20
2 ej-

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

APAREAMIENTOS EN GRAFICAS BIPARTITAS

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

ESPERANZA DE JESUS MENDEZ ORTIZ

MEXICO, D. F. 1992

INDICE

INTRODUCCION

El objetivo de este trabajo es presentar un panorama general de la teoría de los apareamientos en gráficas bipartitas. En la primera sección se enuncian los problemas cuya resolución depende de hallar un apareamiento máximo o perfecto en una gráfica en general o bipartita.

Subsecuentemente en las secciones 2, 3, 4 y 5 se desarrolla la teoría que sirve de base para la solución de los problemas planteados.

La sección 6 incluye dos algoritmos; el Húngaro y el de Kuhn-Munkres que resuelven respectivamente el problema de asignación de personal en una gráfica bipartita sin pesos en las aristas y con pesos. Estos problemas son casos especiales del problema de hallar un apareamiento de pesos máximos en sus aristas en una gráfica en general, al respecto se da una referencia en esta sección.

Con el próposito de introducirnos en un estudio más general de los apareamientos en gráficas presentamos en la seccion 7 los conceptos de deficiencia y excedente , así como algunos resultados en metroides.

TERMINOLOGIA BASICA

Presentamos una colección de definiciones necesarias para iniciar este estudio en teoría de gráficas. Añadiendo la terminología que se utilizará posteriormente.

Una **gráfica no dirigida** (o simplemente una gráfica), $G = (V , A)$, consiste de un conjunto no vacío de elementos, $V(G)$, llamados **vértices** y un conjunto de parejas no ordenadas de vértices, $A(G)$, llamadas **aristas**. En una gráfica se pueden permitir aristas multiples o paralelas. En una **gráfica simple** no se permiten las aristas paralelas. En nuestro caso nos referiremos a una gráfica como una gráfica simple. Además, en ésta, no se permiten los **lazos**, es decir, aristas de la forma uu, $u \in V$.

Si (u,v), o bien uv, es una arista de una gráfica G, se dirá que ésta **incide** en los vértices u y v, dicha arista une los vértices u y v, luego se dice que los vértices u y v son **adyacentes** en G. Dos aristas que comparten un vértice se llaman **incidentes**. El conjunto de aristas con exactamente un vértice extremo incidente con un vértice de $X \subset V$ será denotado por $A(X)$.

El número de aristas que inciden en un vértice u de una gráfica G es llamado el **grado** o **indice** del vértice u y se denotará $\delta_G(u)$. Si se sobrentiende a la gráfica G puede abreviarse $\delta(u)$. Una gráfica en la cual todos los grados son iguales a k se denomina **k-regular** y si G es k-regular para algún k, se dice simplemente que G es regular de grado k. Una gráfica 3-regular es llamada con frecuencia **cúbica**. El máximo de los grados de una gráfica G es denotado por $\Delta(G)$, es decir $\Delta(G) = \max \delta_G(v)$, $v \in V$.

Un **camino** $\mathcal{C}$ es una sucesión alternada de vértices y aristas, que principia y finaliza en vértices. Un **paseo** P es un camino en el cual todas las aristas son diferentes.

Si además en un paseo los vértices también son distintos se dice que el paseo es una **trayectoria**, τ. Dos trayectorias que no tienen vértices en común, excepto posiblemente sus vértices extremos, son llamadas, **trayectorias internamente ajenas**. La **longitud**, $\ell(\mathscr{C})$, de un camino es el número de aristas que lo componen. Si τ es una trayectoria y u, υ son cualesquiera dos vértices sobre τ, entonces $\tau[u,\upsilon]$ denotará la subtrayectoria de τ que tiene como vértices extremos a u y , υ, nos referiremos a $\tau[u,\upsilon]$ como una $u\upsilon$-trayectoria. Análogamente podemos pensar en un $u\upsilon$-camino.

Un ciclo se define como un camino cerrado en el que no se repiten vértices excepto el primero y el último.

Si G es una gráfica y H es también una gráfica tal que $V(H) \subseteq V(G)$ y $A(H) \subseteq A(G)$, entonces se dice que H es una **subgráfica** de G. Si H es una subgráfica de G y si cada arista que une dos vértices de H en G es también una arista de H, se dirá que H es una subgráfica **inducida** de G. Si X es un conjunto de vértices de la gráfica G, entonces G[X], es la subgráfica inducida por X (es la subgráfica inducida de G que tiene el conjunto de vértices X). Una subgráfica H de G se dice que es una subgráfica **generadora** si $V(H) = V(G)$. Un **n-factor** de una gráfica es una subgráfica generadora regular de grado n. Una gráfica en la cual cada par de vértices son adyacentes, se denomina **completa**. la gráfica completa con n vértices es denotada por K_n.

Una **gráfica** es **conexa** si cualesquiera dos de sus vértices son unidos por una trayectoria. Una subgráfica conexa máximal de G es una **componente conexa** de G. Las componentes conexas pueden ser pares o impares dependiendo de si su conjunto de vértices tiene cardinalidad par o impar. Algunas veces a la cardinalidad del conjunto de vértices de una gráfica se le denomina el **orden** de la gráfica.

Si el conjunto de vértices de una gráfica G puede ser particionado en dos conjuntos ajenos no vacíos, X e Y, de tal forma que $V(G) = X \cup Y$ y todas las aristas de G sólo tienen un extremo en X y el otro en Y, entonces se dice que G es **bipartita**, y nos referiremos a $X \cup Y$, o bien (X, Y), como una **bipartición** de G. Una gráfica bipartita especial es **la gráfica bipartita completa**, $K_{m,n}$, con bipartición (X,Y), tal que $|X| = m$ y $|Y| = n$, en $K_{m,n}$ cada uno de los vértices en X es adyacente a cada uno de los vértices en Y.

Una gráfica que no contiene ciclos es denominada **acíclica**. Una gráfica acíclica es conocida también como un **bosque**. Un **árbol** es una gráfica acíclica conexa. Si un árbol T es una subgráfica de G tal que $V(T) = V(G)$, diremos que T es un **árbol generador** de G.

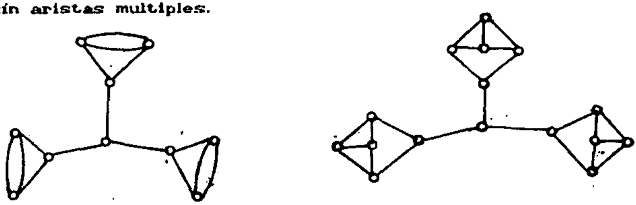
PRELIMINARES

Los problemas de apareamientos presentan un nivel de dificultad muy propio. La mayor parte de ellos son problemas resueltos, pero la solución de éstos requiere de métodos no triviales. En realidad la teoria de apareamientos a jugado un papel importante durante los últimos 100 años, en los que se ha desarrollado un gran número de métodos en combinatoria.

Aún cuando puede ser discutido que nombres famosos, tales como, Euler, Kirchhoff y Tait, pueden ser historicamente los fundadores de la teoría de apareamientos, podríamos tomar como los dos principales fundadores, de la díciplina al danés, Julius Petersen y al húngaro, Dénes König. Aunque desde luego, sus intereses se traslapan, es quizás útil identificar a Petersen como el primer estudioso de las gráficas regulares y a König con las gráficas bipartitas.

En un artículo Petersen (1891) considero el problema de una factorización algebraica, debido a Hilbert (1889), y lo reformuló como un problema de factorización de una gráfica. Se fija, como problema general, la tarea de decidir qué gráficas regulares tienen una factorización, no trivial, en subgráficas generadoras regulares cuya unión es la gráfica original. Petersen procedió entonces a probar que cualquier gráfica regular de grado par puede ser expresada como la unión de 2-factores de aristas independientes. Este resultado está relacionado con el resultado famoso de Euler, demostrado en su célebre artículo sobre el problema de los puentes de Königsberg (1736), aquel en que uno puede atravezar todas las aristas de una gráfica, una y sólo una vez, y retornar al vértice de partida, si y sólo si, la gráfica bajo consideración es conexa y todos sus vértices tienen grado par. Petersen no mencionó a Euler en su trabajo y en realidad hoy en día no se conoce si éste fué consiente del resultado de Euler, que habia sido descubierto 150 años antes.

Petersen observó que la factorización de gráficas regulares de grado impar, es un problema de mayor dificultad. Este, entonces, prueba que una gráfica conexa 3-regular que contiene no más de dos aristas de corte tiene un apareamiento perfecto y así puede descomponerse en 1-factor y en un 2-factor. El propósito de Petersen es hacer ver que existen gráficas 3-regulares con tres aristas de corte que no tienen un apareamiento perfecto. El da como ejemplo la gráfica de la figura (a) y la atribuye a Sylvester. La figura (b) muestra la gráfica correspondiente sín aristas multiples.



(a) (b)

La prueba de Petersen, sobre su teorema de descomposición para gráficas 3-regulares, fue simplificada sucesivamente por Brahana (1917-18), Errera (1922) y por Frink (1925-26). El último de éstos contenia un leve error que fue corregido en el libro de König (1936). El trabajo de Petersen, se extendió a otras gráficas regulares por Bäbler (1938, 1952, 1954), Gallai (1950) y por Belck (1950).

Esta línea de investigación culminó con el trabajo de Tutte. Mientras tanto, una segunda corriente de resultados relevantes en apareamientos empezó a fluir. El énfasis de este tiempo se relacionó con las gráficas bipartitas.

En dos artículos, casi independientes - uno en Alemán (1916), el otro en Húngaro (1916) - König prueba que cada matriz doblemente estocástica con entradas no negativas debe tener un término diferente de cero en su determinante. (Una matriz $n \times n$ es doblemente estocástica si la suma de los elementos de los renglones y columnas de ésta suman todos el mismo valor). Además, observa que la matriz es doblemente estocástica, si y sólo si, la gráfica bipartita, correspondiente a esta matriz, es regular. (König considera la siguiente correspondencia entre una matriz y una gráfica bipartita: Sean $r_1,\ldots,r_n$ los renglones de una matriz cuadrada M y $c_1,\ldots,c_n$ sus columnas, puede formarse una gráfica bipartita uniendo r_i a c_j, si y sólo si, la entrada m_{ij} de la matriz M no es cero). König prueba que cada gráfica bipartita regular de grado k es la unión de k apareamientos perfectos independientes.

El algebrista alemán, Frobenius, quien se interezo en las propiedades de reductibilidad de los determinantes, prueba los siguientes resultados. F1: Sea M una matriz de orden $n \times n$, tal que cada entrada de esta matriz es cero o una variable y todas aquellas entradas que no son cero tienen asignada una variable diferente. Entonces el determinante es un polinomio reducible de estas variables, si y sólo si, existe un entero p, $0 \leq p \leq n$, y una permutación de los renglones y las columnas de M en la cual se obtiene un bloque de entradas cero, de tamaño $p \times (n-p)$. F2: Considérese una matriz M de orden $n \times n$ en la cual cada entrada es cero o una variable (a entradas diferentes les corresponden variables diferentes). Supóngase que el determinante de M es un polinomio reducible de sus entradas diferentes de cero. Entonces existe un entero p, $0 < p < n$ y una permutación de los renglones y columnas de M tales que se obtiene un bloque de ceros, de tamaño $p \times (n-p+1)$, contenido en M. El resultado F2 es de considerable interés no sólo por que a través de éste se obtiene una prueba más pequeña para F1 si no que al interpretarlo en el ámbito de la teoría de las gráficas bipartitas, se establece una condición necesaria y suficiente para que una gráfica bipartita tenga un apareamiento perfecto. En ocasiones, se hace referencia a este resultado como el Teorema de los Matrimonios. Supóngase que se tienen n-hombres y n-mujeres a quienes deseamos casar, sin permitir las bigamias y las relaciones homosexuales, sólo si ambos, mujer y hombre, se simpatizan. Esto es posible, si y sólo si, para cada k, $1 \leq k \leq n$, cada conjunto de k-hombres conoce al menos a k-mujeres.

El problema de los matrimonios fué precursor de uno de los resultados más conocidos en apareamientos de gráficas bipartitas, el teorema sobre Distintos Representantes debido a Philip Hall (1935). El teorema de Hall fué primeramente establecido en terminos de conjuntos. Sea $S_1,\dots,S_n$ una colección finita de conjuntos. Existe un conjunto de distintos elementos $x_1,\dots,x_n$ tal que $x_i \in S_i$, si y sólo si, para cada k, $1 \leq k \leq n$, la unión de k de estos S_i conjuntos, contiene al menos k elementos.

1. APLICACIONES

1.1 Problema de una farmacéutica.
(L. Lovász [17])

Supóngase que una farmacéutica desea poner a prueba n antibióticos en n sujetos voluntarios. Sin embargo, exámenes preliminares muestran que determinados sujetos son alérgicos a ciertas drogas. ¿Puede diseñarse un experimento en el que cada sujeto tome exactamente uno de los antibióticos a los que el o ella no sea alérgico y cada droga sea tomada por exactamente uno de los sujetos?.

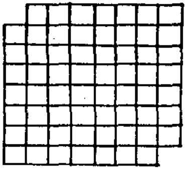
Sea como módelo de esta situación una gráfica bipartita G en la que sus clases de vértices consisten de los n sujetos y los n antibióticos respectivamente conviniendo en relacionar un sujeto a una droga si y sólo si el sujeto no es alérgico a la droga. Entonces la respuesta a la pregunta propuesta es afirmativa si y sólo si la gráfica G tiene un apareamiento perfecto.

1.2 Problema de un proceso por computadora.
(L. Lovász [17])

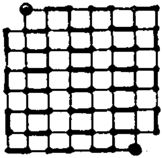
Supóngase ahora que se tienen dos computadoras disponibles y p tareas para ser prosesadas en éstas. Se asume que cualquier tarea puede ser realizada en cualquiera de las dos computadoras. En suma se puede asumir que las computadoras son idénticas. Supóngase también que las p tareas son parcialmente ordenadas en el sentido de que para cualesquiera dos tareas diferentes J_i y J_k, $J_i \leq J_k$ indica que J_i debe ser completada antes de que J_k pueda ser iniciada por cualquier computadora. Si todas las tareas requieren una cantidad igual de tiempo para ser completadas, ¿Cuál es el menor tiempo posible, suficiente para completar todas las tareas?. Un módelo de esta situación es usando una gráfica G en la que el conjunto de vértices son las tareas $J_1, J_2, \ldots, J_p$, tal que J_i es adyacente en G a J_k si y sólo si éstas son incompatibles en el orden parcial (En otras palabras, si éstas pueden ser ejecutadas simultáneamente). Es claro que al designar un programa óptimo, se deben usar simultáneamente ambas máquinas tan frecuentemente como sea posible; esto es, debe hallarse un apareamiento de cardinalidad máxima en G. Este problema pertenece a la clase de los llamados problemas de apareamiento máximo. Obsérvese que en este caso, a diferencia del ejemplo 2.1 la gráfica modelo del problema no es bipartita.

1.3 Problema del tablero de ajedrez truncado. (C. Berge [3])

Considérese un tablero de ajedrez de 8 x 8 donde las casillas superior izquierda e inferior derecha están removidas.



Tablero de ajedrez truncado.



Apareamiento máximo de la gráfica correspondiente.

Se tienen 31 fichas de dómino, con cada ficha se cubren exactamente dos casillas adyacentes del tablero de ajedrez.

Pueden ser cubiertas las 62 casillas del tablero de ajedrez con las 31 fichas. Este problema es equivalente a encontrar un apareamiento máximo en una gráfica donde los vértices de ésta corresponden a las casillas del tablero de ajedrez truncado. En esta gráfica dos de sus vértices son adyacentes si estos representan dos casillas adyacentes en el tablero de ajedrez. Es fácil ver que el apareamiento en la figura anterior no es perfecto. Puede darse un argumento simple que no hace uso de la teoría de apareamientos para demostrar que no es posible encontrar un apareamiento perfecto: Colorear de blanco y negro las casillas del tablero de ajedrez. Note que el tablero de ajedrez truncado no tiene el mismo número de casillas blancas y negras, las dos esquinas faltantes tienen el mismo color. Cualquier arreglo de las fichas cubre el mismo número de casillas blancas y negras. Por lo tanto el apareamiento perfecto no puede existir.

Si el tablero de ajedrez tuviera el mismo número de casillas blancas y negras, el número de fichas necesarias para cubrirlo sería difícil de calacular sin hacer uso de la teoría de apareamientos.

1.4 La batalla Británica
(C. Berge [3])

En 1941, la real fuerza aérea estaba compuesta de aviones que requerían dos pilotos. Sin embargo, ciertos pilotos no pueden volar juntos por las diferencias en lenguaje o disciplina. Dadas estas restricciones, ¿Cuál sería el mayor número de aviones que podrían ser puestos simultáneamente en vuelo?. Este problema es resuelto hallando un apareamiento máximo en una gráfica donde los vértices corresponden a los pilotos y sus aristas relacionan a los pilotos que pueden volar juntos.

1.5 Problema de asignación de personal
(C. Berge [3])

Una oficina tiene p secretarias $x_1, x_2, \ldots, x_p$ y q tareas $y_1, y_2, \ldots, y_q$. Cada secretaria está capacitada para ejecutar al menos una tarea. ¿Es posible asignar una secretaria a una tarea para la cual ella está calificada? Sea $\Gamma(x_i)$ el conjunto de tareas para las cuales está capacitada la secretaria x_i. El problema se reduce a encontrar un apareamiento que sature todos los vértices en X de una gráfica bipartita $G = (X, Y, \Gamma)$.

1.6 Problema de la cita
(C. Berge [3])

En un colegio americano, cada chica tiene k amigos y cada muchacho tiene k amigas. ¿ Sería posible tener un baile en el cual simultáneamente todos los estudiantes bailarán con uno de sus amigos?. Posteriormente, se mostrará que ésto es posible.

2. EL PROBLEMA DEL APAREAMIENTO MAXIMO

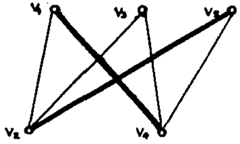
Dada una gráfica simple $G = (V, A)$, un *apareamiento* en G es definido como un conjunto Mo de aristas tal que dos aristas de Mo no son adyacentes. Si Mo es un apareamiento, y si $M_1 \subset Mo$, entonces M_1 es también un apareamiento.

Se estudiará el problema siguiente: *Dada una gráfica G hallar un apareamiento Mo tal que* $|Mo|$ *es máxima.*

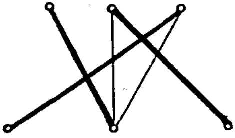
Un apareamiento M de una gráfica G es máximo si G no contiene un apareamiento M' tal que $|M'| > |M|$. Un vértice v se dice que es *saturado* por un apareamiento Mo (o bien Mo-saturado) si una arista de Mo incide en v. $S(Mo)$ denotará el conjunto de todos los vértices saturados por Mo. Un apareamiento que satura a todos los vértices de G es llamado un *apareamiento perfecto*. Claramente, un apareamiento perfecto es un apareamiento máximo.

Utilizaremos líneas obscuras para denotar las aristas de Mo y líneas leves para denotar las aristas de $A - Mo$.

Consideremos un apareamiento Mo. Una *trayectoria alternada* o *Mo-alternada* se define como una trayectoria cuyas aristas están alternadamente en Mo y en $\overline{Mo} = A - Mo$, es decir se alternan una arista obscura y una clara. Por ejemplo en la gráfica (a) la trayectoria (v_1, v_4, v_5, v_2) es una trayectoria alternada.



(a) Un apareamiento máximo



(b) Un apareamiento perfecto

El concepto de trayectoria M-alternada es de gran utilidad en la teoría de apareamientos, a continuación enunciaremos un lema que sirve de base para probar el teorema que muestra cuándo una gráfica G tiene un apareamiento máximo.

