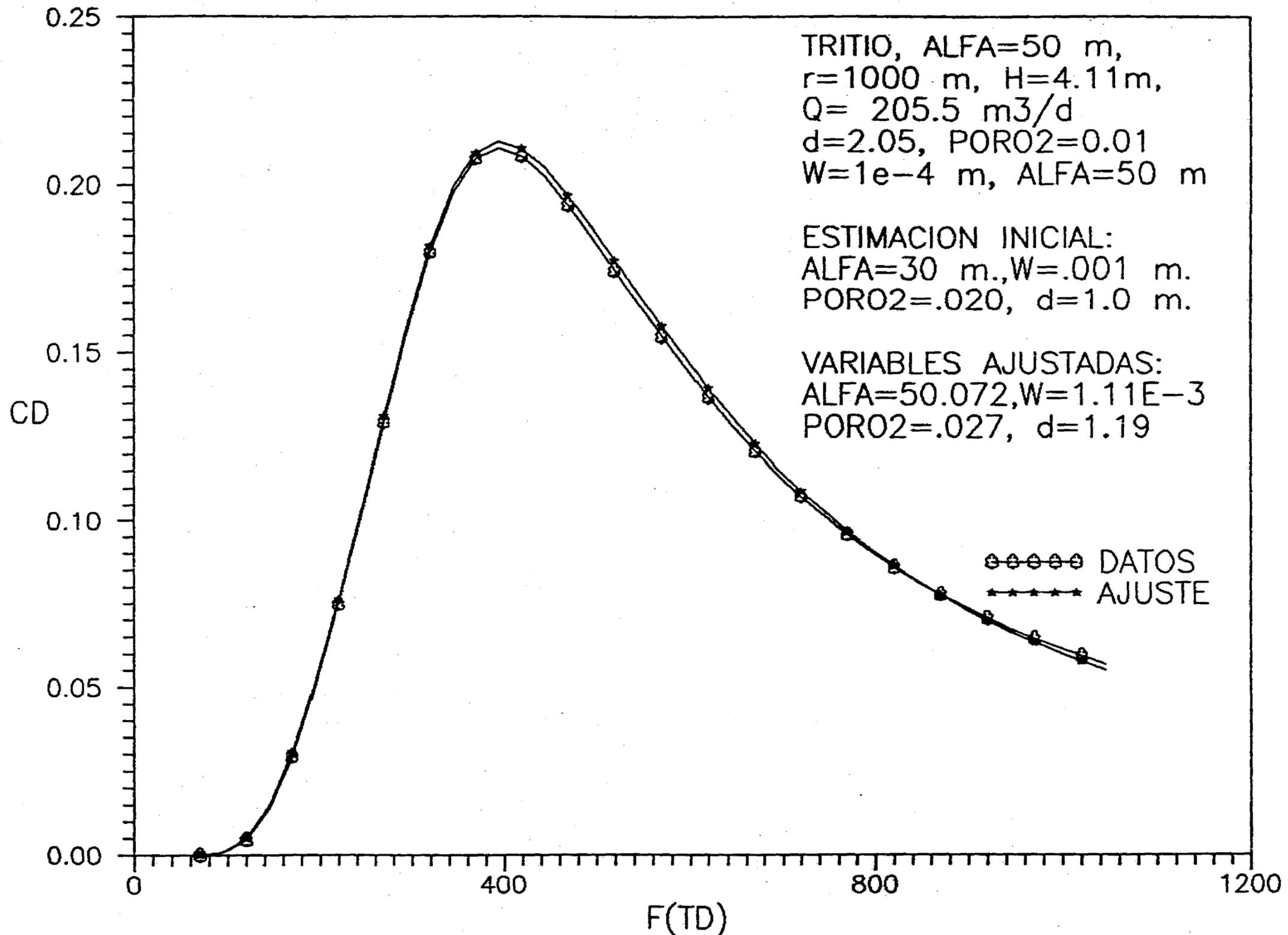


Fig. 5-40 Caso 2, ajuste de cuatro parámetros, con valores estimados iniciales más alejados a los reales, TD inyección = 204.

La Fig. 5-41 ilustra el mismo caso que la Fig. 5-40, con la salvedad de que en este caso la precisión fue de 10^{-8} , obteniéndose con esta precisión una función objetivo minimizada de $3.9E-5$ en 4 etapas con 125 evaluaciones y los parámetros ajustados que se reportan en la Tabla 5-4. De los resultados presentados en esta tabla y de estas dos figuras se puede concluir que a pesar de que el cambio en la precisión mejoró el ajuste de las curvas, los valores de los parámetros ajustados en ambos casos son muy similares. De aquí la importancia de disponer de la información del yacimiento proveniente de otras fuentes, de tal manera que permita inferir una "buena estimación inicial de los parámetros" y así poder obtener una mejor caracterización.

Caso 3, seis parámetros de ajuste

El caso de determinar seis parámetros del sistema a través de la minimización de la Ec. 5-8, también fue analizado, los parámetros de ajuste para este caso corresponden a los representados por las Ecs. 5-9 a 5-14. El último parámetro, R , determina implícitamente el valor de la constante de adsorción k_d , suponiendo conocida la densidad de la roca, de acuerdo a su definición expresada por la Ec. 3-89. Con esta optimización global se logran determinar todas las variables involucradas en el modelo matemático, el cual fue desarrollado considerando los procesos de transferencia de masa de mayor relevancia, que intervienen en el problema de flujo de trazadores en medios porosos naturalmente fracturados. Es importante mencionar que con la optimización de seis parámetros, directamente se pueden estimar cinco de las seis variables reales involucradas en el modelo y la restante que corresponde a k_d se puede estimar a través de la Ec. 3-89. Esto significa una ventaja importante con respecto a otros modelos de este tipo reportados en la literatura (Fossum, 1982, Walkup y Horne, 1984, entre otros).

La Fig. 5-42 ilustra el caso más difícil desde el punto de vista de interpretación de una prueba de trazadores, en la cual se emplean seis parámetros de ajuste, cuyos valores estimados iniciales se presentan en la Tabla 5-5, coincidiendo con los de la Fig. 5-39 para

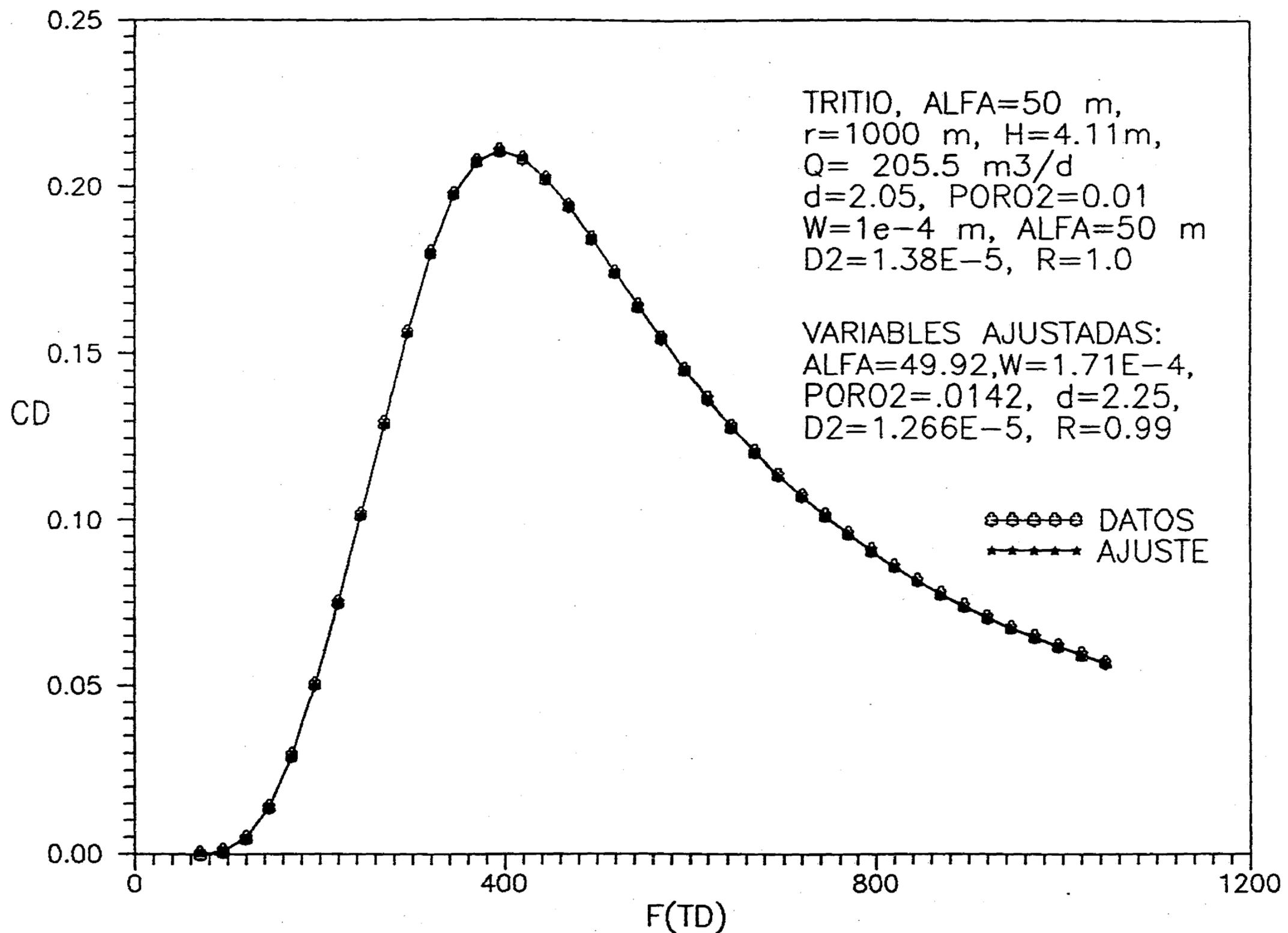


Fig. 5-42 Caso 3, ajuste de seis parametros, inyección finita.

los parámetros definidos por las Ecs. 5-9 a 5-12; con base en un criterio de convergencia de 10^{-6} . De esta figura se puede observar que el ajuste obtenido es prácticamente perfecto, el cual corresponde a una función minimizada de $9.03E-7$, en 3 etapas y con 154 evaluaciones, obteniéndose los valores para los parámetros optimizados de la Tabla 5-5. Del ajuste obtenido en esta figura se puede concluir, para los valores de los parámetros utilizados en este ejemplo, que los errores reportados entre los parámetros reales y los estimados son: .08, 42, 72, 9, 8 y 1 por ciento para $\alpha(1, 2, \dots, 6)$ respectivamente.

Tabla 5-5 Caso 3, seis parámetros de ajuste.

	Fig. 5-42	Fig. 5-42	Fig. 5-43	Fig. 5-43
parámetros reales	iniciales	ajustados	iniciales	ajustados
$\alpha(1) = 50 \text{ m}$	40.0	49.92	30.0	50.93
$\alpha(2) = 0.01$	0.015	0.0142	0.02	0.0242
$\alpha(3) = 0.0001 \text{ m}$	0.0001	$1.74E-4$	0.001	$1.37E-4$
$\alpha(4) = 2.05 \text{ m}$	1.5	2.25	0.7	0.85
$\alpha(5) = 1.38E-5 \text{ m}^2/d$	$1.1E-5$	$1.26E-5$	$7.0E-6$	$9.9E-6$
$\alpha(6) = 1.0$	1.0	0.99	0.7	0.89

La Fig. 5-43 ilustra el caso análogo al de la Fig. 5-42 con la diferencia de que los parámetros iniciales se alejaron más de los parámetros reales, de acuerdo a la Tabla 5-5. La función minimizada para este caso es de $6.16E-5$ en 3 etapas y 124 evaluaciones, resultando los parámetros optimizados de la Tabla 5-5. De estas dos figuras y de los resultados presentados en esta tabla se puede concluir que existe un problema de unicidad de los parámetros estimados. Este problema requiere que la información obtenida por medio de la interpretación de las pruebas de trazadores, se complemente con la información del yacimiento proveniente de otras fuentes (pruebas de presión, análisis de núcleos, registros geofísicos, etc), como se ha mencionado previamente. Es decir, se debe emplear un enfoque multidisciplinario para la interpretación de pruebas de trazadores.

Análisis de sensibilidad de los parámetros χ_i 's y γ

Por otro lado, se analizó la sensibilidad de la solución a los parámetros χ_i 's, repre-

sentados por las Ecs. 5-19 a 5-21 y el parámetro γ , dado por la Ec. 5-22. Con este fin se evaluaron estos parámetros con los valores de los parámetros reales y los estimados a través del ajuste, para los casos de las Figs. 5-38, 5-40 y 5-42, Tabla 5-6.

Tabla 5-6 Variación de los parámetros χ_i 's.

parámetros	reales	Fig. 5-38	Fig. 5-39	Fig. 5-40	Fig.5-42
χ_1	20	19.19	19.99	19.7 1	20.032
χ_2	1.23E-4	1.7E-4	1.37E-4	1.02E-3	1.32E-4
$\chi_2\chi_3$	0.1123	0.1243	0.1115	0.121	0.116
γ	1.4E-5	2.28E-5	2.06E-5	2.73E-4	2.17E-5

De esta tabla se puede concluir en términos generales, a excepción del caso de la Fig. 5-40, que prácticamente estos cuatro parámetros adquieren los mismos valores a pesar de que sus variables reales sean diferentes. Esto implica, primero, que existe un número infinito de combinaciones de las variables reales que reportan un comportamiento muy similar del trazador; y segundo, que la forma en que están involucradas estas variables en la solución, permite que los parámetros χ_i 's puedan variar dentro de un cierto rango y aún así obtener esencialmente la misma respuesta (ver columnas 3,4 y 6 de la Tabla 5-6 y Figs. 5-40 y 5-42). Por otro lado, se puede decir, también en términos generales, que el comportamiento del trazador reporta diferentes grados de sensibilidad a los diferentes parámetros, observándose el siguiente orden: $\chi_2\chi_3$, χ_2 , γ y χ_1 ; siendo $\chi_2\chi_3$ y χ_1 los parámetros que reportan mayor y menor sensibilidad, respectivamente.

De acuerdo a la Fig. 5-40 (columna 5 de la Tabla 5-6), se puede decir que el efecto de los parámetros χ_2 y γ es mayor a medida que t_D aumenta, esto se explica con base en la definición de ξ_{rc} representada por la Ec. 5-18, a medida que t_D aumenta, s disminuye y por consecuencia los parámetros χ_2 y γ tienden a ser más significativos en la solución. Esto se verifica de acuerdo a la interpretación física pertinente, esto es, para tiempos largos en que la respuesta del trazador se ha reducido, para este caso de inyección finita, se produce un pequeño desajuste en los perfiles de concentración de la Fig. 5-40 para $t_D > 400$.

Por otro lado, el mayor efecto del parámetro χ_1 sobre la respuesta del trazador, se presenta durante la primera etapa de la prueba, esto es, un período pequeño de t_D posterior a la irrupción. Como se puede observar en la Fig. 5-38, para la cual los valores de sus parámetros χ_i 's se presentan en la columna 2 de la Tabla 5-6, en esta figura se presentan dos desajustes en los perfiles de concentración: uno para $t_D < 500$ y el otro al final de las curvas. El primero de ellos se debe al efecto del parámetro χ_1 , el cual se explica en base a la definición de Y dada por la Ec. 5-16, pudiendo inferirse que para t_D 's pequeños, la influencia de χ_1 en la solución es mayor, puesto que a medida que t_D disminuye s aumenta y por consecuencia el cociente $1/4\xi_{rc}$ es menor, por lo que χ_1 tiende a ser más significativo en la solución. En cuanto al segundo desajuste que se observa en esta figura al final de la prueba, se atribuye a la influencia de los parámetros χ_2 y γ , que como se mencionó tienen mayor efecto a medida que t_D aumenta. Adicionalmente cabe mencionar que el efecto del parámetro $\chi_2\chi_3$ está presente para todos los valores de t_D , y que para los casos de las Figs. 5-38 y 5-40 en las que el parámetro estimado tiene un error del 10% con respecto al real, su efecto se relaciona con la influencia que tienen los parámetros restantes sobre el comportamiento del trazador durante la prueba. Observando las columnas 2, 3 y 5 de la Tabla 5-6 y las Figs. 5-38 y 5-40, se puede concluir que para tiempos cortos, el error en el producto $\chi_2\chi_3$ se compensa por el error de χ_1 y para tiempos largos el error en este producto se compensa por los errores en los parámetros χ_2 y γ .

