

49
2ej-

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

ESTABILIDAD CAPILAR DE UNA CAPA CILINDRICA
DE FLUIDO VISCOELASTICO CON NUCLEO SOLIDO

TESIS
Que para obtener el titulo de
FISICO
presenta
LUIS ZAVALA SANSON

México, D.F.

1992

FALLA DE 1992



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

CONTENIDO

RESUMEN	1
INTRODUCCION	2
CAPITULO 1. MECANICA DE FLUIDOS	
1.1 Principios e hipótesis generales	5
1.2 Sistemas de referencia y teorema de transporte de Reynolds	6
1.3 Ecuaciones de conservación	8
1.4 Coordenadas cilíndricas	10
1.5 Condiciones de frontera	11
CAPITULO 2. ECUACIONES CONSTITUTIVAS Y VISCOELASTICIDAD	
2.1 Ecuaciones constitutivas y modelos básicos	14
2.2 Respuesta viscoelástica	18
2.3 Ecuación constitutiva en coordenadas cilíndricas	20
CAPITULO 3. ESTABILIDAD HIDRODINAMICA	
3.1 Elementos de estabilidad hidrodinámica	23
3.2 Perturbaciones en modos normales	24
3.3 Parámetros adimensionales	26
CAPITULO 4. FLUJO DE UNA CAPA CILINDRICA VISCOELASTICA CON NUCLEO SOLIDO	
4.1 Descripción del sistema	28
4.2 Flujo básico	31
4.3 Ecuaciones perturbadas linealizadas	33
4.4 Análisis en modos normales	36

CAPITULO 5. APROXIMACION A NUMERO DE ONDA PEQUEÑO	
5.1 Ecuaciones a orden α	39
5.2 Aproximación a orden cero	40
5.3 Aproximación a orden uno	42
CAPITULO 6. RESULTADOS	
6.1 Introducción	50
6.2 Estabilidad neutral	51
6.3 Análisis de coeficientes	55
CAPITULO 7. CONCLUSIONES	58
BIBLIOGRAFIA	63

RESUMEN

Una capa cilíndrica de fluido viscoelástico con un núcleo sólido es puesta en movimiento axial mediante un esfuerzo tangencial aplicado sobre su superficie libre. El sistema se inestabiliza debido a la deformación de la misma. La tensión superficial del fluido también tiende a desestabilizar al flujo por el efecto de ahorcamiento que realiza en los sistemas de geometría cilíndrica (inestabilidad capilar). Con base en estudios anteriores, es conocido que, dependiendo de la magnitud del esfuerzo superficial, es posible contrarrestar la inestabilidad capilar. En este trabajo, se realiza un análisis lineal de la estabilidad del sistema con la aproximación de ondas largas, debido a que en este rango se presenta el efecto de ahorcamiento y se puede obtener una solución analítica del problema. Se estudia el efecto de las propiedades viscoelásticas del fluido, las cuales en general, tienen un papel estabilizador, así como también, la importancia del tamaño del radio del cilindro. Este último influye de manera sensible para determinar los casos en los que, tanto el esfuerzo tangencial, la tensión superficial ó la viscoelásticidad, estabilizan ó desestabilizan al sistema.

INTRODUCCION

El origen de las investigaciones sobre flujos con geometría cilíndrica se remonta al siglo pasado. Plateau en 1866 y Rayleigh en 1879 [1] encontraron, para el caso de un fluido estático no viscoso, que la tensión superficial retenía una columna cilíndrica del mismo diámetro y cuando ésta tuviera una longitud más corta que su circunferencia, de lo contrario se rompía en gotas. Ver figura I.1. Este resultado, válido para el caso en que la tensión superficial domina sobre la gravedad, se conoce como "límite de Rayleigh".

En 1961, Chandrasekhar [2] estudió el caso para fluidos viscosos y en movimiento encontrando que se podían producir cilindros estables de mayor longitud que su propia circunferencia. Aún así, para ciertas longitudes límite, el cilindro ó chorro se rompe en gotas. Este efecto se atribuye a la acción de ahorcamiento que ejerce la tensión superficial al tender a disminuir la superficie cuando actúa en la dirección azimutal. Este fenómeno se conoce como inestabilidad capilar.

Las investigaciones posteriores sobre el tema han sido enfocadas a contrarrestar ó anular, en el mejor de los casos, los efectos capilares de ahorcamiento; no sólo por el interés teórico del problema, sino también por su importancia en la práctica industrial. Como ejemplos de esto último se pueden mencionar la fabricación de alambre a partir del flujo de metal fundido, ó el desarrollo de cristales de óptimas propiedades mediante el proceso denominado de zona flotante [3]. Este último se proyecta a realizar en ausencia de gravedad (en el espacio) y que consiste en hacer pasar un sólido a través de un anillo a alta temperatura por un extremo, para que se funda en el interior y cristalice en el extremo opuesto. Ver figura I.2.

En 1985, Xu y Davis [4], encontraron que al poner en movimiento axial una columna líquida de un fluido incompresible,

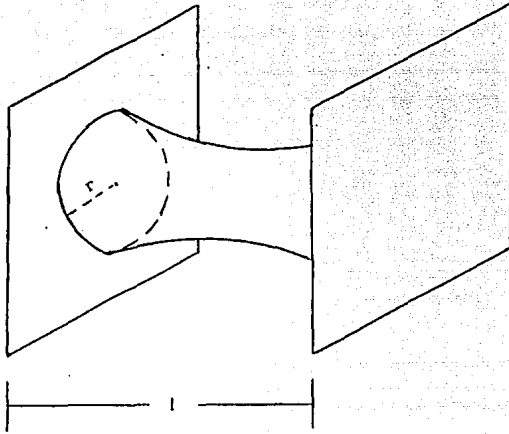


Figura I.1. Columna cilíndrica estática de fluido. Cuando la longitud "l" supera la circunferencia del cilindro, éste se rompe en gotas (límite de Rayleigh).

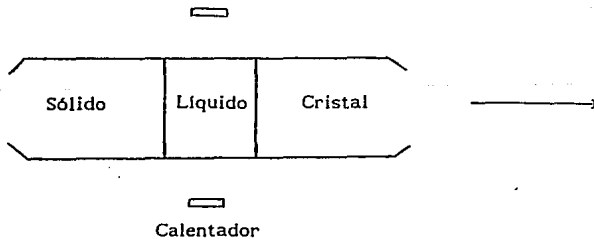


Figura I.2. Proceso de zona flotante para la fabricación de cristales de alta calidad en ausencia de gravedad.

newtoniano, mediante la presencia de un esfuerzo mecánico tangencial sobre su superficie libre (un viento suave, por ejemplo), éste puede amortiguar las inestabilidades capilares para ciertos valores de las perturbaciones y así obtener zonas coherentes de longitud mayor.

Por otro lado, Russo y Steen [1] en 1989 reportaron que al colocar un núcleo cilíndrico sólido coaxial en un chorro como el de Xu y Davis [4], se puede estabilizar el sistema mediante el esfuerzo superficial para cualquier longitud de la perturbación. Tales resultados se obtienen mediante un análisis de la competencia entre las inestabilidades capilares y las de ondas de superficie producidas por el esfuerzo tangencial. En el caso en el que éste es muy grande provoca que el chorro se desestabilice por la deformación de la superficie, mientras que un esfuerzo muy pequeño, no contrarresta suficientemente la inestabilidad capilar. Sin embargo, para esfuerzos moderados la estabilización puede ser completa.

En el presente trabajo se analiza el flujo de una capa cilíndrica con un núcleo sólido con las particularidades siguientes:

1.- El fluido es viscoelástico, esto es, presenta un comportamiento fundamentalmente diferente respecto de los newtonianos. En consecuencia, aparece un nuevo parámetro (DL) cuyo papel en la estabilidad es estudiado en éste trabajo. Anteriormente, Dávalos-Orozco [5] resolvió el caso de una capa plana horizontal de fluido viscoelástico.

2.- Se realiza el análisis de la estabilidad hidrodinámica con la aproximación a número de onda pequeño (es decir, ondas largas) de las perturbaciones, análoga a los métodos de Yih [6], con la finalidad de obtener una solución analítica del problema y tratar de develar los mecanismos físicos de las inestabilidades (Dijkstra y Steen [7] encontraron, en 1991, que la aproximación de ondas largas proporciona información en éste sentido. Además, es en este límite donde se presenta el efecto de amortiguamiento de

la inestabilidad capilar en los estudios de Russo y Steen [1]).

La figura I.3 presenta los esquemas de los problemas investigados por Xu y Davis [4], Russo y Steen [1] y Dávalos-Orozco [5]. Nótese que el sistema de Russo y Steen es el mismo al estudiado en este trabajo con la diferencia de que el fluido es viscoelástico.

La organización del trabajo es la siguiente. En el capítulo 1 se desarrollan los fundamentos básicos de la mecánica de fluidos, los cuales constituyen la herramienta fundamental para describir el sistema que se está estudiando. Por otro lado, se presentan las ecuaciones de movimiento en coordenadas cilíndricas.

El capítulo 2 está dedicado a hacer una descripción del comportamiento de un fluido viscoelástico y su respuesta ante esfuerzos externos mediante el modelo de Oldroyd de dos constantes, los tiempos de relajación y retardo. Se analizan los parámetros representativos de este tipo de materiales.

En el capítulo 3 se hace una descripción de la estabilidad hidrodinámica, con la que se determina el comportamiento del sistema ante perturbaciones pequeñas con respecto al flujo principal.

En el capítulo 4 se desarrollan formalmente las relaciones matemáticas que describen al sistema; se presenta la formulación de las ecuaciones de movimiento perturbadas así como la expresión analítica en modos normales para dichas perturbaciones.

En el capítulo 5 se hace la aproximación a número de onda pequeño en relación a las dimensiones del sistema, con el fin de obtener una solución analítica del problema.

El capítulo 6 consta de las gráficas que muestran el comportamiento del sistema y su estabilidad. Se da una explicación detallada de cada una de ellas y su relación con trabajos anteriores.

Por último, en el capítulo 7, se exponen las conclusiones acerca de los resultados y expectativas a futuro del problema estudiado.

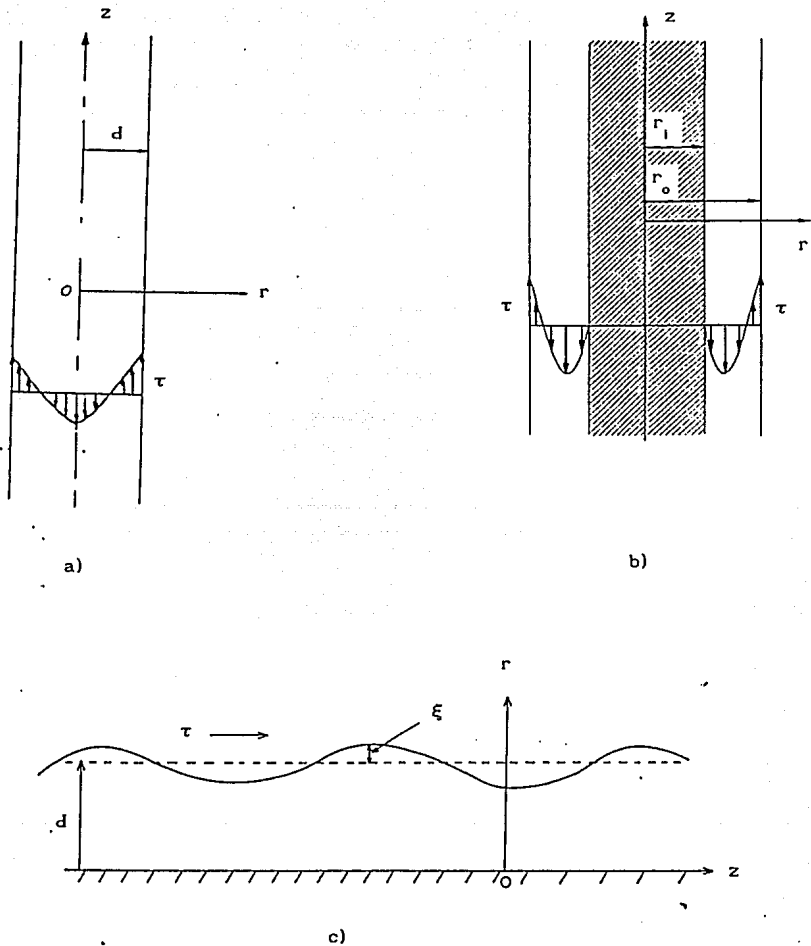


Figura 1.3. Esquemas de los trabajos investigados por: a) Xu y Davis b) Russo y Steen c) Dávalos-Orozco.

CAPITULO 1

MECANICA DE FLUIDOS

1.1 Principios e hipótesis generales.

Se considera como objeto de estudio de la mecánica de fluidos, a grandes rasgos, la descripción de fuerzas y desplazamientos de éstos y su interacción con los sólidos. Para ello, se necesitan las ecuaciones generales de movimiento [8], así como las propiedades reológicas, esto es, las respuestas características del material ante fuerzas aplicadas [9]. Para ello, se deben establecer ciertas hipótesis básicas que se supondrán válidas de aquí en adelante. La primera de ellas es el concepto del fluido como un continuo, es decir, que la materia que lo conforma llena el espacio de manera que no existen huecos, pasando por alto el carácter discreto de la misma. El sentido de este concepto es el de ignorar que el fluido está formado por moléculas, de modo que a cada elemento pequeño de volumen se le pueda asociar un valor único de cada variable del flujo (velocidad, presión, densidad, etc.). En estos términos, "elemento pequeño de volumen" significa que éste contiene un número muy grande de moléculas, de modo que la importancia individual de cada una de ellas se desprecia en favor del efecto de todas en conjunto, pero es mucho más pequeño que cualquier escala de longitud del sistema. Se abordará entonces, el problema desde un punto de vista macroscópico.

Se considera, por otro lado, una homogeneidad de las propiedades del fluido así como un carácter isotrópico en las mismas, es decir, que no varían con la posición y no dependen de ninguna dirección espacial, respectivamente.

Por último, se toman en cuenta solamente sistemas donde la temperatura no juega un papel importante en las propiedades del

fluido así como tampoco en su movimiento.

1.2 Sistemas de referencia y teorema de transporte de Reynolds.

Antes de deducir las ecuaciones generales de movimiento (conservación de masa y momento lineal) deben definirse las características de los sistemas de referencia que se utilizan en dinámica de fluidos (euleriano y lagrangiano), así como la relación entre ellos. En el siguiente capítulo se desarrollará un tercer marco de referencia necesario para describir la ecuación constitutiva de un fluido viscoelástico.

Se habla de un sistema de referencia euleriano cuando se toma un elemento de volumen fijo en el espacio y se miden las variables de flujo y sus cambios en el tiempo, los cuales están definidos por la derivada temporal que se denotará como $\partial A/\partial t$, donde A es una variable del flujo. Nótese que a tiempos distintos se están considerando partículas diferentes.

En el marco de referencia lagrangiano, se toma un volumen de fluido específico y se miden sus variables de flujo y sus cambios temporales conforme éste se mueve, es decir, siempre se están considerando las mismas partículas. Para definir los cambios temporales de las variables mencionadas de dicho elemento en el sistema euleriano, se utiliza (del cálculo diferencial para una función cuyas variables independientes son el tiempo "t" y las coordenadas espaciales " x_k "):

$$DA = \frac{\partial A}{\partial t} Dt + \frac{\partial A}{\partial x_k} Dx_k \quad (1.1)$$

Dividiendo entre Dt , incremento temporal muy pequeño:

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x_k} u_k \quad (1.2)$$

donde $u_k = Dx_k/Dt$. La ec. (1.2) se conoce como derivada material [8].

Dado que la mecánica hace una descripción de la evolución de un elemento de masa, ésta se dá en términos lagrangianos, por lo tanto, si se quiere una descripción en términos eulerianos, se necesita relacionar a ambos sistemas de alguna manera. Esto se logra con el teorema de transporte de Reynolds [8].

Las ecuaciones generales de movimiento son de conservación. En este trabajo se utilizan la ley de conservación de la masa y la de balance de momento lineal, pilares de la física clásica. Tales leyes se expresan en ecuaciones que involucran la derivada lagrangiana temporal de la masa ó el momento lineal según sea el caso. Para que exista conservación, dicha derivada debe ser igual a cero:

$$\frac{D}{Dt} \left[\int A(t) dV \right] = 0 \quad (1.3)$$

Si $A = \rho$, donde ρ es la densidad de un elemento de fluido, se tiene la masa del mismo y con $A = \rho u_1$, con u_1 como la velocidad, su momento lineal el cual se deberá igualar con las fuerzas externas. Si se separa la ec. (1.3) como la suma de la variación de A dentro del volumen inicial V_0 más su flujo neto a través de la superficie del elemento [8]:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} A dV = \int_{V_0} \frac{\partial A}{\partial t} dV + \int_S A u_1 \hat{n}_1 dS \quad (1.4)$$

donde \hat{n}_1 es un vector unitario normal hacia afuera de la superficie "s" que envuelve al elemento. Por el teorema de Gauss aplicado al segundo término del miembro derecho y sumando las integrales sobre el mismo volumen:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} A dV = \int_{V_0} \left[\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial (A u_k)}{\partial x_k} \right] dV \quad (1.5)$$

que es el teorema de transporte de Reynolds. Se tiene entonces la derivada lagrangiana igualada a una integral sobre un volumen fijo, es decir, en términos eulerianos.

1.3 Ecuaciones de conservación.

Como se mencionó, al conservarse la masa su derivada lagrangiana es cero. Por lo tanto se tiene, para $A=\rho$ en la ec. (1.5), que el miembro derecho se anula. Dado que la integral se realiza sobre un volumen fijo arbitrario V_0 , la única manera de que ésto suceda es que todo el integrando sea cero. Entonces:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k} = 0 \quad (1.6)$$

ó al desarrollar el segundo término:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \quad (1.7)$$

Esta es la ecuación más general de conservación de la masa. Nótese que los dos primeros términos conforman la derivada material de la densidad. Para los propósitos de este trabajo es indispensable hacer la aproximación para fluidos en los cuales la densidad no tiene cambios apreciables, es decir, son incompresibles. En éste caso se puede ver que la derivada material de la densidad es cero, por lo que queda de la ec. (1.7):

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \quad (1.8)$$

Este resultado será de suma utilidad para todos los cálculos posteriores. La ec. (1.8) es válida cuando la velocidad del fluido es mucho menor que la velocidad del sonido [10]. En el presente trabajo, como en muchos otros casos, dicha condición se cumple. Además, como ya se señaló, se desprecian los efectos térmicos, los cuales normalmente influyen en la densidad de los fluidos.