Lema 2.1. Sea $G = (V, A)$ una gráfica simple y sean M_0 y M_1 dos apareamientos en G. Consideremos la gráfica parcial $G' = (V, A')$, con el conjunto de aristas

$$A' = (M_0 - M_1) \cup (M_1 - M_0).$$

Cada componente conexa de G' es de uno de los siguientes tres tipos:

Tipo 1. Un vértice aislado.

Tipo 2. Un ciclo de longitud par donde sus aristas están alternadamente en M_0 y M_1.

Tipo 3. Una trayectoria en la que sus aristas están alternadamente en M_0 y M_1, y los vértices extremos de ésta no están saturados por alguno de los dos apareamientos.

Demostración. Dado un vértice $v \in V$. Considérense los siguientes tres casos:

Caso 1. Si $v \notin S(M_0 - M_1)$ y $v \notin S(M_1 - M_0)$, entonces v es un vértice aislado en G'.

Caso 2. Si $v \in S(M_0 - M_1)$ y $v \notin S(M_1 - M_0)$, entonces v es un vértice extremo de una arista en $M_0 - M_1$. Ninguna otra arista de $M_0 - M_1$ puede ser incidente en v (debido a que M_0 es un apreamiento); ninguna de las aristas de $M_1 - M_0$ es incidente en v ($v \notin S(M_1 - M_0)$). Además, $v \notin S(M_1)$ (de otro modo una arista de M_1 incidente en v podría pertenecer a $M_1 - M_0$).

Caso 3. Si $v \in S(M_0 - M_1)$ y $v \in S(M_1 - M_0)$, entonces existe una única arista de $M_0 - M_1$ incidente en v y una única arista de $M_1 - M_0$ que también incide en v.

Después de detallar estos tres casos, se concluye que el grado máximo de la gráfica parcial

$$(V, (M_0 - M_1)\cup(M_1 - M_0))$$

es 2. Esto exhibe que las componentes conexas pueden ser de uno de los tres tipos descritos anteriormente. □

Antes de enunciar un resultado atribuido a Berge, definiremos el concepto de trayectoria M-aumentante que ha sido la base de importantes resultados y algoritmos para hallar un apareamiento máximo en una gráfica en general o bipartita.

Definición. Una trayectoria *M-aumentante* es una trayectoria M-alternada cuyos vértices inicial y terminal no están M-saturados.

Ahora bien, el problema de hallar un apareamiento de cardinalidad máxima en una gráfica es resuelto bajo condiciones necesarias y suficientes dadas por Berge.

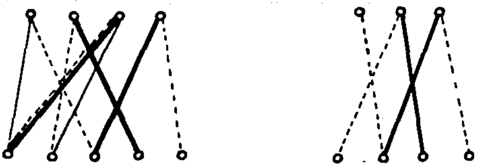
Teorema 2.1 (Berge [1957]). Un apareamiento M_0 de G es máximo si y sólo si G no contiene trayectorias M_0-aumentantes.

Demostración. Si M_0 es un apareamiento para el cual existe una trayectoria M_0-aumentante, entonces intercambiando las aristas obscuras y claras a lo largo de esta trayectoria se obtiene un nuevo apareamiento M_1 con $|M_1| = |M_0| + 1$. Luego el apareamiento M_0 no es máximo.

Recíprocamente, supóngase que M_0 no es un apareamiento máximo, y sea M' un apareamiento máximo en G. Entonces

$$|M'| > |M_0| \qquad (2.1)$$

Sea $H = G\,[M_0 \triangle M']$, donde $M_0 \triangle M'$ es la diferencia simétrica de M_0 y M'.



(a) (b)

(a) G, con M_0 obscuras y M' punteadas; (b) $G[M_0 \Delta M']$.

Cada vértice $v \in H$ tiene grado $\delta_H(v) \leq 2$ ya que éste puede ser incidente con a lo más una arista de Mo y una de M'. Así cada componente de H es un ciclo de longitud par cuyas aristas están alternadamente en Mo y M', o bien una trayectoria cuyas aristas están alternadamente en Mo y M'. En cada ciclo de longitud par hay tantas aristas de Mo como de M'. De (2.1) se sigue que H debe contener más aristas de M' que de Mo. Luego las componentes conexas de H no pueden ser sólo ciclos de longitud par. Por lo tanto existe una trayectoria τ la cual puede iniciar en una arista de Mo y finalizar en una arista de M', en este caso el número de aristas de Mo ($(A(Mo)$) es igual al número de aristas de M' ($A(M')$) en τ. Si la trayectoria τ principia y termina en una arista de Mo, $|A(Mo)| > |A(M')|$. Así en G existen al menos tantas aristas de Mo como de M'. Luego $|Mo| \geq |M'|$ lo cual no puede ocurrir dado (2.1). Debe existir entonces en H una trayectoria τ' la cual empieza y termina en una arista de M'. Los vértices extremos de τ' que están M'saturados en H, son Mo-saturados en G. Así τ' es una trayectoria Mo-aumentante en G lo cual contradice el supuesto de que G no contiene trayectorias Mo-aumentantes. □

Como consecuencia de este teorema, se tienen los siguientes dos corolarios que nos permiten ahondar en el estudio de los apareamientos máximos a través de los conceptos de transferencia y arista libre.

Definición. Considérese un apareamiento M y una trayectoria $\tau = (a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots)$ tal que $a_i \in M$ y $b_i \notin M$. La operación de intercambio de una arista obscura a_i y una arista clara b_i en τ se denomina una "*transferencia*" sobre τ.

Corolario 2.1. Cada apareamiento máximo M_1 puede ser obtenido de un apareamiento M_0 a través de una secuencia de transferencias a lo largo de ciclos M_0-alternados o trayectorias M_0-alternadas de longitud par que empiezan en un vértice no saturado.

Demostración. Es suficiente hacer las transferencias a lo largo de las componentes conexas de la gráfica parcial generada por $(M_0 - M_1) \cup (M_1 - M_0)$, donde las componentes conexas resultan ser de los tres tipos especificados en el lema 2.1. □

Definición. Una arista se denomina "*libre*" si ésta pertenece a un apareamiento máximo pero no pertenece a todos los apareamientos máximos.

Corolario 2.2. Una arista es libre si y sólo si dado un apareamiento máximo M_0 arbitrario, la arista a pertenece a una trayectoria alternada de longitud par que empieza en un vértice no saturado o bien a un ciclo alternado.

Demostración. Si a pertenece a una trayectoria M_0 alternada del tipo descrito anteriormente, entonces claramente, a es una arista libre.

Recíprocamente, si a es libre, supóngase, por ejemplo, que $a \in M_0$ y $a \notin M_1$ para algún apareamiento máximo M_1. Así $a \in (M_0 - M_1) \cup (M_1 - M_0)$. Luego a pertenece a una componente conexa de la gráfica parcial generada por $M_0 \Delta M_1$, es decir α pertenece a una trayectoria alternada que empieza en un vértice no saturado o bien a un ciclo alternado. □

En el estudio del análisis combinatorio encontramos el concepto de apareamiento relacionado a la cuantificación del número de aristas en una gráfica, en este sentido se cita el siguiente teorema atribuido a Erdős y Gallai.

Teorema 2.2 (Erdős, Gallai [1959]). **El máximo número de aristas en una gráfica simple de orden n con un apareamiento máximo de q aristas ($n \geq 2q > 0$) es:**

$$\begin{cases} \binom{2q}{2} & \text{si} \quad n = 2q \\ \binom{2q+1}{2} & \text{si} \quad 2q < n \leq \frac{5q+3}{2} \\ \binom{q}{2} + q(n-q) & \text{si} \quad n > \frac{5q+3}{2} \end{cases}$$

Demostración. En el caso en que el orden es $n = 2q$, la gráfica K_{2q}, con $2q$ vértices es una gráfica de orden n con

$$\frac{2q(2q-1)}{2} = \binom{2q}{2}$$ aristas y un apareamiento máximo de

cardinalidad q.

En el segundo caso la gráfica formada por la unión de la gráfica K_{2q+1} y un conjunto $S_{n-(2q+1)}$ de $n - (2q+1)$ vértices aislados, resulta ser una gráfica de orden $n > 2q$ con un apareamiento máximo de cardinalidad q y aristas

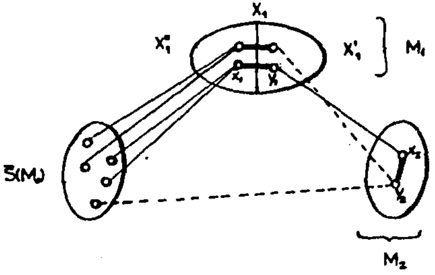
$$m = \binom{2q+1}{2}.$$

Finalmente en el tercer caso considerando la gráfica K_q y el conjunto de vértices independientes S_{n-q}, haciendo adyacentes los vértices de K_q a todos los vértices de S_{n-q}, se obtiene una nueva gráfica de orden n con apareamiento máximo de cardinalidad q ya que $n - q > q$ $(n > 2q)$ y

$$m = \binom{q}{2} + q(n - q) \text{ aristas.}$$

Ahora se mostrará que el número dado representa el máximo número posible de aristas. Para el primer caso $(n = 2q)$, esto es claro.

Para el segundo caso supóngase que $n \geq 2q + 1$. Denótese con $\overline{S}(M_0)$ el conjunto de vértices no saturados por un apareamiento máximo M_0 donde $q = |M_0|$. Ya que $n > 2q$ se tiene que $\overline{S}(M_0) \neq \emptyset$. Denótese con M_1 las aristas (x'', y') del apareamiento M_0 que tienen un vértice extremo x'' adyacente a varios vértices de $\overline{S}(M_0)$.



Del teorema 2.1 se sigue que el otro extremo y' de una arista tal no puede ser adyacente a $\overline{S}(M_0)$, ya que entonces existiría una trayectoria M_0-aumentante, y M_0 dejaría de ser un apareamiento máximo.

Sea $M_2 = M_0 - M_1$, sean $q_1 = |M_1|$ y $q_2 = |M_2|$. Luego

$q_1 + q_2 = q$.

Para $i = 1,2$, sea X_i el conjunto de los vértices extremos de las aristas de M_i. Así

$$X_1 \cap X_2 = \emptyset, \quad X_1 \cap \overline{S}(M_0) = \emptyset, \quad X_2 \cap \overline{S}(M_0) = \emptyset.$$

1. Dos aristas de M_1 no pueden pertenecer a una gráfica completa de orden 4 porque entonces existiría una trayectoria M_0-alternada la cual conectaría dos vértices de $\overline{S}(M_0)$ (en G no pueden existir aristas con ambos extremos en X_1'). Así el número de aristas de G que unen dos vértices de X_1, satisface

$$m_G(X_1, X_1) \le \binom{2q}{2} - \binom{q}{2}$$

2. El número de aristas de G que unen los vértices de X_1 y $\overline{S}(M_0)$ satisface

$$m_G(X_1, \overline{S}(M_0)) \le q_1(n-2q).$$

3. Sea (x_2, y_2) una arista de M_2. Si ni x_2 ni y_2 son adyacentes al conjunto X_1' de vértices de X_1 que no son adyacentes a $\overline{S}(M_0)$, entonces

$$m_G(\langle x_2, y_2\rangle, V-X_2) \le 2q_1 + 2$$

ya que ambos extremos x_2, y_2 pueden ser adyacentes a q_1 vértices de X_1'' y sólo a un vértice de $\overline{S}(M_0)$.

Si el vértice extremo x_2 de la arista (x_2, y_2) es adyacente a X_1' su otro vértice extremo y_2 no puede ser adyacente a $\overline{S}(M_0)$ ni a X_1' ya que esto daría origen a una trayectoria M_0-aumentante. Similarmente el vértice extremo y_2 no puede ser adyacente a dos vértices de X_1'. Sin embargo tanto x_2 como y_2 pueden ser adyacentes a X_1'' y x_2 puede ser adyacente a un vértice de $\overline{S}(M_0)$, entonces

$$m_G(x_2, V-X_2) \le 2q_1 + 1,$$

$$m_G(y_2, V-X_2) \le q_1 + 1.$$

Luego

$$m_G(\langle x_2, y_2\rangle, V-X_2) \le 3q_1 + 2.$$

Finalmente se obtiene

$$m_a(X_2, V-X_2) \le 3q_1q_2 + 2q_2.$$

Como consecuencia,

$$m = m_a(X_2,V-X_2) + m_a(X_2,X_2) + m_a(X_1,\overline{S}(M_0)) + m_a(X_1,X_1)$$

$$\le 3q_1q_2 + 2q_2 + \binom{2q}{2} + q_1(n-2q) + \binom{2q}{2} + \binom{q}{2}$$

$$= \binom{2q+1}{2} + q_1\left(n - 3q + \frac{q_1-3}{2}\right).$$

Ahora

$$n - 3q + \frac{q_1-3}{2} = \frac{2n - 6q + q_1 - 3}{2} = \frac{2n - 5q - 3 + q_1 - q}{2}$$

$$= \left(n - \frac{5q+3}{2}\right) + \frac{q_1-q}{2}.$$

Si $n \le \frac{5q+3}{2}$, entonces

$$n - 3q + \frac{q_1-3}{2} = \left(n - \frac{5q+3}{2}\right) + \frac{q_1-q}{2} \le 0.$$

Por lo tanto

$$m \le \binom{2q+1}{2}.$$

Si $n > \frac{5q+3}{2}$, entonces

$$n - 3q + \frac{q_1-3}{2} = -\left[\left(\frac{5q+3}{2} - n\right) + \frac{q-q_1}{2}\right].$$

Así

$$m_a \le \binom{2q+1}{2} + q_1\left(n - 3q + \frac{q_1-3}{2}\right)$$

$$= \binom{q}{2} + q(n-q) + q\left(\frac{5q+3}{2} - n\right) - q_1\left[\left(\frac{5q+3}{2} - n\right) + \frac{q-q_1}{2}\right].$$

es decir

$$m_a \le \binom{q}{2} + q(n-q) + (q-q_1)\left(\frac{5q+3}{2} - n\right) - \frac{1}{2}q_1(q-q_1)$$

o bien

$$m_a \leq \binom{q}{2} + q(n-q).$$

Combinando las desigualdades para todos los casos obtenemos

$$m \leq \max \left\{ \binom{2q+1}{2}, \binom{q}{2} + q(n-q) \right\}.$$

Nota: $$\binom{2q+1}{2} \geq \binom{q}{2} + q(n-q)$$

o equivalentemente

$$2q(2q+1) - q(q-1) + 2q^2 \geq 2qn$$

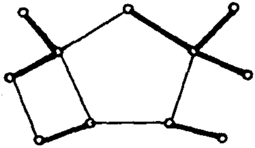
o bien

$$n \leq \frac{5q+3}{2}. \quad \square$$

A grandes rasgos se ha discutido el problema de hallar un apareamiento máximo en una gráfica. Sin embargo, hay una dualidad de este concepto que será abordada en la siguiente sección.

3. EL PROBLEMA DEL CUBRIMIENTO MINIMO

La figura siguiente representa un fuerte donde por cada vértice hay una torre. Un guardia estacionado en un muro puede vigilar ambas torres situadas en los extremos de su muro. ¿Cuál es el número mínimo de guardias necesarios para vigilar todas las torres?



Cubrimiento mínimo (líneas obscuras)

Definición. Dada una gráfica simple $G = (V, A)$, un cubrimiento por aristas en G es un subconjunto $F \subset A$ tal que cada vértice $v \in V$ es un vértice extremo de al menos una arista de F.

Puesto que el cubrimiento de cardinalidad mínima en la gráfica anterior consta de 7 aristas, se sigue que son necesarios 7 guardias.

El problema de encontrar un cubrimiento mínimo por aristas es muy similar al problema de hallar un apareamiento máximo. De hecho estos dos conceptos se considerán como duales.

Dado un apareamiento máximo M_0, podemos obtener un cubrimiento mínimo por aristas F_1 añadiendo, por cada vértice v no M_0-saturado, una arista e_v de G que es incidente én v.

$$F_1 = M_0 \cup \{e_v \;/\; v \in \bar{S}(M_0)\}.$$

Así mismo, dado un cubrimiento mínimo por aristas F_0, un apareamiento máximo M_1 es obtenido por eliminación sucesiva de aristas de F_0 que son incidentes en una arista no eliminada de F_0. Este procedimiento es útil para mostrar una relación interesante entre un cubrimiento y un apareamiento, más aún, mediante el siguiente resultado puede verse que el problema del cubrimiento mínimo por aristas se reduce al problema de un apareamiento máximo.

Teorema 3.1 (Norman, Rabin [1959]). En una gráfica simple $G = (V, A)$ de orden n, un apareamiento máximo M_0 y un cubrimiento mínimo por aristas F_0 satisfacen

$$|M_0| + |F_0| = n.$$

Demostración. Dado que M_0 es un apareamiento máximo, el conjunto $F_1 = M_0 \cup \{e_y \,/\, y \in \bar{S}(M_0)\}$ resulta ser un cubrimiento por aristas, de donde

$$|F_1| = |M_0| + (n - 2|M_0|) = n - |M_0| \qquad (3.1)$$

Por otro lado, puesto que F_0 es un cubrimiento mínimo por aristas, el conjunto M_1, obtenido por la eliminación sucesiva de aristas de F_0, que son adyacentes a una arista no eliminada de F_0, es un apareamiento. Dado que en G, las aristas de F_0 no forman trayectorias de longitud 3, cada arista eliminada crea exactamente un vértice no M_1 saturado. Por lo tanto

$$|F_0| - |M_1| = |V - S(M_1)| = n - 2|M_1|$$

es decir

$$|F_0| = n - |M_1| \qquad (3.2)$$

Además

$$|M_1| \le |M_0| \quad \text{y} \quad |F_0| \le |F_1| \qquad (3.3)$$

De (3.1), (3.2), y (3.3) se sigue que

$$|F_1| = n - |M_0| \le n - |M_1| = |F_0|$$

es decir

$$|F_1| \le |F_0|$$

Luego, el cubrimiento F_1 es también un cubrimiento mínimo por aristas. Ya que $|F_1| = |F_o|$ se sigue que $|M_1| = |M_o|$, y en consecuencia el apareamiento M_1 es un apareamiento máximo. Finalmente

$$|M_o| + |F_o| = n. \quad \square$$

Hasta el momento nos hemos limitado al estudio de los apareamientos y cubrimientos de gráficas en general. Dirigiremos, ahora, nuestra atención a las gráficas bipartitas.

4. APAREAMIENTOS Y CUBRIMIENTOS EN GRAFICAS BIPARTITAS

Una gráfica es bipartita si su conjunto de vértices puede ser particionado en dos clases tales que cualesquiera dos vértices en la misma clase no son adyacentes. Para referirnos a una gráfica bipartita utilizaremos la siguiente notación $G = (X,Y,A)$, donde los conjuntos de vértices X e Y denotarán las clases de vértices de la gráfica y el conjunto A denotará el conjunto de aristas de ésta. Una gráfica bipartita puede ser caracterizada mediante ciertas propiedades, en seguida presentamos algunas de éstas.

Teorema 4.1. Para una gráfica G, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) G es bipartita,

(b) G no contiene ciclos de longitud impar,

(c) G no contiene caminos cerrados de longitud impar.

Demostración. ((a) implica (b)). Puesto que G es bipartita, pueden colorearse de rojo y azúl los vértices en G de tal forma que dos vértices adyacentes tienen colores diferentes. Si G tiene un ciclo $\mathscr{C}$ de longitud impar, entonces los vértices en $\mathscr{C}$ no pueden ser coloreados alternadamente de rojo y azúl.

