

15  
2 ej.



# Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

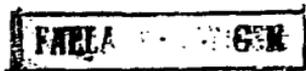
CONVECCION TERMOCAPILAR EN DOS FLUIDOS  
VISCOELASTICOS SUPERPUESTOS CON GRA-  
DIENTE DE TEMPERATURA HORIZONTAL.

T E S I S  
Que para obtener el título de  
F I S I C O  
p r e s e n t a

**AGUSTIN GONZALEZ VILLANUEVA**

México, D. F.

1992





## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## CONTENIDO

Resúmen.	2
Introducción.	3
<b>CAPITULO I.- Generalidades de hidrodinámica y teoría de estabilidad lineal.</b>	
1.1.- El modelo del medio continuo.	6
1.2.- Ecuaciones que gobiernan un fluido.	7
1.3.- Condiciones de frontera.	9
1.4.- Análisis lineal de la estabilidad.	9
1.5.- Análisis en modos normales.	10
1.6.- Límites del análisis lineal.	11
1.7.- Ecuaciones constitutivas y viscoelasticidad.	11
<b>CAPITULO II.- El sistema de dos capas y la solución del flujo principal.</b>	
2.1.- Planteamiento del problema.	18
2.2.- El flujo principal.	21
<b>CAPITULO III.- Ecuaciones perturbadas lineales y el problema de valores propios.</b>	
3.1.- Ecuaciones hidrodinámicas y constitutivas perturbadas.	35
3.2.- Condiciones de frontera perturbadas.	37
3.3.- Ecuaciones lineales perturbadas.	42
3.4.- Soluciones en modos normales.	47
<b>CAPITULO IV.- Solución con la aproximación a grandes longitudes de onda.</b>	
4.1.- Desarrollo en series de potencias de $\alpha$ .	52
4.2.- Valores propios a orden cero.	56
4.3.- Valores propios a orden uno.	61
<b>CAPITULO V.- Resultados.</b>	71
<b>CAPITULO VI.- Conclusiones.</b>	95
<b>BIBLIOGRAFIA.</b>	98

## RESUMEN

En este trabajo se analizó la estabilidad hidrodinámica en un sistema de dos capas superpuestas de líquidos viscoelásticos que no se mezclan y están inmersos en un medio sin gravedad. Un gradiente de temperaturas constante aplicado a lo largo de éstas genera, por medio de un gradiente de tensión superficial en la superficie libre y la entrecara de ellas, un estado de movimiento estacionario llamado flujo básico o principal. La variación de algunos parámetros térmicos superficiales de cada capa líquida, determinan tres perfiles de velocidades distintos en este sistema. Uno de ellos, en que se detiene por completo el movimiento en la capa inferior, es un resultado que no se había encontrado en problemas termocapilares de capas delgadas.

En el análisis de la estabilidad para perturbaciones con longitudes de onda grandes en las dos capas, se encontraron dos formas por medio de las cuales el sistema pasa al estado inestable. En una de éstas las oscilaciones de la superficie libre y la entrecara están en fase y es llamada primer modo de oscilación, en la otra existe una diferencia de fase de ciento ochenta grados y es llamada segundo modo de oscilación. En el primer modo de oscilación la razón de crecimiento de las perturbaciones se le asocia a la superficie libre por coincidir en magnitud a la encontrada en el problema de una sola capa cuando se anula el grosor de la capa inferior. El segundo modo se le asocia a la entrecara debido a que ésta agrega un grado de libertad adicional al sistema y es un factor físico adicional con respecto al sistema de una capa.

Se observa que la estabilidad del sistema es distinta para cada uno de los tres perfiles de velocidad del flujo básico, en particular en el caso en que se anula el movimiento de la capa inferior. En este caso el segundo modo es menos susceptible de desestabilizar el sistema. Ello se debe a la diferencia de tiempos de relajación y retardo del fluido contenido en la capa superior. Lo anterior no se observa en el estudio del mismo problema pero con líquidos Newtonianos.

## INTRODUCCION

El estudio de las inestabilidades termocapilares en capas líquidas delgadas ocupa un lugar importante en muchos procesos industriales que van desde puentes de cristalización de semiconductores en la electrónica, hasta la fijación de recubrimientos sobre superficies de materiales. Cada día aparecen sustancias más complejas, entre ellas se encuentra una parte de los fluidos no newtonianos llamados viscoelásticos. Aquí investigaremos aquellos que satisfacen la ecuación de Oldroyd con dos constantes.

En el presente trabajo se analizan los efectos termocapilares, en ausencia de gravedad, que tiene la presencia de una entrecara de dos fluidos viscoelásticos superpuestos que no se pueden mezclar, cuando uno de los fluidos tiene una superficie libre. Es de interés estudiar la diferencia que existe con respecto a la inestabilidad de una sola capa de fluido y por otro lado, es importante investigar si una de las capas pudiera estabilizar el flujo en la otra.

El estudio de la estabilidad en el problema de una sola capa para este tipo de geometría y de inestabilidades superficiales fué realizado por Dávalos-Orozco en el caso isotérmico [1], así como por Dávalos-Orozco y Chávez, para el caso térmico [2].

A diferencia de los trabajos antes citados, en este caso se encontró un modo más que lleva a desestabilizar el sistema, dicho modo se debe a las oscilaciones de la entrecara donde se tocan los líquidos de las dos capas. Lo anterior se debe a la presencia de la entrecara que aporta un grado de libertad adicional en relación al problema de una capa. Lo mismo obtuvo Kao [3] y [4], al encontrar un nuevo modo de inestabilidad debido a la entrecara de dos fluidos newtonianos descendiendo por un plano inclinado bajo la acción de la gravedad.

En el primer capítulo se plantean las ecuaciones que representan los principios generales que deben satisfacer los fluidos, como conservación de masa, conservación de momento lineal

y conservación de la energía.

En el segundo capítulo se encuentra una solución de las ecuaciones de continuidad; conservación de momento lineal y conservación de energía en ausencia de gravedad. Esta solución, que no depende del tiempo, caracteriza un estado estacionario del sistema, llamado flujo básico ó principal. En él se muestra un contraflujo de líquido dentro de las capas generado por la presencia de paredes verticales muy alejadas de la región de estudio, ello conduce a un perfil de velocidades parabólico en cada capa. Aquí se supone que la razón de aspecto es pequeña, es decir, que la razón entre el espesor de las dos capas y las dimensiones horizontales del recipiente que las contiene, es mucho menor a uno. Lo anterior se considera así para desprestigiar el efecto que las paredes del recipiente realizan sobre el movimiento de la superficie libre y la entrecara de ambas capas.

Lo que mantiene el movimiento en el flujo básico es la presencia de un gradiente de temperatura horizontal que genera un gradiente de tensión superficial constante en la superficie libre y la entrecara del sistema. Las condiciones de frontera aplicadas consideran que en el fondo del recipiente que lo contiene no hay deslizamiento del fluido ni flujo de calor. La superficie libre está en contacto con un gas enrarecido con el fin de que éste no provoque esfuerzos mecánicos sobre ella.

En el tercer capítulo se obtienen las ecuaciones lineales que satisfacen las variables perturbadas. Se propone una solución en modos normales y se obtiene un sistema de ecuaciones que representa un problema de valores propios para uno de los parámetros de la perturbación.

En el cuarto capítulo se consideran las inestabilidades provocadas por perturbaciones que tienen longitudes de onda grandes, es decir, números de onda pequeños. Esto lleva a encontrar una solución analítica para el sistema de ecuaciones planteado en el capítulo anterior, haciendo un desarrollo en potencias del número de onda para las amplitudes de las perturbaciones.

En el quinto capítulo se presentan los resultados mediante

gráficas que contienen la variación relativa entre las constantes del sistema que describen las condiciones para desestabilizar el flujo principal. También se explican las gráficas anteriores.

Finalmente se dan las conclusiones en el sexto capítulo.

## CAPITULO I.

### GENERALIDADES DE HIDRODINAMICA Y TEORIA DE ESTABILIDAD LINEAL

#### 1.1 EL MODELO DEL MEDIO CONTINUO.

Se entiende por un fluido todo aquel material que se deforma continuamente ante la aplicación de esfuerzos superficiales permanentes [5]. Entre ellos se encuentran algunos estados de la materia como son líquidos y gases, entre otros.

Generalmente hay dos formas de describir un fluido, la primera es tomar en cuenta la composición molecular de éste, caracterizando las variables macroscópicas que lo describen en función de las fuerzas de interacción molecular, los diámetros moleculares, y otros. Las teorías estadísticas describen en muy buena aproximación la física de gases enrarecidos pero quedan incompletas para líquidos, debido a la gran dificultad de conocer la forma de las interacciones moleculares. La segunda forma de descripción consiste en ignorar la composición molecular del fluido y caracterizar las variables del sistema como variables intensivas que satisfacen principios físicos generales como son la conservación de energía, masa y momento lineal. Debido a los mayores alcances analíticos del modelo continuo con respecto a modelos estadísticos, se utiliza en este trabajo las hipótesis y métodos del primero para el estudio del problema que nos ocupa.

Para sustentar la aproximación del método continuo podemos imaginar al fluido compuesto por volúmenes infinitesimales, lo que significa desde el punto de vista físico que éstos contienen una gran cantidad de moléculas, además de ser muy grandes en comparación a la separación media entre ellas y lo suficientemente pequeños respecto al volumen total del fluido [6]. A cada uno de estos volúmenes infinitesimales se le llama punto material, punto ó partícula de fluido indistintamente, ya que éstos se observan y se miden macroscópicamente en el experimento.

En éstos términos, las variables físicas que caracterizan al

fluido se dan como funciones de las coordenadas y del tiempo en relación a un sistema de referencia arbitrario, cuyo único requisito para su selección es que simplifique lo mejor posible las ecuaciones que representan a los principios generales.

## 1.2-ECUACIONES QUE GOBIERNAN UN FLUIDO

Todos los fluidos satisfacen tres principios físicos generales. En cualquier volumen que se esté observando, la masa y la energía se conservarán así como el momento lineal debe satisfacer la segunda ley de Newton; es decir, su rapidez de cambio en el tiempo debe de ser igual a la resultante de fuerzas que actúan sobre la materia contenida en este volumen [7].

a)-Conservación de masa. La variación en el tiempo de la masa contenida en un elemento de volumen es igual a la cantidad que fluye a través de la superficie que lo limita, ésto si no hay transformación de material dentro de él; como por ejemplo, cuando se observan líquidos ó gases que contienen diluidas a especies reactivas. Ello se denota como sigue:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \, dv = - \int \rho u_i \, ds_i . \quad (1.1)$$

Al aplicar el teorema de Gauss, agrupar y como el integrando debe anularse por ser válida la ecuación para cualquier elemento de volumen, se obtiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0 . \quad (1.2)$$

Esta es la llamada ecuación de continuidad. Donde  $\rho$  es la densidad del sistema y  $u_i$  las componentes de la velocidad en él.

b)-Conservación de momento. La variación en el tiempo del momento de cualquier elemento de volumen debe de ser igual a las fuerzas de cuerpo  $f_i$  más las fuerzas de superficie  $\sigma_{ij}$ , que actúan sobre él, además de la cantidad de momento que fluye a través de su frontera debido a pérdidas por convección de materia; ésto se denota por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho u_i \, dv = \int f_i \, dv + \int \sigma_{ij} \, dS_j - \int \rho u_i u_j \, dS_j . \quad (1.3)$$

Al aplicar el teorema de Gauss, reagrupar en un solo miembro y al usar la ecuación de continuidad, se tiene:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad (1.4)$$

ya que el integrando debe anularse para cualquier volumen.

Estas son las llamadas ecuaciones de movimiento o de conservación de momento.

c)-Conservación de la energía. La rapidez con que cambia la energía en cualquier elemento de volumen es igual a la rapidez con que se hace trabajo sobre él debido tanto a las fuerzas de cuerpo  $f_i$  como las de superficie  $\sigma_{ij}$ , más la rapidez con que el calor cruza su frontera (ley de Fourier), y la rapidez con la cual la energía de convección debida a movimientos de masa que pasa a través de la superficie que lo rodea; ello se denota por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho e \, dv = \int u_i \sigma_{ij} \, dS_j + \int \rho u_i f_i \, dv + \int \kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \, dS_j - \int \rho c u_j \, dS_j, \quad (1.5)$$

donde  $e$  es la energía por unidad de masa,  $\kappa$  la conductividad térmica y  $T$  la temperatura del medio.

Al usar el teorema de Gauss, reagrupar términos en un solo miembro y al tomar en cuenta la ecuación de continuidad se tiene:

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u_i \frac{\partial e}{\partial x_i} = \frac{\partial (u_i \sigma_{ij})}{\partial x_j} + \rho u_i f_i + \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (1.6)$$

ya que el integrando debe anularse.

Al multiplicar las ecuaciones de movimiento (1.4) por  $u_i$  y sustituirlas en la ecuación anterior, además de tomar en cuenta que la energía por unidad de masa se puede expresar como el resultado de una contribución térmica y una cinética:

$$e = \frac{1}{2} u_i u_i + C_v T, \quad (1.7)$$

se obtiene:

$$\rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_v u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (1.8)$$

que es la llamada ecuación de conservación de la energía. Donde  $C_v$  es el calor específico a volumen constante.

A las tres ecuaciones que representan los principios generales (1.2), (1.4), (1.8) se les llama ecuaciones de la hidrodinámica y contienen parámetros que se suponen son constantes:  $\rho$ ,  $\kappa$ ,  $C_v$ .

### 1.3-CONDICIONES DE FRONTERA

En la naturaleza encontramos y observamos el comportamiento de los fluidos en contacto con otros cuerpos, estas regiones de contacto pueden ser desde un punto hasta una superficie, en nuestro caso las fronteras de nuestro sistema serán superficies. En este sentido, las condiciones de frontera son de dos tipos: mecánicas y termodinámicas. Las primeras consideran la forma en que la aplicación de esfuerzos modifica las velocidades del fluido. La segunda toma en cuenta la continuidad de la temperatura y del flujo de calor [6], en las fronteras, al suponer que no hay fuentes ni sumideros de calor dentro del sistema.

### 1.4-ANÁLISIS LINEAL DE LA ESTABILIDAD

Para hacer el análisis lineal de estabilidad de un sistema, se supone que éste debe encontrarse en un estado estacionario, es decir, que las variables físicas que describen al sistema no dependen explícitamente del tiempo, además de satisfacer las ecuaciones que representan los principios generales y las condiciones de frontera a que está sujeto.

Si las variables que caracterizan al sistema se denotan por  $\bar{\delta}_1$ , entonces una perturbación en el sistema se denotará de la manera siguiente:  $\delta_1 = \bar{\delta}_1 + \delta_1'$ , en donde las letras primadas denotan variaciones infinitesimales en relación al estado estacionario. Las variables  $\delta_1$  deben satisfacer también las ecuaciones de la hidrodinámica junto con sus condiciones de frontera. Esto nos lleva a un conjunto de ecuaciones que contienen sólo a los parámetros físicos ó constantes representativas del sistema, como son sus dimensiones geométricas, sus características térmicas (capacidades caloríficas,

conductividades térmicas de volumen y superficie), además de las mecánicas [8].

Al perturbar y linealizar, las ecuaciones (1.2), (1.4), (1.8) toman la forma:

$$\frac{\partial u_k'}{\partial x_k} = 0, \quad (1.9)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u_1'}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial u_1'}{\partial x_k} + u_{ak}' \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial \sigma_{1k}'}{\partial x_k} + \rho f_1', \quad (1.10)$$

$$\rho C_v \left( \frac{\partial T'}{\partial t} + U_k \frac{\partial T'}{\partial x_k} + u_k' \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} \right) = \kappa \nabla^2 T'. \quad (1.11)$$

Aquí las letras primadas representan las variables perturbadas y las letras con barra, las variables que describen el estado estacionario. Se han despreciado los términos con productos de variables perturbadas por considerar que son muy pequeños respecto a estas últimas:

$$|x_1'| \ll |\bar{x}_1|. \quad (1.12)$$

### 1.5 - ANALISIS EN MODOS NORMALES.

Una manera de resolver analíticamente el sistema de ecuaciones obtenido es proponer perturbaciones infinitesimales en forma de ondas planas; es decir,  $x_1' = A_1(y) \exp[i\alpha(x - ct)]$  donde las amplitudes  $A_1(y)$  sólo dependen de una de las coordenadas. Al sustituir estas funciones en las ecuaciones hidrodinámicas y en las condiciones de frontera se genera un nuevo sistema de ecuaciones ordinarias que representarán un problema de valores propios para  $c$ , [4]. Este valor propio dependerá de los distintos parámetros del sistema además del número de onda asociado a las perturbaciones ( $\alpha$ ). En general es un número complejo cuya parte real es la velocidad de fase y la parte imaginaria la razón de crecimiento de la perturbación. La parte imaginaria de  $c$  hará

crecer en el tiempo la onda plana cuando es positiva y al contrario, ésta decrecerá cuando sea negativa. Cuando es igual a cero define una superficie en el espacio de los parámetros del sistema al cual divide en dos regiones donde el sistema es estable ó inestable. A la superficie generada en el espacio de los parámetros cuando la parte imaginaria se anula se llama superficie de estabilidad neutral y su determinación es el objetivo principal que se busca en el análisis de la estabilidad de un sistema.

#### 1.6-LIMITES DEL ANALISIS LINEAL.

Las ecuaciones de la hidrodinámica contienen términos diferenciales no lineales que incluyen productos de derivadas de las variables que caracterizan al fluido, los cuales se pueden despreciar cuando son suficientemente pequeños, o se encuentren soluciones que los anulen; ésto será posible en los problemas termocapilares como el que se va a estudiar. En las ecuaciones perturbadas también se encuentran términos no lineales que contienen productos de perturbaciones de las variables y habrán de despreciarse por la misma razón, pero en este caso las perturbaciones dependen del tiempo por lo que en algún instante de tiempo estos términos serán lo suficientemente significativos para tomarlos en cuenta. Cuando se estudia la superficie de estabilidad neutral del análisis lineal no existe dependencia en el tiempo de las perturbaciones, por lo que éstas serán pequeñas en cuanto sus amplitudes lo sean. Así se deben buscar soluciones que cumplan lo anterior [8].

#### 1.7-ECUACIONES CONSTITUTIVAS Y VISCOELASTICIDAD

Se llaman ecuaciones constitutivas aquellas que relacionan los esfuerzos en un fluido con la rapidez con la que éste se deforma. La rapidez de corte nos da una forma de medir la magnitud de la deformación de puntos muy cercanos que se encuentran dentro de un mismo elemento de volumen infinitesimal, durante un periodo de tiempo finito y con respecto a la distancia

relativa que tenían antes del movimiento. La rapidez de corte no mide la rotación de estos puntos en relación a algún eje, esto lo mide la rapidez de rotación, así:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.13)$$

Donde  $e_{ij}$  es la rapidez de corte y  $\Omega_{ij}$  es la rapidez de rotación [7].

Debido a que en un fluido estático la presión sobre una superficie cualquiera actúa en su dirección normal y es equivalente a la presión termodinámica, los esfuerzos superficiales deben tener la forma  $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ , ya que no tienen una dirección preferencial de acción. Entonces, los esfuerzos serán representados por un tensor isotrópico. Esto también ocurre cuando el fluido está en movimiento ya que los esfuerzos no dependen del sistema de referencia elegido, lo que lleva a proponer un término adicional debido sólo al movimiento, a estos esfuerzos se les denotará por  $\tau_{ij}$ . Se tendrá entonces que el tensor de esfuerzos deberá estar representado por:  $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$ . El que los esfuerzos sean representados por dos subíndices se debe a que para representar una fuerza que actúa sobre una superficie, en forma vectorial, se necesitan dos vectores tangentes a ella y uno en la dirección normal, en los cuales poder proyectarlos. Así se dirá que el esfuerzo  $\sigma_{ij}$  actúa sobre la superficie cuya normal es el plano caracterizado por  $x_i = \text{cte.}$  y con dirección  $x_j$ . Como ilustración véase la fig. (1.1).

Existe una gran cantidad de modelos teóricos que en mayor ó menor grado describen las características reológicas observadas experimentalmente; por éstas se entienden el conjunto de relaciones entre los esfuerzos aplicados a un fluido y su deformación. Ejemplos de ellos son los modelos newtonianos,  $\tau_{ij} = 2\eta_0 e_{ij}$ , donde la viscosidad  $\eta_0$  es una constante. Para algunos fluidos no newtonianos,  $\eta_0$  puede también depender de  $e_{ij}$ . Obsérvese que la respuesta del fluido en la ecuación anterior es instantánea en el tiempo; esto no sucede para los fluidos

viscoelásticos en los cuales dicha ecuación dependerá de los valores que tuvo en instantes anteriores de tiempo, esto es como si el fluido tuviera memoria de lo que le ha sucedido en el pasado [9]. Para ilustrar esto obsérvese la fig.(1.2) en la que se grafican las deformaciones y viscosidades en relación a los esfuerzos aplicados.

Un modelo teórico que describe muchas de las propiedades de éstos fluidos, es el llamado modelo de Oldroyd de dos constantes:

$$\left(1 + \lambda_1 \frac{D}{Dt}\right) \tau_{ij} = \eta \left(1 + \lambda_2 \frac{D}{Dt}\right) e_{ij} . \quad (1.14)$$

Donde  $\lambda_1$  es el tiempo de relajación,  $\lambda_2$  es el tiempo de retardo,  $\eta$  es la viscosidad y el operador diferencial aplicado es la derivada codeformacional definida como:

$$\frac{D}{Dt} \tau^{ij} = \frac{\partial \tau^{ij}}{\partial t} + u_m \frac{\partial \tau^{ij}}{\partial x_m} - \tau^{mi} \frac{\partial u_j}{\partial x_m} - \tau^{jm} \frac{\partial u_i}{\partial x_m} . \quad (1.14)$$

Dicha derivada se obtiene al elegir un sistema de referencia colocado en el fluido y que se deforma con él [9], tomando en cuenta su métrica, de tal manera que las coordenadas en dicho sistema no dependan del tiempo. La expresión anterior es el resultado de transformar la variación de un tensor contravariante en el tiempo, desde el sistema de referencia en el fluido, hasta un sistema de referencia fijo en relación al movimiento del fluido. Para tener una idea de cómo trabaja la derivada codeformacional con respecto a otras derivadas obsérvese la fig.(1.3).

Los fluidos viscoelásticos no responden instantáneamente a esfuerzos aplicados, además de tener otros efectos interesantes:

Al salir de un ducto cualquiera se expanden. Así como también el llamado efecto Weissenberg que se ve al hacer rotar un cilindro sólido semisumergido en uno de estos fluidos, lo que origina una superficie convexa alrededor del eje de rotación y no una cóncava como sucede en los líquidos Newtonianos.

Si se colocan dos discos paralelos en rotación que tengan conectados en sus centros dos tubos huecos se observa salir por éstos un flujo al contrario de los fluidos viscosos. Esto muestra una reacción del fluido viscoelástico a las fuerzas centrífugas

que se le aplican.

Cuando a un tubo lleno de fluido viscoelástico se le aplica un gradiente de presión durante un tiempo finito y se le cancela, entonces el perfil de velocidades logrado se modifica rápidamente tendiendo a eliminarse.

Al extraer líquido de un recipiente que contiene este tipo de fluidos por medio de una jeringa y retirarla al mismo tiempo que se succiona, se observará elevarse una columna de líquido hacia la aguja de ésta, continuando el proceso de extracción naturalmente.

Estos experimentos muestran la susceptibilidad a los esfuerzos normales para este tipo de fluidos, algunos de los efectos anteriores se pueden explicar tomando en cuenta que la composición de esos líquidos consiste en cadenas de polímeros que pueden enrollarse sobre sí mismas al dejarlas libres de esfuerzos en la superficie y desenrollarse al aplicarles esfuerzos de corte. Los tiempos de relajamiento y retardo caracterizan respectivamente, las respuestas mecánicas ante esfuerzos externos, y un relajamiento de la rapidez de corte. Obsérvese que si  $\lambda_1 \ll 1$  y  $\lambda_2 \ll 1$ , se tiene un fluido newtoniano  $\tau_{ij} = 2\eta e_{ij}$ , si  $\eta = \text{cte}$  (eq. 1.14).