De la segunda ley de Newton se obtiene el balance de momento lineal. Para $A=\rho u_1$ la ec. (1.5) dá el cambio temporal de momento lineal, el cual es igual a la suma de todas las fuerzas que existen sobre el fluido:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho u_i dV = F_i \quad , \quad (1.9)$$

que es una ecuación vectorial.

De una manera muy general se pueden descomponer las fuerzas sobre el fluido en dos categorías:

Fuerzas de superficie.- Son las que se aplican sobre un elemento de área por lo que usualmente se les define como fuerza por unidad de superficie y se conocen como esfuerzos, éstos se distribuyen uniformemente a través de cualquier medio continuo. De aquí que, sobre un elemento de fluido, se tienen nueve componentes de esfuerzos dado que a cada una de las tres superficies normales a las direcciones espaciales, caracterizadas por un vector perpendicular a las mismas, le corresponden tres componentes respectivamente, (una por cada dirección, ver figura 1.1). Por lo tanto, se denotan por un tensor de segundo rango σ_{ij} , donde el subíndice i indica el plano en el que actúa el esfuerzo (perpendicular a x_i) y j indica la dirección (x_j). $\sigma_{ij}n_j$ representa una fuerza por unidad de área sobre la superficie designada por el vector normal n_i .

Otras fuerzas.- Aquí se pueden considerar todas aquellas que actúan sobre el fluido. Si éstas son producidas por algún campo de fuerza conservativo o no conservativo se conocen como fuerzas de cuerpo y se denotan en general como $\int_V \rho f_i dV$.

En vista de lo anterior, al escribir las fuerzas sobre el fluido en la ec. (1.9), resulta:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho u_i dV = \int_S \sigma_{ij} n_j dS + \int_V \rho f_i dV \quad . \quad (1.10)$$

Al aplicar al miembro izquierdo el teorema de transporte de Reynolds y transformar por el teorema de Gauss las fuerzas superficiales para después sumarlas con las otras fuerzas:

$$\int_V \left[\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_k)}{\partial x_k} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \rho f_j \right] dV = 0 \quad (1.11)$$

por lo que de nuevo, dada la arbitrariedad del volumen, se tiene

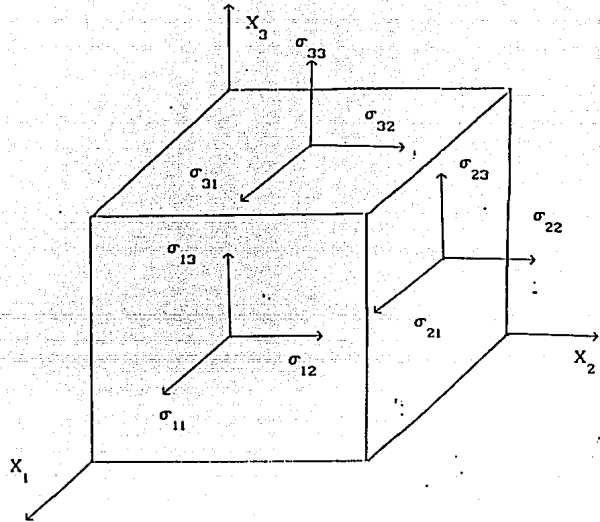


Figura 1.1. Esfuerzos sobre un elemento cúbico de fluido.

que el integrando es cero, ésto implica:

$$\frac{\partial(\rho u_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_1 u_k)}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_j} + \rho f_j \quad (1.12)$$

y para el fluido incompresible, donde ρ no varía:

$$\rho \frac{\partial u_1}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_1}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_j} + \rho f_j \quad (1.13)$$

Esta ecuación representa el balance de momento lineal.

1.4 Coordenadas cilíndricas.

El sistema estudiado en éste trabajo es una capa cilíndrica que contiene un núcleo sólido coaxial. Por ello es necesario utilizar un sistema de referencia adecuado. Así, en ésta sección se expondrán explícitamente las ecuaciones de balance de masa y momento en coordenadas cilíndricas.

En este sistema, las coordenadas vienen dadas por el radio del cilindro r , la componente azimutal θ y la componente axial z .

El operador gradiente (nabla) en coordenadas cilíndricas es el siguiente:

$$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \quad (1.14)$$

Por lo tanto, la ecuación de conservación de la masa, (1.8), es:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.15)$$

donde u , v , w , son las componentes de la velocidad en las direcciones radial, azimutal y axial respectivamente.

Para expresar las ecuaciones de conservación de momento, nótese que la derivada material de la velocidad en el miembro izquierdo de la ec. (1.13) puede ser escrita en términos del operador nabla como:

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \nabla(\vec{U}^2/2) - \vec{U} \times (\nabla \times \vec{U}) \quad (1.16)$$

siendo U el vector velocidad.

Ahora se pueden escribir las ecuaciones de movimiento utilizando apropiadamente el operador de la ec. (1.14):

$$\rho \left[u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial (r\sigma_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho f_r \quad (1.17)$$

$$\rho \left[u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2\sigma_{\theta r})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \rho f_\theta \quad (1.18)$$

$$\rho \left[u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial (r\sigma_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho f_z \quad (1.19)$$

de donde f_r , f_θ y f_z son las componentes de las fuerzas externas en cada dirección.

Cabe aclarar que en la aproximación a número de onda pequeño no se utilizarán los terminos azimutales, por tanto estas ecuaciones se simplificarán.

1.5 Condiciones de frontera.

Para resolver el sistema de ecuaciones (1.17), (1.18) y (1.19) se necesita la aplicación de condiciones de frontera que determinen el flujo.

Una de las condiciones frecuentemente utilizada en hidrodinámica es la de no deslizamiento en fluidos viscosos [8] que se aplica en la frontera entre un líquido ó gas y un sólido.

Consiste en que la velocidad del fluido en la frontera es la misma que la del sólido. Esto es resultado de la fricción entre los dos medios.

En caso de que se tenga un fluido no estático, en contacto con una pared sólida fija en la posición $r=r_0$, la expresión analítica de la condición de no deslizamiento es:

$$\vec{U}(r_0) = 0 \quad (1.20)$$

siendo \vec{U} la velocidad del fluido.

Por otro lado, la superficie libre de un fluido es aquella que, en un caso ideal, no está en contacto con ningún otro sólido ó líquido. Físicamente se puede interpretar que existe un gas sobre dicha superficie de manera que produce sólo una presión constante.

En el problema que se investiga aquí, se tiene una superficie libre que está en contacto con un gas de mucho menor densidad que la del fluido viscoelástico pero con viscosidad cinemática suficientemente grande para producir un esfuerzo tangencial que induce al fluido a moverse [5]. Dicho gas no altera de ninguna otra manera al sistema. Se tiene entonces, una condición sobre la superficie libre la cual puede ser expresada en términos de los esfuerzos superficiales que producen el movimiento. La manera más adecuada de hacer lo anterior es dividiendo a éstos en esfuerzos normales y tangenciales.

La diferencia de esfuerzos normales es igual a la tensión superficial del fluido multiplicada por la curvatura de la superficie [11]. La curvatura se puede obtener de la geometría diferencial por lo que no será deducida, tan sólo formulada para una superficie cilíndrica. Nótese que para una superficie plana, la curvatura es cero y por lo tanto no hay esfuerzos normales netos (los de un lado de la frontera son iguales a los de la otra y su diferencia es cero).

Por otro lado, los esfuerzos tangenciales son iguales al

esfuerzo de corte que produce el movimiento.

Sean n_1 y t_1 los vectores normal y tangencial a la superficie. Entonces, la condición en la superficie libre se puede escribir como:

$$\sigma_{1j} n_j = \gamma H n_1 + \tau t_1 \quad (1.21)$$

donde γ es la tensión superficial, τ el esfuerzo tangencial impuesto y H la curvatura de la superficie libre.

CAPITULO 2

ECUACIONES CONSTITUTIVAS Y VISCOELASTICIDAD

2.1 Ecuaciones constitutivas y modelos básicos.

Como se mencionó en la sección 1.1, para tener una descripción completa del sistema a estudiar, se necesita conocer, además de las leyes de conservación ya obtenidas, una relación matemática que proporcione información acerca de la manera en que el fluido responderá al aplicarle un esfuerzo. Tal información es obtenida de la ecuación constitutiva [9]. Debe notarse que la relación entre esfuerzos y deformaciones en dicha ecuación, dependerá directamente de la estructura interna del fluido, en otras palabras, la ecuación constitutiva describe las propiedades mecánicas del mismo [12].

Para lograr su adecuada interpretación, se deben definir más ampliamente los conceptos de esfuerzo y deformación.

Esfuerzos.- En la sección 1.3 se dió la definición del tensor de esfuerzos por lo que ahora se abundará acerca de su construcción general. Dicho tensor puede descomponerse en dos partes:

i) Esfuerzos isotrópicos.- Como su nombre indica, no dependen de las direcciones espaciales y sólo producirán cambios en el volumen de un elemento de fluido sobre el cual se aplican. Un ejemplo de estos esfuerzos es la presión hidrostática. Ver figura 2.1.

ii) Esfuerzos anisotrópicos.- El efecto que producen es estrictamente la deformación del elemento del fluido, en este sentido, son aplicados sobre las superficies y son conocidos como esfuerzos de corte. Ver figura 2.2.

La combinación de los esfuerzos isotrópicos y anisotrópicos conforman al tensor de esfuerzos σ_{ij} . Su forma es, tomando en

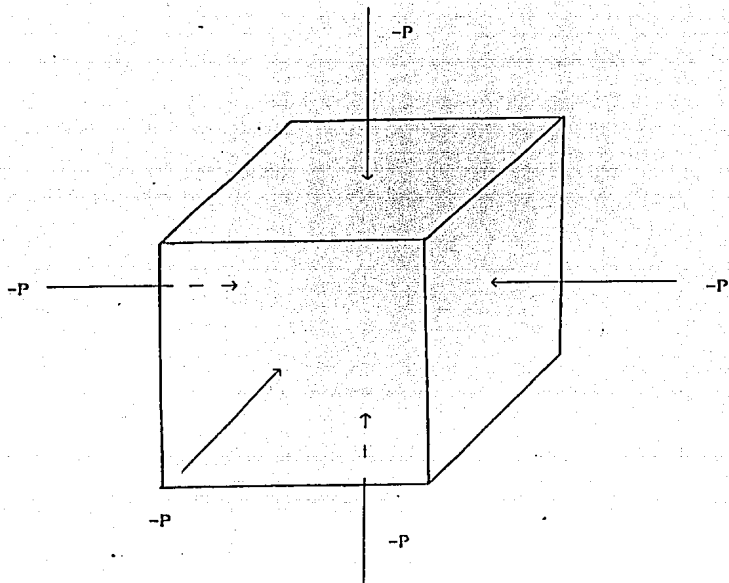


Figura 2.1. Esfuerzos isotrópicos sobre un elemento cúbico de fluido. Implican cambio de volumen y no de forma.

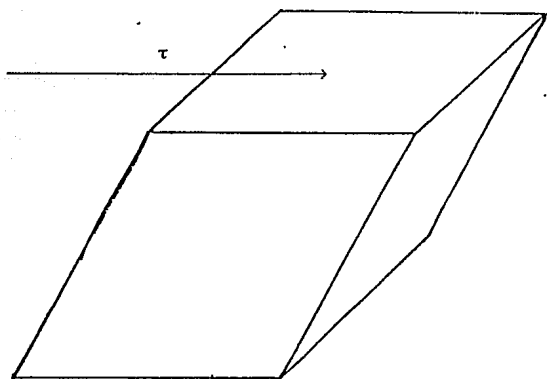


Figura 2.2. Esfuerzos anisotrópicos sobre un elemento cúbico de fluido. Implican cambio de forma y no de volumen.

cuenta que el rango del tensor es 2:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (2.1)$$

El primer término del miembro derecho es la parte isotrópica, siendo δ_{ij} , la delta de Kronecker ($i=j$ implica $\delta=1$; $i \neq j$ implica $\delta=0$), que es el tensor de rango 2 isotrópico más general y "p" una constante escalar dado que no debe depender de la dirección. Su interpretación física se obtiene al considerar al fluido en reposo sobre el cual sólo existe la presión hidrostática debido al principio de Pascal. Por lo tanto, la constante "p" representa a dicha presión. Su signo negativo se debe a que se considera como un esfuerzo negativo sobre el elemento.

Esta interpretación implica que τ_{ij} , el segundo término del miembro derecho, representa los esfuerzos presentes en el fluido cuando está en movimiento y se le conoce como tensor de esfuerzos de corte.

Deformaciones.-Se dice que un fluido es deformado cuando dos puntos cualesquiera del mismo son desplazados de su posición inicial y se produce un cambio en la distancia entre ellos. Por lo tanto, la deformación clásica está determinada por los desplazamientos relativos de los elementos del fluido.

Considérese la figura 2.3 en la que los puntos iniciales, colocados en r_1 y r_2 , se desplazan hacia r'_1 y r'_2 al deformarse el medio y resulta una nueva separación entre ellos Δr . Se define entonces el gradiente de desplazamiento como el cociente $\Delta r/\Delta s$, donde Δs es la separación inicial de los puntos. Recordando que ambos incrementos son vectores y haciendo tender Δs a cero, se tiene la siguiente identidad:

$$\frac{\Delta r}{\Delta s} \underset{s \rightarrow 0}{=} \frac{\partial r_i}{\partial x_j} \quad (2.2)$$

que es un tensor de rango 2.

Un aspecto de vital importancia es que tal tensor describe la rotación, así como la deformación de un elemento de fluido. A esto

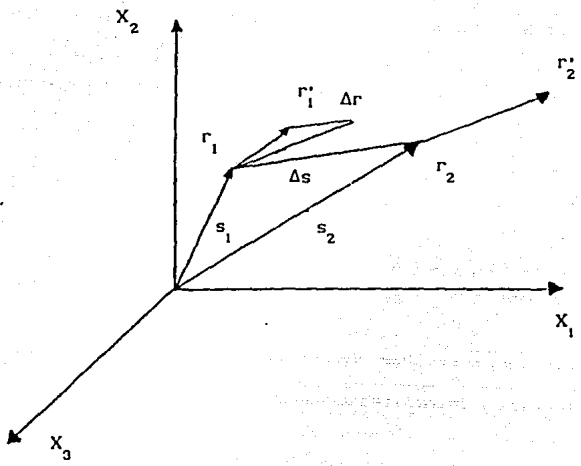


Figura 2.3. Deformación clásica.

se puede concluir considerando en el plano x_1-x_2 , un elemento cuadrado de fluido sujeto a una deformación tal que:

$$\frac{\partial r_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial r_2}{\partial x_1} = \beta \quad (2.3)$$

con β igual a una constante, de donde se puede ver que el efecto es que el cuadrado rota un ángulo 2β . Por otro lado, si se tiene:

$$\frac{\partial r_1}{\partial x_2} = \frac{\partial r_2}{\partial x_1} = \beta \quad (2.4)$$

se provoca una deformación del fluido quedando en la misma dirección el vector que separa a ambos puntos. El efecto es deformación pura, sin rotación.

De ésta manera se puede descomponer al tensor de desplazamiento Γ_{ij} de la siguiente manera:

$$\Gamma_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial r_i}{\partial x_j} + \frac{\partial r_j}{\partial x_i} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial r_i}{\partial x_j} - \frac{\partial r_j}{\partial x_i} \right] \quad (2.5)$$

donde el primer término del miembro derecho representa las deformaciones de un elemento de fluido mientras que el segundo denota exclusivamente rotación.

Se puede definir ahora, un tensor gradiente de velocidad tomando la derivada temporal de Γ_{ij} y repitiendo los razonamientos anteriores. Se tendrá:

$$L_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = e_{ij} + \Omega_{ij} \quad (2.6)$$

donde e_{ij} es el tensor rapidez de deformación y Ω_{ij} es el tensor vorticidad cuyas componentes son las del vector velocidad angular:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad (2.7)$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad (2.8)$$

De ésta manera se tiene al tensor rapidez de deformación como una medida de las deformaciones. Nótese que e_{ij} es simétrico ($e_{ij} = e_{ji}$) y Ω_{ij} es antisimétrico ($\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$). La razón por la que

se utilizará el gradiente de velocidad en lugar del gradiente de desplazamiento para medir deformaciones, es que éstas, para ciertos fluidos, tienen una dependencia temporal que sólo el gradiente de velocidades puede reflejar.

Conviene aclarar el porqué de tal necesidad. Como ya se dijo, la ecuación constitutiva es una relación entre los esfuerzos sobre un fluido y sus correspondientes deformaciones. Evidentemente implican movimiento y están representados por el tensor τ_{ij} (esfuerzos de corte). En este punto nos interesa la siguiente clasificación de los materiales deformables con base en la dependencia que tiene τ_{ij} con el tensor Γ_{ij} [9]:

a) Materiales elásticos.- La dependencia es únicamente con la deformación: $\tau_{ij} = \tau_{ij}(\Gamma_{ij})$. Como ejemplo sencillo se puede mencionar al sólido de Hooke en el cual la relación entre esfuerzo y deformación es lineal:

$$\tau_{ij} = k_{ijkl} \Gamma_{kl} \quad (2.9)$$

donde k_{ijkl} es el tensor elástico. La elasticidad implica una recuperación de la forma en tiempos muy cortos (10^{-5} seg. ó menores [12]).

b) Materiales viscosos.- La dependencia es con la rapidez de deformación: $\tau_{ij} = \tau_{ij}(e_{ij})$. La relación lineal describe al fluido newtoniano:

$$\tau_{ij} = 2\mu_{ijkl} e_{kl} \quad (2.10)$$

siendo μ_{ijkl} la viscosidad dinámica ($\nu = \mu/\rho$ define la viscosidad cinemática). Ante un esfuerzo aplicado, un fluido viscoso no recupera su forma, queda permanentemente deformado en ausencia de nuevos esfuerzos.

c) Materiales viscoelásticos.- Hay dependencia tanto de la deformación como de la rapidez de deformación: $\tau_{ij} = \tau_{ij}(\Gamma_{ij}, e_{ij})$. El comportamiento de los fluidos viscoelásticos es muy diferente al de los newtonianos. Existen varios experimentos que demuestran

lo anterior. En uno de ellos se tiene un cilindro rotando dentro de otro que contiene un fluido; cuando éste es newtoniano, se forma una concavidad, pero si es viscoelástico, sube por el cilindro que está rotando. Se conoce como efecto Weissenberg. Otro fenómeno conocido consiste en expulsar al fluido por un tubo; el newtoniano se contrae mientras que el viscoelástico se expande. Ver figura 2.4

Dado que el fluido considerado en este trabajo es viscoelástico, se dedicará la próxima sección a su estudio.