5.7 Interpretación de una Prueba de Trazadores bajo la influencia de ruido aleatorio

Con el fin de aproximarse más a la realidad, se hicieron varias pruebas tratando de simular un estudio de campo. Como no se disponía de datos reales, se procedió a generar un ejemplo sintético, para lo cual se indujo ruido aleatorio en los resultados obtenidos al evaluar la solución para el caso de geometría matriz-fractura cúbica, dada por la Ec. 5-2. El proceso de ruido blanco consiste en una secuencia no correlacionada de a_i 's, los cuales son números aleatorios sorteados con una distribución normal específica de media cero

y de desviación varianza σ_a^2 (Davis, 1973). El método empleado para tal efecto se basó en la teoría de análisis de residuales (Montgomery, 1984), que considera que los errores aleatorios tienen una distribución normal, con media de cero y varianza de 1, además de que son independientes entre sí. La expresión empleada es la siguiente:

$$C_{Di} = C_{Di}^* + a_i \quad (5-34)$$

donde C_{Di}^* es la concentración al tiempo i , o el dato i de entrada obtenido con el modelo, a_i es el error aleatorio con distribución normal estándar y C_{Di} es la concentración que simula los datos de campo.

Desde el punto de vista del análisis de secuencia de datos (Davis, 1973), cada observación C_{Di} está compuesta de la señal C_{Di}^* más un error aleatorio o componente de ruido ϵ_i , que para este caso corresponde a los a_i de la Ec. 5-35. El problema visto desde este ángulo consiste en estimar C_{Di} , evitando en lo posible la presencia del ruido. Se han propuesto diferentes esquemas para calcular las perturbaciones aleatorias presentes en las mediciones de una variable física, es decir el componente ϵ_i . La mayoría son estimaciones de mínimos cuadrados o promedios pesados (Box y Jenkins, 1976).

A continuación se ilustra el proceso mediante el cual se obtuvo el conjunto de datos bajo la influencia de ruido aleatorio. Los datos que se emplearon como base para este proceso, corresponden a las concentraciones C_{Di}^* , ver columnas 1 y 2 de la Tabla 5-7, que fueron obtenidas mediante el modelo propuesto en la Sección 3-3 Ec. 5-2, utilizando los datos presentados en la Tabla 5-1.

En primer término se generaron números aleatorios a_i 's con una distribución normal estándar de media cero y varianza uno; los números así obtenidos tienen un rango de variación de $-3 < a_i < 3$ (ya que se considera el 99.9% del área bajo la curva de distribución normal). De la columna 3 de la Tabla 5-7 se puede observar que para este caso, los números aleatorios generados presentan un rango de variación de $-2.52 < a_i < 2.61$.

Comparando las columnas 2 y 3 de esta tabla, se puede observar que los números aleatorios a_i 's son varios órdenes de magnitud mayor que las concentraciones de la columna 2. Por lo que es necesario efectuar un cambio de escala, ya que al sumarse directamente las columnas 2 y 3, se obtiene como resultado un ruido de varios órdenes mayor que la concentración original, que representan valores irreales de concentración. Con base en lo anterior se efectuó un cambio de escala a los valores de concentración reportada por la solución. La columna 4 presenta los valores de concentración a una escala de 1 a 10. Este cambio de escala se efectuó asignando a los extremos de concentración los valores de 1 y 10, al menor y mayor valor respectivamente; siendo para este ejemplo, $C_D = .057 = 1$ y $C_D = .21 = 10$ (columna 4 de la Tabla 5-7). Una vez efectuado este cambio de escala se aplicó la Ec. 5-35, es decir, se sumaron las columnas 3 y 4 (columna 5). Las C_{Di} resultantes se transformaron a su escala original (columna 6), obteniéndose de esta forma el conjunto de datos que simula los datos de campo con los cuales se alimentó el programa de optimización. Como se puede observar de la Tabla 5-7, el máximo error aleatorio obtenido es de 57% correspondiente a la C_D evaluada al tiempo $t_D = 220$.

En esta sección se presentan los tres casos analizados anteriormente, es decir, los correspondientes al ajuste de 2, 4 y 6 parámetros. Los datos de entrada para los tres casos corresponden a los de la columna 6 de la Tabla 5-7. Las Figs. 5-44 a 46 muestran el ajuste de las curvas para los tres casos y la Tabla 5-8 presenta una comparación de los parámetros reales, estimados iniciales, y ajustados para los tres casos, obteniéndose una función minimizada para los tres tipos de ajuste de 0.012. De estas figuras se puede observar que a pesar de los datos dispersos, para los tres casos se obtuvo un ajuste que puede clasificarse como bueno, el cual se puede verificar por medio de los intervalos de confianza del 95%, ya que la mayoría de los datos se encuentra dentro de las bandas de los límites de confianza.

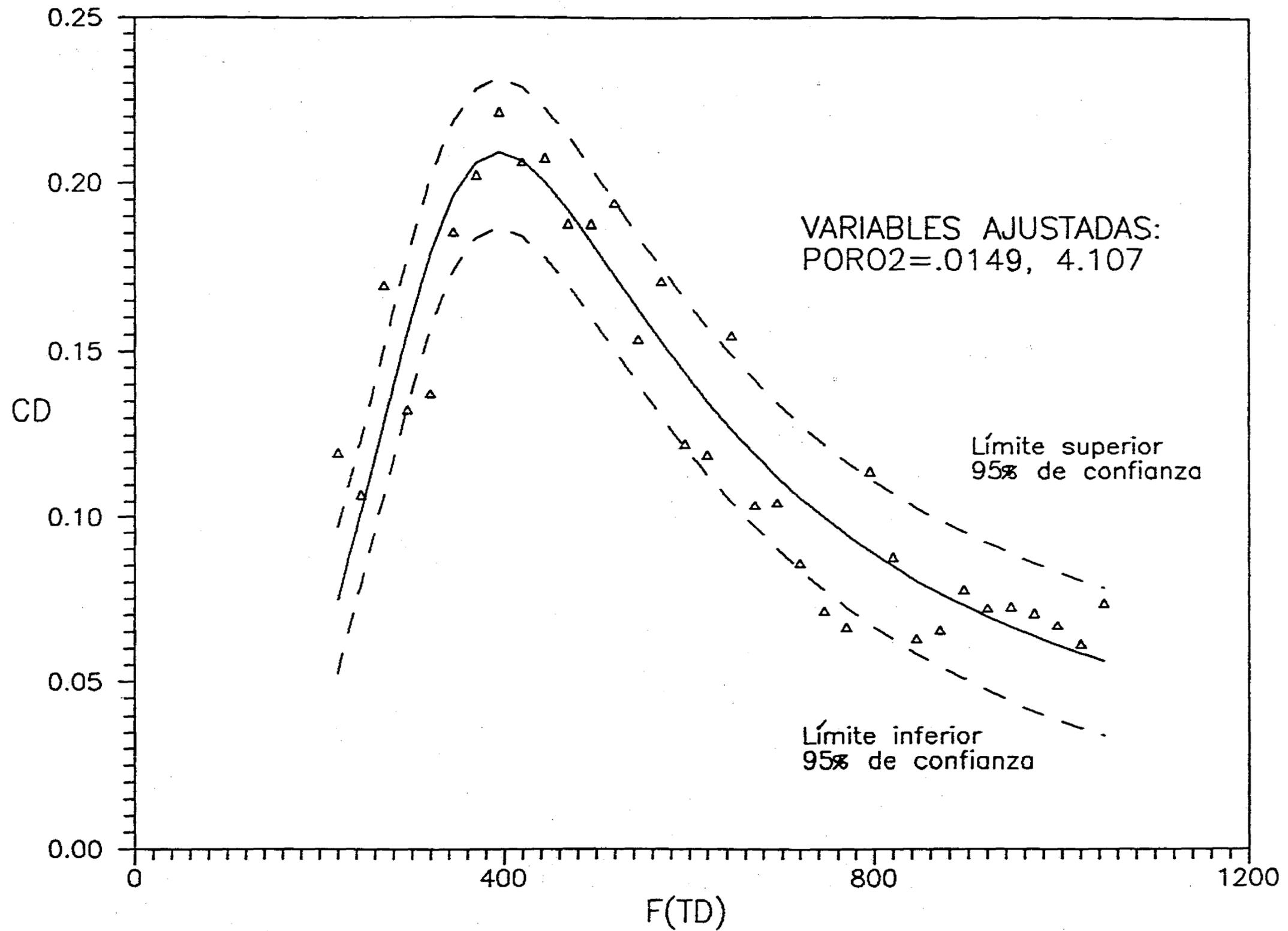


Fig. 5-44 Caso 1, ajuste de dos parámetros con datos bajo la influencia de ruido aleatorio.

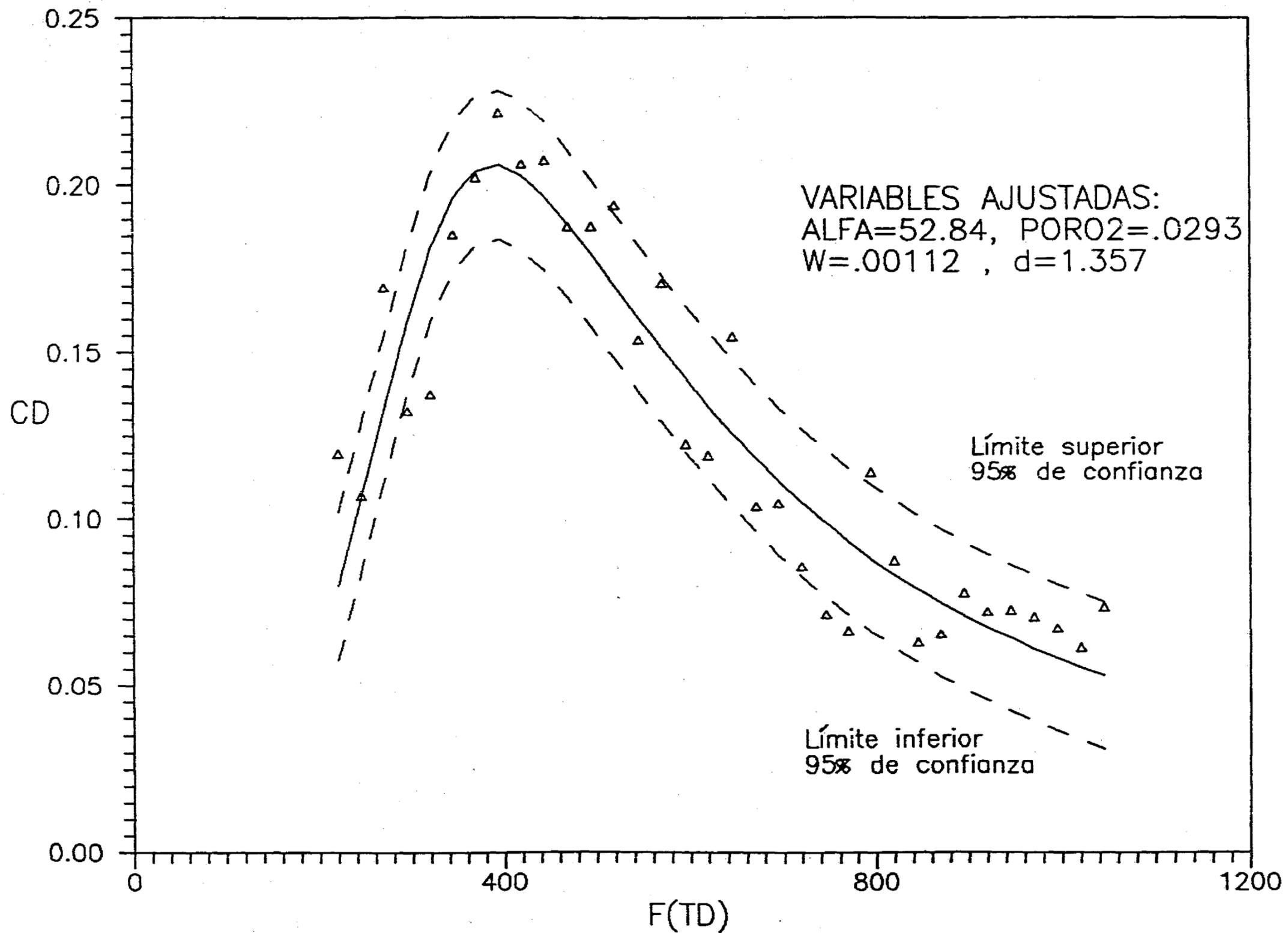


Fig. 5-45 Caso 2, ajuste de cuatro parámetros con datos bajo la influencia de ruido aleatorio.

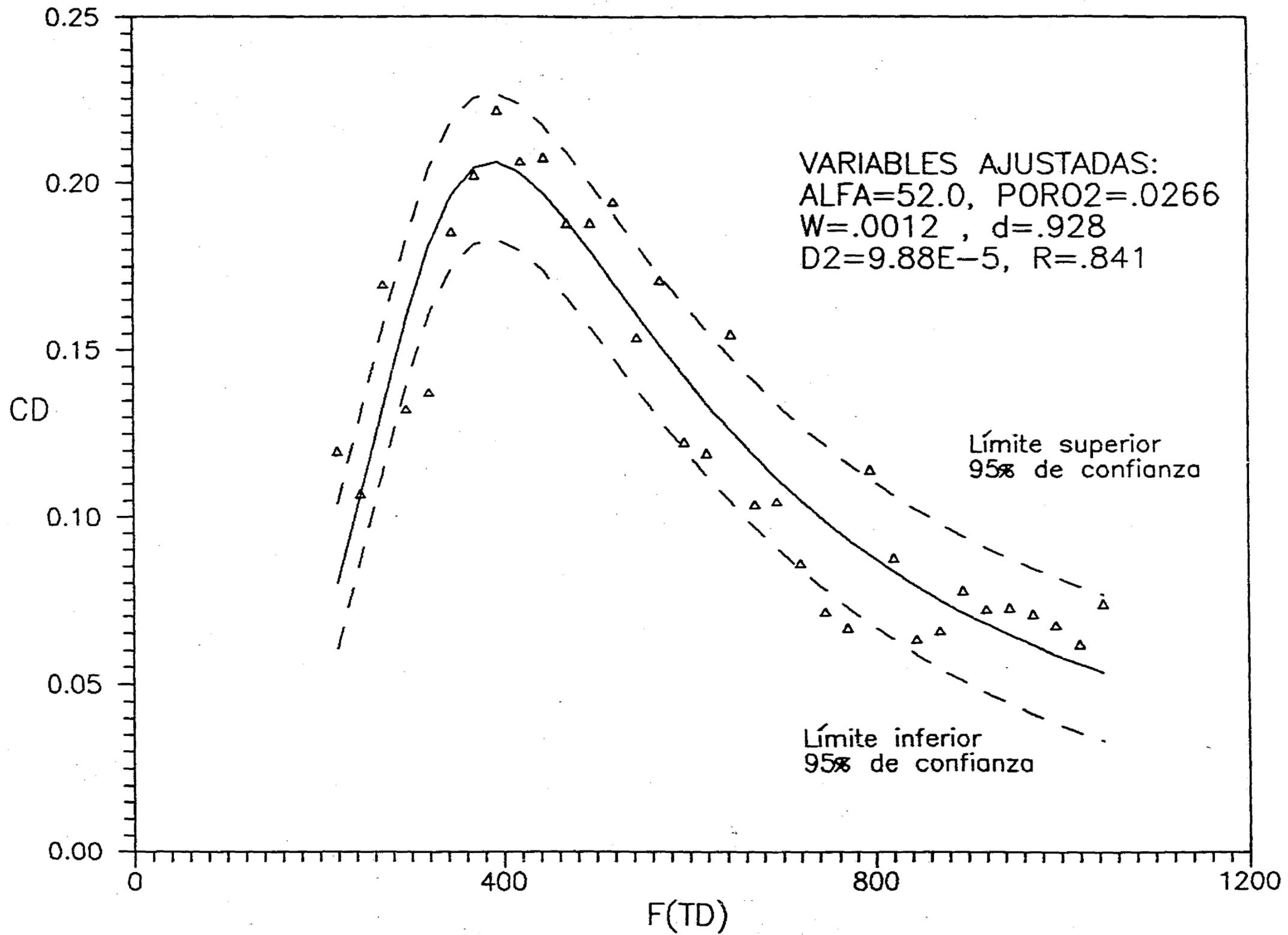


Fig. 5-46 Caso 3, ajuste de seis parámetros con datos bajo la influencia de ruido aleatorio.