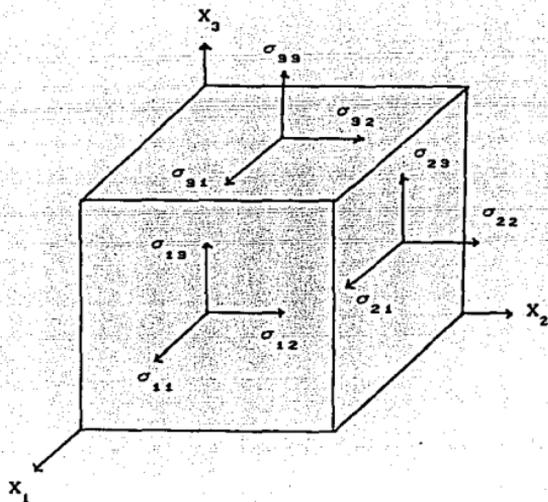
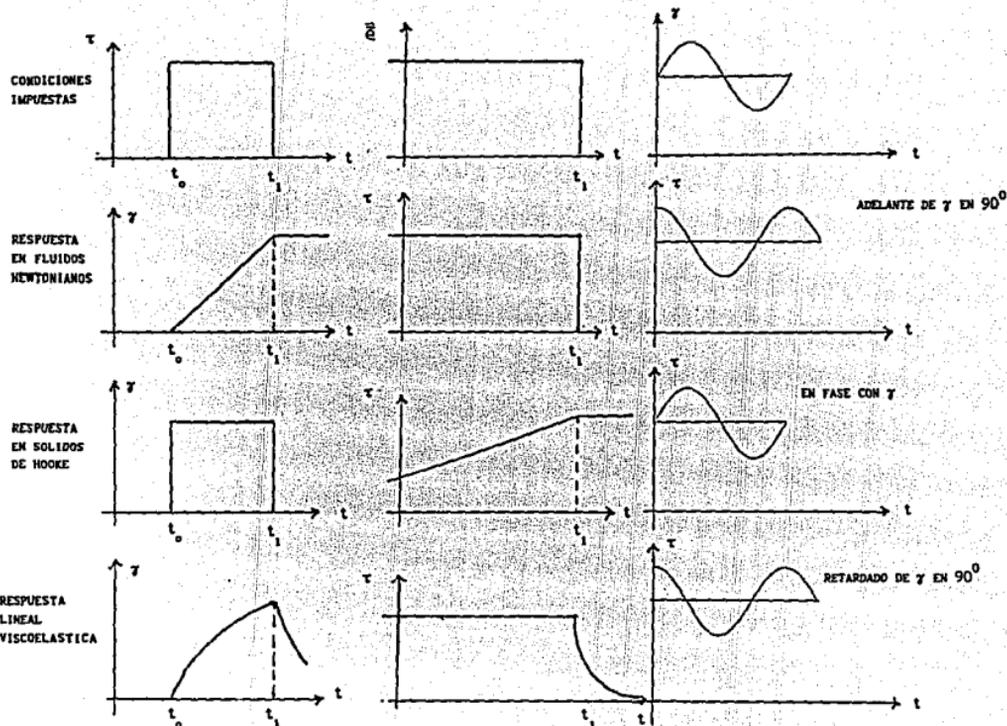


Figura 1.1. Los esfuerzos aplicados sobre una superficie se pueden proyectar en dos componentes tangenciales a esta y una normal. El primer subíndice corresponde a la dirección de la normal asociada al elemento de superficie sobre la que actúa el esfuerzo. El segundo subíndice relaciona la dirección en que está dirigido este último.

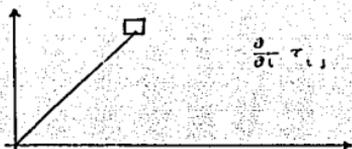


I.- DEFORMACION Y RECUPERACION

II.- RELAJACION DE ESFUERZOS

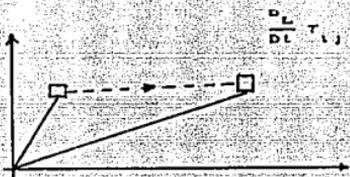
III.- RESPUESTA OSCILATORIA

Figura(1.2). Respuesta de algunos tipos de fluidos ante esfuerzos aplicados en comparación con la de fluidos viscoelásticos. También la relajación de esfuerzos en el tiempo después de haber aplicado una deformación.



$$\frac{\partial}{\partial t} \tau_{ij}$$

DERIVADA PARCIAL: VARIACION CON EL TIEMPO EN UN PUNTO FIJO.



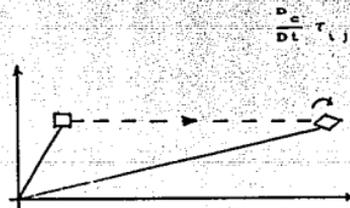
$$\frac{D_L}{Dt} \tau_{ij}$$

DERIVADA DE LAGRANGE: VARIACION CON EL TIEMPO SIGUIENDO LA TRASLACION DEL MATERIAL.



$$\frac{D_J}{Dt} \tau_{ij}$$

DERI. DE JAUMANN: VARIACION CON EL TIEMPO SIGUIENDO LA TRASLACION Y ROTACION DE MATERIAL.



$$\frac{D_c}{Dt} \tau_{ij}$$

DERI. CODEFORMACIONAL: VARIACION CON EL TIEMPO SIGUIENDO TRASLACION, ROTACION Y DEFORMACION DE MATERIAL.

Figura(1.3). Comparación del efecto de diferentes tipos de derivadas al ser aplicadas a un tensor de segundo rango.

## CAPITULO II

### EL SISTEMA DE DOS CAPAS Y LA SOLUCION DEL FLUJO PRINCIPAL

#### 2.1-PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

El sistema a estudiar consiste en dos capas delgadas de fluidos viscoelásticos que no se mezclan, colocadas una sobre otra, en el fondo de un recipiente rígido, plano y aislante térmico, en ausencia de fuerzas gravitatorias. Se supone que cada capa de fluido tiene diferentes densidades, viscosidades, conductividades térmicas, capacidades caloríficas y grosor; además, su entrecara y superficie libre pueden deformarse. La superficie libre se supone que está en contacto con un gas enrarecido, con el objeto de ignorar los esfuerzos mecánicos que éste pudiera aplicarle. Se supondrá que el gas está a una temperatura constante  $T_{\infty}$  y puede intercambiar calor con el sistema.

Las dos capas están sometidas a la presencia de un gradiente de temperatura constante a lo largo de ellas, el que genera un gradiente de tensión superficial, tanto en la entrecara de las capas como en la superficie libre. Lo anterior hará moverse al fluido manteniéndolo en un estado estacionario al cual se llama flujo básico ó flujo principal.

Los efectos termocapilares que influyen en la estabilidad de capas líquidas delgadas fueron estudiadas primeramente por Pearson [10], quien muestra la mayor importancia de estos efectos en comparación con los de origen gravitacional. Para el problema que se estudia aquí se considera que la tensión superficial  $\sigma$  varía linealmente con la temperatura [11]. Se expresará la tensión superficial y el gradiente horizontal de temperatura por:

$$\sigma = \sigma_0 - \gamma (T - T_0) \quad \frac{\partial T}{\partial x} = -b \quad \gamma = -\frac{\partial \sigma}{\partial T} \quad (2.1)$$

Donde  $\sigma_0$  y  $T_0$  son conocidas en algún punto de referencia

sobre la superficie del líquido así como  $b$  y  $\gamma$  son constantes [11].

En vista de que el análisis tridimensional es por mucho complejo y laborioso, se investigará el sistema como si fuera bidimensional siguiendo a la literatura especializada en el tema.

Considerése un sistema de referencia colocado en la entrecara de las capas cuyo eje  $X$  se dirige a lo largo del gradiente de temperatura y el eje  $Y$  es perpendicular a la frontera plana que contiene las dos capas; obsérvese la fig. (2.1). A las variables y parámetros que caracterizan cada capa se les designará por subíndices con las letras  $a$  y  $b$ , según se trate del fluido de la capa superior ó inferior, respectivamente.

Para simplificar más el análisis y el manejo de las ecuaciones de la hidrodinámica, se llevará el problema a un sistema de ecuaciones físicamente equivalente y adimensional, escalando las variables de las dos capas con los parámetros de la capa superior, de la manera siguiente:

$$x' = d_a x, \quad t' = \frac{\mu_a}{b \gamma_a} t, \quad p' = b \gamma_a p, \quad (2.2)$$

$$T' = b d_a T, \quad u'_i = \frac{b d_a \gamma_a}{\mu_a} u_i, \quad \tau_{ij}' = b \gamma_a \tau_{ij}. \quad (2.3)$$

Donde las variables primadas tienen dimensiones.  $x$  son distancias,  $t$  son tiempos,  $p$  las presiones,  $T$  las temperaturas,  $u_i$  las velocidades y  $\tau_{ij}$  los esfuerzos dinámicos.

Como resultado de la adimensionalización se tiene el sistema equivalente de ecuaciones hidrodinámicas lineales:

Ecuaciones de movimiento:

$$R_a \left( \frac{\partial u_{ai}}{\partial t'} + u_{ak} \frac{\partial u_{ai}}{\partial x'_k} \right) = - \frac{\partial p'_a}{\partial x'_i} + \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x'_j}, \quad (2.4)$$

$$\rho R_a \left( \frac{\partial u_{bi}}{\partial t'} + u_{bk} \frac{\partial u_{bi}}{\partial x'_k} \right) = - \frac{\partial p'_b}{\partial x'_i} + \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x'_j}. \quad (2.5)$$

Donde los parámetros  $\rho$  y  $R_a$  son el cociente de densidades de los fluidos de la capa inferior y superior y el número de Reynolds del fluido superior respectivamente, [ver ecuaciones (2.11)-(2.13)].

Como se consideran las densidades constantes, se obtienen de las ecuaciones de continuidad, las condiciones de incompresibilidad:

$$\frac{\partial u_{a1}}{\partial x_{a1}} = \frac{\partial u_{b1}}{\partial x_{b1}} = 0. \quad (2.6)$$

Ecuaciones de la energía:

$$M_a \left( \frac{\partial T_a}{\partial t} + u_{ak} \frac{\partial T_a}{\partial x_k} \right) = \nabla^2 T_a, \quad (2.7)$$

$$\frac{M_a}{\xi} \left( \frac{\partial T_b}{\partial t} + u_{bk} \frac{\partial T_b}{\partial x_k} \right) = \nabla^2 T_b. \quad (2.8)$$

Ecuaciones constitutivas:

$$\left( 1 + L_{a1} \frac{D}{Dt} \right) \tau_{ij}^a = 2 \left( 1 + L_{a2} \frac{D}{Dt} \right) e_{ij}^a, \quad (2.9)$$

$$\left( 1 + L_{b1} \frac{D}{Dt} \right) \tau_{ij}^b = 2\mu \left( 1 + L_{b2} \frac{D}{Dt} \right) e_{ij}^b. \quad (2.10)$$

Donde se han definido y definirán los números dimensionales siguientes:

$$R_a = \frac{\rho_a b \gamma_a d^2}{\mu_a^2}, \quad Pr_a = \frac{\mu_a C_{va}}{\kappa_a}, \quad S_a = \frac{\rho_a d_a \sigma_{ao}}{\mu_a^2}, \quad \gamma = \frac{\gamma_{ab}}{\gamma_a}, \quad (2.11)$$

$$L_{a1} = \frac{b \gamma_a}{\mu_a} \lambda_{a1}, \quad L_{a2} = \frac{b \gamma_a}{\mu_a} \lambda_{a2}, \quad L_{b1} = \frac{b \gamma_a}{\mu_a} \lambda_{b1}, \quad L_{b2} = \frac{b \gamma_a}{\mu_a} \lambda_{b2}, \quad (2.12)$$

$$C_{va} = \frac{C_{vb}}{C_{va}}, \quad \rho = \frac{\rho_b}{\rho_a}, \quad \mu = \frac{\mu_b}{\mu_a}, \quad \xi = \frac{\xi_b}{\xi_a}, \quad d = \frac{d_b}{d_a}, \quad \kappa = \frac{\kappa_b}{\kappa_a}, \quad (2.13)$$

$$\Delta L_a = \frac{b\gamma_a}{\mu_a} (\lambda_{a1} - \lambda_{a2}), \Delta L_b = \frac{b\gamma_a}{\mu_a} (\lambda_{b1} - \lambda_{b2}), L = \frac{\Delta L_b}{\Delta L_a},$$

$$\sigma_o = \frac{\sigma_{abo}}{\sigma_{ao}}, B_a = \frac{h_a d}{\kappa_a} \quad (2.14)$$

Los números  $R_a$  y  $M_a$  son los números de Reynolds y Marangoni del fluido de la capa superior, respectivamente. En cálculos posteriores se hará uso del número de Prandtl del líquido contenido en la capa superior  $Pr_a$  que sustituirá al número de Marangoni. Los números de Reynolds y Marangoni están relacionados por  $M_a = R_a Pr_a$ .

$S_a$  es el número de Weber de la capa superior. Los números  $L_{a1}$ ,  $L_{a2}$ ,  $L_{b1}$ , y  $L_{b2}$  contienen los tiempos de relajación y retardo. Se sustituirán adelante dos de estos últimos por las diferencias de los tiempos de relajación y retardo  $\Delta L_a$ ,  $\Delta L_b$ . Este último a su vez será sustituido por  $L$  que contendrá los efectos viscoelásticos. El número  $\sigma_o$  también se obtendrá de las condiciones de frontera así como el número de Biot  $B_a$  de la capa superior. La constante  $h_a$  es la conductividad térmica superficial entre la capa de fluido superior y el gas.

Los coeficientes  $\kappa_a$ ,  $\rho_a$ ,  $C_{va}$ ,  $\kappa_b$ ,  $\rho_b$ ,  $C_{vb}$ , se han considerado constantes y por ello todos los coeficientes adimensionales serán constantes. Esto es debido a que en los fenómenos que se estudiarán se supondrá que no hay incrementos en la temperatura suficientemente grande para que los coeficientes varíen. La fig. (2.2) muestra como queda la geometría del sistema con parámetros adimensionales. El total de éstos parámetros independientes es de trece como resultado del análisis dimensional.

## 2.2-EL FLUJO PRINCIPAL.

Para el flujo estacionario las variables que lo caracterizan no dependen del tiempo. Además se supondrá que la

componente de la velocidad en la dirección X solo depende de "y", al ser la única componente que ha sido generada por el gradiente de tensión superficial. Entonces las ecuaciones de la hidrodinámica (2.4)-(2.8), toman la forma:

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}^a}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}^a}{\partial y}, \quad (2.15)$$

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}^b}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}^b}{\partial y}, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_{ax}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}_{bx}}{\partial x} = 0, \quad (2.17)$$

$$\nabla^2 \bar{T}_a = M_a \bar{u}_{ax} \frac{\partial \bar{T}_a}{\partial x}, \quad (2.18)$$

$$\nabla^2 \bar{T}_b = \frac{M_a}{\xi} \bar{u}_{bx} \frac{\partial \bar{T}_b}{\partial x}. \quad (2.19)$$

Las ecuaciones constitutivas:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{xx}^a + L_{a1} \left( \bar{u}_{ax} \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}^a}{\partial x} - 2 \bar{\tau}_{xy}^a \frac{\partial \bar{u}_{ax}}{\partial y} \right) = \\ = -2 L_{a2} \left( 2 \bar{e}_{xy}^a \frac{\partial \bar{u}_{ax}}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{xy}^a + L_{a1} \left( \bar{u}_{ax} \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}^a}{\partial x} - \bar{\tau}_{yy}^a \frac{\partial \bar{u}_{ax}}{\partial y} \right) = \\ = 2 \bar{e}_{xy}^a + 2 L_{a2} \left( \bar{u}_{ax} \frac{\partial \bar{e}_{xy}^a}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\bar{\tau}_{yy}^a + L_{a1} \left( \bar{u}_{ax} \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}^a}{\partial x} \right) = 0. \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{xx}^b + L_{b1} \left( \bar{u}_{bx} \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}^b}{\partial x} - 2 \bar{\tau}_{xy}^b \frac{\partial \bar{u}_{bx}}{\partial y} \right) &= \\ &= -2 \mu L_{b2} \left( 2 \bar{e}_{xy}^b \frac{\partial \bar{u}_{bx}}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{xy}^b + L_{b1} \left( \bar{u}_{bx} \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}^b}{\partial x} - \bar{\tau}_{yy}^b \frac{\partial \bar{u}_{bx}}{\partial y} \right) &= \\ &= 2 \mu \bar{e}_{xy}^b + 2 \mu L_{b2} \left( \bar{u}_{bx} \frac{\partial \bar{e}_{xy}^b}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\bar{\tau}_{yy}^b + L_{b1} \left( \bar{u}_{bx} \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}^b}{\partial x} \right) = 0. \quad (2.25)$$

Las ecuaciones anteriores tienen una solución que satisface lo siguiente:

$$\bar{\tau}_{xx}^a = \bar{\tau}_{xx}^a(y), \quad \bar{\tau}_{xy}^a = \bar{\tau}_{xy}^a(y), \quad \bar{\tau}_{xx}^b = \bar{\tau}_{xx}^b(y), \quad \bar{\tau}_{xy}^b = \bar{\tau}_{xy}^b(y),$$

$$\bar{p}_a = \bar{p}_a(x), \quad \bar{p}_b = \bar{p}_b(x), \quad \bar{\tau}_{yy}^a = 0, \quad \bar{\tau}_{yy}^b = 0. \quad (2.26)$$

Por lo que se tendrá:

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}_a}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}^a}{\partial y}, \quad (2.27)$$

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}_b}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}^b}{\partial y}, \quad (2.28)$$

$$\nabla^2 \bar{T}_a = M_a \bar{u}_{ax} \frac{\partial \bar{T}_a}{\partial x}, \quad (2.29)$$

$$\nabla^2 \bar{T}_b = \frac{M_a}{\xi} \bar{u}_{bx} \frac{\partial \bar{T}_b}{\partial x}. \quad (2.30)$$

De las ecuaciones constitutivas:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{xx}^a + L_{a1} \left( -2 \bar{\tau}_{xy}^a \frac{\partial \bar{u}_{ax}}{\partial y} \right) &= \\ &= -2 L_{a2} \left( 2 \bar{e}_{xy}^a \frac{\partial \bar{u}_{ax}}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{xy}^a + L_{a1} \left( -\bar{\tau}_{yy}^a \frac{\partial \bar{u}_{ax}}{\partial y} \right) &= \\ = 2 \bar{e}_{xy}^a + 2 L_{a2} \left( \bar{u}_{ax} \frac{\partial \bar{e}_{xy}^a}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\bar{\tau}_{yy}^a = 0, \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{xx}^b + L_{b1} \left( -2 \bar{\tau}_{xy}^b \frac{\partial \bar{u}_{bx}}{\partial y} \right) &= \\ = -2 \mu L_{b2} \left( 2 \bar{e}_{xy}^b \frac{\partial \bar{u}_{bx}}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{xy}^b + L_{b1} \left( -\bar{\tau}_{yy}^b \frac{\partial \bar{u}_{bx}}{\partial y} \right) &= \\ = 2 \mu \bar{e}_{xy}^b + 2 \mu L_{b2} \left( \bar{u}_{bx} \frac{\partial \bar{e}_{xy}^b}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\bar{\tau}_{yy}^b = 0. \quad (2.36)$$

Las condiciones de frontera que debe cumplir el sistema se expresan como sigue:

Los esfuerzos en la superficie libre y en la entrecara de los dos líquidos son sólo tangenciales para el flujo principal. Estos esfuerzos son debidos a gradientes de tensión superficial

producidos a su vez por gradientes de temperatura horizontales aplicados. Los esfuerzos adimensionales para una pequeña deformación superficial toman la forma:

$$\sigma_{ij}^a n_j = (S_a R_a^{-1} - T_a) k(\eta_a) n_i - \bar{t}_i \left( \bar{t}_k \frac{\partial T_a}{\partial x_k} \right),$$

para la superficie libre en  $y = 1 + \eta_a(x, t)$ . (2.37)

$$(\sigma_{ij}^b - \sigma_{ij}^a) n_j = (\sigma_o S_a R_a^{-1} - \gamma T_a) k(\eta_a) n_i - \gamma \bar{t}_i \left( \bar{t}_k \frac{\partial T_a}{\partial x_k} \right),$$

para la entrecara en  $y = \eta_b(x, t)$ . (2.38)

Donde se han usado los números adimensionales:

$$S_a R_a^{-1} = \frac{\sigma_{ao}}{b \gamma_a d_a}, \quad \sigma_o = \frac{\sigma_{abo}}{\sigma_{ao}}, \quad \gamma = \frac{\gamma_{ab}}{\gamma_a}. \quad (2.39)$$

También a partir de la geometría diferencial el vector normal y el vector tangencial en las superficies deformadas:

$$\bar{n} = (-\partial_x \eta, 1)/N, \quad \bar{t} = (1, \partial_x \eta)/N, \quad (2.40)$$

con

$$N = (1 + (\partial_x \eta)^2)^{1/2}. \quad (2.41)$$

La curvatura superficial es:

$$k(\eta) = \frac{\partial_x^2 \eta}{N}. \quad (2.42)$$

Las velocidades en la entrecara deben de ser continuas:

$$u_{ax}(\eta_b) = u_{bx}(\eta_b), \quad u_{ay}(\eta_b) = u_{by}(\eta_b). \quad (2.43)$$

Por no haber deslizamiento, las velocidades en la frontera con la pared rígida son nulas:

$$u_{bx}(-d) = 0, \quad u_{by}(-d) = 0. \quad (2.44)$$

En la superficie libre y en la entrecara las velocidades deben satisfacer la condición cinemática, la cual caracteriza el hecho de que una partícula de fluido que esté sobre la superficie,

se mantendrá en ella aunque ésta modifique su forma. Es decir:

$$\frac{\partial \eta_a}{\partial t} + u_{ax} \frac{\partial \eta_a}{\partial x} = u_{ay}, \quad \text{en } y = 1 + \eta_a(x, t) \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial \eta_b}{\partial t} + u_{bx} \frac{\partial \eta_b}{\partial x} = u_{by}, \quad \text{en } y = \eta_b(x, t) \quad (2.46)$$

Que son las llamadas condiciones cinemáticas para la superficie libre y la entrecara respectivamente.

Las condiciones térmicas exigen continuidad para las temperaturas y los flujos de calor dentro y en la superficie de las fronteras del sistema. Esto debe cumplirse en la superficie libre donde están en contacto el gas enrarecido y la capa de líquido superior, lo que lleva a:

$$-n_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} = E_a (T_a - T_\infty) + Q, \quad \text{en } y = 1 + \eta_a(x, t) \quad (2.47)$$

Donde Q es una constante por determinar, que depende de la solución que se encuentre para las temperaturas.

Las condiciones para la interface se dan por:

$$T_a = T_b, \quad \frac{\partial T_a}{\partial y} = \kappa \frac{\partial T_b}{\partial y}, \quad \text{en } y = \eta_b(x, t) \quad (2.48)$$

La pared del fondo se consideró aislante térmica, por eso:

$$\frac{\partial T_b}{\partial y} = 0, \quad \text{en } y = -d \quad (2.49)$$

La presencia de las paredes verticales muy alejadas de la región que se investiga, genera un contraflujo dentro de las capas. Este contraflujo se puede calcular suponiendo que el gasto total a través de una línea perpendicular a las superficies, es cero. Esto es, que la integral del perfil de velocidades en las dos capas debe anularse.

$$\int_{-d}^0 (u_{bx}) dy = 0, \quad \int_0^1 (u_{ax}) dy = 0 \quad (2.50)$$

Las condiciones de frontera mecánicas son:

Los esfuerzos tangenciales son debidos a gradientes de tensión superficial. Por ello se obtiene de (2.37) y (2.38) el balance de fuerzas:

$$\bar{\tau}_{xy}^a(1) = 1, \quad \bar{\tau}_{xy}^b(0) - \bar{\tau}_{xy}^a(0) = \gamma. \quad (2.51)$$

Las velocidades deben ser continuas en la entrecara:

$$U_a(0) = U_b(0). \quad (2.52)$$

siendo  $U_a$  y  $U_b$  las velocidades del flujo principal.