((b) implica (c)). Supóngase que G no contiene un ciclo de longitud impar. Sea $\mu = [x_0, x_1, \ldots x_p = x_0]$ un camino cerrado de longitud impar. Si en μ existen dos vértices x_j y x_k tales que $j < k$ y $x_j = x_k$ entonces μ puede ser descompuesto en dos caminos $\mu[x_j, \ldots, x_k]$ y $\mu[x_0, \ldots, x_j] + \mu[x_k, \ldots, x_0]$. Además, uno de estos caminos tiene longitud impar (de otro modo μ tendría longitud par).

Cada vez que el camino μ es descompuesto, mediante este procedimiento, obtenemos un camino de longitud impar. Cuando concluye su descomposición, se obtiene un ciclo impar, contradiciendo (b). Por lo tanto G no contiene caminos cerrados de longitud impar.

((c) implica (a)). Mostraremos que una gráfica G sin caminos cerrados de longitud impar es bipartita. Supóngase que la gráfica es conexa (de otro modo puede considerarse cada componente conexa separadamente).

Coloreando sucesivamente los vértices de la gráfica usando las siguientes reglas:
Regla 1. Colorear un vértice arbitrario v de azúl.
Regla 2. Si el vértice u está coloreado de azúl, colorear de rojo todos los vértices adyacentes a u. Si el vértice w está coloreado de rojo, colorear todos los vértices adyacentes a w de azúl.

Cada vértice de G es coloreado, ya que G es conexa. Un vértice u no puede ser coloreado de rojo y azúl, ya que los vértices u y v estarían contenidos en un camino cerrado de longitud impar. Así, se determina una partición de los vértices de G en dos clases, luego G es bipartita y termina la prueba del teorema. □

El teorema de Menger junto con otros resultados que consideraremos en seguida, son de gran utilidad en la demostración de un resultado en el que König establece el máximo número de aristas en un apareamiento de una gráfica bipartita.

Definición. Un uv-separador $W \subset V$ en una gráfica conexa $G = (V, A)$ es un conjunto mínimo de vértices tal que al quitarlos dejan a u y v en diferentes componentes conexas.

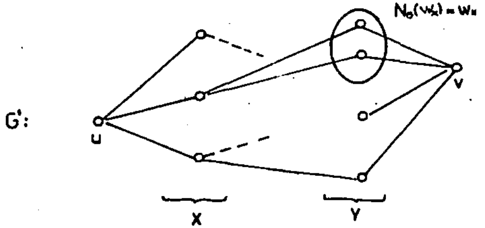
Teorema (Menger). Sea una gráfica simple $G = (V, A)$ y sean u, $v \in V$, u no adyacente a v en G. El mínimo número de vértices que separan a u de v en G es igual al máximo número de uv-trayectorias internamente ajenas en G. (ver Harary (1969)).

La definición de los vecinos de un conjunto juega un papel relevante en la teoría de apareamientos. Este concepto aparecerá en algunos de los resultados más importantes de esta teoría.

Definición. Para un $B \subset X \cup Y$, el conjunto de vecinos de B se define como el conjunto de vértices adyacentes al conjunto B y es denotado por $\Gamma_G(B)$.

Proposición. Sea una gráfica bipartita $G = (X, Y, A)$. Considérese la gráfica G' con conjunto de vértices $X \cup Y \cup \{u, v\}$ y conjunto de aristas $A \cup \{ux/x \in X\} \cup \{vy/y \in Y\}$. Sea $k = \min_{B \subset X} \{ |X-B| + |\Gamma_G(B)| \}$.

El mínimo número de vértices que separan a u de v en G' es k.



Demostración. Supóngase que existe un uv-separador W de cardinalidad menor que k. Sean $W_X = W \cap X$ y $W_Y = W \cap Y$, entonces $|W_X| + |W_Y| < k$. Sea $C = X - W_X$, puesto que W separa a u de v todos los vecinos de C están en W_Y, entonces

$$(X - C) \cup \Gamma_G(C) \subseteq W_X \cup W_Y.$$

Así $$|X - C| + |\Gamma_G(C)| \leq |W_X| + |W_Y|$$

y $$k = \min_{B \subset X} \{|X-B| + |\Gamma_G(B)|\} \leq |X-C| + |\Gamma_G(C)|.$$

Por lo tanto

$$k \leq |X-C| + |\Gamma_G(C)| \leq |W_X| + |W_Y| < k$$

Luego $k < k$, lo cual no puede ocurrir, por lo tanto k es el mínimo número de vértices que separan a u de v en G'. □

Teorema de König [1931] 4.2. Sea una gráfica bipartita G con bipartición (X, Y) y conjunto de aristas A. El máximo número de aristas en un apareamiento es igual a

$$\min_{B \subseteq X} \{ |X-B| + |\Gamma_G(B)| \}.$$

Demostración. Considérese la gráfica

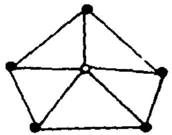
$$G' = (X \cup Y \cup \{u, v\} , A \cup \{ux / x \in X\} \cup \{vy / y \in Y\}).$$

Sea $k = \min_{B \subseteq X} \{ |X-B| + |\Gamma_G(B)| \}$. Puesto que k es el mínimo número de vértices que separan a u de v en G' (proposición anterior), del teorema de Menger, k es el máximo número de uv-trayectorias internamente ajenas de u a v. Tomando una arista de G por cada una de estas trayectorias obtenemos un apareamiento en G de cardinalidad k que es máximo, ya que si $\{ a_1, a_2, \ldots, a_t \}$ con $a_i \in A(G)$ $(i = 1, \ldots, t)$ es un apareamiento en G con $t > k$, se tendrían en G' t trayectorias internamente ajenas de u a v, contradiciendo el hecho de que k es máximo respecto a esta propiedad. Con ésto se concluye la demostración del teorema. □

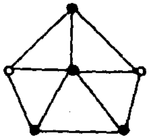
Retomaremos el tema de los cubrimientos a partir de otra definición que nos permitirá hacer algunas observaciones relacionadas a los apareamientos y los cubrimientos de una gráfica bipartita. De hecho se mostrará, más adelante, que existe una conexión directa entre ambos.

Definición. Un cubrimiento por vértices en G es un subconjunto K de V tal que cada arista de G tiene al menos un extremo en K.

Un cubrimiento K' es un cubrimiento mínimo por vértices, si G no contiene un cubrimiento K tal que $|K|<|K'|$



(a) Un cubrimiento.



(b) Un cubrimiento mínimo.

Si K es un cubrimiento por vértices de G, y M es un apareamiento de G entonces K contiene al menos un extremo de cada arista de M. Dado un apareamiento M y un cubrimiento K, $|M| \leq |K|$. Efectivamente, si M' es un apareamiento máximo y K' es un cubrimiento mínimo por vértices, entonces

$$|M'| \leq |K'| \tag{4.1}$$

La igualdad en (4.1) no se da en general. Sin embargo, si G es bipartita se tiene que $|M'| = |K'|$. Este resultado, debido a König (1931), es relacionado con el teorema de Hall. Antes de presentar su demostración, es importante considerar el siguiente lema.

Lema 4.1. Si un apareamiento M y un cubrimiento por vertices K, son tales que $|M| = |K|$, entonces M es un apareamiento máximo y K es un cubrimiento mínimo.

Demostración. Si M' es un apareamiento máximo y K' es un cubrimiento mínimo por vértices entonces de (4.1) se sigue que

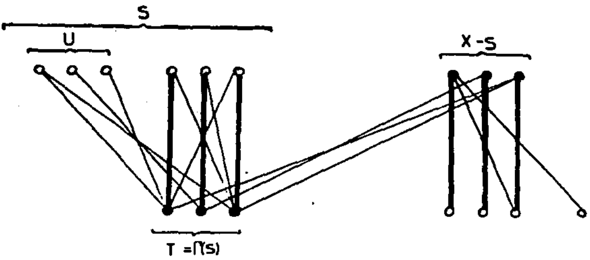
$$|M| \leq |M'| \leq |K'| \leq |K|.$$

Como $|M| = |K|$, se sigue que $|M| = |M'|$ y $|K| = |K'|$. Luego M es un apareamiento máximo y K es un cubrimiento mínimo por vértices. □

En el estudio de los cubrimientos y apareamientos, encontramos la idea de dualidad entre este par de conceptos, procederemos a ver que esto es así ya que por cada arista de un apareamiento máximo puede obtenerse un vértice de un cubrimiento mínimo.

Teorema 4.3. En una gráfica bipartita, el número de aristas en un apareamiento máximo es igual al número de vértices en un cubrimiento mínimo por vértices.

Demostración. Sea G una gráfica bipartita con bipartición (X, Y), y sea M' un apareamiento máximo de G. U denotará el conjunto de vértices no M'-saturados de X, y Z el conjunto de todos los vértices conectados a los vértices de U por una trayectoria M'-alternada. Defínanse los conjuntos $S = Z \cap X$ y $T = Z \cap Y$



Dado que cualquier trayectoria M'-alternada que empieza en U termina en un vértice M'-saturado (Teorema 2.2), se tiene que cada vértice de T está M'-saturado. $\Gamma(S) \subseteq T$ por definición de S. Puesto que todos los vértices de T son M'-apareados con vértices de S, $T \subseteq \Gamma(S)$. Luego $\Gamma(S) = T$. Defínase $K' = (X-S) \cup T$. Cualquier arista de G debe tener al menos uno de sus extremos en K'. De otro modo podría existir una arista con un extremo en S y el otro en $Y-T$, contradiciendo $\Gamma(S) = T$. Por lo tanto K' es un cubrimiento de G y

$$|M'| = |K'|$$

Luego, por el lema 4.1, K' es un cubrimiento mínimo. Con ésto termina la prueba del teorema. □

Por otra parte, reconsiderando los teoremas 3.1 y 3.3 de la sección anterior presentamos el siguiente corolario que viene a ser una nueva formulación del teorema de König. En este caso haremos uso del concepto de conjunto estable o independiente en una gráfica G.

Definicion. Un conjunto $S \subset V$ de vértices de una gráfica $G = (V,A)$ tal que dos a dos no son adyacentes es llamado un conjunto estable o independiente.

Corolario 4.1. Sea G una gráfica bipartita, el máximo número de vértices en un conjunto independiente S es igual al mínimo número de aristas en un cubrimiento por aristas F.

Demostración. Sea $K \subset X$ un cubrimiento por vértices y sea M un apareamiento de G, del teorema 4.3 se tiene que

$$\max_{M} |M| = \min_{K} |K|.$$

Si K es un cubrimiento por vértices, su complemento $S = (X \cup Y) - K$ es un conjunto independiente. Si S es un conjunto independiente, su complemento es un cubrimiento por vértices. Así

$$\max_{S} |S| = |X| + |Y| - \min_{K} |K| \qquad (4.2)$$

Del teorema 3.1 se tiene que

$$\min |F| + \max |M| = |V(G)|$$

es decir

$$\min_{F} |F| = |X| + |Y| - \max_{M} |M| \qquad (4.3)$$

Por lo tanto de (4.2) y (4.3) se sigue que

$$\max_{S} |S| = \min_{F} |F|$$

Con ésto termina la prueba del corolario. □

En muchas aplicaciones que involucrán gráficas bipartitas se requiere hallar un apareamiento de G que sature a cada vértice del conjunto X; un ejemplo es el problema de asignación de personal presentado en la sección 1.5. El primero que dio una condición necesaria y suficiente para la existencia de un apareamiento tal fue Hall (1935).

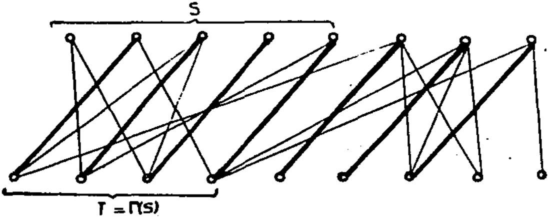
Teorema 4.4 (Hall [1935]). Sea G una gráfica bipartita con bipartición (X, Y). G contiene un apareamiento que satura a cada vértice de X si y sólo si

$$|\Gamma(S)| \geq |S| \qquad \text{para todo } S \subseteq X \qquad (4.4)$$

Demostración. Supóngase que G contiene un apareamiento M el cual satura a cada vértice de X, y sea S un subconjunto de X. Dado que los vértices de S son M-apareados con vértices distintos de $\Gamma(S)$, se tiene que $|\Gamma(S)| \geq |S|$.

Recíprocamente, supóngase que la gráfica bipartita G satisface (4.4) y que G no contiene un apareamiento que sature a todos los vértices de X. Se obtendrá este apareamiento por construcción. Sea, entonces, M' un apareamiento máximo de G. Por el supuesto M' no satura a todos los vertices de X. Sea u un vértice no M'-saturado de

X. Z denotará el conjunto de todos aquellos vértices conectados a u por una trayectoria M'-alternada. Ya que M' es un apareamiento máximo, del teorema 2.1 se sigue que u es el único vértice en Z no M'-saturado. Defínanse $S = Z \cap X$ y $T = Z \cap Y$.



Los vértices de $S - \{u\}$ están M'-apareados con los vértices de T, ya que en T están todos los vértices de Y conectados a u por una trayectoria M'-alternada. Por lo tanto

$$|T| = |S| - 1 \tag{4.5}$$

y $T \subseteq \Gamma(S)$. De hecho se tiene que

$$\Gamma(S) = T \tag{4.6}$$

puesto que al existir una ux-trayectoria M'-alternada para $x \in S$, cada vértice de $\Gamma(S)$ es conectado a u por una trayectoria M'-alternada, es decir $\Gamma(S) \subseteq T$. Pero de (4.5) y (4.6) se sigue que

$$|\Gamma(S)| = |S| - 1 < |S|$$

lo cual contradice la suposición (4.4). □

Posteriormente se presentará un algoritmo para hallar un apareamiento máximo en una gráfica bipartita el cual está basado en la demostración del teorema anterior.

Si una gráfica bipartita $G = (X, Y, A)$ contiene un apareamiento que satura a todos los vértices de X, entonces se dice que X puede ser apareado *dentro* de Y. Si este apareamiento satura también a todos los vértices de Y, se dice que X es apareado *sobre* Y. El teorema 4.4 puede verse como una consecuencia del teorema de König.

Teorema 4.5 (P. Hall [1934]; "Teorema de König-Hall"). En una gráfica bipartita $G = (X, Y, A)$, X puede ser apareado *dentro* de Y si y sólo si

$$|\Gamma_G(B)| \geq |B| \qquad (B \subset X)$$

Demostración. Supóngase que X puede ser apareado dentro de Y. Del teorema de König se sigue que X puede ser apareado dentro de Y si y sólo si

$$|X| = \max_{M} |M| = \min_{B \subset X} (|X-B| + |\Gamma(B)|) \qquad (4.7)$$

$$\min_{B \subset X} (|X| + |\Gamma_G(B)| - |B|) = |X| + \min_{B \subset X} (|\Gamma_G(B)| - |B|) \qquad (4.8)$$

de (4.7) y (4.8) se sigue que

$$|X| = |X| + \min_{B \subset X} (|\Gamma_G(B)| - |B|)$$

lo cual es equivalente a

$$\min_{B \subset X} (|\Gamma_G(B)| - |B|) = 0$$

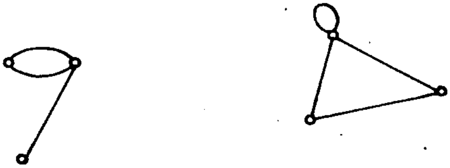
o bien

$$|\Gamma_G(B)| - |B| \geq 0 \qquad (B \subset X).$$

Por lo tanto X puede ser apareado dentro de Y si y sólo si $|\Gamma_G(B)| \geq |B| \quad (B \subset X)$. □

Entre otros de los aspectos en que podemos plantear el estudio de los apareamientos en gráficas bipartitas, se encuentrán aquellos que se sitúan en una multigráfica bipartita. Esto nos permitirá estudiar este concepto en una extensión de una gráfica simple.

Definición. Una multigráfica es una gráfica $G = (V, A)$ en la que dos o más vértices de ésta pueden ser unidos por más de una arista.



En nuestro primer resultado para multigráficas bipartitas, podemos notar una analogía con el teorema 4.5, en la que se muestra cuando el conjunto X puede ser apareado dentro del conjunto Y.

Corolario 4.2. Sea $G = (X, Y, A)$ una multigráfica bipartita con $|X| = p$, $|Y| = q$, en la que el grado de los vértices $x_i \in X$ y $y_j \in Y$ es tal que

$$\delta_G(x_1) \leq \delta_G(x_2) \leq \ldots \leq \delta_G(x_p),$$
$$\delta_G(y_1) \geq \delta_G(y_2) \geq \ldots \geq \delta_G(y_q).$$

Si $q \geq p$, $\delta_G(x_1) > 0$ y para $k = 2,3,\ldots,p$

$$\sum_{i=1}^{k} \delta_G(x_i) > \sum_{i=1}^{k-1} \delta_G(y_i) \qquad (4.9)$$

entonces X puede ser apareado *dentro* de Y.

Demostración. Sean $S \subset X$ y $W \subset Y$ con k y $k-1$ elementos respectivamente. Sea $m\alpha(S\ ,\ Y)$ el número de aristas con un extremo en S y el otro en Y.

$$m\alpha(S\ ,\ Y) = \sum_{x \in S} \delta\alpha(x).$$

Puesto que $|S| = k$ y $\delta\alpha(x_j) \geq \delta\alpha(x_i)$ para toda $j > i$, se tiene que

$$\sum_{x \in S} \delta\alpha(x) \geq \sum_{i=1}^{k} \delta\alpha(x_i)$$

(podrían existir $x \in S$ con índice mayor que k).

Considerando ahora el número de aristas con un extremo en X y el otro en W.

$$m\alpha\ (X\ ,\ W) = \sum_{y \in W} \delta\alpha(y).$$

Dado que $|W| = k-1$ y $\delta\alpha(y_i) \geq \delta\alpha(y_j)$ para toda $i < j$ se tiene que

$$\sum_{j=1}^{k-1} \delta\alpha(y_j) \geq \sum_{y \in W} \delta\alpha(y)$$

(podría existir $y \in W$ con índice mayor que $k-1$).
Así, de la desigualdad (4.9) se sigue que

$$m\alpha\ (S\ ,\ Y) \geq \sum_{i=1}^{k} \delta\alpha(x_i) > \sum_{j=1}^{k-1} \delta\alpha(y_j) \geq m\alpha\ (X\ ,\ W).$$

Es decir el número de aristas que salen de S es más grande que el número de aristas que entran a W. Por lo tanto, $\Gamma\alpha(S)$ no está contenido en W, para cualquier conjunto W de $k-1$ elementos; en consecuencia

$$|\Gamma\alpha(S)| > k - 1 = |S| - 1.$$

Finalmente,

$$|\Gamma\alpha(S)| \geq |S| \qquad (S \subset X).$$

Por lo tanto X puede ser apareado dentro de Y. □

Corolario 4.3. Si en una multigráfica bipartita G con bipartición (X , Y), se tiene que

$$\min_{x\in X} \delta_G(x) \geq \max_{y\in Y} \delta_G(y) \qquad y \qquad |Y| \geq |X|.$$

entonces X puede ser apareado *dentro* de Y.