Tabla 5-7 Datos utilizados en el proceso de ruido aleatorio.

t_D	C_{Di}^*	a_i	$(C_{Di}^*)_{esc.}$	Cols. 3+4	C_{Di}
220	0.075	2.618	2.063	4.681	0.119
245	0.101	0.295	3.638	3.934	0.107
270	0.129	2.353	5.261	7.614	0.169
295	0.156	-1.423	6.848	5.424	0.132
320	0.180	-2.526	8.244	5.718	0.137
345	0.197	-0.721	9.272	8.551	0.185
370	0.207	-0.321	9.860	9.538	0.202
395	0.210	0.623	10.007	10.630	0.221
420	0.208	-0.133	9.907	9.774	0.206
445	0.202	0.297	9.555	9.852	0.207
470	0.194	-0.361	9.067	8.706	0.189
495	0.184	0.195	8.507	8.702	0.188
520	0.174	1.153	7.917	9.070	0.194
545	0.164	-0.640	7.325	6.685	0.153
570	0.154	0.947	6.751	7.698	0.171
595	0.145	-1.361	6.203	4.842	0.122
620	0.136	-1.039	5.688	4.649	0.119
645	0.128	1.531	5.207	6.738	0.154
670	0.120	-1.018	4.761	3.743	0.103
695	0.113	-0.559	4.348	3.788	0.104
720	0.107	-1.269	3.967	2.697	0.085
745	0.101	-1.768	3.616	1.847	0.071
770	0.095	-1.735	3.292	1.557	0.066
795	0.090	1.360	2.993	4.353	0.114
820	0.086	0.079	2.718	2.798	0.187
845	0.081	-1.106	2.464	1.357	0.063
870	0.077	-0.726	2.230	1.503	0.065
895	0.074	0.214	2.013	2.227	0.078
920	0.070	0.080	1.812	1.893	0.073
945	0.067	0.289	1.627	1.916	0.072
970	0.064	0.352	1.455	1.807	0.070
995	0.062	0.303	1.295	1.598	0.067
1020	0.059	0.119	1.146	1.265	0.061
1045	0.057	0.979	1.007	1.987	0.073

Sin embargo, es conveniente tener en cuenta que al obtener una función minimizada alta como resultado del ajuste, nos indica para fines de caracterización, que los parámetros ajustados son poco confiables. Se puede observar de la Tabla 5-8 que existen diferencias importantes entre los valores ajustados y los reales para los tres casos. La Tabla 5-9

presenta la agrupación de los parámetros ajustados a través de las definiciones de los parámetros χ 's dadas por las Ecs. 5-19 a 5-21, de esta tabla se puede observar, que el parámetro $\chi_2\chi_3$, correspondiente al de mayor influencia sobre la solución de acuerdo a la discusión presentada en la sección anterior, reporta un error de 18% y 11% para los casos de 4, 6 y 2 parámetros de ajuste, respectivamente. También, de aquí se pueden observar las importantes las diferencias para los parámetros χ_2 y γ entre los parámetros ajustados y los reales.

Tabla 5-8 Comparación de los parámetros reales, iniciales y ajustados.

		Caso 1	Caso 2	Caso 3
	-	Fig. 5-44	Fig. 5-45	Fig. 5-46
parámetros reales	iniciales	2 par. ajus.	4 par. ajus.	6 par. ajus.
$\alpha(1) = 50 m$	40.0	-	52.84	52.00
$\alpha(2) = 0.01$	0.015	0.0142	0.0293	0.0266
$\alpha(3) = 0.0001 m$	0.0001	-	0.0011	.00102
$\alpha(4) = 2.05 m$	1.5	4.07	1.137	0.928
$\alpha(5) = 1.38E-5m^2/d$	9.9E-6	-	-	9.88-6
$\alpha(6) = 1.0$.85	-	-	0.85

Tabla 5-9 Variación de los parámetros χ_i 's.

		Caso 1	Caso 2	Caso 3
	-	Fig. 5-44	Fig. 5-45	Fig. 5-46
parámetros	reales	2 par. ajus.	4 par. ajus.	6 par. ajus.
χ_1	20	20.0	18.92	19.20
χ_2	1.23E-4	4.22E-5	1.32E-3	1.24E-3
$\chi_2\chi_3$	0.1123	0.1112	0.1339	0.133
γ	1.4E-5	6.9E-6	3.2E-4	3.44E-4

Por otro lado, si se comparan los parámetros ajustados para los casos de 2, 4 y 6 parámetros de ajuste presentados en esta sección y en la anterior, es decir, las columnas 3, 4 y 5 de la Tabla 5-8 con la columna 3 de la Tabla 5-2, la columna 4 de la Tabla 5-3 y la columna 3 de la Tabla 5-5, respectivamente (presentados en la Tabla 5-10), se puede concluir que la diferencia que se presenta en los parámetros ajustados con respecto a los reales depende de la calidad de los datos con los que se alimenta el programa de ajuste,

ya que los errores que se presentan para los casos analizados con datos bajo la influencia de ruido aleatorio son mayores a los que se presentaron en los casos anteriores . Con base en lo anterior, se puede decir, que para propósitos de caracterización es necesario contar, en lo posible, con datos de concentración confiables, para lo cual es necesario emplear los métodos de filtrado de datos, reducción de ruido y otras técnicas para determinar la confiabilidad de los datos.

Tabla 5-10 Parámetros χ_i 's ajustados sin de ruido aleatorio.

		Caso 1	Caso 2	Caso 3
	-	Fig. 5-36	Fig. 5-38	Fig. 5-42
parámetros reales	iniciales	2 par. ajus.	4 par. ajus.	6 par. ajus.
$\alpha(1) = 50 m$	40.0	-	52.1	49.92
$\alpha(2) = 0.01$	0.015	0.01	0.0131	0.014
$\alpha(3) = 0.0001 m$	0.0001	-	0.00015	.000174
$\alpha(4) = 2.05 m$	1.5	2.26	2.047	2.25
$\alpha(5) = 1.38E-5m^2/d$	9.9E-6	-	-	1.26-5
$\alpha(6) = 1.0$.85	-	-	0.99

CAPÍTULO 6:

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En esta tesis se han presentado tres modelos matemáticos para la interpretación de pruebas de trazadores en yacimientos naturalmente fracturados. Estos modelos consideran flujo lineal (fracturas verticales), flujo radial (fracturas horizontales) y flujo radial con una geometría matriz-fractura cúbica.

Las conclusiones más relevantes de esta investigación son las siguientes:

1. Los tres modelos consideran los mecanismos de transferencia de masa más importantes que afectan el flujo de un trazador: difusión, convección, adsorción y decaimiento radioactivo.
2. Se consideraron los casos de inyección continua, finita o bache y pico o instantánea.
3. La solución para el caso de flujo lineal es semianalítica del tipo integral, lo que evita los problemas de dispersión numérica cuando se utiliza el algoritmo de Stehfest como invertidor numérico reportada previamente por otros investigadores. Esta solución permite, para propósitos prácticos, describir el flujo del trazador a través solamente de dos parámetros.
4. Para las soluciones de flujo radial expresadas en el espacio de Laplace, se encontró que el algoritmo de Crump utilizado como invertidor numérico es altamente confiable.
5. Se presentó una validación detallada de los modelos propuestos, con respecto a soluciones simplificadas y otras similares reportadas en la literatura.
6. Se compararon los tres modelos propuestos, indicando que puede surgir un problema de no unicidad, en la interpretación de una prueba, especialmente para distinguir entre los diferentes casos de flujo radial.

7. El problema inverso en relación al flujo de trazadores en medios porosos referente a la estimación de los parámetros de interés del yacimiento, se resolvió empleando el método de Rosenbrock para el análisis de regresión no lineal, pudiendo estimarse hasta seis variables reales para el caso del modelo de geometría matriz-fractura cúbica, indicando que existe el problema de no unicidad de los parámetros. Es decir, como se ha mencionado se requiere emplear un análisis integral en la caracterización apropiada del medio poroso naturalmente fracturado.

NOMENCLATURA

a	= Parámetro definido por las Ec. 3-34,3-71, L^2/t
A	= Área de la sección transversal expuesta al flujo, L^2
$A_i(x)$	= Función de Airy, definida por las Ecs. 2-20 y 3-68
b	= Espesor de la fractura, L , Ec. 2-22
B	= Constante que depende de las condiciones de frontera
$B_i(x)$	= Función de Airy, definida por las Ecs. 2-18 y 2-22
c_0	= Constante definida en la Ec. 3-68
c_k	= Constante definida en la Ec. 3-68
C	= Concentración del trazador "in-situ", M/L^3
C_D	= Concentración adimensional
\bar{C}_D	= Concentración adimensional en el espacio de Laplace
\cosh	= Coseno hiperbólico
\coth	= Cotangente hiperbólica
d	= Tamaño de bloque de matriz, L
d_D	= Tamaño de bloque de matriz, adimensional
D	= Coeficiente de difusión, L^2/t
D_1	= Coeficiente de dispersión longitudinal, L^2/t , Ec. 5-1
D_{D2}	= Coeficiente de difusión en la matriz, adimensional
D_m	= Coeficiente de difusión molecular, L^2/t
D_{m2}	= Coeficiente de difusión molecular de la matriz, L^2/t , Ec. 2-27
D_r	= Coeficiente de dispersión longitudinal, L^2/t
E	= Espesor del elemento de simetría, L
$\operatorname{erfc}(x)$	= Función error complementaria
$f(Z)$	= Función definida en la Ec. 3-69
$F(t_D)$	= Tiempo adimensional para una geometría específica
$F(r_D)$	= Función definida en la Ec. 2-25
$F(v)$	= Parámetro definido por la Ec. 2-18
FO	= Función objetivo, Ec. 5-8
$g(Z)$	= Función definida en la Ec. 3-69
G	= Concentración adimensional
G_i	= Límite inferior del parámetro α_i , Ec. 5-43
H	= Función escalón
H	= Espesor del yacimiento, L
H_i	= Límite superior del parámetro α_i , Ec. 5-44
I_ν	= Función Bessel modificada de orden ν
j	= Flujo másico, M/t
J_c	= Densidad de flujo convectivo, m/t
k_d	= Constante de adsorción, L^3/M
$K_{1/3}$	= Función Bessel Modificada
l	= Parámetro adimensional, Ec. 2-22
L	= Operador de la Laplace
L	= Longitud del medio poroso, L

Nomenclatura, Cont.

L^{-1}	= Operador inverso de la Laplace
nd	= Número de datos
N	= Número de núcleos de la especie radioactiva, Ec. 5-7
N_0	= Número de original núcleos de la especie radioactiva, Ec. 5-7
ND	= Número de bloques
m	= Parámetro definido en la Ec. 2-25
m_1	= Parámetro definido por la Ec. 3-20
M_A^T	= Masa total de la especie A, M
q	= gasto de inyección, L^3/t
P_e	= Número de Peclet, adimensional
r	= Coordenada tomada en la dirección de flujo radial
r_D	= Distancia radial adimensional
r_w	= Radio del pozo, L
r_{D0}	= Radio del pozo adimensional
R	= Parámetro adimensional definido por las Ecs. 3-12, 3-46 y 3-89
R_1 y R_2	= Factores de retardamiento, adimensional, Ec. 2-27
s	= Parámetro de Laplace
$senh$	= Seno hiperbólico
t	= Tiempo, t
t_D	= Tiempo adimensional definido por las Ecs. 3-5, 3-41 y 3-84
$t_{1/2}$	= Vida media del trazador radioactivo, Ec. 5-7 t
u	= Parámetro definido en la Ec. 2-25
U	= Función escalón unitaria
v	= Velocidad del fluido, L/t
V	= Volumen de control Velocidad del fluido, L/t
w	= Espesor de la fractura, L
w_1	= Parámetro definido en la Ec. 2-22
x	= Coordenada tomada en la dirección de flujo lineal
X	= Parámetro definido por la Ec. 3-63
x_D	= Distancia adimensional, Ec. 3-3
y	= Coordenada tomada en la dirección perpendicular al flujo
y_D	= Distancia adimensional, Ec. 3-4
y_w	= Parámetro definido por la Ec. 2-18
Y	= Parámetro definido por las Ecs. 3-60 y 5-3
Y_0	= Parámetro definido por las Ecs. 3-66 y 5-4
z	= Coordenada perpendicular al flujo radial, L
z_{D0}	= Distancia perpendicular adimensional de la condición de interfase, Ec. 3-82
z_{D0}	= Distancia perpendicular adimensional de la condición de interfase, Ec. 3-75

Nomenclatura, Cont.

Letras Griegas

- α = Coeficiente de dispersividad de la fractura, L
 α = Parámetro adimensional definido por la Ec. 3-23
 α_1 = Parámetro definido en la Ec. 2-24
 α_2 = Parámetro definido en la Ec. 2-27
 α_3 = Parámetro definido en la Ec. 2-28
 $\alpha(1)$ = Parámetro de ajuste, = α, L , Ec. 5-9
 $\alpha(2)$ = Parámetro de ajuste, = ϕ_2 , fracción, Ec. 5-10
 $\alpha(3)$ = Parámetro de ajuste, = w, L , Ec. 5-11
 $\alpha(4)$ = Parámetro de ajuste, = d, L , Ec. 5-12
 $\alpha(5)$ = Parámetro de ajuste, = $D_2, L^2/t$, Ec. 5-13
 $\alpha(6)$ = Parámetro de ajuste, = R , adimensional, Ec. 5-14
 β = Parámetro definido en la Ec. 2-24
 β_{rc} = Parámetro definido por la Ec. 3-99
 β_{rh} = Parámetro definido por la Ec. 3-54
 γ = Parámetro adimensional definido por las Ecs. 3-11 3-45, 3-88 y 5-22
 Γ = Función Gamma
 δ = Espesor de la película estancada de fluido, L
 ϵ = Parámetro adimensional definido por la Ec. 3-108
 ζ = Parámetro definido por la Ec. 2-15
 ζ = Parámetro definido por la Ec. 3-68
 η = Parámetro definido en la Ec. 2-25
 $\bar{\eta}_{Az}$ = Velocidad másica de A en dirección z , M/t
 λ = Constante de decaimiento radioactivo, definido en la Ec. 5-7, $1/t$
 ν = Orden de las funciones Bessel
 ξ_L = Parámetro adimensional definido por la Ec. 3-10
 ξ_{rh} = Parámetro definido por la Ec. 3-57
 ξ_{rc} = Parámetro definido por las Ecs. 3-107 y 5-5
 ω = Variable definida en la Ec. 3-100
 ρ = Densidad de la roca, M/L^3
 τ = Variable de integración de la Ecs. 3-29 a 3-31
 ϕ = porosidad, fracción
 χ_1 = Parámetro definido por la Ec. 5-19
 χ_2 = Parámetro definido por la Ec. 5-20
 χ_3 = Parámetro definido por la Ec. 5-21

Nomenclatura, Cont.