El liquido que está en contacto con la pared del fondo no se desliza:

$$U_b(-d) = 0. \quad (2.53)$$

Las condiciones de continuidad térmicas:

$$-\frac{\partial T_a}{\partial y} = Q, \quad \text{en } y = 1, \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial T_b}{\partial y} = 0, \quad \text{en } y = -d, \quad (2.55)$$

$$T_a = T_m, \quad \text{en } y = 1, \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial T_a}{\partial y} = \kappa \frac{\partial T_b}{\partial y}, \quad \text{en } y = 0, \quad (2.57)$$

Para el flujo principal las ecuaciones constitutivas serán:

$$\bar{\tau}_{xx}^a(y) = 2\Delta L \left( \frac{dU_a}{dy} \right)^2, \quad (2.58)$$

$$\bar{\tau}_{xy}^a(y) = \frac{dU_a}{dy}, \quad (2.59)$$

$$\bar{\tau}_{xx}^b(y) = 2\mu L \Delta L \left( \frac{dU_b}{dy} \right)^2, \quad (2.60)$$

$$\bar{\tau}_{xy}^a(y) = \mu \frac{dU_b}{dy} \quad (2.61)$$

Al considerar que los gradientes de presión son constantes, las derivadas de los esfuerzos serán constantes. Integrando (2.27) y (2.28) al tomar en cuenta las ecuaciones constitutivas, (2.58)-(2.61) y la condición de gasto nulo en cada capa, el perfil de velocidades queda dado por:

$$U_a(y) = \frac{U_a''}{2} y^2 - U_a'(0) y + U_a(0) \quad (2.62)$$

$$U_b(y) = \frac{U_b''}{2} y^2 + U_b'(0) y + U_b(0) \quad (2.63)$$

De las ecuaciones (2.29)-(2.30), (2.54)-(2.57) y al tomar en cuenta que:

$$\frac{\partial \bar{T}_a}{\partial x} = \frac{\partial \bar{T}_b}{\partial x} = -1 \quad (2.64)$$

se obtendrá el perfil de temperaturas:

$$\begin{aligned} \bar{T}_a(x, y) = & -x + \frac{H_a}{2(4\mu + 3d)} \left[ \frac{[6\mu + 3(\gamma + 1)d]}{12} (1 - y^4) + \right. \\ & \left. - \frac{2\mu + 3\gamma d}{3} (1 - y^3) + \frac{(2\gamma - 1)d}{2} (1 - y^2) \right] \quad (2.65) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_b(x, y) = & -x + \frac{H_a}{2(4\mu + 3d)} \left[ \frac{(\gamma - 1)d}{4} - \frac{\mu}{6} + \right. \\ & \left. - \frac{1}{\xi} \left( \frac{(2\gamma - 1)y^4}{4d} + \frac{2(2\gamma - 1)y^3}{3} + \frac{d(2\gamma - 1)y^2}{2} \right) \right] \quad (2.66) \end{aligned}$$

$$\text{Con } Q = 0 \quad (2.67)$$

Donde se han definido los coeficientes:

$$U_a'' = \frac{[6\mu + 3d(\gamma + 1)]}{4\mu + 3d} \quad (2.68)$$

$$U_a'(0) = \frac{(2\mu + 3\gamma d)}{4\mu + 3d} \quad (2.69)$$

$$U_b(0) = \left[ \frac{(2\gamma - 1)}{2(4\mu + 3d)} \right] d = U_b(0) \quad (2.70)$$

$$U_b'' = \frac{3(2\gamma - 1)}{2d(4\mu + 3d)} \quad (2.71)$$

$$U_b'(0) = \frac{2(2\gamma - 1)}{4\mu + 3d} \quad (2.72)$$

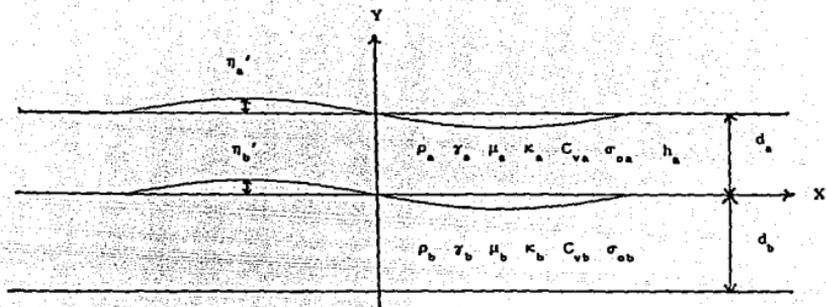
En la fig.(2.3) se muestra un perfil de velocidades en el caso del flujo principal. La gráfica está hecha para un cociente de espesores correspondiente a  $d=0.1$  y para  $\gamma=0.9$ . La fig.(2.4) muestra el perfil de temperaturas que se genera como resultado del perfil de velocidades de la gráfica anterior. Aquí el perfil de temperaturas está comparado con el punto superficial en  $x=0$ . Este caso es para  $\gamma = 0.9$ .

Se encontró que para un valor de  $\gamma = 0.5$ , la capa inferior deja de moverse a consecuencia de que los esfuerzos sobre ésta generados por el contraflujo del fluido superior en la entrecara, cancelan a los esfuerzos generados por gradiente de tensión superficial en esa zona. En la fig.(2.5) se observan los campos de velocidades para  $\gamma = 0.5$  en tres espesores distintos de la capa inferior. Los perfiles de temperatura para éstos flujos se

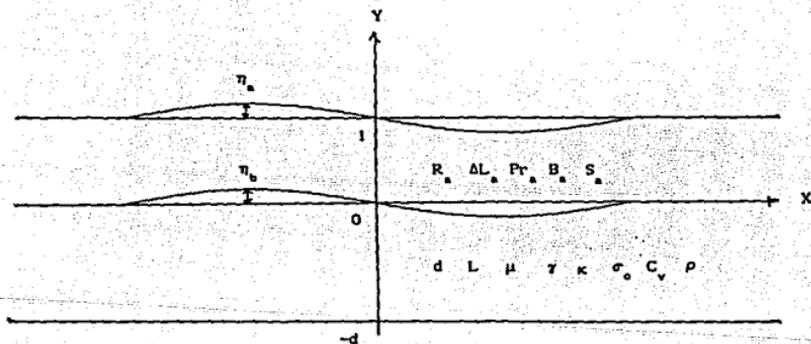
obtienen en la fig.(2.6)) también evaluados en el punto  $x = 0$ .

En las figuras (2.7)-(2.8) se dan los perfiles de velocidad y de temperatura cuando  $\gamma = 0.1$ . En este caso se observa que el contraflujo de la capa superior aplica esfuerzos sobre la entrecara de tal manera que superan a los esfuerzos generados por el gradiente de tensión superficial. Ello hace que la velocidad de la entrecara tenga un sentido contrario la de la superficie libre formándose como consecuencia dos celdas de movimiento del fluido ya que el líquido que se mueve hacia la región fría tiene que regresar por la capa en que estaba.

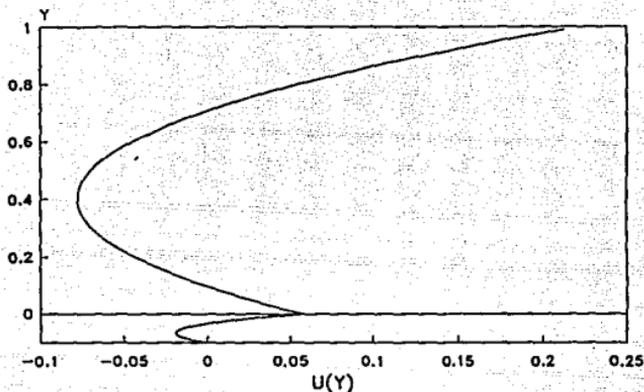
En los casos anteriores ( $\gamma=0.9$ ,  $\gamma=0.5$ ,  $\gamma=0.1$ ) se forman tres perfiles de velocidades completamente distintos. Para el caso en que  $\gamma=0.9$ , se tienen tres celdas de movimiento de las dos capas. Con  $\gamma=0.5$  hay una celda y para  $\gamma=0.1$  existen dos. Este cambio en el número de celdas puede modificar la forma en que el sistema llega a ser inestable.



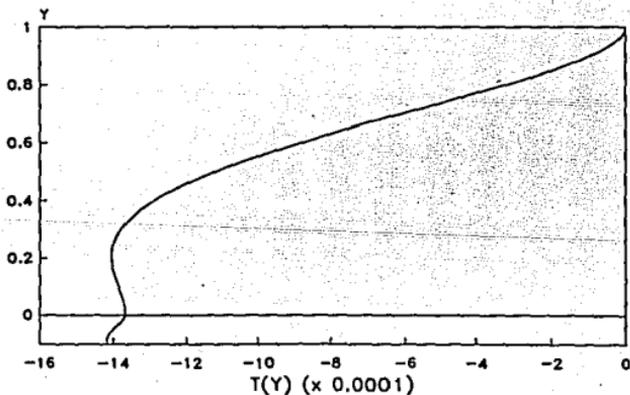
Figura(2.1). Variables geométricas y constantes físicas que describen a cada capa de fluido en el sistema bidimensional en estudio.



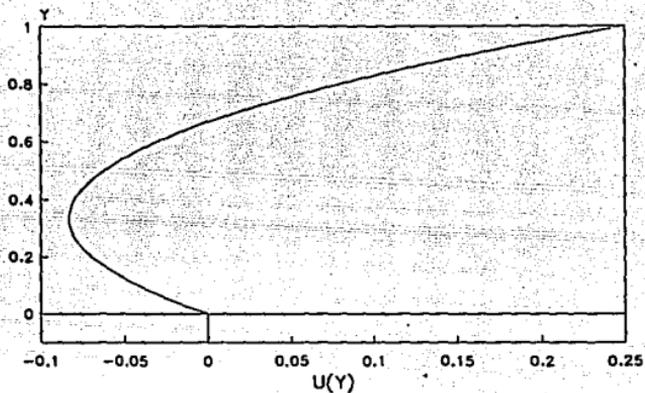
Figura(2.2). Parámetros adimensionales que describen el sistema de dos capas de fluidos viscoelásticos equivalente.



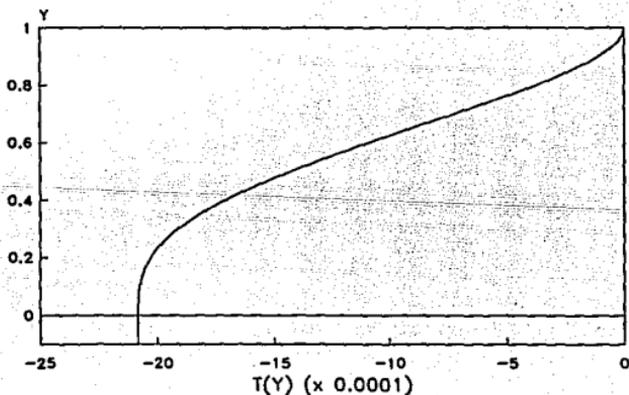
Figura(2.3). Perfiles de velocidad en cada capa para el flujo básico con:  $d=0.1$ ,  $\gamma=0.9$ .



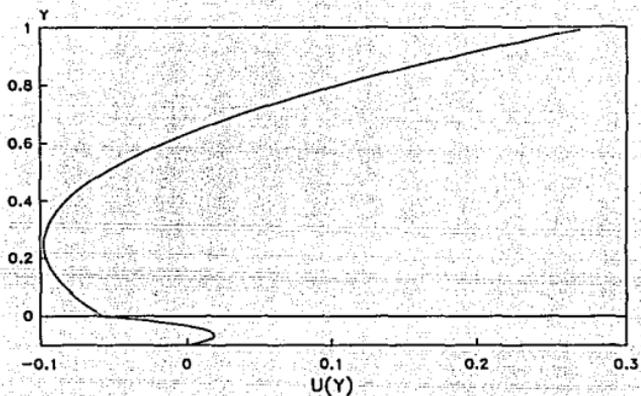
Figura(2.4). Distribución de temperaturas en el punto  $x = 0$  para la solución que corresponde al caso representado por la figura(2.3).  $M_a = \kappa = d = C_v = 0.1$ ,  $\gamma=0.9$ .



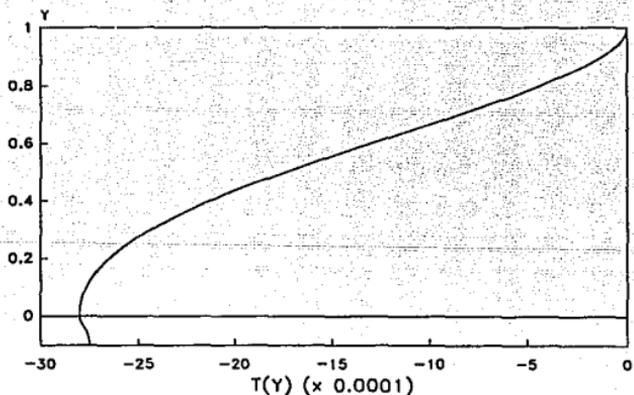
Figura(2.5). Perfil de velocidades de la capa superior para el caso de reposo en la capa inferior.  $d=0.1$ ,  $\gamma = 0.5$ .



Figura(2.6). Distribución de temperaturas en el punto  $x = 0$  para el caso representado por la Figura(2.5).  $Ma = \kappa = d = C_v = 0.1$ .  $\gamma = 0.5$ .



Figura(2.7). Perfil de velocidades para las dos capas en  $d=0.1$ ,  $\gamma = 0.1$ .



Figura(2.8). Distribución de temperaturas en el caso representado por la figura(2.7).  $M_a = \kappa = d = C_v = 0.1$ ,  $\gamma = 0.1$ .

### CAPITULO III.

#### ECUACIONES PERTURBADAS LINEALES Y EL PROBLEMA DE VALORES PROPIOS

##### 3.1-ECUACIONES HIDRODINAMICAS Y CONSTITUTIVAS PERTURBADAS

Para obtener las ecuaciones lineales perturbadas del sistema, se someten todas las variables que lo caracterizan al efecto de una variación infinitesimal y se sustituyen en las ecuaciones hidrodinámicas, así:

$$u_{ik} = \bar{u}_{ik} + u'_{ik} , \quad (3.1)$$

$$p_i = \bar{p}_i + p'_i , \quad (3.2)$$

$$\tau_{km}^i = \bar{\tau}_{km}^i + \tau'_{km}{}^i , \quad (3.3)$$

$$T_i = \bar{T}_i + T'_i , \quad (3.4)$$

$$\eta_i = \eta'_i , \quad (3.5)$$

Donde  $i = a, b$ ;  $k, m = x, y$ .  $\eta_i$  son las deformaciones de la superficie libre y la entrecara.

Al sustituir las variables perturbadas en las ecuaciones de movimiento y despreciar los términos que contienen productos de perturbaciones:

$$R_a \left( \frac{\partial u'_a}{\partial t} + U_a \frac{\partial u'_a}{\partial x} + u'_{ay} \frac{\partial U_a}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p'_a}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xx}{}^a}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}{}^a}{\partial y} , \quad (3.6)$$

$$R_a \left( \frac{\partial u'_a}{\partial t} + U_a \frac{\partial u'_a}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p'_a}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{yx}{}^a}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{yy}{}^a}{\partial y} , \quad (3.7)$$

$$\rho R_a \left( \frac{\partial u'_{bx}}{\partial t} + U_b \frac{\partial u'_{bx}}{\partial x} + u'_{by} \frac{\partial U_b}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p'_b}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xx^b}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy^b}}{\partial y} \quad (3.8)$$

$$\rho R_a \left( \frac{\partial u'_{by}}{\partial t} + U_b \frac{\partial u'_{by}}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p'_b}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{yx^b}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{yy^b}}{\partial y} \quad (3.9)$$

De las ecuaciones de la energía:

$$M_a \left( \frac{\partial T'_a}{\partial t} + U_a \frac{\partial T'_a}{\partial x} + u'_{ax} \frac{\partial \bar{T}'_a}{\partial x} + u'_{ay} \frac{\partial \bar{T}'_a}{\partial y} \right) = \nabla^2 T'_a \quad (3.10)$$

$$\frac{M_a}{\xi} \left( \frac{\partial T'_b}{\partial t} + U_b \frac{\partial T'_b}{\partial x} + u'_{bx} \frac{\partial \bar{T}'_b}{\partial x} + u'_{by} \frac{\partial \bar{T}'_b}{\partial y} \right) = \nabla^2 T'_b \quad (3.11)$$

Se tendrá también de las ecuaciones constitutivas:

$$\begin{aligned} \tau'_{xx^a} + L_{a1} \left[ \partial_t \tau'_{xx^a} + U_a \partial_x \tau'_{xx^a} + u'_{ay} \partial_y \tau'_{xx^a} - 2 \left( \partial_x u'_{ax} \tau'_{xx^a} + \right. \right. \\ \left. \left. + \partial_y u'_{ax} \tau'_{xy^a} + d_y U_a \tau'_{xy^a} \right) \right] = 2\beta_x u'_{ax} + 2L_{a2} \left[ \partial_t \partial_x u'_{ax} + \right. \\ \left. + U_a \partial_y u'_{ax} - d_y U_a \left( 2\beta_y u'_{ax} - \beta_x u'_{ay} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \tau'_{xy^a} + L_{a1} \left[ \partial_t \tau'_{xy^a} + U_a \partial_x \tau'_{xy^a} + u'_{ay} \partial_y \tau'_{xy^a} - \beta_x u'_{ay} \tau'_{xx^a} + \right. \\ \left. - d_y U_a \tau'_{yy^a} \right] = \beta_y u'_{ax} + \beta_x u'_{ay} + L_{a2} \left[ \partial_t \left( \partial_y u'_{ax} - \beta_x u'_{ay} \right) + \right. \\ \left. + d_y^2 U_a u'_{ay} + 2U_a \partial_x \left( \beta_y u'_{ax} + \beta_x u'_{ay} \right) + d_y U_a \partial_x u'_{ax} \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \tau_{yy}^a + L_{a1} \left[ \partial_t \tau_{yy}^a + U_a \partial_x \tau_{yy}^a - 2\partial_x u_{ay}' \tau_{xy}^a \right] = \\ = + 2\partial_y u_{ay}' + 2L_{a2} \left[ + \partial_t \partial_y u_{ay}' + U_a \partial_x \partial_y u_{ay}' - d_y U_a \partial_x u_{ay}' \right], \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xx}^b + L_{b1} \left[ \partial_t \tau_{xx}^b + U_b \partial_x \tau_{xx}^b + u_{by}' \partial_y \tau_{xx}^b - 2(\partial_x u_{bx}' \tau_{xx}^b + \right. \\ \left. + \partial_y u_{bx}' \tau_{xy}^b + d_y U_b \tau_{xy}^b) \right] = 2\mu \partial_x u_{bx}' + 2\mu L_{b2} \left[ \partial_t \partial_x u_{bx}' + \right. \\ \left. + U_b \partial_x u_{bx}' - d_y U_b (\partial_y u_{bx}' - \partial_x u_{by}') \right], \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^b + L_{b1} \left[ \partial_t \tau_{xy}^b + U_b \partial_x \tau_{xy}^b + u_{by}' \partial_y \tau_{xy}^b - \partial_x u_{by}' \tau_{xx}^b + \right. \\ \left. - d_y U_b \tau_{yy}^b \right] = -\mu \partial_y u_{bx}' + \mu \partial_x u_{by}' + 2\mu L_{b2} \left[ \partial_t (\partial_y u_{bx}' + \partial_x u_{by}') + \right. \\ \left. + d_y^2 U_b u_{by}' + 2U_b \partial_x (\partial_y u_{bx}' + \partial_x u_{by}') + d_y U_b \partial_x u_{bx}' \right], \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \tau_{yy}^b + L_{b1} \left[ \partial_t \tau_{yy}^b + U_b \partial_x \tau_{yy}^b - 2\partial_x u_{by}' \tau_{xy}^b \right] = \\ = + 2\mu \partial_y u_{by}' + 2\mu L_{b2} \left[ \partial_t \partial_y u_{by}' + U_b \partial_x \partial_y u_{by}' - d_y U_b \partial_x u_{by}' \right]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

### 3.2-PERTURBACION DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA

Ya que las condiciones de frontera en la superficie libre y

la entrecara se encuentran evaluadas en  $1 + \eta_a(x, t)$  y en  $\eta_b(x, t)$ , se hace un desarrollo en series de Taylor alrededor de uno y cero respectivamente. Para el balance de esfuerzos en la superficie libre, ecuación (2.37) se tienen:

Los esfuerzos normales:

$$\left( \sigma_{1j} + \eta_a \frac{\partial \sigma_{1j}^a}{\partial y} \right) n_1 n_j = \left( S_a R_a^{-1} - T_a - \eta_a \frac{\partial T_a}{\partial y} \right) \delta_x^2 \eta_a / N,$$

en  $y = 1$ , (3.19)

y para los esfuerzos tangenciales:

$$\left( \sigma_{1j} + \eta_a \frac{\partial \sigma_{1j}^a}{\partial y} \right) n_1 t_j = - t_k \frac{\partial T_a}{\partial x_k} - \eta_a t_k \frac{\partial^2 T_a}{\partial y \partial x_k},$$

en  $y = 1$ . (3.20)

Los esfuerzos normales para la entrecara de (2.38):

$$\left( \sigma_{1j}^b + \eta_b \frac{\partial \sigma_{1j}^b}{\partial y} - \sigma_{1j}^a - \eta_b \frac{\partial \sigma_{1j}^a}{\partial y} \right) n_1 n_j =$$

$$= \left( \sigma_a S_a R_a^{-1} - \gamma T_b - \gamma \eta_b \frac{\partial T_b}{\partial y} \right) \delta_x^2 \eta_b / N,$$

en  $y = 0$ . (3.21)

Para los esfuerzos tangenciales:

$$\left( \sigma_{1j}^b + \eta_b \frac{\partial \sigma_{1j}^b}{\partial y} - \sigma_{1j}^a - \eta_b \frac{\partial \sigma_{1j}^a}{\partial y} \right) n_1 t_j =$$

$$= - \gamma t_k \frac{\partial T_b}{\partial x_k} - \gamma t_k \eta_b \frac{\partial^2 T_b}{\partial y \partial x_k},$$

en  $y = 0$ . (3.22)

Al perturbar las ecuaciones (3.19)-(3.22) y tomar en cuenta las ecuaciones del flujo principal, se obtienen las siguientes expresiones perturbadas y lineales de los esfuerzos normales en la superficie libre:

$$\sigma_{ij}^a N_j T_i = (S_a R_a^{-1} - \bar{T}_a) \partial_x^2 \eta_a' + 2 \partial_x \eta_a' \bar{\tau}_{xy}^a,$$

en  $y = 1$ ,

(3.23)

y las ecuaciones perturbadas lineales, del balance en los esfuerzos tangenciales:

$$\sigma_{ij}^a N_j T_i = -\eta_a' \frac{d^2 U_a}{dy^2} + \partial_x \eta_a' \left( \bar{\tau}_{xx} - \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) - \frac{\partial T}{\partial x},$$

en  $y = 1$ .

(3.24)

Ecuaciones perturbadas del balance de esfuerzos normales en la entrecara:

$$(\sigma_{ij}^b - \sigma_{ij}^a) N_j T_i = (\sigma_a S_a R_a^{-1} - \gamma \bar{T}_b) \partial_x^2 \eta_b' +$$

$$+ 2 (\bar{\tau}_{xy}^b - \bar{\tau}_{xy}^a) \partial_x \eta_a',$$

en  $y = 0$ ,

(3.25)

y las correspondientes para el balance de esfuerzos tangenciales:

$$(\sigma_{ij}^b - \sigma_{ij}^a) N_j T_i = \partial_x \eta_b' (\bar{\tau}_{xx}^b - \bar{\tau}_{xx}^a - \gamma \partial_y \bar{T}_b) +$$

$$- \gamma \partial_x \bar{T}_b - \eta_b' (\partial_y \bar{\tau}_{xy}^b - \partial_y \bar{\tau}_{xy}^a),$$

en  $y = 0$ .