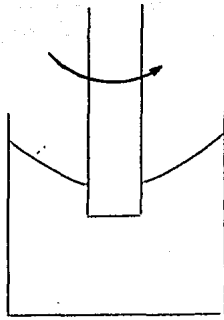
Por último debe recalcar que una ecuación constitutiva que cumpla las dependencias descritas será solamente un modelo aproximado del comportamiento de los materiales. Esto significa que cualquiera de ellas puede contener términos con derivadas de orden superior, utilizadas para encontrar las relaciones analíticas que concuerden lo mejor posible con la respuesta real del material. La ecuación constitutiva se construye, por lo tanto, empíricamente.

2.2 Respuesta viscoelástica.

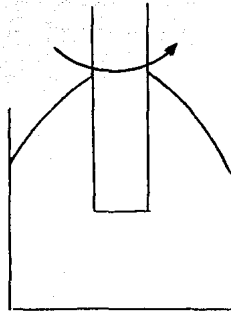
En esta sección se abundará acerca del comportamiento viscoelástico así como en el modelo que describe un fluido de tales características.

Se puede partir de la base de que un material viscoelástico presenta propiedades tanto elásticas como viscosas. Un efecto viscoelástico típico es la deformación ante un esfuerzo aplicado y una parcial recuperación en un tiempo finito. El tiempo, por lo tanto, aparece como una propiedad reológica. Se dice entonces que tales materiales tienen "memoria".

Como ya se mencionó, la ecuación constitutiva se construye empíricamente con base en el comportamiento que presenta el material durante las pruebas que se realizan en el laboratorio. Para los propósitos de este trabajo, se utiliza una ecuación constitutiva para fluidos viscoelásticos conocida como modelo de



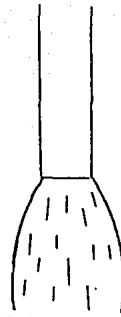
Newtoniano



Viscoelástico



Newtoniano



Viscoelástico

Figura 2.4. Efectos viscoelásticos. En los esquemas a) y b) el cilindro interior gira, produciendo que el fluido viscoelástico suba (efecto Weissenberg). En c) y d) un fluido newtoniano y otro viscoelástico, respectivamente, son expulsados por un tubo, expandiéndose este último.

Oldroyd de dos constantes [9] y que tiene la siguiente estructura:

$$\tau_{1j} + \lambda_1 \frac{D_c \tau_{1j}}{Dt} = 2\mu \left[e_{1j} + \lambda_2 \frac{D_c e_{1j}}{Dt} \right] \quad (2.11)$$

donde la derivada es, para un tensor A_{ij} :

$$\frac{D_c A_{ij}}{Dt} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k} - L_{im} A_{mj} - L_{jm} A_{im} \quad (2.12)$$

siendo L el tensor gradiente de velocidad.

Se puede también escribir como:

$$\frac{D_c A_{ij}}{Dt} = \frac{DA_{ij}}{Dt} - L_{im} A_{mj} - L_{jm} A_{im} \quad (2.13)$$

donde el primer término del miembro derecho es la derivada material.

El operador de la ec. (2.12) denota a la derivada codeformacional, la cual está definida sobre un sistema de ejes que siguen a un elemento de fluido y además se deforman con él, esto es, pasan siempre a través de los mismos elementos del fluido de modo que satisfacen el principio de indiferencia material [9]. Su utilización es necesaria ya que describe de manera completa las deformaciones del fluido.

En esta ecuación aparecen como parámetros reológicos del fluido su viscosidad μ , el tiempo de relajación λ_1 y el tiempo de retardo λ_2 . El significado de estos últimos, explicado mediante el modelo de Jeffreys [13], es el siguiente:

Supóngase que a partir del tiempo t_0 el fluido tiene una deformación constante (por ejemplo, puede ser estirado y mantenido en ese estado). Esto implica que $e_{1j} = 0$, entonces la ec. (2.11) queda como:

$$\tau_{1j} + \lambda_1 \frac{d\tau_{1j}}{dt} = 0 \quad (2.14)$$

Por lo tanto se tiene la siguiente solución para τ_{1j} :

$$\tau_{1j} = \tau_{1j}^0 \exp(-t/\lambda_1) \quad (2.15)$$

la cual muestra que los esfuerzos que realiza el material estando deformado, decaen exponencialmente desde τ_{1j}^0 , a una tasa $1/\lambda_1$. De aquí que λ_1 se conoce como tiempo de relajación.

Por otro lado, si se aplica un esfuerzo constante, τ_{1j}^0 , y enseguida se permite que el material tienda a recuperar su forma, la ec. (2.11) se reduce a:

$$\tau_{1j}^0 = 2\mu \left[e_{1j} + \lambda_2 \frac{de_{1j}}{dt} \right] \quad (2.16)$$

la cual al resolver para e_{1j} dá la solución:

$$e_{1j} = \frac{\tau_{1j}^0}{2\mu} \left[1 - \exp(-t/\lambda_2) \right] \quad (2.17)$$

donde se utilizó la condición $e_{1j}(0)=0$ (al tiempo 0 no hay rapidez de deformación). De aquí se puede ver que la rapidez de deformación tiende a un valor fijo de manera retardada por la tasa $1/\lambda_2$. Se define entonces a λ_2 como tiempo de retardo.

En resúmen, el tiempo de relajación es la tasa de decaimiento de los esfuerzos que ejerce un material mantenido con una deformación constante. Por otro lado, el tiempo de retardo es la tasa a la que dicho material tiende a su forma inicial después de haber sido deformado mediante un esfuerzo instantáneo.

Para tiempos de relajación y retardo muy pequeños (10^{-5} seg. [12]) el modelo de Oldroyd se reduce a la ecuación constitutiva de un fluido newtoniano.

Nótese, por último, que las definiciones de los tiempos de relajación y de retardo se obtienen de situaciones físicas que describen a sólo uno de ellos. Sin embargo, un material viscoelástico presenta ambos comportamientos.

2.3 Ecuación constitutiva en coordenadas cilíndricas.

Para construir el modelo de Oldroyd en coordenadas cilíndricas, se encuentra primero el tensor gradiente de velocidad utilizando el operador nabla, definido en (1.16), y aplicándolo a

la definición expresada en la ec. (2.6) [14]. Escribiendo $L_{i,j}$ en forma matricial se obtiene:

$$L_{i,j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Del mismo modo para el tensor rapidez de deformación $e_{i,j}$:

$$e_{i,j} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} & 2 \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} & 2 \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Por último, la derivada material de un tensor $A_{i,j}$ en coordenadas cilíndricas, es de la forma:

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + (V \cdot \nabla)A + \frac{v}{r} M \quad (2.20)$$

donde el tensor $M_{i,j}$ está dado de la siguiente manera [14]:

$$M_{i,j} = \begin{bmatrix} -(A_{r\theta} + A_{\theta r}) & A_{rr} - A_{\theta\theta} & -A_{\theta z} \\ A_{rr} - A_{\theta\theta} & A_{r\theta} + A_{\theta r} & A_{rz} \\ -A_{z\theta} & A_{zr} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

De esta manera, sustituyendo las ecs. (2.18) y (2.20) en (2.13) se obtendrá la derivada codeformacional en coordenadas cilíndricas.

Tomando en cuenta la ec. (2.19) para la rapidez de deformación, se tienen todos los elementos para construir la ecuación constitutiva en el sistema de referencia deseado:

$$\begin{aligned} & \tau_{ij} + \lambda_1 \left(\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} + \frac{v}{r} M_{ij}^t - L_{im} \tau_{mj} - L_{jm} \tau_{im} \right) \\ = & 2\mu \left[e_{ij} + \lambda_2 \left(\frac{\partial e_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_k} + \frac{v}{r} M_{ij}^o - L_{im} e_{mj} - L_{jm} e_{im} \right) \right] \end{aligned}$$

(2.22)

donde M_{ij}^t y M_{ij}^o son el tensor de la ec. (2.21) con los elementos de τ_{ij} y e_{ij} , respectivamente. Dicha ecuación se presenta por formalidad solamente, ya que el tensor M está multiplicado por la componente de la velocidad azimutal la cual no es considerada en el problema.

CAPITULO 3

ESTABILIDAD HIDRODINAMICA

3.1 Elementos de estabilidad hidrodinámica.

En el capítulo 1 se mencionó como objetivo de la mecánica de fluidos, la descripción del movimiento de un fluido y su interacción con cuerpos sólidos [10]. Dicha descripción se obtiene en términos de las variables de flujo como pueden ser las velocidades y las presiones, las cuales tienen el carácter de campos.

Cuando tales variables dependen del tiempo, se dice que el flujo no es estacionario, en caso contrario será estacionario. Esto último significa, que en un punto del espacio por donde pasa el fluido, los valores locales de velocidad, presión ó densidad por ejemplo, son los mismos para cualquier tiempo. Esta situación se presenta frecuentemente en la mecánica de fluidos y es también el caso de la capa cilíndrica estudiada en este trabajo.

La estabilidad hidrodinámica estudia cuál es el efecto que sufre un flujo (estacionario ó no estacionario) al aplicarle una perturbación [15]. Esta materia goza de amplia popularidad en la física dado que cualquier sistema real (no ideal) es susceptible de sufrir perturbaciones causadas por interacciones no consideradas en la teoría. De ésta manera, en un flujo se pueden modificar los campos de velocidades, presiones ó inclusive la superficie libre del fluido (como en este trabajo) debido a imperfecciones en alguna frontera sólida, por algún pequeño cambio de temperatura, etc., que alteran el estado inicial. El objetivo de la estabilidad hidrodinámica es determinar si estas perturbaciones crecen ó se amortiguan.

Para el caso en el que crecen se dice que el flujo es inestable; por el contrario, si decrecen, el flujo es estable.

Se debe aclarar que solamente se estudiará la teoría lineal de la estabilidad [2]. Esto significa que si se toma a la variable de flujo perturbada como:

$$v(x_1, t) = V(x_1) + v'(x_1, t) \quad (3.1)$$

donde $V(x_1)$ es la variable de un flujo básico estacionario y $v'(x_1, t)$ la perturbación, se supondrá que la segunda será mucho menor que la primera; nótese que la variable del flujo básico se toma como no dependiente del tiempo (estacionaria) mientras que la perturbación sí.

Es evidente que la variable perturbada debe cumplir las ecuaciones de movimiento. Al sustituirla, se pueden despreciar todos los términos de orden $(v')^2$ de modo que las ecuaciones queden linealizadas.

3.2 Perturbaciones en modos normales.

Se puede proponer ahora, una expresión analítica de las perturbaciones. Tal expresión debe proporcionar una manera de determinar si decaen o crecen. Además debe ser matemáticamente simple para facilitar su manejo.

Se considera entonces, que una perturbación puede ser descrita como la superposición de varios modos normales de diversas longitudes de onda. Estos son expresados de la siguiente manera:

$$v'_1 = \phi(x_1) \exp[i(\alpha_1 x_1 - ct)] \quad (3.2)$$

En esta ecuación, ϕ es la amplitud de la onda, α_1 el número de onda (real) en la dirección "1" y c es un número complejo de vital importancia, como se puede constatar al reescribir la ec. (3.2) de la siguiente manera:

$$v'_1 = \phi(x_1) \exp[i(\alpha_1 x_1 - c_R t)] \exp(c_I t) \quad (3.3)$$

donde c_R es la parte real de c , que físicamente es la velocidad de fase de la onda y c_I es la parte imaginaria que indica la rapidez de crecimiento de la perturbación. Esta última, por lo tanto, define cuando un flujo es estable ó inestable como sigue:

$c_I > 0$ implica que la perturbación crece (el flujo es inestable).

$c_I < 0$ implica el decaimiento de la onda (el flujo es estable).

$c_I = 0$ define la estabilidad neutral (la perturbación no crece ni se amortigua).

Para comprender el significado de la estabilidad neutral se debe recordar que, tanto el flujo básico como las ecuaciones perturbadas, dependen de los parámetros que aparecen en las ecuaciones de movimiento y en las condiciones de frontera. De aquí que la estabilidad dependerá de ellos. Se sigue entonces que, al hacer el análisis en modos normales, se obtiene el valor de c_I en función de los parámetros del sistema:

$$c_I = f(Y_1, Y_2, \dots, Y_N) \quad (3.4)$$

denotando las Y 's a tales parámetros.

Este resultado permite analizar dos aspectos fundamentales:

1.- El papel que juegan en la estabilidad los distintos parámetros al contribuir a que c_I tome valores positivos, cero ó negativos. Con base en esto último, se pueden determinar los mecanismos físicos que intervienen en el problema.

2.- $c_I = 0$ determina una curva en el espacio de los parámetros que se conoce como curva marginal [2], la cual, constituye una frontera entre el conjunto de valores de los parámetros para los cuales el flujo es inestable y el conjunto para los cuales es estable. Los puntos sobre la curva definen los parámetros críticos. Es objetivo de la estabilidad hidrodinámica encontrarlos.

3.3 Parámetros adimensionales.

En esta sección se abundará un poco más acerca de los parámetros útiles para determinar la estabilidad hidrodinámica.

En primer lugar, las ecuaciones que describen el problema deben escribirse adimensionalmente. Esto significa que cada parámetro que aparece en ellas está formado por la combinación de las distintas características físicas que definen al flujo; por ejemplo, el caso estudiado aquí depende de la viscosidad del fluido, sus tiempos de relajación y retardo, la tensión superficial, el radio del cilindro, la densidad. En el capítulo 4 se definen de manera precisa los números adimensionales que aparecen en el problema.

Respecto al orden de magnitud de tales parámetros adimensionales, éste también es determinado por las condiciones físicas del flujo. En particular una de ellas, la tensión superficial (contenida proporcionalmente en el número adimensional S), juega un papel muy importante ya que su magnitud, para una gran cantidad de fluidos, es de orden muy grande. Esto implica que S también sea de orden mucho mayor que los demás números adimensionales.

Por otro lado, para obtener una solución analítica de la razón de crecimiento de la perturbación (c_1), en el capítulo 5 se hace una aproximación de las ecuaciones en modos normales para número de onda de la perturbación axial (α) pequeño. Por lo tanto se desprecian los términos de orden α^2 en adelante. Sin embargo, dada la magnitud del parámetro S , se conservan aquellos que contengan el producto $\alpha^2 S$ considerándolos de orden uno. Por lo anterior se tiene que:

$$S \gg 1 \quad (3.5)$$

condición de gran utilidad en la aproximación de perturbaciones con número de onda pequeño (ondas largas). La desigualdad (3.5)

permite conservar en las ecuaciones el efecto de la tensión superficial.

CAPITULO 4

FLUJO DE UNA CAPA CILINDRICA VISCOELASTICA CON NUCLEO SOLIDO

4.1 Descripción del sistema.

El sistema a estudiar consiste en una capa cilíndrica que contiene coaxialmente un núcleo sólido como se muestra en la figura 4.1, donde se señala la disposición de los ejes coordenados: "r" la dirección radial y "z" la dirección axial.

El análisis del problema se desarrolla bidimensionalmente despreciando las componentes azimutales θ dado que las inestabilidades en esta dirección no son compatibles con la aproximación de número de onda pequeño que se hace en el siguiente capítulo; se considera que no influyen en este rango [16]. Tampoco son tomados en cuenta los efectos de la gravedad debido a que la capa es muy delgada y domina la tensión superficial.

El radio interior (esto es, el radio del núcleo) es r'_1 , mientras que el exterior es r'_0 .

El líquido estudiado es un fluido viscoelástico de densidad ρ , tensión superficial γ , viscosidad μ , tiempo de relajación λ_1 y tiempo de retardo λ_2 .

El flujo estacionario es producido por un esfuerzo mecánico τ sobre la superficie libre.

La condición de frontera en la superficie sólida del núcleo es la de no deslizamiento. Otra de las condiciones es que el flujo retorna, esto es, que el flujo neto de líquido a través de un plano que corta perpendicularmente al cilindro es cero (no hay gasto).

La adimensionalización de las ecuaciones se realiza de acuerdo a las siguientes convenciones donde r' son las distancias, U' las velocidades, t' los tiempos y P' las presiones, todas ellas con dimensiones:

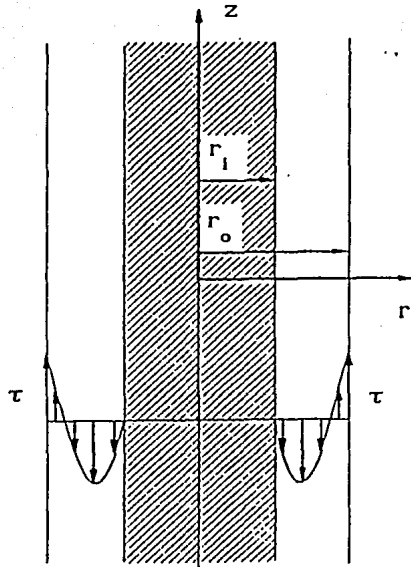


Figura 4.1. Capa cilíndrica de fluido viscoelástico con núcleo sólido interior.

$$r' = rd \quad U' = Urd/\mu$$

$$t' = t\mu/\tau \quad P' = P\tau \quad (4.1)$$

donde

$$d = r'_0 - r'_1 \quad (4.2)$$

es el espesor de la capa de fluido.