Subíndices

- c* = Cúbico
- D* = Adimensional
- L* = Lineal
- ma* = Matriz
- o* = Inicial
- r* = Radial
- 0* = Relacionado con la concentración de inyección
- 1* = Sistema de fracturas o región móvil
- 2* = Región inmóvil o estancada o matriz

REFERENCIAS

- Abbaaszadeh, M. y Brigham, W. E., 1984. Analysis of Well to Well Tracer Flow to Determine Reservoir Layering, JPT oct., 1753-1760.
- Abramowitz, M. y Stegun, I. A., 1970. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. National Bureau of Standards, Washington, D. C.
- Aguilera, R., 1980. Naturally Fractured Reservoirs. PennWell Books, Tulsa, Oklahoma.
- Bailey, H.R. y Gogarty, W.B., 1963. Diffusion Coefficients from Capillary Flow. Soc. Pet. Eng. J. (Septiembre) 256-266.
- Barenblant, G. I., Zheltov, Iv. P., y Kochina, I. N., 1960. Basic Concepts in the theory of Seepage of Homogeneous Liquids in Fissured Rocks, J. Appl. Math. Mech., 24 (5) 1286-1303.
- Bayar, M. y Okandan, E., 1987. Tracer Flow in a Fractured Geothermal Reservoir Model. Proceeding of the Twelfth Workshop on Geothermal Reservoir Engineering, Stanford University, Stanford, Ca., Enero 20-22, SGP-TR-109.
- Box, E. P y Jenkins, M. G., 1976. Time Series Analysis Forecasting and Control, Holden Day.
- Brigham, W.E. y Smith, D.H., Jr., 1966. Prediction of Tracer Performance on a Five-Spot Pattern. J. Pet. Tech. (Abril) 513-517.
- Chrien, E. R., 1972. Focus on Physics Nuclear Physics, McGraw Hill.
- Chen, C-S., 1985. Analytical and Approximate Solutions to Radial Dispersion from an Injection Well to a Geological Unit with Simultaneous Diffusion into Adjacent Strata. Water Resources Research, Vol. 21, No. 8 (Agosto) 1069-1076.
- Chen, C-S., 1986. Solutions for Radionuclide Transport from an Injection Well into a Single Fracture in a Porous Medium. Water Resources Research, Vol. 22, No. 4 (Abril) 508-518.
- Chen, C-S., 1987. Analytical Solutions for Radial Dispersion with Cauchy Boundary at Injection Well. Water Resources Research, Vol. 23, No. 7 (Agosto) 1217-1224.
- Clenshaw, C.W. y Curtis, A.R., 1960. A Method for Numerical Integration on an Automatic Computer, Num. Math., Vol. 12, pp. 197-205.
- Craig, R.F., Jr., 1971. The Reservoir Engineering Aspects of Water Flooding, Monograph Series, Society of Petroleum Engineers, Richardson, Tex.
- Crump, K.S., 1976. Numerical Inversion of Laplace Transforms Using a Fourier Series Approximation. J. of the Association of Computing Machinery, Vol. 23, No. 1 (Enero) 89-96.
- Davis, C. J., 1973. Statistics and Data Analysis in Geology, Jhon Wiley & Sons.
- Deans, H.A., 1963. A mathematical Model for Dispersion in the Direction of Flow in Porous Media, Soc. Pet. Eng. Jour. 3(1): 49-52.
- Falade, G.K. y Brigham, W.E., 1989. Analysis of Radial Transport of Reactive Tracer in Porous Media. SPE Reservoir Engineering (Febrero) 85-90.
- Fossum, M.P., 1982. Tracer Analysis in a Fractured Geothermal Reservoir: Field Results from Wairakei, New Zealand. Stanford Geothermal Program, SGP-TR-56, Stanford, Ca.
- Grisak, G.E. y Pickens, J.F., 1980. Solute Transport Through Fractured Media 1. The

- Effect of Matrix Diffusion. *Water Resour. Res.*, 16(4), 719-730.
- Grisak, G.E. y Pickens, J.F., 1981. An Analytical Solution for Solute Transport Through Fractured Media with Matrix Diffusion. *J. Hydrol.*, 52, 47-57.
- Grove, D.B. y Beetem, W.A., 1971. Porosity and Dispersion Constant Calculations for a Fractured Carbonate Aquifer Using the Two Well Tracer Method. *Water Resour. Res.*, 7(1), 128-134.
- Guvansen, V. y Guvansen, V.M., 1987. An Approximate Semianalytical Solution for Tracer Injection Tests in a Confined Aquifer with Radially Converging Flow Field and Finite Volume of Tracer and Chase Fluid. *Water Resources Research*, Vol. 23, No. 8 (Agosto) 1607-1619.
- Guyen, O., Falta, R.W., Molz, F.J. y Melville, J.G., 1985. Analysis and Interpretation of Single-Well Tracer Tests in Stratified Aquifers. *Water Resources Research*, Vol. 21, No. 5 (Mayo) 676-684.
- Horne, R.N. y Rodríguez, F., 1983. Dispersion in Tracer Flow in Fractured Geothermal Systems. *Geophysical Res. Letters*, 10(4), 289-292.
- Hsieh, P.A., 1986. A New Formula for the Analytical Solution of the Radial Dispersion Problem. *Water Resour. Res.*, Vol. 22, No. 11 (Octubre) 1597-1605.
- Hugakorn, P.S., Lester, B.H. y Mercer, J.W., 1983. An Efficient Finite Element Technique for Modeling Transport in Fractured Porous Media-1. Single Species Transport. *Water Resour. Res.*, 19(3):841-854.
- Jensen, C.L., 1983. Matrix Diffusion and its Effect on the Modeling of Tracer Returns from the Fractured Geothermal Reservoir at Wairakei, New Zealand. *Stanford Geothermal Program*, SGP-TR-71, Stanford, Ca.
- Lai, C.H., Bodvarsson, G.S., Tsang, C.F. y Witherspoon, P.A., 1983. A New Model for Well Test Data Analysis for Naturally Fractured Reservoirs. Paper SPE 11688, presented at SPE California Regional Meeting, Ventura, Ca., Marzo 23-25.
- Maloszewski, P. y Zuber, A., 1985. On the Theory of Tracer Experiments in Fissured Rock with Porous Matrix. *J. Hydrol.* 79, 333-358.
- Moench, A.F. y Ogata, A., 1981. A Numerical Inversion of the Laplace Transform Solution to Radial Dispersion in a Porous Medium. *Water Resour. Res.*, Vol. 17, No. 1 (Febrero) 250-252.
- Neretnieks, I., 1980. Diffusion in the Rock Matrix: An Important Factor in Radionuclide Retarding. *J. Geophys. Res.*, 85(B8), 4379-4397.
- O'Hara, H. y Smith, F.J., 1969. The evaluation of Definite Integrals by Interval Subdivision. *Computer Jour.*, 12, 179-182.
- Pickens, J.F., Jackson, R.E., Inch, K.J. y Merrit, W.F., 1981. Measurement of Distribution Coefficients Using a Radial Injection Dual-Tracer Test. *Water Resources Research*, Vol. 17, No. 3 (Junio) 529-544.
- Ramírez, S. J., 1988. Modelo para Predecir el Flujo de Trazadores en Yacimientos Naturalmente Fracturados, tesis presentada para optar por el grado de maestría en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México.
- Ramírez, J., Rivera, J. y Rodríguez, F., 1988. Tracer Flow Model for Naturally Fractured Geothermal Reservoirs. *Proceedings, Thirteenth Workshop on Geothermal Reservoir Engineering*, Stanford U., Stanford, Ca., Enero 19-21, SGP-TR-113.
- Ramírez, S.J., Rivera, R.J., Samaniego, V.F. y Rodríguez, F., 1990. A Semianalytical Solution for Tracer Flow in Naturally Fractured Reservoirs. *Proceedings, Fifteenth*

- Workshop on Geothermal Reservoir Engineering, Stanford U., Stanford, Ca., Enero 23-25, 1990.
- Ramírez, S.J., Samaniego, V.F., Rivera, R.J. y Rodríguez, F., 1991. An Investigation of Radial Tracer Flow in Naturally Fractured Reservoirs. Proceedings, Sixteenth Workshop on Geothermal Reservoir Engineering, Stanford U., Stanford, Ca., Enero 23-25.
- Rasmuson, A., 1985. Analysis of Hydrodynamic Dispersion in Discrete Fracture Networks Using the Method of Moments. *Water Resour. Res.*, 21(11): 1677-1683.
- Rivera, R.J., Ramírez, J. y Rodríguez, F., 1987. Parallel Fractures Model for Tracer Flow Through Geothermal Reservoirs-Preliminary Results. Proceedings, Twelfth Workshop on Geothermal Reservoir Engineering, Stanford U., Stanford, Ca., Enero 20-22, SGP-TR-109.
- Rosenbrock, H.H., 1960. An Automatic Method for Finding the Greatest or Least Value of a Function. *Computer. J.*, 3, 175-1984.
- Saidi, A.M., 1987. *Reservoir Engineering of Fractured Reservoirs*. Total Edition Press, Paris.
- Stehfest, H., 1970. Numerical Inversion of Laplace Transforms. *Commun. ACM*, Vol. 13, No. 1, p. 47-49.
- Stephenson, D., Paling, W.A.J. y de Jesús, A.S.M., 1989. Radioatracetr Dispersion Tests in a Fissured Aquifer. *J. of Hydrol.*, 110, p. 253-164.
- Tang, D.H. y Baby, D.K., 1979. Analytical Solution of a Velocity Dependent Dispersion Problem. *Water Resources Research*, Vol. 15, No. 6 (Dec.) 1471-1478.
- Tang, D.H., Frind, E.O. y Sudicky, E.A., 1981. Contaminant Transport in Fractured Porous Media: Analytical Solution for a Single Fracture. *Water Resour. Res.*, 17(3), 555-564.
- Tester, J.N., Bivens, R.L. y Potter, R.M., 1982. Interwell Tracer Analysis of Hydraulically Fractured Granitic Geothermal Reservoirs. *Soc. Pet. Eng. Jour.*, 22(4), 537-545.
- Van Golf-Racht, T.D., 1982. *Fundamentals of Fractured Reservoir Engineering*. Elsevier, Amsterdam.
- Walkup, G.W., Jr., 1984. Characterization of Retention Processes and Their Effect on the Analysis of Tracer Tests in Fractured Reservoirs. Stanford Geothermal Program, SGP-TR-77, Stanford, Ca.
- Walkup, G.W. y Horne, R.N., 1985. Characterization of Tracer Retention Processes and Their Effect on Tracer Transport in Fractured Geothermal Reservoirs Paper SPE 13610, presented at California Regional Meeting, Bakersfield, Ca., Marzo 27-29.
- Warren, J.E. y Root, P.J., 1963. The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs. *Soc. Pet. Eng. J.* (Sept. 1963) 245-255; *Trans., AIME*, Vol. 228.

APÉNDICE A:

DERIVACION DE LA SOLUCION SEMIANALÍTICA PARA FLUJO LINEAL

La Ec. 3-14 puede expresarse de la siguiente forma:

$$\bar{C}_{D1} = \exp\left(\frac{x_D P_{e1}}{2}\right) \left\{ \frac{1}{s} \exp\left(-x_D \sqrt{\frac{P_{e1}^2}{4} + P_{e1}(s + \gamma + \alpha + \sqrt{s + \gamma})}\right) \right\} \quad (\text{A-1})$$

Aplicando la identidad siguiente (Ec. 7-4.3 de Abramowitz y Stegun (1970)):

$$\int_0^{\infty} \exp\left\{-at^2 - \frac{b}{t^2}\right\} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp(-2\sqrt{ab}) \quad (\text{A-2})$$

donde, a partir de la Ec. A-1 se puede concluir:

$$a = 1$$

$$b = \frac{P_{e1} x_D^2}{4} \left(\frac{P_{e1}}{4} + \gamma + s + \alpha \sqrt{s + \alpha} \right) \quad (\text{A-3})$$

Entonces, en base a la Ec. A-2 y las definiciones dadas por la Ec. A-3, la Ec. A-1 puede expresarse:

$$\bar{C}_{D1}(r_D, s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{x_D P_{e1}}{2}\right) \int_0^{\infty} \exp(-\tau^2) \left\{ \frac{1}{s} \exp\left[-\frac{P_{e1} x_D^2}{4\tau^2} \left(\frac{P_{e1}}{4} + \gamma + s + \alpha \sqrt{s + \alpha}\right)\right] \right\} d\tau \quad (\text{A-4})$$

Rearreglando términos en la Ec. A-4:

$$\bar{C}_{D1}(r_D, s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{x_D P_{e1}}{2}\right) \int_0^{\infty} \exp\left[-\tau^2 - \frac{P_{e1} x_D^2}{4\tau^2} \left(\frac{P_{e1}}{4} + \gamma\right)\right] \left\{ \frac{1}{s} \exp\left[-\frac{P_{e1} x_D^2}{4\tau^2} (s + \alpha\sqrt{s + \gamma})\right] \right\} d\tau \quad (\text{A-5})$$

Entonces la concentración adimensional en función de t_D es:

$$C_D(r_D, t_D) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{x_D P_{e1}}{2}\right) \int_0^{\infty} \exp\left[-\tau^2 - k_1 x_D \left(\frac{P_{e1}}{4} + \gamma\right)\right] L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \exp(-k_1 x_D s) \exp(-k_1 \alpha x_D \sqrt{s + \gamma}) \right\} d\tau \quad (\text{A-6})$$

donde,

$$k_1 = \frac{P_{e1} x_D}{4\tau^2} \quad (\text{A-7})$$

La antitransformación de la Ec. A-7 se puede efectuar utilizando la siguiente traslación:

$$L^{-1} \{ \exp(-k_1 s) f(s) \} = F(t - k_1) U(t - k_1) \quad (\text{A-8})$$

donde U es la función escalón, $k_1 > 0$ y $f(s)$ para este caso es:

$$f(s) = \frac{1}{s} \exp\left(-\alpha x_D \sqrt{k_1^2 (s + \gamma)}\right) \quad (\text{A-9})$$

La antitransformación de la Ec. A-9 puede efectuarse utilizando la siguiente transformación lineal:

$$L^{-1} \{f(s - a)\} = \exp(at)f(t) \quad (\text{A-10})$$

donde para este caso:

$$f(s - a) = \frac{1}{(s + \gamma) - \gamma} \exp \left\{ -x_D \sqrt{\frac{s + \gamma}{k_2}} \right\} \quad (\text{A-11})$$

donde

$$k_2 = 1/k_1^2 \quad \text{y} \quad a = -\gamma.$$

La antitransformación de la Ec. A-11 es la siguiente (Ec. 19 apéndice V, Carslaw y Jaeger, 1959):

$$\begin{aligned} L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s - \gamma) + \gamma} \exp \left[-\alpha x_D \sqrt{\frac{s}{k_2}} \right] \right\} = \\ \frac{1}{2} \exp(\gamma t_D) \exp \left(-\alpha x_D \sqrt{\frac{\gamma}{k_2}} \right) \operatorname{erfc} \left\{ \frac{\alpha x_D}{2\sqrt{k_2 t_D}} - \sqrt{\gamma t_D} \right\} + \\ \frac{1}{2} \exp(\gamma t_D) \exp \left(\alpha x_D \sqrt{\frac{\gamma}{k_2}} \right) \operatorname{erfc} \left\{ \frac{\alpha x_D}{2\sqrt{k_2 t_D}} + \sqrt{\gamma t_D} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A-12})$$

Aplicando la antitransformada A-9 a la Ec. A-11 se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s - \gamma) + \gamma} \exp \left[-\alpha x_D \sqrt{\frac{s + \gamma}{k_2}} \right] \right\} = \\ \frac{1}{2} \exp(-\alpha x_D k_1 \sqrt{\gamma}) \operatorname{erfc} \left\{ \frac{k_1 \alpha x_D}{2\sqrt{t_D}} - \sqrt{\gamma t_D} \right\} \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \exp(\alpha x_D k_1 \sqrt{\gamma}) \operatorname{erfc} \left\{ \frac{k_1 \alpha x_D}{2\sqrt{t_D}} + \sqrt{\gamma t_D} \right\} \quad (\text{A-13})$$