(3.26)

Obsérvese que en las ecuaciones (3.23) y (3.25), al evaluarlas en algún punto sobre la coordenada "y", quedan explícitamente en función de la coordenada "x", ello impide usar modos normales ya que no se puede usar el método de separación de variables.

Para evitar ese obstáculo se utiliza el hecho de que los números de Weber  $S_1$  son muy grandes en la mayoría de los líquidos estudiados y por ende el producto algebraico de cada uno de ellos con el número de Reynolds, es lo suficientemente grande para

considerar que el término que lo incluya domina los otros para los cambios de la perturbación a lo largo de una longitud de onda característica [12] y [13], es decir:

$$S_a R_a^{-1} \gg \lambda = \frac{2\pi}{\alpha}, \quad \rightarrow \quad \frac{2\pi R_a}{\alpha S_a} \ll 1, \quad (3.27)$$

donde  $\alpha$  es el número de onda asociado a la perturbación.

Lo anterior nos indica que podemos utilizar la aproximación:

$$S_a R_a^{-1} - \bar{T}_a \rightarrow S_a R_a^{-1}, \quad (3.28)$$

$$\sigma_o S_a R_a^{-1} - \gamma \bar{T}_b \rightarrow \sigma_o S_a R_a^{-1}. \quad (3.29)$$

Debido a esto, no aparecerán los efectos de los cambios de tensión superficial con la temperatura en la condición de esfuerzos normales. Sin embargo se puede hacer que no desaparezcan al derivar e integrar el lado derecho de las ecuaciones (3.23) y (3.25), [13]:

$$(S_a R_a^{-1} - \bar{T}_a) \partial_x^3 \eta_a' - \partial_x^2 \eta_a' \frac{\partial \bar{T}_a}{\partial x} + 2 \partial_x^2 \eta_a' \frac{dU_a}{dy}(1),$$

$$(\sigma_o S_a R_a^{-1} - \gamma \bar{T}_b) \partial_x^3 \eta_b' - \gamma \partial_x^2 \eta_b' \frac{\partial \bar{T}_b}{\partial x} + \partial_x^2 \eta_b' (2\bar{\tau}_{xy}^b(1) - \bar{\tau}_{xy}^a(1)),$$

Enseguida se integra y usan las ecuaciones (3.28)-(3.29) para generar el siguiente resultado en los esfuerzos normales de la superficie libre:

$$\sigma_{ij}^a N_j N_i = S_a R_a^{-1} \partial_x^2 \eta_a' + \partial_x \eta_a' \left( 2\bar{\tau}_{xy}^a(1) - \frac{\partial \bar{T}_a}{\partial x} \right),$$

en  $y = 1$ , (3.30)

y en la entrecara:

$$\begin{aligned} (\sigma_{1j}^b - \sigma_{1j}^a) N_j N_1 = \sigma_a S_a R_a^{-1} \delta_x^2 \eta_b' + \\ + (2\bar{\tau}_{xy}^b(0) - 2\bar{\tau}_{xy}^a(0) - \gamma \delta_x \bar{T}_b) \delta_x \eta_a', \end{aligned}$$

en  $y = 0$ . (3.31)

De la continuidad de las velocidades en la entrecara (2.41), se tiene, para la componente horizontal:

$$\begin{aligned} u_{ax}' - u_{bx}' + \eta_b' \left( \frac{dU_a}{dy} - \frac{dU_b}{dy} \right) = 0, \\ \text{en } y = 0, \end{aligned}$$

(3.32)

y para la componente vertical:

$$u_{ay}' - u_{by}' = 0, \quad \text{en } y = 0. \quad (3.33)$$

La condición de adherencia en la pared:

$$u_{bx}'(-d) = 0, \quad \text{en } y = -d, \quad (3.34)$$

y la condición de impenetrabilidad en las paredes:

$$u_{by}'(-d) = 0, \quad \text{en } y = -d. \quad (3.35)$$

Las condiciones cinemáticas son, de la ecuación (2.43) para la superficie libre:

$$\delta_t \eta_a' + U_a(1) \delta_x \eta_a' = u_{ay}', \quad \text{en } y = 1, \quad (3.36a)$$

y en la entrecara:

$$\delta_t \eta_b' + U_b(0) \delta_x \eta_b' = u_{by}', \quad \text{en } y = 0. \quad (3.36b)$$

Las condiciones térmicas de balance de flujo de calor en la superficie libre, (2.45):

$$\frac{\partial T'_a}{\partial y} + B_a T'_a = \partial_x \eta'_a \frac{\partial \bar{T}_a}{\partial x} - \eta'_a \left( \frac{\partial^2 \bar{T}_a}{\partial y^2} + B_a \frac{\partial \bar{T}_a}{\partial y} \right),$$

$$\text{en } y = 1, \quad (3.37)$$

y de la ecuación (2.46), para el balance de flujo de calor en la entrecara es:

$$\partial_y T'_a - \kappa \partial_y T'_b + \eta'_b \left( \partial_y^2 \bar{T}_a - \kappa \partial_y^2 \bar{T}_b \right) = 0,$$

$$\text{en } y = 0. \quad (3.38)$$

De la ecuación (2.46), la continuidad de las temperaturas en la entrecara es:

$$T'_a - T'_b + \eta'_b \left( \partial_y \bar{T}_a - \partial_y \bar{T}_b \right) = 0,$$

$$\text{en } y = 0. \quad (3.39)$$

La condición de aislamiento térmico en la pared está dada por:

$$\frac{\partial T'_b}{\partial y} = 0, \quad \text{en } y = -d. \quad (3.40)$$

### 3.3-ECUACIONES LINEALES PERTURBADAS.

Suponiendo que las perturbaciones de las velocidades se expresan en términos de una función de corriente:

$$u'_{ax} = \frac{\partial \psi_a}{\partial y}, \quad u'_{ay} = -\frac{\partial \psi_a}{\partial x}. \quad (3.38)$$

$$u'_{bx} = \frac{\partial \psi_b}{\partial y}, \quad u'_{by} = -\frac{\partial \psi_b}{\partial x}. \quad (3.39)$$

Para las ecuaciones de movimiento se obtendrá.

$$\text{Ra} \left( \partial_t \partial_y \Psi_a + U_a \partial_y \partial_x \Psi_a - \partial_x \Psi_a d U_a \right) = - \partial_x p_a' + \partial_x \tau_{xx}^a + \partial_y \tau_{xy}^a, \quad (3.40)$$

$$\text{Ra} \left( - \partial_t \partial_x \Psi_a - U_a \partial_x^2 \Psi_a \right) = - \partial_y p_a' + \partial_x \tau_{xy}^a + \partial_y \tau_{yy}^a, \quad (3.41)$$

$$\rho \text{Ra} \left( \partial_t \partial_y \Psi_b + U_b \partial_y \partial_x \Psi_b - \partial_x \Psi_b d U_b \right) = - \partial_x p_b' + \partial_x \tau_{xx}^b + \partial_y \tau_{xy}^b, \quad (3.42)$$

$$\rho \text{Ra} \left( - \partial_t \partial_x \Psi_b - U_b \partial_x^2 \Psi_b \right) = - \partial_y p_b' + \partial_x \tau_{xy}^b + \partial_y \tau_{yy}^b. \quad (3.43)$$

De las ecuaciones de la energía (3.10)-(3.11):

$$M_a \left( \partial_t T_a' + U_a \partial_x T_a' + \partial_y \Psi_a \partial_x \bar{T}_a - \partial_x \Psi_a \partial_y \bar{T}_a \right) = \nabla^2 T_a', \quad (3.44)$$

$$\frac{M_b}{\xi} \left( \partial_t T_b' + U_b \partial_x T_b' + \partial_y \Psi_b \partial_x \bar{T}_b - \partial_x \Psi_b \partial_y \bar{T}_b \right) = \nabla^2 T_b'. \quad (3.45)$$

Para las ecuaciones de estado ó constitutivas, se obtiene:

$$\begin{aligned} \tau_{xx}^a + L_{a1} \left[ \partial_t \tau_{xx}^a + U_a \partial_x \tau_{xx}^a - \partial_x \Psi_a \partial_y \bar{\tau}_{xx}^a - 2 \left( \bar{\tau}_{xx}^a \partial_x \Psi_a + \right. \right. \\ \left. \left. + \bar{\tau}_{xy}^a \partial_y^2 \Psi_a + d_y U_a \tau_{xy}^a \right) \right] = 2 \partial_x \partial_y \Psi_a + 2L_{a2} \left[ \partial_t \partial_x \partial_y \Psi_a + \right. \\ \left. + U_a \partial_x^2 \partial_y \Psi_a - d_y U_a \left( 2 \partial_y^2 \Psi_a - \partial_x^2 \Psi_a \right) \right], \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned}
& \tau_{xy}^a + L_{a1} \left[ \partial_t \tau_{xy}^a + U_a \partial_x \tau_{xy}^a - \partial_x \psi_a \partial_y \bar{\tau}_{xy}^a + \bar{\tau}_{xx}^a \partial_x^2 \psi_a + \right. \\
& \left. - d_y U_a \tau_{yy}^a \right] = \partial_y^2 \psi_a - \partial_x^2 \psi_a + L_{a2} \left[ \partial_t (\partial_y^2 \psi_a - \partial_x^2 \psi_a) + \right. \\
& \left. + 2U_a \partial_x (\partial_y^2 \psi_a - \partial_x^2 \psi_a) + 2d_y U_a \partial_x \partial_y \psi_a - \partial_x \psi_a d_y^2 U_a \right], \quad (3.47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \tau_{yy}^a + L_{a1} \left[ \partial_t \tau_{yy}^a + U_a \partial_x \tau_{yy}^a + 2\bar{\tau}_{xy}^a \partial_x^2 \psi_a \right] = \\
& = -2\partial_x \partial_y \psi_a + 2L_{a2} \left[ -\partial_t \partial_x \partial_y \psi_a - U_a \partial_x^2 \partial_y \psi_a + d_y U_a \partial_x^2 \psi_a \right], \quad (3.48)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \tau_{xx}^b + L_{b1} \left[ \partial_t \tau_{xx}^b + U_b \partial_x \tau_{xx}^b - \partial_x \psi_b \partial_y \bar{\tau}_{xx}^b - 2(\bar{\tau}_{xx}^b \partial_x \partial_y \psi_b + \right. \\
& \left. + \bar{\tau}_{xy}^b \partial_y^2 \psi_b + d_y U_b \tau_{xy}^b) \right] = 2\mu \partial_x \partial_y \psi_b + 2\mu L_{b2} \left[ \partial_t \partial_x \partial_y \psi_b + \right. \\
& \left. + U_b \partial_x^2 \partial_y \psi_b - d_y U_b (\partial_y^2 \psi_b - \partial_x^2 \psi_b) \right], \quad (3.49)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \tau_{xy}^b + L_{b1} \left[ \partial_t \tau_{xy}^b + U_b \partial_x \tau_{xy}^b - \partial_x \psi_b \partial_y \bar{\tau}_{xy}^b + \bar{\tau}_{xx}^b \partial_x^2 \psi_b + \right. \\
& \left. - d_y U_b \tau_{yy}^b \right] = \mu \partial_y^2 \psi_b - \mu \partial_x^2 \psi_b + \mu L_{b2} \left[ \partial_t (\partial_y^2 \psi_b - \partial_x^2 \psi_b) + \right. \\
& \left. + 2U_b \partial_x (\partial_y^2 \psi_b - \partial_x^2 \psi_b) + 2d_y U_b \partial_x \partial_y \psi_b - \partial_x \psi_b d_y^2 U_b \right], \quad (3.50)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \tau_{yy}^b + L_{b1} \left[ \partial_t \tau_{yy}^b + U_b \partial_x \tau_{yy}^b + 2\bar{\tau}_{xy}^b \partial_x^2 \Psi_b \right] = \\ & = -2\mu \partial_x \partial_y \Psi_b + 2\mu L_{b2} \left[ -\partial_t \partial_x \partial_y \Psi_b - U_b \partial_x^2 \partial_y \Psi_b + d_y U_b \partial_x^2 \Psi_b \right]. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Las condiciones de los esfuerzos normales en la superficie libre son:

$$\begin{aligned} \sigma_{1j}^a N_j N_i &= S_a R_a^{-1} \partial_x^2 \eta_a' + \partial_x \eta_a' (2\bar{\tau}_{xy}^a(1) - \partial_x \bar{T}_a), \\ \text{en } y &= 1, \end{aligned} \quad (3.5)$$

y los esfuerzos tangenciales en la superficie libre:

$$\begin{aligned} \sigma_{1j}^a N_j T_i &= -\eta_a' d_y^2 U_a + \partial_x \eta_a' (\bar{\tau}_{xx}^a - \partial_y \bar{T}_a) - \partial_x T_a', \\ \text{en } y &= 1. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Los esfuerzos normales en la entrecara son:

$$\begin{aligned} (\sigma_{1j}^b - \sigma_{1j}^a) N_j N_i &= \sigma_o S_a R_a^{-1} \partial_x^2 \eta_b' + \\ & + (2\bar{\tau}_{xy}^b(0) - 2\bar{\tau}_{xy}^a(0) - \gamma \partial_x \bar{T}_b) \partial_x \eta_b', \\ \text{en } y &= 0. \end{aligned} \quad (3.54)$$

y los esfuerzos tangenciales en la entrecara son:

$$\begin{aligned} (\sigma_{1j}^b - \sigma_{1j}^a) N_j T_i &= \partial_x \eta_b' (\bar{\tau}_{xx}^b - \bar{\tau}_{xx}^a - \gamma \partial_y \bar{T}_b) + \\ & - \gamma \partial_x T_b' - \eta_b' (\partial_y \bar{\tau}_{xy}^b - \partial_y \bar{\tau}_{xy}^a), \\ \text{en } y &= 0. \end{aligned} \quad (3.55)$$

La continuidad de velocidades en la entrecara implica:

$$\begin{aligned} \partial_y \Psi_a - \partial_y \Psi_b + \eta_b' \left( \frac{dU_a}{dy} - \frac{dU_b}{dy} \right) &= 0, \\ \text{en } y &= 0, \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\partial_x \Psi_b - \partial_x \Psi_a = 0, \quad \text{en } y = 0, \quad (3.57)$$

y la condición de no deslizamiento en la pared:

$$\partial_y \Psi_b = 0, \quad \text{en } y = -d, \quad (3.58)$$

junto con la condición de impenetrabilidad en la pared:

$$\partial_x \Psi_b = 0, \quad \text{en } y = -d. \quad (3.59)$$

Las condiciones cinemáticas se expresan como:

$$\partial_t \eta_a' + U_a(1) \partial_x \eta_a' = - \partial_x \Psi_a, \quad \text{en } y = 1, \quad (3.60)$$

$$\partial_t \eta_b' + U_b(0) \partial_x \eta_b' = - \partial_x \Psi_b, \quad \text{en } y = 0. \quad (3.61)$$

La condición de balance en flujo de calor para la superficie libre es:

$$\partial_y T_a' + B_a T_a' = \partial_x \eta_a' \partial_x \bar{T}_a - \eta_a' ( \partial_y^2 \bar{T}_a + B_a \partial_y \bar{T}_a ),$$

$$\text{en } y = 1, \quad (3.62)$$

y el balance de flujo de calor en la entrecara está dado por:

$$\partial_y T_a' - \kappa \partial_y T_b' + \eta_b' ( \partial_y^2 \bar{T}_a - \kappa \partial_y^2 \bar{T}_b ) = 0,$$

$$\text{en } y = 0. \quad (3.63)$$

La continuidad de las temperaturas en la entrecara se expresa como:

$$T_a' - T_b' + \eta_b' ( \partial_y \bar{T}_a - \partial_y \bar{T}_b ) = 0,$$

$$\text{en } y = 0. \quad (3.64)$$

y la condición de aislamiento térmico en las paredes:

$$\frac{\partial T_b'}{\partial y} = 0, \quad \text{en } y = -d. \quad (3.65)$$

### 3.4-SOLUCIONES EN MODOS NORMALES

Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (3.40)-(3.65) se proponen soluciones de las perturbaciones en términos de funciones de onda planas de tal manera que sus amplitudes sean funciones sólo de la coordenada "y". Esto se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & (\Psi_a, P_a', T_a', \tau_{xx}^a, \tau_{xy}^a, \tau_{yy}^a, \eta_a') = \\ & = (\phi_a(y), \pi_a(y), \phi_a(y), F_{a1}(y), F_{a2}(y), F_{a3}(y), \eta_a') \exp \{ i\alpha [x - ct] \}, \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} & (\Psi_b, P_b', T_b', \tau_{xx}^b, \tau_{xy}^b, \tau_{yy}^b, \eta_b') = \\ & = (\phi_b(y), \pi_b(y), \phi_b(y), F_{b1}(y), F_{b2}(y), F_{b3}(y), \eta_b') \exp \{ i\alpha [x - ct] \}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

En adelante, nótese que las primas serán usadas para indicar derivadas con respecto a "y" y no se usarán para indicar perturbación de las variables.

Sustituyendo (3.66) y (3.67) en las ecuaciones de movimiento (3.40)-(3.43) se obtiene:

$$i\alpha R_a (\phi_a' [U_a - c] - U_a' \phi_a) = -i\alpha \pi_a + i\alpha F_{a1} + F_{a2}', \quad (3.67)$$

$$\alpha^2 R_a (\phi_a [U_a - c]) = -\pi_a' + i\alpha F_{a2} + F_{a3}', \quad (3.68)$$

$$i\alpha R_b (\phi_b' [U_b - c] - U_b' \phi_b) = -i\alpha \pi_b + i\alpha F_{b1} + F_{b2}', \quad (3.69)$$

$$\alpha^2 R_b (\phi_b [U_b - c]) = -\pi_b' + i\alpha F_{b2} + F_{b3}'. \quad (3.70)$$

Al derivar (3.67) y (3.69) se procede a eliminar la amplitud de la presión de (3.67)-(3.70). Se tendrá:

$$\begin{aligned} i\alpha R_a ( [U_a - c] \cdot [\phi_a'' - \alpha^2 \phi_a] - U_a'' ) = i\alpha F_{a1}' + F_{a2}'' + \alpha^2 F_{a2} + \\ - i\alpha F_{a3} . \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} i\alpha R_b ( [U_b - c] \cdot [\phi_b'' - \alpha^2 \phi_b] - U_b'' ) = i\alpha F_{b1}' + F_{b2}'' + \alpha^2 F_{b2} + \\ - i\alpha F_{b3} . \end{aligned} \quad (3.72)$$

De las ecuaciones de balance de energía (3.44)-(3.45) y (3.66)-(3.67):

$$M_a ( i\alpha [U_a - c] \phi_a + \partial_x \bar{T}_a \phi_a - i\alpha \partial_y \bar{T}_a \phi_a ) = \phi_a'' - \alpha^2 \phi_a , \quad (3.73)$$

$$\frac{M_b}{\xi} ( i\alpha [U_b - c] \phi_b + \partial_x \bar{T}_b \phi_b - i\alpha \partial_y \bar{T}_b \phi_b ) = \phi_b'' - \alpha^2 \phi_b . \quad (3.74)$$

De las ecuaciones constitutivas (3.46)-(3.51) y de (3.66)-(3.67), después de algunos cálculos:

$$\begin{aligned} ( 1 + i\alpha L_{a1} [ U_a - c ] ) F_{a1} = L_{a1} ( i\alpha \phi_a \bar{\tau}_{xx}'' + 2[ i\alpha \phi_a' \bar{\tau}_{xx}'' + \\ + \bar{\tau}_{xy}'' \phi_a'' + U_a' F_{a2} ] ) + 2i\alpha \phi_a' - 2L_{a2} ( \alpha^2 [ U_a - c ] \phi_a' + \\ + 2U_a' \phi_a'' + \alpha^2 U_a' \phi_a ) , \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} ( 1 + i\alpha L_{a1} [ U_a - c ] ) F_{a2} = L_{a1} ( i\alpha \phi_a \bar{\tau}_{xy}'' + \alpha^2 \phi_a \bar{\tau}_{xx}'' + \\ + U_a' F_{a3} ] ) + \phi_a'' + \alpha^2 \phi_a + i\alpha L_{a2} ( [ U_a - c ] \cdot [ \phi_a'' + \\ + \alpha^2 \phi_a ] - U_a'' \phi_a + 2U_a' \phi_a' ) , \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned}
 (1 + i\alpha L_{a1} [U_a - c]) F_{a3} &= 2\alpha^2 L_{a1} \phi_a \bar{\tau}_{xy}^a - 2i\alpha \phi_a' + \\
 + 2\alpha^2 L_{a2} ([U_a - c] \phi_a' - U_a' \phi_a) , & \quad (3.78)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1 + i\alpha L_{b1} [U_b - c]) F_{b1} &= L_{b1} (i\alpha \phi_b \bar{\tau}_{xx}^b + 2[i\alpha \phi_b' \bar{\tau}_{xx}^b + \\
 + \bar{\tau}_{xy}^b \phi_b'' + U_b' F_{b2}]) + 2i\alpha \mu \phi_b' - 2\mu L_{b2} (\alpha^2 [U_b - c] \phi_b' + \\
 + 2U_b' \phi_b'' + \alpha^2 U_b' \phi_b) , & \quad (3.79)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1 + i\alpha L_{b1} [U_b - c]) F_{b2} &= L_{b1} (i\alpha \phi_b \bar{\tau}_{xy}^b + \alpha^2 \phi_b \bar{\tau}_{xx}^b + \\
 + U_b' F_{b3}) + \mu \phi_b'' + \alpha^2 \mu \phi_b + i\alpha \mu L_{b2} ([U_b - c] [\phi_b'' + \\
 + \alpha^2 \phi_b] - U_b'' \phi_b + 2U_b' \phi_b') , & \quad (3.80)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1 + i\alpha L_{b1} [U_b - c]) F_{b3} &= 2\alpha^2 L_{b1} \phi_b \bar{\tau}_{xy}^b - 2i\alpha \mu \phi_b' + \\
 + 2\alpha^2 \mu L_{b2} ([U_b - c] \phi_b' - U_b' \phi_b) . & \quad (3.81)
 \end{aligned}$$

De las ecuaciones (3.66)-(3.67) y las condiciones de frontera (3.52)-(3.65) se obtendrá:

$$\begin{aligned}
 F_{a1}(1) - \pi_a(1) - \frac{\phi_a(1)}{c_a} (i\alpha [2\bar{\tau}_{xy}^a(1) - \beta_x \bar{T}_a(1)] + \\
 - \alpha^2 S_a R_a^{-1}) = 0 , & \quad (3.82)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{a2}(1) + \frac{\phi_a(1)}{c_a} (i\alpha [\bar{\tau}_{xx}^a(1) + \bar{T}_a'(1)] + U_a''(1)) + \\
 + i\alpha \phi_a(1) = 0 , & \quad (3.83)
 \end{aligned}$$

$$F_{b3}(0) - F_{a3}(0) + \pi_a(0) - \pi_b(0) - \frac{\phi_b(0)}{c_b} (1\alpha [2\bar{\tau}_{xy}^b(0) + 2\bar{\tau}_{xy}^a(0) - \gamma\beta_x \bar{T}_b(0)] - \alpha^2 \sigma_o S_a R^{-1}) = 0, \quad (3.84)$$

$$F_{b2}(0) - F_{a2}(0) - \frac{\phi_b(0)}{c_b} (1\alpha [ \bar{\tau}_{xx}^b(0) - \bar{\tau}_{xx}^a(0) - \gamma \bar{T}_b'(0) ] + \beta_y \bar{\tau}_{xy}^a(0) - \beta_y \bar{\tau}_{xy}^b(0) ) + 1\alpha \gamma \phi_a(0) = 0, \quad (3.85)$$

$$\phi_b'(-d) = \phi_b(-d) = \phi_b'(-d) = 0, \quad (3.86)$$

$$\phi_a'(0) - \kappa \phi_b'(0) + \frac{\phi_b(0)}{c_b} ( \bar{T}_a''(0) - \kappa \bar{T}_b''(0) ) = 0, \quad (3.87)$$

$$\phi_b(0) - \phi_a(0) + \frac{\phi_b(0)}{c_b} ( \bar{T}_b'(0) - \bar{T}_a'(0) ) = 0, \quad (3.88)$$

$$\phi_a'(1) + B \phi_a(1) - \frac{\phi_a(1)}{c_a} ( 1\alpha \beta_x \bar{T}_a - \bar{T}_a''(0) + B_a \bar{T}_a'(0) ) = 0, \quad (3.89)$$

$$\phi_b'(0) - \phi_a'(0) + \frac{\phi_b(0)}{c_b} ( U_b'(0) - U_a'(0) ) = 0, \quad (3.90)$$

$$\phi_b(0) - \phi_a(0) = 0. \quad (3.91)$$

Las ecuaciones de este capítulo representan un problema de

valores propios para  $c$ . En el siguiente capítulo se utilizará una aproximación para resolverlo analíticamente.