Los parámetros adimensionales que resultan, son los siguientes [5]:

$$S = \frac{\rho\gamma d}{\mu^2} \quad (4.3)$$

$$R = \frac{\rho\tau d^2}{\mu^2} \quad (4.4)$$

$$DL = L_1 - L_2 \quad (4.5)$$

$$A = \frac{d}{r'_0} \quad (4.6)$$

S y R son los números de Reynolds de tensión superficial y de esfuerzos de corte, respectivamente. Miden las magnitudes de γ y de τ . La diferencia de tiempos de relajación y retardo (L_1 y L_2) mide el papel de la viscoelasticidad en el problema. El parámetro A es la razón entre el espesor de la capa y el radio exterior. Al hacerlo muy pequeño ($A \rightarrow 0$), se obtiene un sistema plano [5], ya que significa un radio del cilindro muy grande. Por el contrario, el hacer $A=1$, equivale a quitar el núcleo sólido por lo que se obtiene un chorro clásico [4] ya que el radio interior es cero. Nótese que $0 \leq A \leq 1$. Sin embargo, en este trabajo no se puede tomar A exactamente igual a cero ó uno dado que representa una singularidad en las ecuaciones finales, lo que significa que

siempre se tendrá un núcleo interno (aunque sea muy delgado) sobre el cual se aplica la condición de no deslizamiento.

Una vez hecha la adimensionalización y despreciando los términos azimutales, así como los efectos no lineales y las fuerzas externas, las ecuaciones que gobiernan al fluido y las ecuaciones constitutivas, son:

Ecuación de continuidad

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.7)$$

Ecuaciones de balance de momento

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\sigma_{rr})}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} = 0 \quad (4.8)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\sigma_{zr})}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \quad (4.9)$$

Ecuaciones constitutivas

$$\tau_{ij} + L_{ij} \left[\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial t} + u \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial r} + w \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial z} - L_{im}\tau_{ij} - L_{jm}\tau_{ij} \right] =$$

$$2 \left[e_{ij} + L_{ij} \left(\frac{\partial e_{ij}}{\partial t} + u \frac{\partial e_{ij}}{\partial r} + w \frac{\partial e_{ij}}{\partial z} - L_{im}e_{ij} - L_{jm}e_{im} \right) \right] \quad (4.10)$$

donde $i, j=r, z$ y los tensores gradiente de velocidad y rapidez de deformación son:

$$L_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & 0 & \frac{\partial u}{\partial z} \\ 0 & \frac{u}{r} & 0 \\ \frac{\partial w}{\partial r} & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial r} & 0 & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \\ 0 & 2\frac{u}{r} & 0 \\ \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} & 0 & 2\frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

4.2 Flujo básico.

Para obtener el flujo básico se necesita resolver las ecuaciones de movimiento. Obsérvese que éstas se satisfacen si se hacen las siguientes hipótesis:

$$U = U(r), \quad p = p(z), \quad \tau_{rz} = \tau_{rz}(r), \quad \tau_{zz} = \tau_{zz}(r), \quad \tau_{rr} = 0 \quad (4.13)$$

El perfil de velocidades del flujo depende sólo de la dirección radial ya que el esfuerzo aplicado se distribuye uniformemente desde la superficie hacia el interior del cilindro. Dado que se exige que se forme una sola celda cerrada cilíndrica, se requiere la presencia de un gradiente de presión en la dirección axial producido gracias a la hipotética presencia de paredes muy lejanas (que no afectan de ninguna otra manera en el problema) que hacen retornar al fluido. Esto implica la condición de gasto cero. Por último, se considera que los esfuerzos sobre el flujo básico están dados por las componentes tangenciales al cilindro, despreciando las radiales.

Las condiciones en (4.13) forman parte de una solución válida para el problema y constituyen una simplificación necesaria.

De ésta manera, la componente radial de la velocidad se anula. Las únicas componentes distintas de cero del tensor gradiente de velocidad y del tensor rapidez de deformación, son:

$$L_{zr} = \frac{dw}{dr} \quad (4.14)$$

$$e_{rz} = e_{zr} = \frac{1}{2} \frac{dw}{dr} \quad (4.15)$$

Al sustituir ambos en la ec. (4.10) se obtienen las expresiones de los esfuerzos:

$$\tau_{rz} = \frac{dw}{dr} \quad (4.16)$$

$$\tau_{zz} = 2DL \left[\frac{dw}{dr} \right]^2 \quad (4.17)$$

De la ec. (4.9), la ecuación de movimiento resulta:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dw}{dr} \right] = P_z \quad (4.18)$$

Al integrar dos veces respecto a r:

$$w(r) = P_z \frac{r^2}{4} + a \ln(r) + b \quad (4.19)$$

Las constantes a y b se determinan con las condiciones de frontera. En la superficie libre el esfuerzo es $\tau = \tau_{rz}$. Si se sustituye en la ec. (4.16) y se adimensionaliza, se tiene:

$$\frac{dw}{dr} = 1, \quad r = r_0 \quad (4.20)$$

En la frontera interior se tiene la condición de no deslizamiento:

$$w = 0, \quad r = r_1 \quad (4.21)$$

La condición de gasto cero es:

$$\int_{r_1}^{r_0} w(r) dr = 0 \quad (4.22)$$

Resolviendo las constantes se tiene el siguiente perfil de velocidad:

$$w(r) = P_z (r - r_1^2) + \epsilon \ln (r/r_1) \quad (4.23)$$

donde se define:

$$\epsilon = r_0 (1 - r_0 P_z / 2) \quad (4.24)$$

y el gradiente de presión, al resolver la ec. (4.22), está dado por:

$$P_z = \left[\frac{4(-r_o^2 \ln(r_o/r_1) + r_o)}{-2r_o^3 \ln(r_o/r_1) + 2r_o^2 + r_o - 2/3} \right] \quad (4.25)$$

Se puede hacer un cambio de variable radial [1] de modo que:

$$x = r - (1 - A)/A \quad (4.26)$$

Nótese que la frontera interior es $r_1 = (1-A)/A$ con $x=0$ y la frontera exterior es $r_o = 1/A$ con $x=1$. Reescribiendo la velocidad, ec. (4.23):

$$w(x) = \frac{P_z}{4A^2} \left[A^2 x^2 + 2Ax(1 - A) + 2 \left(1 - \frac{2A}{P_z} \right) \ln \left(\frac{1 - A}{Ax + 1 - A} \right) \right] \quad (4.27)$$

De ésta manera es posible variar el radio del núcleo interior variando el parámetro A.

En la figura 4.2 se muestran los perfiles de velocidad para distintos radios.

4.3 Ecuaciones perturbadas linealizadas.

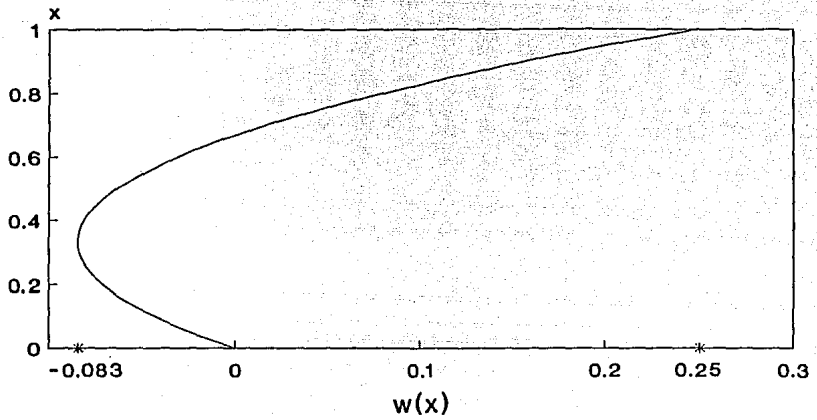
Las perturbaciones al sistema son pequeñas variaciones de las variables de flujo:

$$(\bar{U}, \bar{P}, \bar{\tau}_{rr}, \bar{\tau}_{rz}, \bar{\tau}_{zz}) = (U, P, \tau_{rr}, \tau_{rz}, \tau_{zz}) + (U', P', \tau'_{rr}, \tau'_{rz}, \tau'_{zz}) \quad (4.28)$$

En el miembro derecho se tienen las variables del flujo básico más las perturbaciones.

Aplicando (4.28) a las ecuaciones de movimiento se obtiene:
Ecuación de continuidad

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru')}{\partial r} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (4.29)$$

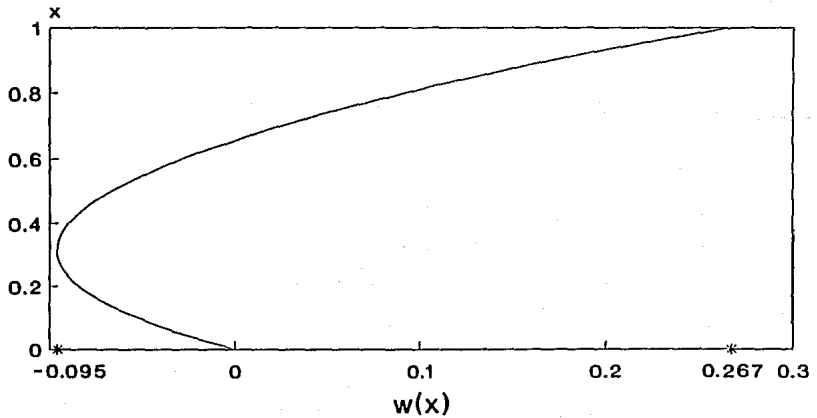


— A=0.01

a)

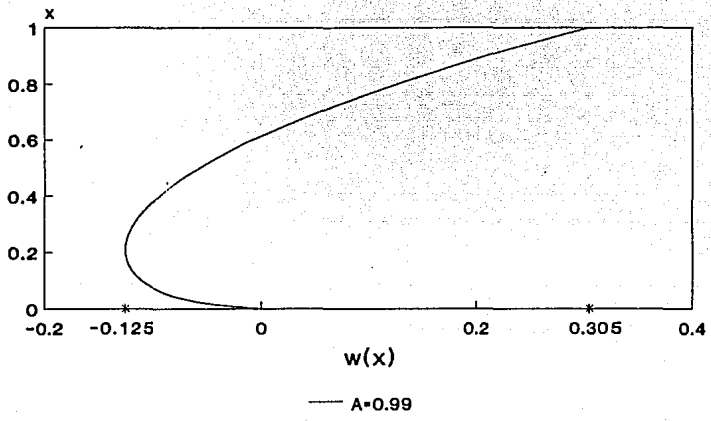
Figura 4.2. Flujo básico. x vs $w(x)$. a) $S=100000$, $R=1000$, $A=0.001$.

b) $S=100000$, $R=1000$, $A=0.5$ c) $S=100000$, $R=1000$, $A=0.99$.



— A=0.5

b)



c)

Ecuaciones de balance de momento

$$R \left[\frac{\partial u'}{\partial t} + w \frac{\partial u'}{\partial r} \right] = - \frac{\partial P'}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r\tau'_{rr})}{\partial r} + \frac{\partial \tau'_{rz}}{\partial z} \quad (4.30)$$

$$R \left[\frac{\partial w'}{\partial t} + u' \frac{dw'}{dr} + w \frac{\partial w'}{\partial z} \right] = - \frac{\partial P'}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r\tau'_{rz})}{\partial r} + \frac{\partial \tau'_{zz}}{\partial z} \quad (4.31)$$

Ecuaciones constitutivas

$$\tau'_{rr} + L_1 \left[\frac{\partial \tau'_{rr}}{\partial t} + w \frac{\partial \tau'_{rr}}{\partial z} - 2 \frac{\partial u'}{\partial z} \frac{dw}{dr} \right] = 2 \left[e'_{rr} + L_2 \left(\frac{\partial e'_{rr}}{\partial t} + w \frac{\partial e'_{rr}}{\partial z} - \frac{\partial u'}{\partial z} \frac{dw}{dr} \right) \right] \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} & \tau'_{rz} + L_1 \left[\frac{\partial \tau'_{rz}}{\partial t} + w \frac{\partial \tau'_{rz}}{\partial z} - \frac{dw}{dr} \tau'_{rr} + \right. \\ & \left. + \left(u' \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{\partial u'}{\partial r} \frac{dw}{dr} - \frac{\partial w'}{\partial z} \frac{dw}{dr} - 2DL \frac{\partial u'}{\partial z} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right) \right] = \\ & 2 \left[e'_{rz} + L_2 \left(\frac{\partial e'_{rz}}{\partial t} + w \frac{\partial e'_{rz}}{\partial z} - \frac{dw}{dr} e'_{rr} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \left(u' \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{\partial u'}{\partial r} \frac{dw}{dr} - \frac{\partial w'}{\partial z} \frac{dw}{dr} \right) \right) \right] \quad (4.33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \tau'_{zz} + L_1 \left[\frac{\partial \tau'_{zz}}{\partial t} + w \frac{\partial \tau'_{zz}}{\partial z} - 2 \frac{dw}{dr} \tau'_{rz} + \right. \\ & \left. + \left(4DLu' \frac{d^2 w}{dr^2} \frac{dw}{dr} - 4DL \frac{\partial w'}{\partial z} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 - 2 \frac{\partial w'}{\partial r} \frac{dw}{dr} \right) \right] = \\ & 2 \left[e'_{zz} + L_2 \left(\frac{\partial e'_{zz}}{\partial t} + w \frac{\partial e'_{zz}}{\partial z} - 2 \frac{dw}{dr} e'_{rz} - \frac{\partial w'}{\partial r} \frac{dw}{dr} \right) \right] \quad (4.34) \end{aligned}$$

Condiciones de frontera

$$u' = w' = 0 \quad , \quad \text{en } r = r_1 \quad (4.35)$$

Al perturbar, la superficie libre se deforma una cantidad $\xi(t, z)$ de modo que se encuentra en $r_0 + \xi$. En ésta se tiene la condición cinemática, la cual indica que las partículas sobre la

superficie siempre permanecen en ella a pesar de la deformación.

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial t} + w \frac{\partial \xi}{\partial z} \quad , \quad \text{en } r = r_0 + \xi \quad (4.36)$$

Los vectores normal y tangente a la superficie son:

$$n_1 = \left(1, -\frac{\partial \xi}{\partial z} \right) / N \quad (4.37)$$

$$t_1 = \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}, 1 \right) / N \quad (4.38)$$

con N dado por

$$N = \left[1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (4.39)$$

Los esfuerzos superficiales, divididos en normales y tangenciales mediante los vectores n_1 y t_1 , están dados por la siguiente ecuación adimensional:

$$\sigma_{ij} n_j = HSR^{-1} n_1 + t_1 \quad (4.40)$$

siendo la curvatura [1,17]:

$$H = \frac{1}{N^3} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{1}{\xi N} \quad (4.41)$$

La ec. (4.40) se desarrolla en series de Taylor alrededor de r_0 , y se linealizan los resultados. Al multiplicar esta ecuación por n_1 se obtiene la condición de esfuerzos normales:

$$P' + \tau'_{rr} - 2 \frac{\partial \xi}{\partial z} \tau_{rz} = SR^{-1} \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{\xi}{r_0^2} \right] \quad (4.42)$$

La condición de los esfuerzos tangenciales se obtiene multiplicando la ec. (4.40) por t_1 :

$$\tau'_{zr} + \frac{\partial \tau}{\partial r} \xi - \tau_{zz} \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0 \quad (4.43)$$

4.4 Análisis en modos normales.

Antes de dar la expresión analítica de las perturbaciones, obsérvese que con base en la ecuación de continuidad se pueden expresar las velocidades en términos de una función de corriente ψ :

$$u' = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad w' = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (4.44)$$

con lo que se elimina una variable.

Las perturbaciones se proponen en forma de modos normales dados por la siguiente ecuación:

$$(\psi, P', \tau'_{zz}, \tau'_{rz}, \tau'_{rr}) = [\phi(r), p(r), F_1(r), F_2(r), F_3(r)] \exp[i\alpha(z-ct)] \quad (4.45)$$

Aplicando estos modos a las ecuaciones de movimiento (4.30) y (4.31), se obtiene respectivamente:

$$R \left[(w - c) \frac{\alpha^2}{r} \phi \right] = -Dp + -D(rF_3) + i\alpha F_2 \quad (4.46)$$

$$R \left[(w - c) \frac{i\alpha}{r} D\phi - \frac{i\alpha}{r} \phi Dw \right] = -i\alpha p + \frac{1}{r} D(rF_2) + i\alpha F_1 \quad (4.47)$$

En este punto conviene definir los siguientes operadores diferenciales [17]:

$$D = \frac{d}{dr} \quad (4.48)$$

$$DD = \frac{d^2}{d^2r} \quad (4.49)$$

$$D^2 = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \quad (4.50)$$

$$D^3 = \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \right] \quad (4.51)$$

$$D^4 = \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \right] \right\} \quad (4.52)$$

Multiplicando la ec. (4.46) por $i\alpha$, derivando la (4.47) y restándolas, para eliminar la presión:

$$R \left[i\alpha(w - c)D^2\phi - i\alpha\phi D^2w - (w - c)\frac{\alpha^2}{r}\phi \right] = \\ D^2(rF_2) + i\alpha DF_1 - i\frac{\alpha}{r} D(rF_3) + \alpha^2 F_2 \quad (4.53)$$

Por otro lado, en $r=r_1$, de la condición de no deslizamiento:

$$\phi = 0 \quad (4.54)$$

$$D\phi = 0 \quad (4.55)$$

En $r=r_0$, de la condición cinemática:

$$\xi = \frac{\phi}{r_0\beta} \quad (4.56)$$

donde se define

$$\beta = c - w(r_0) \quad (4.57)$$

Para aplicar (4.45) a los esfuerzos normales se despeja de la ec. (4.47) la presión evaluada en r_0 :

$$p = R \left[\beta \frac{D\phi}{r} + \phi \frac{Dw}{r} \right] - \frac{1}{\alpha r} D(rF_2) + F_1 \quad (4.58)$$

Al aplicar los modos normales a la ec. (4.42) y sustituyendo las ecs. (4.56) y (4.58), se obtiene la condición de esfuerzos normales:

$$R \left[-\alpha\beta D\phi - \alpha\phi Dw \right] + iD(r_0 F_2) - \alpha r_0 F_1 + \\ + \alpha r_0 F_3 - 2i\alpha^2 \frac{\phi}{\beta} Dw = SR^{-1} \left[\frac{\alpha\phi}{r_0^2 \beta} - \frac{\alpha^3 \phi}{\beta} \right] \quad (4.59)$$

Para los esfuerzos tangenciales se aplican directamente los modos normales a la ec. (4.46):

$$F_2 + \frac{\phi}{r_0 \beta} \left[DDw - 2i\alpha DL(Dw)^2 \right] = 0 \quad (4.60)$$

Por otro lado, las ecuaciones constitutivas resultan:

$$F_1 + L_1 \left[i\alpha(w - c)F_1 - \left(4i\alpha DL \frac{\phi}{r} Dw DDw + 4i\alpha DL \frac{1}{r} D\phi(Dw)^2 + 2DwD^2\phi \right) - 2DwF_2 \right] = 2 \left[i\alpha \frac{1}{r} D\phi + L_2 \left(\frac{\alpha^2}{r} [D\phi(c - w) - \phi Dw] - 2DwD^2\phi \right) \right] \quad (4.61)$$

$$F_2 + L_1 \left[i\alpha(w - c)F_2 - \left(i\alpha \frac{\phi}{r} DDw - i\alpha D \left(\frac{\phi}{r} \right) Dw + i\alpha \frac{1}{r} DwD\phi + 2\alpha^2 DL \frac{\phi}{r} (Dw)^2 - DwF_3 \right) \right] = \left[\alpha^2 \frac{\phi}{r} + D^2\phi + L_2 \left(\frac{i\alpha^3 \phi}{r} (w - c) + i\alpha [D^2\phi(w - c) - \frac{\phi}{r} DDw + \frac{3}{2} DwD \left(\frac{\phi}{r} \right) - \frac{1}{r} DwD\phi] \right) \right] \quad (4.62)$$

$$F_3 + L_1 \left[i\alpha(w - c)F_3 - 2\alpha^2 \frac{\phi}{r} Dw \right] = 2 \left[-i\alpha D \left(\frac{\phi}{r} \right) + \alpha^2 L_2 \left(D \left(\frac{\phi}{r} \right) (w - c) - \frac{\phi}{r} Dw \right) \right] \quad (4.63)$$

En el siguiente capítulo se desarrollan las aproximaciones a números de onda pequeños, de modo que se obtenga una solución analítica para el problema.