Demostración. Sean

$$d_1 = \min_{x\in X} \delta_G(x), \qquad d_2 = \max_{y\in Y} \delta_G(y)$$

Así, $d_1 \geq d_2$. Luego

$$\delta_G(x_1) + \delta_G(x_2) + \ldots + \delta_G(x_k) \geq kd_1 > (k-1)d_1 \geq (k-1)d_2$$
$$\geq \delta_G(y_1) + \ldots + \delta_G(y_{k-1}).$$

Dado que

$$\sum_{i=1}^{k} \delta_G(x_i) > \sum_{i=1}^{k-1} \delta_G(y_i) \qquad (k = 2,3,\ldots,p)$$

del corolario 4.3 se sigue que X puede ser apareado dentro de Y. □

Corolario 4.4. Si $G = (X, Y, A)$ es una multigráfica bipartita sin vértices aislados, con $|Y| \geq |X|$ y tal que para algún vértice $x \in X$,

$$d_1' = \min_{\substack{x\neq x\\ x\in X}} \delta_G(x) \geq \max_{y\in Y} \delta_G(y) = d_2'$$

entonces X puede ser apareado *dentro* de Y.

Demostración. Si x_1 no tiene el grado mínimo, del corolario 4.4 se sigue que X puede ser apareado dentro de Y. De otro modo, puede suponerse que x_1 tiene el grado mínimo. Entonces

$$\delta_G(x_1) + \delta_G(x_2) + \ldots + \delta_G(x_k) \geq \delta_G(x_1) + (k-1)d_1'$$
$$> (k-1)d_2' \geq \delta_G(y_1) + \delta_G(y_2) + \ldots + \delta_G(y_{k-1}).$$

Por lo tanto X puede ser apareado dentro de Y. □

El siguiente resultado permite dar una respuesta afirmativa al problema de la cita presentado en la sección 1.6.

Corolario 4.5. Si $G = (X, Y, A)$ es una multigráfica bipartita, entonces existe un apareamiento que satura a todos los vértices de grado máximo en G.

Demostración. Supóngase que existe una multigráfica bipartita $G' = (X', Y', A')$ regular de grado

$$h = \max_{z \in X \cup Y} \delta_G(z),$$

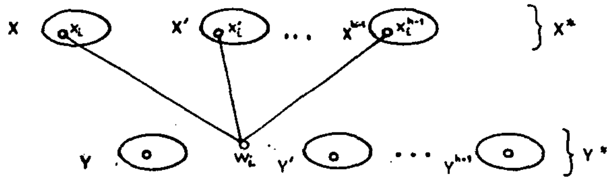
Claramente $|X'| = |Y'|$, supóngase además que G es una subgráfica de G', $X \subset X'$, $Y \subset Y'$. Del corolario 4.5 se sigue que X' puede ser apareado dentro de Y' en G'. Puesto que $|X'| = |Y'|$, este apareamiento satura cada vértice en G de grado h. Se contruirá la gráfica G' tomando h copias de la multigráfica G. Denótense estas h copias por

$G=(X,Y,A)$, $G'=(X',Y',A')$, ..., $G^{(h-1)}=(X^{(h-1)},Y^{(h-1)},A^{(h-1)})$.

Sean

$$X^* = X \cup X' \cup \ldots \cup X^{h-1} \cup Z \quad \text{y} \quad Y^* = Y \cup Y' \cup \ldots \cup Y^{h-1} \cup W.$$

donde tanto Z como W denotan un conjunto de ciertos vértices adicionales. Estos vértices adicionales son determinados como sigue:



Si $x_i \in X$ y $\delta_G(x_i) < h$, se crean en Y^*, $h - \delta_G(x_i)$ vértices adicionales, cada uno de éstos se hace adyacente a

$$x_i \in X, \quad x_i' \in X', \quad \ldots \quad, x_i^{h-1} \in X^{h-1}.$$

Este procedimiento termina cuando no existen $x \in X$ tales que $\delta_G(x) < h$. Se repite esta construcción en el caso en que $\delta_G(y_j) < h$, $y_j \in Y$. En consecuencia se tiene que la gráfica G' construida de esta forma contiene como subgráfica a G. □

Una vez que se han examinado algunos resultados en multigráficas continuamos exponiendo otra parte de la teoría de los apareamientos en gráficas bipartitas simples. Obsérvese que en el siguiente corolario se resumen las ideas de los teoremas 4.2 y 4.5, en este contexto se hace referencia de éste como una reformulación del teorema de König-Hall.

Corolario 4.6. En una gráfica bipartita G = (X, Y, A), X puede ser apareado *dentro* de Y si y sólo si

$$|X - \Gamma_G(B)| \leq |Y - B| \qquad B \subset Y.$$

Demostración. Si X puede ser apareado dentro de Y y si $B \subset Y$, entonces del teorema 4.4

$$|X - \Gamma_G(B)| \leq |\Gamma_G(\ X-\Gamma_G(B)\ )| \qquad X-\Gamma_G(B) \subset X$$

Ningún vértice $x \in X-\Gamma_G(B)$ es adyacente a B. Así

$$\Gamma_G(x) \subset Y - B$$

y en consecuencia

$$|X - \Gamma_G(B)| \leq \Gamma_G(\ X-\Gamma_G(B)\ )| \leq |Y - B|.$$

Recíprocamente, supóngase que X no puede ser apareado dentro de Y, entonces existe un conjunto $C \subset X$ tal que $|C| < |\Gamma_G(B)|$. Defínase $B = Y - \Gamma_G(C)$, puesto que ningún vértice de B es adyacente a C,

$$C \subset X - \Gamma_G(B).$$

Luego

$$|X - \Gamma_G(B)| \geq |C| > |\Gamma_G(C)| = |Y - B|$$

lo cual contradice el hecho de que $|X-\Gamma_G(B)| \leq |Y-B|$. Por lo tanto X puede ser apareado dentro de Y. Con ésto se concluye la demostración del corolario. □

El teorema que a continuación se presenta es considerado como una interpretación del teorema de Bernstein.

Teorema 4.6. En una gráfica bipartita $G = (X, Y, A)$, una condición necesaria y suficiente para que exista un apareamiento que sature simultáneamente $C \subset X$ y $B \subset Y$ es que;

(a) C puede ser apareado *dentro* de Y

(b) B puede ser apareado *dentro* de C.

Demostración. Si existe un apareamiento que satura simultáneamente $C \subset X$ y $B \subset Y$, entonces C puede ser apareado dentro de Y y B puedo ser apareado dentro de C.

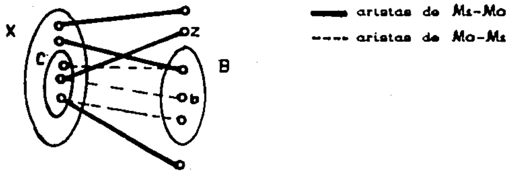
Recíprocamente, supóngase que se satisfacen (a) y (b). Mostraremos que si existe un apareamiento M_0 de B dentro de $C \subset X$ y un apareamiento M_1 de C dentro de Y, entonces existe un apareamiento que satura simultáneamente a C y B.

Construiremos un apareamiento M_1', a partir de M_1, en el cual los vértices saturados de C permanecerán saturados y un vértice $b \in B$ no saturado por M_1 será M_1'-saturado. Puesto que $b \in S(M_0)$, b es un vértice extremo de una trayectoria τ de la forma

$$\tau[b', z] = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots)$$

donde $\alpha_1, \alpha_3, \ldots \in M_0 - M_1$

$\alpha_2, \alpha_4, \ldots \in M_1 - M_0$



Supóngase que la trayectoria τ es máxima. Luego, el último vértice z de esta trayectoria pertenece a Y (de otro modo, z pertenecería a C, y z sería un vértice extremo de una arista en $M_1 - M_0$ que podría extender la trayectoria τ): Si $z \in Y$, entonces $z \in B$ (de otro modo z sería un vértice extremo de una arista en $M_0 - M_1$ que podría extender la trayectoria τ). Así, $z \in Y - B$. Defínase

$$M_1' = M_1 \cup (\tau \cap M_0) - (\tau \cap M_1)$$

El apareamiento M_1' satura al vértice $b \in B$; además cada vértice de $C \cup B$ que está M_1-saturado permanece M_1'-saturado. Repitiendo este procedimiento tantas veces como sea necesario, se obtiene un apareamiento que satura ambos conjuntos C y B. Con ésto se concluye la demostración del teorema. □

El corolario que se enuncia a continuación, fué obtenido independientemente por Hoffman y Kuhn (1957), utilizando métodos de Programación Lineal.

Corolario 4.7. En una gráfica bipartita $G = (X, Y, A)$, una condición necesaria y suficiente para que exista un apareamiento que sature simultáneamente a X y $B \subset Y$ es que;

$$\min \{ |\Gamma_G(S)| , |X| - |B - \Gamma_G(S)| \} \geq |S| \qquad (S \subset X)$$

Demostración. Utilizando el teorema 4.4 y el corolario 4.7, las condiciones (a) y (b) del teorema anterior pueden ser escritas como

(a') $\quad |\Gamma(S)| \geq |S| \qquad (S \subset X)$

(b') $\quad |B - \Gamma(S)| \leq |X - S| \qquad (S \subset X)$.

(Considerando $X = B$ y $Y = X$)

O equivalentemente

$$|X - S| - |B - \Gamma(S)| \geq 0$$

de donde

$$|X - S| - |B - \Gamma(S)| \geq |X| - |S| - |B - \Gamma(S)| \geq 0.$$

Así,

$$(b'') \qquad |X| - |B - \Gamma(S)| \geq |S| \qquad (S \subset X)$$

Por lo tanto considerando (a') y (b'') se tiene que

$$\min (|\Gamma(S)| , |X| - |B-\Gamma(S)|) \geq |S| \qquad (S \subseteq X)$$

y termina la demostración del corolario. □

Muchos de los resultados de la teoría de gráficas son enconrados repetidamente en la teoría de programación lineal, sin embargo no nos adentraremos en esta última. Antes de presentar el teorema de Dulmage y Mendelsohn para crear un apareamiento en una multigráfica bipartita, es importante considerar el siguiente lema.

Lema (Folkman, Fulkerson [1967]). Sea $G = (X, Y, A)$ una multigráfica con $\Delta(G) \leq h$ y $|A| = m$. Sean m', m'', h' y h'' enteros positivos tales que

$$m' + m'' = m, \qquad h' + h'' = h.$$

Las aristas de G pueden ser partidas en dos clases A' y A'' (que forman dos gráficas parciales G' y G''), tales que

$$|A'| = m', \quad |A''| = m'', \quad \Delta(G') \leq h', \quad \Delta(G'') \leq h'',$$

si y sólo si

$$m' - h'|X - C| - h'|Y - B| \leq m_G(C , B),$$
$$m'' - h''|X - C| - h''|Y - B| \leq m_G(C , B)$$

para todo $C \subset X$ y para todo $B \subset Y$.

La demostración de la condición necesaria en el lema anterior es sencilla, pero la demostración de la condición de suficiencia requiere hacer uso de la teoría de Flujo en Redes (ver Berge, "teorema del flujo compatible", Ch. 5, & 2). Sin embargo se enuncia para justificar un resultado importante que se presenta como consecuencia del siguiente teorema.

Teorema 4.7 (Dulmage, Mendelsohn [1961]). Dada una multigráfica bipartita $G = (X, Y, A)$ con $|A| = m$ y con $\Delta(G) \leq h$, sea

$$\alpha = \max_{\substack{C\subset X\\ B\subset Y}} \{ m - m\alpha(C,B) - (h-1)(|X-C| + |Y-B|) \},$$

$$\rho = \min_{\substack{C\subset X\\ B\subset Y}} \{ m\alpha(C,B) + |X-C| + |Y-B| \},$$

entonces,

$$\alpha \leq \left[\frac{m}{h}\right] \leq \rho.$$

Además, para cada entero m' tal que $\alpha \leq m' \leq \rho$, existe un apareamiento $M' \subset A$ con $|M'| = m'$ el cual al ser removido crea una multigráfica con grado máximo $\leq h - 1$.

Demostración. 1. Si $\left[\frac{m}{h}\right] > \rho$, entonces existen dos conjuntos $C \subset X$ y $B \subset Y$ tales que

$$m > h(m\alpha(C,B) + |X-C| + |Y-B|) \geq$$
$$\geq m\alpha(C,B) + m\alpha(X-C,Y) + m\alpha(C,Y-B) = m,$$

lo cual es una contradicción. Luego $\left[\frac{m}{h}\right] \leq \rho$.

2. Si $\left[\frac{m}{h}\right] < \alpha$, entonces existen dos conjuntos $C \subset X$ y $B \subset Y$ tales que

$$\frac{m}{h} < m - m\alpha(C, B) - (h-1)(|X - C| + |Y - B|).$$

Luego $m - \frac{m}{h} > ma\,(C,B) + (h-1)(\,|X - C| + |Y - B|\,)$

$\geq \frac{h-1}{h}\, ma\,(C,B) + h-1\,(\,h|X - C| + h|Y - B|$

(ya que $h-1 < 1$)

$\geq \frac{h-1}{h}\,(ma\,(C,B) + ma\,(X-C,Y) + ma\,(X,Y-B))$

(ya que $h = \Delta(G)$)

$\geq h-1 \frac{m}{h}$

De donde $m - \frac{m}{h} > m - \frac{m}{h}$ lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $\alpha \leq \left[\frac{m}{h}\right] \leq \rho.$

3. Si m' satisface $\alpha \leq m' \leq \rho$, entonces, para todo $C \subset X$ y para todo $B \subset Y$, se tiene que

$$m' \geq m - ma\,(C,B) - (h-1)(\,|X - C| + |Y - B|\,)$$
$$m' \leq ma\,(C,B) + |X - C| + |Y - B|.$$

Sea $h' = 1$, $h'' = h - 1$, $m'' = m - m'$, entonces al hacer esta sustitución en las desigualdades anteriores se tiene que

$$m'' - h''|X - C| - h''|Y - B| \leq ma\,(C,B)$$
$$m' - h'|X - C| - h'|Y - B| \leq ma\,(C,B).$$

Del lema de Folkman y Fulkerson se sigue que G puede ser descompuesta en dos multigráficas parciales

$G' = (X\,,\,A')$ y $G'' = (X,\,A - A')$,

con $|A'| = m'$, $\Delta(G') \leq 1$ y $\Delta(G'') \leq h - 1$.

A' es el apareamiento requerido. □

5. APAREAMIENTOS PERFECTOS EN GRAFICAS

En esta sección se presentan algunos resultados de apareamientos perfectos en gráficas simples, k-regulares y bipartitas. Algunos de ellos son generalizaciones de los ya presentados anteriormente.

El siguiente teorema es uno de los más importantes en la teoría de apareamientos perfectos en gráficas; sin embargo, antes de establecer éste considérese el siguiente resultado.

Lema. Sea $G = (V , A)$ una gráfica conexa tal que para $x, y, z \in V$ siempre se satisface que si $xy \in A$ y $yz \in A$, la arista $xz \in A$, entonces G es completa.

En otras palabras una gráfica completa es transitiva. Una componente conexa de una gráfica G es par o impar si ésta contiene un número par o impar de vértices. $o(G)$ denotará el número de componentes conexas impares de G.

Tutte obtuvo una condición necesaria y suficiente para que una gráfica tenga un apareamiento perfecto, es decir un apareamiento que sature a todos sus vértices. La demostración que se presenta aquí es debida a Lovász (1973).

Teorema 5.1 (Tutte [1947]). La gráfica $G = (V , A)$ tiene un apareamiento perfecto si y sólo si

$$o(G - S) \le |S| \qquad \text{para todo } S \subset V \qquad (5.1)$$

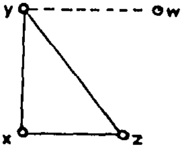
Demostración. Es suficiente probar el teorema para una gráfica simple. Supóngase que G tiene un apareamiento perfecto M. Sea S un subconjunto propio de V, y sean G_1, $G_2, \ldots, G_n$ la componentes conexas de orden impar de $G - S$. Dado que G_i es impar, un vértice u_i de G_i debe ser M-apareado con un vértice v_i de S. Puesto que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es un subconjunto de S, entonces

$$o(G - S) = n = |\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}| \le |S|.$$

Recíprocamente, supóngase que G satisface (5.1) y que no tiene un apareamiento perfecto. G no es una gráfica completa. Por otro lado cuando $S = \emptyset$ el orden de G es par. Si se agregan aristas a G hasta obtener una gráfica maximal G' la cual no tiene un apareamiento perfecto, entonces G resulta ser una subgráfica generadora de G'. Luego G − S resulta ser una subgráfica generadora de G' − S por lo que se concluye que $o(G' - S) \leq o(G - S)$. Así, de (5.1) se sigue que

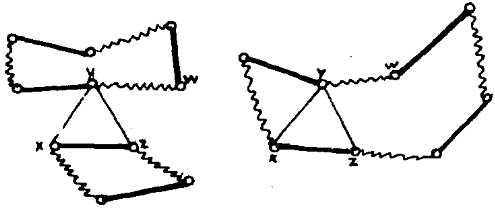
$$o(G' - S) \leq |S| \qquad \text{para todo } S \subset V(G') \qquad (5.2)$$

Sea $n = |V(G')|$. U denotará el conjunto de vértices en G' cuyo grado es $n - 1$. G' tendría un apareamiento perfecto si $U = V(G')$. Luego puede asumirse que $U \neq V(G')$. Se mostrará que cada componente conexa de G' − U es una gráfica completa. Supóngase, lo contrario, que alguna componente de G' − U no es una gráfica completa. Entonces, en esta componente, existen tres vértices x, y, z tales que $xy \in A(G')$, $yz \in A(G')$ y $xz \notin A(G')$ (lema anterior). Dado que $y \notin U$, existe un vértice w en G' − U tal que $yw \notin A(G')$.



Puesto que G' es una gráfica maximal que no contiene un apareamiento perfecto, al agregar a G' cualquier arista $a \notin A(G')$, la gráfica $G' + a$ tiene un apareamiento perfecto. Sean M_1 y M_2 apareamientos de $G' + xz$ y $G' + yw$, respectivamente. Considérese la gráfica $G' \cup \langle xz, yw \rangle$. Sea H la subgráfica de $G' \cup \langle xz, yw \rangle$ inducida por $M_1 \triangle M_2$. En cada vértice de H inciden una arista de M_1 y otra de M_2, luego cada vértice de H tiene grado dos. H es unión de ciclos independientes. Cada ciclo tiene longitud par, ya que sus aristas se encuentran alternadamente en M_1 y M_2. Considérense los siguientes casos:

Caso 1. xz y yw se encuentran en componentes conexas diferentes de H.



M_1 obscuras
M_2 onduladas

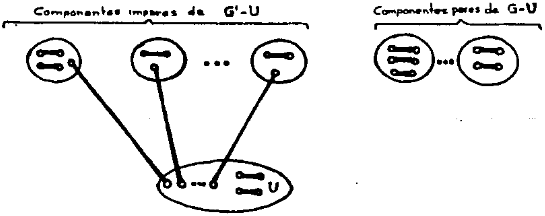
Si yw pertenece a un ciclo $\mathscr{C}$ de H, las aristas de M_1 en $\mathscr{C}$, junto con las aristas de M_2 que no están en $\mathscr{C}$, constituyen un apareamiento perfecto de G', contradiciendo la definición de G'.

Caso 2. xz y yw pertenecen a la misma componente $\mathscr{C}$ de H. Sea $\mathscr{C} = [y=y_0,\ w=y_1, \ldots, y_i=z,\ y_{i+1}=x, \ldots, y_{2n+1},\ y=y_0]$, y sean $\tau_1 = (y=y_0,\ w=y_1, \ldots, y_i=z)$ y $\tau_2 = (y_{i+1}=x, \ldots, y=y_0)$ dos trayectorias alternadas. Considérese

$$M_3 = (M_1 \cap \tau_1) \cup (M_2 \cap \tau_2) \cup (M_1 - \mathscr{C}) \cup yz.$$

M_3 constituye un apareamiento perfecto de G', contradiciendo nuevamente la definición de G'.