## CAPITULO IV

### SOLUCION CON LA APROXIMACION A GRANDES LONGITUDES DE ONDA

#### 4.1.- DESARROLLO EN SERIES DE POTENCIAS DE $\alpha$ .

Las expresiones perturbadas obtenidas en el capítulo anterior son un sistema de ecuaciones ordinarias con coeficientes variables. En general no se puede dar una solución analítica a este sistema, por lo que se buscará alguna, utilizando una aproximación, al tomar en cuenta un parámetro pequeño.

Debido a que las perturbaciones de la superficie libre y la entrecara, en pequeñas longitudes de onda, son atenuadas por los efectos de la tensión superficial [3], se buscará una solución del sistema de ecuaciones del capítulo anterior con la aproximación de perturbaciones que contienen longitudes de onda muy grandes, es decir, números de onda pequeños. Este método permite encontrar una solución de manera analítica.

Para longitudes de onda muy grandes se tienen números de onda pequeños y se pueden desarrollar las amplitudes de las perturbaciones en series de potencias de éstos. Lo mismo se puede hacer para  $c$ . Ello se expresa por:

$$\phi_a = \phi_{a0} + \alpha \phi_{a1} + \alpha^2 \phi_{a2} + \dots, \quad (4.1)$$

$$\phi_b = \phi_{b0} + \alpha \phi_{b1} + \alpha^2 \phi_{b2} + \dots, \quad (4.2)$$

$$\theta_a = \theta_{a0} + \alpha \theta_{a1} + \alpha^2 \theta_{a2} + \dots, \quad (4.3)$$

$$\theta_b = \theta_{b0} + \alpha \theta_{b1} + \alpha^2 \theta_{b2} + \dots, \quad (4.4)$$

$$c = c_0 + \alpha c_1 + \alpha^2 c_2 + \dots. \quad (4.5)$$

Recuérdese que las primas en las variables de las ecuaciones en adelante indican derivadas con respecto a "y".

De las ecuaciones de movimiento (3.71)-(3.72), después de eliminar la amplitud en la perturbación de la presión y tomando en cuenta que  $\alpha$  es pequeño, se obtendrá:

$$\phi_{a_0}''' + \alpha \phi_{a_1}''' - i\alpha \left( R_a \left\{ [U_a - c_0] \phi_{a_0}'' - U_a'' \phi_{a_0} \right\} + \Delta L_a [U_a - c_0] \phi_{a_0}''' \right) = 0, \quad (4.6)$$

$$\mu \phi_{b_0}''' + \mu \alpha \phi_{a_0}''' - i\alpha \left( \rho R_b \left\{ [U_b - c_0] \phi_{b_0}'' - U_b'' \phi_{b_0} \right\} + \mu L \Delta L_a [U_b - c_0] \phi_{b_0}''' \right) = 0. \quad (4.7)$$

De las ecuaciones de la energía se obtiene:

$$M_a \left( i\alpha [U_a - c_0] \phi_{a_0} + \partial_x \bar{T}_a [\phi_{a_0} + \alpha \phi_{a_1}] + - i\alpha \partial_y \bar{T}_a [\phi_{a_0} + \alpha \phi_{a_1}] \right) = \phi_{a_0}'' + \alpha \phi_{a_1}'', \quad (4.8)$$

$$\frac{M_a}{\xi} \left( i\alpha [U_a - c_0] \phi_{b_0} + \partial_x \bar{T}_b [\phi_{b_0} + \alpha \phi_{b_1}] + - i\alpha \partial_y \bar{T}_b [\phi_{b_0} + \alpha \phi_{b_1}] \right) = \phi_{b_0}'' + \alpha \phi_{b_1}''. \quad (4.9)$$

De las condiciones de frontera (3.82)-(3.91) se tendrá:

$$i\alpha R_a \left( U_a'(1) \phi_{a_0}(1) + c_{a_0} \phi_{a_0}'(1) \right) + \phi_{a_0}'''(1) + \alpha \phi_{a_1}'''(1) - i\alpha \Delta L_a \left( U_a''(1) \phi_{a_0}'(1) - U_a'(1) \phi_{a_0}''(1) + - c_{a_0} \phi_{a_0}'''(1) \right) - i\alpha^3 S_a R_a^{-1} \left( \frac{\phi_{a_0}(1) + \alpha \phi_{a_1}(1)}{c_{a_0}} \right) \left( 1 - \alpha \frac{c_{a_1}}{c_{a_0}} \right) + O(\alpha^2) = 0, \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned}
& \phi_{a_0}''(1) + \alpha \phi_{a_1}''(1) + 1\alpha \Delta L_a \left( U_a''(1) \phi_{a_0}(1) + \right. \\
& - 2U_a'(1) \phi_{a_0}'(1) + c_{a_0} \phi_{a_0}''(1) \left. \right) + 1\alpha \phi_{a_0}(1) + \\
& + \left( \frac{\phi_{a_0}(1) + \alpha \phi_{a_1}(1)}{c_{a_0}} \right) \left( 1 - \alpha \frac{c_{a_1}}{c_{a_0}} \right) \left( U_a''(1) + \right. \\
& + 1\alpha \left[ \bar{T}_a'(1) - \bar{\tau}_{xx}^a(1) \right] \left. \right) + O(\alpha^2) = 0, \quad (4.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 1\alpha R_a \left( -c_{b_0} \phi_{a_0}'(0) + U_a'(0) \phi_{a_0}(0) + \right. \\
& - \rho \left( c_{b_0} \phi_{b_0}'(0) + U_b'(0) \phi_{b_0}(0) \right) \left. \right) + \\
& - 1\alpha \Delta L_a \left( U_a''(0) \phi_{a_0}'(0) - U_a'(0) \phi_{a_0}''(0) - c_{b_0} \phi_{a_0}'''(0) + \right. \\
& - \mu L \left[ U_a''(0) \phi_{a_0}'(0) - U_a'(0) \phi_{a_0}''(0) - c_{b_0} \phi_{a_0}'''(0) \right] \left. \right) + \\
& + 1\alpha \frac{\alpha^2 \sigma_a S R_a^{-1}}{c_{b_0}} \left[ \phi_{b_0}(0) + \alpha \phi_{b_1}(0) \right] \left[ 1 - \alpha \frac{c_{b_1}}{c_{b_0}} \right] + \\
& + \phi_{a_0}'''(0) + \alpha \phi_{a_1}'''(0) - \mu \phi_{b_0}'''(0) - \alpha \mu \phi_{b_1}'''(0) = 0, \quad (4.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mu \phi_{b_0}''(0) + \alpha \mu \phi_{b_1}''(0) - \phi_{a_0}''(0) - \alpha \phi_{a_1}''(0) + \\
& + 1\alpha \gamma \phi_{a_0}(0) + 1\alpha \Delta L_a \left( \mu L [U_b''(0) \phi_{b_0}(0) + \right. \\
& - 2 U_b'(0) \phi_{b_0}'(0) - c_{b_0} \phi_{b_0}''(0)] - [U_a''(0) \phi_{a_0}(0) + \\
& - 2 U_a'(0) \phi_{a_0}'(0) - c_{b_0} \phi_{a_0}''(0)] - \frac{1}{c_{b_0}} \left( 1\alpha [\bar{\tau}_{xx}^b(0) - \bar{\tau}_{xx}^a(0) + \right. \\
& - \gamma \bar{T}_b'(0)] - \bar{\tau}_{xy}^b(0) + \bar{\tau}_{xy}^a(0) \left. \right) \left( \phi_{b_0}(0) + \alpha \phi_{b_1}(0) \right) \left. \right) \\
& \left( 1 - \alpha \frac{c_{b_1}}{c_{b_0}} \right) = 0, \quad (4.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{b_0}'(-d) + \alpha \phi_{b_1}'(-d) &= \phi_{b_0}'(-d) + \alpha \phi_{b_1}'(-d) = \\ &= \phi_{b_0}'(-d) + \alpha \phi_{b_1}'(-d) = 0, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \phi_{a_0}'(0) + \alpha \phi_{a_1}'(0) - \kappa \phi_{b_0}'(0) - \alpha \kappa \phi_{b_1}'(0) + \\ + [\bar{T}_a''(0) - \kappa \bar{T}_b''(0)] \left[ \frac{\phi_{b_0}(0) + \alpha \phi_{b_1}(0)}{c_{b_0}} \right] \left[ 1 - \alpha \frac{c_1}{c_{b_0}} \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \phi_{b_0}(0) + \alpha \phi_{b_1}(0) - \phi_{a_0}(0) - \alpha \phi_{a_1}(0) + \\ + \frac{[\bar{T}_b'(0) - \bar{T}_a'(0)]}{c_{b_0}} [\phi_{b_0}(0) + \alpha \phi_{b_1}(0)] \left[ 1 - \alpha \frac{c_1}{c_{b_0}} \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \phi_{a_0}'(1) + \alpha \phi_{a_1}'(1) + B_a \phi_{a_0}(1) + \alpha B_a \phi_{a_1}(1) - \left[ 1 - \alpha \frac{c_1}{c_{b_0}} \right] \\ \frac{[1\alpha \partial_x \bar{T}_a(1) - \bar{T}_b''(1) - B_a \bar{T}_a''(1)]}{c_{b_0}} [\phi_{b_0}(1) + \alpha \phi_{b_1}(1)] = 0, \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \phi_{b_0}'(0) + \alpha \phi_{b_1}'(0) - \phi_{a_0}'(0) - \alpha \phi_{a_1}'(0) + \\ + \frac{[U_b'(0) - U_a'(0)]}{c_{b_0}} [\phi_{b_0}(0) + \alpha \phi_{b_1}(0)] \left[ 1 - \alpha \frac{c_1}{c_{b_0}} \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.18)$$

En las ecuaciones (4.6)-(4.18) se utilizaron las ecuaciones constitutivas desarrolladas hasta orden  $\alpha$ . Así, de las ecuaciones (3.75)-(3.81) y después de algunas aproximaciones se obtendrá (ver [14], [15], [16]):

$$F_{a1} = 4 \Delta L_a U_a' \phi_{a0}'' + O(\alpha), \quad (4.19)$$

$$F_{a2} = \phi_{a0}'' + 1\alpha \Delta L_a (U_a'' \phi_{a0} - 2U_a' \phi_{a0}' + [U_a - c_0] \phi_{a0}'') + O(\alpha^2), \quad (4.20)$$

$$F_{a3} = -2 1\alpha \phi_{a0}'' + O(\alpha^2), \quad (4.21)$$

$$F_{b1} = 4 \mu L \Delta L_a U_b' \phi_{b0}'' + O(\alpha), \quad (4.22)$$

$$F_{b2} = \mu \phi_{b0}'' + 1\alpha \mu L \Delta L_a (U_b'' \phi_{b0} - 2U_b' \phi_{b0}' + [U_b - c_0] \phi_{b0}'') + O(\alpha^2), \quad (4.23)$$

$$F_{b3} = -2 1\alpha \mu \phi_{b0}'' + O(\alpha^2). \quad (4.24)$$

Donde  $O(\alpha)$  y  $O(\alpha^2)$  indican términos que contienen como factores de igual o mayor orden que  $\alpha$  y  $\alpha^2$ , respectivamente. Se puede observar que en las condiciones de frontera sólo se requieren  $F_{a1}$  y  $F_{b1}$  a orden cero ya que los términos de mayor orden se multiplicaron por  $\alpha$  al hacer la sustitución.

#### 4.2- VALORES PROPIOS A ORDEN CERO.

De las ecuaciones anteriores se obtiene un nuevo sistema de ecuaciones cuyos términos no contienen como factor el número de onda  $\alpha$ . Estas ecuaciones se llaman sistema de ecuaciones a orden cero en  $\alpha$ .

$$\phi_{a_0}'''(y) = \phi_{b_0}'''(y) = 0, \quad (4.25)$$

$$M_a \partial_x \bar{T}_a \phi_{a_0}'(y) = \phi_{a_0}''(y), \quad (4.26)$$

$$\frac{M_a}{\xi} \partial_x \bar{T}_b \phi_{b_0}'(y) = \phi_{b_0}''(y). \quad (4.27)$$

Con condiciones de frontera:

$$\phi_{a_0}''(1) = 0, \quad (4.28)$$

$$\phi_{a_0}''(1) + \frac{U_a''(1)}{C_{a_0}} \phi_{a_0}(1) = 0, \quad (4.29)$$

$$\phi_{a_0}'''(0) - \mu \phi_{b_0}'''(0) = 0, \quad (4.30)$$

$$\mu \phi_{b_0}''(0) - \phi_{a_0}''(0) + \frac{1}{C_{b_0}} (\bar{T}_{xy}^a(0) - \bar{T}_{xy}^b(0)) \phi_{b_0}(0) = 0, \quad (4.31)$$

$$\phi_{b_0}(-d) = \phi_{b_0}'(-d) = \phi_{b_0}''(-d) = 0, \quad (4.32)$$

$$\phi_{a_0}'(0) - \phi_{b_0}'(0) + \frac{1}{C_{b_0}} (\bar{T}_a''(0) - \kappa \bar{T}_b''(0)) \phi_{b_0}(0) = 0, \quad (4.33)$$

$$\phi_{b_0}(0) - \phi_{a_0}(0) + \frac{1}{C_{b_0}} (\bar{T}_b'(0) - \bar{T}_a'(0)) \phi_{b_0}(0) = 0, \quad (4.34)$$

$$\phi_{a_0}'(1) - B_a \phi_{a_0}(1) + \frac{1}{C_{a_0}} (\bar{T}_a''(1) + B_a \bar{T}_a'(1)) \phi_{a_0}(1) = 0, \quad (4.35)$$

$$\phi_{b_0}'(0) - \phi_{a_0}'(0) + \frac{1}{C_{b_0}} (U_b'(0) - U_a'(0)) \phi_{b_0}(0) = 0, \quad (4.36)$$

$$\phi_{b_0}(0) - \phi_{a_0}(0) = 0. \quad (4.37)$$

Donde se han definido:

$$c_{a_0} = c_0 - U_a(1), \quad (4.38)$$

$$c_{b_0} = c_0 - U_b(0). \quad (4.39)$$

Las ecuaciones (4.28)-(4.32) y (4.36)-(4.37) para las amplitudes de las velocidades están desacopladas de las amplitudes de las temperaturas, ello permite conocer las primeras teniendo en cuenta la integración de las ecuaciones (4.25):

$$\phi_{a_0}(y) = \frac{A_1}{6} y^3 + \frac{B_1}{2} y^2 + F_1 y + D_1, \quad (4.40)$$

$$\phi_{b_0}(y) = \frac{A_2}{6} y^3 + \frac{B_2}{2} y^2 + F_2 y + D_2, \quad (4.41)$$

Aquí,  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$ ,  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ ,  $D_2$ , son constantes a determinar. De las condiciones de frontera (4.16), (4.20), (4.21), (4.22), (4.26), y (4.27), se obtienen los valores de esas constantes:

$$A_1 = A_2 = 0, \quad D_1 = D_2 = \frac{B_2 d^2}{2}, \quad C_2 = B_2 d, \quad (4.42)$$

$$C_1 = B_2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{c_{b_0}} [ U_b'(0) - U_a'(0) ] d \right) d, \quad (4.43)$$

$$B_1 = B_2 \left( \mu + \frac{d^2}{2} \frac{1}{c_{b_0}} [ \bar{\tau}_{xy}^b'(0) - \bar{\tau}_{xy}^a'(0) ] \right). \quad (4.44)$$

$B_2$  queda indeterminada.

Integrando las ecuaciones (4.26)-(4.27):

$$\theta_{a_0}(y) = M_a \partial_x \bar{T}_a B_2 \left( \frac{E_1}{3} y^3 + \frac{F_1}{2} y^2 + k_{a_1} y + k_{a_2} \right), \quad (4.45)$$

$$\theta_{b_0}(y) = \frac{M_a}{\xi} \partial_x \bar{T}_b B_2 \left( \frac{1}{6} y^3 + \frac{d}{2} y^2 + k_{b_1} y + k_{b_2} \right). \quad (4.46)$$

Donde se han definido:

$$E_1 = \left( \frac{\mu}{2} + \frac{d^2}{4} \frac{1}{c_{b_0}} [ \bar{\tau}_{xy}^b'(0) - \bar{\tau}_{xy}^a'(0) ] \right), \quad (4.47)$$

$$F_2 = \left( 1 + \frac{d^2}{2c_{bo}} [ U_b'(0) - U_a'(0) ] \right) d. \quad (4.48)$$

De las condiciones de frontera para las amplitudes de las temperaturas (4.32)-(4.35) se obtienen:

$$kb_1 = d^2/2, \quad (4.49)$$

$$ka_1 = \frac{\kappa d^2}{\xi^2} - \frac{d^2}{2c_{bo}M_a} ( \bar{T}_a''(0) - \kappa \bar{T}_b''(0) ), \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} ka_2 = & - \frac{-1}{M_a \partial_x \bar{T}_a(1) B_a} \left[ ( M_a \partial_x \bar{T}_a(1) \cdot [ 1 + \frac{B_a}{3} ] + \right. \\ & + \frac{1}{c_{ao}} [ \bar{T}_a'(1) + B_a \bar{T}_a'(1) ] ) E1 + ( M_a \partial_x \bar{T}_a(1) [ 1 + \frac{B_a}{2} ] + \\ & + \frac{1}{c_{ao}} [ \bar{T}_a'(1) + B_a \bar{T}_a'(1) ] ) F1 + ( 1 + B_a ) \left( \frac{\kappa}{\xi} M_a \partial_x \bar{T}_a(0) + \right. \\ & \left. - \frac{1}{c_{bo}} [ \bar{T}_a''(0) + \kappa \bar{T}_b''(0) ] \right) \frac{d^2}{2} + \frac{d^2}{2c_{ao}} [ \bar{T}_a'(1) + B_a \bar{T}_a'(1) ] \Big], \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$kb_2 = \frac{\xi}{M_a \partial_x \bar{T}_a(0)} ( M_a \partial_x \bar{T}_a(0) ka_2 - \frac{d^2}{2c_{bo}} [ \bar{T}_b'(0) + \bar{T}_a'(0) ] ). \quad (4.52)$$

Debido al desacoplamiento de las ecuaciones que contienen las amplitudes de velocidad respecto a las que contienen amplitudes de temperatura, sustituyendo en (4.29), a (4.40)-(4.41), se obtiene la ecuación que genera los valores propios:

$$\begin{aligned} & \mu c_{a_0} c_{b_0} + c_{a_0} \frac{d^2}{2} [ \mu U_b''(0) - U_a''(0) ] + \\ & + \frac{c_{b_0}}{2} [ \mu + d(2+d) ] U_a''(1) + \frac{U_a''(1)}{4} ( [ \mu U_b''(0) + \\ & - U_a''(0) ] + 2 [ U_b'(0) - U_a'(0) ] ) d^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Considerando que:

$$c_{b_0} = c_{a_0} + U_a(1) - U_b(0). \quad (4.54)$$

Con ésto se obtiene de (4.51) y (4.52), una ecuación de segundo grado para  $c_{a_0}$ , por lo tanto:

$$c_{a_0} = -\frac{1}{2\mu} \left( T_1 \pm (T_1^2 - 4\mu T_2)^{1/2} \right). \quad (4.55)$$

Donde se definieron:

$$T_1 = \frac{8\mu^2 + 6d [ 1 + \mu(2+d) ] + 3d^2(\gamma+1)(2+d)}{2(4\mu+3d)}, \quad (4.56)$$

$$T_2 = \frac{T_{21} [ 6\mu + 3(\gamma+1)d ]}{4(4\mu+3d)^2}, \quad (4.57)$$

donde:

$$T_{21} = [ \mu + d(2+d) ] [ 2\mu - 3(\gamma-1)d ] + d T_{211}, \quad (4.58)$$

$$T_{211} = 3\mu(2\gamma-1) + d [ 3(\gamma-1)d + 4(2\gamma-1) - 2\mu ]. \quad (4.59)$$

Los dos valores propios que aparecen en la ecuación (4.55) pertenecen a dos modos de oscilación de las superficies libre y entrecara. Por el efecto de oscilación de la entrecara se agrega un nuevo grado de libertad al sistema de dos capas [4]. El

signo negativo pertenece al modo de oscilación de la entrecara [4]. El  $c_{a0}$  puede ser un número complejo cuando el radicando sea negativo, pero esto no tiene sentido físico porque serían perturbaciones con longitudes de onda infinitas.