CAPITULO 5

APROXIMACION A NUMERO DE ONDA PEQUEÑO

5.1 Ecuaciones hasta orden α .

Al hacer la aproximación de la ecuación de movimiento, las constitutivas y de las condiciones de frontera hasta orden α , esto es, eliminando todos los términos que contengan α^2 en adelante, resulta el siguiente sistema:

Ecuaciones constitutivas.

$$F_1 = 4DL D w D^2 \phi \quad (5.1)$$

$$F_2 = \left[D^2 \phi + i\alpha DL \left(-(w - c) D^2 \phi + \phi D^2 w - \frac{2}{r} D w D \phi + 4 \frac{\phi}{r^2} \right) \right] \quad (5.2)$$

$$F_3 = -2i\alpha D \left(\frac{\phi}{r} \right) \quad (5.3)$$

Ecuación de movimiento.

$$D^4 \phi = i\alpha \left\{ R \left[(w - c) D^2 \phi - \phi D^2 w \right] - DL \left[4D(DwD^2 \phi) + D^2 \left[r\phi D^2 w - 2DwD\phi - r(w - c) D^2 \phi + 4 \frac{\phi}{r} \right] \right] \right\} \quad (5.4)$$

Condiciones de frontera.

En $r = r_1$:

$$\phi = 0 \quad (5.5)$$

$$D\phi = 0 \quad (5.6)$$

En $r = r_0$:

$$D^3\phi + 1\alpha \left\{ R \left[\beta D\phi + \phi Dw \right] + SR^{-1} \frac{\phi}{\beta} \left[\alpha^2 - \frac{1}{r_0^2} \right] - DL \left[3r_0 DwD^2\phi + \right. \right. \\ \left. \left. + D^3w\phi + r_0 D^2wD\phi - 2D(DwD\phi) + 4D \left(\frac{\phi}{r_0} \right) + \beta D^3\phi \right] \right\} = 0 \quad (5.7)$$

$$D^2\phi + 1\alpha DL \left[\phi D^2w - 2 \frac{\phi}{r_0\beta} (Dw)^2 - \frac{2}{r_0} DwD\phi + \beta D^2\phi + 4 \frac{\phi}{r_0^2} \right] + \\ + \frac{\phi}{r_0\beta} DDw = 0 \quad (5.8)$$

siendo

$$\beta = c - w(r) \quad (5.9)$$

Nótese que en la ec. (5.7) se mantiene el término $\phi/\beta(1/r_0^2 - \alpha^2)$ ya que tiene multiplicado el parámetro S. Por lo tanto, al considerar la condición (3.5) este término no se elimina.

Se hace el siguiente desarrollo de la amplitud de la función de corriente y la constante c:

$$\phi = \phi_0 + \alpha\phi_1 + \dots \quad (5.10)$$

$$c = c_0 + \alpha c_1 + \dots \quad (5.11)$$

Nótese que la ec. (5.11) implica:

$$\beta = \beta_0 + \alpha\beta_1 + \dots \quad (5.12)$$

lo cual nos define a $\beta_0 (=c_0 - w(r_0))$, y a $\beta_1 (=c_1)$.

5.2 Aproximación a orden cero.

En esta sección se muestran las ecuaciones a orden cero en α . Para obtenerlas, se requiere sustituir los desarrollos (5.10), (5.11) en las ecuaciones de la sección anterior. Así, aproximando

a orden cero se tiene:

$$D^4 \phi_o = 0 \quad (5.13)$$

con las condiciones de frontera:

En $r = r_1$:

$$\phi_o = 0 \quad (5.14)$$

$$D\phi_o = 0 \quad (5.15)$$

En $r = r_o$:

$$D^3 \phi_o = 0 \quad (5.16)$$

$$D^2 \phi_o + \frac{\phi_o}{r_o \beta_o} DDW = 0 \quad (5.17)$$

Integrando cuatro veces la ec. (5.13):

$$\phi_o = a_1 \frac{r^4}{16} + a_2 \frac{r^2}{2} \left[\ln(r) - \frac{1}{2} \right] + a_3 \frac{r^2}{2} + a_4 \quad (5.18)$$

donde las a's son las constantes de integración. Al obtener a_1 , a_3 y a_4 de las condiciones (5.14) a (5.16) y poniendo $a_2=1$, dado que es arbitraria, la función propia es:

$$\phi_o = -\frac{1}{4}(r^2 - r_1^2) + \frac{r^2}{2} \ln(r/r_1) \quad (5.19)$$

Se sustituye en la ec. (5.17) esta expresión de la función propia evaluada en r_o , así como la segunda derivada de la velocidad del flujo básico y se despeja c_o a partir de β_o . Al hacer los arreglos necesarios:

$$c_o = -\frac{P}{4} \left[\frac{3}{2}(r_o^2 - r_1^2) - r_o^2 \ln(r_o/r_1) \right] + \epsilon \left[\frac{3}{2} \ln(r_o/r_1) - \frac{1}{4r_o^2}(r_o^2 - r_1^2) \right] \quad (5.20)$$

β_0 resulta como:

$$\beta_0 = - \left[\frac{P_z}{2} - \frac{\varepsilon}{r_0^2} \right] \left[- \frac{1}{4} (r_0^2 - r_1^2) + \frac{r_0^2}{2} \ln(r_0/r_1) \right]$$

(5.21)

Se puede observar que c_0 es un número real lo cual significa que a orden cero el flujo es estable, de aquí que el valor propio sea la velocidad de fase de la perturbación. Pero existe la posibilidad de que haya inestabilidad al siguiente orden. Nótese que el efecto de la viscoelasticidad (DL) aún no interviene, se verá que aparece en la aproximación a orden uno.

5.3 Aproximación a orden uno.

Al hacer la aproximación a orden uno de la ecuación de movimiento así como de sus condiciones de frontera, substituyendo las ecs. (5.1), (5.2) y (5.3) y haciendo los desarrollos (5.10) y (5.11) resulta el siguiente sistema:

$$D^4 \phi_1 = i \left\{ R \left[(w - c_0) D^2 \phi_0 - \phi_0 D^2 w \right] - DL \left[4D(DwD^2 \phi_0) + D^2 [r \phi_0 D^2 w - 2DwD\phi_0 - r(w - c_0) D^2 \phi_0 + 4 \frac{\phi_0}{r}] \right] \right\} \quad (5.22)$$

En $r = r_1$:

$$\phi_1 = 0 \quad (5.23)$$

$$D\phi_1 = 0 \quad (5.24)$$

En $r = r_0$:

$$D^3 \phi_1 + i \left\{ R \left[\beta_0 D\phi_0 + \phi_0 Dw \right] + SR^{-1} \frac{\phi_0}{\beta_0} \left[\alpha^2 - \frac{1}{r_0^2} \right] - DL \left[3r_0 DwD^2 \phi_0 + \right. \right.$$

$$+ D^3 w \phi_0 + r_0 D^2 w D \phi_0 - 2D(DwD\phi_0) + 4D\left(\frac{\phi_0}{r_0}\right) + \beta_0 D^3 \phi_0 \Big] = 0 \quad (5.25)$$

$$D^2 \phi_1 + \frac{\beta_1}{\beta_0} D^2 \phi_0 + \frac{\phi_1}{r_0 \beta_0} DDw + \\ + iDL \left[\phi_0 D^2 w - 2 \frac{\phi_0}{r_0 \beta_0} (Dw)^2 - \frac{2}{r_0} DwD\phi_0 + \beta_0 D^2 \phi_0 + 4 \frac{\phi_0}{r_0^2} \right] = 0 \quad (5.26)$$

Para integrar la ec. (5.22) se desarrollan todos los términos del miembro derecho y se obtiene al agrupar:

$$D^4 \phi_1 = b_0 r + b_1 \frac{1}{r} + b_2 \frac{1}{r^2} + b_3 \frac{1}{r^3} + b_4 \frac{1}{r^5} + \\ + b_5 \frac{1}{r} \ln(r) + b_6 \frac{1}{r^3} \ln(r) \quad (5.27)$$

donde las constantes están dadas de la siguiente manera:

$$b_0 = iRP_z/4 \quad (5.28)$$

$$b_1 = -iR \left[\frac{P_z r_1^2}{4} + c_0 + \frac{\epsilon}{2} + 2\epsilon \ln(r_1) \right] + 12DL P_z \quad (5.29)$$

$$b_2 = -4iDL \quad (5.30)$$

$$b_3 = iR \left[\frac{\epsilon r_1^2}{2} \right] + iDL \left[\epsilon [1 + 2 \ln(r_1)] - 12 \ln(r_1) \right] \quad (5.31)$$

$$b_4 = i3DL \epsilon r_1^2 \quad (5.32)$$

$$b_5 = i2R\epsilon \quad (5.33)$$

$$b_6 = iDL(12 - 2\epsilon) \quad (5.34)$$

Las constantes (5.28) a (5.34) están escritas como sumas de términos con los parámetros R y DL.

De este modo se puede integrar la ec. (5.22) cuatro veces. Se

escriben las derivadas $D^3\phi_1$, $D^2\phi_1$, $D\phi_1$ y la función propia ϕ_1 explícitamente dado que serán de utilidad posteriormente:

$$D^3\phi_1 = \frac{b_0}{2}r^3 + b_1 r \ln(r) - b_2 - \frac{1}{2}(b_3 + \frac{b_6}{2})\frac{1}{r} - \frac{b_4}{4}\frac{1}{r^3} + \frac{b_5}{2} r [\ln(r)]^2 - \frac{b_6}{2}\frac{1}{r} \ln(r) + N_1 r \quad (5.35)$$

$$D^2\phi_1 = \frac{b_0}{8}r^3 + \frac{1}{2}(b_1 - \frac{b_5}{2})r \ln(r) - \frac{1}{4}(b_1 + \frac{b_5}{2})r - b_2 - \frac{1}{2}(b_3 + \frac{b_6}{2})\frac{1}{r} \ln(r) - \frac{b_4}{8}\frac{1}{r^3} + \frac{b_5}{4}r [\ln(r)]^2 - \frac{b_6}{4}\frac{1}{r} \ln(r) + N_1\frac{r}{2} + N_2\frac{1}{r} \quad (5.36)$$

$$D\phi_1 = \frac{b_0}{32}r^5 + \frac{1}{4}(b_1 - b_5)r^3 \ln(r) - \frac{1}{4}(b_1 - \frac{3}{4}b_5)r^3 - b_2 r^2 - \frac{1}{4}(b_3 + \frac{b_6}{2})r [\ln(r)]^2 - \frac{b_4}{16}\frac{1}{r} + \frac{b_5}{8}r^3 [\ln(r)]^2 - \frac{b_6}{12} r [\ln(r)]^3 + N_1\frac{r^3}{4} + N_2 r \ln(r) + N_3 r \quad (5.37)$$

$$\phi_1 = \frac{b_0}{192}r^6 + \frac{1}{16}(b_1 - \frac{3b_5}{4})r^4 \ln(r) - \frac{1}{64}(\frac{5b_1}{2} - \frac{17b_5}{4})r^4 - \frac{b_2}{3}r^3 - \frac{b_3}{8}[r^2 \{\ln(r)\}^2 - r^2 \{\ln(r)\} + \frac{r^2}{2}] - \frac{b_4}{16} \ln(r) - \frac{b_6}{24} r^2 [\ln(r)]^3 + N_1\frac{r^4}{16} + N_2\frac{r^2}{2}[\ln(r) - 1/2] + N_3\frac{r^2}{2} + N_4 \quad (5.38)$$

donde las N's son las constantes de integración.

Expresando a ϕ_1 de la siguiente manera:

$$\phi_1 = E(r) + N_1\frac{r^4}{16} + N_2\frac{r^2}{2}[\ln(r) - 1/2] + N_3\frac{r^2}{2} + N_4 \quad (5.39)$$

conteniendo E(r) los términos que no tienen las constantes N en la ec. (5.38). Sus derivadas serán:

$$D\phi_1 = F(r) + N_1 \frac{r^3}{4} + N_2 r \ln(r) + N_3 r \quad (5.40)$$

$$D^2\phi_1 = H(r) + N_1 \frac{r}{2} + N_2 \frac{1}{r} \quad (5.41)$$

$$D^3\phi_1 = G(r) + N_1 r \quad (5.42)$$

Las funciones E, F, G y H se reescriben en términos de los parámetros de las constantes (5.28) a (5.34) con coeficientes que dependen de r:

$$E(r) = RE_a(r) + DLE_b(r) \quad (5.43)$$

$$F(r) = RF_a(r) + DLF_b(r) \quad (5.44)$$

$$H(r) = RH_a(r) + DLH_b(r) \quad (5.45)$$

$$G(r) = RG_a(r) + DLG_b(r) \quad (5.46)$$

Igualmente se asigna una función V(r) a la tercera derivada de la función propia en la condición de los esfuerzos normales, ec. (5.25):

En $r = r_0$:

$$\begin{aligned} D^3\phi_1 = V(r_0) = & -1 \left\{ R \left[\beta_0 D\phi_0 + \phi_0 Dw \right] + \right. \\ & + SR^{-1} \frac{\phi_0}{\beta_0} \left[\alpha^2 - \frac{1}{r_0^2} \right] - DL \left[3r_0 Dw D^2\phi_0 + \right. \\ & \left. \left. + D^3w\phi_0 + r_0 D^2wD\phi_0 - 2D(DwD\phi_0) + 4D\left(\frac{\phi_0}{r_0}\right) + \beta_0 D^3\phi_0 \right] \right\} \quad (5.47) \end{aligned}$$

Al sustituir el flujo básico y la función propia a orden cero en la ec. (5.47) se obtiene:

$$V(r_o) = 1 \left[RV_a(r_o) + DLV_b(r_o) + SR^{-1} \left[\alpha^2 - \frac{1}{r_o^2} \right] V_c(r_o) \right] \quad (5.48)$$

siendo las funciones V de la siguiente manera:

$$V_a(r_o) = -\beta_o r_o \ln(r_o/r_1) - \left(\frac{r_o^2}{2} \ln(r_o/r_1) - \frac{1}{4}(r_o^2 - r_1^2) \right) \left(P_z \frac{r_o}{2} + \frac{\epsilon}{r_o} \right) \quad (5.49)$$

$$V_b(r_o) = -P_z \frac{r_o}{2} - \frac{\epsilon}{r_o} - 4 \frac{\epsilon}{r_o^3} \left(\frac{r_o^2}{2} \ln(r_o/r_1) - \frac{1}{4}(r_o^2 - r_1^2) \right) + 2 \frac{\epsilon}{r_o} \ln(r_o/r_1) + 2P_z r_o \ln(r_o/r_1) - 4 \left[\ln(r_o/r_1) - \frac{1}{r_o^2} \left(\frac{r_o^2}{2} \ln(r_o/r_1) - \frac{1}{4}(r_o^2 - r_1^2) \right) \right] \quad (5.50)$$

$$V_c(r_o) = -\frac{1}{\beta_o} \left(\frac{r_o^2}{2} \ln(r_o/r_1) - \frac{1}{4}(r_o^2 - r_1^2) \right) \quad (5.51)$$

De la misma manera, la condición de los esfuerzos tangenciales, ec. (5.26), se divide en tres partes:

En $r = r_o$:

$$D^2 \phi_1 = -\beta_1 T_a(r_o) - DLT_b(r_o) - T_c(r_o) \quad (5.52)$$

En esta ecuación se encuentra el valor propio a orden uno buscado (β_1).