Aplicando la Ec. A-7 a la Ec. A-13 se obtiene la ecuación siguiente:

$$\begin{aligned} L^{-1} \left\{ \exp(-k_1 s) \frac{1}{s} \exp(-k_1 \alpha x_D \sqrt{s + \gamma}) \right\} = \\ \frac{1}{2} \exp(-\alpha x_D k_1 \sqrt{\gamma}) \operatorname{erfc} \left\{ \frac{k_1 \alpha x_D}{2\sqrt{t_D - k_1}} - \sqrt{\gamma t_D} \right\} \\ + \frac{1}{2} \exp(\alpha x_D k_1 \sqrt{\gamma}) \operatorname{erfc} \left\{ \frac{k_1 \alpha x_D}{2\sqrt{t_D - k_1}} + \sqrt{\gamma t_D} \right\} \cdot U(t_D - k_1) \end{aligned} \quad (\text{A-14})$$

Finalmente, sustituyendo la Ec. A-14 en la Ec. A-6 y considerando que k_1 dada por la Ec. A-7, la concentración adimensional en la región móvil en términos de t_D es la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} C_{D1}(x_D, t_D) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{x_D P_{e1}}{2}\right) \int_0^\infty \exp\left[-\tau^2 - \frac{P_{e1} x_D^2}{4\tau^2} \left(\frac{P_{e1}}{4} + \gamma\right)\right] \\ \left\{ \exp\left(-\frac{x_D^2 P_{e1} \alpha}{4\tau^2} \sqrt{\gamma}\right) \operatorname{erfc} \left\{ \frac{x_D^2 P_{e1} \alpha}{8\tau^2 \sqrt{t_D - \frac{P_{e1} x_D}{4\tau^2}}} - \sqrt{\gamma \left(t_D - \frac{P_{e1} x_D}{4\tau^2}\right)} \right\} \right\} \\ + \left\{ \exp\left(\frac{x_D^2 P_{e1} \alpha}{4\tau^2} \sqrt{\gamma}\right) \operatorname{erfc} \left\{ \frac{x_D^2 P_{e1} \alpha}{8\tau^2 \sqrt{t_D - \frac{P_{e1} x_D}{4\tau^2}}} + \sqrt{\gamma \left(t_D - \frac{P_{e1} x_D}{4\tau^2}\right)} \right\} \right\} \\ U\left(t_D - \frac{P_{e1} x_D}{4\tau^2}\right) d\tau \end{aligned} \quad (\text{A-15})$$

Para un trazador químico ($\gamma = 0$), la Ec. A-15 se reduce a la siguiente:

$$C_{D1}(x_D, t_D) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{x_D P_{e1}}{2}\right) \int_0^\infty \exp\left\{-\tau^2 - \left(\frac{P_{e1} x_D}{4\tau}\right)^2\right\}$$

$$\operatorname{erfc} \left\{ \frac{x_D^2 P_{e1} \alpha}{8\tau^2 \sqrt{t_D - \frac{P_{e1} x_D}{4\tau^2}}} \right\} U \left(t_D - \frac{P_{e1} x_D}{4\tau^2} \right) d\tau \quad (\text{A-16})$$

Las Ecs. A-15 y A-16 fueron integradas numéricamente utilizando el algoritmo de O'Hara (1969), para lo cual se requirió efectuar los siguientes cambios de variables: Primer cambio de variable:

$$\begin{aligned} \tau' &= \tau + 1 \\ d\tau' &= d\tau \end{aligned} \quad (\text{A-17})$$

Segundo cambio de variable:

$$\begin{aligned} \tau'' &= \frac{1}{\tau'} \\ d\tau'' &= \frac{-d\tau'}{(\tau')^2} \end{aligned} \quad (\text{A-18})$$

Aplicando los cambios de variable A-17 y A-18 a las Ecs. A-15 y A-16, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} C_{D1}(x_D, t_D) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left(\frac{x_D P_{e1}}{2} \right) \int_0^\infty \frac{1}{(\tau'')^2} \exp \left[- \left(\frac{1}{\tau''} - 1 \right)^2 - \frac{P_{e1} x_D^2}{4 \left(\frac{1}{\tau''} - 1 \right)^2} \left(\frac{P_{e1}}{4} + \gamma \right) \right] \\ &\left\{ \exp \left(- \frac{x_D^2 P_{e1} \alpha}{4\tau'^2} \sqrt{\gamma} \right) \operatorname{erfc} \left\{ \frac{x_D^2 P_{e1} \alpha}{8 \left(\frac{1}{\tau''} - 1 \right)^2 \sqrt{t_D - \frac{P_{e1} x_D}{4 \left(\frac{1}{\tau''} - 1 \right)^2}}} - \sqrt{\gamma \left(t_D - \frac{P_{e1} x_D}{4 \left(\frac{1}{\tau''} - 1 \right)^2} \right)} \right\} \right\} \\ &+ \left\{ \exp \left(\frac{x_D^2 P_{e1} \alpha}{4 \left(\frac{1}{\tau''} - 1 \right)^2} \sqrt{\gamma} \right) \operatorname{erfc} \left\{ \frac{x_D^2 P_{e1} \alpha}{8 \left(\frac{1}{\tau''} - 1 \right)^2 \sqrt{t_D - \frac{P_{e1} x_D}{4 \left(\frac{1}{\tau''} - 1 \right)^2}}} + \sqrt{\gamma \left(t_D - \frac{P_{e1} x_D}{4 \left(\frac{1}{\tau''} - 1 \right)^2} \right)} \right\} \right\} \\ &U \left(t_D - \frac{P_{e1} x_D}{4 \left(\frac{1}{\tau''} - 1 \right)^2} \right) d\tau \end{aligned} \quad (\text{A-19})$$

Para trazador químico ($\gamma = 0$):

$$C_{D1}(x_D, t_D) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{x_D P_{e1}}{2}\right) \int_0^\infty \frac{1}{(\tau'')^2} \exp\left\{-\left(\frac{1}{\tau''} - 1\right)^2 - \frac{P_{e1}^2 x_D^2}{4\left(\frac{1}{\tau''} - 1\right)^2}\right\} \\ \operatorname{erfc}\left\{\frac{x_D^2 P_{e1} \alpha}{8\left(\frac{1}{\tau''} - 1\right)^2 \sqrt{t_D - \frac{P_{e1} x_D}{4\left(\frac{1}{\tau''} - 1\right)^2}}}\right\} U\left(t_D - \frac{P_{e1} x_D}{4\left(\frac{1}{\tau''} - 1\right)^2}\right) d\tau \quad (\text{A-20})$$

La ecuación A-19 corresponde a la ecuación semianalítica general y la Ec. A-20 es la solución semianalítica para el caso particular de considerar trazador químico.

APÉNDICE B: DERIVACIÓN Y SOLUCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO PARA FLUJO RADIAL, YACIMIENTO ESTRATIFICADO.

B.1 Desarrollo de las Ecuaciones Fundamentales de Flujo

B.1.1 Ecuación de flujo para la región móvil

Aplicando un balance de materia a la región móvil (1) de la Fig. 3.2 se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ritmo de entrada} \\ \text{de masa de la} \\ \text{especie A en el} \\ \text{vol. de control} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{ritmo de salida} \\ \text{de masa de la} \\ \text{especie A en el} \\ \text{vol. de control} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{ritmo de} \\ \text{transferencia} \\ \text{de masa de A} \\ \text{en la interfase} \\ \text{matriz-fractura} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{ritmo de} \\ \text{acumulación} \\ \text{de masa de A} \\ \text{dentro del} \\ \text{vol. de control} \end{array} \right\} \quad (\text{B-1})$$

Suposiciones:

1. Densidad de la especie A constante.
2. La especie A no se produce mediante algún tipo de reacción química dentro del volumen de control.

Con base en las suposiciones anteriores, la Ec. B-1 puede escribirse como sigue:

$$\frac{\partial M_A^T}{\partial t} = -\text{div}(\bar{\eta}) + \frac{2}{E}\bar{\eta}_{Az} \quad (\text{B-2})$$

donde:

M_A^T : masa total de la especie A

$\bar{\eta}_A$: velocidad másica total de la especie A.

$\bar{\eta}_{Az}$: término de liga de las dos regiones, expresado en función de la velocidad másica.

Por otra parte, la masa total por unidad de volumen, M_A^T , se expresa como:

$$M_A^T = M_{Af} + M_{Aad} + M_{Ard} \quad (\text{B-3})$$

donde:

M_{Af} = masa fluyente

M_{Aad} = masa adsorbida

M_{Ard} = masa perdida por decaimiento radioactivo

Debido a que no existe adsorción en la región móvil, la velocidad de cambio de masa total se puede escribir como sigue:

$$\frac{\partial M_A^T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\phi_1 C_{r1}) + \lambda \phi_1 C_{r1} \quad (\text{B-4})$$

donde λ es la constante de decaimiento radiactivo definida por la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial (C_{rad})}{\partial t} = \lambda C_{r1} \quad (\text{B-5})$$

Por otro lado, el término de densidad de flujo total está definido por la primera ley de Fick, pudiendo expresarse como:

$$\eta_A^T = J_c C_{r1} + j_A^d \quad (\text{B-6})$$

Esta ecuación indica que la densidad de flujo másico total (j_A^T) es la resultante de dos magnitudes vectoriales: el vector $J_c C_{r1} = \phi_1 v_r C_{r1}$, que es la densidad de flujo másico de

A que resulta del movimiento convectivo del fluido, y el vector $j_A^d = -\phi_1 D_r \nabla \cdot C_{r1}$, que es la densidad de flujo de A que resulta de la difusión superpuesta al flujo global.

Entonces la divergencia de B-6 queda como sigue:

$$\text{div}(\bar{\eta}_A) = \text{div}(\bar{j}_c C_{r1}) + \text{div}(j_A^d) \quad (\text{B-7})$$

$$\text{div}(\bar{\eta}_A) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r \bar{J}_c C_{r1}) + \frac{\partial J_c^s C_{r1}}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r D_r \phi_1 \frac{\partial C_{r1}}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\phi_1 D_r \frac{\partial C_{r1}}{\partial z} \right) \quad (\text{B-8})$$

Suposiciones

3. No existe componente de la velocidad en "z", $\bar{J}_c^s = 0$

4. No existe gradiente de concentraciones en dirección "z", $\frac{\partial C_{r1}}{\partial z} = 0$

Con base en las suposiciones anteriores, la Ec. B-8 se reduce a la siguiente:

$$\text{div}(j_A^T) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \phi_1 C_{r1} V_r) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r D_r \phi_1 \frac{\partial C_{r1}}{\partial r} \right) \quad (\text{B-9})$$

tomando en cuenta que $Q = v_r A$, entonces:

$$v_r = \frac{Q}{A} \quad (\text{B-10})$$

donde,

$$A = 2\pi r (2(w - \delta))$$

Si se define

$$a = \frac{Q}{4\pi(w - \delta)} \quad (\text{B-11})$$

La velocidad en la dirección "r" está dada por la siguiente ecuación:

$$v_r = \frac{a}{r} \quad (\text{B-12})$$

Por otro lado, el coeficiente de dispersión D_r , está definido por:

$$D_r = \alpha V_r + D^* \quad (\text{B-13})$$

donde:

α : coeficiente de dispersividad hidráulica

D^* : coeficiente de difusión molecular

Considerando que el coeficiente de difusión molecular es mucho muy pequeño comparado con el coeficiente de difusión por efecto del movimiento global del fluido, se puede expresar D_r como sigue:

$$D_r \doteq \alpha v_r = \frac{\alpha a}{r} \quad (\text{B-14})$$

Sustituyendo B-14 y B-12 en B-9 se tiene que el término de flujo está dado por la siguiente expresión:

$$\text{div}(\bar{n}_A) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \phi_1 \frac{a}{r} C_{r1} \right) - \frac{\alpha a}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\phi_1 C_{r1}) \quad (\text{B-15})$$

o bien:

$$\text{div}(\bar{\eta}_A) = \phi_1 v_r \frac{\partial C_{r1}}{\partial r} - \phi_1 D_r \frac{\partial^2 C_{r1}}{\partial r^2} \quad (\text{B-16})$$

Suposición:

5. El volumen de la región móvil permanece constante. La Ec. B-16 es válida considerando la suposición anterior. Por otro lado, el término que liga las dos regiones, móvil e inmóvil, está dado por la transferencia de masa hacia la región estancada mediante el mecanismo de difusión en $z = w - \delta$:

$$r_{az} = -\frac{2}{E} \phi_2 D_2 \left(\frac{\partial C_{r2}}{\partial z} \right)_{z=w-\delta} \quad (\text{B-17})$$

Sustituyendo las Ecs. B-4, B-16 y B-17 en la Ec. B-2 y considerando la suposición 5 para la Ec. B-4 se tiene:

$$\phi_1 \frac{\partial C_{r1}}{\partial t} + \phi_1 \lambda C_{r1} = -\phi_1 v_r \frac{\partial C_{r1}}{\partial r} + \phi_1 D_r \frac{\partial^2 C_{r1}}{\partial r^2} + \frac{2}{E} \phi_2 D_2 \left(\frac{\partial C_{r2}}{\partial z} \right)_{z=w-\delta} \quad (\text{B-18})$$

El signo positivo para el término de liga en B-18 es porque se considera que la región móvil pierde concentración (-) hacia la región inmóvil.

Dividiendo la Ec. B-18 entre ϕ_1 y reorganizando la ecuación se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{\partial C_{r1}}{\partial t} = D_r \frac{\partial^2 C_{r1}}{\partial r^2} - v_r \frac{\partial C_{r1}}{\partial r} - \lambda C_{r1} - \frac{2}{E} \frac{\phi_2}{\phi_1} D_2 \left(\frac{\partial C_{r2}}{\partial z} \right)_{z=w-\delta} \quad (\text{B-19})$$

Tomando en cuenta que la porosidad de la fractura está dada por:

$$\phi_1 = \frac{2(w - \delta)}{E} \quad (\text{B-20})$$

Incluyendo las Ecs. B-14, B-12 y B-20 en la Ec. B-19, se tiene finalmente la expresión que gobierna el flujo del trazador en la región móvil:

$$\frac{\partial C_{r1}}{\partial t} = \frac{\alpha a}{r} \frac{\partial^2 C_{r1}}{\partial r^2} - \frac{a}{r} \frac{\partial C_{r1}}{\partial r} - \lambda C_{r1} + \frac{\phi_2 D_2}{(w - \delta)} \left(\frac{\partial C_{r2}}{\partial z} \right)_{z=w-\delta} \quad (\text{B-21})$$

B.1.2 Ecuación de flujo para la región inmóvil, estancada o matriz

Aplicando la Ec. B-1 a la región inmóvil o estancada de la Fig. 3.2, considerando que no existe producción de la especie A dentro del volumen de control, se tiene:

$$\frac{\partial M_{A2}^T}{\partial t} = -\text{div} (j_{A2}^T) \quad (\text{B-22})$$

donde:

$$\frac{\partial M_{A2}^T}{\partial t} = \phi_2 \frac{\partial C_{r2}}{\partial t} + \frac{\partial M_{ad2}}{\partial t} + \frac{\partial M_{rad2}}{\partial t} \quad (\text{B-23})$$

Suposición:

6. La adsorción se realiza mediante una reacción de primer orden debido a las bajas concentraciones del trazador.

Con base en la suposición anterior:

$$\frac{\partial M_{ad2}}{\partial t} = k_d (1 - \phi_2) \rho \frac{\partial C_{r2}}{\partial t} \quad (\text{B-24})$$

donde:

k_d : constante de equilibrio o de adsorción

ρ : densidad de la roca

Considerando para la masa perdida por decaimiento radioactivo, que existe una porción de esta masa que se adsorbe a la roca:

$$\frac{\partial M_{rad2}}{\partial t} = \lambda (\phi_2 C_{r2} + (1 - \phi_2) \rho k_d C_{r2}) \quad (B-25)$$

Sustituyendo las Ecs. B-24 y B-25 en la Ec. B-23:

$$\frac{\partial M_{A2}^T}{\partial t} = \{\phi_2 + \rho k_d (1 - \phi_2)\} \frac{\partial C_{r2}}{\partial t} + \lambda \{\phi_2 C_{r2} + (1 - \phi_2) \rho k_d C_{r2}\} \quad (B-26)$$

El término de flujo está dado por:

$$j_{a2}^T = J_c C_{r2} + j_{A2}^d \quad (B-27)$$

Suposiciones

7. No existe velocidad del trazador en la región inmóvil, $J_c = 0$

8. No existe difusión del trazador en dirección "r", $\frac{\partial J_{A2}^{rd}}{\partial r} = 0$

Con base en las suposiciones anteriores, la divergencia de J_{A2}^T está dada sólo por la difusión molecular en dirección z:

$$div (j_{A2}^T) = -\phi_2 D_2 \frac{\partial^2 C_{r2}}{\partial z^2} \quad (B-28)$$

Sustituyendo las Ecs. B-26 y B-28 en la Ec. B-22, se tiene la siguiente ecuación:

$$(\phi_2 + \rho k_d (1 - \phi_2)) \frac{\partial C_{r2}}{\partial t} + \lambda C_{r2} (\phi_2 + \rho k_d (1 - \phi_2)) = \phi_2 D_2 \frac{\partial^2 C_{r2}}{\partial z^2} \quad (B-29)$$

Dividiendo la Ec. B-29 entre el coeficiente de $\frac{\partial C_{r2}}{\partial t}$ y reorganizando términos:

$$\frac{\partial C_{r2}}{\partial t} - \left(\frac{D_2}{1 + \frac{\rho k_d(1-\phi_2)}{\phi_2}} \right) \frac{\partial^2 C_{r2}}{\partial z^2} + \lambda C_{r2} = 0 \quad (\text{B-30})$$

La Ec. B-30 es la ecuación fundamental de flujo para la región estancada .