Puesto que ambos casos nos llevan a una contradicción se sigue que G' − U es necesariamente la unión de gráficas completas. Ahora, de (5.2) se sigue que $o(G' - U) \leq |U|$. Luego a lo más existen $|U|$ componentes conexas de orden impar en G' − U. Pero entonces se tiene un apareamiento perfecto en G': Cada componente de orden par de G' − U tiene un apareamiento perfecto. En las componentes de orden impar existe un apareamiento que satura a todos los vértices menos a uno, el cual es apareado con un vértice de U; los vértices restantes de U inducen una gráfica completa de orden par, ya que $|V(G')|$ es par, así podemos tomar un apareamiento que sature a todos éstos.



Al suponer que G' no tiene un apareamiento perfecto obtenemos una contradicción. Luego G necesariamente tiene un apareamiento perfecto. □

Este teorema también puede ser demostrado con la ayuda del teorema de Hall (ver Anderson, 1971).

Introduciremos, ahora, algunos de los conceptos de conexidad en gráficas y fijaremos en particular nuestra atención en las gráficas de regularidad k.

Definición. Sea G una gráfica conexa. Sea $a \in A(G)$. Se dice que a es una arista de corte o un puente de G, si la gráfica G − a es disconexa.

En otras palabras, una arista de corte, es tal que al quitarla G se vuelve disconexa.

Del teorema de Tutte, se deduce un resultado atribuido a Petersen (1891), el cual es enunciado a continuación.

Corolario 5.1. Cualquier gráfica 3-regular sin aristas de corte tiene un apareamiento perfecto.

Demostración. Sea G una gráfica 3-regular sin aristas de corte y sea S un subconjunto propio de $V(G)$. $G_1, G_2, \ldots, G_n$ denotarán las componentes conexas de orden impar de $G - S$. Sea m_i el número de aristas con un extremo en G_i y el otro en S $(1 \leq i \leq n)$. Puesto que G es 3-regular,

$$\sum_{v \in V(G_i)} \delta(v) = 2|A(G_i)| + m_i = 3|V(G_i)| \quad \text{para } (1 \leq i \leq n) \qquad (5.3)$$

Así de (5.3) se sigue que

$$m_i = \sum_{v \in V(G_i)} \delta(v) - 2|A(G_i)|$$

es un número impar, $m_i \neq 1$, ya que G no contiene aristas de corte. Luego

$$m_i \geq 3 \qquad \text{para} \quad 1 \leq i \leq n \qquad (5.4)$$

Además,

$$\sum_{v \in S} \delta(v) = 3|S| \qquad (5.5)$$

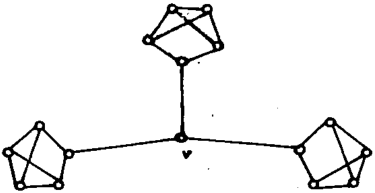
De (5.4) y (5.5) se sigue que

$$\circ(G - S) = \leq \frac{1}{3} \sum_{v \in S} m_i$$

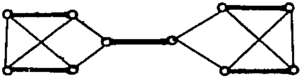
$$\frac{1}{3} \sum_{v \in S} m_i \leq \frac{1}{3} \delta(v) = |S|$$

Es decir $\circ(G - S) \leq |S|$. Por lo tanto del teorema 5.1 se sigue que G tiene un apareamiento perfecto. □

Una gráfica 3-regular con aristas de corte necesariamente no tiene un apareamiento perfecto. Por ejemplo en la siguiente gráfica $o(G - v)$ debería ser uno, sin embargo $o(G - v) = 3$.



Pueden existir gráficas 3-regulares con aristas de corte que tienen apareamiento perfecto, como se exhibe a continuación.



Definición. La conexidad lineal de una gráfica G, denotada por $\lambda(G)$, es el mínimo número de aristas tal que al quitarlas se obtiene una gráfica disconexa o trivial.

Si $\lambda(G) = k$ se dice que G es k-conexa linealmente. El siguiente corolario es una generalización del corolario anterior.

Corolario 5.2. Si G es $(k-1)$ conexa linealmente y k-regular de orden par, entonces G tiene un apareamiento perfecto.

Demostración. Sea S un subconjunto de $V(G)$, $S \neq \emptyset$, y sean $G_1, G_2, \ldots, G_n$ las componentes conexas de orden impar de $G - S$. El número de aristas con un extremo en S y el otro en una componente impar de $G - S$ es mayor o igual que $k - 1$, ya que G es $k - 1$ conexa linealmente, es decir

$$m_i \geq k - 1 \qquad\qquad \text{para} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Además,

$$m_i = k|V(G_i)| - 2|A(G_i)|.$$

Puesto que $|V(G_i)|$ es impar, si k es impar, entonces m_i es un número impar y $k - 1$ un número par, luego $m_i \geq k$. De otro modo, si k es par, entonces m_i resulta ser un número par y $k - 1$ un número impar, luego $m_i \geq k$. Así,

$$o(G - S) = n \leq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} m_i \leq \frac{1}{k} k|S| = |S|.$$

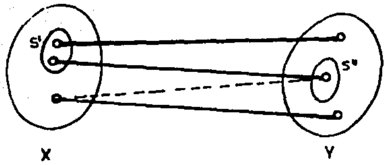
Por lo tanto la gráfica G tiene un apareamiento parfecto. □

El teorema que a continuación se presenta es una generalización del teorema de Hall para gráficas bipartitas.

Teorema 5.2. Una gráfica bipartita $G = (X, Y, A)$ tiene un apareamiento perfecto si y sólo si

$$|\Gamma(S)| \geq |S| \qquad\qquad \text{para todo } S \subseteq V(G).$$

Demostración. Supóngase que G tiene un apareamiento perfecto M. Puesto que M satura a cada vértice de G, M es un apareamiento que satura a cada vértice de X, entonces por el teorema de Hall 4.4, $|\Gamma(S')| \geq |S'|$ para todo $S' \subseteq X$. Análogamente M satura a cada vértice de Y, por lo tanto $|\Gamma(S'')| \geq |S''|$ para todo $S'' \subseteq Y$.



Sea $S = S' \cup S''$ con $S' \subseteq X$ y $S'' \subseteq Y$.

$$|S' \cup S''| = |S'| + |S''| - |S' \cap S''|.$$

Puesto que G es bipartita $S' \cap S'' = \emptyset$ y así,

$$|S' \cup S''| = |S'| + |S''|.$$

Por otro lado

$$\Gamma(S' \cup S'') = \Gamma(S') \cup \Gamma(S'')$$

$$|\Gamma(S' \cup S'')| \leq |\Gamma(S')| + |\Gamma(S'')| - |\Gamma(S' \cap S'')|.$$

Dado que G es bipartita

$$|\Gamma(S' \cup S'')| = |\Gamma(S')| + |\Gamma(S'')|$$

y así

$$|S' \cup S''| = |S'| + |S''| \leq |\Gamma(S')| + |\Gamma(S'')| = |\Gamma(S' \cup S'')|$$

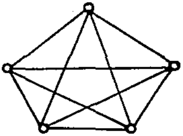
Por lo tanto

$$|S' \cup S''| = |S| \leq |\Gamma(S)| \text{ para todo } S \subseteq V(G).$$

Recíprocamente, supóngase que G es una gráfica bipartita en la cual se satisface que para todo $S \subseteq V(G)$, $|\Gamma(S)| \geq |S|$. En particular $|\Gamma(S')| \geq |S'|$ para todo $S' \subseteq X$, por el teorema de Hall 4.4, existe un apareamiento M que satura a cada vértice X, por lo tanto $|X| \leq |Y|$. Análogamente para todo $S'' \subseteq Y$, $|\Gamma(S'')| \geq |S|$, luego existe un apareamiento M' que satura a cada vértice de Y, por lo tanto $|Y| \leq |X|$. En consecuencia $|X| = |Y|$. M o M'es un apareamiento perfecto de G. Con ésto se concluye la demostración del teorema. □

En seguida se da un ejemplo para demostrar que la afirmación es falsa si se quita la hipótesis de que la gráfica G sea bipartita.

Considérese K_5 la cual no es bipartita, $|V(K_5)|$ es impar



$|\Gamma(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq V(K_5)$, sin embargo K_5 no tiene apareamiento perfecto.

El siguiente corolario es a veces presentado como el teorema del matrimonio: Si cada muchacha en una aldea conoce exactamente k muchachos y cada muchacho conoce exactamente a k muchachas, entonces cada muchacha puede casarse con un muchacho que ella conoce, y cada muchacho puede casarse con una muchacha que él conoce.

Corolario 5.3. Si G es una gráfica bipartita k-regular con $k > 0$, entoncés G tiene un apareamiento perfecto.

Demostración. Sea G una gráfica bipartita k-regular con bipartición (X , Y). Puesto que G es k-regular. $k|X| = |A(G)| = k|Y|$, ya que $k > 0$, $|X| = |Y|$. Sea S un subconjunto de X, A_1 y A_2 denotarán los conjuntos de aristas incidentes con los vértices de S y $\Gamma(S)$ respectivamente. Por definición de $\Gamma(S)$, $A_1 \subseteq A_2$. Por lo tanto

$$k|\Gamma(S)| = |A_2| \geq |A_1| = k|S|.$$

Luego $|\Gamma(S)| \geq |S|$ y en consecuencia, por el teorema 4.3, la gráfica G tiene un apareamiento M que satura a cada vértice de X. Puesto que $|X| = |Y|$, M es un apareamiento perfecto. □

Otro resultado relacionado con el teorema de Hall es aquel que se refiere a la búsqueda de un sistema de distintos representantes en una familia de subconjuntos, este problema incluye una nueva aplicación de la idea de aparear un conjunto X dentro de un conjunto Y.

Definición. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_m$ subconjuntos de un conjunto S, un sistema de distintos representantes para la familia $[A_1, A_2, \ldots, A_m]$ es un subconjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ de S tal que $a_i \in A_i$, $1 \le i \le m$, y $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$.

Proposición 5.1. La familia $[A_1, A_2, \ldots, A_m]$ tiene un sistema de distintos representantes si y sólo si $|\bigcup_{i\in J} A_i| \ge |J|$ para todo $J \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$.

Demostración. Sea G una gráfica bipartita con bipartición (X, Y) tal que

$$X = \{1, 2, \ldots, m\} \quad y \quad Y = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$$

$$a_i \text{ es adyacente en } G \text{ a } i \text{ si y sólo si } a_i \in A_i.$$

Supóngase que la familia $[A_1, A_2, \ldots, A_m]$ tiene un sistema de distintos representantes $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\} = R$. Sea

$$M = \{(a_i, i) / a_i \in R\}$$

M es un apareamiento que satura a cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ puesto que $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$. Así por el teorema de Hall 4.1, se tiene que $|\Gamma(J)| \ge |J|$ para todo $J \subseteq X$, pero

$$|\Gamma(J)| = |\bigcup_{i\in J} A_i| \quad \text{para todo } J \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$$

Por lo tanto $|\bigcup_{i\in J} A_i| \ge |J|$ para todo $J \subseteq X$.

Recíprocamente, supóngase que

$$|\bigcup_{i\in J} A_i| \ge |J| \quad \text{para todo } J \subseteq X$$

Del teorema de Hall se sigue que la gráfica G tiene un apareamiento M que satura a cada vértice de X, entonces el conjunto formado por los elementos $a_i \in A_i$ M-apareados respectivamente con $i \in X$, constituyen un sistema de distintos representantes para la familia $[A_1, A_2, \ldots, A_m]$. Con ésto se concluye la demostración de la proposición. □

Los arboles son un caso particular de gráficas bipartitas. La siguiente proposición da una condición necesaria y suficiente para que tales gráficas tengan un apareamiento perfecto.

Proposición 5.2. Un arbol T tiene un apareamiento perfecto si y sólo si $o(T - v) = 1$ para cualquier $v \in V(T)$.

Demostración. Supóngase que T tiene un apareamiento perfecto M. De donde $|V(T)|$ es par. Sea $v \in T$, existen G_1, $G_2, \ldots,$ G_n, con $n = \delta_T(v)$, componentes conexas de $T - v$. Puesto que T tiene un apareamiento perfecto, v está M-apareado con un vértice $u \in V(T)$ que pertenece a una única componente G_k, $k \in \{1,2,\ldots,n\}$. Luego, cada G_i con $i \neq k$ tiene un apareamiento perfecto, de donde, $|V(G_i)|$ es par. Ya que $|V(T)|$ es par, se tiene que $|V(G_k)|$ es impar. Por lo tanto $o(T - v) = 1$.

Recíprocamente, supóngase que $o(T - v) = 1$ para cualquier $v \in V(T)$. Sean G_1, $G_2, \ldots,$ G_n las componentes conexas de $T - v$, cada una de éstas es una gráfica conexa aciclica tal que no contiene un vértice u que sea adyacente en T a más de un vértice terminal, ya que, entonces $o(T - v) > 1$. Sea G_k la única componente de orden impar de $T - v$. Luego $|V(T)|$ es par. Es posible, entonces dar un apareamiento perfecto en cada una de las componentes de orden par en $T - v$. Por otro lado en la componente G_k existe un apareamiento que satura a todos sus vértices excepto a uno, éste puede ser apareado con v, ya que $o(T - w) = 1$ para cualquier $w \in V(G_k)$, y termina la demostración de la proposición. □

En esta sección, así como en las anteriores, se han analizado algunos aspectos teóricos de los apareamientos en gráficas bipartitas y en general. En la siguiente se rebizarán algunas de las técnicas de solución para los problemas de aplicación de la sección uno.

6. EL PROBLEMA DE ASIGNACION DE PERSONAL

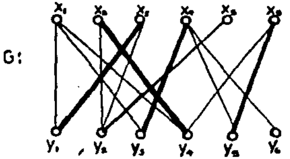
En cierta compañía, n trabajadores x_1, x_2,..., x_n están disponibles para realizar n tareas y_1, y_2,..., y_n, siendo cada trabajador calificado para una o más de éstas. ¿Podrían todos los hombres ser asignados, un hombre por tarea, en tareas para las cuales ellos están calificados?. Este es el problema de asignación de personal, para el cual se construye una gráfica bipartita G con bipartición (X ,Y), donde X = $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, Y = $\{y_1, y_2, y_n\}$ y x_i es adyacente a y_j en G si y sólo si el trabajador x_i está calificado para realizar la tarea y_j. La solución del problema depende de si G tiene o no un apareamiento perfecto. De acuerdo con el teorema de Hall una gráfica G tiene tal apareamiento o hay un subconjunto S de X tal que $|\Gamma(S)| < |S|$. A continuación se presentará un algoritmo que resuelve el problema de asignación de personal. Dada una gráfica bipartita G con bipartición (X , Y), se encuentra un apareamiento de G que sature cada vértice de X o, a falta de éste, se halla un subconjunto S de X tal que $|\Gamma(S)| < |S|$.

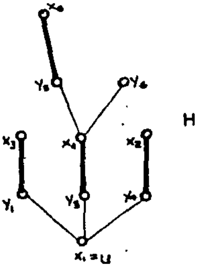
La idea básica detrás del algoritmo es simple. Empezar con un apareamiento arbitrario M. Si M satura a cada vértice de X, entonces éste es un apareamiento del tipo requerido. Si no, se selecciona un vértice u no M-saturado de X y sistemáticamente se busca una trayectoria M-aumentante τ con origen en u. El método para hallar la trayectoria τ si es que existe una, se describe con detalle más adelante: si τ existe $\overline{M} = M \Delta A(\tau)$ es un apareamiento más grande que M, y en consecuencia satura más vértices de X. Ahora puede repetirse el procedimiento con $\overline{M}$ en vez de M. Si la trayectoria τ no existe se considerá entonces el conjunto Z de todos los vértices que están conectados a u por una trayectoria M-alternada. Entonces (como en la prueba del teorema de Hall) $S = Z \cap X$ satisface $|\Gamma(S)| < |S|$.

Definición. Sea M un apareamiento de G, y sea u un vértice de X que no está M-saturado. Un árbol $H \subset G$ es llamado un árbol M-alternado arraigado en u si:

(i) $u \in V(H)$

(ii) para cada vértice v de H, la única uv-trayectoria en H es una trayectoria M-alternada.





La búsqueda de una trayectoria M-aumentante con origen en u involucra crear un árbol H M-alternado arraigado en u. Este procedimiento fué sugerido primeramente por Edmonds (1965).

Inicialmente H consiste únicamente del vértice u. Se desarrolla entonces un camino tal que en cualquier etapa, sucede uno u otro de los casos siguientes:

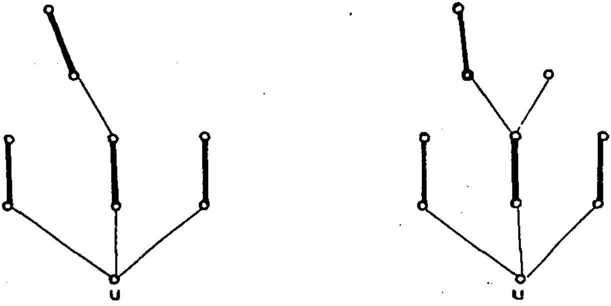
(i) Todo vértice de H excepto u están M-saturados y apareados bajo M.

(ii) H contiene un vértice no M-saturado diferente de u.

Si (i) es el caso (como lo es inicialmente) entonces, se establecen los conjuntos $S = V(H) \cap Y$, teniendo $T \subseteq \Gamma(S)$, así $\Gamma(S) = T$ o $\Gamma(S) \supset T$.

(a) Si $\Gamma(S) = T$ entonces, puesto que los vértices en $S - \{u\}$ están apareados con los vértices de T, $|\Gamma(S)| = |S| - 1$, lo cual indica que en G no existe un apareamiento que sature

todos los vértices de X.
(b) Si $\Gamma(S) \supset T$, hay un vértice w en Y − T adyacente a un vértice x de S. Puesto que todos los vértices de H excepto u están apareados bajo M, x = u o x está M-apareado a otro vértice de H. Por lo tanto la arista $xw \in M$.

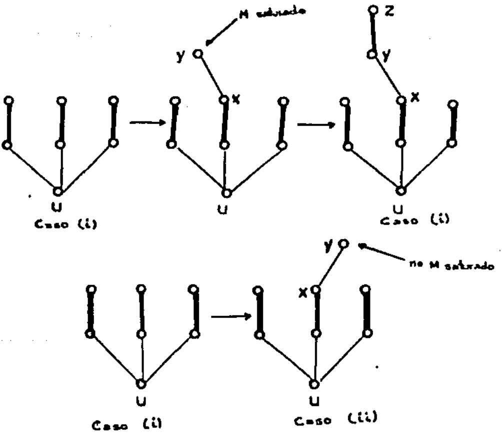


(a) (b)

Si w está M-saturado, con $wz \in M$, crear H añadiendo los vértices w, z y las aristas xw e wz. Si w no está M-saturado, crear H añadiendo el vértice w y la arista xw, resultando el caso (ii).

La uw-trayectoria en H es entonces una trayectoria M-aumentante con origen en u, como se requería. La figura siguiente ilustra el árbol creado mediante este procedimiento.

El algoritmo descrito anteriormente es conocido como el método Húngaro, y puede ser resumido en tres pasos.



Arbol creado mediante el procedimiento

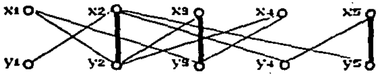
Método Húngaro:

Se inicia con un apareamiento arbitrario M.

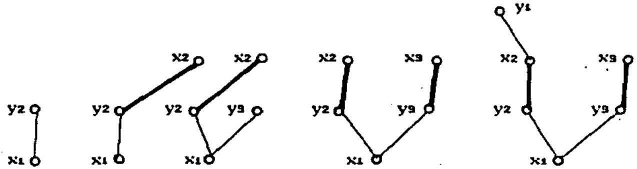
1. Si M satura a cada vértice de X, *alto*. En otro caso, sea u un vértice no M-saturado de X. Crear los conjuntos $S = \{u\}$ y $T = \emptyset$.