#### 4.3- VALORES PROPIOS A ORDEN UNO.

Aquí se tomarán las ecuaciones cuyos términos contienen como factor el número de onda  $\alpha$ . De (4.6)-(4.18), se encuentra un nuevo sistema de ecuaciones llamado a orden uno en  $\alpha$ :

$$\phi_{a1}'''(y) - iR_a \left( [U_a(y) - c_{a0}] \phi_{a0}''(y) - U_a'' \phi_{a0}(y) \right) , \quad (4.60)$$

$$\mu \phi_{b1}'''(y) - i\rho R_b \left( [U_b(y) - c_{b0}] \phi_{b0}''(y) - U_b'' \phi_{b0}(y) \right) , \quad (4.61)$$

$$M_a \left( -i [U_a(y) - c_{a0}] \phi_{a0}'(y) + \partial_x \bar{T}_a \phi_{a1}'(y) + \right. \\ \left. - i \bar{T}_a'(y) \phi_{a0}(y) \right) = \phi_{a1}''(y) , \quad (4.62)$$

$$\frac{M_b}{\epsilon} \left( -i [U_b(y) - c_{b0}] \phi_{b0}'(y) + \partial_x \bar{T}_b \phi_{b1}'(y) + \right. \\ \left. - i \bar{T}_b'(y) \phi_{b0}(y) \right) = \phi_{b1}''(y) , \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned}
& \phi_{a_1}'''(1) + 1R_a (U_a'(1) \phi_{a_0}(1) + c_{a_0} \phi_{a_0}'(1)) + \\
& - 1 \Delta L_a (U_a''(1) \phi_{a_0}(1) - U_a'(1) \phi_{a_0}''(1)) + \\
& - 1 \frac{\alpha^2 S_a R_a^{-1}}{c_{a_0}} \phi_{a_0}(1) = 0, \quad (4.64)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \phi_{a_1}''(1) + 1 \Delta L_a (U_a''(1) \phi_{a_0}(1) - 2U_a'(1) \phi_{a_0}'(1) + \\
& + c_{a_0} \phi_{a_0}''(1)) + 1 \phi_{a_0}(1) - 1 \frac{U_a''(1)}{c_{a_0}} (\phi_{a_0}(1) + \\
& - \frac{c_1}{c_{a_0}} \phi_{a_0}(1)) + 1 \frac{1}{c_{a_0}} (\bar{T}_a'(1) - \bar{T}_{xx}^a(1)) \phi_{a_0}(1) = 0, \quad (4.65)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \phi_{a_1}''(0) - \mu \phi_{b_1}'''(0) + 1R_a (U_a'(0) \phi_{a_0}(0) + c_{b_0} \phi_{a_0}'(0) + \\
& - \rho [U_b'(0) \phi_{b_0}(0) + c_{b_0} \phi_{b_0}'(0)]) - 1 \Delta L_a (U_a''(0) \phi_{a_0}(0) \\
& - U_a'(0) \phi_{a_0}''(0) - \mu L [U_b''(0) \phi_{b_0}(0) - U_b'(0) \phi_{b_0}''(0)]) + \\
& - 1 \frac{\alpha^2 S_a R_a^{-1} \sigma}{c_{b_0}} \phi_{b_0}(0) = 0, \quad (4.66)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \phi_{a1}''(0) - \mu \phi_{b1}''(0) + 1 \gamma \phi_{b0}(0) + \\
& + 1 \Delta L_a \left( \mu L [ U_b''(0) \phi_{b0}(0) - 2U_b'(0) \phi_{b0}'(0) + c_{b0} \phi_{b0}''(0) ] + \right. \\
& \left. - [ U_a''(0) \phi_{a0}(0) - 2U_a'(0) \phi_{a0}'(0) + c_{b0} \phi_{a0}''(0) ] \right) + \\
& - 1 \left( \bar{T}_{xx}^b(0) - \bar{T}_{xx}^a(0) - \gamma \bar{T}_b'(0) \right) \frac{\phi_{b0}(0)}{c_{b0}} + \\
& + \left( \bar{T}_{xy}^b(0) - \bar{T}_{xy}^a(0) \right) \left( \phi_{b1}(0) - \frac{c_1}{c_{b0}} \phi_{b0}(0) \right) \frac{1}{c_{b0}} = 0, \tag{4.67}
\end{aligned}$$

$$\phi_{b1}'(-d) = \phi_{b1}(-d) = \phi_{b1}'(-d) = 0, \tag{4.68}$$

$$\begin{aligned}
& \phi_{a1}'(0) - \kappa \phi_{b1}'(0) + \frac{[\bar{T}_a''(0) - \kappa \bar{T}_b''(0)]}{c_{b0}} \left( \phi_{b1}(0) + \right. \\
& \left. - \frac{c_1}{c_{b0}} \phi_{b0}(0) \right) = 0, \tag{4.69}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \phi_{b1}(0) - \phi_{a1}(0) + \frac{[\bar{T}_b'(0) - \bar{T}_a'(0)]}{c_{b0}} \left( \phi_{b1}(0) + \right. \\
& \left. - \frac{c_1}{c_{b0}} \phi_{b0}(0) \right) = 0, \tag{4.70}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \phi_{a1}'(1) + B_a \phi_{a1}(1) - 1 \frac{\partial \bar{T}_a(1)}{c_{a0}} \phi_{a0}(1) + \\
& + \frac{[\bar{T}_a''(1) + B_a \bar{T}_b'(1)]}{c_{a0}} \left( \phi_{a1}(1) - \frac{c_1}{c_{a0}} \phi_{a0}(1) \right) = 0, \tag{4.71}
\end{aligned}$$

$$\phi_{b_1}'(0) - \phi_{a_1}'(0) + \frac{[U_b'(0) - U_a'(0)]}{c_{bo}} (\phi_{b_1}(0) + \frac{c_1}{c_{bo}} \phi_{bo}(0)) = 0, \quad (4.72)$$

$$\phi_{b_1}(0) - \phi_{a_1}(0) = 0, \quad (4.73)$$

Debido a que las ecuaciones (4.54)-(4.58), (4.62)-(4.63), están desacopladas de las amplitudes de las temperaturas a primer orden, se pueden obtener los valores propios a primer orden de esas ecuaciones calculando primero las amplitudes de la perturbación en las velocidades a primer orden:

$$\phi_{a_1}(y) = 1 R_a B_2 \left( \frac{\omega_{a2}}{120} y^5 + \frac{\omega_{a3}}{24} y^4 + \frac{s_{a1}}{6} y^3 + \frac{s_{a2}}{2} y^2 + s_{a3} y + s_{a4} \right), \quad (4.74)$$

$$\phi_{b_1}(y) = 1 \frac{\rho}{\mu} R_a B_2 \left( \frac{\omega_{b2}}{120} y^5 + \frac{\omega_{b3}}{24} y^4 + \frac{s_{b1}}{6} y^3 + \frac{s_{b2}}{2} y^2 + s_{b3} y + s_{b4} \right), \quad (4.75)$$

Donde se han definido las constantes:

$$s_{a4} = \frac{\rho}{\mu} s_{b4}, \quad (4.76)$$

$$s_{a3} = \frac{1}{1R_a B_2} \left( 1 \frac{\rho}{\mu} R_a B_2 [s_{b3} + \frac{(U_b'(0) - U_a'(0))}{c_{bo}} s_{b4}] + c_1 \frac{(U_b'(0) - U_a'(0))}{c_{bo}^2} \phi_{bo}(0) \right), \quad (4.77)$$

$$s_{a2} = \frac{1}{1 R_a B_2} \left( 1 \rho R_a B_2 s_{b2} + 1 \gamma \phi_{bo}(0) + 1 \Delta L_a f_1 + \right. \\ \left. - 1 \frac{f_2}{c_{bo}} \phi_{bo}(0) - c_1 \frac{f_3}{c_{bo}^2} \phi_{bo}(0) + 1 \frac{\rho R_a B_2 f_3}{\mu c_{bo}} s_{b4} \right), \quad (4.78)$$

$$s_{a1} = \frac{1}{1 R_a B_2} \left( 1 R_a B_2 \left[ \omega_{a3} - \frac{\omega_{a2}}{2} \right] - 1 R_a f_6 + \right. \\ \left. + 1 \Delta L_a f_7 + 1 \frac{\alpha^2 S_a R_a^{-1}}{c_{ao}} \phi_{ao}(1) \right), \quad (4.79)$$

$$s_{b4} = \frac{s_{b2}}{2} d^2 - \frac{s_{b1}}{3} d^3 - \frac{\omega_{b3}}{8} d^4 - \frac{\omega_{b2}}{30} d^5, \quad (4.80)$$

$$s_{b3} = s_{b2} d - \frac{s_{b1}}{2} d^2 - \frac{\omega_{b3}}{6} d^3 - \frac{\omega_{b2}}{24} d^4, \quad (4.81)$$

$$s_{b2} = \text{Queda indeterminada} \quad (4.82)$$

$$s_{b1} = \frac{1}{1 \rho R_a B_2} \left( 1 R_a B_2 s_{a1} + 1 R_a f_4 - 1 \Delta L_a f_5 + \right. \\ \left. + 1 \frac{\alpha^2 \sigma_a S_a R_a^{-1}}{c_{bo}} \phi_{bo}(0) \right). \quad (4.83)$$

De la condición de solubilidad (4.65), se obtiene el valor propio a orden uno, quedando la constante  $s_{b2}$  indeterminada:

$$c_1 = 1 \left( R_a Q1 + \Delta L_a Q2 + M_a Q3 + \alpha^2 S_a R_a^{-1} Q4 \right) \frac{1}{\delta_2}. \quad (4.84)$$

Donde se han definido todas las siguientes constantes:

$$Q_2 = \left\{ g_1 - \frac{P_7}{2} \right\} \omega_{a2} + \left\{ P_7 - g_2 \right\} \omega_{a3} - \frac{P_7 f_6}{B_2} +$$

$$- \frac{d^2}{\mu} \left( \frac{P_1 f_4}{B_2} + \rho P_6 \right), \quad (4.85)$$

$$Q_2 = \frac{P_7 f_7 + f_9}{B_2} + g_4 f_1 - \frac{2 [U_a'(1)]^2}{B_2 c_{a0}} \phi_{a0}(1) +$$

$$+ d^2 \left( \frac{P_1 f_5}{\mu B_2} - \frac{g_4 \left( \mu L [U_b'(0)]^2 - [U_a'(0)]^2 \right)}{c_{b0}} \right), \quad (4.86)$$

$$Q_3 = \left( \frac{\{1 + \gamma g_4\} G_{M1}}{B_a c_{a0}} - \frac{G_{M3}}{3} \right) E_1 +$$

$$+ \left( \frac{\{1 + \gamma g_4\} G_{M1}}{B_a c_{a0}} - \frac{G_{M4}}{2} \right) F_1 +$$

$$+ \frac{d^2}{2} \left( \frac{\{1 + \gamma g_4\} G_{M1}}{B_a c_{a0}} - \frac{\kappa G_{M5}}{2 \xi} - \frac{d G_{M6}}{2 \mu c_{b0}} \right), \quad (4.87)$$

$$Q_4 = \frac{P_7 \{2 E_1 + 2 F_1 + d^2\}}{2 c_{a0}} - \frac{d^4 \sigma_o P_1}{2 \mu c_{b0}}, \quad (4.88)$$

$$\delta_2 = \frac{d^2 g_4 f_3}{2 B_2 c_{b0}^2} + \frac{U_a''(1)}{c_{a0}} \left( \frac{d^2 f_8}{2 c_{b0}^2} + \frac{\phi_{a0}(1)}{B_2 c_{a0}} \right), \quad (4.89)$$

$$\omega_{a2} = 2 E_1 U_a'(0) - F_1 U_a''(1), \quad (4.90)$$

$$\omega_{a3} = 2 E_1 c_{b0} + \frac{U_a''(1) d^2}{2}, \quad (4.91)$$

$$\begin{aligned}
f_1 = & \mu L \left( U_b''(0) \phi_{b_0}(0) - 2U_b'(0) \phi_{b_0}'(0) + \right. \\
& \left. + c_{b_0} \phi_{b_0}''(0) \right) - \left( U_a''(0) \phi_{a_0}(0) - 2U_a'(0) \phi_{a_0}'(0) + \right. \\
& \left. + c_{b_0} \phi_{a_0}''(0) \right), \quad (4.92)
\end{aligned}$$

$$f_2 = \bar{c}_{xx}^b(0) - \bar{c}_{xx}^a(0) - \gamma \bar{T}_b(0), \quad (4.93)$$

$$f_3 = \bar{c}_{xy}^b(0) - \bar{c}_{xy}^a(0), \quad (4.94)$$

$$\begin{aligned}
f_4 = & U_a'(0) \phi_{a_0}(0) + c_{b_0} \phi_{a_0}'(0) + \\
& - \rho \left( U_b'(0) \phi_{b_0}(0) + c_{b_0} \phi_{b_0}'(0) \right), \quad (4.95)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_5 = & U_a''(0) \phi_{a_0}'(0) - U_a'(0) \phi_{a_0}''(0) + \\
& - \mu L \left( U_b''(0) \phi_{b_0}'(0) - U_b'(0) \phi_{b_0}''(0) \right), \quad (4.96)
\end{aligned}$$

$$f_6 = U_a'(1) \phi_{a_0}(1) + c_{a_0} \phi_{a_0}'(1), \quad (4.97)$$

$$f_7 = U_a''(1) \phi_{a_0}'(1) - U_a'(1) \phi_{a_0}''(1), \quad (4.98)$$

$$f_8 = U_b'(0) - U_a'(0), \quad (4.99)$$

$$f_9 = U_a''(1) \phi_{a_0}(1) - 2U_a'(1) \phi_{a_0}'(1) + c_{a_0} \phi_{a_0}''(1), \quad (4.100)$$

$$f_{10} = \bar{T}_a'(1) - \bar{T}_{xx}^a(1), \quad (4.101)$$

$$g_1 = \frac{1}{6} + \frac{U_a''(1)}{120 c_{a_0}}, \quad (4.102)$$

$$g_2 = \frac{1}{2} + \frac{U_a''(1)}{24 c_{a_0}}, \quad (4.103)$$

$$g_3 = 1 + \frac{U_a''(1)}{6 c_{a_0}}, \quad (4.104)$$

$$g_4 = 1 + \frac{U_a''(1)}{2 c_{a_0}}, \quad (4.105)$$

$$g_5 = 1 + \frac{f_3 d^2}{2 \mu c_{b_0}}, \quad (4.106)$$

$$g_6 = 1 + \frac{f_8 d}{2 c_{b_0}}, \quad (4.107)$$

$$g_7 = \frac{1}{2} + \frac{f_8 d}{3 c_{b_0}}, \quad (4.108)$$

$$g_8 = \frac{1}{6} + \frac{f_8 d}{8 c_{b_0}}, \quad (4.109)$$

$$g_9 = \frac{1}{24} + \frac{f_8 d}{30 c_{b_0}}, \quad (4.110)$$

$$P_1 = \left( \frac{g_4 f_3 d}{3 c_{b_0}} + \frac{U_a''(1)}{c_{a_0}} \left[ g_7 + \frac{d}{3} \right] \right), \quad (4.111)$$

$$P_2 = \left( \frac{g_4 f_3 d}{8 c_{b0}} + \frac{U_a''(1)}{c_{a0}} \left[ g_8 + \frac{d}{8} \right] \right) d, \quad (4.112)$$

$$P_3 = \left( \frac{g_4 f_3 d}{30 c_{b0}} + \frac{U_a''(1)}{c_{a0}} \left[ g_9 + \frac{d}{30} \right] \right) d^2, \quad (4.113)$$

$$P_6 = P_2 \omega_{b3} + P_3 \omega_{b2}, \quad (4.114)$$

$$P_7 = g_3 - \frac{P_1 d^2}{\mu}, \quad (4.115)$$

$$\omega_{b2} = U_b'(0) - U_b''(0), \quad (4.116)$$

$$\omega_{b3} = c_{b0} + \frac{U_b''(0) d^2}{2}. \quad (4.117)$$

Donde se han utilizado:

$$\frac{\partial \bar{T}_a}{\partial x} = \frac{\partial \bar{T}_b}{\partial x} = -1, \text{ en toda } y, \quad (4.118)$$

$$U_a''(1) = U_a''(0) = U_a'' = \frac{6\mu + 3(\gamma + 1)d}{4\mu + 3d}, \quad (4.119)$$

$$U_b''(1) = U_b''(0) = U_b'' = \frac{3\{2\gamma - 1\}}{d\{4\mu + 3d\}}, \quad (4.120)$$

$$U_a'(1) = U_a''(1) + \frac{2\mu + 3\gamma d}{4\mu + 3d}, \quad (4.121)$$

$$U_b'(1) = U_b''(1) + \frac{2\{2\gamma - 1\}}{4\mu + 3d}, \quad (4.122)$$

Como el valor de  $c_1$  es un número complejo con su parte real nula, entonces éste hará crecer o decrecer las perturbaciones si es positiva y al contrario si es negativa. Con lo anterior se

observa que el valor propio a orden uno es el único que puede desestabilizar el sistema ya que el radical involucrado en el valor propio a orden cero no aporta partes imaginarias que tengan sentido físico.

La curva de estabilidad neutral definida por  $\text{Im}(c) = 0$  genera una relación entre parámetros del sistema que se pueden medir en el experimento. En particular de lo anterior se obtiene una ecuación cuadrática para el número de Reynolds de la capa superior  $R_a$  al igualar a cero la ecuación (4.84). A éste número se le llama número de Reynolds crítico y caracteriza el valor de los parámetros para los cuales el sistema se desestabiliza.

Así igualando la ecuación (4.84) a cero, se obtendrá:

$$R_{ac} = (-\Delta L_a Q_2 \pm R_1) / R_2, \quad (4.123)$$

donde:

$$R_1 = ((\Delta L_a Q_2)^2 - 4(Q_1 + Pr_a Q_3)(\alpha S_a Q_4))^{1/2}, \quad (4.124)$$

$$R_2 = 2(Q_1 + Pr_a Q_3). \quad (4.125)$$

La razón de crecimiento de las perturbaciones es dada por:

$$c_1 = \text{Im}(c_1). \quad (4.126)$$

## CAPITULO V

### RESULTADOS

En este capítulo se dan las gráficas correspondientes al análisis numérico de los resultados analíticos y un estudio de las figuras obtenidas.

Del capítulo IV se obtuvieron dos valores posibles de  $c_0$  debido a que ésta satisface una ecuación de segundo grado, (4.53). La raíz que se elige con el signo positivo del radical se le llama indistintamente modo superficial ó primer modo. Esto se debe a que al anular el grosor de la capa inferior, se obtiene el valor propio correspondiente al problema de una sola capa. La raíz que contiene el signo negativo se le denomina modo de la entrecara ó segundo modo. Las dos raíces representan dos modos diferentes de oscilación de la superficie libre y la entrecara ya que al tomar la razón de la deformación en la superficie libre con respecto a la correspondiente en la entrecara, se obtiene sólo un cambio de signo de un modo a otro. Ello aporta un cambio de la fase por  $\pi$  en las ondas se forman en la entrecara y superficie libre.

Del cálculo numérico realizado para los resultados analíticos se encontraron tres regiones importantes en la estabilidad del sistema para  $\gamma=0.1$ ,  $\gamma=0.5$ ,  $\gamma=0.9$ . Las figuras (5.1)-(5.13) están dadas para  $\gamma=0.1$ , las figuras (5.14)-(5.28) para  $\gamma=0.5$  y las figuras (5.31)-(5.32) para  $\gamma=0.9$ .

Para observar el comportamiento de  $c_1$  del primer y segundo modos con respecto a  $\gamma$  se obtuvieron las figuras (5.29)-(5.30) que se explicarán adelante.

También se presentan gráficas de  $c_1$  contra el número de Reynolds del fluido contenido en la capa superior para los casos en que  $\gamma=0.1$ ,  $\gamma=0.5$  y  $\gamma=0.9$ ; figuras (5.12)-(5.13), (5.27)-(5.28), (5.31)-(5.32). Esto proporciona información para encontrar cuantos números de Reynolds críticos hay en cada caso y el signo de  $c_1$  en las diferentes regiones de interés.

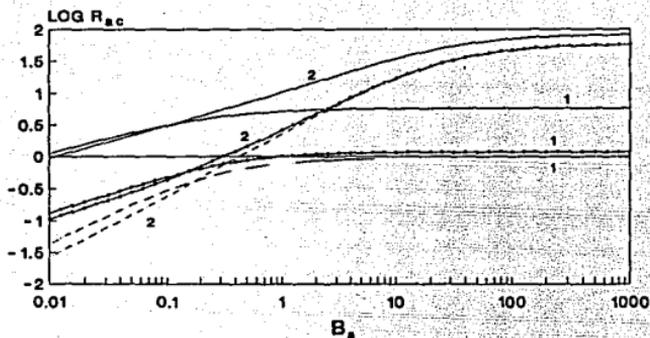
En las figuras (5.1) y (5.2) se relacionan los números de Biot y de Prandtl de la capa superior con el logaritmo del número de Reynolds crítico. Los números de Biot y Prandtl contienen las características térmicas del fluido superior.

De la figura (5.1) se observa que el número de Biot de la capa superior estabiliza el sistema para los dos modos cuando crece porque aumenta el número de Reynolds crítico. Ello es debido a que el número de Biot es proporcional al número  $h_c$  característico de la conducción de calor a través de la superficie libre. Por lo tanto al ser grande resta energía térmica al sistema y la perturbación se estabiliza más fácilmente.

En la figura (5.2) se observa que el número de Reynolds crítico se reduce cuando aumenta el número de Prandtl asociado a la capa superior, lo que significa que tiene un papel desestabilizador para todo el sistema. El número de Prandtl del fluido superior es directamente proporcional a la capacidad calorífica y a la viscosidad e inversamente proporcional a la conductividad térmica. Lo anterior muestra que cuando el líquido contenido en la capa superior sea más capaz de acumular energía térmica, el sistema completo se desestabilizará más fácilmente.

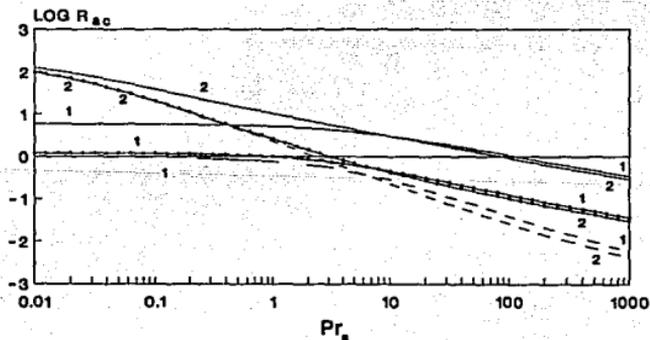
La viscoelasticidad de la capa superior tiene efectos estabilizadores para los dos modos como puede observarse en la figura (5.3). La diferencia de los tiempos de relajación y retardo en dicha capa permite que el sistema disipe energía mecánicamente.

El número de Weber estabiliza debido al aumento en la tensión superficial en la superficie libre. Así fluidos cuya tensión superficial relativa a un mismo gas sea mayor, tenderán a atenuar las deformaciones y por consecuencia harán aumentar al Reynolds crítico como se puede ver en la figura (5.4).



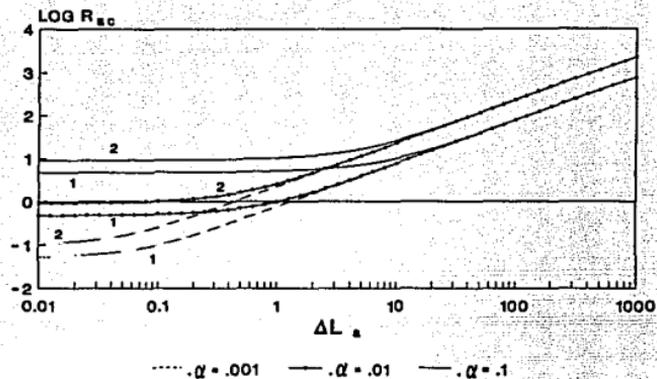
.....  $\alpha = .001$  —  $\alpha = .01$  —  $\alpha = .1$

Figura(5.1).  $\text{Log } R_{ac}$  vs  $B_a$ , para:  $d = \mu = \kappa = C_v = L = \rho = \sigma_o = 0.1$ ,  $Pr_a = \Delta L_a = 1$ ,  $S_a = 10000$  y  $\gamma = 0.1$ . Modo superficial:1. Modo entrecara:2.

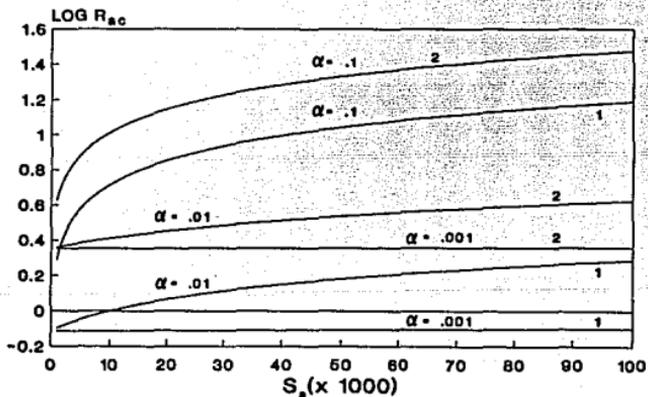


.....  $\alpha = .001$  —  $\alpha = .01$  —  $\alpha = .1$

Figura(5.2).  $\text{Log } R_{ac}$  vs  $Pr_a$  para:  $d = \mu = \kappa = C_v = L = \rho = \sigma_o = 0.1$ ,  $B_a = \Delta L_a = 1$ ,  $S_a = 10000$  y  $\gamma = 0.1$ .



Figura(5.3).  $\text{Log } R_{ac}$  vs  $\Delta L_a$  para:  $d = \mu = \kappa = C_v = L = 1$ ,  $\rho = \sigma_o = 0.1$ ,  $Pr_a = B_a = 1$ ,  $S_a = 10000$  y  $\gamma = 0.1$ . Modo superficial:1. Modo entrecara:2.



Figura(5.4).  $\text{Log } R_{ac}$  vs  $S_a$  para:  $d = \mu = \kappa = C_v = L = \rho = \sigma_o = 0.1$ ,  $Pr_a = \Delta L_a = B_a = 1$ , y  $\gamma = 0.1$ .