Las Ecs. B-21 y B-30 son las Ecs. fundamentales de flujo del trazador para un sistema idealizado como el que se muestra en la Fig. 3.2.

Las condiciones iniciales y de frontera para las Ecs. B-21 y B-30 son las siguientes:

$$C_{r1}(r, 0) = 0 ; t \leq 0 \quad (\text{B-31})$$

$$C_{r2}(r, z, 0) = 0 ; \forall z ; r_w < r < \infty ; t \leq 0 \quad (\text{B-32})$$

$$C_{r1}(r_w, t) = C_{r0} ; t > 0 \quad (\text{B-33})$$

$$C_{r1}(\infty, r) = 0 ; t > 0 \quad (\text{B-34})$$

$$C_{r1}(r, t) = C_{r2}(r, w - \delta, t) ; r_w < r < \infty ; t > 0 \quad (\text{B-35})$$

$$\left(\frac{\partial C_{r2}}{\partial z_a} \right)_{(r, \frac{E}{2a}, t)} = 0 ; t > 0 \quad (\text{B-36})$$

Las Ecs. B-21 y B-30 con las condiciones B-31 a B-36 constituyen el modelo matemático representativo del problema de flujo radial del trazador en medios porosos naturalmente fracturados con fracturas horizontales. Esta solución es aplicable a un elemento de simetría (Fig. 3-2) de un medio poroso naturalmente fracturado que tiene múltiples fracturas (estratos de alta permeabilidad).

B.2 Solución del modelo matemático de flujo radial con fractura horizontal

B.2.1 Modelo matemático expresado en variables adimensionales

Para resolver el sistema de ecuaciones formado por las Ecs. B-21 y B-30 se definieron algunos parámetros adimensionales los cuales permitieron una mejor manipulación de las ecuaciones y con ello se obtuvo una forma más sencilla para ellas, permitiendo simplificar la solución y el análisis de las mismas.

Las variables adimensionales utilizadas son las siguientes:

$$r_D = \frac{r}{\alpha} \quad (\text{B-37})$$

$$z_D = \frac{z}{\alpha} \quad (\text{B-38})$$

$$t_D = \frac{Qt}{4\pi\alpha^2(w - \delta)} \quad (\text{B-39})$$

$$c_{Dr1} = \frac{C_{r1} - C_i}{C_o - C_i} \quad (\text{B-40})$$

$$c_{Dr2} = \frac{C_{r2} - C_1}{C_o - C_i} \quad (\text{B-41})$$

donde:

C_o : Concentración de inyección

C_i : Concentración inicial

Aplicando las definiciones anteriores, Ecs. B-37 a B-41 a las ecuaciones fundamentales de flujo para la región móvil e inmóvil (B-21 y B-30) se llega a las siguientes ecuaciones:

$$\frac{(C_o - C_i) \partial C_{D1}}{\alpha^2 \partial t_D} = \frac{(C_o - C_i) a \alpha \partial^2 C_{D1}}{\alpha^3 r_D \partial r_D^2} - \frac{(C_o - C_i) a \partial C_{D1}}{\alpha^2 r_D \partial r_D} - \lambda (C_o - C_i) C_{D1} + \frac{(C_o - C_i) \phi_2 D_2}{\alpha (w - \delta)} \left(\frac{\partial C_{D2}}{\partial z_D} \right)_{z_D=0} \quad (\text{B-42})$$

y:

$$\frac{(C_o - C_i) a \partial C_{D2}}{\alpha^2 \partial t_D} - \left[\frac{\phi_2}{\phi_2 + \rho k_d (1 - \phi_2)} \right] \frac{(C_o - C_i) D_2 \partial^2 C_{D2}}{\alpha^2 \partial z_D^2} + \lambda (C_o - C_i) C_{D2} = 0 \quad (\text{B-43})$$

Multiplicando B-42 y B-43 por $\left(-\frac{\alpha^2}{(C_o - C_i) a}\right)$ se obtienen las ecuaciones fundamentales de flujo en función de los parámetros adimensionales:

$$\frac{\partial C_{D1}}{\partial t_D} = \frac{1}{r_D} \frac{\partial^2 C_{D1}}{\partial r_D^2} - \frac{1}{r_D} \frac{\partial C_{D1}}{\partial r_D} - \gamma C_{D1} + \frac{D_{D2}}{z_{D0}} \phi_2 \left(\frac{\partial C_{D2}}{\partial z_D} \right)_{z_{D0}} \quad (\text{B-44})$$

y:

$$\frac{\partial C_{D2}}{\partial t_D} - R D_{D2} \frac{\partial^2 C_{D2}}{\partial z_D^2} + \gamma C_{D2} = 0 \quad (\text{B-45})$$

donde:

$$z_{D0} = \frac{w - \delta}{\alpha} \quad (\text{B-46})$$

$$R = \frac{\phi_2}{\phi_2 + \rho k_d (w - \phi_2)} \quad (\text{B-47})$$

$$D_{D2} = \frac{D_2}{a} \quad (\text{B-48})$$

$$\gamma = \frac{\lambda \alpha^2}{a} \quad (\text{B-49})$$

Las condiciones iniciales y de frontera (Ecs. B-31 y B-36) expresadas en forma adimensional son las siguientes:

Condiciones iniciales:

$$C_{D1}(r_D, 0) = 0 \quad (\text{B-50})$$

$$C_{D2}(r_D, z_D, 0) = 0 \quad (\text{B-51})$$

Condiciones de frontera:

$$C_{D1}(r_{D0}, t_D) = 1 \quad (\text{B-52})$$

$$C_{D1}(\infty, t_D) = 0 \quad (\text{B-53})$$

condiciones para la interfase matriz-fractura:

$$\left(\frac{\partial C_{D2}}{\partial z_D} \right)_{(r_D, \frac{E_D}{\gamma}, t_D)} = 0 ; \text{ donde } E_D = \frac{E}{\alpha} \quad (\text{B-54})$$

$$C_{D1}(r_D, t_D) = C_{D2}(r_D, z_{D0}, t_D) \quad (\text{B-55})$$

El modelo matemático expresado en función de los parámetros adimensionales para el problema de flujo radial con fractura horizontal está definido por las Ecs. B-44 y B-45 con las condiciones iniciales y de frontera Ecs. B-50 a B-55, análogo al modelo matemático

en función de las variables reales definido por las Ecs. B-21 y B-30 con las condiciones iniciales y de frontera Ecs. B-31 a B-36.

Para determinar la distribución de concentración en la región móvil es necesario resolver primero la Ec. B-45, derivar la solución obtenida, evaluar la expresión obtenida en z_{D0} y sustituirla en B-44 ; con lo anterior B-44 solamente estará en función de r_D y t_D , y se podrá transformar al espacio de Laplace con respecto a t_D .

B.2.2 Solución de la Ecuación para la región inmóvil

Aplicando el método de transformada de Laplace a la Ec. B-45, aplicando la condición inicial B-51 y reorganizando términos se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2 \bar{C}_{D2}}{dz_D^2} - \beta_{rh} \bar{C}_{D2} = 0 \quad (\text{B-56})$$

donde:

$$\beta_{rh} = \frac{s + \gamma}{RD_{D2}} \quad (\text{B-57})$$

Transformando al espacio de Laplace las Ecs. B-54 y B-55 se obtienen las condiciones de continuidad en la interfase para B-56:

$$\bar{C}_{D1}(r_D, s) = \bar{C}_{D2}(r_D, z_{D0}, s) \quad (\text{B-58})$$

$$\left(\frac{d\bar{C}_{D2}}{dz_D} \right)_{\left(r_D, \frac{z_{D0}}{2}, s \right)} = 0 \quad (\text{B-59})$$

La solución general de la ec. B-56 es la siguiente:

$$\bar{C}_{D2}(r_D, z_{D0}, s) = C_1 \exp(\sqrt{\beta_{rh}} z_D) + C_2 \exp(-\sqrt{\beta_{rh}} z_D) \quad (\text{B-60})$$

Donde C_1 y C_2 son constantes que dependen de las condiciones de frontera.

Aplicando la Ec. B-59 a la Ec. B-60 se obtiene:

$$\left(\frac{d\bar{C}_{D2}}{dz_D}\right)_{\frac{z}{2\alpha}} = 0 = C_1 \sqrt{\beta_{rh}} \exp\left(\sqrt{\beta_{rh}} \frac{E_D}{2}\right) - C_2 \sqrt{\beta_{rh}} \exp\left(-\sqrt{\beta_{rh}} \frac{E_D}{2}\right) \quad (\text{B-61})$$

La Ec. B-61 implica lo siguiente:

$$C_1 = C_2 \frac{\exp\left(-\sqrt{\beta_{rh}} \frac{E_D}{2}\right)}{\exp\left(\sqrt{\beta_{rh}} \frac{E_D}{2\alpha}\right)} = C_2 \exp\left(-\sqrt{\beta_{rh}} E_D\right) \quad (\text{B-62})$$

Sustituyendo la Ec. B-62 en la Ec. B-60 y aplicando la condición de frontera B-58 se tiene:

$$\bar{C}_{D1}(r_D, s) = C_2 \exp\left(-\sqrt{\beta_{rh}} E_D\right) \exp\left(\sqrt{\beta_{rh}} z_{D0}\right) + C_2 \exp\left(-\sqrt{\beta_{rh}} z_{D0}\right) \quad (\text{B-63})$$

de la Ec. B-63 se obtiene la constante C_2 :

$$C_2 = \frac{\bar{C}_{Dr1}(r_D, s)}{\exp\left(\sqrt{\beta_{rh}}(z_{D0} - E_D)\right) + \exp\left(\sqrt{\beta_{rh}} z_{D0}\right)} \quad (\text{B-64})$$

Sustituyendo la Ec. B-64 en B-62 se determina la constante C_1 :

$$C_1 = \bar{C}_{D1}(r_D, s) \left\{ \frac{\exp\left(-\sqrt{\beta_{rh}} E_D\right)}{\exp\left[\sqrt{\beta_{rh}}(z_{D0} - E_D)\right] + \exp\left(-\sqrt{\beta_{rh}} z_{D0}\right)} \right\} \quad (\text{B-65})$$

Sustituyendo las constantes C_1 y C_2 , Ecs. B-64 y B-65, respectivamente en la solución general de \bar{C}_{D2} , Ec. B-60 se obtiene la solución para $\bar{C}_{D2}(r_D, z_D, s)$:

$$\bar{C}_{D2}(r_D, z_D, s) = \bar{C}_{D1}(r_D, s) \left\{ \frac{\exp\{\sqrt{\beta_{rh}}(z_D - E_D)\} + \exp\{-\sqrt{\beta_{rh}}z_D\}}{\exp\{\sqrt{\beta_{rh}}(z_{D0} - E_D)\} + \exp\{-\sqrt{\beta_{rh}}z_{D0}\}} \right\} \quad (\text{B-66})$$

La derivada de B-66 con respecto a z_D , evaluada en z_{D0} es la siguiente:

$$\left(\frac{d\bar{C}_{D2}}{dz_D} \right)_{z_{D0}} = -\sqrt{\beta_{rh}} \bar{C}_{D1}(r_D, s) \left\{ \frac{\exp\{-\sqrt{\beta_{rh}}z_{D0}\} - \exp\{-\sqrt{\beta_{rh}}(E_D - z_{D0})\}}{\exp\{-\sqrt{\beta_{rh}}z_{D0}\} - \exp\{-\sqrt{\beta_{rh}}(E_D - z_{D0})\}} \right\} \quad (\text{B-67})$$

Rearreglando los términos exponenciales de la Ec. B-67 se tiene:

$$\left(\frac{d\bar{C}_{D2}}{dz_D} \right)_{z_{D0}} = -\sqrt{\beta_{rh}} \bar{C}_{D1}(r_D, s) \left\{ \frac{1 - \exp\{-\sqrt{\beta_{rh}}(E_D - z_{D0})\}}{1 + \exp\{-\sqrt{\beta_{rh}}(E_D - 2z_{D0})\}} \right\} \quad (\text{B-68})$$

De acuerdo a las propiedades de las funciones trigonométricas se llega a la siguiente relación:

$$\tanh\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1 - e^{-a}}{1 + e^{-a}} \quad (\text{B-69})$$

Aplicando B-69 a B-68, se obtiene finalmente la derivada de la región inmóvil evaluada en z_{D0} , necesaria para resolver la Ec. B-44:

$$\left(\frac{d\bar{C}_{D2}}{dz_D} \right)_{z_{D0}} = -\sqrt{\beta_{rh}} \bar{C}_{D1}(r_D, s) \tanh\left\{ 4\sqrt{\beta_{rh}} \left(\frac{E_D}{2} - z_{D0} \right) \right\} \quad (\text{B-70})$$

B.2.3 Solución a la Ecuación fundamental de la región móvil

Aplicando el método de transformada de Laplace a la Ec. B-44 y sustituyendo la condición inicial B-50, se tiene la siguiente ecuación:

$$\bar{C}_{D1}(r_D, s) = \frac{1}{r_D} \frac{d^2 \bar{C}_{D1}}{dr_D^2} - \frac{1}{r_D} \frac{d\bar{C}_{D1}}{dr_D} - \gamma \bar{C}_{D1} + \frac{D_{D2}}{z_{D0}} \left(\frac{d\bar{C}_{D2}}{dz_D} \right)_{z_{D0}} \quad (\text{B-71})$$

Sustituyendo la Ec. B-70 en B-71 y reorganizando términos se obtiene:

$$\frac{d^2 \bar{C}_{D1}}{dr_D^2} - \frac{d\bar{C}_{D1}}{dr_D} - r_D \xi_{rh} \bar{C}_{D1} = 0 \quad (\text{B-72})$$

donde:

$$\xi_{rh} = s + \gamma + \frac{D_{D2}}{z_{D0}} \sqrt{\beta_{rh}} \tanh \left\{ 4 \sqrt{\beta_{rh}} \left(\frac{E_D}{2} - z_{D0} \right) \right\} \quad (\text{B-73})$$

Transformando al espacio de Laplace las Ecs. B-52 y B-54 se obtienen las condiciones de frontera para la Ec. B-72:

$$\bar{C}_{D1}(r_{D0}, s) = \frac{1}{s} \quad (\text{B-74})$$

donde,

$$r_{D0} = \frac{r_w}{\alpha}$$

y

$$\bar{C}_{D1}(\infty, s) = 0 \quad (\text{B-75})$$

Aplicando las siguientes relaciones a la Ec. B-72:

$$Y = r_D + \frac{1}{4\xi_{rh}} \quad (\text{B-76})$$

$$\bar{C} = \bar{C}_{D1} \exp\left(-\frac{Y}{2}\right) \quad (\text{B-77})$$

$$X = \xi^{1/3} r_h Y \quad (\text{B-78})$$

Se llega a la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2\bar{C}}{dx^2} = X\bar{C} \quad (\text{B-79})$$

La Ec. B-79 corresponde a la forma estandar de la ecuación de Airy (Abramowitz y Stegun, 1970). La solución general de la Ec. B-79 es la siguiente (Abramowitz, 1970):

$$\bar{C} = A_1 A_i(X) + A_2 B_i(X) \quad (\text{B-80})$$

donde $A_i(X)$ y $B_i(X)$ son las funciones de Airy.