2. Si $\Gamma(S) = T$, entonces $|\Gamma(S)| < |S|$, puesto que $|T| = |S|-1$. *Alto*, ya que por el teorema de Hall, no existe un apareamiento que sature a cada vértice de X. En otro caso, sea $w \in \Gamma(S) - T$.

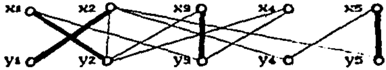
3. Si w está M-saturado, sea $wz \in M$. Reemplazar S por $S \cup \{z\}$ y T por $T \cup \{w\}$ e ir al paso 2. (Obsérvese que $|T| = |S| - 1$ se mantiene después de este reemplazo). En otro caso, sea τ una trayectoria M-aumentante. Reemplazar M por $M = M \Delta A(\tau)$ e ir al paso 1.



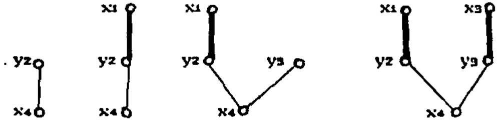
(a)



(b)



(c)



(d)

(a) Apareamiento M; (b) árbol M-alternado; (c) apareamiento M; (d) árbol M-alternado.

Considérese por ejemplo la gráfica de la figura (a) con apareamiento inicial $M = \{x_2y_2,\ x_3y_3,\ x_5y_5\}$. En la figura (b) se ilustra como crear un árbol M-alternado, iniciando en el vértice x_1, hallando una trayectoria M-aumentante $\tau = (x_1,\ y_2,\ x_2,\ y_1)$, resultando un nuevo apareamiento

$M' = \{x_1y_2, x_2y_1, x_3y_3, x_5y_5\}$ y un nuevo árbol M'-alternado desde x_4, figuras (c) y (d). Puesto que no hay una trayectoria M'-aumentante con origen en x_4, el algoritmo se da por terminado. El conjunto $S = \{x_1, x_3, x_4\}$, con conjunto de vecinos $\Gamma(S) = \{y_2, y_3\}$, muestra que en G no existe un apareamiento perfecto.

Puesto que el algoritmo puede ser cíclico, a través del procedimiento para crear un árbol, a lo más será necesario un tiempo de $|X|$ antes de establecer un $S \subseteq X$ tal que $|\Gamma(S)| < |S|$ o una trayectoria M-aumentante, el apareamiento inicial podrá ser incrementado en a lo más un tiempo de $|X|$ antes de establecer un apareamiento del tipo requerido. Es claro que el método Húngaro es un buen algoritmo. Uno puede iniciar el algoritmo con un apareamiento máximo en una gráfica bipartita.

El método Húngaro, descrito anteriormente es un camino eficiente para determinar con facilidad un asignamiento de tareas a trabajadores, si existe una. Sin embargo uno podría querer tomar en cuenta la eficiencia de los trabajadores en sus varias tareas (medida, a caso, por la ganancia de la compañía). En este caso uno está interesado en un asignamiento que maximice la eficiencia total de los trabajadores. El problema de hallar un asignamiento tal es conocido como el problema de asignación óptima.

EL PROBLEMA DE ASIGNACION OPTIMA

Considérese una gráfica bipartita completa con bipartición (X, Y) donde $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ y la arista x_iy_j tiene asignado un peso $w_{ij} = w(x_iy_j)$, que representa la eficiencia del trabajador x_i en la tarea y_j. El problema de asignación óptima es equivalente al de hallar un apareamiento perfecto con peso máximo en ésta gráfica pesada. Nos referiremos a tal apareamiento como un *apareamiento óptimo.*

Resolver el problema de asignación óptima es posible enumerando todos los $n!$ apareamientos perfectos y hallar un óptimo entre ellos. Sin embargo para n grande un procedimiento tal claramente sería muy ineficiente. En esta sección se presentará un buen algoritmo para hallar un apareamiento óptimo en una gráfica bipartita completa con pesos en las aristas.

Definición. Se define una *etiquetación factible* de vértices como una función l con valor real sobre el conjunto de vértices $X \cup Y$ tal que, para todo $x \in X$ y $y \in Y$

$$l(x) + l(y) \geq w(xy) \qquad (6.1)$$

(El número real $l(x)$ es llamado la etiqueta del vértice x). Una etiquetación factible de vértices es una etiquetación de los vértices tal que la suma de las etiquetas de los vértices extremos de una arista es al menos tan grande como el peso de la arista. No importa que pesos esten en la arista, siempre existe una etiquetación factible de vértices; una función l tal está dada por

$$\begin{aligned} l(x) &= \max_{y \in Y} w(xy) && \text{si} \quad x \in X \\ l(y) &= 0 && \text{si} \quad y \in Y \end{aligned} \qquad (6.2)$$

Si l es una etiquetación factible de vértices, se denota por E_l el conjunto de aquellas aristas para las cuales se satisface la igualdad en (6.1); que es

$$E_l = \{ xy \in A(G): l(x) + l(y) = w(xy) \}$$

La subgráfica generadora de G con conjunto de aristas E_l, es llamada la *subgráfica igualdad* correspondiente a la etiquetación factible l de vértices, la cual es denotada por G_l. La conexión entre la subgráfica igualdad y el apareamiento óptimo es mostrada en el teorema siguiente.

Teorema 6.1. Sea l una etiquetación factible de vértices en G. Si G_l contiene un apareamiento perfecto M, entonces M es un apareamiento óptimo de G.

Demostración. Supóngase que G_l contiene un apareamiento perfecto M . Puesto que G_l es una subgráfica generadora de G, M es también un apareamiento perfecto de G. Ahora

$$w(M) = \sum_{a \in M} w(a) = \sum_{v \in V(G)} l(v) \qquad (6.3)$$

ya que cada $a \in M$ pertenece a la subgráfiuca igualdad y los extremos de las aristas de M cubren cada vértice exactamente una vez. Por otra parte, si M' es un apareamiento perfecto de G, entonces

$$w(M') = \sum_{a \in M'} w(a) \leq \sum_{v \in V(G)} l(v) \qquad (6.4)$$

De (6.3) y (6.4) se sigue que $w(M) \geq w(M')$. Así, M es un apareamiento óptimo. Con ésto se concluye la demostración del teorema. □

El teorema anterior es la base de un algoritmo, debido a Kuhn (1955) y Munkres (1957), para hallar un apareamiento óptimo en una gráfica bipartita completa con pesos en las aristas. Se sigue de cerca el enfoque de Edmonds (1967).

Se inicia con una etiquetación factible de vértices l (por ejemplo la de (6.2)), determinar G_l, elegir un apareamiento arbitrario M en G_l y aplicar el método Húngaro. Si se establece un apareamiento perfecto en G_l entonces. por el teorema 6.1, este apareamiento es óptimo. De otro modo, el método Húngaro termina en un apareamiento M' que no es perfecto, y se tiene así un árbol M'-alternado H que no contiene una trayectoria M'-aumentante y por lo tanto no puede ser incrementado más en G_l. Modificar entonces l en una etiquetación factible de vértices l' con la propiedad de que tanto M' como H estén contenidos en $G_{l'}$ y H pueda ser incrementado en $G_{l'}$.

Tales modificaciones en la etiquetación factible de vértices son hechas, cada vez que sea necesario, hasta que se establezca un apareamiento perfecto en alguna subgráfica igualdad.

EL ALGORITMO DE KUHN-MUNKRES

Empezar con una etiquetación factible de vértices arbitraria l, determinar G_l, y elegir un apareamiento arbitrario en G_l.

1. Si X es M-saturado, entonces M es un apareamiento perfecto (puesto que $|X| = |Y|$) y así, por el teorema 6.1, un apareamiento óptimo; en este caso, *alto*. De otro modo, sea u un vértice que no está M-saturado. Definase $S = \{u\}$ y $T = \emptyset$.

2. Si $\Gamma_{G_l}(S) \supset T$, ir al paso 3. De otro modo, $\Gamma_{G_l}(S) = T$. Calcular

$$\alpha_l = \min_{\substack{x \in S \\ y \notin T}} \{l(x) + l(y) - w(xy)\}$$

y la etiquetación factible de vértices l' dada por

$$l'(v) = \begin{cases} l(v) - \alpha_l & \text{si } v \in S \\ l(v) + \alpha_l & \text{si } v \in T \\ l(v) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(Note que $\alpha_l > 0$ y que $\Gamma_{G_{l'}}(S) \supset T$). Reemplace l por l' y G_l por $G_{l'}$.

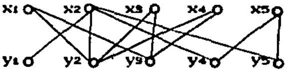
3. Elegir un vértice $y \in \Gamma_{G_l}(S) - T$. Como en el procedimiento de la sección anterior para incrementar un árbol, considérese si y está o no M-saturado. Si y está M-saturado, con $yz \in M$, reemplazar S por $S \cup \{z\}$ y T por $T \cup \{y\}$, e ir al paso 2. En otro caso, sea τ una uy-trayectoria M-aumentante en G_l, reemplazar M por $M' = M \Delta A(\tau)$, e ir al paso 1.

$$
\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

(a)

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{array} & \\
\begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 5 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{array} \\
\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} &
\end{array}
$$

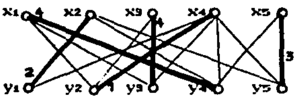
(b)



(c)

$$
\begin{array}{cc}
\begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{array} \\
\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} &
\end{array}
$$

(d)



(e)

Para ilustrar el algoritmo de Kuhn-Munkres, es conveniente representar una gráfica bipartita completa, G, con pesos en las aristas por una matriz $W = [w_{ij}]$, donde w_{ij} es el peso de la arista x_iy_j en G. Empezaremos con la matriz de la figura (a). En la figura (b), se muestra la etiquetación factible de vértices (6.2), (la etiqueta de x_i a la derecha de la fila i de la matriz y la etiqueta de y_j debajo de la columna j) y la entrada correspondiente a las aristas asociadas a la subgráfica igualdad están indicadas en tono más obscuro; la subgráfica igualdad está representada (sin pesos) en la figura (c). Esta gráfica no tiene apareamiento perfecto (el conjunto $S=\{x_1, x_3, x_4\}$ tiene como conjunto de vecinos $\{y_2, y_3\}$). Por lo tanto, se modifica la etiquetación factible de vértices inicial. Sea

$$M = \{x_2y_1, x_3y_2, x_4y_3, x_5y_5\}$$

un apareamiento arbitrario de G1. Aplicando el algoritmo de Kuhn-Munkres se obtienen sucesivamente los conjuntos:

$S =\{x_1\}$ y $T = 0$

$S = \{x_1, x_3\}$ y $T = \{y_2\}$

$S =\{x_1, x_2, x_3\}$ y $T = \{y_2, y_3\}$

Siendo en estos últimos $\alpha = \min_{\substack{x \in S \\ y \notin T}} \{l(x) + l(y) - w(xy)\} = 1$

($l'(x_1) = 5-1$, $l'(x_2) = l(x_2) = 2$, $l'(x_3)$ $4-1$, $l'(x_4) = 1-1$ $l'(x_5) = l(x_5) = 3$, $l'(y_1) = 0$, $l'(y_2) = 0+1$, $l'(y_3) = 0+1$, $l'(y_4) = 0$. $l'(y_5) = 0$). Así, se da una nueva etiquetación factible de vértices la cual se indica en la figura (d). Una aplicación del método Húngaro muestra que la subgráfica igualdad asociada a esta nueva etiquetación (figura (e)) tiene un apareamiento perfecto $M = \{x_1y_4, x_2y_1, x_3y_3, x_4y_2, x_5y_5\}$. Este mismo apareamiento es por lo tanto un apareamiento óptimo de G.

Otros algoritmos para hallar un apareamiento máximo en una gráfica, son resultado del examen de cuatro problemas relacionados con el de hallar un apareamiento de cardinalidad máxima en una gráfica en general o bipartita.

(1) Hallar un apareamiento de cardinalidad máxima en una gráfica bipartita.

(2) Hallar un apareamiento de cardinalidad máxima en una gráfica en general.

(3) Hallar un apareamiento máximo en una gráfica bipartita con pesos en las aristas.

(4) Hallar un apareamiento máximo en una gráfica en general con pesos en las aristas.

El primer algoritmo de tiempo polinomial para solucionar el problema (3) fué presentado por Khun (1955). Mientras que el primero de los algoritmos de tiempo polinomial para dar solución a los problemas (2) y (4) fué desarrollado por Edmonds (1965). Posteriormente basandose en los trabajos relevantes de este último se mejoran estos algoritmos.

Considerando a los algoritmos, para los cuatro problemas anteriores, como algoritmos secuenciales se tienen las siguientes cotas consideradas como las mejores hasta el momento. Para los problemas (1) y (2) se tiene una cota de $O(m\sqrt{n})$, $n = |V|$, el algoritmo para el problema (1) requiere de a lo más $n/2$ fases, es decir, de $O(n)$. Cada fase en éste consiste de la búsqueda de una trayectoria aumentante, dado que la búsqueda toma un tiempo $O(n)$, el algoritmo termina en un tiempo $O(mn)$. Para el problema (3) se tiene una cota de $O(n(m + n\ log\ n))$ y para el problema (4) de $O(n(m\log\log_{(m/n+1)} n + n\ \log n))$.

Al considerar estos mismos algoritmos en paralelo y restringiendo la atención a los algoritmos RNC (con número polinomial de procesos, tiempo polilogarítmico e involucración de aleatoriedad) se tienen algoritmos más simples. El tiempo esperado es de $O(\log^2 n)$ y así se mejora el proceso para los problemas (1) y (2) en $O(nm \cdot M(n))$, donde $M(n)$ es la complejidad del tiempo secuencial de multiplicación de matrices y para los problemas (3) y (4) es del $O(n(w^* + n^2) \cdot M(n))$, donde w^* es el máximo de los pesos de una arista de la gráfica correspondiente al problema. Todo esto puede hallarse con más detalle en (Traub, Grosz, Lampson and Nilsson) [24].

7. DEFICIENCIA, EXCEDENTE Y UN VISTAZO A LA TEORIA DE MATROIDES

Para tratar las gráficas bipartitas que no tienen apareamiento perfecto, se introducen los conceptos de deficiencia y excedente. El hecho de que estas funciones sean supermodular y submodular respectivamente se discutirá más adelante, así mismo serán consideradas en el marco general de matroides. Definiremos a continuación la noción de deficiencia en una gráfica bipartita la cual fué estudiada primeramente por Ore (1955).

Definición. Sea $G = (X, Y, A)$ una gráfica bipartita. Para cada $Z \subseteq X$ se define

$$\mathrm{def}_G(Z) = \mathrm{def}(Z) = |Z| - |\Gamma(Z)|$$

como el número correspondiente a la *deficiencia* del conjunto Z.

La máxima de las deficiencias, de todos los subconjuntos de X, será llamada la X-deficiencia de G. Si el conjunto X es sobrentendido, simplemente, será llamada la deficiencia de la gráfica G, y se denotará def(G). Obsérvese que si $\mathrm{def}(\emptyset) = 0$, entonces $\mathrm{def}(G) \geq 0$. El siguiente teorema es una consecuencia del teorema de König (o del teorema de Hall) presentado en la sección 4.

Teorema 7.1. Si $G = (X, Y, A)$ es una gráfica bipartita y M un apareamiento máximo de G, entonces

$$|M| = |X| - \mathrm{def}(G)$$

Demostración. Del teorema de König

$$|M| = |X-B| + |\Gamma_G(B)| \text{ para algún } B \subseteq X$$

de donde

$$|M| = |X| + (|\Gamma_G(B)| - |B|)$$

Por lo tanto $|M| = |X| - \mathit{def}(G)$. □

El lema que a continuación se enuncia es muy importante ya que caracteriza a la deficiencia.

Lema 7.1. Para cualesquiera dos subconjuntos W, Z $\subset X$ se tiene que

$$\mathrm{def}(W\cup Z) + \mathrm{def}(W\cap Z) \geq \mathrm{def}(W) + \mathrm{def}(Z) \qquad (7.1)$$

Demostración. Utilizando propiedades de conjuntos se tiene que

$$|W\cup Z| + |W\cap Z| = |W| + |Z| \qquad (7.2)$$

Así también $\Gamma(W\cup Z) = \Gamma(W) \cup \Gamma(Z)$ y

$$\Gamma(W\cap Z) \subseteq \Gamma(W) \cap \Gamma(Z)$$

de donde

$$|\Gamma(W\cup Z)| + |\Gamma(W\cap Z)| \leq |\Gamma(W)| + |\Gamma(Z)| \qquad (7.3)$$

Restando a (7.3) la igualdad en (7.2) se tiene que $|W\cup Z|-|\Gamma(W\cup Z)| + |W\cap Z|-|\Gamma(W\cap Z)| \geq |W|-|\Gamma(W)| + |Z|-|\Gamma(Z)|$ y termina la demostración del lema. □

Definición. Un conjunto $Z \subseteq X$ es llamado *ajustado* si $\mathrm{def}(Z) = \mathrm{def}(G)$.

Lema 7.2. La intersección y la unión de conjuntos ajustados son también conjuntos ajustados.

Demostración. Supóngase que Z y W son ajustados. Entonces el lado derecho de la desigualdad (7.1) es $2\mathrm{def}(G)$. El lado izquierdo de ésta es a lo más $2\mathrm{def}(G)$ ya que $\mathrm{def}(G)$ es por definición la máxima de las deficiencias. Luego $2\mathrm{def}(G) = \mathrm{def}(Z\cup W) + \mathrm{def}(Z\cap W)$. Por lo tanto $Z\cup W$ y $Z\cap W$ son conjuntos ajustados. □

Proposición. Si $G = (X, Y, A)$ es una gráfica bipartita tal que al suprimir una arista de G la *def(G) se* incrementa, entonces cada vértice de G tiene a lo más grado 1.

Demostración. Sea $d = \mathrm{def}(G)$. Supóngase que existe un vértice $x \in X$ tal que $\delta_G(x) > 1$ Sea $\Gamma(x) = \{y_1, y_2, \ldots, y_r\}$

por definición de d, se tiene que $1-r \leq d$. Sea $a = xy_i \in A(G)$, considérese la gráfica $G' = G - a$. Por hipótesis G' tendrá deficiencia mayor a d, luego, ésta contiene un conjunto $Z_i \subseteq X$, $Z \neq \emptyset$ tal que $\mathrm{def}_{G'}(Z_i) > d$. Dado que $\mathrm{def}_G(Z_i) \leq d$ (d es la máxima de las deficiencias), se sigue que Z_i debe ser, en G, un subconjunto ajustado tal que $x \in Z_i$ y además y_i sólo puede ser adyacente a un vértice de Z_i, a saber x. Entonces, del lema 7.2, el conjunto $Z_0 = Z_1 \cap \ldots \cap Z_r$ es un conjunto ajustado, que contiene a x. Si $Z_0 = \{x\}$, se tiene que $|\{x\}| - |\Gamma(x)| = 1 - r = d$. Puesto que $d \geq 0$, entonces $r = 0$ o $r = 1$. Sin embargo, se ha supuesto que $\delta_G(x) > 1$. Considérese entonces $Z' = Z_0 - x$, $Z' \neq \emptyset$.

$$
\begin{aligned}
|Z_0| - |\Gamma(Z_0)| &= |Z_0| - |x| + |x| - |\Gamma(x)| - |\Gamma(Z_0-x)| \\
&\leq |Z_0-x| - |\Gamma(Z_0-x)| + (1-r) \\
&< |Z_0-x| - |\Gamma(Z_0-x)| = \mathrm{def}_G(Z')
\end{aligned}
$$

Donde $d = \mathrm{def}_G(Z_0) < \mathrm{def}_G(Z')$, lo cual es una contradicción. Con ésto se concluye la demostración de la proposición. □

Algunas de estas ideas llevan a considerar la deficiencia de conjuntos no-vacíos tales que su deficiencia es negativa. Lo conveniente en este caso es cambiar de signo a la deficiencia, y definir entonces el excedente de una gráfica.