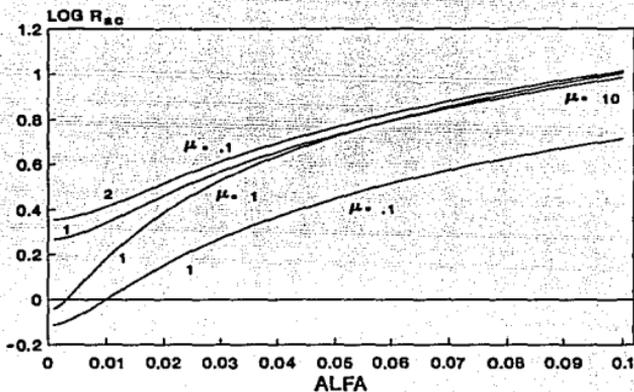
En la figura (5.5) se muestra el efecto estabilizador del cociente de las viscosidades correspondientes a cada capa. Cuando  $\mu$  es menor que uno, la viscosidad del fluido superior es mayor que la asociada a la capa inferior y se tiene la curva más baja. Por el contrario se obtiene una curva más alta ó estabilizante si la viscosidad de la capa superior es menor a la del fluido inferior,  $\mu=10$ . En estas situaciones el modo de la superficie libre desestabiliza primero al sistema.

La diferencia en espesores de las dos capas tiene efectos apreciables en la estabilidad como puede observarse en la figura (5.6). Cuando el espesor de la capa de arriba es mayor en diez veces al de la capa inferior el primer modo desestabiliza más fácilmente al sistema. Cuando  $d=1$  el modo de la entrecara desestabiliza primero para un número de onda menor a aproximadamente .005; por el contrario superado éste, el modo superficial será el primer desestabilizador.

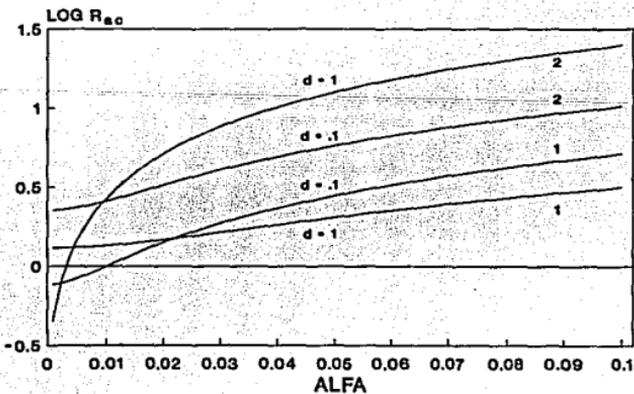
En las figuras (5.7) y (5.8) se muestra cómo el modo superficial es más inestable. En ellas se observa también que el  $\sigma_c$  afecta muy poco sólo al modo de la entrecara y que el cociente de capacidades caloríficas afectan ligeramente solo al modo superficial.

El incremento de  $L$  estabiliza. Se ve que para  $L=10$  el sistema es más estable que cuando  $L = .1$ . Con  $L=.1$  y  $1$  el modo superficial es más inestable que el modo de la entrecara ; por el contrario, si  $L = 10$  el segundo modo es más inestable que el modo superficial, como se muestra en la figura (5.9). Nótese que a partir de un valor de  $\alpha$  relativamente grande el modo de la entrecara cambia a ser el más estable.

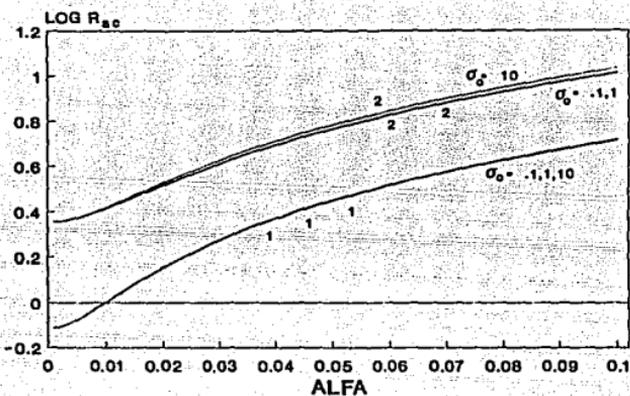
De la figura (5.10) se deduce que el modo superficial es el más inestable ya que tiene valores de Reynolds crítico menores en relación al modo de la entrecara cuando se varía la razón de densidades. Se observa que el cambio de éstas sólo afecta al modo superficial y que la condición  $\rho=0.1$  es más estable que  $\rho=10$ .



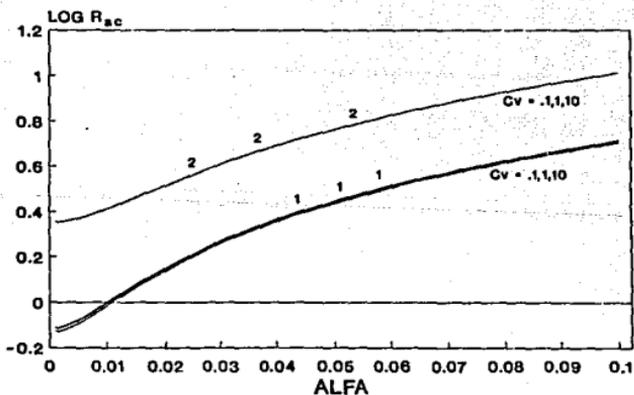
Figura(5.5).  $\text{Log } R_{ac}$  vs  $\alpha$  para:  $d = \sigma_o = \kappa = C_v = L = \rho = 0.1$ ,  
 $Pr_a = B_a = \Delta L_a = 1$ ,  $S_a = 10000$  y  $\gamma = 0.1$ . Modo superficial:1.  
 Modo entrecara:2.



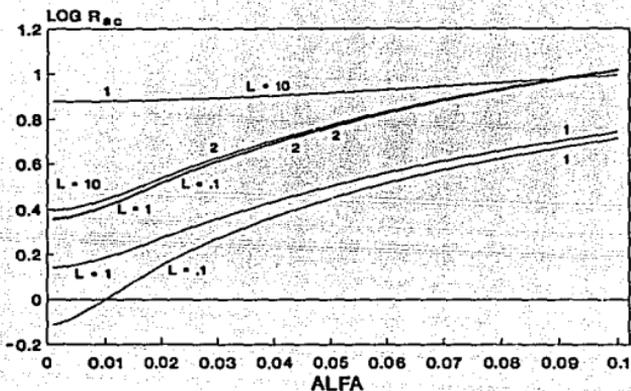
Figura(5.6).  $\text{Log } R_{ac}$  vs  $\alpha$  para:  $\mu = \sigma_o = \kappa = C_v = L = \rho = 0.1$ ,  
 $Pr_a = B_a = \Delta L_a = 1$ ,  $S_a = 10000$  y  $\gamma = 0.1$ .



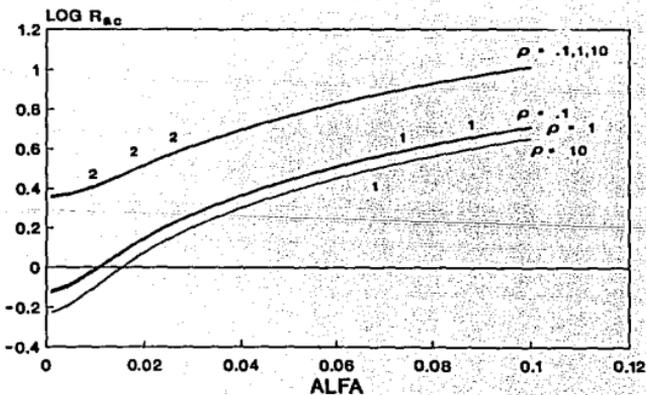
Figura(5.7).  $\text{Log } R_{ac}$  vs  $\alpha$  para:  $d = \mu = \kappa = C_v = L = \rho = 0.1$ ,  
 $Pr_a = B_a = \Delta L_a = 1$ ,  $S_a = 10000$  y  $\gamma = 0.1$ . Modo superficial:1.  
 Modo entrecara:2.



Figura(5.8).  $\text{Log } R_{ac}$  vs  $\alpha$  para:  $d = \sigma_0 = \kappa = \mu = L = \rho = 0.1$ ,  
 $Pr_a = B_a = \Delta L_a = 1$ ,  $S_a = 10000$  y  $\gamma = 0.1$ .



Figura(5.9).  $\text{Log } R_{ac}$  vs  $\alpha$  para:  $d = \sigma_o = \kappa = C_v = \mu = \rho = 0.1$ ,  
 $Pr_a = B_a = \Delta L_a = 1$ ,  $S_a = 10000$  y  $\gamma = 0.1$ . Modo superficial:1.  
 Modo entrecara:2.



Figura(5.10).  $\text{Log } R_{ac}$  vs  $\alpha$  para:  $d = \sigma_o = \kappa = C_v = L = \mu = 0.1$ ,  
 $Pr_a = B_a = \Delta L_a = 1$ ,  $S_a = 10000$  y  $\gamma = 0.1$ .

En la figura (5.11) se muestra que el cociente de conductividades térmicas no modifica significativamente el papel que juegan los dos modos.

En las figuras anteriores (5.5)-(5.11) se graficó el logaritmo del número de Reynolds crítico contra el número de onda de las perturbaciones para el caso  $\gamma=0.1$ . En esta situación los esfuerzos debidos al contraflujo de la capa de arriba superan a los generados por el gradiente de tensión superficial.

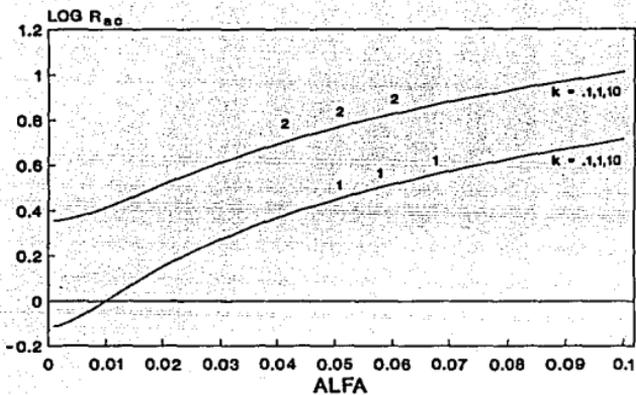
Para el caso de  $\gamma=0.5$  se tiene en el flujo básico que los esfuerzos sobre la entrecara debidos al contraflujo de la capa superior cancelan a los esfuerzos del gradiente de tensión superficial, lo que provoca que el fluido inferior se mantenga en reposo, ver figura(2.5).

En la figura(5.12) se observa que para el primer modo sólo existe un número de Reynolds crítico en el caso de  $\gamma=0.1$ . Lo mismo sucede para el segundo modo como se ve en la figura(5.13).

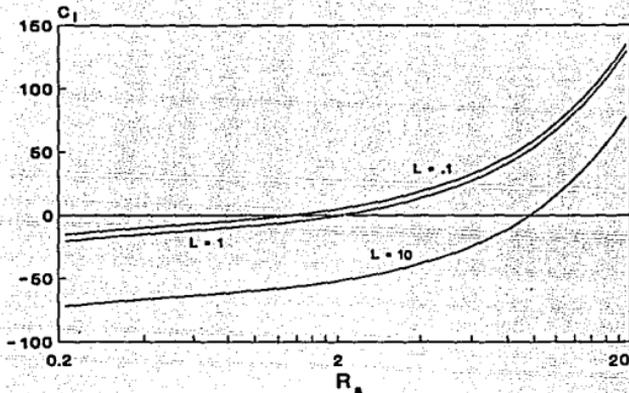
Como se observará más adelante en las figuras (5.14)-(5.25) el modo superficial sólo tiene un número de Reynolds crítico mientras que el segundo modo genera dos números de Reynolds críticos. La región comprendida entre éstas dos raíces es una zona inestable, (compárense con las figuras (5.27)-(5.28)).

Para  $\gamma=0.5$  el crecimiento del número de Biot del fluido superior, como antes, reduce el número de Reynolds crítico lo que significa que estabiliza el sistema. Esto se aprecia en la figura (5.14) en la que el modo superficial crece muy lentamente y el área comprendida entre las dos raíces del segundo modo se reduce también lentamente. Obsérvese que al aumentar  $\alpha$  el área comprendida entre las dos raíces del número de Reynolds crítico disminuye y por consecuencia estabiliza el sistema.

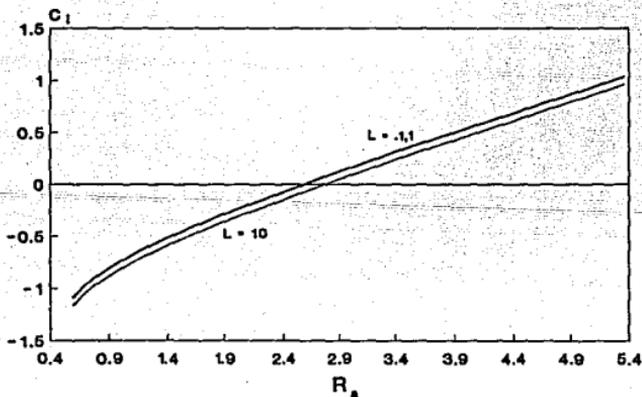
En la figura (5.15) el número de Prandtl desestabiliza el primer modo y disminuye el área inestable del segundo haciéndolo más estable.



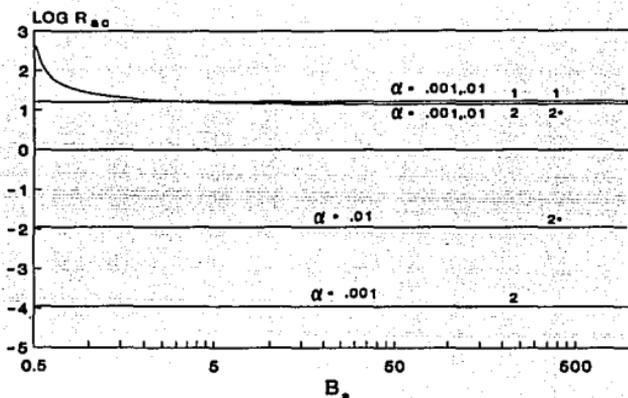
Figura(5.11). Log  $R_{ac}$  vs  $\alpha$  para:  $d = \sigma_o = \mu = C_v = L = \rho = 0.1$ ,  
 $Pr_a = B_a = \Delta L_a = 1$ ,  $S_a = 10000$  y  $\gamma = 0.1$ . Modo superficial:1.  
 Modo entrecara:2.



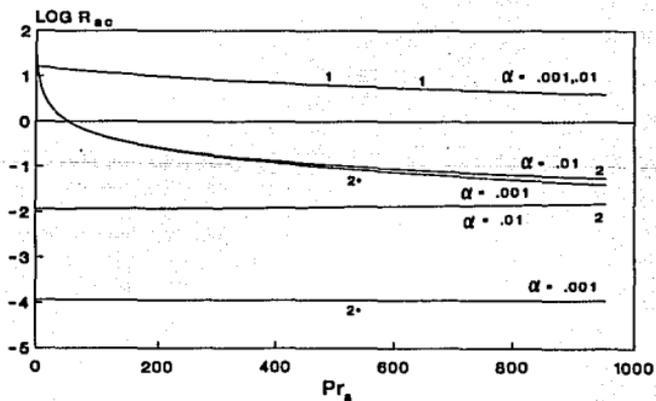
Figura(5.12).  $c_1$  vs  $R_a$  (primer modo) para:  $\mu = d = \sigma_0 = L = C_v = \kappa = \rho = 0.1$ ,  $Pr_a = B_a = \Delta L_a = 1$ ,  $S_a = 10000$  y  $\gamma = 0.1$ .



Figura(5.13).  $c_1$  vs  $R_a$  (segundo modo) para:  $\mu = d = \sigma_0 = L = C_v = \kappa = \rho = 0.1$ ,  $Pr_a = B_a = \Delta L_a = 1$ ,  $S_a = 10000$  y  $\gamma = 0.1$ .



Figura(5.14).  $\text{Log } R_{ac}$  vs  $B_A$  para:  $d = \mu = \kappa = C_v = L = \rho = \sigma_o = 0.1$ ,  $Pr_A = \Delta L_A = 1$ ,  $S_A = 10000$  y  $\gamma = 0.5$ . Modo superficial:1. Modo entrecara:2,2°.



Figura(5.15).  $\text{Log } R_{ac}$  vs  $Pr_A$  para:  $d = \mu = \kappa = C_v = L = \rho = \sigma_o = 0.1$ ,  $B_A = \Delta L_A = 1$ ,  $S_A = 10000$  y  $\gamma = 0.5$ .

El número  $\Delta L_a$  estabiliza al modo superficial como sucede en el problema de una sola capa [2]. Pero obsérvese que desestabiliza al segundo modo al aumentar su magnitud ya que hace crecer la sección de área inestable. Obsérvese la figura (5.16).

El número de Weber de la capa superior juega un papel estabilizador en el modo de la entrecara al hacer reducir la sección del área inestable con su crecimiento. El primer modo no es afectado significativamente. Obsérvese también que el número de onda reduce el área inestable cuando aumenta. Lo anterior es observado en la figura (5.17).

En las figuras (5.18)-(5.24) se muestra la estabilización que resulta de incrementar el número de onda para los dos modos. Ello se debe (igual que para  $\gamma=0.1$ ), al efecto que tiene la tensión superficial sobre las longitudes de onda más cortas.

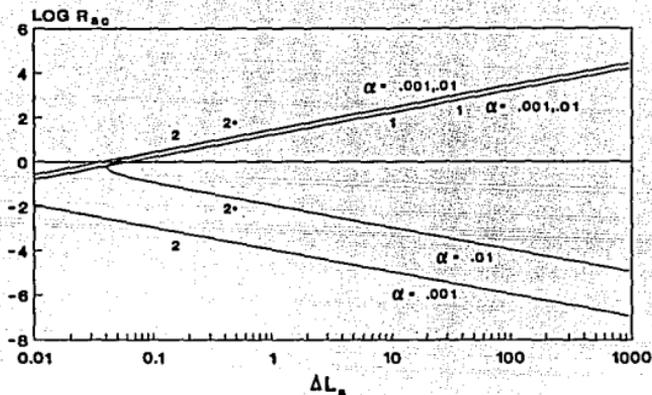
La figura (5.18) muestra cómo la reducción del espesor de la capa inferior con respecto al asignado para la capa superior, estabiliza. Lo mismo sucede para las viscosidades en la figura (5.19). Este resultado muestra como la capa inferior tiene un efecto lubricante al ser muy delgada.

Cuando la diferencia de tiempos de relajación y retardo de la capa inferior  $\Delta L_b$  se reduce con respecto a la asociada con la capa superior, ( $L=.1$ ) desestabiliza el primer modo sin modificar significativamente el modo de la entrecara, como se puede ver en la figura (5.20) para distintos valores de  $L$ . Para el segundo modo un efecto equivalente contiene la razón de densidades. Al reducir  $\rho$  el primer modo se estabiliza pero el segundo modo no cambia, como se muestra en la figura (5.21).

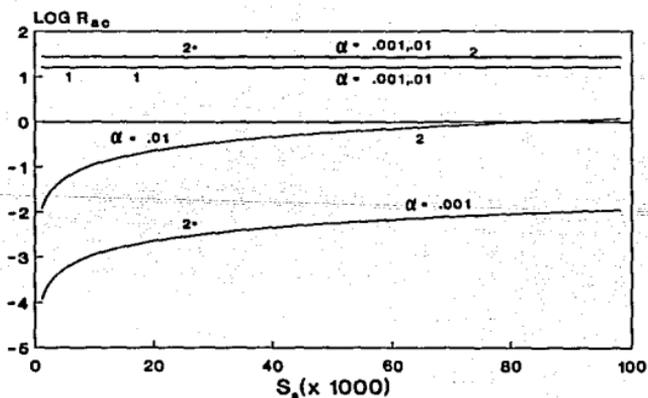
El aumento de  $\sigma_0$  desestabiliza la entrecara sin modificar el modo superficial significativamente, figura (5.22).

Las figuras anteriores muestran que el modo de la entrecara se ve afectado significativamente por  $\mu$ ,  $d$ ,  $\sigma_0$ .

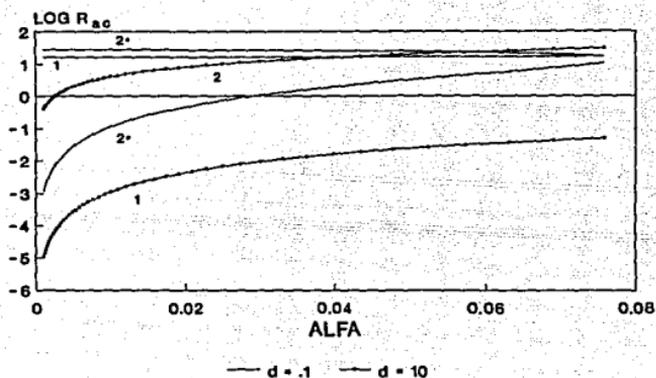
En las figuras (5.23)-(5.24) el cociente de capacidades caloríficas sólo afecta un poco al primer modo sin afectar al segundo, mientras que el cociente de conductividades térmicas no modifica ninguno de los modos.



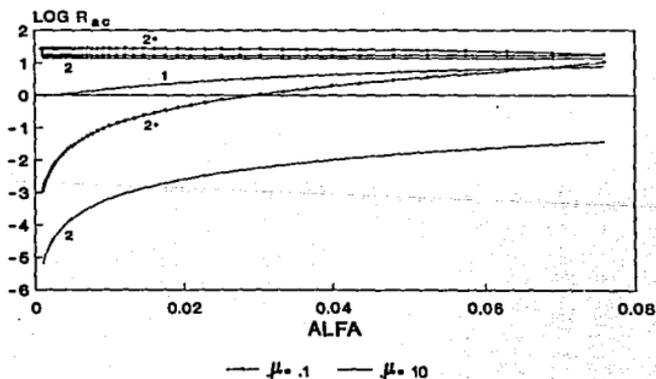
Figura(5.16).  $\text{Log } R_{ac}$  vs  $\Delta L_a$  para:  $d = \mu = \kappa = C_v = L = \rho = \sigma_o = 0.1$ ,  $Pr_a = B_a = 1$ ,  $S_a = 10000$  y  $\gamma = 0.5$ . Modo superficial:1. Modo entrecara:2,2\*.



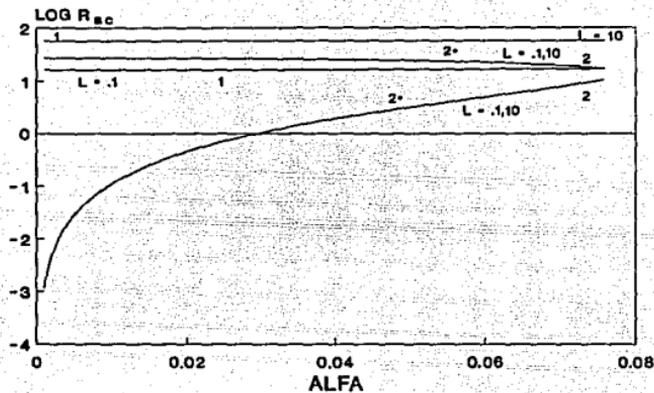
Figura(5.17).  $\text{Log } R_{ac}$  vs  $S_a$  para:  $d = \mu = \kappa = C_v = L = \rho = \sigma_o = 0.1$ ,  $Pr_a = B_a = \Delta L_a = 1$ , y  $\gamma = 0.5$ .



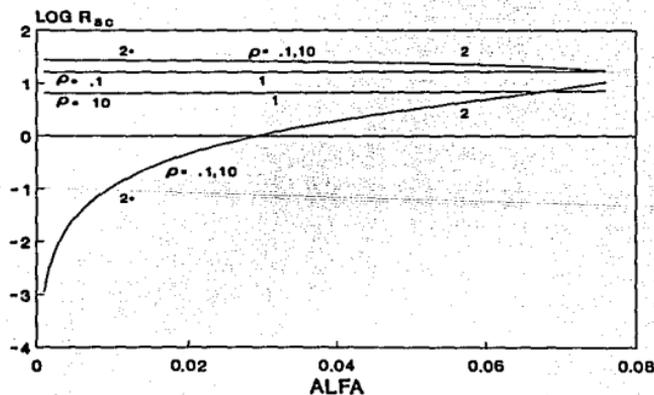
Figura(5.18).  $\text{Log } R_{ac}$  vs  $\alpha$  para:  $\mu = \kappa = C_v = L = \rho = \sigma_o = 0.1$ ,  
 $Pr_a = \Delta L_a = B_a = 1$ ,  $S_a = 10000$  y  $\gamma = 0.5$ . Modo superficial:1.  
 Modo entrecara:2,2\*.