La Ec. B-80 puede expresarse en términos de $\bar{C}_{D1}(r_D, s)$:

$$\bar{C}_{D1}(r_D, s) = A_1 \exp\left(\frac{Y}{2}\right) A_i\left(\xi_{rh}^{1/3} Y\right) + A_2 \exp\left(\frac{Y}{2}\right) B_i\left(\xi_{rh}^{1/3} Y\right) \quad (\text{B-81})$$

Donde A_1 y A_2 son constantes que dependen de las condiciones de frontera. La condición de frontera B-75 determina la constante A_2 , debido a que $B_i(X)$ tiende a infinito para

valores del argumento de la función muy grandes, lo cual implica que para satisfacer la condición de frontera externa $A_2 = 0$ entonces la Ec. B-81 se reduce a la siguiente expresión:

$$\bar{C}_{D1} = A_1 \exp\left(\frac{Y}{2}\right) A_i\left(\xi_{rh}^{1/3} Y\right) \quad (\text{B-82})$$

Aplicando la condición de frontera interna B-74 a B-82 se obtiene la constante A_1 :

$$A_1 = \frac{1}{s} \exp\left(-\frac{Y_0}{2}\right) \left[A_i\left(\xi_{rh}^{1/3} Y_0\right)\right]^{-1} \quad (\text{B-83})$$

donde:

$$Y_0 = r_{D0} + \frac{1}{4\xi_{rh}} \quad (\text{B-84})$$

Sustituyendo la Ec. B-83 en la Ec. B-82 finalmente se obtiene la solución para la Ec. fundamental de flujo para la fractura o región móvil, en el espacio de Laplace:

$$\bar{C}_{D1}(r_D, s) = \frac{1}{s} \exp\left(\frac{Y - Y_0}{2}\right) \frac{A_i\left(\xi_{rh}^{1/3} Y\right)}{A_i\left(\xi_{rh}^{1/3} Y_0\right)} \quad (\text{B-85})$$

donde $A_i(x)$, para tiempos pequeños $t_D < 4r_{D0}$, se calcula como sigue (Abramowitz y Stegun, 1970):

$$A_i(x) = \frac{1}{2\pi} (x)^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3} x^{3/2}\right) \quad (\text{B-86})$$

Sustituyendo la Ec B-86 en la Ec. B-85 se tiene:

$$\bar{C}_{D1}(r_D, s) = \frac{1}{s} \exp\left(\frac{r_D - r_{D0}}{2}\right) \frac{\left(r_{D0} + \frac{1}{4\xi_{rh}}\right)^{1/4}}{\left(r_D + \frac{1}{4\xi_{rh}}\right)^{1/4}} \left\{ \frac{\exp\left\{-\frac{2}{3}\left[\xi_{rh}^{1/2}\left(r_D - \frac{1}{4\xi_{rh}}\right)^{3/2}\right]\right\}}{\exp\left\{-\frac{2}{3}\left[\xi_{rh}^{1/2}\left(r_{D0} - \frac{1}{4\xi_{rh}}\right)^{3/2}\right]\right\}} \right\} \quad (\text{B-87})$$

La Ec. B-87 corresponde a la distribución de trazador en la región móvil, en el espacio de Laplace, la cual es válida para $t_D < 4r_{D0}$. Para calcular esta concentración en el espacio real se utilizó el algoritmo de Crump evaluando las funciones de Airy por medio de la Ec. B-86.

APÉNDICE C: DERIVACIÓN Y SOLUCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO PARA FLUJO RADIAL, (GEOMETRÍA MATRIZ-FRACTURA CÚBICA)

C.1 Desarrollo de las Ecuaciones Fundamentales de Flujo

C.1.1 Ecuación de flujo para la región móvil

Efectuando un balance de materia para la especie A en el volumen de control de la región móvil (1) de la Fig. 3.3, considerando que no existe producción de masa de la especie A dentro del volumen de control, se obtiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ritmo de entrada} \\ \text{de masa de la} \\ \text{especie } A \text{ en el} \\ \text{vol. de control} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{ritmo de salida} \\ \text{de masa de la} \\ \text{especie } A \text{ en el} \\ \text{vol. de control} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{ritmo de} \\ \text{transferencia} \\ \text{de masa de } A \\ \text{en la interfase} \\ \text{matriz-fractura} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{ritmo de} \\ \text{acumulación} \\ \text{de masa de } A \\ \text{dentro del} \\ \text{vol. de control} \end{array} \right\} \quad (\text{C-1})$$

Las suposiciones utilizadas en este modelo son las mismas que se emplearon en el desarrollo de las ecuaciones para el modelo de flujo radial con fractura horizontal, (ver Apéndice B). Entonces, la Ec. C-1 puede expresarse como:

$$A \{ \bar{\eta}_A |_r - \bar{\eta}_A |_{r+\Delta r} \} - A_c \bar{\eta}_{AZ} |_{z=\frac{d}{2}+\delta} = V_n \phi_1 \frac{\partial}{\partial t} \{ M_A^T \} \quad (\text{C-2})$$

donde:

$\bar{\eta}_{Ar}$: velocidad másica de A , definida por la ley de Fick.

M_A^T : masa total de la especie A .

Área transversal al flujo: $A = 2\pi r H \phi_1$

Área de contacto entre las dos regiones: $A_c = 12\pi r \Delta r H \phi_2 / d$

Volumen de control: $V_n = 2\pi r \Delta r H \phi_1$

El segundo miembro del lado izquierdo de la Ec. C-2 corresponde a la transferencia de masa de la región móvil a la inmóvil, se considera con signo negativo porque es una masa que pierde el sistema de fracturas.

Dividiendo la Ec. C-2 entre el volumen de control y tomando el límite cuando $V_n \rightarrow 0$, se obtiene la siguiente ecuación:

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \{r \bar{\eta}_{Ar}\} - \frac{6 \phi_2}{d \phi_1} \bar{\eta}_{Az} \Big|_{z=\frac{d}{2}+\delta} = \frac{\partial C_{r1}}{\partial t} \quad (\text{C-3})$$

donde:

$$\bar{\eta}_{Ar} = j_{Ar}^d + \phi_1 C_{r1} v_r \quad (\text{C-4})$$

$$\bar{\eta}_{Az} = j_{Az}^d + \phi_1 C_{r1} v_z \quad (\text{C-5})$$

$$j_{Ar}^d = -\phi_1 D_r \frac{\partial C_{r1}}{\partial r} \quad (\text{C-6})$$

$$j_{Az}^d = -D_z \frac{\partial C_{r2}}{\partial z} \quad (\text{C-7})$$

Con base en las suposiciones anteriormente mencionadas, la Ec. C-5 sólo está constituida por la parte difusiva. Sustituyendo las Ecs. C-4 a C-7 en la Ec. C-3 y reorganizando términos, se obtiene:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r D_r \frac{\partial C_{r1}}{\partial r} \right\} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \{r C_{r1} v_r\} + \frac{6 \phi_2}{d \phi_1} D_z \left(\frac{\partial C_{r2}}{\partial z} \right) \Big|_{z=\frac{d}{2}+\delta} = \frac{\partial C_{r1}}{\partial t} \quad (\text{C-8})$$

La velocidad en la dirección r es función del radio, estando definida por la Ec. B-12. Para este caso el área transversal al flujo es $A = 2\pi H \phi_1 r$; por consecuencia la constante α que es función del gasto de inyección y de la geometría del sistema, está definida por la siguiente ecuación:

$$a = \frac{Q}{2\pi H\phi_1} \quad (\text{C-9})$$

y la velocidad:

$$v_r = \frac{a}{r} = \frac{Q}{2\pi H\phi_1 r} \quad (\text{C-10})$$

Por otra parte, el término de acumulación de masa de la especie A está constituida por el cambio de masa fluyente y el originado por el decaimiento radioactivo, definido por la Ec. B-5, por consiguiente:

$$\frac{\partial M_A^T}{\partial t} = \frac{\partial C_{r1}}{\partial t} + \lambda C_{r1} \quad (\text{C-11})$$

Sustituyendo las Ecs. B-14, C-10 y C-11 en la Ec. C-8 y reorganizando términos, se obtiene:

$$\frac{\partial C_{r1}}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\alpha a}{r} \frac{\partial C_{r1}}{\partial r} \right\} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{a}{r} C_{r1} \right\} - \lambda C_{r1} + \frac{6\phi_2}{d\phi_1} D_2 \left(\frac{\partial C_{r2}}{\partial z} \right)_{z=\frac{d}{2}+\delta} \quad (\text{C-12})$$

o bien:

$$\frac{\partial C_{r1}}{\partial t} = \frac{\alpha a}{r} \frac{\partial^2 C_{r1}}{\partial r^2} - \frac{a}{r} \frac{\partial C_{r1}}{\partial r} - \lambda C_{r1} + \frac{6\phi_2}{d\phi_1} D_2 \left(\frac{\partial C_{r2}}{\partial z} \right)_{z=\frac{d}{2}+\delta} \quad (\text{C-13})$$

La Ec. C-13 gobierna el flujo del trazador en el sistema de fracturas de la Fig. 3.3.

C.1.2 Ecuación de flujo para la región inmóvil

Efectuando el balance de materia, dado por la Ec. C-1, para la especie A en la región inmóvil (2) de la Fig. 3.3, y suponiendo que no existe producción de la especie A en el volumen de control, se obtiene la siguiente ecuación:

$$(A_z \bar{\eta}_{AZ})_z - (A_z \bar{\eta}_{AZ})_{z+\Delta z} = V_n \frac{\partial}{\partial t} \{M_A^T\} \quad (C-14)$$

donde:

$\bar{\eta}_{AZ}$: velocidad másica de A en la dirección z , definida por la ley de Fick.

M_A^T : masa total de la especie A .

Área transversal al flujo: $A_z = 24z^2\phi_2$

Volumen de control: $V_n = 24^2\Delta z(z + \frac{\Delta z}{2})^2\phi_2$

Dividiendo la Ec. C-14 entre el volumen de control y tomando el límite cuando $\Delta z \rightarrow 0$, se tiene:

$$-\frac{1}{z^2} \frac{\partial}{\partial z} \{z^2 \bar{\eta}_{AZ}\} = \frac{\partial}{\partial t} \{M_A^T\} \quad (C-15)$$

El lado derecho de la Ec. C-15, equivale al término de acumulación de la región inmóvil correspondiente al modelo de flujo radial con fractura horizontal, presentado previamente en la Ec. B-26, (Ver Apéndice B). La velocidad másica, $\bar{\eta}_{AZ}$, está definida por la Ec. C-5, aplicando esta ecuación a la región inmóvil, se obtiene:

$$\bar{\eta}_{AZ} = -\phi_2 D_2 \frac{\partial C_{r2}}{\partial z} + \phi_2 C_{r2} v_z \quad (C-16)$$

Debido a que en la región inmóvil no existe el término convectivo:

$$\bar{\eta}_{AZ} = -\phi_2 D_2 \frac{\partial C_{r2}}{\partial z} \quad (C-17)$$

Sustituyendo las Ecs. B-26 y C-17 en la Ec. C-15, desarrollando el producto de la derivada parcial del lado izquierdo de la ecuación, se tiene:

$$\phi_2 D_2 \frac{\partial^2 C_{r2}}{\partial z^2} + \frac{2}{z} \phi_2 D_2 \frac{\partial C_{r2}}{\partial z} = [\phi_2 + \rho k_d (1 - \phi_2)] \frac{\partial C_{r2}}{\partial t} + \lambda C_{r2} [\phi_2 + \rho k_d (1 - \phi_2)] \quad (C-18)$$

Dividiendo la Ec. C-18 entre el coeficiente de $\frac{\partial C_{r2}}{\partial t}$ y reorganizando términos, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\left[\frac{\phi_2}{\phi_2 + \rho k_d (1 - \phi_2)} \right] D_2 \frac{\partial^2 C_{r2}}{\partial z^2} + \left[\frac{\phi_2}{\phi_2 + \rho k_d (1 - \phi_2)} \right] \frac{2}{z} D_2 \frac{\partial C_{r2}}{\partial z} - \lambda C_{r2} = \frac{\partial C_{r2}}{\partial t} \quad (C-19)$$

Las Ecs. C-13 y C-19 gobiernan el comportamiento del trazador para las regiones móvil e inmóvil, respectivamente, las cuales describen el flujo de trazadores en el sistema naturalmente fracturado, representado por la Fig. 3.3.

Las condiciones iniciales y de frontera, utilizadas en este problema, para las Ecs. C-13 y C-19, son las siguientes:

$$C_{r1}(r, 0) = 0 \quad (C-20)$$

$$C_{r2}(r, z, 0) = 0 \quad (C-21)$$

$$C_{r1}(r_w, t) = C_0 \quad (\text{C-22})$$

$$C_{r1}(\infty, t) = 0 \quad (\text{C-23})$$

$$C_{r1}(r, t) = C_{r2}\left(r, \frac{d}{2} + \delta, t\right) \quad (\text{C-24})$$

$$\left(\frac{\partial C_{r2}}{\partial z}\right)_{z=0} = 0 \quad ; \quad \forall r_D, t_D \quad (\text{C-25})$$

Por consiguiente, el modelo matemático para el problema de flujo radial de trazadores en un medio poroso con geometría matriz-fractura cúbica, está definido por las Ecs. C-13 y C-19 con las condiciones iniciales y de frontera, Ecs. C-20 a C-25.

C.2 Solución del Modelo Matemático para Flujo

Radial con Geometría Matriz-Fractura Cúbica

Para resolver el modelo matemático definido por las Ecs. C-13, C-19 y C-20 a C-25, se emplearon algunas de las variables adimensionales definidas anteriormente para el problema de flujo radial con fracturas horizontales; sin embargo en esta sección se presentan nuevamente, con objeto de definir de forma completa el problema y lograr un mejor seguimiento en el desarrollo de la solución.