Definición. El *excedente* de un conjunto $Z \subseteq X$ se define como $\sigma_G(Z) = \sigma(Z) = |\Gamma(Z)| - |Z| = -\mathrm{def}(X)$.

El excedente de una gráfica G es el mínimo excedente de un subconjunto no vacío de X, y lo denotaremos por $\sigma(G)$. Obsérvese que $\mathrm{def}(G) = \max\{0, -\sigma(G)\}$. El lema 7.1 implica inmediatamente que

$$\sigma(W \cup Z) + \sigma(W \cap Z) \leq \sigma(W) + \sigma(Z) \tag{7.4}$$

En forma análoga a como se definio un conjunto ajustado en términos de la deficiencia, se tiene ahora una definición a través del excedente.

Definición. Un conjunto $Z \subseteq X$ es llamado σ-ajustado si $\sigma(Z) = \sigma(G)$.

Aprovechando los resultados que ya se han obtenido, podemos enunciar el siguiente lema.

Lema 7.3. Si dos conjuntos σ-ajustados tienen una intersección no vacía, entonces su intersección y su unión son también conjuntos σ-ajustados. □

El siguiente teorema, junto con el teorema de P. Hall, producen una buena caracterización del número $\sigma(G)$, ya que si $\mathrm{def}(G) > 0$, entonces $\sigma(G) = -\mathrm{def}(G)$, lo cual hace que sea suficiente considerar el caso en que $\mathrm{def}(G) = 0$.

Teorema 7.2. En una gráfica $G = (X, Y, A,)$, con $\mathrm{def}(G) = 0$, $\sigma(G)$ es el mayor entero s que satisface la siguiente propiedad para cada vértice $x \in X$: si se añaden s nuevos vértices a X y se conectan éstos con los vértices en $\Gamma(X)$, resulta una gráfica bipartita que tiene excedente no negativo.

Demostración. Primeramente se mostrará que $s = \sigma(G)$ tiene la propiedad formulada en el teorema. Sea $x \in X$, y sean $x_1, x_2, \ldots, x_s$, s nuevos vértices conectados a los vértices de $\Gamma(x)$. Ahora, mostraremos que ésto da origen a una gráfica bipartita G' en la que para cada $Z \neq \emptyset$, $Z \subseteq X \cup \{x_1, \ldots, x_s\}$ se tiene que $|\Gamma_{G'}(Z)| \geq |Z|$.

Caso 1. Si $Z \subseteq X$, entonces $|\Gamma_{G'}(Z)| = |\Gamma_G(Z)|$, luego $s = \sigma(G) = \min_{Z \subseteq X} \{ |\Gamma_G(Z)| - |Z| \}$ de donde

$$|\Gamma_{G'}(Z)| = |\Gamma_G(Z)| \geq |Z| + s \geq |Z|.$$

Caso 2. Si $Z \subset X$, entonces

$$|\Gamma_{G'}(Z)| = |\Gamma_G[(Z\cap(X-x)) \cup \{x\}]| \geq |(Z\cap(X-x)) \cup \{x\}| + s$$
$$\geq |Z\cap X| + s \geq |Z|.$$

De los casos 1 y 2 se concluye que G' tiene excedente no negativo. Ahora, asumamos que s es un número con la propiedad formulada en el teorema. Se mostrará que $s \leq \sigma(G)$; lo cual completará la demostración del teorema. Sea $Z \subseteq X$, $Z\neq\emptyset$. Seleccionando un vértice $z \in Z$, y añadiendo s nuevos vértices $z_1, \ldots, z_s$ a la gráfica G, conectados éstos a $\Gamma(z)$, la gráfica bipartita G, obtenida mediante este proceso tiene excedente no negativo (por hipótesis). Luego,

$$|\Gamma_G(Z)| = |\Gamma_{G'}(Z \cup \{z_1, \ldots, z_s\})| \geq |Z \cup \{z_1, \ldots, z_s\}|$$
$$= |Z| + s.$$

Por lo tanto $|\Gamma_G(Z)| - |Z| \geq s$, y termina la demostración del teorema. □

Al ver que el teorema 7.2 da una buena caracterización del excedente en una gráfica bipartita se considera lo siguiente: puede probarse que $\sigma(G) \geq s$ al exhibir que existe $|X| + s$ aristas independientes en cada una de las $|X|$ gráficas bipartitas obtenidas a partir de G al añadir s nuevos vértices y conectar a éstos a los vértices de $\Gamma(x)$, para algún $x \in X$. Por otro lado, puede también probarse que $\sigma(G) \leq s$ al exhibir un subconjunto $Z \subseteq X$, no vacío, tal que $|\Gamma(Z)| \leq |Z| + s$. Aún cuando el teorema 7.2 da una buena caracterización del excedente, la condición dada en éste no es muy clara. En el caso $\sigma(G) = 1$ puede darse una condición mucho más buena, antes de establecer ésta, se probará el siguiente resultado debido a Las Vergnas (1970) y Lovász (1970).

Lema 7.4. Sea G una gráfica bipartita con $\sigma(G) = s > 0$ tal que al suprimir una arista de G, $\sigma(G)$ decrece. Entonces cada vértice de X tiene grado $s + 1$.

Demostración. Sea $x \in X$, y $\Gamma(x) = \{y_1, \ldots, y_t\}$. Se desea mostrar que $t = s + 1$. Por definición de s, se tiene que $t \geq s + 1$. Al suprimir la arista xy_i en G, la gráfica $G' = G - xy_i$ tendrá excedente inferior a s, y así, ésta contiene un conjunto $Z_i \subseteq X$, $Z_i \neq \emptyset$ con $\sigma_{G'}(Z_i) < s$. Dado que $\sigma_G(Z_i) \geq s$, se sigue que Z_i debe ser, en G, un subconjunto σ-ajustado tal que $x \in Z_i$, y además, y_i debe ser adyacente a un sólo vértice de Z_i, a saber x. Entonces, del lema 7.3, el conjunto $Z_0 = Z_1 \cap \ldots \cap Z_t$ es un conjunto σ-ajustado. Ningún vértice de $\Gamma(x)$ es adyacente a algún vértice de $Z_0 - x$. Si $Z_0 = \{x\}$ se concluye que $|\Gamma(x)| - |\{x\}| = s$, es decir $|\Gamma(x)| = s + 1$. En otro caso, sea $Z_0 - x \neq \emptyset$, entonces $|\Gamma(Z_0-x)| - |Z_0-x| \geq s$, es decir $|\Gamma(Z_0-x)| \geq s + |Z_0-x|$. Luego

$$|\Gamma(Z_0)| = |\Gamma(x)|+|\Gamma(Z_0-x)| \geq (s+1)+(|Z_0-x|+s) = |Z_0|+2s,$$

es decir $s = |\Gamma(Z_0)| - |Z_0| \geq 2s$. Si $s \geq 2s$, entonces $s = 0$ pero $s > 0$. Por lo tanto se tiene una contradicción, ya que Z_0 es σ-ajustado. Luego $Z_0 = \{x\}$. Con ésto se concluye la demostración del lema. □

Se tiene entonces una caracterización del mínimo excedente positivo en una gráfica bipartita (con respecto a la eliminación de una arista). Como consecuencia, puede enunciarse el siguiente teorema que se refiere a las gráficas acíclicas en las que todos los vértice tienen grado dos.

Teorema 7.3. Una gráfica bipartita G tiene excedente positivo si y sólo si ésta contiene una gráfica acíclica H tal que cada vértice de X tiene grado dos en H.

Demostración. Supóngase que G contiene una gráfica acíclica H tal que cada vértice de X tiene grado dos en H. Sea $Z \subseteq X$, $Z \neq \emptyset$, tal que

$$\sigma(G) = \sigma_G(Z) = |\Gamma_G(Z)|-|Z| = |\Gamma_H(Z)|-|Z| = 2|Z|-|Z|$$

$$\sigma(G) = |Z| \geq 0$$

Luego, $\sigma(G) > 0$ ya que $Z \neq 0$.

Recíprocamente, supóngase que G tiene excedente positivo. Sea H la subgráfica mínima de G que contiene a todos los vértices de X tal que $\sigma(H) > 0$. Sea $a \in A(H)$ y sea $H' = H-a$, entonces $\sigma(H') < \sigma(H)$, ya que H es mínima de las subgráficas de G con excedente positivo. Ningún vértice de H tiene grado uno, ya que $\sigma(G) > 0$. Del lema 7.4 se sigue que, cada vértice de X tiene grado dos en H (H subgráfica mínima de G) Ahora, supóngase que H contiene un ciclo $\mathscr{C}$, luego los vértices $V(\mathscr{C}) \cap X$ tienen excedente 0, lo cual no puede ocurrir ya que $\sigma(H) > 0$. Por lo tanto H es acíclica, y termina la demostración del teorema. □

Las gráficas con excedente positivo juegan un papel importante en la estructura de la teoría de apareamientos en gráficas. A si mismo, expresiones como (7.1), (7.2) y (7.3), son importantes en las distintas ramas de la combinatoria.

Definición. Una función $f: 2^S \longrightarrow \mathbb{R}$, es llamada *submodular* si ésta satisface:

$$f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \leq f(X) + f(Y) \qquad (X, Y \subseteq S).$$

Es llamada *supermodular* si

$$f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \geq f(X) + f(Y) \qquad (X, Y \subseteq S)$$

Una función es llamada *modular* si ésta es submodular y supermodular. Obsérvese que el excedente, la deficiencia y la cardinalidad son funciones submodular, supermodular y modular respectivamente sobre el conjunto de vértices de una gráfica bipartita. Si la gráfica considerada no es bipartita, la propiedad de submodularidad y supermodularidad en el excedente y la deficiencia no se satisface en general. El siguiente lema se utilizará para verificar la propiedad de submodularidad en una función.

Lema 7.5. Una función f definida sobre los subconjuntos de un conjunto finito S es submodular si y sólo si la función $f(X\cup\{a\}) - f(X)$ es monótona decreciente sobre los subconjuntos de $S - a$, para cada $a \in S$.

Demostración. Sean $X \subset Y \subseteq S-a$. Supóngase que f es submodular. $f(Y\cup\{a\}) + f(X) = f[(X\cup\{a\})\cup Y] + f[(X\cup\{a\})\cap Y]$ ya que $X \subset Y$. Por otro lado, puesto que f es submodular se tiene que $f[(X\cup\{a\})\cup Y] + f[(X\cup\{a\})\cap Y] \leq f(X\cup\{a\}) + f(Y)$, de donde $f(Y\cup\{a\}) + f(X) \leq f(X\cup\{a\}) + f(Y)$. Por lo tanto

$$f(Y\cup\{a\}) - f(Y) \leq f(X\cup\{a\}) - f(X) \quad \text{para } X \subset Y \subseteq S - a.$$

Recíprocamente, supóngase que la función $f(x\cup\{a\}) - f(X)$ es monótona decreciente sobre los subconjuntos de $S - a$, para cada $a \in S$. Sean $X, Y \subseteq S - a$ tales que $X \subset Y$, entonces $f(X \cup \{a\}) - f(X) \geq f(Y\cup\{a\}) - f(Y)$, luego

$$f(X\cup\{a\})+f(Y) \geq f(Y\cup\{a\})+f(X) = f[(X\cup\{a\})\cup Y]+f[(X\cup\{a\})\cap Y].$$

Haciendo $X' = X \cup \{a\}$ se tiene que

$$f(X') + f(Y) \geq f(X'\cup Y) + f(X'\cap Y).$$

Por lo tanto, f es submodular sobre los subconjuntos de S. $\square$

A continuación se presentan algunos ejemplos de funciones submodulares y supermodulares. En algunos de estos ejemplos la verificación de la (super o sub)-modularidad no es completamente trivial.

Ejemplo 7.1. Si δ es una función definida sobre los elementos de un conjunto finito S y

$$f(X) = c + \sum_{a\in X} \delta(a)$$

con c un número real, entonces f es una función modular.

Esto es para X, Y $\subseteq$ S

$$f(X) = c + \sum_{a\in X}\Phi(a) \quad \text{y} \quad f(Y) = c + \sum_{a\in Y}\Phi(a)$$

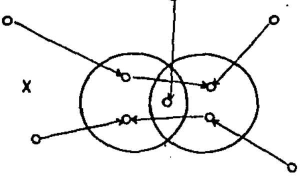
$$f(X)+f(Y) = 2c + \sum_{a\in X-(X\cap Y)}\Phi(a) + \sum_{a\in X\cap Y}\Phi(a) + \sum_{a\in Y-(X\cap Y)}\Phi(a) + \sum_{a\in X\cap Y}\Phi(a)$$

$$= 2c + \sum_{a\in X\cup Y}\Phi(a) + \sum_{a\in X\cap Y}\Phi(a) = f(X\cup Y) + f(X\cap Y).$$

Recíprocamente, cada función modular puede ser obtenida de esta forma.

Definición. Una digráfica D, es una gráfica dirigida que consiste de un conjunto no vacío $V(D)$, de vértices, y un multi-conjunto de parejas ordenadas F(D), de distintos elementos de $V(D)$, llamadas flechas.

Ejemplo 7.2. Sea D una digráfica, $\rho(X)$ denotará el número de flechas de D que entran al conjunto X $\subseteq$ $V(D)$. ρ resulta ser una función submodular sobre los subconjuntos de $V(D)$. Puesto que para cualesquiera dos conjuntos X, Y $\subseteq$ $V(D)$ $\Gamma_D^+(X\cup Y) = \Gamma_D^+(X) \cup \Gamma_D^+(Y)$ y $\Gamma_D^+(X\cap Y) \subseteq \Gamma_D^+(X) \cap \Gamma_D^+(Y)$. De donde $|\Gamma_D^+(X\cup Y)| + |\Gamma_D^+(X\cap Y)| \leq |\Gamma_D^+(X)| + |\Gamma_D^+(Y)|$.
(las flechas con un extremo en X-Y y otro en Y-X, sólo están contadas en $\rho(X\cup Y) + \rho(X\cap Y)$. Por lo cual no puede afirmarse que ρ sea modular).



Ejemplo 7.3. Sea $G = (V, A)$ una gráfica, para cada $A' \subseteq A$ $c(V, A')$ denotará el número de componentes conexas de la gráfica (V, A') con conjunto de vértices $V(G)$ y conjunto de aristas A'. Sea $r(A') = |V(G)| - c(V, A')$. La función $c(A') = c(V, A')$ es una función supermodular y $r(A')$ es una función submodular. Primeramente, puede obsérvarse que para cualesquiera dos conjuntos $A_1, A_2 \subseteq A$

$$c(A_1 \cap A_2) \geq c(A_1) + c(A_2) - c(A_1 \cup A_2)$$

Es decir,

$$c(A_1 \cap A_2) + c(A_1 \cup A_2) \geq c(A_1) + c(A_2) \qquad (7.4)$$

Ahora

$$r(A_1) = |V(G)| - c(A_1) \text{ y } r(A_2) = |V(G)| - c(A_2)$$

$$\begin{aligned} r(A_1) + r(A_2) &= 2|V(G)| - c(A_1) - c(A_2) \\ &\geq r(A_1 \cup A_2) + r(A_1 \cap A_2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $r(A')$ es una función submodular.

Ejemplo 7.4. Sea una gráfica $G = (V, A)$ y $B \subseteq V$ un conjunto de vértices independientes. Sea $f(X) = c(G-X)$ para cada $X \subseteq B$. La función f es una función supermodular. Para verificar esto, considérese $X' = A(G-X)$, para cada $X \subseteq B$.

$$X' = \{uv\colon u \in B-X \text{ y } v \in B^c\} \cup \{uv\colon u,v \in B^c\}$$

$$Y' = \{uv\colon u \in B-Y \text{ y } v \in B^c\} \cup \{uv\colon u,v \in B^c\}$$

Las aristas de $(X \cap Y)' = X' \cup Y'$ y las aristas de $(X \cup Y) = X' \cap Y'$. Para esto se usa el hecho de que B es un conjunto independiente, o más exactamente, que no existen aristas que conecten $X-Y$ a $Y-X$. Considerando, ahora, la función r definida en el ejemplo anterior se tiene que $f(X) = c(G-X) = c(V(G), X') - |X| = |V(G)| - |X| - r(X')$. Luego

$$\begin{aligned} f(X) + f(Y) &= 2|V(G)| - (|X| + |Y|) - [r(X') + r(Y')] \\ &\leq 2|V(G)| - (|X \cup Y| + |X \cap Y|) - [r(X' \cup Y') + r(X' \cap Y')] \\ &= f(X \cup Y) + f(X \cap Y). \ \square \end{aligned}$$

Ejemplo 7.5. Sea M una matriz. S denotará el conjunto de columnas de M. Para cada $X \subseteq S$, sea $r(X)$ el rango de la matriz formada por las columnas de X. La función r resulta ser una función submodular. Para verificar esto, considérese $a \in S$ tal que $a \notin Y$ entonces $r(Y\cup\{a\}) = r(Y)$ o $r(Y\cup\{a\}) = r(Y) + 1$. Por otro lado $r(X\cup\{a\}) \geq r(X)$, o bien $-r(X\cup\{a\}) \leq -r(X)$, si $r(Y\cup\{a\}) = r(Y)$, entonces $r(Y\cup\{a\})-r(X\cup\{a\}) \leq r(Y) - r(X)$, de donde

$$r(Y\cup\{a\}) - r(Y) \leq r(X\cup\{a\}) - r(X).$$

Si $r(Y\cup\{a\}) = r(Y) + 1$ entonces $r(Y\cup\{a\}) - r(Y) = 1$ y $r(X\cup\{a\}) - r(X) = 1$. Por lo tanto la función $r(X\cup\{a\}) - r(X)$ es una función monótona decreciente sobre los subconjuntos de $S-a$. Del lema 7.5 se sigue que $r(X)$ es una función submodular sobre los subconjuntos de S.

Ejemplo 7.6. Nuestro último ejemplo está relacionado a la teoría de apareamientos en gráficas bipartitas. Sea $G=(X,Y,A)$. Para cada $B \subseteq X$, $r(B)$ denotará el máximo número de vértices en B que pueden ser apareados con los vértices de Y; es decir, si M es un apareamiento máximo de $G - (X-B)$ entonces $r(B) = |M|$. Del teorema 7.1 se tiene que

$$r(B) = |B| + \min \{\sigma(C) \ / \ C \subseteq B\}.$$

Luego, $r(B)$ es una función submodular ya que el excedente es una función submodular. De hecho, si f es una función submodular entonces f_1 definida como $f_1(X) = \min \{f(Y) \ / \ Y\subseteq X\}$ es también submodular.

Las funciones de los ejemplos 7.3, 7.5 y 7.6 tienen algunas propiedades adicionales: $r(\emptyset) = 0$, r es monótona decreciente y $r(\{x\}) \leq 1$ para cada $x \in S$. El conjunto S, para el cual existe una función submodular r con las características anteriores, es llamado una *matroide* y a r se le llama la *función rango* de la matroide.

Para ser más precisos, sea S un conjunto y r una función de $2^S \longrightarrow Z^+$. Entonces r es llamada una función *rango matroide* sobre S si se satisfacen las siguientes tres condiciones:

(a) Si $X \subseteq S$ entonces $r(X) \leq |X|$,

(b) si $X \subseteq Y \subseteq S$ entonces $r(X) \leq r(Y)$,

(c) si $X,Y \subseteq S$ entonces $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$.