Sustituyendo el flujo básico y la ϕ_o , las funciones T están dadas por:

$$T_a(r_o) = \frac{1}{\beta_o r_o} \quad (5.53)$$

$$T_b(r_o) = \left[\frac{r_o^2}{2} \ln(r_o/r_1) - \frac{1}{4} (r_o^2 - r_1^2) \right] \times$$

$$\left[-\frac{2\varepsilon}{r_o^3} - \frac{2}{r_o \beta_o} \left(\frac{1}{2} P_z r_o + \frac{\varepsilon}{r_o} \right)^2 \right] -$$

$$- 2 \left(\frac{1}{2} \bar{P}_z r_o + \frac{\varepsilon}{r_o} \right) \ln(r_o/r_1) + \frac{\beta_o}{r_o} +$$

$$+ \frac{4}{r_o^2} \left(\frac{r_o^2}{2} \ln(r_o/r_1) - \frac{1}{4} (r_o^2 - r_1^2) \right) \quad (5.54)$$

$$T_c(r_o) = \frac{DDW}{\beta_o r_o} \phi_1 \quad (5.55)$$

Dadas estas definiciones, se obtienen las constantes N_1 , N_3 , y N_4 , de las condiciones (5.23) a (5.26):

$$N_1 = \frac{1}{r_o} [V(r_o) - G(r_o)] \quad (5.56)$$

$$N_3 = -\frac{1}{r_1} F(r_1) - \frac{r_1^2}{4r_o} [V(r_o) - G(r_o)] - N_2 \ln(r_1) \quad (5.57)$$

$$N_4 = -E(r_1) + \frac{r_1^4}{16r_o} [V(r_o) - G(r_o)] + N_2 \frac{r_1^2}{4} - \frac{r_1}{2} F(r_1) \quad (5.58)$$

donde es posible hacer N_2 igual a uno ya que es una constante arbitraria.

Si se sustituyen las ecs. (5.56) a (5.58) en la ec. (5.38) y se evalúa en r_o , se obtendrá la función propia a orden uno en la forma necesaria para utilizarla en la condición (5.52). Haciendo los arreglos necesarios:

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

$$\phi_1(r_0) = E(r_0) - E(r_1) + \frac{1}{16r_0} [V(r_0) - G(r_1)] (r_0^2 - r_1^2)^2 - \frac{1}{2r_1} F(r_1) - \frac{1}{4} (r_0^2 - r_1^2) + \frac{1}{2} r_0^2 \ln(r_0/r_1) \quad (5.59)$$

Ahora se puede despejar de la ec. (5.52) al valor propio $\beta_1 (=c_1)$:

$$c_1 = 1 \left\{ -r_0 \beta_0 \left[H(r_0) + \frac{1}{2} [V(r_0) - G(r_0)] + T_b(r_0) \right] - DDW \left[E(r_0) - E(r_1) + \frac{1}{16r_0} [V(r_0) - G(r_1)] (r_0^2 - r_1^2)^2 - \frac{1}{2r_1} F(r_1) \right] \right\} \quad (5.60)$$

Sustituyendo las ecuaciones para las funciones E, F, G, H, V, y T en la ec. (5.60), se obtiene la siguiente ecuación cuadrática para R:

$$c_1 = 1 \left\{ RM_1 + DLM_2 + SR^{-1} \left[\alpha^2 - \frac{1}{r_0^2} \right] M_3 \right\} \quad (5.61)$$

Definiendo como M's las siguientes funciones de r_0 :

$$M_1(r_0) = -\beta_0 r_0 \left[H_a + \frac{1}{2} (V_a - G_a) \right] - DDW \left[E_{a0} - E_{a1} + \frac{1}{16r_0} (V_a - G_a) (r_0^2 - r_1^2)^2 - \frac{F_a}{2r_1} (r_0^2 - r_1^2) \right] \quad (5.62)$$

$$M_2(r_0) = -\beta_0 r_0 \left[H_b + \frac{1}{2} (V_b - G_b) + T_b \right] - DDW \left[E_{b0} - E_{b1} + \frac{1}{16r_0} (V_b - G_b) (r_0^2 - r_1^2)^2 - \frac{F_b}{2r_1} (r_0^2 - r_1^2) \right] \quad (5.63)$$

$$M_3(r_0) = -\frac{1}{2} \beta_0 r_0 V_c - DDW \left[\frac{1}{16r_0} V_c (r_0^2 - r_1^2)^2 \right] \quad (5.64)$$

La ec. (5.61) es de la forma:

$$c_1 = ic_1 \quad (5.65)$$

La ec. (5.65) define la estabilidad del flujo dependiendo del signo de la constante c_1 ya que ésta es puramente imaginaria.

Para encontrar las curvas de estabilidad neutral se hace c_1 igual a cero y se obtiene la siguiente ecuación cuadrática para R:

$$R^2 M_1 + R D L M_2 + S \left[\alpha^2 - \frac{1}{r_o^2} \right] M_3 = 0 \quad (5.66)$$

Resolviendo la ec. (5.66) para R, se obtienen sus dos raíces:

$$R_1 = \frac{-D L M_2 + \left((D L M_2)^2 - 4 M_1 S (\alpha - 1/r_o^2) M_3 \right)^{1/2}}{2 M_1} \quad (5.67)$$

$$R_2 = \frac{-D L M_2 - \left((D L M_2)^2 - 4 M_1 S (\alpha - 1/r_o^2) M_3 \right)^{1/2}}{2 M_1} \quad (5.68)$$

En el siguiente capítulo se grafican tanto c_1 , para analizar su signo con respecto a los parámetros R, S y DL, así como las curvas de estabilidad neutral definidas por las raíces del número de Reynolds en las ecs. (5.67) y (5.68).

CAPITULO 6

RESULTADOS

6.1 Introducción.

Con el objeto de comparar con otros trabajos las ecuaciones (5.67) y (5.68), obtenidas en el capítulo anterior, se presentan las figuras 6.1 y 6.2. En la primera de ellas, se muestran las curvas de estabilidad neutral con el número de Reynolds de esfuerzos de corte en función del cociente de alfa sobre el parámetro geométrico A. Estas gráficas se obtienen utilizando un gradiente de presión que corresponde a la anulación de los esfuerzos sobre la superficie del núcleo. Este es uno de los casos investigados en el análisis numérico de las ecuaciones lineales completas para un fluido newtoniano, hecho por Russo y Steen [1]. Su objetivo fué el de entender el comportamiento de la estabilidad al poner en movimiento el cilindro interior. En este caso utilizaron la condición de que no hubieran esfuerzos sobre el núcleo. Por lo tanto la derivada de la velocidad en r_1 es igual a cero:

$$\frac{\partial w(r_1)}{\partial r} = 0 \quad (6.1)$$

Al sustituir la velocidad del flujo básico en la ecuación (6.1) se obtiene el siguiente gradiente de presión:

$$P_z = 2/(2-A) \quad (6.2)$$

El comportamiento de la figura 6.1 coincide satisfactoriamente con los resultados de Russo y Steen [1] para los cuatro valores de A, excepto que no se pueden calcular las curvas de criticalidad para valores grandes de α , ya que sería contradictorio con la aproximación de ondas largas.

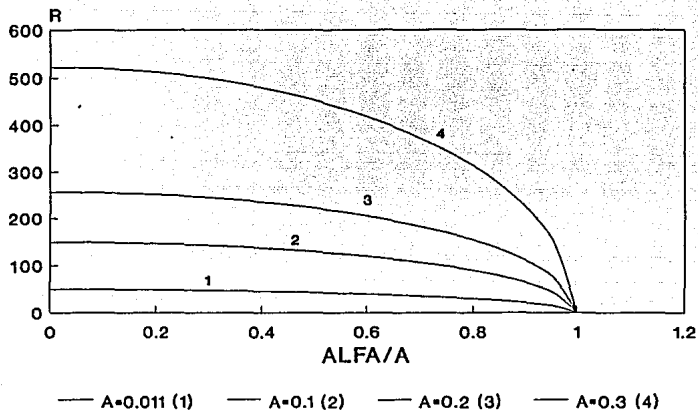


Figura 6.1. Curvas de estabilidad neutral, ecs. (5.67) y (5.68). R vs α/A con $S=10000$, $DL=0$, $P_z=2/(2-A)$ y los valores de A como se indican. Resultado de Russo y Steen.

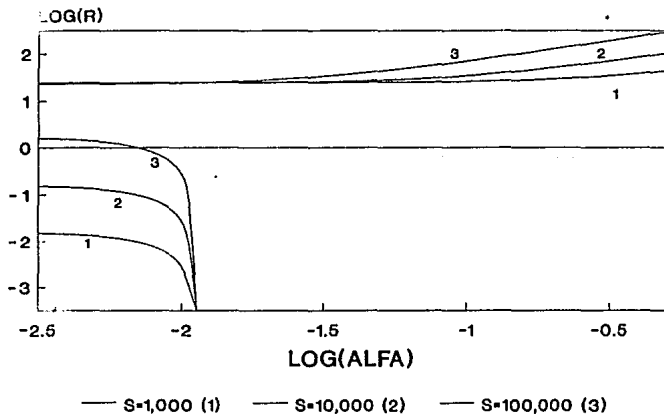


Figura 6.2. Curvas de estabilidad neutral, ecs. (5.67) y (5.68). Log R vs Log α con $DL=10$, $A=0.011$, P_z según la ec. (4.25) y los valores de S como se indican. Resultado de Dávalos-Orozco.

La figura 6.2 reproduce los resultados obtenidos por Dávalos-Orozco [5] para el caso de una capa plana de fluido viscoelástico, utilizando el gradiente de presión expresado en la ec. (4.25). Dicho trabajo fué realizado con la aproximación a ondas largas. Se grafica el número de Reynolds contra el número de onda y se obtienen las tres ramas superiores (bajo las cuales el sistema es estable) para distintos valores del número de tensión superficial; entre más grande sea éste, mayor es la zona estable. En esta figura, A es igual a 0.011, por lo que la capa no es totalmente plana. Como se verá más adelante, esto dá como resultado las tres ramas inferiores.

6.2 Estabilidad neutral.

El valor propio a orden cero es un número real que define la velocidad de fase de la onda. En la figura 6.3 se grafica en función de A , de acuerdo a la ec. (5.20). Nótese que siempre es negativo, por lo que las perturbaciones viajan en sentido contrario a la dirección del flujo en la superficie.

Antes de mostrar las figuras de números de Reynolds críticos (R_c) en función de los demás parámetros se analiza una curva de c_1 contra R para determinar, con base en su signo, las áreas de estabilidad.

La figura 6.4 muestra la rapidez de crecimiento de la perturbación en función del número de Reynolds de esfuerzos de corte, para cuatro valores de A , según la ec. (5.61). Entre más se acerca al plano la geometría del sistema ($A = 0$), la estabilidad del flujo es mayor, si el esfuerzo sobre la superficie es pequeño. Ver figuras 6.4a y 6.4b. Sin embargo, al crecer A y aproximarse a una geometría cilíndrica de radio pequeño, el sistema es sensiblemente inestable, ver figuras 6.4c y 6.4d. El sentido físico de tal comportamiento reside en el papel desestabilizador de la tensión superficial en un cilindro, que se refuerza conforme aumenta A . Es decir, el ahorcamiento capilar tiene mayor importancia para una

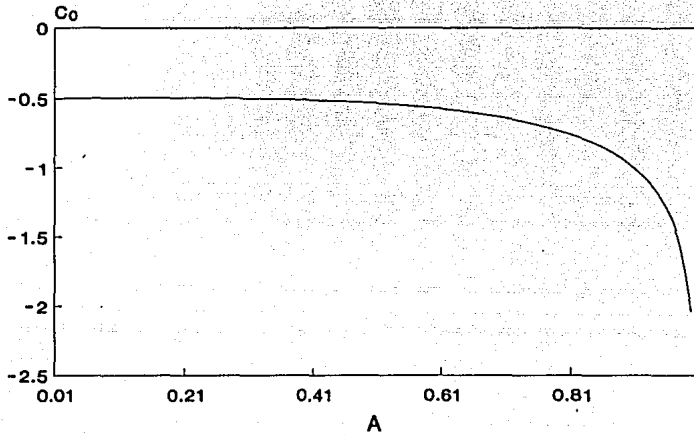
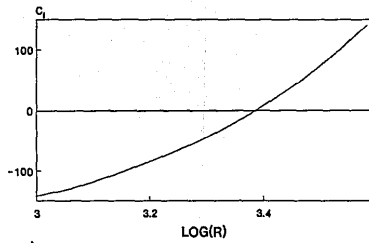
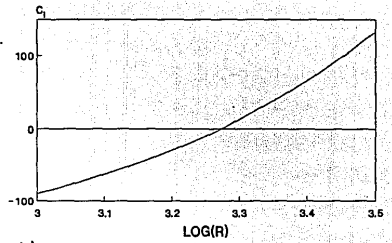


Figura 6.3. c_0 vs A , ec. (5.20). La velocidad de fase (c_0) sólo depende de A y siempre es negativa.



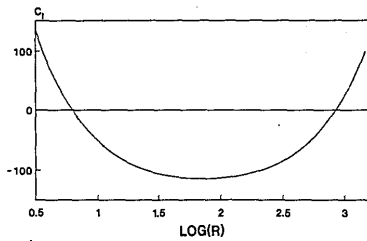
a)

— A=0.011



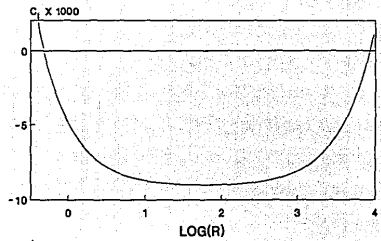
b)

— A=0.1



c)

— A=0.5



d)

— A=0.9

Figura 6.4. c_I vs Log R, ec. (5.61), con $S=10000$, $DL=100$, $\alpha=0.1$ y los valores de A como están indicados.

capa cilíndrica mientras su radio sea menor. Para radios mayores, el efecto es menos importante y para la capa plana no existe. Nótese además que al aumentar R , es decir, el esfuerzo tangencial sobre la superficie, se tiene un efecto estabilizador para $A=0.5$ y $A=0.9$, mientras que en los otros dos casos tiende a desestabilizar. Para R muy grande siempre se provoca la desestabilización del sistema, figuras 6.4a-d. Todos estos resultados concuerdan con las conclusiones de trabajos anteriores ([1], [4] y [5]). Para la capa plana, Dávalos-Orozco [5] determinó que el esfuerzo mecánico sobre la superficie desestabiliza. Para Russo y Steen [1] y Xu y Davis [4], en la capa cilíndrica y el chorro respectivamente, dicho esfuerzo contrarresta ó inclusive logra eliminar el efecto de ahorcamiento de la tensión superficial. Sin embargo, si éste es demasiado grande, se vuelve a producir la inestabilidad.

Las figuras 6.5 a 6.8 muestran las curvas de estabilidad neutral definidas por las ecs. (5.67) y (5.68). La figura 6.5a presenta el número de Reynolds de esfuerzos de corte en función de α/A para cuatro valores distintos de A . El número de onda se mantiene siempre menor ó igual a 0.5 para respetar la aproximación de ondas largas. Se pueden observar dos características nuevas de suma importancia ya que se presentan fenómenos que no pueden ser observados en los casos investigados por Dávalos-Orozco [5], Russo y Steen [1] ó Xu y Davis [4]. La primera es la aparición de dos ramas que definen un área de estabilidad entre ellas. Estas, están definidas por el par de raíces del número de Reynolds de esfuerzos de corte. Para el caso plano, Dávalos-Orozco [5] encuentra que solamente una de las raíces tiene sentido físico (la otra es negativa). La explicación de esta diferencia con el presente trabajo la proporciona el término $(\alpha^2 - A^2)$ que se encuentra dentro del radical de las soluciones de R . Este término cambia de signo cuando alfa supera el valor de A . Por esta razón se grafica con respecto al cociente α/A , que dá su valor relativo. Se puede entonces ver, figura 6.5a, que cuando A es mayor que alfa las dos

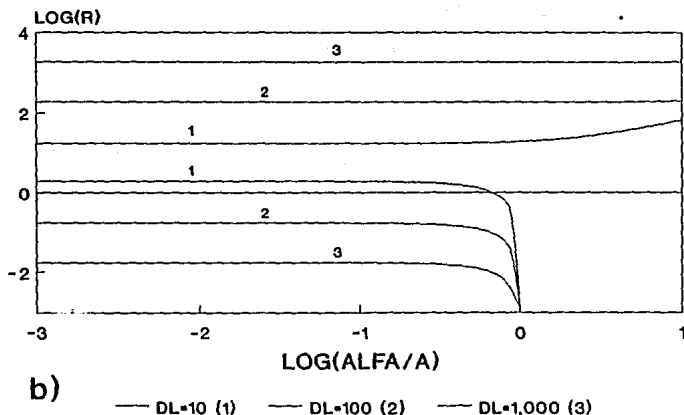
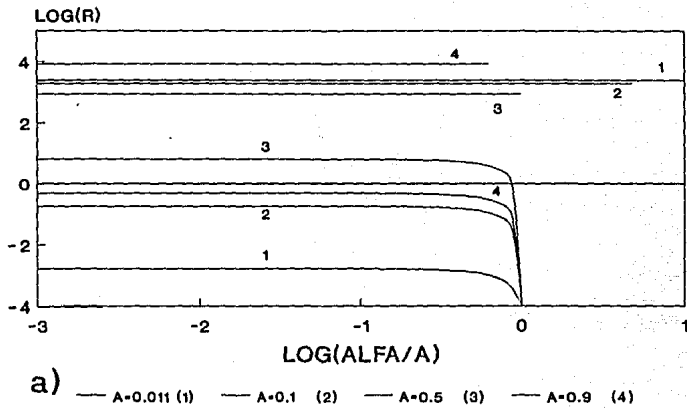


Figura 6.5. Curvas de estabilidad neutral, ecs. (5.67) y (5.68). a) Log R vs Log α/A con $S=10000$, $DL=1000$ y cuatro valores de A como se indica. b) Log R vs Log α/A con $S=1000$, $A=0.1$ y tres valores de DL .

raíces de R existen y definen una región intermedia de estabilidad. Esta última afirmación se puede hacer gracias al análisis de la figura 6.4. Por el contrario, cuando A es menor ó igual que el número de onda sólo puede existir una rama de R bajo la cual se tiene una zona de estabilidad. Lo anterior explica el porqué Dávalos-Orozco [5] encuentra una raíz. En la capa plana A es igual a cero, y por tanto siempre es menor que α . La otra particularidad observada en esta figura es el hecho de que al aumentar el parámetro A , la región estable tiende a cerrarse. Sin embargo, a partir de cierta A vuelve a abrirse nuevamente. Nótese cómo la curva (3), para $A=0.5$, es la que tiene sus ramas más próximas entre sí. Físicamente se interpreta este comportamiento inicial de estrechamiento del área estable, como el aumento del ahorcamiento debido a la tensión superficial, al hacer más pequeño el radio de la superficie cilíndrica. Después, este efecto es superado por la acción del parámetro viscoelástico DL como se puede observar en la figura 6.5b, en la cual se muestra que un valor más grande abre la ventana de estabilización.