Las variables adimensionales utilizadas son las siguientes:

$$r_D = \frac{r}{\alpha} \quad (\text{C-26})$$

$$z_D = \frac{z}{\alpha} \quad (\text{C-27})$$

$$t_D = \frac{Q}{2\pi H \phi_1} \frac{t}{\alpha^2} = \frac{at}{\alpha^2} \quad (\text{C-28})$$

$$C_{Dr1} = \frac{C_{r1} - C_i}{C_0 - C_i} \quad (C-29)$$

$$C_{Dr2} = \frac{C_{r2} - C_i}{C_0 - C_i} \quad (C-30)$$

donde:

C_0 : concentración de inyección

C_i : concentración inicial

Aplicando las definiciones anteriores y la regla de la cadena, se obtienen las siguientes identidades:

$$\frac{\partial C_{r1}}{\partial t} = \frac{(C_0 - C_i) a}{\alpha^2} \frac{\partial C_{Dr1}}{\partial t_D} \quad (C-31)$$

$$\frac{\partial C_{r1}}{\partial r} = \frac{(C_0 - C_i)}{\alpha} \frac{\partial C_{Dr1}}{\partial r_D} \quad (C-32)$$

$$\frac{\partial^2 C_{r1}}{\partial r^2} = \frac{(C_0 - C_i)}{\alpha^2} \frac{\partial^2 C_{Dr1}}{\partial r_D^2} \quad (C-33)$$

$$\frac{\partial C_{r2}}{\partial z} = \frac{(C_0 - C_i)}{\alpha} \frac{\partial C_{Dr2}}{\partial z_D} \quad (C-34)$$

$$\frac{\partial^2 C_{r2}}{\partial z^2} = \frac{(C_0 - C_i)}{\alpha^2} \frac{\partial^2 C_{Dr2}}{\partial z_D^2} \quad (C-35)$$

$$\frac{\partial C_{r2}}{\partial t} = \frac{(C_0 - C_i) a}{\alpha^2} \frac{\partial C_{Dr2}}{\partial t_D} \quad (C-36)$$

Sustituyendo las Ecs. C-26 y C-31 a C-33 en la Ec. C-13, se obtiene la expresión siguiente para el sistema de fracturas:

$$\begin{aligned} & \frac{a}{r_D} \frac{(C_0 - C_i)}{\alpha^2} \frac{\partial^2 C_{Dr1}}{\partial r_D^2} - \frac{a}{r_D} \frac{(C_0 - C_i)}{r_D} \frac{\partial C_{Dr1}}{\partial t_D} - \lambda (C_0 - C_i) C_{Dr1} \\ & + \frac{6 \phi_2 (C_0 - C_i)}{d \phi_1 \alpha} D_2 \left(\frac{\partial C_{Dr2}}{\partial z_D} \right)_{z=\frac{d}{2}+\delta} = \frac{a (C_0 - C_i)}{\alpha^2} \frac{\partial C_{Dr1}}{\partial t_D} \end{aligned} \quad (C-37)$$

Multiplicando la Ec. C-37 por $\frac{\alpha^2}{(C_0 - C_i) a}$, se obtiene:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial^2 C_{Dr1}}{\partial r_D^2} - \frac{1}{r_D} \frac{\partial C_{Dr1}}{\partial t_D} - \gamma C_{Dr1} + \frac{6 \phi_2}{d_D \phi_1} D_{D2} \left(\frac{\partial C_{Dr2}}{\partial z_D} \right)_{z_{D0}} = \frac{\partial C_{Dr1}}{\partial t_D} \quad (C-38)$$

donde:

$$\gamma = \frac{\alpha^2 \lambda}{a} \quad (C-39)$$

$$D_{D2} = \frac{D_2}{\alpha} \quad (C-40)$$

$$z_{D0} = \frac{d}{2\alpha} + \frac{\delta}{\alpha} \quad (C-41)$$

$$d_D = \frac{d}{\alpha} \quad (C-42)$$

En forma similar, sustituyendo las Ecs. C-27 y C-34 a C-36 en la Ec. C-19, se obtiene la expresión siguiente para los bloques de matriz:

$$\begin{aligned} & D_2 \left[\frac{\phi_2}{\phi_2 + \rho k_d (1 - \phi_2)} \right] \frac{(C_0 - C_i)}{\alpha^2} \frac{\partial^2 C_{Dr2}}{\partial z_D^2} + \frac{2}{z_D} D_2 \left[\frac{\phi_2}{\phi_2 + \rho k_d (1 - \phi_2)} \right] \\ & \frac{(C_0 - C_i)}{\alpha^2} \frac{\partial C_{Dr2}}{\partial z_D} - \lambda (C_0 - C_i) C_{Dr2} = \frac{(C_0 - C_i) a}{\alpha^2} \frac{\partial C_{Dr2}}{\partial t_D} \end{aligned} \quad (C-43)$$

Multiplicando la Ec. C-43 por $\frac{\alpha^2}{(C_0 - C_i)_a}$ y reorganizando términos, se tiene:

$$D_{D2}R \frac{\partial^2 C_{D2}}{\partial z_D^2} + \frac{2}{z_D} D_{D2}R \frac{\partial C_{Dr2}}{\partial z_D} - \gamma C_{Dr2} = \frac{\partial C_{Dr2}}{\partial t_D} \quad (C-44)$$

donde:

$$R = \frac{\phi_2}{\phi_2 + \rho k_d (1 - \phi_2)} \quad (C-45)$$

Las condiciones iniciales y de frontera, Ecs. C-20 a C-25, expresadas en función de las variables adimensionales, son las siguientes:

Condiciones Iniciales:

$$C_{Dr1}(R_D, 0) = 0 \quad (C-46)$$

$$C_{Dr2}(r_D, z_D, 0) = 0 \quad (C-47)$$

Condiciones de Frontera:

$$C_{Dr1}(r_{D0}, t_D) = 1 \quad ; \text{ donde } r_{D0} = \frac{r_w}{\alpha} \quad (C-48)$$

$$C_{Dr1}(\infty, t_D) = 0 \quad (C-49)$$

Condición de continuidad en la interfase:

$$C_{Dr1}(r_D, t_D) = C_{Dr2}(r_D, z_{D0}, t_D) \quad (C-50)$$

$$\left(\frac{\partial C_{Dr2}}{\partial z_D} \right)_{z_{D0}} = 0 \quad (C-51)$$

El modelo matemático expresado en función de los parámetros adimensionales, para el problema de flujo radial de trazadores para una geometría Matriz-Fractura de tipo

Cúbica, está definido por las Ecs. C-38 y C-44 con las condiciones iniciales y de frontera, Ecs. C-46 a C-51.

Para determinar la distribución de concentración en la región móvil, es necesario resolver primero la Ec. C-44 y evaluar su derivada en z_{D0} y sustituirla en la Ec. C-38; con lo anterior la ecuación para la región móvil sólo estará en función de τ_D y t_D , y se podrá transformar al espacio de *Laplace* con respecto a t_D .

C.2.1 Solución de la ecuación para la región inmóvil o para los bloques de matriz

Aplicando la transformada de *Laplace* a la Ec. C-44, aplicando la condición inicial, Ec. C-47, y reorganizando términos, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2 \bar{C}_{Dr2}}{dz_D^2} + \frac{2}{z_D} \frac{d \bar{C}_{Dr2}}{dz_D} - \bar{C}_{Dr2} (s + \gamma) \frac{1}{D_{2D} R} = 0 \quad (C-52)$$

Con las condiciones en el espacio de *Laplace* que se obtienen transformando las Ecs. C-49 y C-50:

$$\left(\frac{d \bar{C}_{Dr2}}{dz_D} \right)_{z_D=0} = 0 \quad (C-53)$$

La Ec. C-52 puede expresarse de la siguiente forma:

$$\frac{d^2 \bar{C}_{Dr2}}{dz_D^2} + \frac{2}{z_D} \frac{d \bar{C}_{Dr2}}{dz_D} - \bar{C}_{Dr2} \beta^2 = 0 \quad (C-54)$$

donde:

$$\beta = \sqrt{\frac{s + \gamma}{R D_{2D}}} \quad (C-55)$$

Aplicando a la Ec. C-54 el siguiente cambio de variable:

$$z_D = \frac{\varpi}{\beta} \quad (\text{C-56})$$

se obtiene:

$$\frac{d^2 \bar{C}_{Dr2}}{d\varpi^2} + \frac{2}{\varpi} \frac{d\bar{C}_{Dr2}}{d\varpi} - \bar{C}_{Dr2} = 0 \quad (\text{C-57})$$

Si se define:

$$\bar{C}_{Dr2} = \frac{C(\varpi)}{\sqrt{\varpi}} = C(\varpi) \varpi^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{C-58})$$

entonces:

$$\frac{d\bar{C}_{Dr2}}{d\varpi} = -\frac{1}{2}\varpi^{-\frac{3}{2}}C(\varpi) + \varpi^{-\frac{1}{2}}\frac{dC(\varpi)}{d\varpi} \quad (\text{C-59})$$

y

$$\frac{d^2 \bar{C}_{Dr2}}{d\varpi^2} = \frac{3}{4}\varpi^{-\frac{5}{2}}C(\varpi) - \varpi^{-\frac{3}{2}}\frac{dC(\varpi)}{d\varpi} + \varpi^{-\frac{1}{2}}\frac{d^2 C(\varpi)}{d\varpi^2} \quad (\text{C-60})$$

Sustituyendo las Ecs. C-58 a C-60 en la Ec. C-57, se obtiene:

$$\frac{3}{4}\varpi^{-\frac{5}{2}}C - \varpi^{-\frac{3}{2}}\frac{dC}{d\varpi} + \varpi^{-\frac{1}{2}}\frac{d^2 C}{d\varpi^2} - \varpi^{-\frac{1}{2}}C + 2\varpi^{-\frac{3}{2}}\frac{dC}{d\varpi} - \varpi^{-\frac{1}{2}}C = 0 \quad (\text{C-61})$$

Agrupando términos:

$$\varpi^{-\frac{1}{2}}\frac{d^2 C}{d\varpi^2} + \frac{dC}{d\varpi} \left(2\varpi^{-\frac{3}{2}} - \varpi^{-\frac{1}{2}}\right) + C \left(-\frac{3}{4}\varpi^{-\frac{5}{2}} - \frac{4}{4}\varpi^{-\frac{5}{2}} - \varpi^{-\frac{1}{2}}\right) = 0 \quad (\text{C-62})$$

Multiplicando a la Ec. C-62 por $\varpi^{\frac{5}{2}}$ y simplificando términos se obtiene:

$$\varpi^2 \frac{d^2 C}{d\varpi^2} + \varpi \frac{dC}{d\varpi} - C \left(\varpi^2 + \frac{1}{4}\right) = 0 \quad (\text{C-63})$$

La Ec. C-63 corresponde a la forma de la ecuación *Bessel Modificada* de orden $\nu = \frac{1}{2}$, esto es:

$$X^2 \frac{d^2 Y}{dX^2} + X \frac{dY}{dX} - (X^2 + \nu^2) Y = 0 \quad (\text{C-64})$$

La solución de la ecuación *Bessel Modificada*, Ec. C-64, está dada por la siguiente ecuación:

$$Y = A I_\nu(X) + B I_{-\nu}(X) \quad (\text{C-65})$$

donde:

I_ν : es función Bessel modificada de orden ν .

A y B : son constantes que dependen de las condiciones de frontera.

Aplicando la Ec. C-65 a la Ec. C-63 se tiene que la solución general para nuestro problema es la siguiente:

$$C(\varpi) = A I_{\frac{1}{2}}(\varpi) + B I_{-\frac{1}{2}}(\varpi) \quad (\text{C-66})$$

donde:

$$I_{\frac{1}{2}}(\varpi) = \sqrt{\frac{2}{\pi\varpi}} \sinh(\varpi) \quad (\text{C-67})$$

$$I_{-\frac{1}{2}}(\varpi) = \sqrt{\frac{2}{\pi\varpi}} \cosh(\varpi) \quad (\text{C-68})$$

Sustituyendo en la Ec. C-66 el cambio de variable definido por la Ec. C-58 y las expresiones para las funciones *Bessel Modificadas*, Ecs. C-67 y C-68, se obtiene:

$$\bar{C}_{Dr2} = \frac{A}{\varpi} \sqrt{\frac{2}{\pi \varpi}} \sinh(\varpi) + \frac{B}{Z} \sqrt{\frac{2}{\pi Z}} \cosh(Z) \quad (C-69)$$

Para expresar la Ec. C-69 en función de z_D , se sustituye el cambio de variable definido por la Ec. C-56:

$$\bar{C}_{Dr2} = \frac{A}{z_D \beta} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sinh(z_D \beta) + \frac{B}{z_D \beta} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cosh(z_D \beta) \quad (C-70)$$

Aplicando la condición de frontera Ec. C-53 a la Ec. C-70, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d \bar{C}_{Dr2}}{d z_D} \right)_{z_D=0} &= A \left\{ \frac{\beta}{z_D} \cosh(z_D \beta) - \frac{1}{z_D^2} \sinh(z_D \beta) \right\} \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\beta} + \\ &B \left\{ \frac{\beta}{z_D} \sinh(z_D \beta) - \frac{1}{z_D^2} \cosh(z_D \beta) \right\} \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\beta} = 0 \end{aligned} \quad (C-71)$$

Multiplicando la Ec. C-71 por $\beta z_D^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ y tomando el límite cuando $z_D \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{z_D \rightarrow 0} &A \{ z_D \beta \cosh(z_D \beta) - \sinh(z_D \beta) \} + \\ &B \{ z_D \beta \sinh(z_D \beta) - \cosh(z_D \beta) \} = 0 \end{aligned} \quad (C-72)$$

De la ecuación anterior se puede observar que es necesario que la constante B sea igual a cero para que se cumpla la Ec. C-72. Sustituyendo $B = 0$ y aplicando la condición de continuidad de interfase matriz-fractura, Ec. C-50, en la Ec. C-70, se obtiene:

$$(\bar{C}_{Dr2})_{z_D=z_{D0}} = \bar{C}_{Dr1}(r_D, s) = \frac{A}{\beta z_{D0}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sinh(z_{D0} \beta) \quad (C-73)$$

De la Ec. C-73 se obtiene:

$$A = z_{D0}\beta\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\bar{C}_{Dr1}(r_D,s)}{\sinh(z_{D0}\beta)} \quad (C-74)$$

Sustituyendo la constante A en la Ec. C-70 se obtiene la solución para \bar{C}_{Dr2} :

$$\bar{C}_{Dr2} = \bar{C}_{Dr1} \frac{z_{D0}}{z_D} \left\{ \frac{\sinh(z_D\beta)}{\sinh(z_{D0}\beta)} \right\} \quad (C-75)$$

Para acoplar la transferencia de masa por difusión en la interfase matriz-fractura a la ecuación fundamental del sistema de fracturas, es necesario derivar la Ec. C-75 y evaluarla en z_{D0} . La derivada de \bar{C}_{Dr2} con respecto a z_D , evaluada en z_{D0} es la siguiente:

$$\left(\frac{d\bar{C}_{Dr2}}{dz_D} \right)_{z_D=z_{D0}} = \bar{C}_{Dr1} z_{D0} \left\{ \frac{\beta \cosh(z_{D0}\beta)}{z_{D0} \sinh(z_{D0}\beta)} - \frac{1}{z_{D0}^2} \frac{\sinh(z_{D0}\beta)}{\sinh(z_{D0}\beta)} \right\} \quad (C-76)$$

Simplificando términos:

$$\left(\frac{d\bar{C}_{Dr2}}{dz_D} \right)_{z_D=z_{D0}} = \bar{C}_{Dr1} \left\{ \beta \coth(z_{D0}\beta) - \frac{1}{z_{D0}} \right\} \quad (C-77)$$

Tomando en cuenta el signo negativo implícito en z_{D0} , de acuerdo a los ejes de referencia establecidos en la Fig. 3.3, se tiene que:

$$\left(\frac{d\bar{C}_{Dr2}}{dz_D} \right)_{z_D=z_{D0}} = \bar{C}_{Dr1} \left\{ \frac{1}{z_{D0}} - \beta \coth(\beta z_{D0}) \right\} \quad (C-78)$$

C.2.2 Solución de la ecuación fundamental que gobierna el comportamiento del trazador en el sistema de fracturas.

Aplicando el método de transformada de *Laplace* a la Ec. C-38 y sustituyendo la condición inicial, Ec. C-46, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial^2 \bar{C}_{Dr1}}{\partial r_D^2} - \frac{1}{r_D} \frac{\partial \bar{C}_{Dr1}}{\partial r_D} - \gamma \bar{C}_{Dr1} + \frac{6}{d_D} \frac{\phi_2}{\phi_1} D_{D2} \left(\frac{\partial \bar{C}_{Dr2}}{\partial z_D} \right)_{z_{D0}} = \bar{C}_{D,s} \quad (C-79)$$

Sustituyendo la Ec. C-78 en la Ec. 79, multiplicando por r_D y agrupando términos, se tiene la siguiente expresión:

$$\frac{d^2 \bar{C}_{Dr1}}{dr_D^2} - \frac{d \bar{C}_{Dr1}}{dr_D} - r_D \xi_{r2} \bar{C}_{Dr1} = 0 \quad (C-80)$$

donde:

$$\xi_{r2} = s + \gamma \varepsilon \left\{ \beta \coth(z_{D0} \beta) - \frac{1}{z_{D0}} \right\} \quad (C-81)$$

y

$$\varepsilon = \frac{6}{d_D} \frac{\phi_2}{\phi_1} D_{D2} \quad (C-82)$$

Transformando las condiciones de frontera Ec. C-48 y C-49 al espacio de *Laplace*, se obtienen:

$$\bar{C}_{Dr1}(r_{D0}, s) = \frac{1}{s} \quad (C-83)$$

$$\bar{C}_{Dr1}(\infty, s) = 0 \quad (C-84)$$