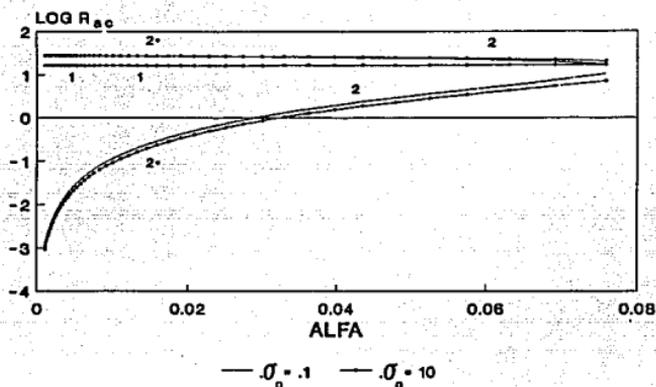
Figura(5.19).  $\text{Log } R_{ac}$  vs  $\alpha$  para:  $d = \kappa = C_v = L = \rho = \sigma_o =$   
 $0.1$ ,  $Pr_a = \Delta L_a = B_a = 1$ ,  $S_a = 10000$  y  $\gamma = 0.5$ .



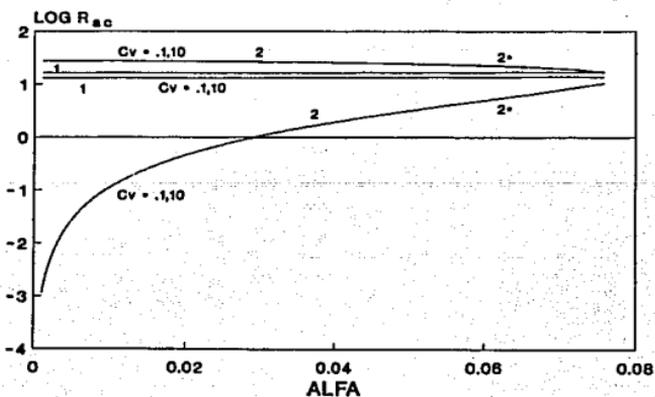
Figura(5.20).  $\text{Log } R_{ac}$  vs  $\alpha$  para:  $\mu = d = C_v = \kappa = \rho = \sigma_o = 0.1$ ,  
 $Pr_A = \Delta L_A = B_A = 1$ ,  $S_A = 10000$  y  $\gamma = 0.5$ . Modo superficial:1.  
 Modo entrecara:2,2\*.



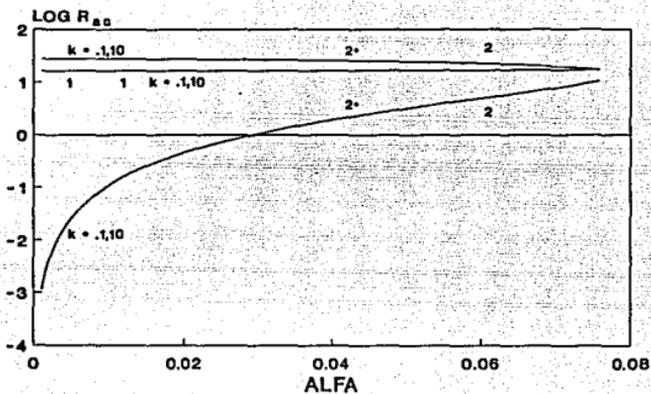
Figura(5.21).  $\text{Log } R_{ac}$  vs  $\alpha$  para:  $\mu = \kappa = C_v = L = d = \sigma_o = 0.1$ ,  
 $Pr_A = \Delta L_A = B_A = 1$ ,  $S_A = 10000$  y  $\gamma = 0.5$ .



Figura(5.22).  $\text{Log } R_{ac}$  vs  $\alpha$  para:  $\mu = \kappa = C_v = L = \rho = d = 0.1$ ,  
 $Pr_a = \Delta L_a = B_a = 1$ ,  $S_a = 10000$  y  $\gamma = 0.5$ . Modo superficial:1.  
 Modo entrecara:2,2\*.



Figura(5.23).  $\text{Log } R_{ac}$  vs  $\alpha$  para:  $\mu = \kappa = d = L = \rho = \sigma_0 = 0.1$ ,  
 $Pr_a = \Delta L_a = B_a = 1$ ,  $S_a = 10000$  y  $\gamma = 0.5$ .



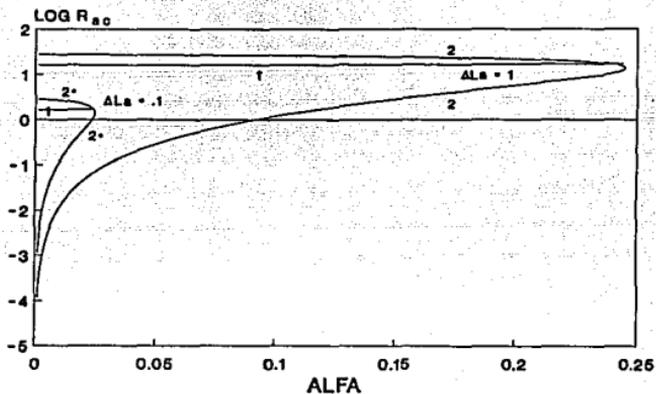
Figura(S.24).  $\text{Log } R_{ac}$  vs  $\alpha$  para:  $\mu = d = C_v = L = \rho = \sigma_o = 0.1$ ,  
 $Pr_a = \Delta L_a = B_a = 1$ ,  $S_a = 10000$  y  $\gamma = 0.5$ . Modo superficial:1.  
 Modo entrecara:2,2°.

En la figura (5.25) se muestra el efecto desestabilizador de  $\Delta L_a$ . Nótese que La región inestable está contenida dentro de las dos ramas de Reynolds criticos del modo de la entrecara, las cuales se juntan en un número de onda específico para formar una sola curva de estabilidad neutral. Se observa que existe un número de onda definido aquí como crítico  $\alpha_c$  a partir del cual las dos ramas del modo de la entrecara se unen. A la derecha de este punto la región del plano es completamente estable para todo número de Reynolds del fluido superior. Este  $\alpha_c$  se puede calcular en función de otros parámetros del sistema, haciendo cero el radicando que define al número de Reynolds crítico. Los resultados para  $S_a=1000$  y dos valores de  $\Delta L_a$  se presentan en la figura (5.26). Esta se puede comparar con la figura (5.25) en el punto donde se tocan las dos ramas de números de Reynolds criticos.

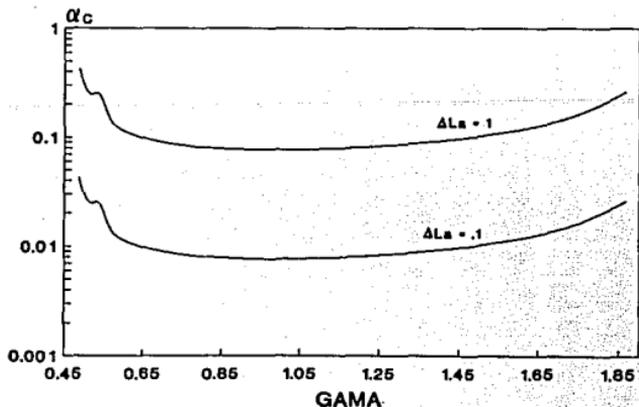
Como se observa en las figuras (5.27)-(5.28) para  $c_1$ , el modo superficial solo tiene un número de Reynolds crítico mientras que el segundo modo genera dos números de Reynolds criticos. La región comprendida entre éstas dos raíces es una zona inestable.

En las figuras (5.29)-(5.30) se obtuvieron las gráficas de  $c_1$  contra  $\gamma$  para valores fijos del número de Reynolds del fluido superior y  $\alpha$ . Obsérvese que el primer modo tiene una singularidad alrededor de  $\gamma=0.7$  aproximadamente, véase la figura(5.29).

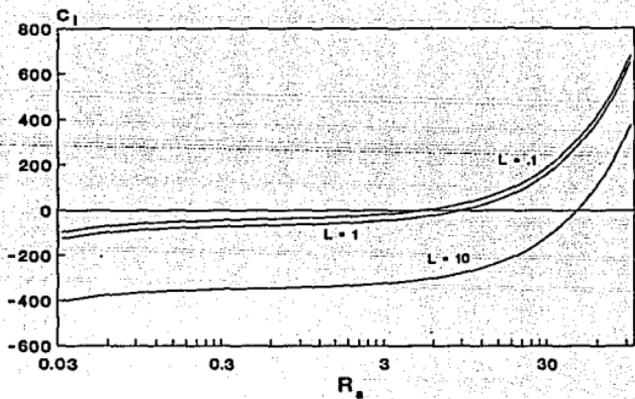
Por último en las figuras (5.31)-(5.32) se ve que sólo existe número de Reynolds crítico para el modo superficial pero el modo de la entrecara es siempre inestable para cualquier número de Reynolds de la capa de arriba, en el caso de  $\gamma=0.9$ .



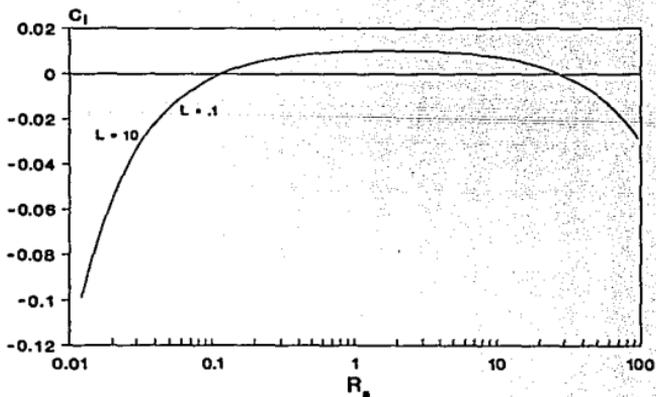
Figura(5.25).  $\text{Log } R_{ac}$  vs  $\alpha$  para:  $\mu = d = \kappa = C_v = L = \rho = \sigma_o = 0.1$ ,  $Pr_A = B_A = 1$ ,  $S_A = 1000$  y  $\gamma = 0.5$ . Modo superficial: 1, 2. Modo entrecara: 2, 2\*.



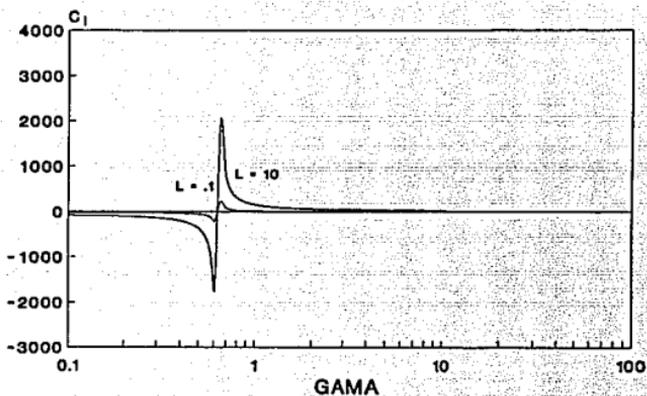
Figura(5.26).  $\alpha_c$  vs  $\gamma$  para:  $\alpha = .01$ ,  $R_A = .1$ ,  $\mu = d = \sigma_o = L = C_v = \kappa = \rho = 0.1$ ,  $Pr_A = B_A = 1$ ,  $S_A = 1000$  y  $\gamma = 0.5$ .



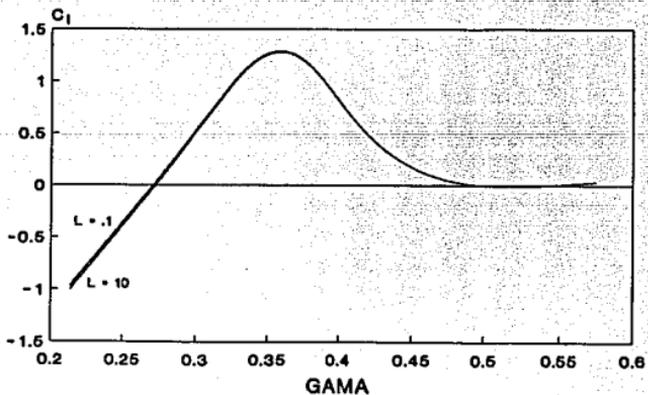
Figura(5.27).  $c_1$  vs  $R_a$  (primer modo) para:  $\mu = d = \sigma_o = C_v = \kappa = \rho = 0.1$ ,  $Pr_a = B_a = \Delta L_a = 1$ ,  $S_a = 10000$ ,  $\alpha = 0.01$ ,  $\gamma = 0.5$ .



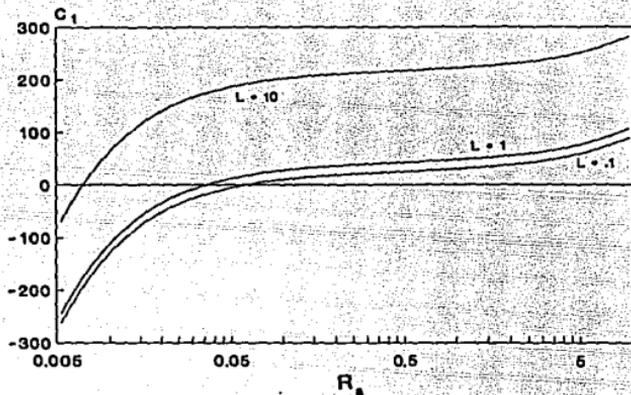
Figura(5.28).  $c_1$  vs  $R_a$  (segundo modo) para:  $\mu = d = \sigma_o = C_v = \kappa = \rho = 0.1$ ,  $Pr_a = B_a = \Delta L_a = 1$ ,  $S_a = 10000$ ,  $\alpha = 0.01$  y  $\gamma = 0.5$ .



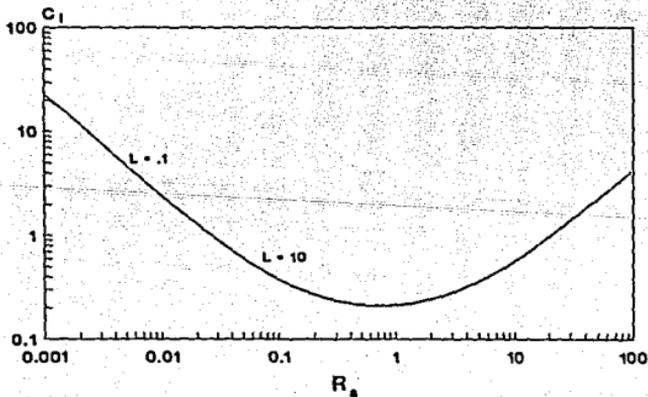
Figura(5.29).  $c_1$  vs  $\gamma$  (primer modo) para:  $\mu = d = \sigma_0 = C_v = \kappa = \rho = 0.1$ ,  $Pr_A = B_A = \Delta L_A = 1$ ,  $S_A = 10000$ ,  $\alpha = 0.01$  y  $R_A = 0.1$ .



Figura(5.30).  $c_1$  vs  $\gamma$  (segundo modo) para:  $\mu = d = \sigma_0 = C_v = \kappa = \rho = 0.1$ ,  $Pr_A = B_A = \Delta L_A = 1$ ,  $S_A = 10000$ ,  $\alpha = 0.01$  y  $R_A = 0.1$ .



Figura(5.31).  $c_1$  vs  $R_a$  (primer modo) para:  $\mu = d = \sigma_o = C_v = \kappa = \rho = 0.1$ ,  $Pr_a = B_a = \Delta L_a = 1$ ,  $S_a = 10000$ ,  $\alpha = 0.01$  y  $\gamma = 0.9$ .



Figura(5.32).  $c_1$  vs  $R_a$  (segundo modo) para:  $\mu = d = \sigma_o = C_v = \kappa = \rho = 0.1$ ,  $Pr_a = B_a = \Delta L_a = 1$ ,  $S_a = 10000$ ,  $\alpha = 0.01$  y  $\gamma = 0.9$ .

## CAPITULO VI

### CONCLUSIONES

El análisis lineal permite encontrar cuándo las perturbaciones crecen ó decrecen, pero deja indeterminadas a las amplitudes. La aproximación para grandes longitudes de onda se realiza porque a longitudes de onda cortas las perturbaciones son atenuadas por los esfuerzos normales debidos a la tensión superficial. Por lo tanto, es muy probable que las perturbaciones más inestables se encuentren para números de onda pequeños; además, el análisis a grandes longitudes de onda permite obtener una solución analítica. Obsérvese que los esfuerzos normales se componen del producto de la magnitud de la tensión superficial y la curvatura de deformación en la superficie. Para longitudes de onda cortas las deformaciones de la superficie libre y la entrecara son proporcionales a la curvatura, que es muy grande por ser inversamente proporcional al radio asociado a éstas. Ello genera grandes esfuerzos normales que tienden a eliminarla.

Con la finalidad de comparar con el sistema termocapilar de una sola capa estudiado en [2] se adimensionalizaron las ecuaciones del sistema con respecto al fluido de la capa superior.

Para  $c_0$  se encontraron dos raíces. La raíz con el signo positivo se le asocia a la perturbación de la superficie libre ya que en el límite de  $d \rightarrow 0$  éste modo de oscilación superficial coincide con el obtenido en [2] para el caso de una sola capa. La raíz con el signo negativo se debe a la deformación de la entrecara la que agrega un grado de libertad adicional al sistema en relación al de una sola capa y lleva a una singularidad cuando  $d \rightarrow 0$ . Las dos raíces corresponden a dos modos de oscilación de la superficie libre y la entrecara con dos fases distintas. Los dos valores de  $c_0$  son números reales y corresponden a velocidades de fase diferentes en ciento ochenta grados.

Se encontró que  $c_1$  es un número imaginario puro que define la estabilidad del sistema. Cuando  $c_1 = \text{Im}(c_1) = 0$  no hay crecimiento ni decrecimiento de la perturbación. Los parámetros que satisfacen esta condición son raíces de la ecuación y se les llama valores críticos para cada modo. De estos valores críticos, es de interés el correspondiente al número de Reynolds. Se encontró que se puede detener la capa de fluido inferior cuando  $\gamma = 0.5$ . Este hecho implica que el modo de la entrecara es estable para todos los números de Reynolds del fluido superior excepto en una región del plano. Esta región aparece como consecuencia de la viscoelasticidad ( $\Delta L_u$ ) del fluido contenido en la capa superior y no se encuentra, ni en el caso viscoelástico de una sola capa [2], ni en el caso Newtoniano de dos capas [17].

También se encontraron importantes efectos térmicos que modifican la estabilidad del sistema como es el caso de la variación de  $\gamma$ . Este parámetro es suficiente para cambiar el perfil de velocidades y la distribución de temperaturas del flujo básico lo que ocasiona un cambio significativo en la estabilidad del sistema. El incremento de  $\gamma$  genera tres tipos distintos de perfiles en el flujo principal con dos, una y tres celdas de convección.

Los efectos viscoelásticos tienden a estabilizar el sistema en la mayoría de los casos. La viscoelasticidad también atenúa ó aumenta el crecimiento de las perturbaciones en la entrecara debido a la respuesta de los esfuerzos normales cuando ésta se deforma.

La tensión superficial siempre estabiliza porque tiende a eliminar las deformaciones en la entrecara y la superficie libre.

El estudio de la estabilidad en capas líquidas delgadas proporciona información respecto a las condiciones en que se encuentra un sistema que se intenta cristalizar. En algunos procesos es necesario enfriar una capa delgada que tiene una alta temperatura para llevarla al estado sólido. En este proceso los

gradientes de temperatura existentes pueden provocar un estado inestable. Aquí, se investigó la curva de estabilidad neutral en soluciones poliméricas viscoelásticas y se encontró que, la diferencia de tiempos de relajación y retardo estabiliza las deformaciones de la superficie libre. Esto también se obtuvo para el problema de una sola capa [2]. Sin embargo, sorprendentemente, se encontraron valores de  $\gamma$  en los cuales la viscoelasticidad desestabiliza la entrecara. Ya que  $\gamma$  modifica el perfil de velocidades del flujo principal se puede inducir que los efectos viscoelásticos son muy sensibles a la forma del perfil.

Anular el movimiento de la capa inferior cuando  $\gamma=0.5$  es un resultado nuevo que no se había encontrado en otros sistemas físicos y que es generado por características térmicas de los fluidos que se seleccionan. Al principio se pensó que en este estado del sistema se podrían estabilizar los dos modos cosa que no sucedió, pero se logró aumentar significativamente el área en el plano de los parámetros para la cual es estable el modo de la entrecara.

En este valor de  $\gamma$  se reduce muy significativamente la región inestable del sistema para las deformaciones en el segundo modo de oscilación. La mencionada región de inestabilidad es solo consecuencia de los efectos viscoelásticos y no aparece en el caso Newtoniano [17].

En el sistema investigado en este trabajo quedan por aclararse otros problemas de interés que debido a la gran cantidad de parámetros y variedad de fenómenos no se pudieron incluir en esta tesis. Uno de ellos es el de observar el efecto que tengan las raíces del radicando de  $c_0$ . Ello puede llevar a la desaparición de uno de los dos modos de oscilación en la superficie libre y la entrecara, anular a los dos ó producir un cambio significativo en la estabilidad del sistema. También se pudieran encontrar otras regiones de estabilidad ó inestabilidad producidas por los efectos viscoelásticos de la capa inferior, etc.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Dávalos-Orozco L. A., Capillary instability due to a shear on the free surface of a viscoelastic fluid layer, será publicado en el J. Non-newtonian Fluid Mech. (1992).
- [2] Dávalos-Orozco L. A., Chávez A. E., Thermocapillary convection in a viscoelastic fluid layer under a horizontal temperature gradient, J. of Applied Polymer science, Applied polymer simposium 49, (1991).
- [3] Kao T. W., Stability of two-layer viscous stratified flow down an inclined plane, The Physics of Fluids, 8 , 5, (1965).
- [4] Kao T. W., Role of the interface in the stability of stratified flow down an inclined plane, The Physics of Fluids, 8 , 12 , (1965).
- [5] Shivamoggi, Bhimsen K., Theoretical fluid dynamics, Martinus Nijhoff Publishers, 1985.
- [6] Landau , L. D., Lifshitz, E. M., Fluid mechanics, second edition, Maxwell MacMillan International Edition, 1989.
- [7] Currie, I. G., Fundamental mechanics of fluids, McGraw-Hill, 1974.
- [8] Chandrasekhar, S., Hydrodynamic and hydromagnetic stability, Dover Publications, Inc., New York, 1961
- [9] Darby, R., Viscoelastic fluids, Marcel Dekker, Inc., New York, 1976.

[10] Pearson, J.R.A., On convection cells induced by surface tension, J. Fluid Mech., 4 , 5 , (1958).

[11] Dean, J. A., Lange's handbook of chemistry , ed. 33, McGraw-Hill, Inc., 1985.

[12] Smith y Davis, Instabilities of dynamic thermocapillary liquid layers, Part 1. Convective instabilities. J. Fluid Mech., 132 ,pp. 119-144, (1983).

[13] Smith y Davis, Instabilities of dynamic thermocapillary liquid layers, Part 2. Surface-wave instabilities. J. Fluid Mech., 132 ,pp. 145-162, (1983).

[14] Wei Lai, Stability of an elastico-viscous liquid film flowing down an inclined plane, The Physics of Fluids, 10 , 4, (1967).

[15] Chin-Hsiu Li, Stability of two superposed elastico-viscous liquids in plane Couette flow, The Physics of Fluids, 12, 3, (1969).

[16] Chin-Hsiu Li, Role of elasticity on the stability of stratified flow of viscoelastic fluids, The Physics of Fluids, 13, 7 , (1970).

[17] Dávalos-Orozco L. A., Convección termocapilar en dos fluidos superpuestos, en preparación, (1992).