La pareja (S, r) es llamada una *matroide* si r es una función rango-matroide sobre S.

Las matroides son de gran importancia en combinatoria y en la teoría de gráficas. Algunas ideas teóricas en matroides son repetidamente encontradas en la teoría de apareamientos. Una característica importante de las matroides es que uno tiene varias alternativas para definirlas, de las cuales sólo discutiremos otra: la definición en términos de conjuntos independientes. Para una mejor comprensión del tratamiento de éstas ver Welsh (1973) y von Randow (1975).

Definición. Sea (S, r) una matroide. Un conjunto $X \subseteq S$ es *independiente* si $r(X) = |X|$.

Un conjunto que no es independiente es llamado *dependiente* y un conjunto mínimo dependiente (con respecto a la inclusión) es denominado un *circuito*. De la definición de independencia se desprenden las siguientes condiciones:

(I - 1) $\emptyset$ es independiente.

(I - 2) Si X es independiente y $B \subseteq X$ entonces B es independiente.

(I - 3) Si X y B son independientes y $|X| > |B|$ entonces existe un elemento $x \in X - B$ tal que $B \cup \{x\}$ es independiente.

Alternativamente, si M es una familia de subconjuntos de S, tal que en M se satisfacen las condiciones (I-1), (I-2) y (I-3), entonces M es la familia de los conjuntos independientes de una matroide única. (llamando a los elementos de M conjuntos independientes).

Así que una matroide se puede definir en un conjunto S, si se tiene una familia M de conjuntos que se llamarán independientes en el caso de que valgan (I-1), (I-2), (I-3).

Definición. El *rango* de un conjunto X es igual al tamaño del máximo subconjunto independiente, es decir $r(X) = |M|$.

Obsérvese que dada la submodularidad de la función rango, cada conjunto X tiene sólo un conjunto máximo, con la propiedad de que su rango es igual al rango de X; este superconjunto se denomina la *cerradura* de X. Un conjunto X es *cerrado* si X coincide con su cerradura; es decir, si al añadir un nuevo elemento a X aumenta su rango. Una matroide trivial en la que cada conjunto es independiente (o equivalentemente en la que el rango de un conjunto es igual a su cardinalidad) es llamada una *matroide libre*. Las funciones submodulares y las matroides dan origen a un número de importantes teoremas minimax, que a menudo generalizan el teorema fundamental minimax en teoría de gráficas, tales como los teoremas de König, Menger y otros.

El teorema que a continuación se enuncia, muestra una interesante analogía entre las parejas de conceptos submodular-supermodular y convexo-concavo. Esta analogía puede ser más explotadá aún (ver Lovász (1983)). La demostración que aquí se presenta usa una idea similar a la de Halmos-Vaughn en la demostración del teorema de Hall.

Teorema 7.4. Si f es una función submodular y g una función supermodular definidas sobre el conjunto S, tales que $f \geq g$, entonces, existe una función modular h tal que $f \geq h \geq g$. Si se añade la hipótesis de que f y g son de valor entero, entonces h es una función de valor entero.

Demostración. Se usará inducción sobre $|S|$. Para $|S|=1$ se tiene que f y g son funciones modulares, de donde $h = f$ o $h = g$. Ahora, asumiendo que existe una función f_1 submodular de valor entero tal que $f \geq f_1 \geq g$, $f_1 \neq f$. Bastaría hallar una función modular que separe f_1 de g. O bien sería suficiente probar el teorema en el caso en que no exista una función submodular de valor entero que separa a f de g (excepto f misma). Sin pérdida de generalidad puede definirse $f(0) = 0$. Ahora, si

$$f(S-a) + f(a) = f(S) \qquad \text{para cada } a \in S \qquad (7.5)$$

entonces f, resultaría ser una función modular. Para verificar ésto es suficiente usar la propiedad de monotonicidad de la función diferencia $f(X) - f(X-a)$. Supóngase que $a \in X \subset S$, entonces de la submodularidad de f se tiene que

$$f(X-a) + f(a) \geq f[(X-a) \cup \{a\}] + f[(X-a) \cap \{a\}]$$

O bien

$$f(X-a) + f(a) \geq f(X) + f(0) \qquad (7.6)$$

Por lo tanto, al ser f submodular, la función $f(X \cup \{a\}) - f(X)$ es monótona decreciente, $a \in S$, entonces

$$f[(X-a) \cup \{a\}] - f(X-a) \geq f[(S-a) \cup \{a\}] - f(S-a)$$

O bien

$$f(X) - f(X-a) \geq f(S) - f(S-a) \qquad (7.7)$$

Así, de (7.6) y (7.7) se tiene que

$f(a) = f(a) - f(0) \geq f(X) - f(X-a) \geq f(S) - f(S-a) = f(a)$, de donde $f(X) = f(X-a) + f(a)$.

Haciendo nuevamente una inducción probaremos que

$$f(X) = \sum_{a \in X} f(a)$$

Para $X = \{a_0\}$ se tiene que $f(X) = f(a_0)$. supóngase ahora que

$$f(X-a_0) = \sum_{a \in X-a} f(a) \qquad \text{con } a_0 \in X.$$

Por otro lado $f(X) = f(X-a_0) + f(a_0)$ de donde

$$f(X) = \sum_{a \in X-a} f(a) + f(a_0) = \sum_{a \in X} f(a).$$

La función $f(X)$ definida de esta forma es una función modular. Ahora, supóngase que existe un elemento $a \in S$ tal que $f(S-a) + f(a) > f(S)$, en este caso se define una nueva función

$$f_1(X) = \begin{cases} \min\,[f(X),\ f(X-a) + f(a) - 1] & \text{si } a \in X, \\ f(X) & \text{si } a \notin X. \end{cases}$$

La función f_1 resulta ser una función submodular. Antes de verificar ésto veremos que

$$\min\,[f(X),\ f(X-a) + f(a) - 1] = f(X-a) + f(a) - 1, \quad X \subseteq S$$

y $a \in X$. Ya que f es submodular se tiene que

$$f[(X-a) \cup \{a\}] - f(X-a) \geq f(X \cup \{a\}) - f(X)$$

O bien,

$$f[(X \cup \{a\}) - a] + f(X) \geq f(X \cup \{a\}) + f(X-a)$$

es decir,

$$f[X \cup \{a\}] - f(a) + f(X) \geq f(X \cup \{a\}) + f(X-a)$$

de donde $f(X) \geq f(X-a) + f(a)$. Por lo tanto

$$f(X) \geq f(X-a) + f(a) - 1.$$

Para verificar la submodularidad de f_1 consideraremos los siguientes tres casos:

Caso 1. Si $a \in X$ y $a \in Y$, $X, Y \subseteq S$, entonces

$$\begin{aligned} f_1(X) + f_1(Y) &= f(X-a) + f(Y-a) + 2f(a) - 2 \\ &\geq f[(X-a) \cup (Y-a)] + f[(X-a) \cap (Y-a)] + 2f(a) - 2 \\ &= f[(X \cup Y) - a] + f[(X \cap Y) - a] + 2f(a) - 2 \\ &= f_1(X \cup Y) + f_1(X \cap Y). \end{aligned}$$

Caso 2. Si $a \notin X$ y $a \notin Y$, entonces

$$f_1(X) + f_1(Y) = f(X) + f(Y) \geq f(X\cup Y) + f(X\cap Y)$$
$$= f_1(X\cup Y) + f_1(X\cap Y).$$

Caso 3. Si $a \in X$ y $a \notin Y$, entonces

$$f_1(X) + f_1(Y) = f(X-a) + f(a) - 1 + f(Y)$$
$$\geq f[(X-a)\cup Y] + f[(X-a)\cap Y] + f(a) - 1$$
$$= f[(X\cup Y)-a] + f_1(X\cap Y) + f(a) - 1$$
$$= f_1(X\cup Y) + f_1(X\cap Y).$$

Luego, $f \geq f_1$ y $f \neq f_1$ ya que $f_1(a) = f(a) -1$. Podemos suponer entonces que $f_1 \geq g$, es decir, supongamos que existe un conjunto Z tal que $f_1(Z) < g(Z)$. Además para cualquier conjunto Z, $f_1(Z) \geq f(Z) - 1$, por definición de f_1. Luego $f_1(Z) = f(Z) - 1 = g(Z) - 1$. Así, existe un conjunto $Z \neq \emptyset$ y $Z \neq S$ tal que $f(Z) = g(Z)$. Consideremos ahora las funciones f y g restringidas a Z. Por la hipótesis de inducción existe una función módular h_1 sobre Z que separa a f y g. Por otro lado consideremos a $f(Z\cup X)$ y $g(Z\cup X)$ como dos funciones sobre $S - Z$, las cuales resultan ser submodular y supermodular respectivamente. Nuevamente por hipótesis de inducción existe una función modular h_2 sobre $S - Z$ que las separa. Definamos

$$h(X) = h_1(X\cap Z) + h_2(X-Z) - f(Z)$$

sobre todos los subconjuntos de S, h es una función modular que separa a f y g. Verificaremos primeramente la propiedad de modularidad. Sean $X, Y \subseteq S$

$$h(X)+h(Y) = h_1(X\cap Z)+h_2(X-Z)-f(Z) + h_1(Y\cap Z)+h_2(Y-Z)-f(Z)$$
$$= h_1[(X\cap Z)\cup(Y\cap Z)]+h_1[(X\cap Z)\cap(Y\cap Z)]+h_2[(X-Z)\cup(Y-Z)]-2f(Z)$$
$$= h_1[(X\cup Y)\cap Z] + h_2[(X\cup Y)-Z] + h_1[(X\cap Y)-Z] - 2f(Z)$$
$$= h(X\cup Y) + h(X\cap Y).$$

La segunda afirmación se sigue de

$$h(X) = h_1(X\cap Z) + h_2(X-Z) - f(Z) \leq f(X\cap Z) + f(X\cup Z) - f(Z)$$
$$\leq f(X) \quad \text{(ya que } f \text{ es submodular).}$$

Por otro lado

$h(X) = h_1(X\cap Z) + h_2(X-Z) - f(Z) \geq g(X\cap Z) + g(X-Z) - g(Z)$

$\geq g(X)$ $(f(Z)=g(Z)$, g es supermodular$)$.

Con ésto terminamos la demostración del teorema. □

Observación. El teorema 7.4 puede ser usado para obtener un gran número de resultados en combinatoria, tales como los teoremas de König y Menger, de orientación de gráficas y otros. En este trabajo se exponen sólo algunas de estas consecuencias, como por ejemplo el siguiente resultado.

Teorema (Teorema de Intersección de Matroides) 7.5. Supóngase que (S, r_1) y (S, r_2) son dos matroides sobre el mismo conjunto. El número máximo de elementos de un conjunto independiente común de las dos matroides es igual al mínimo de $r_1(X) + r_2(S-X)$ sobre todos los $X \subseteq S$.

Demostración. Sea $k = \min\{r_1(X) + r_2(S-X) \ / \ X \subseteq S\}$ y sean

$$f(X) = \min\,[k, r_1(X)],$$
$$g(X) = \max\,[0, k-r_2(S-X)].$$

f es una función submodular ya que $\min\,[k, r_1(X)] = r_1(X)$, r_1 es submodular, g es una función supermodular ya que

$\max\,[0, k-r_2(S-X)] = k - r_2(S-X)$ y

$$\begin{aligned} g(X) + g(Y) &= k - r_2(S-X) + k - r_2(S-Y) \\ &\leq 2k - r_2(S-X\cup Y) - r_2(S-X\cap Y) \\ &= g(X\cup Y) + g(X\cap Y). \end{aligned}$$

Además, por la definición de k, $f \geq g$. Del teorema 7.4 se sigue que existe una función modular h de valor entero que separa a f y g. Puesto que $f(0) = g(0) = 0$, se tiene que $h(0) = 0$, dado que $0 \leq g(a) \leq f(a) \leq 1$ para cada $a \in S$, se tiene que $h(a) = 0$ ó 1. Sea $A = \{a \in S \ / \ h(a) = 1\}$ y $h(X) = |X\cap A|$ para cada $X \subseteq S$. Luego, $h(A) = |A| \leq f(A)$ y

Luego,

$$|M| = \min \{rx[V(B)\cap X] + ry[V(A(G)-B)\cap Y] \;/\; B \subseteq A(G)\}$$

$$= \min \{rx(F\cap X) + ry(F\cap Y) \;/\; F \text{ es un cubrimiento por vértices de } G\}.$$

$(V(B) \cup [V(A(G)-B)]$ forma un cubrimiento en G), termina la demostración del teorema. □

El teorema de König (1931) puede ser obtenido determinando $rx(W) = |W|$ y $ry(Z) = |Z|$ para cada $W \subseteq X$ y $Z \subseteq Y$.

A grandes rasgos se termina con esta sección un desarrollo de los apareamientos en gráficas bipartitas, por medio del cual ha sido posible detectar la utilidad de éstos en la solución de problemas que con frecuencia se presentán en los diferentes sistemas sociales y naturales en los que interviene el hombre, así como visualizar el alcance teórico de este concepto en la teoría de gráficas.

Cabe hacer mención que el concepto de apareamiento, que fué el punto central del presente trabajo, puede desarrollarse aún más a través de la teoría de espacios independientes. Lo cual permite tener una visión más general de éste en el campo de estudio de las matemáticas.

$r_1(A) \leq |A|$ lo cual implica que A es independiente en (S,r_1) y que $|A| \leq k$. Por otro lado, $0 = h(S-A) \geq g(S-A)$ lo cual implica que $0 \geq k - r_2(A)$ es decir $r_2(A) \geq k$. Luego $|A| \leq k \leq r_2(A) \leq |A|$, es decir $r_2(A) = |A| = k$, lo cual implica que A es un conjunto independiente común de las dos matroides, de tamaño k. Ahora el hecho de que un conjunto independiente B, común de dos matroides no sea de cardinalidad mayor que k se sigue de que si X es un subconjunto tal que minimiza $r_1(X) + r_2(S-X)$ entonces

$$|B| = |B\cap X| + |B\cap(S-X)| = r_1(B\cap X) + r_2(B\cap(S-X))$$

ya que B es un conjunto independiente. Por otro lado

$$\begin{aligned} r_1(B\cap X) + r_2(B\cap(S-X)) &\leq r_1(X)+r_1(B)-r_1(B\cup X)+r_2(B)+r_2(S-X)- \\ &\quad -r_2(B\cup(S-X)) \\ &\leq r_1(X) + r_2(S-X). \end{aligned}$$

Por lo tanto $|B| = r_1(X) + r_2(S-X) = k$. Con ésto termina la demostración del teorema. □

A continuación se enuncia otra versión del teorema de Intersección de Matroides, la cual es una generalización del teorema de König (Aigner y Dowling (1971)).

Teorema 7.6. Sea G una gráfica bipartita con bipartición (X, Y) y sean (X, r_X) y (Y, r_Y) dos matroides. **La cardinalidad máxima de un apareamiento de G, que es un conjunto independiente en ambas matroides, es igual al mínimo rango de un cubrimiento por vértices, es decir, el mínimo de $r_X(F\cap X) + r_Y(F\cap Y)$, sobre todos los cubrimientos por vértices F.**

Demostración. Sea $S = A(G)$, $r_1(B) = r_X(V(B)\cap X)$, $r_2(B) = r_Y(V(B)\cap Y)$. Sea M un apareamiento máximo de G tal que M es un conjunto independiente común a ambas matroides. Del teorema de Intersección de matroides se sigue que

$$|M| = \min \{r_1(B) + r_2(S-B) \ / \ B \subseteq S\}.$$

REFERENCIAS

[1] Aigner, M. and Dowling, T. A. (1971). Matching Theory for Combinatorial Geometries, Trans. Amer. Math. Soc. 158, 231-245. MR44 # 3898.

[2] Anderson, I. (1971). Perfect Matchings of a Graph. J. Combinatorial Theory B, 10, 183-86.

[3] Berge, Claude. Mathematical Library Graphs, North-Holland.

[4] Berge, Claude. (1957). Two Theorems in Graph Theory. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 43, 842-44.

[5] Dulmage, A. L. and Mendelsohn, N. S. (1961). Some Graphical Properties of Matrices with Non-negative entries. Mimeo, Univ. Alberta.

[6] Edmonds, J. (1965). Paths, Trees and Flowers. Canad. J. Math., 17, 449-67.

[7] Edmonds, J. (1967). An Introduction to Matchings, notes of lectures delivered at the University of Michigan (unpublished).

[8] Edmonds, J. and Giles, R. (1977). A min-max relation for submodular functions on graphs, studies in Integer Programming, Eds.: P. L. Hammer, E. L. Johnson and B. H. Korte, Ann. Discrete Math., 1, North-Holland, Amsterdam, 185-204. MR57 # 165.

[9] Edmonds, J. (1970). Submodular Functions, Matroids, and Certain Polyhedra. Combinatorial Structures and their aplications, Eds.: R. Guy, H. Hanani, N. Saver and J. Schonheim Gordon and Breach, New York, 69-87. MR42 # 5828.

[10] Egervary, E. (1931). On Combinatorial Properties of Matrices, Math. Lapok, 38. 16-28 (Hungarian with German summary). Jbuch. 57. 1340.

[11] Erdos, P. and Gallai, T. (1959). On Maximal Paths and Circuits of Graphs. Acta. Math. Sc. Hungar., 10, 337-356.

[12] Hall, P. (1935). On Reprentatives of Subsets. J. London Math. Soc., 10, 26-30.

[13] Harary, Frank. (1969). Graph Theory. Ed. Addison Wesley, 47-48.

[14] Konig, D. (1931). Graphs and Matrices (Hungarian). Mat. Fiz. Lapok, 38, 116-19.

[15] Kuhn, H. W. (1955). The Hungarian Method for the Assignment Problem. Naval Res. Logist. Quart., 2, 82-97.

[16] Kuhn, H. W. (1956). Variants of the Hungarian Method for Assignment Problems, Naval Res. Logist. Quart. 3, 253-258. MR19 # 1024.

[17] Lovász, L. and Plummer, M. D. Annals of Discrete Mathematics, North-Holland.

[18] Lovász, L. (1970). A Generalization of König's Theorem, Acta. Math. Acad. Sc. Hungar., 21, 443-446. MR42 # 5811.

[19] Lovász, L. (1975). Three Short Proofs in Graph Theory. J. Combinatorial Theory, B, 19, 111-13.

[20] Lovász, L. (1983). Submodular Functions and Convexity, Mathematical Programming, the state of the Art.: Boon, 1982, Eds.: A. Bachem, M. Grötschel and B. Korte, Springer-Verlang, Heidelberg. 235-257.

[21] Munkres, J. (1957). Algorithms for the Assignment and Transportation Problems. J. Soc. Indust. Appl. Math., 5, 32-38.

[22] Norman, R. Z. and Rabin, M. O. (1959). An Algorithm for a Minimum Cover of a Graph. Proc. Amer. Math. Soc., 10, 1959, 315-319.

[23] Petersen, J. (1891). Die Theorie der Regularen Graphs. Acta Math., 15, 193-220.

[24] von Randow, R. (1975). Introduction to the Theory of Matroids, Lecture Notes in Econom. and Math. Systems 109, Springer-Verlang, Berlin. MR52 # 10460.

[25] Traub, Grosz, Lampson and Nilsson. (1986). Annual Review of Computer Science. Vol. 1. Ed. Anual Reviews INC.

[26] Tutte, W. T. (1947). The Factorization of Linear Graphs. J. London Math. Soc., 22, 107-11.

[27] Welsh, D. J. A. (1976). Matroid Theory, Academic Press. London, MR55 # 148.