En la figura 6.6 se puede observar el doble papel que juega la tensión superficial. Al aumentar el número S , la rama inferior sube, provocando la desestabilización del sistema por efecto del ahorcamiento. Sin embargo, la rama superior sube también cuando α es mayor que A . Este es el efecto estabilizador de S al actuar en la dirección axial cuando se deforma la superficie y es también reportado por Dávalos-Orozco [5].

El efecto de la viscoelasticidad es mostrado en la figura 6.7, en donde se grafica R con respecto a DL , para tres valores de α . De nuevo se hace evidente que cuando A es menor ó igual que el número de onda se obtiene sólo una rama. Se puede observar además, que el valor de DL necesita ser grande para hacer aparecer la ventana de estabilidad. Esto significa que el fluido debe tener un tiempo de relajación mucho mayor que el tiempo de retardo. Es decir, el fluido debe ser muy elástico para estabilizar.

En general, el efecto viscoelástico es estabilizador. Las

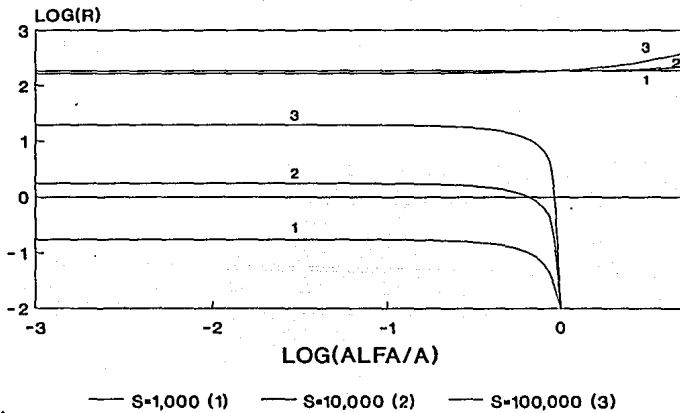


Figura 6.6. Curvas de estabilidad neutral, ecs. (5.67) y (5.68). Log R vs Log α/A con $DL=100$, $A=0.1$ y tres valores de S como se indican.

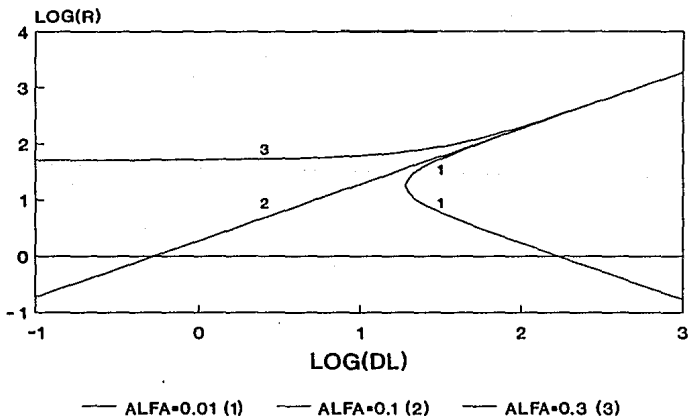


Figura 6.7. Curvas de estabilidad neutral, ecs. (5.67) y (5.68). Log R vs Log DL con $S=10000$, $A=0.1$ y tres distintas alfas.

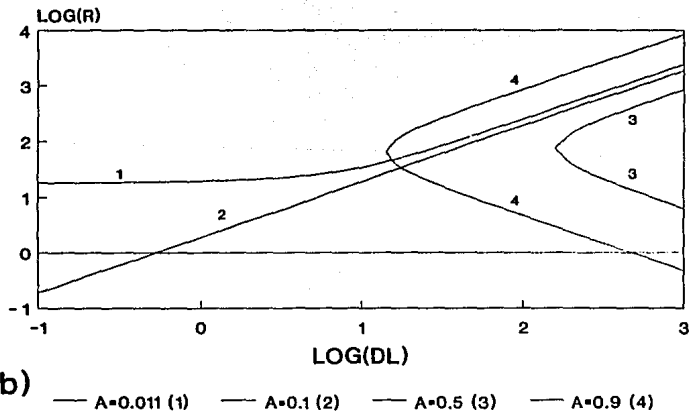
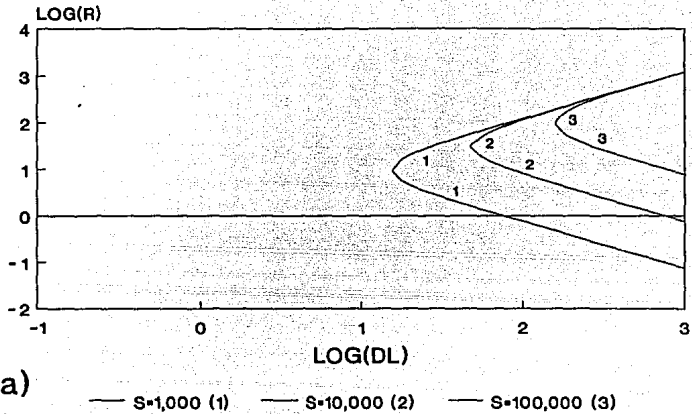


Figura 6.8. Curvas de estabilidad neutral, ecs. (5.67) y (5.68). a) Log R vs Log DL con $\alpha=0.1$, $A=0.2$ y tres valores de S como se indica. b) Log R vs Log DL con $S=10000$, $\alpha=0.1$ para cuatro valores de A.

figuras 6.8a y 6.8b confirman lo anterior para cuatro valores de A y tres valores de S , respectivamente. Cuando se tiene una sola rama, ésta siempre aumenta monótonamente estabilizando el sistema. Para el caso de dos, la viscoelasticidad acentúa sensiblemente su papel con $A=0.9$ con respecto a $A=0.5$. Esto significa que DL tiene mayor importancia estabilizadora cuando el núcleo interior es muy delgado.

Con el objeto de comparar las curvas de estabilidad neutral al variar el número de tensión superficial, se muestra la figura 6.9 donde se grafica, para $S=1500$, la rapidez de crecimiento de la perturbación de acuerdo a la ec. (5.61). Obsérvese cómo para radios muy grandes, 6.9a ($A=0.011$) y 6.9b ($A=0.1$), el sistema es menos inestable para R pequeña, en comparación a la figura 6.4. Por otro lado, en las geometrías con radios más pequeños, 6.9c ($A=0.5$) y 6.9d ($A=0.9$), el efecto de ahorcamiento es atenuado. Sin embargo, para cada radio, R actúa de la misma manera que en la figura 6.4. Para un esfuerzo tangencial superficial moderado, la estabilidad está determinada por la competencia entre el ahorcamiento capilar y R . Para valores muy grandes de R siempre hay desestabilización.

Las figuras 6.10 a 6.13 muestran nuevamente las curvas de criticalidad dadas por las ecuaciones (5.67) y (5.68). De esta manera, se puede observar en la figura 6.10 el efecto de S , según la geometría de la capa. Las regiones interiores de las curvas (3) y (4) son estables mientras que también lo son las áreas por debajo de (1) y (2).

La figura 6.11 muestra el mismo comportamiento para tres valores de α , uno de los cuales (3) es mayor que A , por lo que produce una sola rama.

En las figuras 6.12 y 6.13 se presentan curvas de $\log(R)$ vs. $\log(S)$ para $A=0.2$ y $A=0.9$, respectivamente y con varios valores de DL . Es evidente la competencia entre la función desestabilizadora de S contra la estabilizadora de DL , ya que al aumentar la primera se cierra el área estable, pero al aumentar la segunda, la amplía.

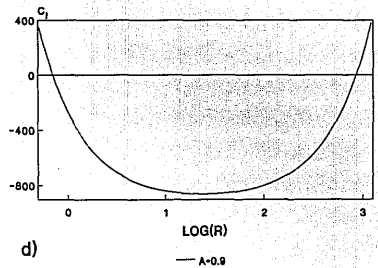
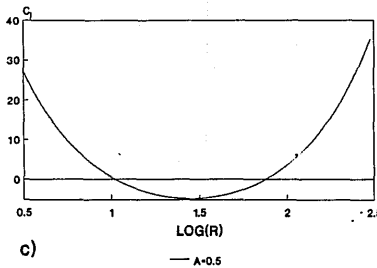
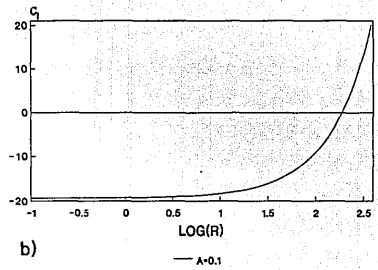
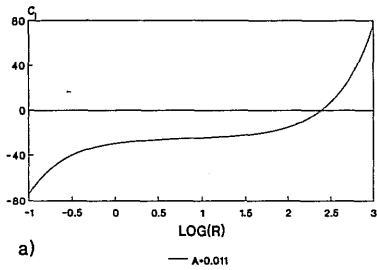


Figura 6.9. c_1 vs Log R, ec. (5.61), con $\xi=1500$, $DL=100$, $\alpha=0.1$ y los valores de A como están indicados.

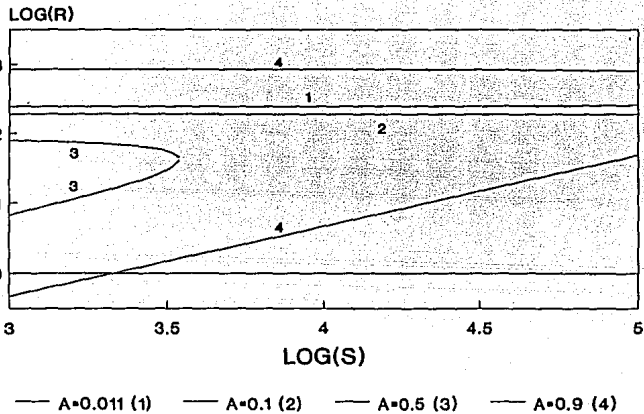


Figura 6.10. Curvas de estabilidad neutral, ecs. (5.67) y (5.68). Log R vs Log S para $DL=100$, $\alpha=0.1$ y los valores de A como se indican.

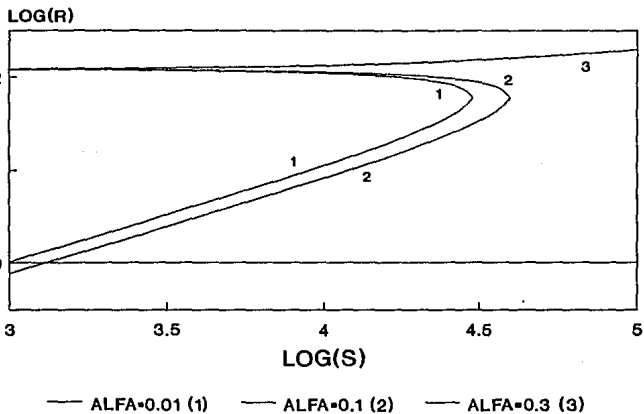


Figura 6.11. Curvas de estabilidad neutral, ecs. (5.67) y (5.68). Log R vs Log S para $DL=100$, $A=0.2$ y los valores de α como están indicados.

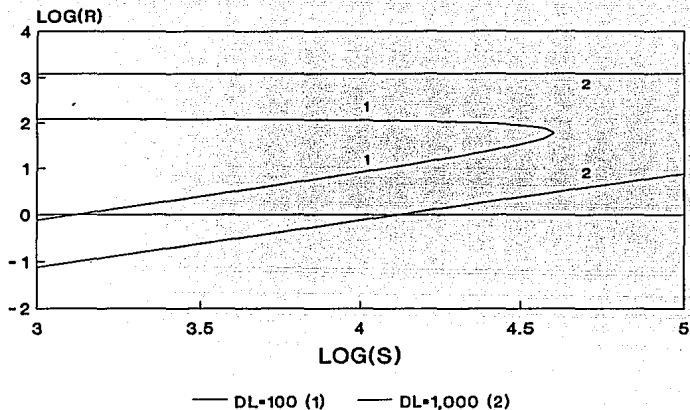


Figura 6.12. Curvas de estabilidad neutral, ecs. (5.67) y (5.68).
 Log R vs Log S para $A=0.2$, $\alpha=0.1$ y dos valores de DL .

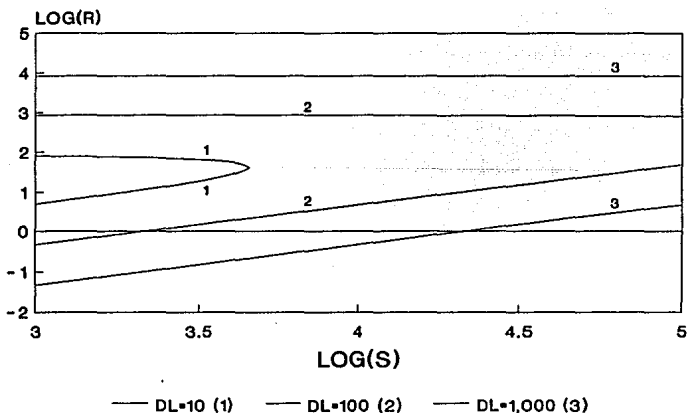


Figura 6.13. Curvas de estabilidad neutral, ecs. (5.67) y (5.68).
 Log R vs Log S para $A=0.9$, $\alpha=0.1$ y los valores de DL como se indican.

Nuevamente se puede observar que mientras mayor es A, el efecto estabilizador de DL es mayor. De hecho, en la figura 6.12 no alcanzan a aparecer las ramas correspondientes a $DL=10$.

6.3 Análisis de coeficientes

Para mostrar una imagen más clara de la influencia de la curvatura de la superficie, la figura 6.14 muestra la rapidez de crecimiento de la perturbación (ec. (5.61)) en función del parámetro A, para distintos valores de R. Cuando el esfuerzo superficial tangencial es muy pequeño como en 6.14a, el sistema es estable para radios muy grandes (A pequeña), al tender a radios pequeños, el sistema se desestabiliza abruptamente debido al ahorcamiento. La figura 6.14d muestra que para R muy grande el sistema es difícil de estabilizar para cualquier A. Para R intermedia, como en 6.14b y 6.14c, el sistema es menos estable para A pequeña. Dicha tendencia prosigue al aumentar A. Sin embargo, la estabilidad crece, cuando R es grande, para radios muy pequeños (A 1); al contrario de R pequeña donde sólo hay estabilidad para A pequeña.

El análisis de los coeficientes que definen a c_1 proporciona información acerca de su comportamiento en 6.14a-d. Si se escribe dicho valor propio como:

$$c_1 = M_1(A)R + M_2(A)DL + M_3(A)(\alpha^2 - A^2)SR^{-1} \quad (6.3)$$

donde los coeficientes M están definidos de acuerdo a las ecs. (5.62) a (5.64). La figura 6.15 muestra la variación de los coeficientes con respecto a A, que es el único parámetro del que dependen. En primer lugar se puede observar que ninguno de los tres cambia de signo. M_1 , el coeficiente de R, es positivo y crece monótonamente hasta un valor cercano a 10. Esto refuerza el papel desestabilizador de R. Por el contrario M_3 , el coeficiente de S es negativo y decrece aún más hasta un valor cercano a -1. Esto

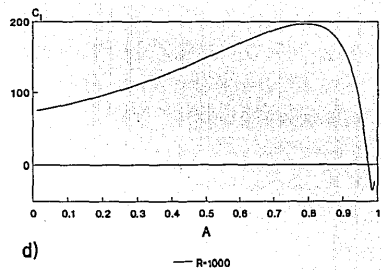
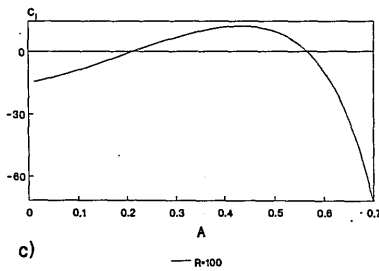
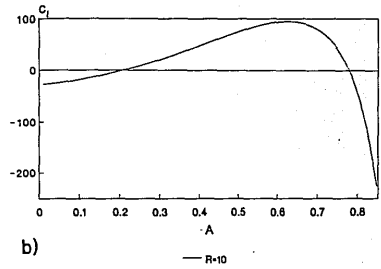
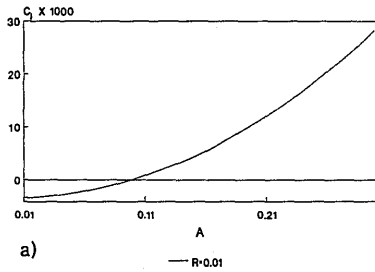


Figura 6.14. c_I vs A , ec. (5.61), para $S=10000$, $DL=100$, $\alpha=0.1$ con cuatro distintas R .

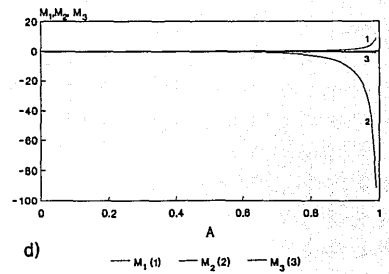
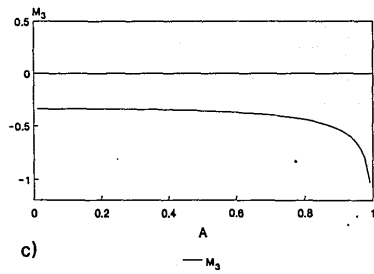
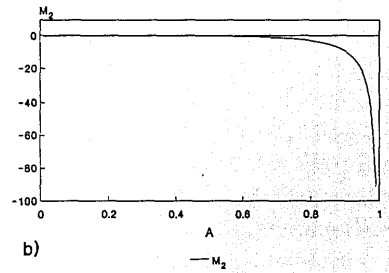
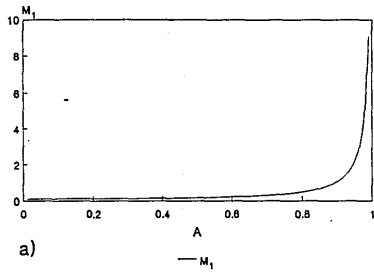


Figura 6.15. Coeficientes de la ecuación de c_1 , (5.61): a) M_1 vs A. b) M_2 vs A. c) M_3 vs A. d) M_1, M_2, M_3 vs A. Para $S=10000$, $DL=100$, $\alpha=0.1$.

significa que el efecto de S no varía apreciablemente, pero su importancia radica en la invariancia de su signo ya que S tenderá a estabilizar o desestabilizar dependiendo del signo de $(\alpha^2 - A^2)$. Por otro lado M_2 , el coeficiente de DL , siempre es negativo y aumenta bruscamente su valor cuando A tiende a uno, hasta tomar valores cercanos a 100. Esto significa que en ese rango DL influye con mucha ventaja sobre los demás parámetros produciendo la marcada estabilización descrita en las figuras anteriores. La figura 6.15d muestra la comparación en magnitud entre estos tres coeficientes.

Un exámen más detallado de M_2 exhibe que su comportamiento es monótono. En la figura 6.16a se aprecia que conforme A aumenta, también lo hace M_2 , pero cuando es igual a 0.374, comienza su marcado descenso. Lo anterior explica el hecho de que exista una A para la cual se debe tener una región de estabilidad mínima como se observó en las figuras 6.4 y 6.8. En las figuras 6.16b y 6.16c se obtienen las curvas de estabilidad neutral, correspondientes a $A=0.374$, al variar α/A y DL , respectivamente.

Prosiguiendo con este método, la figura 6.17 muestra el comportamiento de los coeficientes del radicando que aparece en las ecuaciones de estabilidad neutral (5.67), donde N_1 (el cuadrado de M_2) multiplica a DL^2 y N_2 es el coeficiente que acompaña a $S(\alpha^2 - A^2)$. De la figura 6.17a se observa que para A pequeña, domina el término N_2 , lo que demuestra que en este rango la viscoelasticidad puede ser superada por la tensión superficial, aunque se hace presente al estabilizar el sistema. Esto confirma el resultado de Dávalos-Orozco y lo observado en las figuras 6.5a-b y 6.8b. Sin embargo, cuando $A=0.374$, prácticamente se anula N_1 , por lo que DL tiene un efecto mínimo estabilizador. Este hecho permite ver con mayor claridad que existe una geometría bien específica en la cual la viscoelasticidad es anulada y por lo tanto se tiene una zona de estabilidad mínima, como se vió en las figuras 6.16a-c. Nótese que éste resultado es debido solamente al radio del cilindro. Para A mayor, N_1 sobrepasa a N_2 y se tiene

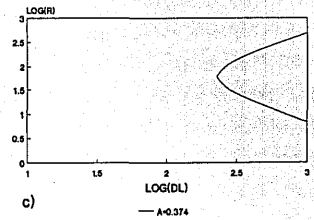
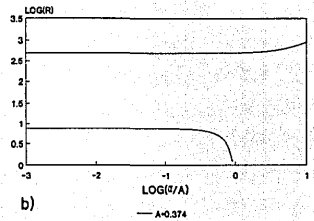
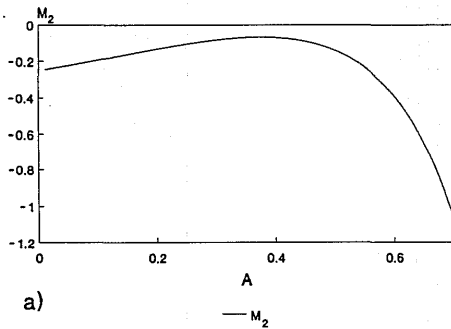


Figura 6.16. a) M_2 vs A (amplificación), donde $S=10000$, $DL=100$ y $\alpha=0.1$. b) Estabilidad neutral, $\text{Log } R$ vs $\text{Log } \alpha/A$ con $A=0.374$, $S=10000$, $DL=1000$. c) Estabilidad neutral, $\text{Log } R$ vs $\text{Log } DL$ siendo $A=0.374$, $S=10000$, $\alpha=0.1$.

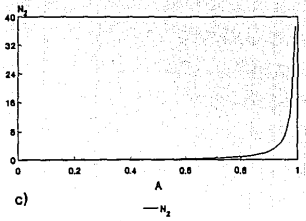
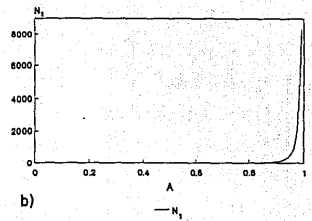
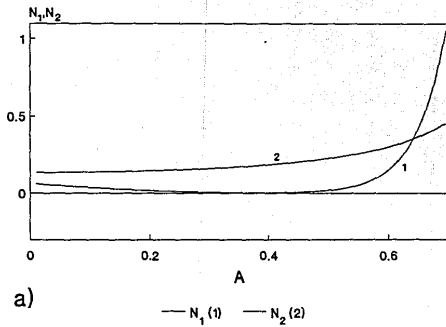


Figura 6.17. Coeficientes del radicando de la raíz de R en la ec. (5.67): a) N_1, N_2 vs A. b) N_1 vs A. c) N_2 vs A. Con $S=10000$, $DL=100$, $\alpha=0.1$.

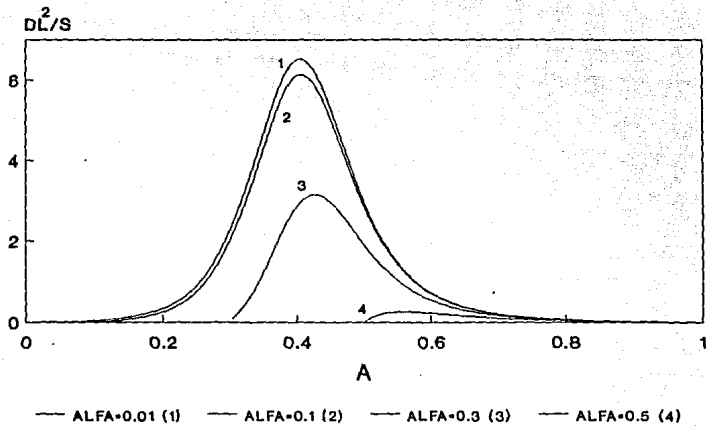


Figura 6.18. DL^2/S vs A , ec. (6.4), para cuatro valores de α .

como resultado que la viscoelasticidad domine ampliamente como se puede apreciar en la comparación de las magnitudes de estos coeficientes en las figuras 6.17b y 6.17c. Cuando el radio interior es muy pequeño, las propiedades viscoelásticas del fluido producen una estabilización en el flujo muy marcada. Esto último se observó en las figuras 6.14b-d.

El radicando de R influye de manera importante en la estabilidad del sistema, por lo que se hizo una revisión más minuciosa del mismo. Cuando es cero, se tiene un juego de los parámetros α , A, S y DL que definen los puntos en los que se unen las dos raíces de R encontradas en las figuras 6.7, 6.8a-b, 6.10, 6.11, 6.12 y 6.13. Se puede despejar del radicando el parámetro DL^2/S en función de A y de α de la siguiente manera:

$$DL^2/S = - \frac{N_2(\alpha^2 - A^2)}{N_1} \quad (6.4)$$

En la figura 6.18 se muestran las gráficas de la ec. (6.4) para cuatro valores de α . Los puntos de las curvas indican las combinaciones de DL y S para las que las dos raíces de R son iguales. Para el caso en que $A > \alpha$ se tienen dos ramas como ya se señaló. Por lo tanto, antes de este límite la estabilidad está determinada por una sola rama. Por otro lado, para el área interior se tienen las gráficas de dos ramas con puntos que implican inestabilidad debido a que corresponden a la región derecha del vértice en las figuras de $\log(R)$ vs. $\log(S)$ (figuras 6.10 a 6.13) ó de la izquierda en aquellas de $\log(R)$ vs. $\log(DL)$ (figuras 6.7 a 6.8). Obsérvese que el cociente DL^2/S disminuye cuando DL disminuye ó S aumenta. Para el área exterior y el caso $A > \alpha$ se tendrá la estabilidad definida en términos de dos ramas, por lo que cada punto de dicha región es estable ó inestable dependiendo del valor de R que resulte de la combinación DL^2/S . Nótese que, cuando A 1 las curvas bajan debido a que en ese caso N_1 crece demasiado.

CAPITULO 7

CONCLUSIONES

Uno de los aspectos más importantes en la estabilidad del flujo de capas cilíndricas delgadas lo constituye la acción de la tensión superficial. Cuando actúa en cierta dirección tiende a hacer mínima la superficie mediante los esfuerzos normales y ahorca al flujo. Esto provoca que el sistema sea inestable. Por el contrario, en la dirección axial estabiliza la perturbación al atenuar las deformaciones superficiales.

El papel estabilizador de la tensión superficial ha sido estudiado por Dávalos-Orozco [5] para una capa plana de fluido viscoelástico puesta en movimiento por un esfuerzo superficial tangencial, tomando la aproximación a número de onda pequeño. El efecto desestabilizador es reportado por Russo y Steen [1] entre otros, en un análisis numérico para cualquier longitud de onda, en una capa cilíndrica de un fluido newtoniano con un núcleo sólido coaxial. En el presente trabajo se realizó un estudio de la estabilidad hidrodinámica para número de onda pequeño, considerando tanto los efectos de la viscoelasticidad como los del núcleo sólido, por lo que se obtuvo una descripción que abarca a ambos en el rango de ondas largas. Los parámetros que definen al sistema son: S (número de Reynolds de tensión superficial), R (número de Reynolds de esfuerzos de corte), DL (diferencia de tiempos de relajación y retardo) y A (razón entre el espesor de la capa y el radio exterior). Conforme A es muy pequeña la capa cilíndrica tiene un radio tan grande que se aproxima al plano, mientras que si se acerca a uno, el núcleo interior es tan delgado que se aproxima a una columna de fluido.

Después de expresar matemáticamente las perturbaciones de las variables de flujo mediante modos normales, se hizo la

aproximación a número de onda pequeño para obtener el parámetro compleja c en función de los números adimensionales que caracterizan al flujo. A orden cero se tiene c_0 , el cual es real y negativo en cualquier caso, por lo que constituye la velocidad de fase de las perturbaciones, en sentido contrario al flujo en la superficie. A primer orden se obtiene el número c_1 , puramente imaginario, por lo que su signo determina la estabilidad del sistema. Cuando es positivo las perturbaciones crecen y el sistema es inestable, en caso contrario, decaen exponencialmente recuperándose el flujo inicial. Para el caso en que es cero se definen las curvas de estabilidad neutral que pertenecen al espacio de los parámetros del sistema y definen qué conjunto de los mismos llevan a un flujo estable, inestable ó neutral (perturbaciones estacionarias).

Las conclusiones a las que se llegó después de todo el análisis anterior, son las siguientes:

1.- Se obtuvo una generalización (en el caso de número de onda pequeño de las perturbaciones) de los trabajos investigados por Dávalos-Orozco [5] y Russo y Steen [1], incluyendo este último, a su vez, al trabajo de Xu y Davis [4]. La afirmación anterior se basa en las figuras de estabilidad neutral que coinciden satisfactoriamente con los trabajos que ellos realizaron (figuras 6.1 y 6.2).

2.- La influencia de los distintos parámetros sobre la estabilidad depende sensiblemente de A ; es decir, según la geometría del sistema, varía el papel de R , S y DL . Este resultado había sido anteriormente reportado por Russo y Steen [1] para los números de Reynolds, de tensión superficial y de esfuerzos de corte, S y R , respectivamente. Sin embargo, el resultado es nuevo para DL , ya que Dávalos-Orozco no maneja el parámetro A (ó bien, $A=0$, puesto que estudió una capa plana).

3.- El efecto del esfuerzo tangencial superficial depende también de su magnitud, a través de R . Si es muy pequeño, el flujo

se mantiene estable cuando la capa se acerca al plano (A 0), ya que apenas logra producir movimiento al fluido y por lo tanto no induce deformaciones apreciables en la superficie que puedan desestabilizar al sistema. Sin embargo, cuando A 1, el cilindro es marcadamente inestable debido a la presencia desestabilizadora de la tensión superficial que produce el efecto de ahorcamiento. El aumento del esfuerzo tangencial, provoca mayor movimiento del fluido. La capa plana tiende a desestabilizarse por medio de la deformación de la superficie, en contra de la tensión superficial. Por otro lado, para A mayores, el movimiento inducido estabiliza al flujo debido a que aumenta la velocidad del fluido cercano a la superficie deformada, lo que evita el ahorcamiento. Si el esfuerzo superficial es muy grande, siempre existe desestabilización para cualquier A.

4.- La longitud de una columna cilíndrica de fluido estática es inestable cuando es mayor que la longitud de su propia circunferencia según el límite de Rayleigh, conocido desde el siglo pasado [1]. El movimiento del fluido puede estabilizar columnas más largas. En los resultados obtenidos en el presente trabajo se encuentra una condición similar cuyo punto crítico es $\alpha=A$, ó bien en términos de la longitud de onda y el radio promedio de la capa, $\lambda=2\pi r_0$. Cuando $\alpha \geq A$ ($\lambda \leq 2\pi r_0$), la estabilidad está determinada por la tensión superficial que disminuye la deformación de la superficie a lo largo del cilindro y por la viscoelasticidad. Sin embargo, cuando $\alpha \leq A$ ($\lambda \geq 2\pi r_0$), el efecto de ahorcamiento se hace presente reduciendo el área de estabilidad. También en este caso se muestra que la viscoelasticidad estabiliza.

5.- En general, se demostró que la viscoelasticidad tiende a estabilizar el flujo para cualquier geometría. Cuando A 0, estabiliza moderadamente, resultado previamente reportado por Dávalos-Orozco [5]. Para A=0.374 su efecto es casi nulo, lo que implica que un parámetro puramente geométrico inhibe la acción de

la viscoelasticidad. Sin embargo para valores más grandes estabiliza sensiblemente, en especial cuando $A \gg 1$. Por lo tanto un nuevo resultado es la significativa importancia de la viscoelasticidad cuando el radio interior es muy pequeño. Al ejercer un esfuerzo tangente sobre un fluido viscoelástico, éste genera esfuerzos normales que en conjunto tienden hacia la fuente que lo pone en movimiento, en éste caso, la superficie. Fenómenos como el efecto Weissenberg [9] demuestran dicho comportamiento. En este experimento, se hace rotar un cilindro coaxialmente dentro de otro que contiene una sustancia viscoelástica. Para un fluido newtoniano la presión es menor en el cilindro que rota por lo que se forma una concavidad. Para un fluido viscoelástico, la presión es mayor en el mismo punto por lo que el efecto es inverso y se acumula alrededor del cilindro. Con base en esto, la diferencia de esfuerzos normales en la superficie puede ser tal que disminuya el ahorcamiento producido por la tensión superficial.

En términos generales se puede afirmar que, al menos en ausencia de efectos térmicos, las propiedades viscoelásticas de un fluido favorecen de manera muy importante la estabilidad según el parámetro geométrico A . Este es uno de los aspectos novedosos más importantes encontrados en este trabajo.

Por otro lado, se puede variar el problema poniendo en movimiento el núcleo sólido para producir esfuerzos tales que pudieran estabilizar el flujo [1]. Esto cobra interés práctico en los procesos industriales de recubrimiento de alambre ya que experimentalmente se ha encontrado que puede tener influencia positiva para la estabilidad [18].

Por último, se puede recomendar resolver el problema con la adimensionalización que utilizan tanto Russo y Steen [1], así como Xu y Davis [4], debido a que podría aportar mayor información física, aunque es marcadamente más compleja. Un ejemplo de lo anterior lo es el valor propio a orden cero, el cual en este trabajo es de la forma $c_0 = f(A)$, mientras que en la

adimensionalización de Russo y Steen resulta $c_0 = RS^{-1}f(A)$. En esta última expresión se hace evidente que cuando no hay esfuerzo superficial que mueva al fluido ($R=0$) implica $c_0=0$, que es físicamente consistente. Una situación análoga se presenta si la tensión superficial es muy grande.

BIBLIOGRAFIA

- 1 M.J. Russo y P.H. Steen, Shear stabilization of the capillary breakup of a cylindrical interface. *Phys. Fluids*, A1(12), 1926, 1989.
- 2 S. Chandrasekhar, Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Dover, Nueva York, 1961.
- 3 M.K. Smith y S.H. Davis, Instabilities of dynamic thermocapillary liquid layers. *J. Fluid Mech.*, 132, 119, 1983.
- 4 J.J. Xu y S.H. Davis, Instability of capillary jets with thermocapillarity. *J. Fluids Mech.*, 161, 1, 1985.
- 5 Dávalos-Orozco, Capillary instability due to a shear stress on the free surface. Por publicarse en *J. Non Newtonian Fluid Mech.*
- 6 C.S. Yih, Stability of liquid flow down an inclined plane. *Phys. Fluids*, 6, 321, 1963.
- 7 H.A. Dijkstra y P.H. Steen, Thermocapillary stabilization of the capillary breakup of an annular film of liquid. *J. Fluid Mech.*, 229, 205, 1991.
- 8 I.G. Currie, Fundamental Mechanics of Fluids. McGraw Hill, Toronto, 1974.
- 9 R. Darby, Viscoelastic Fluids. An introduction to their properties and behavior. Dekker, Nueva York, 1976.
- 10 L.D. Landau y E.M. Lifshitz, Fluid Mechanics. Maxwell MacMillan Int., Nueva York, 2da. ed. 1989.
- 11 R.L. Panton, Incompressible Flow. John Wiley and Sons, Texas, 1984.
- 12 M. Reiner, Lectures on Theoretical Rheology. North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1960.
- 13 H. Jeffreys, The Earth. Cambridge University Press, London 1929.
- 14 R. I. Tanner Engineering Rheology. Oxford Science Publications, Oxford, 1988.

- 15 B.K. Shivamoggi, Theoretical Fluid Dynamics. Martinus Nijhoff Publishers, Holanda, 1985.
- 16 G. Ruiz Chavarria, Estabilidad hidrodinámica de una película de fluido descendiendo sobre un cilindro en rotación. Tesis de Maestría en Ciencias (Física), Facultad de Ciencias U.N.A.M., mayo 1991.
- 17 M.K. Smith, The axisymmetric long wave instability of a concentric two phase pipe flow. *Phys. Fluids*, A1(3), 494, 1989.
- 18 R. Byron, R.C. Armstrong y O. Hassager, Dynamics of Polymeric Liquids. John Wiley and Sons, Texas, 1977.